

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA



FACULTAD DE INGENIERÍA

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE CONTROLADORES ROBUSTOS SIN
MEDICIÓN DE VELOCIDAD PARA SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIA EN
SISTEMAS MECÁNICOS

TESIS PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

POR:

MISAEAL HALI MEDINA BARRERA

DIRECTOR DE TESIS:

RAÚL RASCÓN CARMONA

Mexicali, Baja California, México, agosto 2019

RESUMEN

Los controladores para sistemas mecánicos son una parte fundamental en el desarrollo de la industria, todo sistema mecánico que tiene un movimiento controlado, necesita de un algoritmo que manipule los actuadores del mismo. La optimización de estos controladores mejoran el desempeño de los sistemas mecánicos, haciéndolos más robustos, precisos o rápidos.

En la presente tesis se estudia un controlador robusto con convergencia en tiempo finito llamado Terminal Sliding Mode (TSM). También se propone un algoritmo de control para seguimiento de trayectoria en sistemas de segundo orden con la importante característica de no contar con mediciones de velocidad para lograr el objetivo de control considerando, también, robustez ante perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas que afectan el desempeño del sistema en lazo cerrado. Se agregan algunos términos a este controlador para mejorar su desempeño tales como un estimador de perturbaciones y una modificación al algoritmo para convertirlo en un controlador discontinuo con comportamiento robusto. Se desarrolla una prueba de estabilidad para cada uno de los controladores presentados. Posteriormente se ilustra el desempeño de los controladores al aplicarlos a un mecanismo de 2 g.d.l. con eslabones rotacionales horizontales.

AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas que han contribuido al proceso y conclusión de este trabajo. Primeramente doy gracias a Dios por permitirme vivir y tener tan buena experiencia dentro de la universidad. Quiero agradecer también al Dr. Raúl Rascón Carmona, director de esta tesis y mi maestro durante estos dos años: fue el primero en creer en este proyecto, me apoyo de manera personal e institucional y me alentó para que concluyera esta investigación. Agradezco a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, donde me he formado y he recibido apoyo de todo tipo, por convertirme en un ser profesional en lo que tanto me apasiona. Gracias a cada maestro que hizo parte de este proceso integral de formación que deja como resultado; esta tesis, que perdurara dentro de los conocimientos y desarrollo de las demás generaciones. Le agradezco y hago presente mi gran afecto hacia ustedes, mi familia y mis padres por creer en mi, por sus aportes, su amor, su apoyo y permitirme cumplir con excelencia el desarrollo de esta tesis.

ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	13
1.1	Planteamiento del problema	13
1.2	Contexto histórico	13
1.3	Objetivo general	14
1.4	Objetivos específicos	14
1.5	Antecedentes	15
1.6	Justificación	16
2	PRELIMINARES MATEMÁTICOS	17
2.1	Definiciones básicas	17
2.1.1	Modelado en el espacio de estados	17
2.2	Análisis de estabilidad	18
2.2.1	Estabilidad de Lyapunov	18
2.2.2	Método directo de Lyapunov	21
2.3	Modelado de sistemas mecánicos	22
2.3.1	Modelado de sistema mecánico con 2 g.d.l.	23
3	CONTROL ROBUSTO	29
3.1	Formulación de Control Robusto	29
3.2	Control por Modos Deslizantes (CMD)	30
3.2.1	Principios de CMD de primer orden	30
3.2.2	Chattering	32
3.2.3	Regularización	32
3.2.4	Análisis matemático	35
4	DISEÑO DE CONTROLADOR TERMINAL SLIDING MODE (TSM)	41
4.1	Diseño de controlador	41
4.2	Análisis de estabilidad	44
4.3	Experimentos	45
4.4	Resultados	46
5	CONTROLADOR SIN MEDICIÓN DE VELOCIDAD	49
5.1	Diseño de controlador	49
5.1.1	Estabilidad del sistema en lazo cerrado	50
5.1.2	Simulación	51
5.2	Estimador de perturbaciones e incertidumbres	52
5.2.1	Estabilidad del estimador de perturbaciones	54
5.2.2	Estabilidad del sistema en lazo cerrado con el estimador de perturbaciones	55
5.3	Extensión para sistemas mecánicos de n g.d.l.	57
5.3.1	Prueba de estabilidad	58
5.3.2	Experimento	60

5.3.3	Resultados	62	
5.4	Diseño de controlador discontinuo sin medición de velocidad		70
5.4.1	Estabilidad en lazo cerrado	72	
5.4.2	Experimentos	73	
5.4.3	Resultados	73	
6	CONCLUSIÓN	79	

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Estabilidad [19]	20
Figura 2.2	Estabilidad asintótica [19]	20
Figura 2.3	Robot tipo SCARA	23
Figura 2.4	Espacio de trabajo de robot SCARA	24
Figura 3.1	Condición para existencia de régimen deslizante	31
Figura 3.2	Fenómeno chattering	32
Figura 3.3	Función saturación $sat(s)$ y función sigmoid $sig(s)$.	33
Figura 3.4	Solución de ecuaciones discontinuas de Filippov	34
Figura 3.5	Convergencia asintótica de la posición	37
Figura 3.6	Convergencia asintótica de la velocidad	38
Figura 3.7	Variable deslizante	38
Figura 3.8	Retrato de fase	39
Figura 3.9	Señal de control	39
Figura 4.1	Superficie deslizante	43
Figura 4.2	Medición de la posición	47
Figura 4.3	Medición de error de posición	48
Figura 4.4	Comparación de señal de control	48
Figura 5.1	Posición x_1 (Simulación)	52
Figura 5.2	Error de posición e_1 (Simulación)	52
Figura 5.3	Amplitud de error de posición e_1 (Simulación)	53
Figura 5.4	Señal de control u (Simulación)	53
Figura 5.5	Robot SCARA de 2 g.d.l.	62
Figura 5.6	Medición de posición x_1 eslabón 1 (experimento sin perturbación)	63
Figura 5.7	Medición de posición x_1 eslabón 2 (experimento sin perturbación)	63
Figura 5.8	Error de posición e_1 eslabón 1 (experimento sin perturbación)	64
Figura 5.9	Error de posición e_1 eslabón 2 (experimento sin perturbación)	64
Figura 5.10	Señal de control u eslabón 1 (experimento sin perturbación)	65
Figura 5.11	Señal de control u eslabón 2 (experimento sin perturbación)	65
Figura 5.12	Amplitud error de posición e_1 eslabón 1 (experimento sin perturbación)	66
Figura 5.13	Amplitud error de posición e_1 eslabón 2 (experimento sin perturbación)	66
Figura 5.14	Medición de posición x_1 eslabón 1 (experimento con perturbación)	67
Figura 5.15	Medición de posición x_1 eslabón 2 (experimento con perturbación)	67
Figura 5.16	Error de posición e_1 eslabón 1 (experimento con perturbación)	68
Figura 5.17	Error de posición e_1 eslabón 2 (experimento con perturbación)	68
Figura 5.18	Señal de control u eslabón 1 (experimento con perturbación)	69
Figura 5.19	Señal de control u eslabón 2 (experimento con perturbación)	69

Figura 5.20	Amplitud error de posición e_1 eslabón 1 (experimento con perturbación)	70
Figura 5.21	Amplitud error de posición e_1 eslabón 2 (experimento con perturbación)	70
Figura 5.22	Medición de posición eslabón 1	74
Figura 5.23	Medición de posición eslabón 2	74
Figura 5.24	Error de posición eslabón 1	75
Figura 5.25	Error de posición eslabón 2	75
Figura 5.26	Acercamiento del error de posición eslabon 1	76
Figura 5.27	Acercamiento del error de posición eslabon 2	76
Figura 5.28	Señal de control para eslabon 1	77
Figura 5.29	Señal de control para eslabon 2	77

ÍNDICE DE TABLAS

Cuadro 4.1	Parámetros experimentales	47
Cuadro 5.1	Parámetros robot SCARA	61
Cuadro 5.2	Ganancias del controlador	61
Cuadro 5.3	Condiciones iniciales	61
Cuadro 5.4	Ganancias del controlador	73

ACRÓNIMOS

PIB - Producto Interno Bruto
 INEGI - Instituto Nacional de Estadística y Geografía
 MD - Modos Deslizantes
 CMD - Control por Modos Deslizantes
 SEV - Sistemas de Estructura Variable
 TSM - Terminal Sliding Mode
 NTSM - Non-singular Terminal Sliding Mode
 SCARA - Selective Compliance Assembly Robot Arm
 GDL - Grados De Libertad

SISO - Single Input - Single Output

MDPO - Modos Deslizantes de Primer Orden

DAQ - Data Acquisition

INTRODUCCIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es muy común encontrar sistemas en donde el vector de estado no se encuentra disponible completamente para realizar mediciones directamente, lo que obstaculiza el diseño del controlador. En sistemas mecánicos, por ejemplo, regularmente no se cuenta con sensores de velocidad y la tarea de medir la velocidad del sistema se vuelve una desventaja dentro de la tarea de control. Para solucionar esto se debe encontrar un sustituto para el vector de estado, una opción es derivar alguna de las salidas disponibles un determinado número de veces para poder construir el vector de estado, con este método se obtiene una medición instantánea de la velocidad, pero poco confiable debido a una cantidad de ruido que se añade a la señal de la medición. Otra posible solución es crear un observador, el cual consiste en hacer copia del modelo del sistema real, alimentarlo con las mismas entradas que el sistema original y agregar ganancias de corrección, y así usar el vector de estado del modelo como una aproximación a la medición desconocida del sistema [24], pero si las condiciones iniciales no fueron establecidas correctamente o hay perturbaciones o incertidumbres, entonces el modelo creado podrá tener retrasos y no estimar la medición desconocida acertadamente. El agregar un observador, un filtro o un diferenciador aumenta la dificultad de la tarea de diseño del controlador ya que se tiene que diseñar una prueba de estabilidad para el observador y otra en lazo cerrado que contenga el sistema, el controlador y al observador funcionando al mismo tiempo. En el mejor de los casos, se puede diseñar un observador con convergencia en tiempo finito, una vez que la velocidad proporcionada por el observador sea igual a la velocidad real, entonces entra en ejecución el controlador, simplificando la segunda prueba de estabilidad al uso solamente del sistema y del controlador, teniendo la prueba de estabilidad del observador aparte.

1.2 CONTEXTO HISTÓRICO

La industria de la manufactura es el sector económico más importante de Baja California con el 20.9% del producto interno bruto (PIB) del estado. Dentro de los subsectores económicos en la manufactura, el más importante tomando en cuenta su participación en el PIB manufacturero estatal es el de Equipo de cómputo, electrónico y transporte el cual representa el 41.4% del PIB manufacturero del estado, según datos del INEGI del 2014. Mexicali cuenta con un sector industrial bastante amplio y dinámico, se ha desarrollado principalmente en el ramo de alimentos, automotriz, metal mecánica, envases de vidrio, electrónica, plástico y textil. Otras ramas industriales que también se desarrollan en Mexicali son la fabricación y ensamble de artículos eléctricos y electrónicos, tractocamiones, remolques de carga y maquiladoras de juguetes.

La industria es una de los motores económicos más importantes de la región, en 2014 la Secretaría de Economía reportó en el Atlas de complejidad económica de México, que en Baja California el 43.6% de las exportaciones se derivaron del sector de electrónicos seguido de maquinaria con un 24.5% y vehículos de transporte con 17%.

Mexicali está posicionado en un área muy fuerte industrialmente hablando, dando lugar a oportunidades de desarrollo e innovación en temas tecnológicos con un fuerte impacto económico en el estado de Baja California.

La fuerza de un país depende de su capacidad para innovar tecnología, de manera que, con el avance de los conocimientos y su aplicación se aumenta la calidad y los procesos de producción se vuelven más complejos y especializados. El uso de tecnología más avanzada aumenta la demanda de la mano de obra calificada, misma que tiene una remuneración más alta. Al rededor de los años 60 se empezaron a introducir robots a las líneas de producción de la industria. Los robots ofrecen ventajas como: incremento de la productividad, reducción de costos, mejora la calidad del producto, reducción de problemas de operación en ambientes peligrosos para los trabajadores, por eso, hoy en día la palabra robot es sinónimo de automatización. El control automático es un factor clave dentro de la automatización, y es que día con día se trabaja para mejorar los algoritmos que controlan los sistemas mecánicos como los robots, optimizando los tiempos de reacción, aumentando la precisión de sus movimientos, simplificando su diseño y reduciendo los costos de fabricación y producción.

1.3 OBJETIVO GENERAL

El presente trabajo pretende optimizar los controladores para sistemas mecánicos de segundo orden de una entrada y una salida, y lagrangianos, diseñando un controlador robusto para seguimiento de trayectoria sin utilizar la parte diferencial o la medición de la velocidad.

1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar y estudiar controladores robustos.
- Diseñar un algoritmo de control para sistemas mecánicos de segundo orden y lagrangianos, sin contar con la medición de la velocidad, con el objetivo de seguimiento de trayectoria.
- Agregar robustez al controlador diseñado, considerando incertidumbres y perturbaciones externas.
- Diseñar la prueba de velocidad en lazo cerrado.

1.5 ANTECEDENTES

Usualmente a la hora de modelar la dinámica de un sistema real, se presentan discrepancias entre el sistema real y su modelo matemático. Estas diferencias son producidas, por lo general, por incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas y parámetros desconocidos de la planta. El reto más interesante y desafiante de la teoría de control moderno, es diseñar una ley de control válida para obtener el rendimiento deseado del sistema en lazo cerrado frente a estas perturbaciones, a este método se le llama control robusto.

El Control por Modos Deslizantes (CMD) es uno de los métodos más eficientes para controlar perturbaciones e incertidumbres acotadas. Este método nació como un modo especial a partir de los Sistemas de Estructura Variable (SEV), estos sistemas cambian su estructura en tiempo real para lograr un mejor desempeño en donde sistemas con una estructura fija podrían ser inestables. El CMD presenta un comportamiento robusto antes perturbaciones y su objetivo es llevar las trayectorias del sistema a una superficie deslizante, mantenerlas ahí bajo una ley de control y llevarlas hacia el origen. Las características principales del control por modos deslizantes son la insensibilidad a perturbaciones e incertidumbres, buena precisión y convergencia asintótica de las trayectorias del sistema al punto de equilibrio [31]. El primer texto citado en inglés sobre CMD fue publicado en 1976 por U. Itkis [17].

En 1993 fue publicado un artículo en el *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* por S. T. Venkataraman y S. Gulati donde proponían una nueva variante al CMD llamada Terminal Sliding Mode (TSM), en el cual las trayectorias del sistema llegan al punto de equilibrio en tiempo finito [35] y el tiempo de convergencia puede ser ajustado sintonizando los parámetros del algoritmo. Aunque el TSM mejoraba el desempeño de los controladores en comparación al CMD tradicional, cuenta con una desventaja: existe la posibilidad de una singularidad que desestabiliza el sistema bajo ciertas condiciones. Más adelante en 2002, Xinghuo Yu publica un método que evita esta singularidad y mantiene las ventajas del TSM, al cual llama Nonsingular Terminal Sliding Mode (NTSM) para sistemas dinámicos no lineales [39]. Otros trabajos de Xinghuo Yu sobre TSM son [37] y [38], entre otros. Se han realizado diferentes variantes de TSM que mejoran su desempeño en diferentes aplicaciones, algunos de estos trabajos que siguen la línea de investigación de TSM son [25], [36] y [40].

En la mayoría de los trabajos relacionados con el control de trayectoria para sistemas mecánicos, el vector de la velocidad debe estar disponible para la retroalimentación del controlador, sin embargo, es muy raro encontrar sistemas que cuenten con un sensor que mida directamente la velocidad, por esta razón se utilizan técnicas que reemplacen la velocidad como el uso de observadores o diferenciadores, en los siguientes trabajos se pueden ver ejemplos de estos: [4], [15] y [30]. Diversos métodos han surgido para trabajar con sistemas mecánicos sin medición de la velocidad, por ejemplo, en [13] se presenta un trabajo más reciente sobre un algoritmo de estabilización en tiempo finito, en donde se hace una compensación para la perturbación, se usa la derivada sucia y se aplica la teoría de modos deslizantes. En [23] se plantea un control de trayectoria para sistemas Euler-

Lagrange con grado alto relativo arbitrario, donde su principal contribución es establecer un fundamento teórico del uso de la "derivada sucia", un reemplazo para las mediciones que no se encuentran disponibles, tales como la velocidad, sin el uso de observadores, pero utilizando filtros pasa bajas para suavizar la señal de retroalimentación. En [29] se da una solución al problema de seguimiento global exponencial de sistemas mecánicos sin medición de velocidad, el cual es obtenido combinando un rediseño de un observador de velocidad invariante con inmersión estable exponencial y un controlador con retroalimentación de un nuevo estado. En [41] se maneja un problema de seguimiento de trayectoria distribuido en tiempo finito de agentes en una red con múltiples dinámicas de Euler-Lagrange con la ayuda de un observador de modos deslizantes de segundo orden. Los siguientes trabajos [9], [21], [22], emplean algún método para sustituir la medición de la velocidad, ya sean filtros, observadores o estimadores.

1.6 JUSTIFICACIÓN

La competitividad industrial promueve la optimización de sus sistemas, el control automático juega un papel importante en esta tarea, la mejora de los algoritmos de control se ve reflejado tanto económicamente como en la calidad de los productos o servicios que brindan los sistemas mecánicos controlados. Los controladores que requieren una retroalimentación del vector de estado, incluyendo la medición de la velocidad, tienen una área importante de mejora, ya que los sistemas mecánicos que cuentan con sensores directos de velocidad son muy escasos. A la hora de diseñar un controlador, se tiene que buscar un sustituto para esta medición, ya sea derivando algunas de las salidas disponibles o diseñando un observador. El uso de estas soluciones puede no siempre dar el resultado esperado, además de aumentar la dificultad de diseño. Al aplicar un controlador que no requiere la medición de la velocidad, se simplifica la tarea de diseño, debido a que se evita realizar una prueba de estabilidad adicional para el observador, o también se evita comprometer la estabilidad del controlador debido al ruido de las mediciones en las señales causado por el uso de un diferenciador.

2.1 DEFINICIONES BÁSICAS

Las siguientes definiciones, extraídas de [26], ayudan a comprender los términos básicos para después analizar los sistemas de control:

Variable controlada es la cantidad o condición que se mide y controla. La señal de control o variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Por lo general, la variable controlada es la salida del sistema. Controlar significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar la desviación del valor medido respecto del valor deseado.

Planta. Una planta puede ser parte de un equipo, tal vez un conjunto de los elementos de una maquina que funcionan juntos, y cuyo objetivo es efectuar una operación particular. En esta tesis se llamara planta a cualquier objeto físico que se va a controlar (sistema mecánico).

Sistema Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Un sistema no esta necesariamente limitado a los sistemas físicos. El concepto de sistema se puede aplicar a fenómenos abstractos y dinámicos. Por tanto, la palabra sistema debe interpretarse en u sentido amplio que comprenda sistemas físicos, biológicos, económicos y similares.

Perturbaciones. Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, mientras que una perturbación externa se genera fuera del sistema y es una entrada.

2.1.1 Modelado en el espacio de estados

El modelo de un sistema dinámico de dimensión n se representa con la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(x, u, t) \quad (2.1)$$

donde x es un vector de la forma $x = [x_1, x_2, x_3; \dots; x_n]$.

Si el sistema es variante en el tiempo, entonces t esta explicita en la ecuación y se le denomina sistema autónomo.

En un sistema se tienen 2 ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, t) - \text{Ecuación de estado} \\ \dot{y}(t) &= g(x, u, t) - \text{Ecuación de salida.} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si se linealizan las ecuaciones de estado y de salida (2.2) alrededor del estado de operación, se tienen las siguientes ecuaciones de estado y salida linealizadas:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde A se le llama matriz de estado, B es la matriz de entrada, C es la matriz de salida y D es la matriz de transmisión directa.

2.2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Para el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos, se requiere la definición de algunos conceptos matemáticos que ayudan la comprensión de estos.

Teorema de Sylvester

Este teorema establece que una función cuadrática del tipo $V(x) = x^T Ax > 0$ es definida positiva si la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva ($A > 0$) para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$. La matriz A es definida positiva si cumple con las siguientes condiciones [14]:

- La matriz A debe ser simétrica $A = A^T$.
- El primer elemento de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ debe ser positivo, $a_{11} > 0$.
- Todos los determinantes menores deben ser positivos, consecuentemente el determinante de la matriz es $|A| > 0$.

Es importante notar que en el caso de funciones cuadráticas definidas positivas $V(x) = x^T Ax > 0$ se requiere que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sea simétrica, debido a la propiedad de antisimetría $V(x) = x^T A_{sk} x > 0$, por lo que $V(x) = x^T A_s x > 0$. La matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ es no singular, es decir que existe la matriz inversa $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la cual también es definida positiva. Otra propiedad es que todos sus valores propios son números reales positivos: $\lambda_i \{A\} > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ [14].

Elemento supremo

Cuando se habla de una cota superior, se utilizará el concepto de *supremo* para definir esa cota. Definición: Si X es un subconjunto de \mathbb{R} , se dice que un número real β es una cota superior de X si, para cualquier elemento $x \in X$, se cumple que $x \leq \beta$ y se escribe como $\beta = \sup X$ [3].

2.2.1 Estabilidad de Lyapunov

La teoría de estabilidad de Lyapunov es de las más usadas en el área de ingeniería debido a que proporciona propiedades matemáticas que facilitan el análisis y diseño de

controladores. Su principal objetivo es estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos lineales y no lineales descritos por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = f(t, x) \quad x(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

En esta teoría se busca que la energía acumulada del sistema dentro del dominio de atracción caiga al evolucionar el tiempo, hasta alcanzar un valor mínimo en su punto de equilibrio, para toda condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable.

Para ayudar a comprender mejor el concepto de la estabilidad en el sentido de Lyapunov, es necesario definir los siguientes conceptos: equilibrio, estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial.

Equilibrios

El punto $x_e \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema si

$$f(t, x_e) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

Por lo general se utiliza el origen del espacio de estado \mathbb{R}^n , $x = 0$. Si este no es el caso, se traslada el punto del origen del espacio de estado mediante un cambio de coordenadas.

Estabilidad

Para explicar el concepto de estabilidad definiremos el origen $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ como punto de equilibrio, el cual es estable (en el sentido de Lyapunov) si para cada número $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$, tal que:

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon \quad t \geq 0 \quad (2.6)$$

donde $x(t)$ es la solución de (2.5), la cual empieza en su condición inicial $x(0)$ en t_0 . Lo anterior significa que el origen es un equilibrio estable si para toda condición inicial acotada, las soluciones también están acotadas. Gráficamente se expresa en la figura 2.1.

Estabilidad asintótica

Se dice que el origen $x = (0) \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable, gráficamente expuesto en la figura 2.2 si cumple las condiciones [8]:

- El origen es estable.
- El origen es atractivo, lo que significa que existe un número $\delta' > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta' \implies \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

La estabilidad asintótica pasa a ser de forma global si:

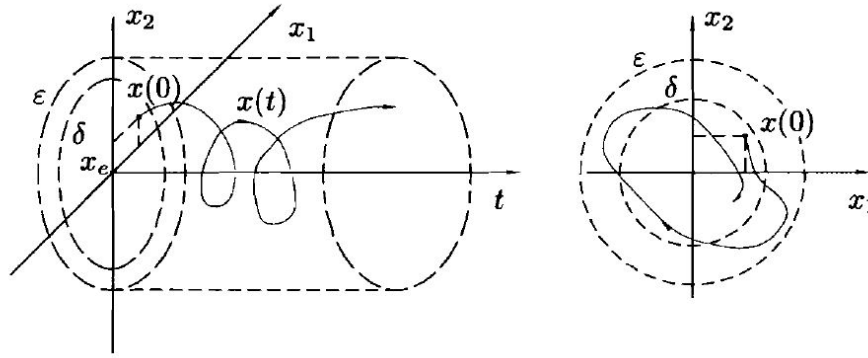


Figura 2.1: Estabilidad [19]

- El origen es estable.
- El origen es atractivo globalmente, es decir:

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

El punto de equilibrio es asintóticamente estable globalmente si se mantienen las mismas condiciones de una estabilidad asintótica para toda condición inicial.

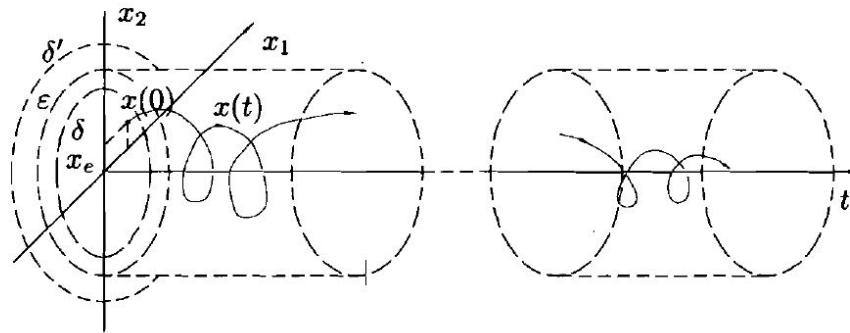


Figura 2.2: Estabilidad asintótica [19]

Estabilidad exponencial global

El origen $x = 0$ es un equilibrio exponencialmente estable de forma global si existen constantes positivas α y β tales que:

$$\|x(t)\| \rightarrow \alpha \|x(0)\| e^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Un equilibrio exponencialmente estable de forma global también es un equilibrio asintóticamente estable de forma global, pero lo contrario no es necesariamente verdadero.

2.2.2 Método directo de Lyapunov

En el método directo o segundo método de Lyapunov se propone una función $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ la cual es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ de la ecuación $\dot{x} = f(x, t)$ si cumple:

- $V(t, x)$ es una función definida positiva localmente.
- $\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}$ es una función continua con respecto a t y x .
- $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ es una función continua con respecto a t y x .

Esto quiere decir, que una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es cualquier función definida positiva localmente y continuamente diferenciable.

La derivada de la función de Lyapunov es denotada como $\dot{V}(t, x)$ y está dada por:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{d}{dt} V(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)^T}{\partial x} f(t, x).$$

Si la función anterior no depende explícitamente del tiempo y la función $\dot{x} = f(x, t)$ es autónoma, entonces la derivada tampoco dependerá explícitamente del tiempo:

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)^T}{\partial x} f(t, x).$$

La función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ para la ecuación $\dot{x} = f(x, t)$ es una función de Lyapunov, si su derivada a lo largo de las trayectorias satisface:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{al menos para } \|x\| \text{ pequeña.}$$

Estabilidad

El origen es un punto de equilibrio estable si hay una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ con derivadas parciales continuas con respecto a x , cuya derivada temporal satisfaga:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{para una } \|x\| \text{ pequeña.}$$

Esta condición es suficiente para demostrar que el equilibrio es estable en el sentido de Lyapunov.

Estabilidad asintótica global

El origen es un punto de equilibrio global asintóticamente estable, si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$, tal que su derivada satisfaga:

- $\dot{V}(t, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0.$
- $\dot{V}(t, x) < 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n.$

Esto implica que la variable de estado $x(t)$ tiende a cero conforme el tiempo tiende a infinito.

Estabilidad exponencial global

El origen es un punto de equilibrio global exponencialmente estable de la ecuación $\dot{x} = f(x, t)$, si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ y constantes positivas α y γ tales que:

- $\alpha \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq \beta \|x\|^2$.
- $\dot{V}(t, x) \leq -\gamma \|x\|^2 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

La estabilidad global asintótica y exponencial requieren de la existencia de un único punto de equilibrio.

2.3 MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS

El modelado de sistemas mecánicos a través de las ecuaciones del modelo dinámico de Lagrange es uno de los más empleados, sobre todo para sistemas de n grados de libertad (n g.d.l.), a diferencia del método de las ecuaciones de movimiento de Newton, el cual es muy útil pero su uso se complica cuando el número de articulaciones del sistema mecánico aumenta. Se le da el nombre de Lagrange, debido a que el fue él primero en darlo a conocer en 1788 [19].

Una categoría de los sistemas mecánicos son los robots manipuladores, estos están formados por eslabones conectados en serie y unidos por articulaciones, que pueden ser rotacionales o traslacionales. Los eslabones toman su nomenclatura desde la base del sistema (eslabón 0), hasta el último (eslabón n). Las uniones se numeran de forma que la unión i conecta los eslabones i e $i - 1$. Cada unión es controlada, por lo general, a través de un actuador, que es el responsable de darle movimiento a cada uno de los eslabones. Se le llama z_i al eje de movimiento de la unión i . Se denotará como q_i a la coordenada articular generalizada, la cual es el desplazamiento angular alrededor de z_i si la unión es rotacional, o desplazamiento lineal en z_i , si la unión es traslacional. Un robot con n articulaciones, en este caso, de n g.d.l., contará con un vector de posiciones articulares q con n elementos.

El modelo dinámico articular de un sistema mecánico consiste en una ecuación diferencial ordinaria vectorial en las posiciones articulares q , por lo general de segundo orden:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i \quad (2.7)$$

El modelo general se expresa por la ecuación dinámica para robots que tiene la forma:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} = \tau \quad (2.8)$$

donde $M(q)$ es la matriz de inercia la cual es simétrica y definida positiva, la matriz $C(q, \dot{q})$ es llamada matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, el vector $g(q)$ de fuerzas gravitacionales, B es la matriz de fricción viscosa que no forma parte de la modelo general,

pero se agrega en este punto para contemplar las fuerzas de fricción en el sistema. τ es un vector de fuerzas externas, equivalente a los pares que accionan las articulaciones.

El modelado con las ecuaciones de Lagrange requiere conocimiento de dos conceptos importantes: la energía cinética y la energía potencial. El modelado de un robot manipulador se divide en cuatro etapas [18]:

1. Cálculo de la energía cinética: $\mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t))$.
2. Cálculo de la energía potencial: $\mathcal{U}(q(t))$.
3. Cálculo del lagrangiano: $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$.
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange.

2.3.1 Modelado de sistema mecánico con 2 g.d.l.



Figura 2.3: Robot tipo SCARA

El robot tipo SCARA (Selective Compliance Articulated Robot Arm) es un brazo planar antropomórfico de dos articulaciones rotacionales para la base y el hombro que se mueven en un plano horizontal, figura 2.3. Cuentan con una tercera articulación prismática con la que se ejecuta alguna tarea con la herramienta configurada en el extremo del robot. En la configuración de este tipo de robot, todos los ejes de movimiento z_1 , z_2 y z_3 son paralelos entre sí. La estructura del robot es de alta rigidez para soportar cargas verticales, lo que lo hace ideal para tareas de ensamble con objetos pequeños. El espacio de trabajo se puede observar en la figura 2.4.

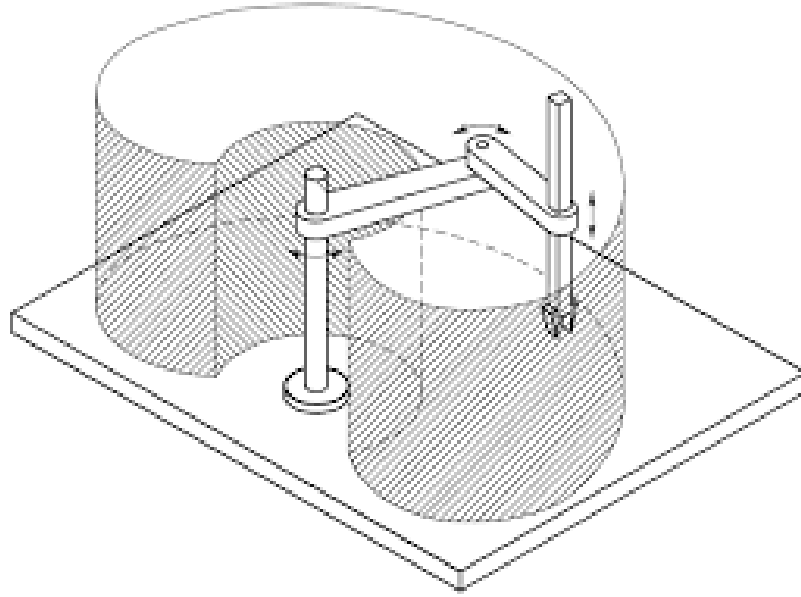


Figura 2.4: Espacio de trabajo de robot SCARA

Por motivos de funcionalidad del equipo que se encuentra en el laboratorio, el estudio se realiza en los dos primeros eslabones con articulaciones rotacionales del robot SCARA. El movimiento del sistema mecánico se desarrolla en el plano horizontal $x - y$. Donde se desplazan los 2 eslabones cuyas masas se denotan como m_1 y m_2 y sus longitudes a partir de los ejes de giro como l_1 y l_2 respectivamente. l_{c1} y l_{c2} representan la distancia que hay desde los ejes de giro y los centros de masa de los dos eslabones respectivamente. Los momentos de inercia se representan como I_1 e I_2 , los dos g.d.l. se expresan como los ángulos q_1 para el primer eslabón y q_2 para el segundo.

Se define el vector de posición de las articulaciones $q(t)$ como:

$$q(t) = [q_1(t) \ q_2(t)]^T. \quad (2.9)$$

2.3.1.1 Cálculo de energía cinética \mathcal{K}

El primer paso es calcular la energía cinética $\mathcal{K}(q, \dot{q})$ la cual es la suma de la energía cinética de los dos eslabones: $\mathcal{K}(q, \dot{q}) = \mathcal{K}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{K}_2(q, \dot{q})$, y se calcula individualmente como $\mathcal{K}_n(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m v^T v + \frac{1}{2}I \dot{q}_1^2$. Para esto se comienza con un análisis del eslabón 1 en donde se definen las coordenadas del centro de masa dentro del plano x-y:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_{c1} \text{sen}(q_1), \\ y_1 &= -l_{c1} \text{cos}(q_1). \end{aligned}$$

Con la ayuda de la posición se puede expresar el vector de velocidad v_1 como:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 \\ -l_{c1} \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

con esto se obtiene que la velocidad al cuadrado del centro de masa es $v_1^T v_1 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2$. Así podemos definir la energía cinética del eslabón 1 como:

$$\mathcal{K}_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2. \quad (2.10)$$

Para continuar el análisis, esta vez del eslabón 2, se especifican las coordenadas del centro de masa como:

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \text{sen}(q_1) + l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2), \\ y_2 &= -l_1 \text{cos}(q_1) + l_{c2} \text{cos}(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

y también el vector de velocidad v_2 :

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \text{cos}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_{c1} \text{sen}(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la velocidad al cuadrado del centro de masa del eslabón 2 es:

$$v_2^T v_2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \text{cos}(q_2)$$

Y con esto se define la energía potencial \mathcal{K}_2 del eslabón dos:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + \\ & m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \text{cos}(q_2) + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.3.1.2 Cálculo de lagrangiano \mathcal{L}

El siguiente paso es calcular la energía potencial asociada a las masas de los eslabones. Sin embargo, debido a que el sistema mecánico se desplaza dentro de un plano $x - y$ horizontal, no hay efecto de la gravedad sobre el sistema y tampoco hay resortes actuando en el sistema; por lo que la energía potencial, para este caso, es cero. Después de esto se procede a obtener el lagrangiano a partir de las ecuaciones (2.10) y (2.11):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= \mathcal{K}(q, \dot{q}) - \mathcal{U}(q) \\ &= \mathcal{K}_1(q, \dot{q}) + \mathcal{K}_2(q, \dot{q}) - \mathcal{U}_1(q) - \mathcal{U}_2(q) \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] \\ & + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \text{cos}(q_2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3.1.3 Desarrollo de ecuaciones de Lagrange

Con el lagrangiano definido se pueden obtener las ecuaciones de movimiento de Lagrange que modelan un sistema mecánico de n g.d.l. (2.7).

Las siguientes expresiones son necesarias para determinar las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2] \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 \\ &+ (2m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1 + 2m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_2) \cos(q_2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + I_1 \dot{q}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_1} \right] &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1 \\ &+ [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &- m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + I \ddot{q}_1 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \cos(q_2) + I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_2} \right] &= m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) \ddot{q}_1 \\ &- m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + I_2 [\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1^2]$$

Con estas expresiones se completan las ecuaciones de movimiento en (2.7) y se obtiene τ_1 y τ_2 los cuales son los pares que actúan en las uniones de los eslabones 1 y 2 respectivamente. El modelo del sistema queda definido como:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 \\ &+ [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2}] \ddot{q}_2 \\ &- 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\ \tau_2 &= [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 \\ &+ [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Después de tener los pares que actúan sobre las articulaciones, teniendo toda la información necesaria, se procede a establecer la ecuación dinámica para robots (**[eq:dinamica]**). Las matrices para las dinámicas del sistema mecánico quedan formadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} M(q) &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} & C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} & \tau &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde, según las ecuaciones de movimiento en (2.13):

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_1 l_2 \cos(q_2) + I_1 + I_2 \\ M_{12}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ M_{21}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ M_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ C_{11}(q) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ C_{12}(q) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ C_{21}(q) &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ C_{22}(q) &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Considerando que la posición q es la variable medida y definiendo las variables de estado como $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q}$, la representación en el espacio de estados del sistema (??) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ M(x_1)^{-1} [\tau - C(x_1, x_2)x_2 - Bx_2] \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$y = x_1.$$

3.1 FORMULACIÓN DE CONTROL ROBUSTO

Para diseñar un controlador es necesario tener un modelo matemático que represente a la planta del sistema real y contar con información sobre las características nominales de la misma. Al modelar la dinámica de un sistema, se presentan diferencias entre el sistema real y su modelo matemático. Estas diferencias son producidas, generalmente, por variaciones en los parámetros de la planta o parámetros desconocidos, a este tipo de variaciones se les llama incertidumbres paramétricas. Otro factor que puede agregar diferencias son las perturbaciones externas como dinámicas no modeladas, condiciones atmosféricas, estática o señales que puedan introducirse en el sistema y que no tengamos un control completo sobre ellas. El método de control robusto consiste en diseñar una ley de control válida para obtener el rendimiento deseado del sistema en lazo cerrado frente a perturbaciones e incertidumbres. Mediante el diseño de un sistema de control en el que se define la magnitud de las posibles perturbaciones e incertidumbres y el diseño del controlador de manera que, si estas se encuentran dentro de dicho rango, el sistema en lazo cerrado continúe al menos estable asintóticamente.

Los sistemas de control basados en la teoría de control robusto no solo cumplen con un objetivo de estabilidad nominal, en la que el controlador diseñado estabiliza al sistema nominal, también tienen las siguientes propiedades [26]:

1. Estabilidad Robusta. El sistema de control diseñado es estable en presencia de perturbaciones o incertidumbres paramétricas.
2. Comportamiento robusto. El sistema de control presenta características de respuesta predeterminadas en presencia de perturbaciones o incertidumbres paramétricas.

Incertidumbre en el modelo de una planta

Como se mencionó anteriormente, el término *incertidumbre* se refiere a las diferencias o errores entre el modelo de la planta y el sistema real. Existen diferentes tipos de incertidumbres que pueden presentarse en el modelo de un sistema y pueden caracterizarse en dos clases:

1. Incertidumbres estructuradas. Son variaciones paramétricas en la dinámica de la planta, como variaciones en los polos y ceros de la función de transferencia.
2. Incertidumbres no estructuradas. Un ejemplo son incertidumbres dependientes de la frecuencia, como modos de alta frecuencia que generalmente se desprecian en el

modelado. Otro ejemplo es en la linealización de una planta no lineal, si se utiliza un modelo lineal para una planta no lineal, entonces su diferencia es una incertidumbre no estructurada. Como la magnitud y la fase de la incertidumbre es desconocida, se utiliza una estimación en el diseño del controlador para poder estabilizar al sistema en lazo cerrado.

3.2 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES (CMD)

Una de las mejores técnicas de diseño de controladores robustos es el control por modos deslizantes (CMD), en el que se ofrecen ventajas tales como insensibilidad ante una amplia clase de perturbaciones e incertidumbres del modelo y una reducida cantidad de información requerida. Los sistemas de CMD son diseñados para llevar los estados o trayectorias del sistema a una superficie particular en el espacio de estados, llamada superficie deslizante. Una vez que la superficie discontinua es alcanzada, el CMD mantiene las trayectorias conmutando dentro de una vecindad de la superficie deslizante. La tarea de diseño de un CMD se divide en dos fases. La primera parte consiste en el diseño de la superficie deslizante tal que el comportamiento dinámico del sistema en la superficie deslizante satisfaga las especificaciones de diseño. La segunda fase involucra la selección de la ley de control que hará que la superficie deslizante atraiga a los estados del sistema.

3.2.1 Principios de CMD de primer orden

Se considera un sistema no lineal SISO (Single Input – Single Output)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g(x, t)u \\ y &= h(x, t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde y y u son variables escalares de salida y entrada respectivamente, y $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado. Como se mencionó al principio de esta sección, el proceso de diseño de CMD se divide en dos fases, la primera es la definición de una función escalar de los estados del sistema, llamada superficie deslizante (σ), que se adecue al objetivo de control donde, $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Usualmente se usan las variables de estado, o las variables de error para un objetivo de control de seguimiento de trayectoria, y un cierto número de sus derivadas, $\sigma = \sigma(x, \dot{x}, \dots, x^{(k)})$. La función σ debe definirse de manera que se desvanezca hacia cero, $\sigma = 0$, para llevar a los estados dentro de la superficie deslizante. La forma más común de esta función es una combinación lineal de la forma $\sigma = \dot{x} + c_0x$, donde c_0 es una constante positiva.

La segunda fase consiste en diseñar una acción de control que lleve las trayectorias del sistema a la superficie deslizante, en otras palabras, que el control sea capaz de llevar la variable σ a cero en tiempo finito. Para esto el control $u(x)$ es una función discontinua que

al llegar a la superficie deslizante conmuta entre dos valores, atrayendo las trayectorias del sistema a dicha superficie $\sigma = 0$, cambiando su signo en función del valor de $\sigma(x)$

$$u \begin{cases} u^+(x) & \sigma(x) > 0 \\ u^-(x) & \sigma(x) < 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Bajo estas condiciones, el sistema controlado podrá expresarse a través de dos subsistemas continuos, dependientes del signo de $\sigma(x)$

$$\dot{x} = F(x, u) = \begin{cases} F(x, u^+) = F^+(x) & \sigma(x) > 0 \\ F(x, u^-) = F^-(x) & \sigma(x) < 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Existe un régimen deslizante sobre la superficie, cuando la aplicación de la ley de control (3.2) lleva las trayectorias del sistema a tal superficie y se mantienen localmente en una vecindad de ésta. Para que esto suceda, los campos vectoriales controlados de los dos subsistemas continuos deben apuntar localmente a $\sigma = 0$, como se muestra en la figura 3.1, cumpliendo las siguientes desigualdades:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{\partial s}{\partial x}(f + gu) < 0 \quad y \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \frac{\partial s}{\partial x}(f + gu) > 0. \tag{3.4}$$

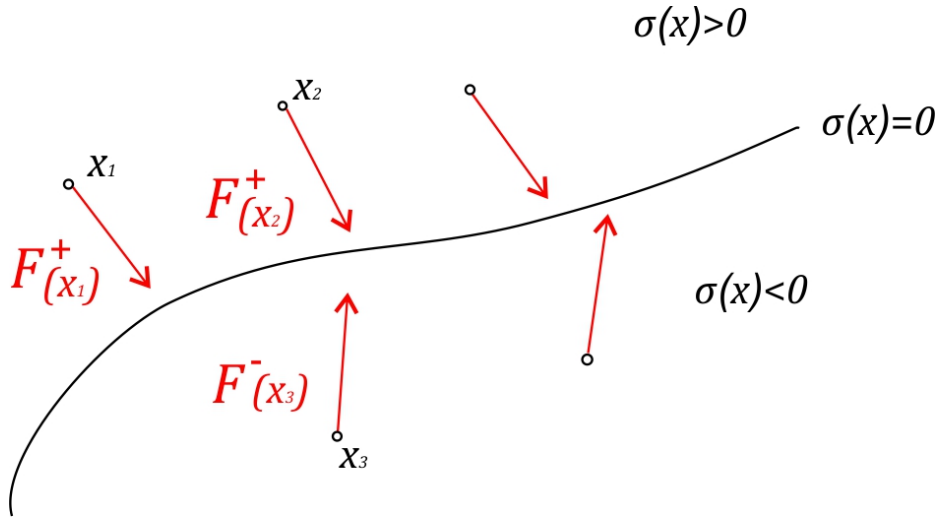


Figura 3.1: Condición para existencia de régimen deslizante en $\sigma = 0$.

Estas condiciones son suficientes y necesarias para la convergencia a la superficie deslizante y la permanencia en una vecindad de la misma. La atracción local de la superficie deslizante se puede expresar por la *condición de alcanzabilidad* [27], la cual se puede expresar de una manera más concisa como:

$$\sigma \dot{\sigma} < 0 \tag{3.5}$$

3.2.2 Chattering

En la práctica un controlador no conmuta a una frecuencia infinita, por lo que no existe un modo deslizante ideal. La discontinuidad en la retroalimentación del controlador ocasionada por la presencia de imperfecciones en la conmutación de los actuadores, tales como tiempo de retraso o histéresis, provocan un comportamiento dinámico en una vecindad de la superficie deslizante a la que se le conoce como *chattering* (figura 3.2).

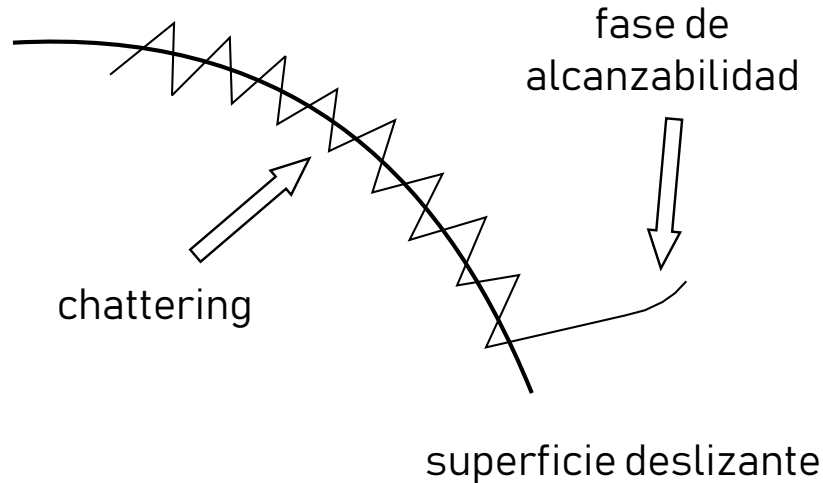


Figura 3.2: Fenómeno chattering

Este fenómeno es una desventaja, incluso si se filtra a la salida del proceso, puede provocar altas frecuencias no modeladas que reducen el rendimiento del sistema y pueden llevarlo a la inestabilidad [16], es por esto que se han diseñado varios métodos para reducir o eliminar este fenómeno. Uno de estos métodos consiste en un esquema de regulación en una vecindad de la superficie deslizante, en el que se reemplaza la función signo por una aproximación continua con una alta ganancia en el límite, un ejemplo son las funciones sigmoid o la función de saturación como se muestra en la figura 3.3. Aunque el *chattering* puede ser eliminado, se puede poner en riesgo la robustez del controlador. Existen varias propuestas con el objetivo de eliminar o reducir el *chattering*, entre las cuales están [5] y [6].

3.2.3 Regularización

Debido al comportamiento dinámico y al control discontinuo que se aplica al sistema, la ecuación diferencial resultante que describe al sistema en lazo cerrado tiene la misma propiedad discontinua respecto al vector de estado. Es por esto que la teoría clásica de ecuaciones diferenciales no puede ser utilizada para analizar el comportamiento del sistema cuando las trayectorias se encuentran en la superficie discontinua. La condición

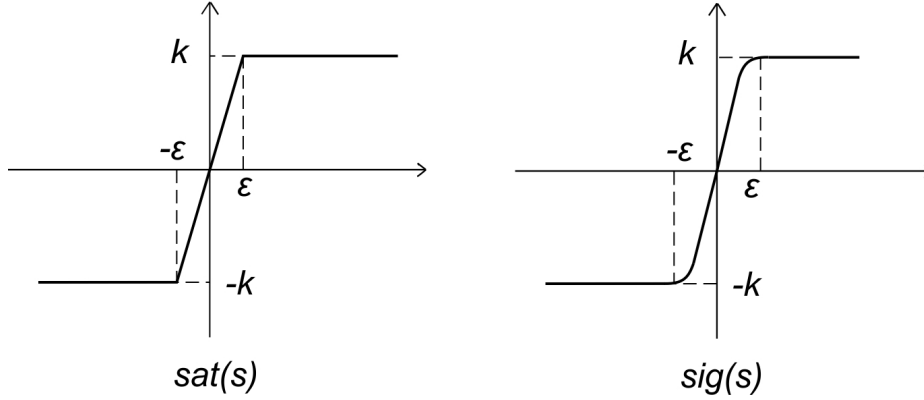


Figura 3.3: Función saturación $sat(s)$ y función sigmoid $sig(s)$.

de Lipschitz garantiza la existencia de una solución única: si hay una constante escalar L tal que:

$$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \geq L\|x_1 - x_2\| \quad (3.6)$$

Sin embargo, una función que satisface las condiciones Lipschitz es necesariamente continua, por lo que se deben utilizar técnicas alternas para el análisis del sistema durante el régimen deslizando, dicha sustitución de la técnica de análisis para describir este fenómeno se le llama *regularización*. Existen diferentes formas de regularización para el problema del comportamiento discontinuo de sistemas dinámicos, y sin importar cual sea todos tienen una cosa en común: siempre que existe un régimen de modo deslizando, el vector de velocidad en el espacio de estados será tangente al plano de la superficie deslizando. Dependiendo de la técnica de regularización que se utilice, se obtendrán diferentes ecuaciones diferenciales, por lo que no hay una única solución, cada técnica de regularización corresponde a algún sistema en la vida real y difícilmente se puede decir que una técnica es generalmente correcta o incorrecta [33]. Lo más razonable sería determinar que técnica es la más útil para la problemática que se está tratando.

Dos de los métodos más usados son el método de Filippov y el método de control equivalente, descritos en la siguiente parte.

3.2.3.1 Método de Filippov

Este concepto fue propuesto por Filippov en 1964 para las ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, en el cual se construye una solución que es el promedio de las soluciones obtenidas de acercarse al punto de discontinuidad desde diferentes direcciones. Si x_0 es un punto de discontinuidad en la superficie $\sigma = 0$ y $F_-(t, x_0)$ y $F_+(t, x_0)$ son los límites de $F(t, x_0)$ conforme el punto x_0 se acerca desde lados opuestos del plano tangente hacia $\sigma = 0$ en x_0 [10], entonces la solución obtenida es:

$$\dot{x}(t) = (1 - \alpha)F_-(t, x) + \alpha F_+(t, x) \quad (3.7)$$

donde el escalar $0 < \alpha < 1$ es tal que el vector

$$F_\alpha := (1 - \alpha)F_- + \alpha F_+ \quad (3.8)$$

sea tangencial a la superficie σ como se muestra en la figura 3.4. Un estudio más a fondo en este tema se puede encontrar en [12].

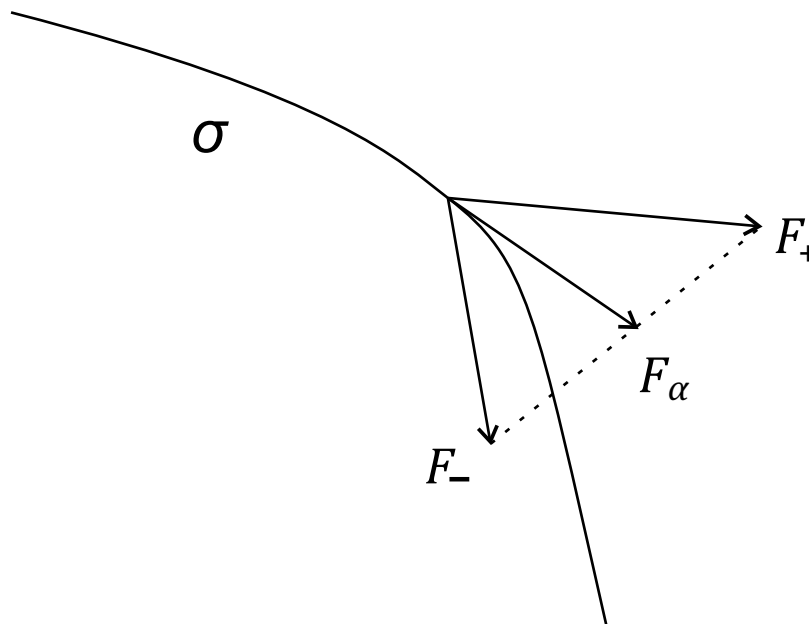


Figura 3.4: Solución de ecuaciones discontinuas de Filippov

3.2.3.2 Método de Control Equivalente

En términos generales, el control equivalente se define como la acción de control necesaria para mantener un movimiento deslizante ideal en la superficie $\sigma = 0$ [33]. El control equivalente (u_{eq}) reemplaza la parte indefinida del control discontinuo (u_d) en la superficie deslizante con un control continuo que dirige el vector de velocidad por la superficie discontinua. Dado un sistema discontinuo no lineal en la que la parte derecha de la ecuación diferencial es una función lineal del control

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (3.9)$$

Se trata de encontrar un control que, bajo la condición inicial dentro de la superficie deslizante, mantenga las trayectorias dentro de esta. Matemáticamente hablando $\sigma = \dot{\sigma} = 0$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u) = 0. \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.9) en el control (3.10) se obtiene

$$\dot{\sigma} = Gf(x) + GB(x)u = 0. \quad (3.11)$$

donde $G = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$, se asume que la matriz GB es no singular para toda x y t , se encuentra el siguiente control equivalente:

$$u_{eq} = -[G(x)B(x)]^{-1}G(x)f(x) \quad (3.12)$$

sustituyendo este control en el sistema (3.9) lleva a la ecuación

$$\dot{x} = f(x) - B(x)[G(x)B(x)]^{-1}G(x)f(x) \quad (3.13)$$

la cual describe el movimiento de MD dentro de la superficie $\sigma = 0$.

En un sistema real, varias imperfecciones provocan que los estados oscilen en una región cercana a la intersección, los actuadores de un sistema de control conmutan a una frecuencia finita tomando los valores de u^+ y u^- . Estas frecuencias son altas y los componentes son lentos. La alta frecuencia es filtrada por la planta que se está controlando, así que el movimiento de MD es determinado por estos componentes lentos. En la teoría, las ecuaciones de MD son obtenidas por la sustitución del control equivalente por el control real. Se podría asumir que el control equivalente es una aproximación a los componentes lentos de un control real, los cuales filtran la alta frecuencia en un filtro pasa bajas debido a su funcionamiento mecánico y las restricciones físicas que estos tienen.

Las ecuaciones obtenidas en este método son diferentes a las que se derivan del método de Filippov [32], incluso para sistemas con un control escalar. Demostrar que un método u otro es mejor a la hora de usar la técnica de regularización ha sido difícil, porque las ecuaciones de MD resultantes de este método dependen de la naturaleza de las imperfecciones introducidas y de la manera en que se aproximan a cero. Un ejemplo del mejor uso para cada uno de los métodos es usar ecuaciones de Filippov cuando se trata de sistemas de relevador con pequeños retrasos de tiempo o histéresis en el actuador. Para aproximaciones suaves y continuas de una función discontinua, es mejor utilizar el método de control equivalente [34].

3.2.4 Análisis matemático

Para el diseño de un CMD se empieza siempre por determinar la planta, seguido de un proceso básico en el que se define la superficie deslizante y posteriormente una ley de control que mantenga las trayectorias del sistema en la superficie deslizante y las lleve al origen, como se mencionó en la sección 2.2. Para ilustrar este proceso se va a considerar una planta de doble integrador (debido al fin de ilustrar del método se ignora el término para la perturbación):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde x es el vector de estado con la forma $x = [x_1 \ x_2]^T$, $u(t) \in \Re$ es la ley de control de retroalimentación. Cumpliendo con la primera etapa, se propone una superficie deslizante que lleve las trayectorias del sistema al origen asintóticamente:

$$\sigma = cx_1 + x_2. \quad (3.15)$$

donde c es una constante positiva. La superficie deslizante se encuentra en $\sigma = 0$ por lo que la ecuación (3.15) se expresa como $cx_1 + x_2 = 0$, y se tiene que $x_2 = \dot{x}_1$, esto resulta en una ecuación diferencial homogénea $cx_1 + \dot{x}_1 = 0$ cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(0)e^{-ct} \\ \dot{x}_1 &= -cx_2(0)e^{-ct}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para llevar a cabo la segunda etapa y encontrar una acción de control que mantenga las trayectorias en el origen, se emplea la condición de alcanzabilidad $\dot{\sigma} < 0$

$$\dot{\sigma} = c\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = cx_2 + u. \quad (3.17)$$

Sustituyendo $\dot{\sigma}$ de la ecuación (3.17) en la condición de alcanzabilidad, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\sigma(cx_2 + u) < 0 \quad (3.18)$$

y se elige una acción de control que mantenga válida la desigualdad:

$$u = -cx_2 - k\text{sign}(\sigma) \quad (3.19)$$

donde $k > 0$. Sustituyendo en la ecuación (3.18) se comprueba que la superficie deslizante utilizada lleva las trayectorias del sistema al origen y las mantiene en $\sigma = 0$

$$\dot{\sigma} = -k|\sigma| < 0. \quad (3.20)$$

El sistema en lazo cerrado (3.14) puede ser controlado usando la acción de control (3.19) con la superficie deslizante en (3.15).

En caso de que el sistema incluya una perturbación $w(t)$, la cual es desconocida pero se sabe que esta acotada superiormente por una constante $M > 0$ que satisface la condición (3.21) para toda t

$$\sup_{t \geq 0} |w(t)| \leq M. \quad (3.21)$$

La ley de alcanzabilidad está dada por:

$$\dot{\sigma} = -k|\sigma| + w(t)\sigma \leq -(k - M)|\sigma| < 0 \quad (3.22)$$

Esto significa que mientras la desigualdad $k > M$ sea válida, todas las trayectorias convergen a la superficie deslizante.

Debido a que las trayectorias llegan a la superficie deslizante en tiempo finito, se puede probar estabilidad asintótica y se puede calcular de la siguiente manera: se propone una ecuación de Lyapunov

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (3.23)$$

de donde se obtiene $\dot{\sigma} = 2\sqrt{V(\sigma)}$. La estabilidad asintótica alrededor del punto de equilibrio $\sigma = 0$ se puede comprobar si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\dot{V} < 0$ para $\sigma \neq 0$
2. $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} V = \infty$.

La derivada de V es calculada como:

$$\dot{V}(\sigma) = \dot{\sigma} \quad (3.24)$$

sustituyendo (3.20) se obtiene la siguiente desigualdad

$$\dot{V}(\sigma) \leq -2k\sqrt{V(\sigma)}, \quad (3.25)$$

donde ya se puede observar que su derivada temporal es definida negativa. Separando las variables e integrando ambos lados de la ecuación en el intervalo de tiempo de 0 a t

$$-\frac{1}{2k} \int_{V(t_0)}^{V(t_r)} \frac{dV}{\sqrt{V(\sigma)}} \leq \int_{t_0}^{t_r} dt \quad (3.26)$$

da como resultado un tiempo acotado (t_r) en el que las trayectorias llegan a la superficie deslizante:

$$t_r \leq t_0 + \frac{|\sqrt{V(t_0)}|}{k}. \quad (3.27)$$

A manera de ilustración, se realiza una simulación para mostrar los resultados de la implementación del CMD de primer orden (3.19) en un sistema de doble integrador (3.15). Con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = -2$, ganancia $k = 2$ y el parámetro $c = 1$. Los resultados de la simulación se presentan en las figuras 3.5 - 3.9.

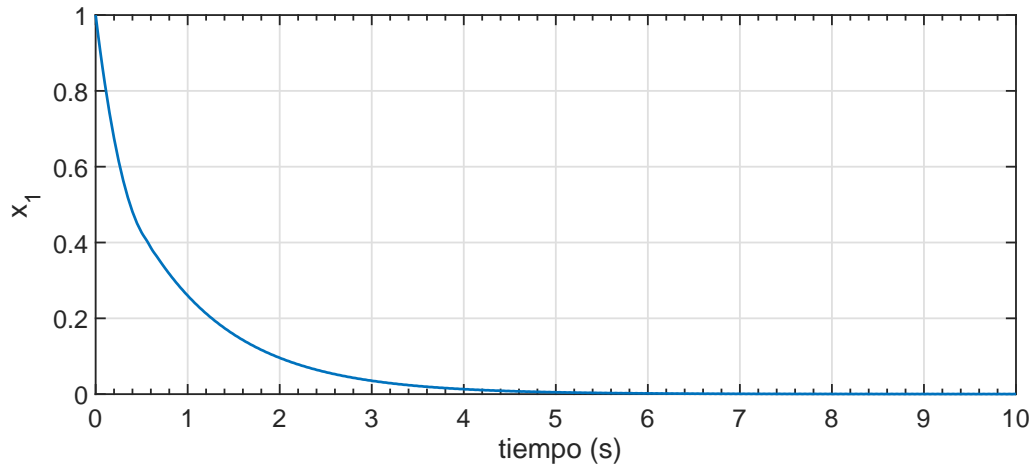


Figura 3.5: Convergencia asintótica de la posición

En la figura 3.5 y 3.6 se muestra la convergencia asintótica de las variables de estado (posición y velocidad) a cero. La figura 3.7 ilustra la convergencia en tiempo finito de

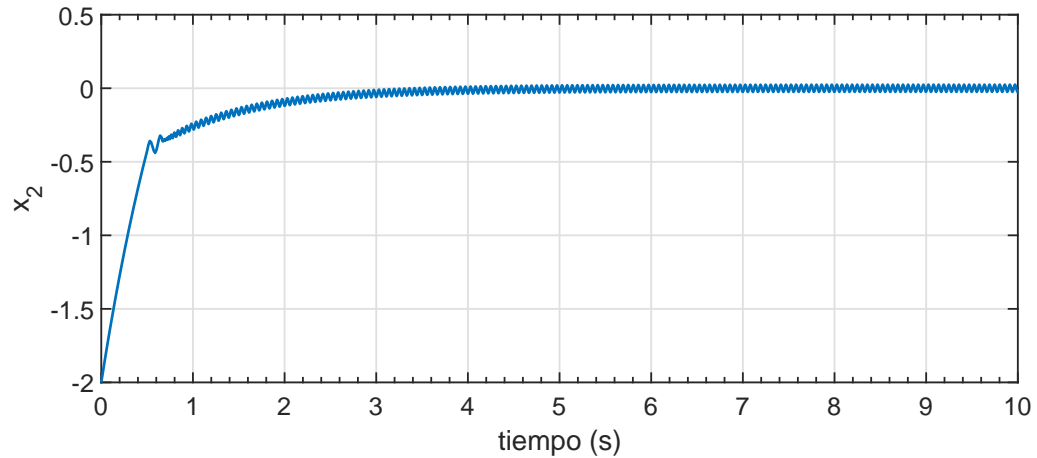


Figura 3.6: Convergencia asintótica de la velocidad

la variable a la superficie deslizante, así como una pequeña franja de alta frecuencia. La figura 3.8 muestra la fase de alcanzabilidad (cuando las trayectorias del sistema son llevadas hacia la superficie deslizante) y la fase deslizante (cuando las trayectorias se desplazan hacia el origen por la superficie deslizante). Por último la figura 3.9 muestra la señal de control, la cual representa la señal que es enviada al actuador del sistema, en la que se puede ver también una franja de alta frecuencia.

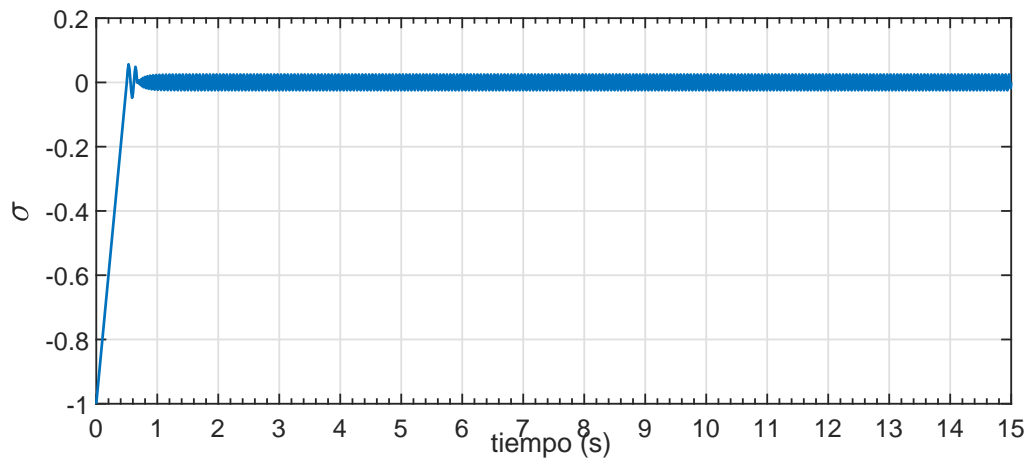


Figura 3.7: Variable deslizante

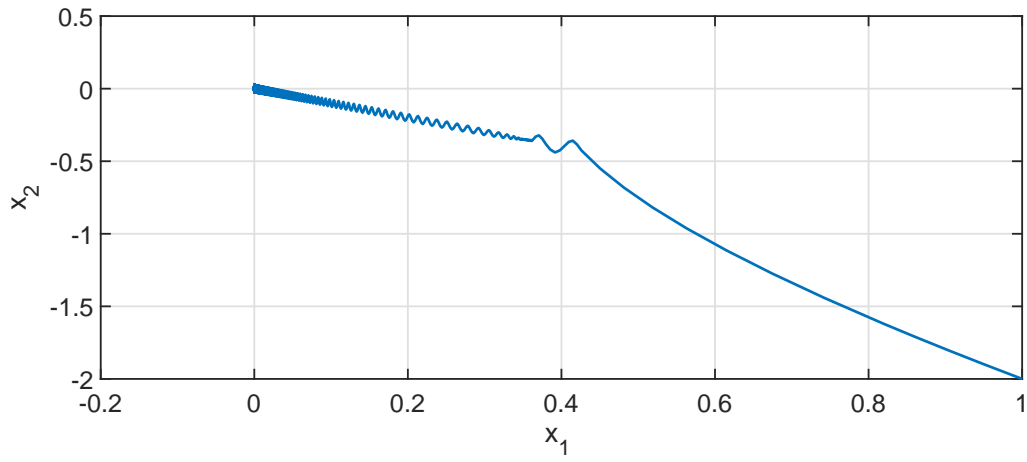


Figura 3.8: Retrato de fase

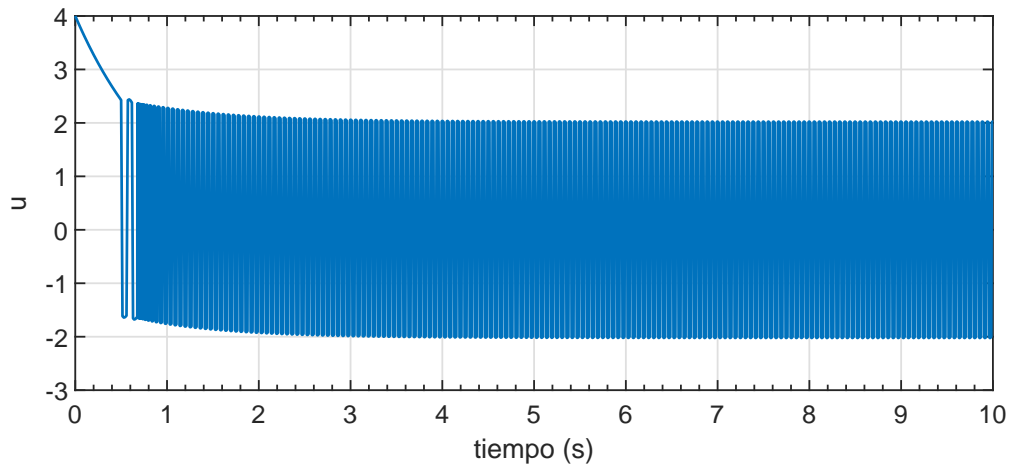


Figura 3.9: Señal de control

DISEÑO DE CONTROLADOR TERMINAL SLIDING MODE (TSM)

En CMD tiene como estrategia llevar las trayectorias a una superficie de discontinuidad, y ahí la estructura del control cambia para generar un modo deslizante. Este comportamiento brinda robustez al sistema, ya que cuando las trayectorias se encuentran dentro de la superficie deslizante, estas se aproximan al punto de equilibrio en forma asintótica, garantizando una estabilidad asintótica. Ciertas superficies deslizantes no lineales pueden llevar las trayectorias al punto de origen en tiempo finito. En [7], [43], [44] y [45] Zinober lleva una línea de investigación en donde desarrolla un CMD con convergencia en tiempo finito, en donde trabajaba con la adaptación de hiperplanos lineales para lograr este fin. En 1993 S. T. Venkataraman y S. Gulati [35] desarrollaron este concepto, conocido en inglés como "Terminal Sliding Mode", al cual llamaremos a continuación TSM, en donde utilizaban el concepto de "terminales atractores" para llevar las trayectorias al origen en tiempo finito. Con esta técnica se tiene mayor control de las trayectorias, ya que se puede establecer el tiempo en que estas llegan a la superficie deslizante y posteriormente al punto de equilibrio. El control por TSM tiene entre sus propiedades convergencia de los estados al punto de equilibrio en tiempo finito, insensibilidad a incertidumbres del sistema y perturbaciones externas [11]. Gracias a estas propiedades el control por TSM es muy útil para manipuladores robóticos de alta precisión [40]. Sin embargo, este tipo de control cuenta con una desventaja, tiene en su algoritmo la probabilidad de una singularidad [2]. Para solucionar esto, se creó un nuevo algoritmo llamado "Non-singular Terminal Sliding Mode"(NTSM) [39], donde haciendo unos cambios en el algoritmo y agregando ciertas condiciones al controlador y a la superficie deslizante diseñada, se podía lograr la convergencia en tiempo finito sin la desventaja de una singularidad.

4.1 DISEÑO DE CONTROLADOR

El propósito es estudiar un controlador discontinuo basado en control por modos deslizantes de primer orden [31] y control de terminal sliding mode (TSM) para resolver el objetivo de control de seguimiento de trayectoria para el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1) + g(x_1)u + w(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

En el que se considera que x es el vector de estado de la forma $x = [x_1 \ x_2]^T$, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control, la función no lineal $f(x) \in \mathfrak{R}$ es el sistema nominal, $g(x) \in \mathfrak{R}$ es una función conocida y $w(t)$ es un término para las perturbaciones externas e incertidumbres

paramétricas. El término $w(t)$ es desconocido, sin embargo, su límite superior esta acotado por una constante conocida $M > 0$ que satisface la ecuación (4.2) para toda t .

$$\sup_{t \geq 0} |w(t)| \leq M \quad (4.2)$$

Como la ecuación (4.1) tiene su lado derecho discontinuo, la solución de dicha ecuación está definida en el sentido de Filippov [12]. El lado derecho discontinuo esta dado por la función *signo*, definida en la ecuación (4.3).

$$\text{sign}(x_2) = \begin{cases} 1 & x_2 > 0 \\ 0 & x_2 = 0 \\ -1 & x_2 < 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

El objetivo de control es encontrar una acción de control u que satisfaga la ecuación (4.4) dependiendo de la posición o trayectoria deseada x_d en la respuesta en lazo cerrado del sistema (4.1).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t) - x_d(t)| = 0 \quad (4.4)$$

Para esto se propone un controlador de estructura variable basado en el control por modos deslizantes de primer orden, donde se definen variables de error

$$\begin{aligned} e_1 &= x_1 - x_d, \\ e_2 &= \dot{x}_1 - \dot{x}_d = x_2 - \dot{x}_d(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Se reescribe el sistema (4.1) de acuerdo a la ecuación (4.5) considerando a la variable de error como un vector $e = [e_1 \ e_2]^T$ en el nuevo sistema en la ecuación (4.6).

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= f(e) + g(e)u + w(t) - \ddot{x}_d. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para dicho sistema, se propone un control con términos de compensación

$$u = -g(e)^{-1} \left(\tilde{f}(e) - \tau - \ddot{x}_d \right) \quad (4.7)$$

donde $g(e)$ no debe ser singular para que su inversa exista, $\tilde{f}(e) = f(e) + \Delta f(e)$ es un término de compensación aproximado para la función no lineal $f(e)$, $\Delta f(e)$ representa la incertidumbre del sistema, el error entre $f(e)$ y $\tilde{f}(e)$. El término $\Delta f(e)$ se considera acotado en su límite superior por una constante N .

Después de sustituir los términos de compensación de (4.7) en el sistema (4.6) se obtiene el sistema en lazo cerrado mostrado en la ecuación (4.8).

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -\Delta f(e) + \tau + w(t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

En el control por modos deslizantes se propone una superficie de discontinuidad tal, que lleva las trayectorias del sistema a cero asintóticamente. A diferencia de esto, se utiliza el método de TSM, en el cual las trayectorias convergen al origen en tiempo finito. La superficie deslizante propuesta depende del signo de e_2 y se muestra en la ecuación (4.9).

$$s = \begin{cases} e_1 - (-e_2)^\gamma & e_2 < 0 \\ e_1 + e_2^\gamma & e_2 \geq 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

La ecuación (4.9) puede ser sintetizada y mostrada como una sola expresión de la siguiente manera

$$s = e_1 + |e_2|^\gamma \text{sign}(e_2) \quad (4.10)$$

donde $\gamma = p/q$, p y q son impares y $1 < \gamma < 2$ [39].

En la figura 4.1 se puede observar la superficie deslizante propuesta (en rojo) y la superficie deslizante convencional del CMD (en azul). El CMD lleva las trayectorias al origen de manera asintótica [31] mientras que en el controlador propuesto llegan en tiempo finito.

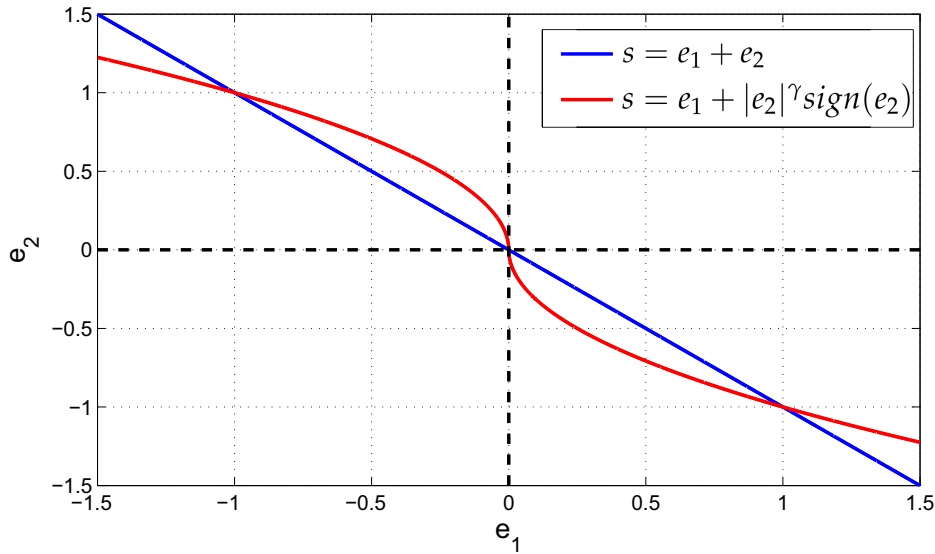


Figura 4.1: Superficie deslizante propuesta y superficie deslizante convencional.

Para llevar a cabo la tarea de diseñar la ley de control τ desde la ecuación (4.9), se separa el espacio de estados \mathbb{R}^2 en 2 conjuntos, Σ_- y Σ_+ , caracterizados por el signo de e_2 y descritos en la ecuación (4.11).

$$\begin{aligned} \Sigma_- &= \{e \in \mathbb{R}^2 | e_2 < 0\}, \\ \Sigma_+ &= \{e \in \mathbb{R}^2 | e_2 \geq 0\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Considerando estos conjuntos del sistema, se obtiene la derivada $\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial e} \dot{e}$:

$$\begin{aligned}\Sigma_- &= \dot{s} = \dot{e}_1 + \gamma(-e_2)^{\gamma-1} \dot{e}_2, \\ \Sigma_+ &= \dot{s} = \dot{e}_1 + \gamma e_2^{\gamma-1} \dot{e}_2.\end{aligned}\tag{4.12}$$

El resultado de las derivadas de los diferentes conjuntos se puede expresar como una sola ecuación:

$$\dot{s} = \dot{e}_1 + \gamma|e_2|^{\gamma-1}(-\Delta f(e) + \tau + w(t))\tag{4.13}$$

Se utiliza el resultado en (4.13) para diseñar τ , el cual debe de satisfacer la ley de alcanzabilidad $s\dot{s} < 0$ [27]. Una ley de control τ que cumple con $s\dot{s} < 0$ es:

$$\tau = -\gamma^{-1}e_2^{2-\gamma} - \beta \text{sign}(s)\tag{4.14}$$

obteniendo:

$$s\dot{s} = -\beta|e_2|^{\gamma-1}(-\Delta f(e) - \beta \text{sign}(s) + w(t))s.\tag{4.15}$$

La ley de alcanzabilidad esta dada por $s\dot{s} = -\beta|s| - (\Delta f(e) - w(t))s \leq -(\beta - (M + N))|s| < 0$, por lo que todas las trayectorias convergen a la superficie deslizante mientras que $\beta > M + N$ se satisfaga. El sistema en lazo cerrado de (4.1) puede ser controlado usando (4.7), (4.14) y la superficie deslizante dada en (4.10). En la siguiente sección se puede estudiar la prueba de estabilidad que demuestra la convergencia en tiempo finito hacia la referencia del sistema en el lazo cerrado descrito anteriormente.

4.2 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

De acuerdo a la definición de estabilidad en tiempo finito [1], el punto de equilibrio $e = 0$ de la ecuación (4.10) es estable en tiempo finito de manera global, si para toda condición inicial $x(0) = x_0$, el sistema converge a $e = 0$ en tiempo finito y se mantiene ahí.

Proponemos la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}s^2.\tag{4.16}$$

La derivada de (4.16) esta dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= s\dot{s} \\ &= s(\dot{e}_1 + \gamma|e_2|^{\gamma-1}(-\Delta f(e) + \tau + w(t))) \\ &= -\beta|e_2|^{\gamma-1}(-\Delta f(e) - \beta \text{sign}(s) + w(t))s.\end{aligned}\tag{4.17}$$

La cual permanece definida negativa siguiendo la descripción expuesta anteriormente y prueba la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Para probar que las trayectorias del sistema pueden ser llevadas al punto de equilibrio desde la superficie deslizante (4.10) en $s = 0$ en tiempo finito, las dinámicas de los conjuntos expresados anteriormente, se definen como:

$$\begin{aligned}\Sigma_- &\Rightarrow 0 = e_1 - (-e_2)^\gamma \rightarrow -\dot{e}_1 = e_1^{\frac{1}{\gamma}}, \\ \Sigma_+ &\Rightarrow 0 = e_1 + e_2^\gamma \rightarrow \dot{e}_1 = (-e_1)^{\frac{1}{\gamma}}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Tomando la estructura Σ_- del sistema e integrando ambos lados de la ecuación 4.18

$$-\int_{e_1(t_0)}^{e_1(t_r)} de_1 = \int_{t_0}^{t_r} e_1^{\frac{1}{\gamma}} dt\tag{4.19}$$

considerando $e_1(t_r) = 0$ y resolviendo para el tiempo de llegada (t_r) se obtiene para el conjunto Σ_- el resultado en la ecuación (4.20).

$$\Sigma_- : t_r = t_0 + \left(\frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + 1} \right) e_1(t_0)^{-\frac{1}{\gamma} + 1}\tag{4.20}$$

El mismo procedimiento es aplicado a la estructura Σ_+ obteniendo:

$$\Sigma_+ : t_r = t_0 + \left(\frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + 1} \right) (-e_1(t_0))^{-\frac{1}{\gamma} + 1}\tag{4.21}$$

Unificando las dos expresiones (4.20) y (4.21) da como resultado el tiempo general en que las variables de error llegan de la superficie deslizante $s = 0$ al punto de equilibrio.

$$t_r = t_0 + \left(\frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + 1} \right) |e_1(t_0)|^{-\frac{1}{\gamma} + 1}.\tag{4.22}$$

4.3 EXPERIMENTOS

El diseño del controlador robusto se pone a prueba también experimentalmente y comparándolo con un controlador ya existente. El equipo utilizado para realizar las pruebas fue un péndulo simple cuyo sistema se expresa en variables de estado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - b\text{sen}(x_1) + cu\end{aligned}\tag{4.23}$$

Los parámetros a , b y c representan los parámetros físicos de la planta donde $a = \frac{fv}{ml^2}$, $b = \frac{mgl}{ml^2}$, $c = \frac{1}{ml^2}$. Representando al sistema en función de errores y sustituyendo la ecuación (4.23) en (4.6) se obtiene el sistema en (4.24):

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -a(e_2 + \dot{x}_d) - b\text{sen}(x_1) + cu + w(t) - \ddot{x}_d. \end{aligned} \quad (4.24)$$

El control diseñado y estudiado en (4.7) se define como:

$$\begin{aligned} u &= -c^{-1}(-a(e_2 + \dot{x}_d) - b\text{sen}(x_1) - \tau - \ddot{x}_d) \\ \tau &= -\gamma^{-1}e_2^{2-\gamma} - \beta\text{sign}(s) \\ s &= e_1 + |e_2|^\gamma\text{sign}(e_2). \end{aligned} \quad (4.25)$$

El controlador con el que se compara el rendimiento del algoritmo diseñado es un control por modos deslizantes de primer orden (MDPO), debido a que es de las soluciones más comunes para absorber perturbaciones. Su algoritmo se muestra en la ecuación (4.26)

$$\tau = -e_2 - \beta\text{sign}(s) + \ddot{x}_d. \quad (4.26)$$

La variable e_2 se define como $e_2 = de_1/dt$. Este controlador puede absorber perturbaciones e incertidumbres $w(t)$ las cuales están acotadas por $|w(t)| \leq D$ y la condición $\beta > D$ se debe cumplir para lograr estabilidad.

Los parámetros físicos de la planta, las condiciones iniciales del sistema y las ganancias de los controladores se muestran en la tabla 4.1.

4.4 RESULTADOS

En esta sección se exponen los resultados de los experimentos realizados para comparar el desempeño del controlador diseñado y un controlador ya existente (modos deslizantes de primer orden) con el objetivo de seguimiento de trayectoria.

En la figura 4.2 se muestra la medición de la posición (x_1) de los dos controladores, con una línea punteada se expresa la trayectoria de referencia, la trayectoria en verde representa la posición del péndulo con el controlador propuesto y la trayectoria roja muestra la posición con controlador por modos deslizantes de primer orden. Como se puede observar, con controlador propuesto, la trayectoria converge en un tiempo más corto que con controlador por modos deslizantes.

La figura 4.3 confirma como el error de posición, en el controlador propuesto, llega primero a cero y se mantiene ahí.

La señal de control sigue siendo muy parecida, sin agregar amplitud a la señal de alta frecuencia, por lo que no se sacrifica el rendimiento en la señal, como se puede observar en la figura 4.4.

Tabla 4.1: Parámetros experimentales

Parámetros de la planta	
Notación	Valor
$x_1(0)$	0
$x_2(0)$	0
$x_d(t)$	$\cos(t)$
a	17
b	93
c	103
Controlador propuesto	
β	10
MDPO	
β	10

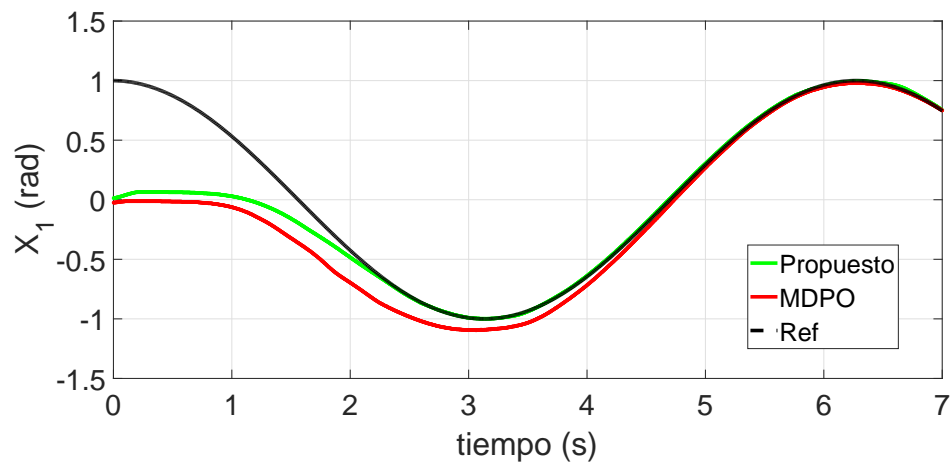


Figura 4.2: Medición de la posición

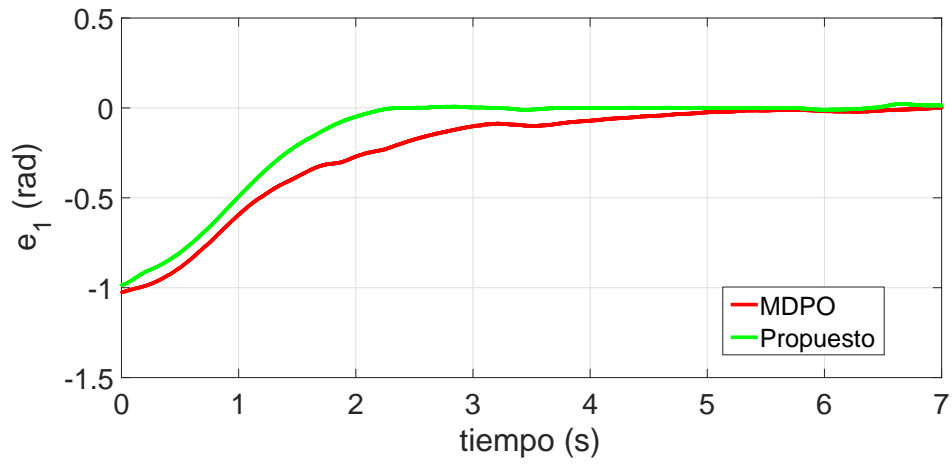


Figura 4.3: Medición de error de posición

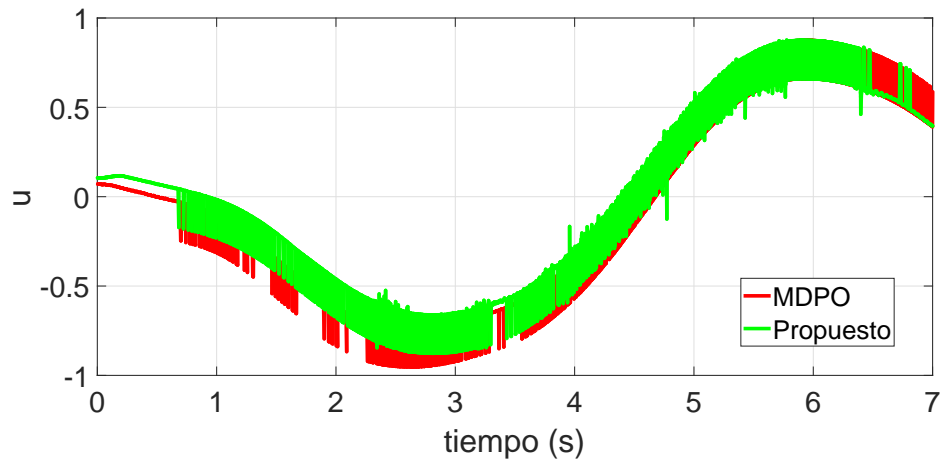


Figura 4.4: Comparación de señal de control

CONTROLADOR SIN MEDICIÓN DE VELOCIDAD

En muchos controladores existentes, la medición de la velocidad de un sistema mecánico debe estar disponible para retroalimentación del controlador, las maneras más comunes de solucionarlo son derivando una de las salidas disponibles para obtener una medición de la velocidad, aunque esta medición es poco confiable debido al ruido que se agrega a la señal medida, otra forma de solucionarlo es mediante el diseño e implementación de un observador, el cual es una copia del modelo del sistema, alimentado con las mismas entradas y agregándole ganancias de corrección, pero si estas ganancias o las condiciones iniciales no son establecidas correctamente pueden ocasionar retrasos o diferencias entre la velocidad estimada y la velocidad real.

En este capítulo se propone otra solución a esta situación, teniendo un sistema mecánico de segundo orden, usando solamente la medición de la posición, sin el uso de la velocidad, observadores, diferenciadores o filtros y con un objetivo de control de seguimiento de trayectoria.

5.1 DISEÑO DE CONTROLADOR

Teniendo un sistema mecánico de segundo orden SISO del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1) + g(x_1)u\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde x es el vector de estado de la forma $x = [x_1 \ x_2]^T$, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control, la función no lineal $f(x) \in \mathfrak{R}$ es el sistema nominal, $g(x) \in \mathfrak{R}$ es una función conocida. Para el sistema en (5.1) se propone un control que compense el sistema nominal de la siguiente forma

$$u = -g(x_1)^{-1} (f(x) - \tau - \ddot{x}_d(t))\tag{5.2}$$

en donde el primer término es una compensación y τ es el algoritmo de control diseñado. Después de sustituir el control en (5.2) el sistema en lazo cerrado resultante es

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tau + \ddot{x}_d(t).\end{aligned}\tag{5.3}$$

Para cumplir el objetivo de control de seguimiento de trayectoria se realiza un cambio de variable para expresar el sistema en función del error de la medición de la posición

respecto a la posición o trayectoria deseada. Se define $e_1 = x - x_d$ y $e_2 = \dot{x} - \dot{x}_d$, donde x_d es la trayectoria deseada. El sistema (5.3) queda ahora definido en función del error como

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= \tau. \end{aligned} \tag{5.4}$$

El algoritmo de control propuesto de este diseño de controlador para estabilizar el sistema (5.4) es

$$\begin{aligned} \tau &= -k_1(k_0 + 1)e_1 - 2k_2e_3 \\ \dot{e}_3 &= -k_1e_1 - k_2e_3. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Las ganancias k_0 , k_1 , y k_2 son positivas. Sustituyendo (5.5) en (5.4) se obtiene el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= -k_1(k_0 + 1)e_1 - 2k_2e_3 \\ \dot{e}_3 &= -k_1e_1 - k_2e_3. \end{aligned} \tag{5.6}$$

El punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (5.6) es el origen,

$$(e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 0). \tag{5.7}$$

5.1.1 Estabilidad del sistema en lazo cerrado

Teorema 1. El sistema en lazo cerrado (5.6) es exponencialmente estable en el origen (5.7) mientras se cumplan las siguientes condiciones:

- A. $k_0k_1 > 1$
- B. $k_0^22k_2 - k_2^2 - (k_0 + 1) > 0$
- C. $k_1k_2 - k_1(k_0 + 1) > 0$
- D. $k_2(k_0 - 1) - \left(\frac{k_2^2 - 2k_2}{2}\right)^2 > 0$.

Para comprobar las condiciones mencionadas en el teorema 1 se utiliza el criterio de estabilidad según Lyapunov, para esto se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{2} [e_1 \ e_2 \ e_3] P_1 [e_1 \ e_2 \ e_3]^T \tag{5.8}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} k_0 k_1 & -1 & k_2 \\ -1 & 1 & -1 \\ k_2 & -1 & k_0 + 1 \end{bmatrix}$$

donde P_1 es una matriz simétrica definida positiva bajo las dos primeras condiciones mencionadas anteriormente, según el teorema de Sylvester, explicado en la sección 2.2. La derivada de (5.8) con las soluciones de (5.6) está dada por

$$\dot{V}(e_1, e_2, e_3) = -[e_1 \ e_2 \ e_3] Q_1 [e_1 \ e_2 \ e_3]^T \quad (5.9)$$

con

$$Q_1 = \begin{bmatrix} k_1 k_2 - k_1(k_0 + 1) & 0 & \frac{1}{2}(k_2^2 - 2k_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(k_2^2 - 2k_2) & 0 & k_2(k_0 - 1) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Para terminar de comprobar que el sistema es estable, la derivada de (5.8) debe ser negativa. Para esto, la matriz Q_1 debe ser simétrica y definida positiva, lo que se cumple siguiendo las 2 últimas condiciones mencionadas arriba.

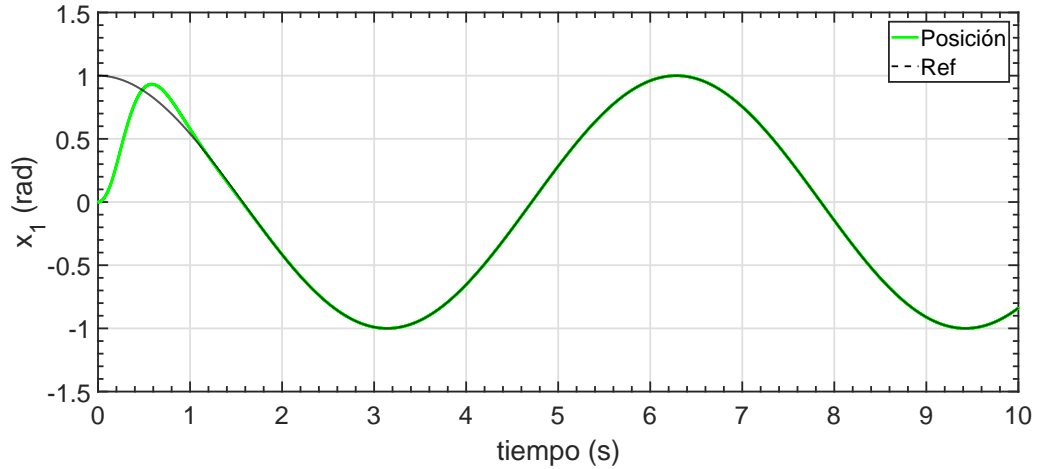
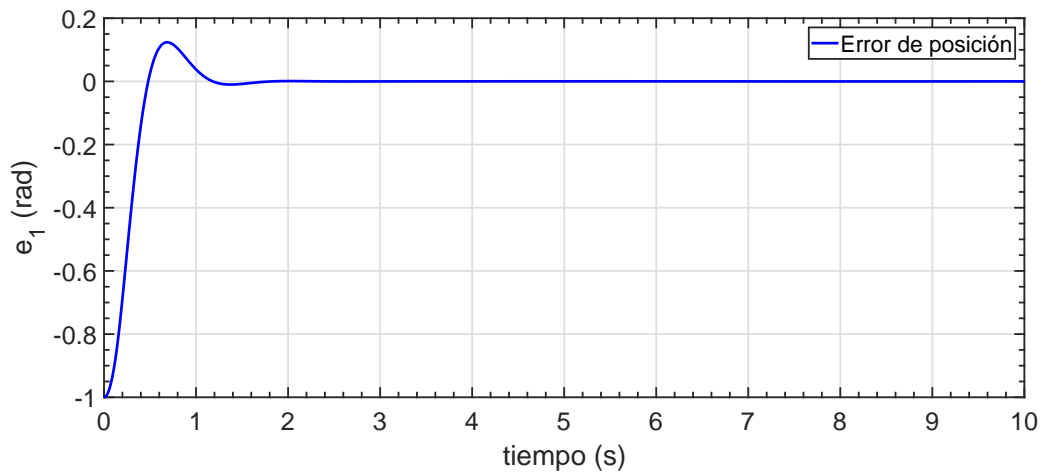
5.1.2 Simulación

Para probar el rendimiento del controlador sin medición de velocidad propuesto, se utilizó MatLab. Para la configuración de la simulación se utilizó el método de ODE 1, con paso fijo y un tiempo de muestreo de 0.001 segundos. Las ganancias del controlador fueron: $k_1 = 1.5$, $k_2 = 25$ y $k_3 = 11$. La condición inicial es $x(0) = 1$ rad. y la trayectoria deseada o señal de referencia es $x_d = \text{sen}(t)$. Para este controlador no se utilizó perturbación. Las ganancias se sintonizaron para tratar de obtener el mejor resultado posible en la simulación.

Resultados y conclusiones

Los resultados de la simulación se pueden encontrar en las figuras 5.1 - 5.4. En la figura 5.1 se muestra la posición y la señal de referencia, después de 1.1 segundos aproximadamente esta llega a su punto más cercano a la referencia y oscila alrededor de esta con un valor de ± 0.00015 , como se puede ver en la figura 5.3, la cual es una ampliación de la figura 5.2, donde se muestra el error entre la posición x_1 y la referencia x_d . Por último se tiene la figura 5.4, que muestra la señal de control.

Al agregar una perturbación al controlador se vuelve más difícil encontrar una combinación de ganancias que cumplan con las condiciones para mantenerlo estable y al mismo tiempo hagan converger la trayectoria a la referencia, por lo que no es un controlador que pueda absorber perturbaciones por sí solo.

Figura 5.1: Posición x_1 (Simulación)Figura 5.2: Error de posición e_1 (Simulación)

5.2 ESTIMADOR DE PERTURBACIONES E INCERTIDUMBRES

El control por modos deslizantes es usado por su característica de robustez ante perturbaciones, sin embargo, requiere el conocimiento de los valores por los cuales están acotadas dichas perturbaciones e incertidumbres. Además de esto, el control resultante es discontinuo. Al agregar un estimador de perturbaciones e incertidumbres (UDE) se mantiene la señal continua en la entrada de control y los valores que acotan a la perturbación.

Se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u + w(t) \end{aligned} \tag{5.11}$$

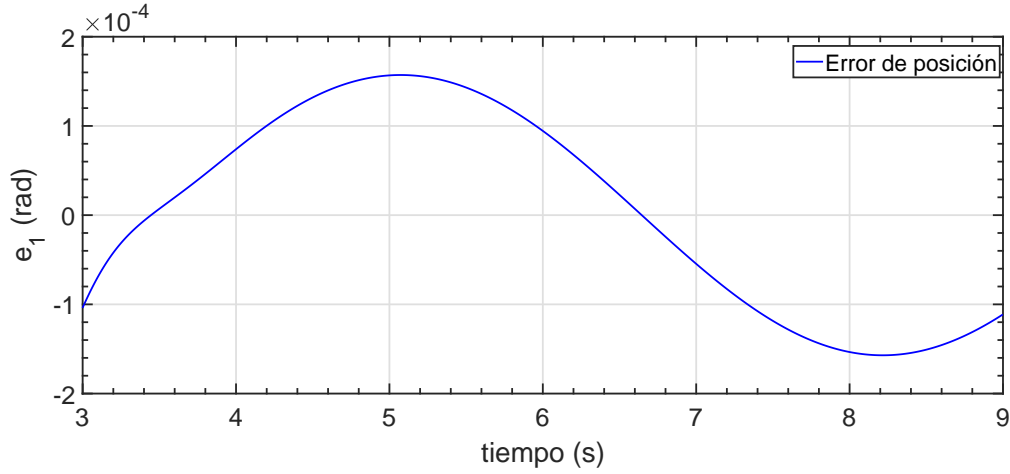


Figura 5.3: Amplitud de error de posición e_1 (Simulación)

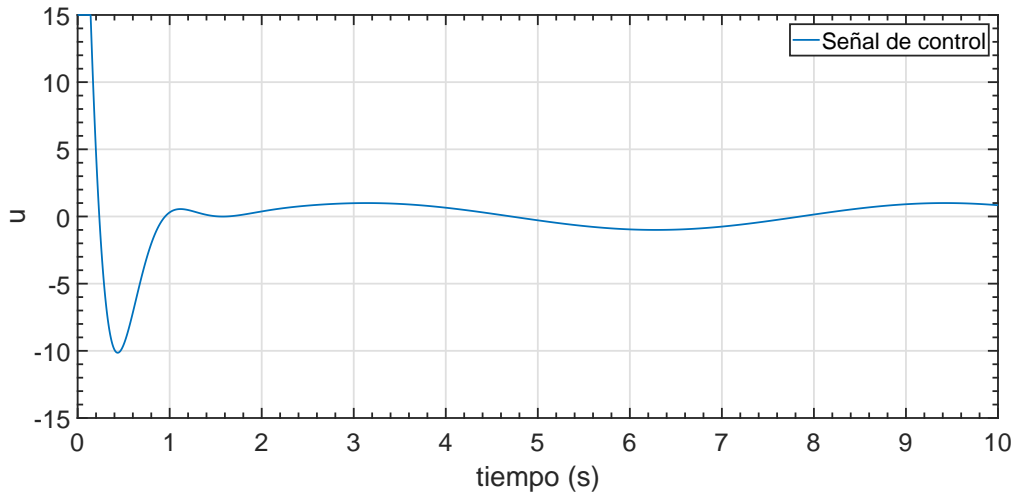


Figura 5.4: Señal de control u (Simulación)

para el cual se diseña el siguiente controlador con UDE:

$$u = -g(x)^{-1}(f(x) - \tau - \ddot{x}_d + u_d) \tag{5.12}$$

donde u_d es la parte del control que compensa el efecto de las incertidumbres. Sustituyendo el control en (5.12) en el sistema (5.11) se obtiene el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tau + \ddot{x}_d + w(t) - u_d. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Resolviendo para $w(t)$ se obtiene

$$w(t) = \dot{x}_2 - \tau - \ddot{x}_d + u_d \tag{5.14}$$

Con la ecuación (5.14) se puede calcular un estimado de $w(t, x, y)$ siguiendo el procedimiento de [42], aplicando un filtro pasa bajas se obtiene

$$\hat{w}(t) = G_f(s)(\dot{x}_2 - \tau - \ddot{x}_d + u_d), \quad (5.15)$$

donde \hat{w} es un aproximado de w y $G_f(s)$ es un filtro pasa bajas con una constante de tiempo β

$$G_f(s) = \frac{1}{s\beta}. \quad (5.16)$$

Se selecciona $u_d = \hat{w}(t)$ y usando \hat{w} de (5.15) se obtiene

$$u_d = G_f(s)(\dot{y} - \tau - \ddot{x}_d + u_d) \quad (5.17)$$

y resolviendo para u_d resulta en

$$u_d = (I - G_f(s))^{-1}G_f(s)(\dot{y} - \tau - \ddot{x}_d). \quad (5.18)$$

Con el uso de la ley de control diseñada (5.5) y el estimador de perturbaciones (5.18), se obtiene un controlador en lazo cerrado robusto, que elimina el efecto de las perturbaciones externas y las incertidumbres. Es importante notar que las perturbaciones e incertidumbres deben ser constantes y no variantes en el tiempo, para que el estimador pueda eliminarlas.

5.2.1 Estabilidad del estimador de perturbaciones

Para probar la estabilidad del estimador de perturbaciones se utiliza (5.14) y (5.15) para tener

$$\hat{w}(t) = G_f(s)w(t), \quad (5.19)$$

usando (5.16) y (5.19) se puede obtener

$$\dot{\tilde{w}} = -\frac{\tilde{w}}{\beta} - \dot{w} \quad (5.20)$$

donde $\tilde{w} = w - \hat{w}$. Se puede notar que si $\dot{w} = 0$ entonces el error \tilde{w} es asintóticamente estable, de otra manera la solución va a permanecer uniformemente acotada mientras $|\dot{w}| \geq \delta$ permanezca válida, hay que tener en cuenta que δ es una constante positiva, esto puede ser analizado usando la siguiente función de Lyapunov

$$V(\tilde{w}) = \tilde{w}^2/2 \quad (5.21)$$

cuya derivada se calcula para obtener

$$\dot{V} = \tilde{w}\dot{\tilde{w}} = -\frac{\tilde{w}^2}{\beta} - \tilde{w}\dot{w} \leq -\frac{\tilde{w}^2}{\beta} + \delta|\tilde{w}| \quad (5.22)$$

el lado derecho de la desigualdad anterior es definida no negativa, porque cerca del origen, el termino lineal positivo domina al termino cuadrático negativo $-\tilde{w}^2/\beta$. Sin embargo, \dot{V} es negativo fuera del conjunto $|\dot{w}| \leq \delta$. Por lo tanto, las soluciones son uniformemente acotadas.

De (5.20) se puede observar que la elección del valor de la constante de tiempo del filtro (β), afecta la precisión del error del estimador de perturbación, esto significa que un valor más pequeño llevara a un error más pequeño de estimación. También se puede notar que la estimación no depende de la magnitud de la incertidumbre como tal, pero si depende de la tasa de cambio de \dot{w} .

La estabilidad asintótica para la dinámica del error puede siempre ser asegurada si una derivada mayor de la incertidumbre es igual a cero. Por ejemplo, si $\dot{w} \neq 0$ pero otra derivada mayor de w es cero, entonces la estabilidad asintótica de la dinámica de error puede ser garantizada si se escoge un filtro de orden superior apropiado en lugar del escogido en (5.16). Para mostrar esto, se asume que $\dot{w} \neq 0$ pero $\ddot{w} \approx 0$. Ahora se selecciona un filtro de segundo orden como:

$$G_f(s) = \frac{1 + 2\beta s}{1 + 2\beta s + \beta^2 s^2}. \tag{5.23}$$

Siguiendo un procedimiento similar al usado para (5.16), la dinámica de error de la estimación de incertidumbre puede obtenerse como

$$\ddot{\tilde{w}} = -\frac{\tilde{w}}{\beta^2} - 2\frac{\dot{\tilde{w}}}{\beta} + \dot{w} \tag{5.24}$$

donde las dinámicas de error ($\tilde{w}, \dot{\tilde{w}}$) son asintóticamente estables bajo la suposición de que $\dot{w} = 0$. Siguiendo un procedimiento similar, este acercamiento puede ser extendido para los casos en los que una derivada más alta de la perturbación sea cero. En general, si la k-esima derivada de la perturbación w , es cero, entonces se puede verificar que la estabilidad asintótica de las dinámicas de error está garantizada si se escoge un filtro de la forma

$$G_f(s) = \frac{(1 + \beta s)^k - (\beta s)^k}{(1 + \beta s)^k}. \tag{5.25}$$

El control u_d es derivado bajo la suposición de que alguna derivada de w es despreciablemente pequeño, esto es que cualquier w que pueda ser aproximada por funciones de tipo $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$ donde $a_i, i = 0, 1, 2, \dots$ son constantes desconocidas. Esto hace que el diseño de u_d sea práctico en muchas situaciones. El control u_d no existe para sistemas en donde w, \dot{w} , etc. son discontinuos.

5.2.2 Estabilidad del sistema en lazo cerrado con el estimador de perturbaciones

Seleccionando $u_d = \hat{w}(t)$ y sustituyendo en (5.13) da como resultado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \tau + \ddot{x}_d + w(t) - \hat{w}(t). \end{aligned} \tag{5.26}$$

Reescribiendo el sistema (5.26) en función de los errores y sustituyendo (5.5) y (5.20), el sistema en lazo cerrado toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2 \\
 \dot{e}_2 &= -k_1(k_0 + 1)e_1 - 2k_2e_3 + \tilde{w} \\
 \dot{e}_3 &= -k_1e_1 - k_2e_3 \\
 \dot{\tilde{w}} &= -\frac{\tilde{w}}{\beta} - \dot{w}.
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Teorema 2. El sistema en lazo cerrado (5.27) es exponencialmente estable de manera global en el origen $e = [e_1, e_2, e_3, \tilde{w}]^T \in \mathfrak{R}^4 = 0$, mientras que $\dot{w} = 0$ y las condiciones dadas en el teorema 1 se cumplan, así como las siguientes condiciones:

- E. $k_0^2k_1 + k_0k_1 - k_2^2 > 0$
- F. $(k_2(\beta - 4)(4k_2 - 4k_1 + 4k_1k_2 + 4k_0^2k_1 - 4k_2^2 + k_2^3 - 4k_0k_1k_2))/16\beta > 0$

Para probar estas condiciones, se tiene la función candidata de Lyapunov:

$$V(e_1, e_2, e_3, \tilde{w}) = \frac{1}{2} [e_1 \ e_2 \ e_3 \ \tilde{w}] P_2 [e_1 \ e_2 \ e_3 \ \tilde{w}]^T \tag{5.28}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} k_0k_1 & -1 & k_2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ k_2 & -1 & k_0 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde P_2 es una matriz simétrica definida positiva Bajo las condiciones A, B, y E. La derivada de (5.28) esta dada por:

$$\dot{V}(e_1, e_2, e_3, \tilde{w}) = - [e_1 \ e_2 \ e_3 \ \tilde{w}] Q_2 [e_1 \ e_2 \ e_3 \ \tilde{w}]^T \tag{5.29}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} k_1k_2 - k_1(k_0 + 1) & 0 & \frac{1}{2}(k_2^2 - 2k_2) & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \\ \frac{1}{2}(k_2^2 - 2k_2) & 0 & k_2(k_0 - 1) & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1/\tau \end{bmatrix}$$

siendo Q_2 una matriz simétrica definida positiva bajo las condiciones C, D, y F.

5.3 EXTENSIÓN PARA SISTEMAS MECÁNICOS DE N G.D.L.

Para sistemas de n g.d.l. se utiliza el modelo dinámico de Lagrange expuesto en el capítulo 2, descrito como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} = \tau \quad (5.30)$$

Donde $M(q)$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva, la matriz $C(q, \dot{q})$ es llamada matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, el vector $g(q)$ de fuerzas gravitacionales, B es la matriz de fricción viscosa y τ es un vector de fuerzas externas, equivalente a los pares que accionan las articulaciones.

Definiendo las variables de estado como $x_1 = q$ y $x_2 = \dot{q}$, la representación en el espacio de estados del sistema (5.30) es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ M(x_1)^{-1}[\tau_u - C(x_1, x_2)x_2 - Bx_2] \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

se considera τ_u como la entrada de control y está dada por:

$$\tau_u = M(x_1)\ddot{x}_d + C(x_1, \dot{x}_d)\dot{x}_d + B\dot{x}_d + \tau_c \quad (5.32)$$

donde $x_d = [x_{d1} \dots x_{dn}]^T$ es el vector de trayectorias deseadas. Se definen variables de error $z_1 = x_1 - x_d$ y $z_2 = x_2 - \dot{x}_d$, el algoritmo de control propuesto τ_c es:

$$\begin{aligned} \tau_c &= -K_1 z_1 - z_3 \\ \dot{z}_3 &= -K_1 z_1 - K_2 z_3 \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde K_1 y K_2 son matrices diagonales definidas positivas de ganancias ajustables. El sistema en lazo cerrado en función de las variables de error $z = [z_1, z_2, z_3]^T$ queda definido como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -M^{-1}(x_1)[K_1 z_1 + z_3 + C(x_1, x_2)x_2 - C(x_1, \dot{x}_d)\dot{x}_d + Bz_2] \\ \dot{z}_3 &= -K_1 z_1 - K_2 z_3. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Para terminar de definir el sistema en función de las variables de error en los términos que multiplican a la matriz C , se hace uso de las propiedades de la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis presentadas en la Sección 4.3 de [18], donde se comprueba que la siguiente equivalencia es válida:

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2)x_2 &= C(x_1, z_2 + \dot{x}_d)(z_2 + \dot{x}_d) \\ &= C(x_1, z_2)(z_2 + \dot{x}_d) + C(x_1 + \dot{x}_d)(z_2 + \dot{x}_d) \\ &= C(x_1 + z_2)z_2 + C(x_1, z_2)\dot{x}_d \\ &\quad + C(x_1, \dot{x}_d)z_2 + C(x_1, \dot{x}_d)\dot{x}_d \\ &= C(x_1, z_2)z_2 + 2C(x_1, \dot{x}_d)z_2 + C(x_1, \dot{x}_d)\dot{x}_d \end{aligned} \quad (5.35)$$

Por lo que sustituyendo (5.35) en (5.34) da el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -M^{-1}(x_1)[K_1 z_1 + z_3 + C(x_1, x_2)z_2 + 2C(x_1, \dot{x}_d)z_2 + Bz_2] \\ \dot{z}_3 &= -K_1 z_1 - K_2 z_3.\end{aligned}\tag{5.36}$$

5.3.1 Prueba de estabilidad

Comprobar que el algoritmo de control propuesto anteriormente permanece estable dentro de las condiciones que se establecerán es la parte más importante y le da solidez a la base teórica del controlador.

Teorema 3. Escogiendo $K_2 \neq I$, el punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado en (5.36) se establece en $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) = (0, 0, 0)$ y se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$\begin{aligned}V(z_1, z_2, z_3) &= \frac{1}{2}z_1^T K_1 z_1 + z_1^T M(x_1)z_2 + z_1^T I z_3 \\ &\quad + \frac{1}{2}z_2^T M(x_1)z_2 + \frac{1}{2}z_3^T I z_3.\end{aligned}\tag{5.37}$$

La estabilidad del sistema existe si la función definida en (5.37) es definida positiva y radialmente acotada. Para comprobar esto se procede a obtener la cota inferior de la función en (5.37):

$$V(z_1, z_2, z_3) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \\ \|z_3\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_1\} & \lambda_{\max}\{M\} & 1 \\ \lambda_{\max}\{M\} & \lambda_{\min}\{M\} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \\ \|z_3\| \end{bmatrix}\tag{5.38}$$

Las condiciones para mantener $V(z_1, z_2, z_3) > 0$ son $\lambda_{\min}\{K_1\} > 0$ y $\lambda_{\min}\{K_1\} \lambda_{\min}\{M\} > \lambda_{\max}\{M\}^2 + \lambda_{\min}\{M\}$. De la misma manera se puede demostrar que la función de Lyapunov (5.37) esta acotada superiormente:

$$V(z_1, z_2, z_3) \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \\ \|z_3\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{\max}\{K_1\} & \lambda_{\min}\{M\} & 1 \\ \lambda_{\min}\{M\} & \lambda_{\max}\{M\} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \\ \|z_3\| \end{bmatrix}\tag{5.39}$$

La expresión anterior es definida positiva y radialmente acotada si las condiciones $\lambda_{\max}\{K_1\} > 0$ y $\lambda_{\max}\{K_1\} \lambda_{\max}\{M\} > \lambda_{\min}\{M\}^2 + \lambda_{\max}\{M\}$ se cumplen sintonizando K_1 , esto prueba que (5.37) es una función definida positiva, usando la derivada probamos también que es una función decreciente. Por lo que su derivada está dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(z_1, z_2, z_3) &= -2z_1^T K_1 z_1 + z_2^T (M - 2C(x_1, \dot{x}_d) - B)z_2 - z_3^T K_2 z_3 \\ &\quad - z_1^T (K_1 + K_2 + I)z_3 + z_1^T (\frac{1}{2}\dot{M} - 2C(x_1, \dot{x}_d) - B)z_2\end{aligned}\tag{5.40}$$

donde fue usada la propiedad $\frac{1}{2}\dot{M} - C = 0$ mostrada en la sección 4.3 de [18]. Después de esto se acota superiormente la derivada $\dot{V}(z_1, z_2, z_3)$ por una función definida negativa en términos de los estados z_1 , z_2 y z_3 . Para llevar esta tarea a acabo es conveniente encontrar limites superiores para cada uno de los términos en (5.40). El termino $-2z_1^T K_1 z_1$ es acotado superiormente por:

$$-2z_1^T K_1 z_1 \leq -2\lambda_{\min} \{K_1\} \|z_1\|^2 \quad (5.41)$$

después se hace lo mismo al acotar superiormente los términos cruzados:

$$-z_1^T (K_1 + K_2 + I) z_3 \leq (\lambda_{\max} \{K_2\} + \lambda_{\max} \{K_1\} + 1) \|z_1\| \|z_3\|, \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} z_1^T (\frac{1}{2}\dot{M} - 2C(x_1, \dot{x}_d) - B) z_2 &\leq \\ (\frac{1}{2}\lambda_{\max} \{\dot{M}\} + 2k_{c1} \|\dot{x}_d\| + \lambda_{\max} \{B\}) \|z_1\| \|z_2\|, \end{aligned} \quad (5.43)$$

los 3 términos en función de z_2 son acotados por:

$$\begin{aligned} z_2^T (M - 2C(x_1, \dot{x}_d) - B) z_2 &\leq \\ \lambda_{\max} \{M\} + 2k_{c1} \|\dot{x}_d\| - \lambda_{\min} \{B\} \|z_2\|^2 \end{aligned} \quad (5.44)$$

donde se utilizó la propiedad de la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis $\|C(x_1, \dot{x}_d) z_2\| \leq k_{c1} \|\dot{x}_d\| \|z_2\|$, la constante k_{c1} y como obtener su valor están descritos en la sección 4.3 de [18]. Y para acotar los términos que contienen z_3 :

$$z_3^T K_2 z_3 \leq -\lambda_{\min} \{K_2\} \|z_3\|^2. \quad (5.45)$$

Las cotas o limites expresados en (5.41)-(5.45) apuntan al hecho de que la derivada respecto al tiempo $\dot{V}(z_1, z_2, z_3)$ en (5.40) satisface lo siguiente:

$$\dot{V}(z_1, z_2, z_3) \leq - \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \\ \|z_3\| \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} \|z_1\| \\ \|z_2\| \\ \|z_3\| \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= 2\lambda_{\min} \{K_1\} \\
R_{12} &= -\frac{1}{4}\lambda_{\max} \{\dot{M}\} - k_{c1}|\dot{x}_d| - \lambda_{\max} \{B\} / 2 \\
R_{13} &= -\lambda_{\max} \{K_1\} / 2 - \lambda_{\max} \{K_2\} / 2 - 1/2 \\
R_{21} &= -\frac{1}{4}\lambda_{\max} \{\dot{M}\} - k_{c1}|\dot{x}_d| - \lambda_{\max} \{B\} / 2 \\
R_{22} &= -\lambda_{\max} \{M\} - 2k_{c1}|\dot{x}_d| + \lambda_{\min} \{B\} \\
R_{23} &= 0 \\
R_{31} &= -\lambda_{\max} \{K_1\} / 2 - \lambda_{\max} \{K_2\} / 2 - 1/2 \\
R_{32} &= 0 \\
R_{33} &= \lambda_{\min} \{K_2\}
\end{aligned}$$

La matriz R se puede mantener definida positiva ajustando los valores de K_1 , K_2 y respetando la desigualdad $\lambda_{\min} \{B\} > 2k_{c1}|\dot{x}_d| + \lambda_{\max} \{M\}$. Para terminar de probar la estabilidad asintótica global del sistema en lazo cerrado, se aplica el principio de invarianza de LaSalle's al sistema [20]. Además, definiendo $z = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T \in \mathbb{R}^3$ y citando el Teorema 4.10 en [19], dado el hecho que (5.36) tiene la forma $\dot{z} = f(z)$. Siendo $V(z)$ una función continua y diferenciable tal que:

$$\kappa_1 \|z\|^a \leq V(z) \leq \kappa_2 \|z\|^a \quad (5.47)$$

y también

$$\frac{\partial V}{\partial z} f(z) \leq -\kappa_3 \|z\|^a \quad (5.48)$$

para todo $t \geq 0$ y $z \in \mathbb{R}^3$, donde las constantes κ_1 , κ_2 , κ_3 y $a > 0$. Entonces $z = 0$ es exponencialmente estable de forma global.

5.3.2 Experimento

El experimento se realiza en un sistema mecánico de 2 g.d.l. de un robot manipulador tipo SCARA, como el que se muestra en la figura 5.5. Para la adquisición de datos se utilizo un equipo de dSPACE y software Simulink de MatLab. El modelo del robot mostrado en (2.16) que se estudió en la sección 2.3.1 es el utilizado en el experimento.

Los parámetros del robot utilizados para el modelo se muestran en la tabla 5.1, la trayectoria deseada es $x_d = 0.4 \sin(t)$. Las ganancias del controlador utilizadas son las mostradas en la tabla 5.2. Se hicieron dos experimentos, uno sin perturbación y otro con perturbación. Para el caso del segundo experimento se utilizo una perturbación $w = 4 \sin(2t)$. Las condiciones iniciales se encuentran en la tabla 5.3.

Tabla 5.1: Parámetros robot SCARA

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Masa eslabón 1	m_1	4	kg
Masa eslabón 2	m_2	3.5	kg
Distancia al centro de masa eslabón 1	l_{c1}	0.25	m
Distancia al centro de masa eslabón 2	l_{c2}	0.3	m
Longitud eslabón 1	l_1	0.5	m
Longitud eslabón 2	l_2	0.4	m
Inercia del centro de masa eslabón 1	I_1	0.5	kg m^2
Inercia del centro de masa eslabón 2	I_2	0.5	kg m^2
Fricción eslabón 1	b_1	11	N m
Fricción eslabón 2	b_2	8	N m

Tabla 5.2: Ganancias del controlador

Ganancia	Eslabón 1	Eslabón 2
k_1	300	200
k_2	200	200

Tabla 5.3: Condiciones iniciales

Elemento	Eslabón 1	Eslabón 2
$x_1(0)$	0 rad	0 rad
$x_d(0)$	0.4 rad	0.4 rad



Figura 5.5: Robot SCARA de 2 g.d.l.

5.3.3 Resultados

Para el experimento sin perturbación, se obtienen los resultados mostrados en las figuras 5.6 - 5.13. Las figuras 5.6 y 5.7 muestran la posición y la señal de referencia de los eslabones 1 y 2 respectivamente. En estas figuras se puede observar como la trayectoria converge a la referencia en menos de 0.5 segundos en ambos eslabones. En las figuras 5.8 y 5.9 se muestra la variable de error entre la posición de los eslabones y la señal de referencia. En las figuras 5.12 y 5.13 se hace un acercamiento a la variable de error cuando las trayectorias de los eslabones llegaron a la referencia, mostrando como la posición se queda oscilando alrededor de la referencia con un error de ± 0.013 . Por último, en las figuras 5.10 y 5.11 se puede observar las señales del control con las que el controlador alimenta al robot, en donde hay un pico grande al principio, debido a que las condiciones iniciales de los eslabones son diferentes a las de la señal de referencia.

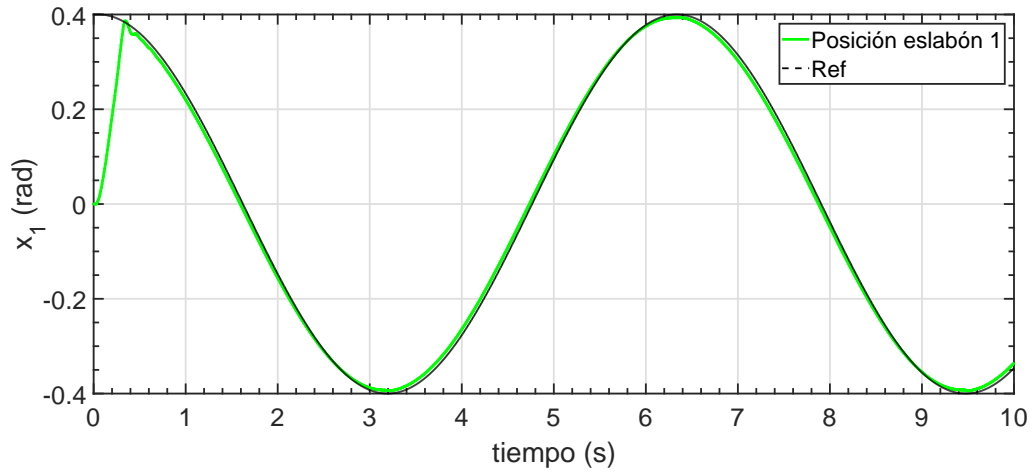


Figura 5.6: Medición de posición x_1 eslabón 1 (experimento sin perturbación)

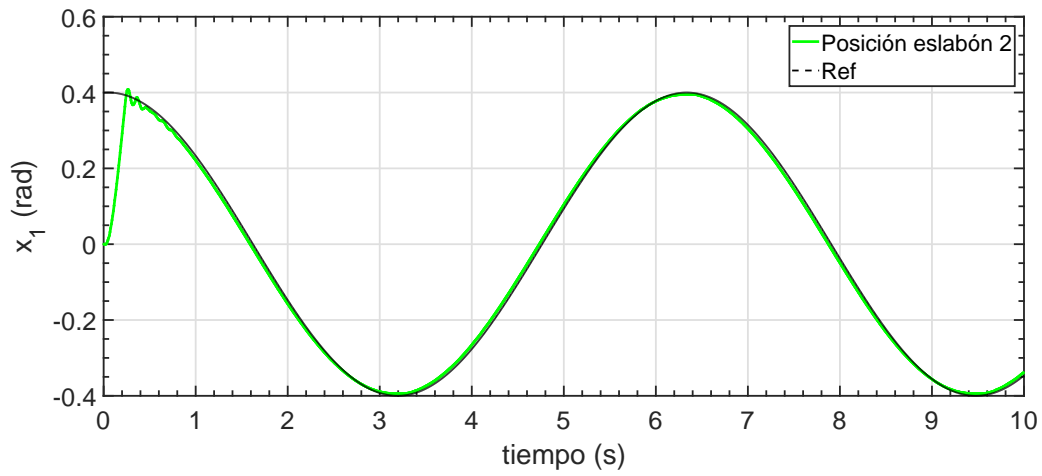


Figura 5.7: Medición de posición x_1 eslabón 2 (experimento sin perturbación)

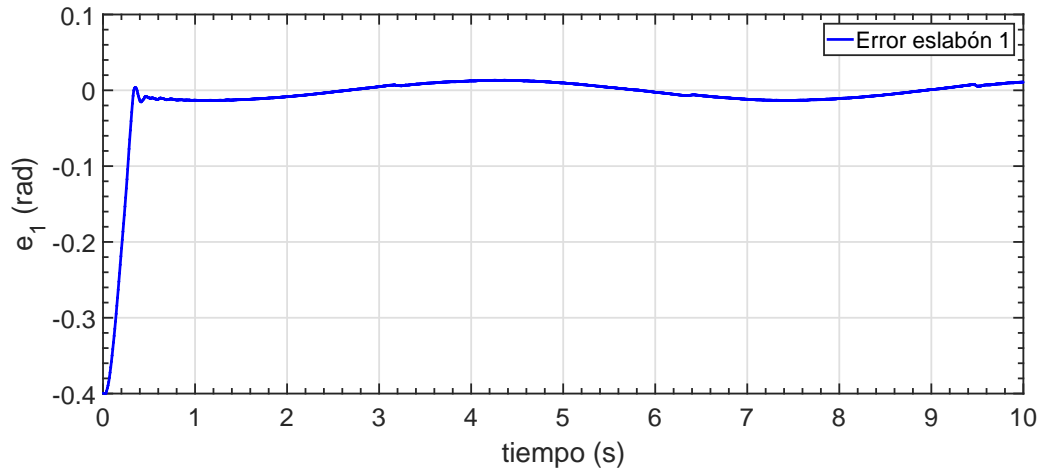


Figura 5.8: Error de posición e_1 eslabón 1 (experimento sin perturbación)

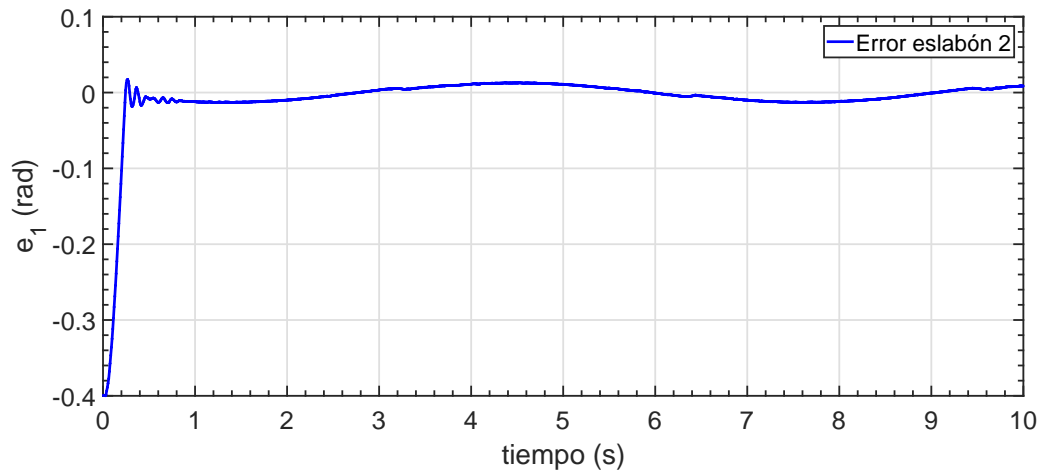
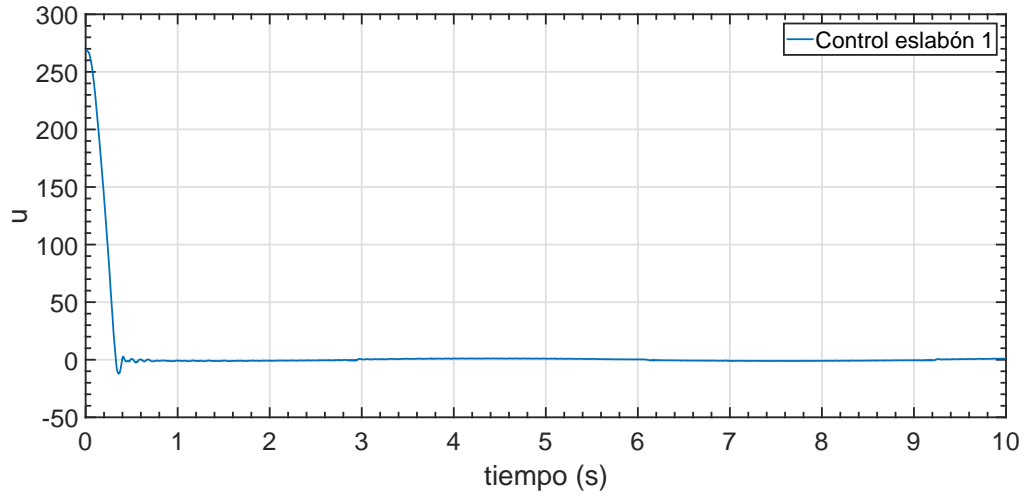
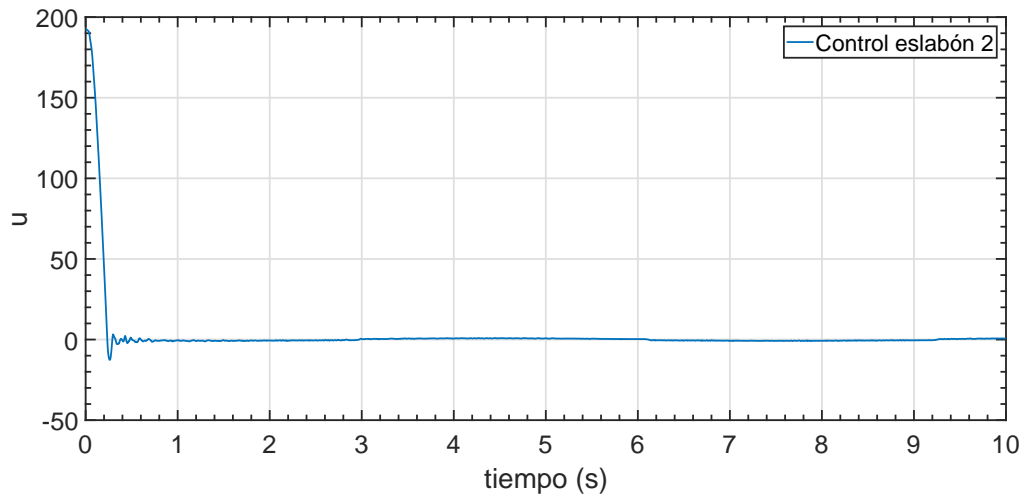


Figura 5.9: Error de posición e_1 eslabón 2 (experimento sin perturbación)

Figura 5.10: Señal de control u eslabón 1 (experimento sin perturbación)Figura 5.11: Señal de control u eslabón 2 (experimento sin perturbación)

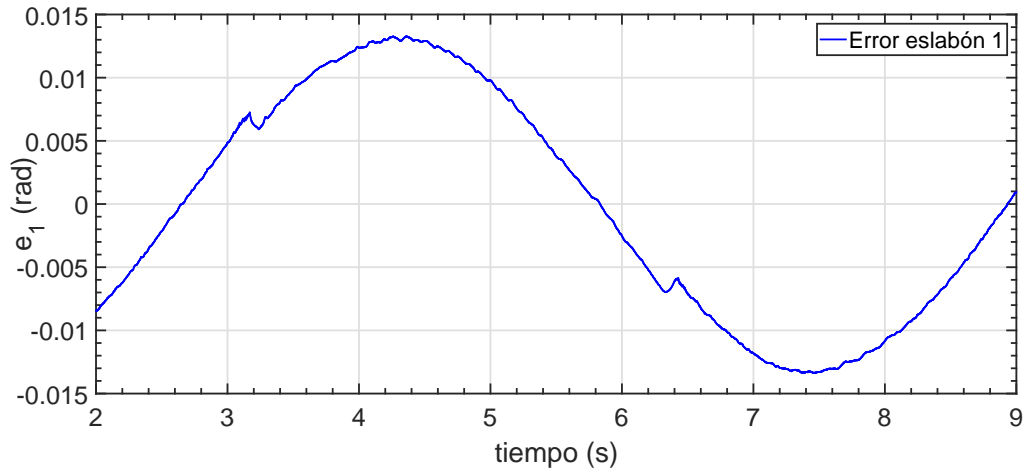


Figura 5.12: Amplitud error de posición e_1 eslabón 1 (experimento sin perturbación)

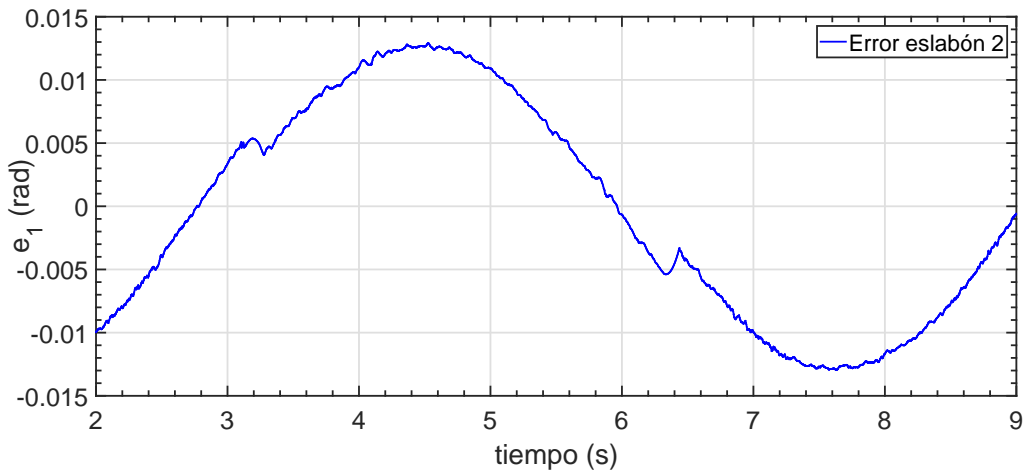


Figura 5.13: Amplitud error de posición e_1 eslabón 2 (experimento sin perturbación)

En el caso con perturbación, se presentan los resultados en las figuras 5.14 - 5.21. Los resultados son similares a los mostrados en el experimento anterior donde no se introducía una perturbación, sin embargo, las trayectorias tratan de seguir a la referencia con un error mayor. La amplitud del error después de que las trayectorias alcanzan la señal de referencia difiere con un error aproximado de ± 0.022 . El agregar una perturbación ocasiono que el error entre la posición y la referencia creciera, pero el sistema no se desestabilizo.

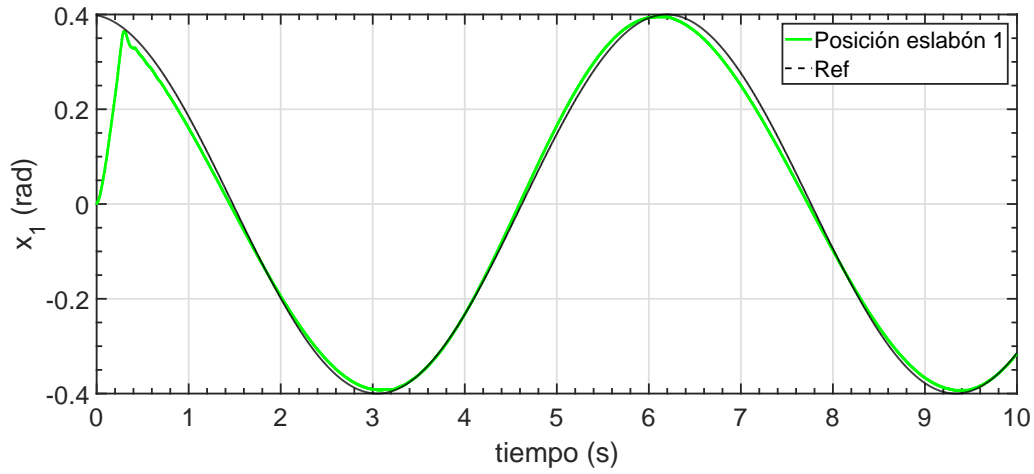


Figura 5.14: Medición de posición x_1 eslabón 1 (experimento con perturbación)

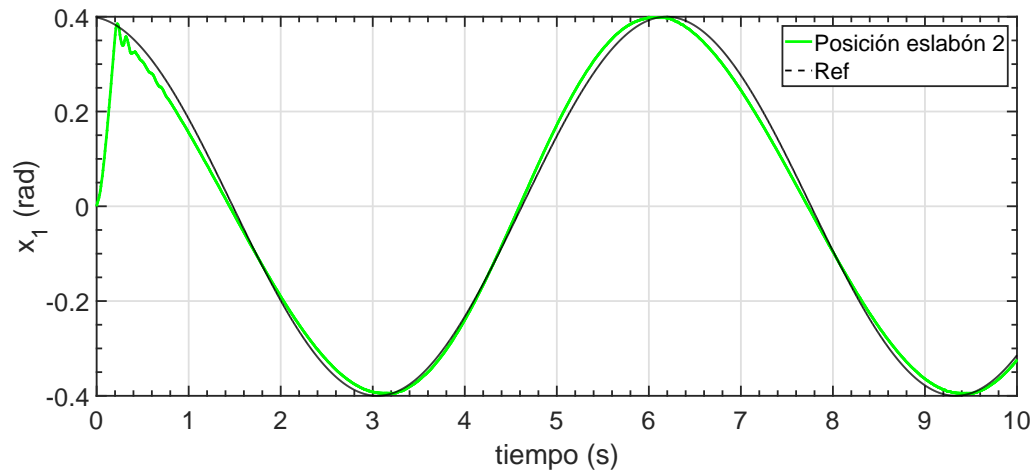
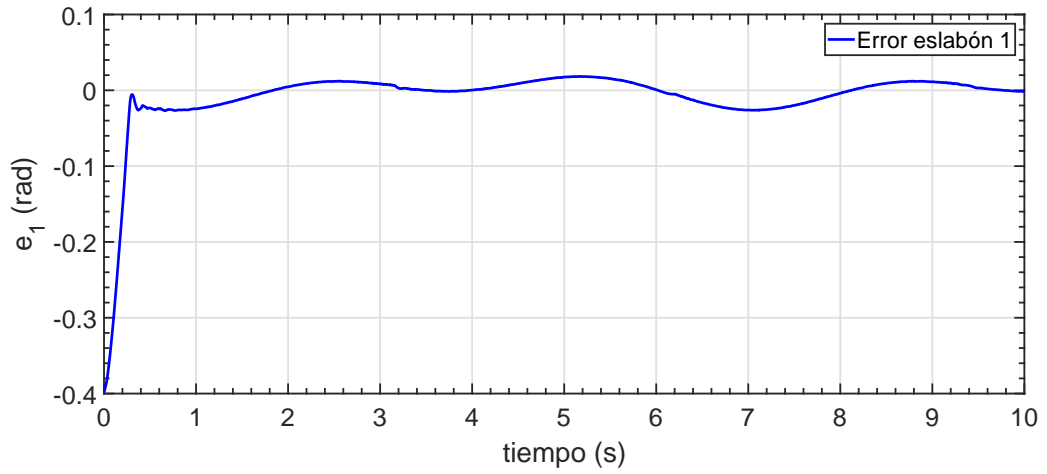
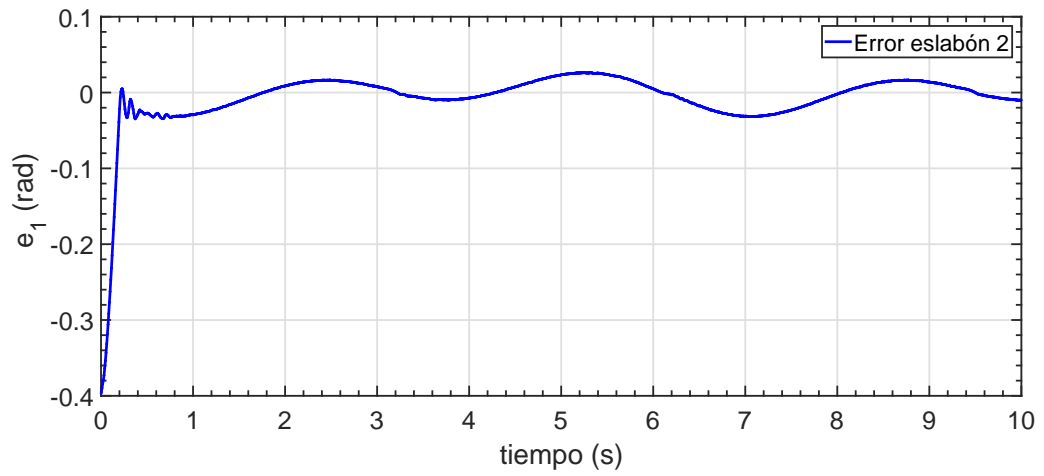
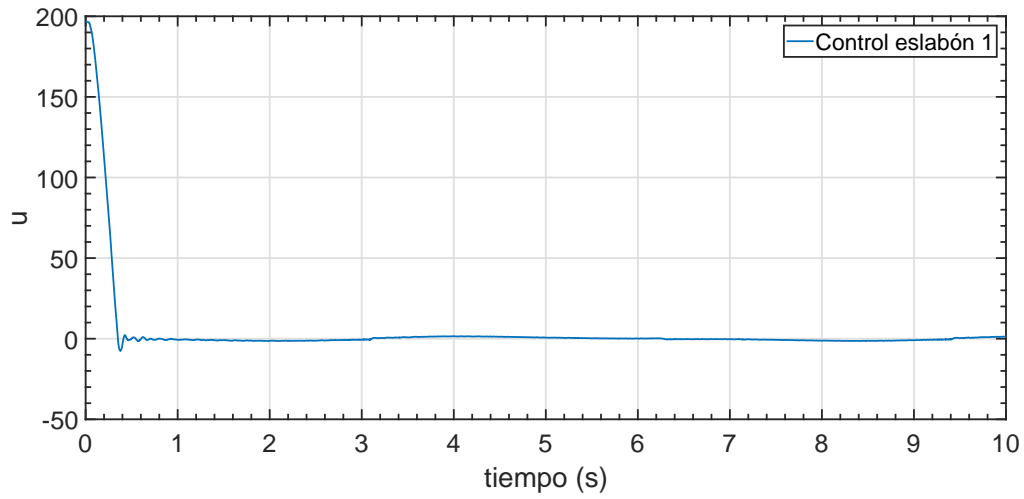
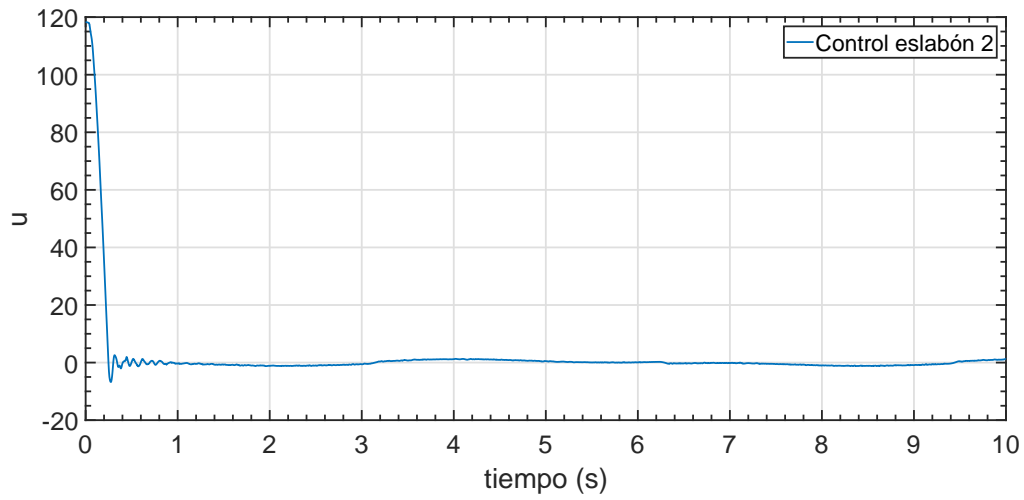


Figura 5.15: Medición de posición x_1 eslabón 2 (experimento con perturbación)

Figura 5.16: Error de posición e_1 eslabón 1 (experimento con perturbación)Figura 5.17: Error de posición e_1 eslabón 2 (experimento con perturbación)

Figura 5.18: Señal de control u eslabón 1 (experimento con perturbación)Figura 5.19: Señal de control u eslabón 2 (experimento con perturbación)

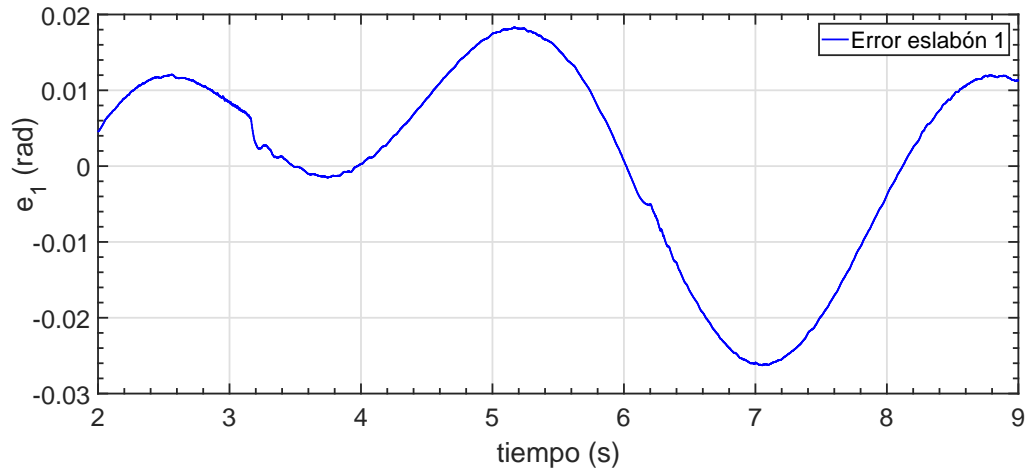


Figura 5.20: Amplitud error de posición e_1 eslabón 1 (experimento con perturbación)

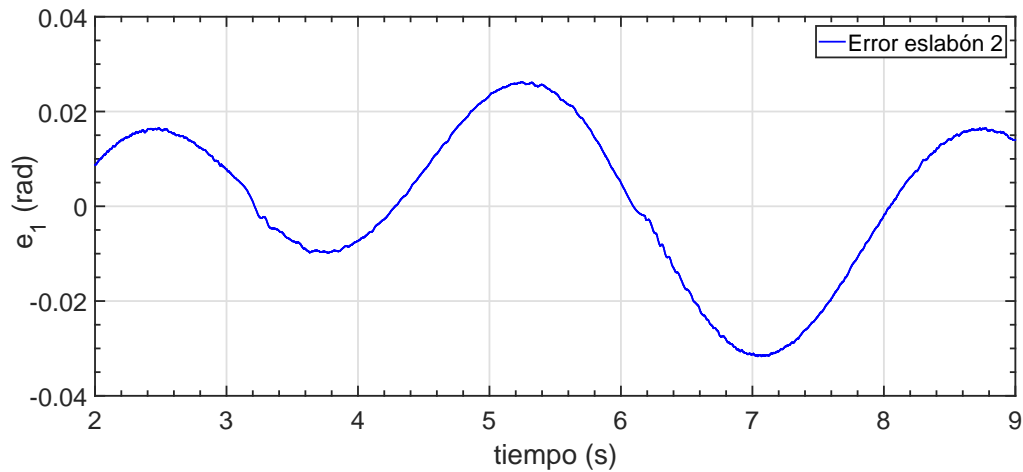


Figura 5.21: Amplitud error de posición e_1 eslabón 2 (experimento con perturbación)

5.4 DISEÑO DE CONTROLADOR DISCONTINUO SIN MEDICIÓN DE VELOCIDAD

El estimador de perturbaciones minimiza algunas de las desventajas de utilizar un método por modos deslizantes, como lo es la discontinuidad del controlador resultante y el hecho de tener que saber el valor que acota la perturbación que afecta al sistema. Sin embargo, su estabilidad depende de la derivada de la perturbación (\dot{w}), la cual debe permanecer lo suficientemente pequeña ($\ddot{w} \approx 0$) para que pueda compensarla correctamente.

Otra opción para mantener la robustez en el controlador dinámico sin el uso de velocidad es implementar un término discontinuo en el algoritmo de control que pueda compensar las perturbaciones e incertidumbres que afectan al sistema.

para resolver el objetivo de control de seguimiento de trayectoria para un sistema mecánico gobernado por las siguientes ecuaciones en el espacio de estados:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.49)$$

$$\dot{x}_2 = f(x) + g(x)u - \varphi x_2.$$

En el que se considera que x es el vector de estado de la forma $x = [x_1 \ x_2]^T$, $u \in \mathfrak{R}$ es la entrada de control, la función no lineal $f(x) \in \mathfrak{R}$ es el sistema nominal, $g(x) \in \mathfrak{R}$ es una función conocida y φ es una constante para la fricción la cual debe ser conocida para poder usarla en el controlador. El siguiente control se propone para compensar al sistema nominal:

$$u = -g(x)^{-1} (f(x) - \tau - \ddot{x}_d - \varphi \dot{x}_d) \quad (5.50)$$

en donde el primer término es una compensación y τ es el algoritmo de control diseñado. Después de sustituir el control en (5.49) el sistema en lazo cerrado resultante es

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.51)$$

$$\dot{x}_2 = \tau + \ddot{x}_d - \varphi(x_2 - \dot{x}_d).$$

Para cumplir el objetivo de control de seguimiento de trayectoria se realiza un cambio de variable para expresar el sistema en función del error de la medición de la posición respecto a la trayectoria deseada x_d . Se define $e_1 = x - x_d$ y $e_2 = \dot{x} - \dot{x}_d$. El sistema (5.51) queda ahora definido en función del error como

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad (5.52)$$

$$\dot{e}_2 = \tau - \varphi e_2.$$

Se propone el siguiente algoritmo de control discontinuo, sin requerir de la medición de la velocidad:

$$\tau = -k_1 e_1 - 2(k_2 - k_3)e_3 - k_4 \text{sign}(e_1) \quad (5.53)$$

$$\dot{e}_3 = -k_1 e_1 - k_2 e_3$$

Sustituyendo el algoritmo de control en el sistema de (5.52) obtenemos un sistema en lazo cerrado de la siguiente forma

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$\dot{e}_2 = -k_1 e_1 - 2(k_2 - k_3)e_3 - k_4 \text{sign}(e_1) - \varphi e_2 \quad (5.54)$$

$$\dot{e}_3 = -k_1 e_1 - k_2 e_3.$$

5.4.1 Estabilidad en lazo cerrado

Teorema 4. El sistema en lazo cerrado (5.54) es exponencialmente estable en el origen mientras se cumplan las siguientes condiciones:

- A. $k_1 > 0$
- B. $k_1 > 4(k_2 - k_3)^2$
- C. $k_2 > k_3$
- D. $k_1 k_2 (k_2 - k_3) > \frac{k_1^2}{4} + (k_2 (k_2 - k_3))^2$
- E. $k_1 k_2 \neq 2k_1 k_3 + k_2 k_4$

Para comprobar la estabilidad del sistema en lazo cerrado se trabaja con el punto de equilibrio en $(e_1, e_2, e_3) = (0, 0, 0)$ y se propone la siguiente ecuación de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} [e_1 \ e_2 \ e_3] A [e_1 \ e_2 \ e_3]^T + k_4 |e_1| \quad (5.55)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 2(k_2 - k_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(k_2 - k_3) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz A es simétrica y definida positiva bajo las condiciones A y B. La derivada de V está dada por

$$\dot{V}(e_1, e_2, e_3) = - [e_1 \ e_2 \ e_3] Q [e_1 \ e_2 \ e_3]^T \quad (5.56)$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} 2k_1(k_2 - k_3) & 0 & \frac{k_1}{2} + k_2(k_2 - k_3) \\ 0 & \varphi & 0 \\ \frac{k_1}{2} + k_2(k_2 - k_3) & 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

La matriz Q debe ser simétrica y semidefinida positiva siguiendo las condiciones C y D mencionadas arriba para asegurar la estabilidad asintótica de forma global en el sentido de Lyapunov [28] y el teorema de LaSalle [18]. Es necesario para que la estabilidad sea de forma global, que el punto de equilibrio sea único, y esto se logra mientras que se cumpla la condición E, mencionada arriba.

Tabla 5.4: Ganancias del controlador

Ganancia	Eslabón 1	Eslabón 2
k_1	9.9	9.9
k_2	4.5	4.6
k_3	3.4	3.4
k_4	5	14

5.4.2 Experimentos

El control diseñado (5.53) se aplica a uno de los eslabones del robot manipulador tipo SCARA, usado anteriormente y mostrado en la figura 5.5. Los experimentos en tiempo real se realizaron usando un DAQ en tiempo real de dSPACE y Simulink. El modelo del sistema mecánico utilizado es el siguiente:

Los parámetros del robot se muestran en la tabla 5.1. La trayectoria deseada se expresa en (5.58) en radianes. Las ganancias del controlador se encuentran en la tabla 5.4. Para la perturbación, se introdujo un vector afectando la señal de control gobernado por:

$$w(t) = \begin{bmatrix} 4 \sin(t) \\ 4 \sin(t) \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

$$x_d(t) = \begin{bmatrix} 0.4 \cos(t) \\ 0.4 \cos(t) \end{bmatrix}. \quad (5.58)$$

Es importante notar que las ganancias escogidas cumplen las condiciones estipuladas para estabilidad, y son solo una combinación de muchas otras posibles, la combinación de otras ganancias podría dar resultados diferentes. Las condiciones iniciales fueron $x_1(0) = [0 \ 0]^T$ y $x_d(0) = [0.4 \ 0.4]^T$

5.4.3 Resultados

En el experimento, el algoritmo de control fue capaz de mantener al robot manipulador siguiendo la trayectoria deseada. Los resultados se expresan en las figuras 5.22 - 5.29. En las figuras 5.22 y 5.23 se muestra la medición de la posición y la señal de referencia x_d del eslabón 1 y 2 respectivamente, la trayectoria alcanza la señal de referencia y se mantiene ahí. Para mostrar el error entre la medición de la posición y la señal de referencia en ambos eslabones, se muestran las figuras 5.24 y 5.25. En las figuras 5.26 y 5.27 se hace un acercamiento al error de posición, del segundo 2 al 9 en donde se aprecia a detalle lo ocurrido en esta zona. Por último, en las figuras 5.28 y 5.29 se muestra la señal del controlador que va hacia el actuador del sistema.

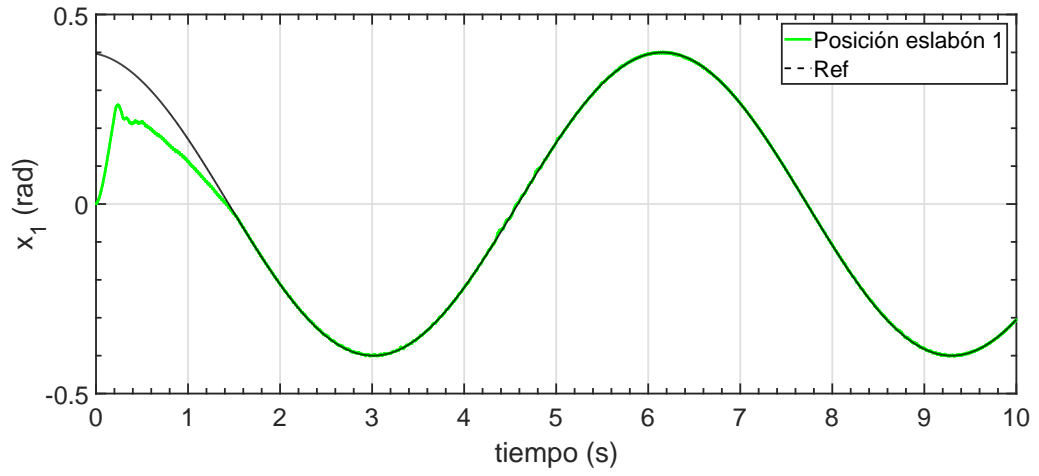


Figura 5.22: Medición de posición eslabón 1

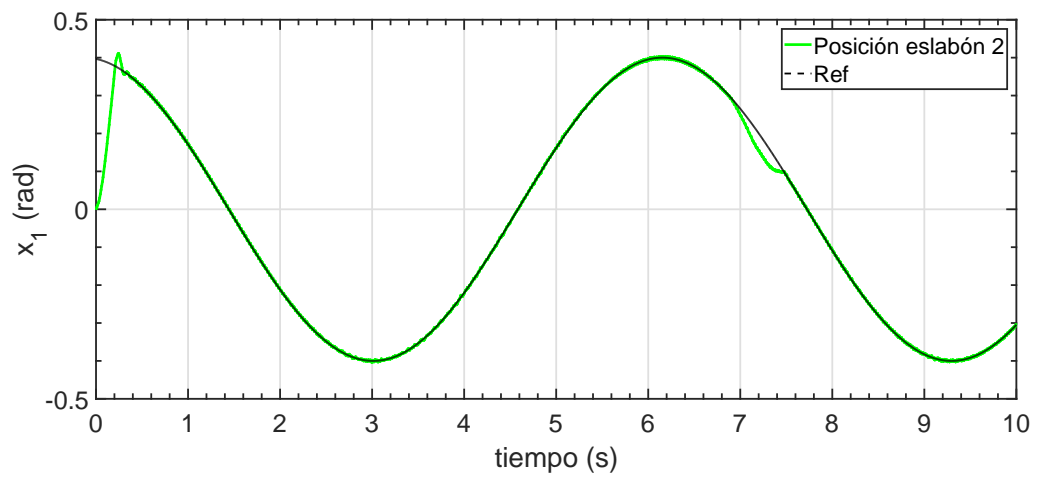


Figura 5.23: Medición de posición eslabón 2

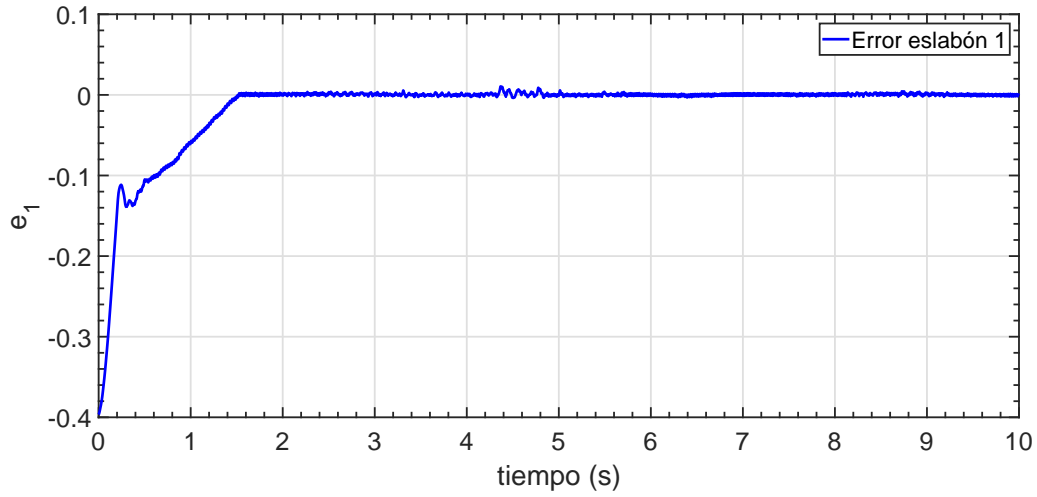


Figura 5.24: Error de posición eslabón 1

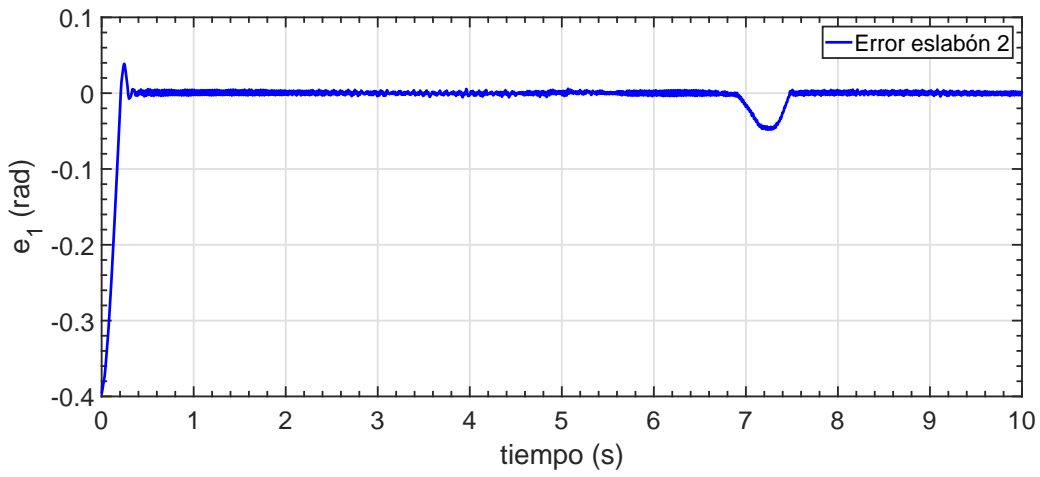


Figura 5.25: Error de posición eslabón 2

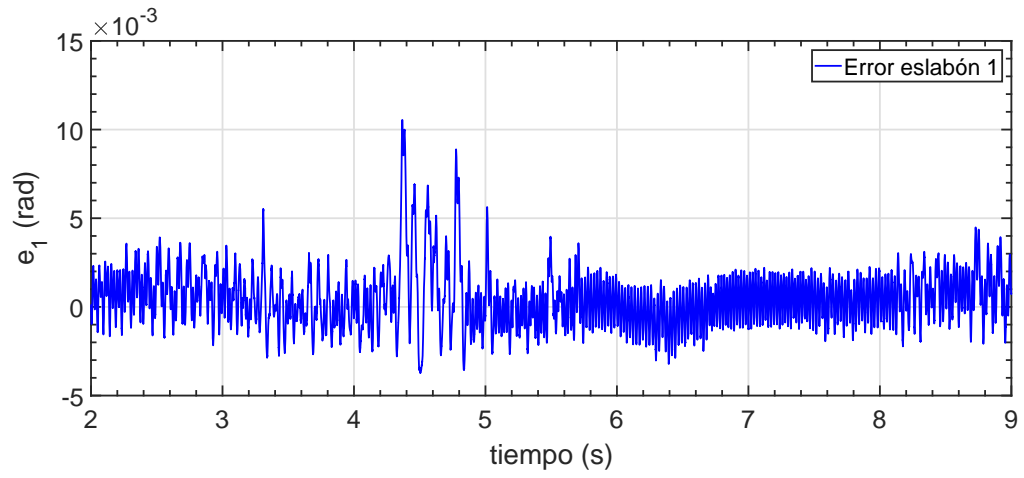


Figura 5.26: Acercamiento del error de posición eslabón 1

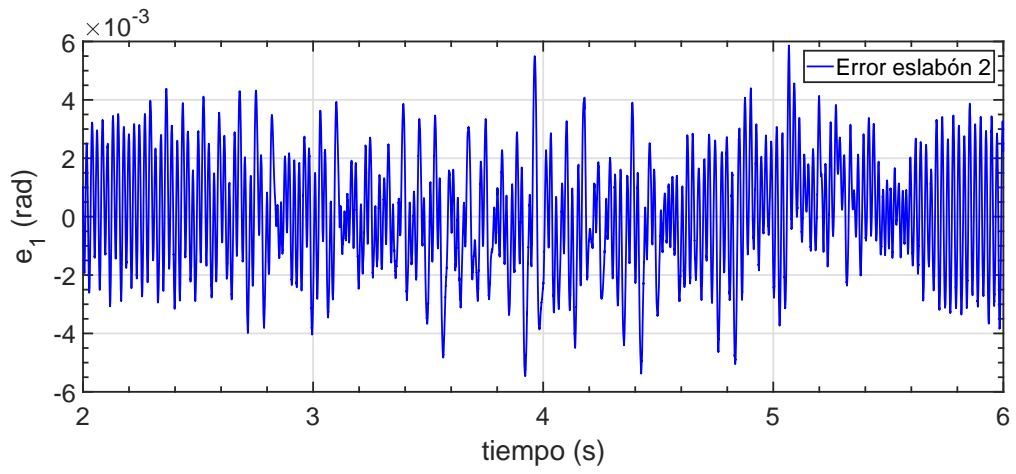


Figura 5.27: Acercamiento del error de posición eslabón 2

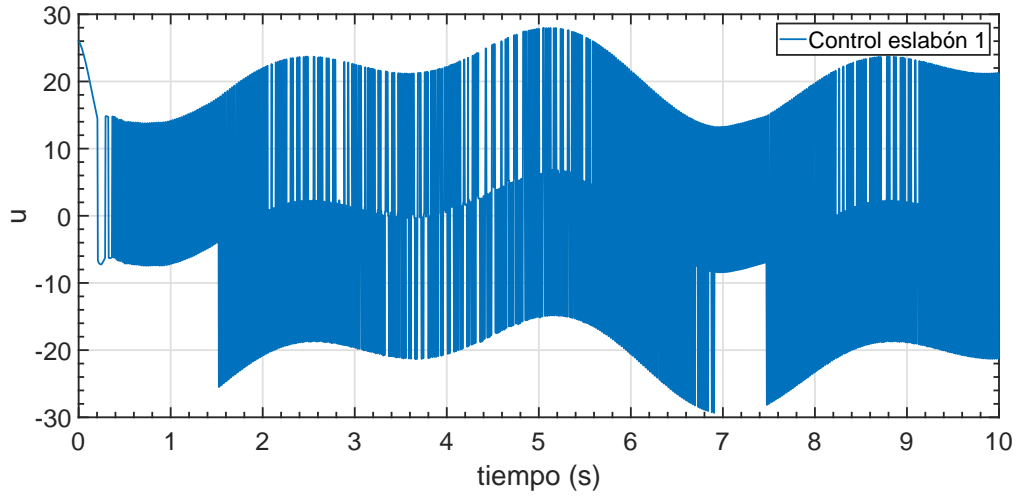


Figura 5.28: Señal de control para eslabón 1

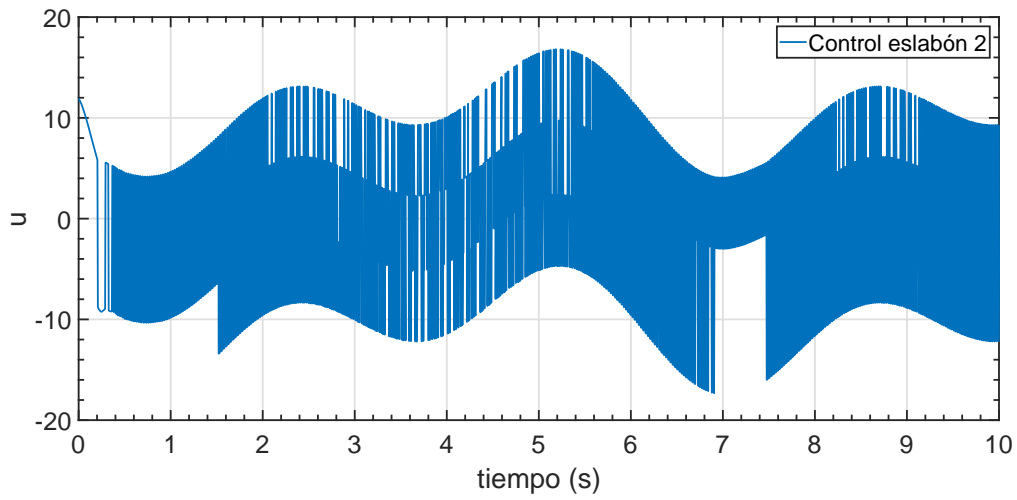


Figura 5.29: Señal de control para eslabón 2

CONCLUSIÓN

En esta tesis se han estudiado algunos de los controladores con comportamiento robusto que existen en la literatura, tales como el control por modos deslizantes (CMD) y el control por *Terminal Sliding Mode* (TSM), así mismo se desarrollaron pruebas de estabilidad, usando el método directo de Lyapunov como herramienta principal. Esto con el fin de estudiar su característica de robustez antes perturbaciones e incertidumbres paramétricas y poder aplicar su teoría en las bases de un nuevo controlador propuesto. El controlador estudiado usa la teoría de convergencia en tiempo finito del TSM para poder llevar las trayectorias al punto de equilibrio en tiempo finito, su implementación en sistemas mecánicos se convierte en una tarea fácil debido a que el controlador solo cuenta con dos ganancias sintonizables. La robustez es una característica importante de este controlador, su algoritmo le permite compensar perturbaciones acotadas una vez que las trayectorias están dentro de la superficie deslizante. El rendimiento comparado con el controlador por modos deslizantes de primer orden es similar, logrando alcanzar la trayectoria deseada más rápido y en tiempo finito, llevando el error de posición a cero más rápido y directo. Sin el comportamiento asintótico del controlador por modos deslizantes y sin aumentar el efecto de *chattering* en la señal de control.

La aportación principal de este trabajo, fue la línea de investigación que se siguió acerca de controladores dinámicos para seguimiento de trayectoria que no requieren medición de velocidad. Se realizaron tres variantes de este algoritmo: Controlador para sistemas de segundo orden de una entrada y una salida, extensión para sistemas lagrangianos y un controlador dinámico discontinuo robusto ante perturbaciones e incertidumbres.

Los experimentos realizados lograron demostrar que los controladores propuestos fueron capaces de cumplir con su objetivo de control y mantener estable el sistema en lazo cerrado. Aunque teóricamente el controlador dinámico para sistemas lagrangianos no es capaz de absorber perturbaciones e incertidumbres, en la práctica, el sistema se mantuvo estable aunque con un error de posición mayor, ante la presencia de una perturbación en la señal de control.

En las pruebas del controlador dinámico discontinuo, el controlador logra una convergencia satisfactoria de la posición hacia la referencia, haciéndolo en un tiempo menor a 0.4 segundos en ambos eslabones. Aunque la referencia es alcanzada se mantiene un error alrededor de ± 0.004 rad. con algunos picos con un valor más alto. Se probó que la respuesta ante la misma perturbación expuesta anteriormente, mejoró considerablemente, manteniendo un error mucho menor entre la posición real y la señal de referencia. Sin embargo, se presentó el efecto del *chattering*, la inherente desventaja de los controladores discontinuos, una franja de alta frecuencia en la señal de control, que ocasionó la vibración y calentamiento de los motores del robot donde se realizaron los experimentos.

El trabajo futuro para estos controladores propuestos, es la mejora y la optimización de su desempeño. La línea de investigación de los controladores por TSM sigue avanzando actualmente, agregando características y adaptándolo a sistemas diferentes. Así mismo el controlador dinámico sin medición de velocidad puede optimizarse buscando maneras de hacerlo robusto, suavizar la señal de control y reduciendo el *chattering*. Otra opción es lograr una convergencia en tiempo finito sin la necesidad de la medición de velocidad, así se podrían tener las ventajas de ambos controladores.

REFERENCIAS

- [1] O. Barambones y V. Etxebarria. «Robust sliding composite adaptive control for mechanical manipulators with finite error convergence time». En: *International Journal of Systems Science* 32.9 (2001), págs. 1101-1108.
- [2] O. Barambones y V. Etxebarria. «Energy-based approach to sliding composite adaptive control for rigid robots with finite error convergence time». En: *International Journal of Control* 75.5 (2002), págs. 352-359.
- [3] R.G. Bartle y D.R. Sherbert. *Introducción al análisis matemático de una variable*. Matemáticas (Limusa). Limusa, 1996. ISBN: 9789681851910.
- [4] G. Bartolini, A. Estrada y E. Punta. «Observation and output adaptive tracking for a class of nonlinear non-minimum phase systems». En: *International Journal of Control* 89.9 (2016), págs. 1807-1820.
- [5] I. Boiko, L. Fridman, R. Iriarte, A. Pisano y E. Usai. «Parameter tuning of second-order sliding mode controllers for linear plants with dynamic actuators». En: *Automatica* 42.5 (2006), págs. 833-839.
- [6] J. Burton y A. Zinober. «Continuous approximation of variable structure control». En: *International journal of systems science* 17.6 (1986), págs. 875-885.
- [7] J. Burton y A. Zinober. «Continuous self-adaptive control using variable structure design techniques». En: *Deterministic control of uncertain systems* 40 (1990), pág. 309.
- [8] C. Desoer y M. Vidyasagar. *Feedback systems: input-output properties*. Vol. 55. Siam, 1975.
- [9] K. Do, Z. Jiang y J. Pan. «On global tracking control of a VTOL aircraft without velocity measurements». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48.12 (2003), págs. 2212-2217.
- [10] C. Edwards y S. Spurgeon. *Sliding mode control: theory and applications*. Crc Press, 1998.
- [11] Y. Feng, X.o Yu y Z. Man. «Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators». En: *Automatica* 38.12 (2002), págs. 2159-2167.
- [12] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous right-hand sides*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1988.
- [13] I. Furtat, A. Fradkov e Y. Orlov. «State feedback finite time sliding mode stabilization using dirty differentiation». En: *IFAC-PapersOnLine* 50.1 (2017), págs. 9619-9624.
- [14] G. T. Gilbert. «Positive Definite Matrices and Sylvester's Criterion». En: *The American Mathematical Monthly* 98.1 (1991), págs. 44-46. ISSN: 00029890, 19300972.

- [15] A. Gutiérrez-Giles y M. Arteaga-Pérez. «GPI based velocity/force observer design for robot manipulators». En: *ISA transactions* 53.4 (2014), págs. 929-938.
- [16] B. Heck. «Sliding-mode control for singularly perturbed systems». En: *International Journal of Control* 53.4 (1991), págs. 985-1001.
- [17] U. Itkis. *Control systems of variable structure*. John Wiley & Sons, Incorporated, 1976. ISBN: 9780470150726.
- [18] R. Kelly y V. Santibáñez. *Control de movimiento de robots manipuladores*. Automática y Robótica. Pearson Educación, 2003. ISBN: 9788420538310.
- [19] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Macmillan Pub. Co., 1992. ISBN: 9780023635410.
- [20] J. La Salle. «An invariance principle in the theory of stability». En: (1966).
- [21] F. Lizarralde y J. Wen. «Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach». En: *IEEE transactions on Automatic Control* 41.3 (1996), págs. 468-472.
- [22] A. Loria. «Global tracking control of one degree of freedom Euler-Lagrange systems without velocity measurements». En: *European Journal of Control* 2.2 (1996), págs. 144-151.
- [23] A. Loria. «Observers are unnecessary for output-feedback control of Lagrangian systems». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 61.4 (2016), págs. 905-920.
- [24] D. Luenberger. «Observers for multivariable systems». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 11.2 (1966), págs. 190-197.
- [25] S. Mobayen. «Adaptive Global Terminal Sliding Mode Control Scheme with Improved Dynamic Surface for Uncertain Nonlinear Systems». En: *International Journal of Control, Automation and Systems* 16.4 (2018), págs. 1692-1700.
- [26] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Prentice Hall, 2010. ISBN: 9788483226605.
- [27] W. Perruquetti y Jean P. Barbot. *Sliding mode control in engineering*. Vol. 11. M. Dekker, 2002.
- [28] F. Reyes. *Robótica - control de robots manipuladores*. Alfaomega Grupo Editor, 2011. ISBN: 9786077073079.
- [29] J. Romero, R. Ortega e I. Sarras. «A globally exponentially stable tracking controller for mechanical systems using position feedback». En: *IEEE Transactions on Automatic Control* 60.3 (2015), págs. 818-823.
- [30] D. Rosas, J. Alvarez, P. Rosas y R. Rascon. «Robust observer for a class of nonlinear siso dynamical systems». En: *Mathematical Problems in Engineering* 2016 (2016).
- [31] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman y A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. 1st. Birkhäuser Basel, 2014. ISBN: 9781489991225.
- [32] V. Utkin. «On sliding mode equations in discontinuous systems—II». En: *Avtomatika Telemekh.* 2 (1972), págs. 51-61.
- [33] V. Utkin. *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media, 2013.

- [34] V. Utkin, J. Guldner y J. Shi. *Sliding mode control in electro-mechanical systems*. CRC press, 2009.
- [35] S. Venkataraman y S. Gulati. «Control of nonlinear systems using terminal sliding modes». En: *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 115.3 (1993), págs. 554-560.
- [36] L. Xin, Q. Wang e Y. Li. «A New Fast Nonsingular Terminal Sliding Mode Control for a Class of Second-Order Uncertain Systems». En: *Mathematical Problems in Engineering* 2016 (ene. de 2016), págs. 1-12. DOI: [10.1155/2016/1743861](https://doi.org/10.1155/2016/1743861).
- [37] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh y Z. Man. «Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode». En: *Automatica* 41.11 (2005), págs. 1957-1964.
- [38] X. Yu, Z. Man e Y. Wu. «Terminal sliding modes with fast transient performance». En: *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 2. 1997, 962-963 vol.2. DOI: [10.1109/CDC.1997.657567](https://doi.org/10.1109/CDC.1997.657567).
- [39] X. Yu, M. Zhihong, Y. Feng y Z. Guan. «Nonsingular terminal sliding mode control of a class of nonlinear dynamical systems». En: *IFAC Proceedings Volumes* 35.1 (2002), págs. 161-165.
- [40] D. Zhao, S. Li y F. Gao. «A new terminal sliding mode control for robotic manipulators». En: *International Journal of Control* 82.10 (2009), págs. 1804-1813.
- [41] Y. Zhao, Z. Duan y G. Wen. «Distributed finite-time tracking of multiple Euler-Lagrange systems without velocity measurements». En: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 25.11 (2015), págs. 1688-1703.
- [42] Q. Zhong y D. Rees. «Control of uncertain LTI systems based on an uncertainty and disturbance estimator». En: *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 126.4 (2004), págs. 905-910.
- [43] A. Zinober. «Adaptive relay control of second-order systems». En: *International Journal of Control* 21.1 (1975), págs. 81-98.
- [44] A. Zinober. «Self-adaptive control of the time-varying nonlinear crane problems with disturbances and state constraints.» En: *CONTROL COMP.* 14.3 (1986), págs. 103-109.
- [45] A. Zinober. «Deterministic control of uncertain systems». En: *Proceedings. ICCON IEEE International Conference on Control and Applications*. IEEE. 1989, págs. 645-650.