



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
BAJA CALIFORNIA**

**FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS**

***“FILTRAJE ESPACIAL OPTICO Y DIGITAL DE UNA  
IMAGEN SIMULADA DE LA SUPERFICIE DEL MAR  
QUE CONTIENE EL ESPECTRO TEORICO DE  
PIERSON-MOSKOWITZ.”***



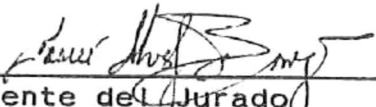
**TESIS**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**OCEANOLOGO**  
PRESENTA:  
**PEDRO NEGRETE REGAGNON**


**Ensenada, B. C., México, Noviembre de 1988**

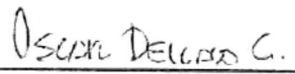
"FILTRAJE ESPACIAL OPTICO Y DIGITAL DE UNA  
IMAGEN SIMULADA DE LA SUPERFICIE DEL MAR  
QUE CONTIENE EL ESPECTRO TEORICO DE  
PIERSON-MOSKOWITZ."

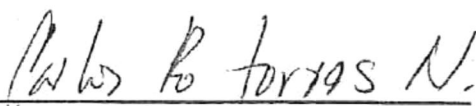
T E S I S  
QUE PRESENTA:  
PEDRO NEGRETE REGAGNON


Aprobada por:

  
\_\_\_\_\_  
Presidente del Jurado  
M.C. Josué Álvarez Borrego

  
\_\_\_\_\_  
Sinodal Propietario  
M.C. René Pinet Plasencia

  
\_\_\_\_\_  
Sinodal Propietario  
M.C. Oscar Delgado González

  
\_\_\_\_\_  
Sinodal Suplente  
M.C. Carlos Torres N.

  
\_\_\_\_\_  
Sinodal Suplente  
Oc. Asdrúbal Mtz. Díaz de L.

## RESUMEN

Se simulan numéricamente superficies marinas que contienen los espectros teóricos de Pierson-Neumann y de Pierson-Moskowitz. La técnica usada es una extensión a dos dimensiones de la teoría de sistemas lineales, desarrollada por Caruthers y Novarini (1971). Las superficies numéricas son impresas en película fotográfica utilizando un microdensitómetro en su modo de escritura. Se utilizó un programa de computación en FORTRAN para realizar el análisis espectral numérico de las superficies simuladas por medio de la transformada rápida de Fourier (FFT). Simultáneamente, se utiliza un sistema óptico coherente para obtener el espectro óptico de las imágenes simuladas del mar impresas en la película fotográfica. Esto último aprovecha la cualidad de las lentes convergentes de realizar la transformada de Fourier bidimensional del campo de luz difractado por la transparencia que contiene la imagen del mar.

Una de las superficies numéricas con el espectro de Pierson-Moskowitz es filtrada en frecuencia obteniéndose seis superficies con diferentes bandas de frecuencia del espectro original cada una. Así mismo, tales superficies son impresas en película fotográfica y se obtienen sus espectros ópticos. Se diseñan filtros espaciales para obstruir los puntos de luz asociados a las frecuencias no deseadas en el sistema óptico y realizar un filtrado de la imagen original similar al numérico llevado a cabo.

Se observa una gran semejanza entre los espectros obtenidos ópticamente y los espectros obtenidos digitalmente. En general, ámbos métodos resuelven bien las frecuencias presentes en las superficies simuladas del mar. Se observa mayor precisión en el análisis y filtrado numérico, sin embargo, el sistema óptico, por ser en tiempo real, es mucho más rápido y manioerable. Finalmente se discute brevemente la aplicación de ambos métodos en el análisis espectral de fotografías reales de la superficie del mar.

DEDICADA A LA MEMORIA DE

**RAFAEL RODRIGUEZ AMORES**

MI AMIGO

Y DE

**CARLOS REGAGNON PRADO**

MI ABUELO

## AGRADECIMIENTOS

Al DADOR DE VIDA, por la misma para aprender.

A mi MADRE y mi PADRE, por darme una enorme parte de sí mismos.

A mi ABUELO y mi ABUELA, por darme un mundo de cariño y apoyo.

A Anita, Tito, Gabriel, Nefi, Charlie, Poli, Iris y David, los seres más maravillosos que conozco.

A Vero, por hacerse querer tanto y ser la mujer de mi vida.

Al SER que llena mi vida de ilusiones y anhelos.

A Rafael Rodríguez Amores, quien fue un hermano para mí.

A la Profa. Rosa Elena, por su invaluable ayuda y su cariño de madre, así como a sus hijas, Diana, Minerva y Mylene por todo su apoyo y cariño.

A Josué, por hacerme un campito en su proyecto y empujarme hacia adelante como un hermano mayor.

Al CONACYT por el apoyo económico otorgado, bajo el proyecto PCCNCNA-050000.

A todo el personal del Centro de Cómputo del CICESE, por las facilidades prestadas, especialmente a Conchita, quien siempre supo sacarme de los problemas.

A Ricardo Villagómez y Paty Alemán, por enseñarme algo de fotografía y por su interés en la calidad de las imágenes del microdensitómetro.

A Keni, quien pacientemente hacía una y otra vez las gráficas debido a mis errores.

A todo el personal de la división de Física Aplicada, por su ayuda.

Al Pollo, que sin saber como, escribió la tesis en la computadora.

A Amelia y Gilda, que siempre me pasaban las llamadas del

Pollo y me ayudaron.

A Ricardo Peón, Héctor Valenzuela, Carlos Gutiérrez y Marcos Martínez, por su amistad.

A mis compañeros, por todos los ratos alegres compartidos juntos.

A mis maestros, por enseñarme lo poco que sé.

A Toda la gente que me ayudó a lo largo de estos cinco años.

## INDICE GENERAL

Lista de Tablas	VIII
Lista de Figuras	VIII
1.- INTRODUCCION	1
1.1 Introducción y Antecedentes	1
1.2 Objetivos	8
1.3 Contenido	10
2.- SIMULACION DE LAS SUPERFICIES MARINAS	11
2.1 Parámetros y propiedades estadísticas	12
2.2 Modelado de superficies rugosas aleatorias	14
2.3 Modelado de los mares con los espectros teóricos	20
2.4 Impresión de las imágenes en película fotográfica	24
3.- ANALISIS NUMERICO DE LAS SUPERFICIES MARINAS SIMULADAS	28
3.1 Análisis de Fourier	29
3.2 Transformada discreta de Fourier	31
3.3 Filtrado por análisis de Fourier	34
3.4 Espectros de densidad de energía	34
3.5 Implementación numérica en dos dimensiones	39
4.- ANALISIS OPTICO DE LAS SUPERFICIES SIMULADAS	44
4.1 Ondas planas	45
4.2 La integral de difracción	49
4.3 Transformada de Fourier por una lente	54
4.4 Sistema óptico coherente	59
5.- RESULTADOS	62
6.- DISCUSIONES	99
7.- CONCLUSIONES	107
LITERATURA CITADA	111

## LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
V.1	Relación entre la posición de los números de onda en el espectro numérico y su localización en el plano de Fourier (espectro óptico).	72
V.11	Características de los mares filtrados	74

## LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
2.1	Espectros teóricos de densidad de energía en función de la frecuencia angular $\omega$ .	22
2.2	Calibración de la película fotográfica TECHNICAL PAN 2415 (ESTAR-AH BASE) Kodak (tomada de Alvarez, 1987).	27
3.1	Diagrama de bloques usado para obtener los espectros numéricos de densidad de energía de las superficies marinas simuladas.	42
4.1	Cosenos directores	48
4.2	Geometría de difracción	48
4.3	Representación esquemática de la transformación de Fourier llevada a cabo por una lente.	56
4.4	Sistema óptico coherente usado para la obtención de espectros ópticos de las imágenes simuladas del mar.	60
5.1	Gráfica del espectro de dos lados obtenidos mediante el análisis espectral numérico de uno de los mares generados con el espectro teórico de Pierson-Moskowitz.	63

Figura	(continuación)	Página
5.2	Espectro teórico de densidad de energía de Pierson-Moskowitz de un solo lado, en función del número de onda $K_x$ y $K_y$ .	64
5.3	Perfiles de los espectros obtenidos mediante el análisis numérico de los mares generados con el espectro teórico de Pierson-Neumann.	66
5.4	Igual que la figura 5.3 pero para los mares generados con el espectro teórico de Pierson-Moskowitz.	67
5.5	Gráfica de un mar simulado de 100 x 100 datos que contiene el espectro de Pierson-Moskowitz.	68
5.6	Amplificación fotográfica de una imagen simulada del mar que contiene el espectro de Pierson-Moskowitz.	69
5.7	Espectro óptico de la imagen de la figura 5.6.	71
5.8	Mar simulado de 100 x 100 datos que contiene solo las altas frecuencias en la dirección $K_x$ . Las longitudes de ondas presentes en la dirección $x$ , son de 5.48 a 13.00 m.	77
5.9	Igual que en la figura 5.8 pero que contiene las bajas frecuencias en $K_x$ . Las longitudes de onda presentes son de 52.00 a 570.00 m.	78
5.10	Igual que la figura 5.8 pero para la banda más importante de frecuencias en $K_x$ . Las longitudes de onda presentes en $x$ son de 13.00 a 52.00 m.	79
5.11	Igual que para la figura 5.8 pero para las frecuencias altas e intermedias. Las longitudes de onda presentes en $x$ son de 5.48 a 52.00 m.	80
5.12	Igual que la figura 5.8 pero para las altas frecuencias en $K_y$ . Las longitudes de onda presentes en $y$ son de 10.90 a 23.00 m.	81
5.13	Igual que la figura 5.12 pero para las bajas frecuencias en $K_y$ . Las longitudes de onda presentes en $y$ son de 23.00 a 870.00 m.	82

(continuación)		
Figura		Página
5.14	Espectro óptico (a) y espectro numérico (b) - del mar filtrado con altas frecuencias en Kx de - la figura 5.8.	85
5.15	Espectro óptico (a) y espectro numérico (b) del mar filtrado con bajas frecuencias en Kx de la figura 5.9.	86
5.16	Espectro óptico (a) y espectro numérico (b) del mar filtrado con la banda importante de frecuencias en Kx de la figura 5.10 .	87
5.17	Espectros (a) óptico y numérico (b) del mar filtrado con las frecuencias intermedias y altas en Kx de la figura 5.11 .	88
5.18	Espectros (a) óptico y (b) numérico del mar filtrado con las frecuencias altas en Ky, de la figura 5.12	89
5.19	Espectros (a) óptico y (b) numérico del mar filtrado con las bajas frecuencias en Ky de la figura 5.13.	90
5.20	Reconstrucción en el sistema óptico de la - imagen del mar completo de la figura 5.6 pero filtrando los puntos luminosos con información del rayado del microdensitómetro visibles en la figura 5.7 (a).	91
5.21	Imágenes filtradas con las altas frecuencias en Kx, (a) numéricamente y (b) ópticamente.	92
5.22	Imágenes filtradas con las bajas frecuencias en Kx.	93
5.23	Imágenes filtradas con la banda importante de frecuencias en Kx.	94
5.24	Imágenes filtradas con las frecuencias altas e intermedias en Kx.	95
5.25	Imágenes filtradas con las altas frecuencias en Ky.	96
5.26	Imágenes filtradas con las bajas frecuencias en Ky.	97

FILTRAJE ESPACIAL OPTICO Y DIGITAL DE UNA IMAGEN SIMULADA  
DE LA SUPERFICIE MARINA QUE CONTIENE EL ESPECTRO TEORICO  
DE PIERSON-MOSKOWITZ.

1.- INTRODUCCION

*1.1 Introducción y Antecedentes*

Fué hasta hace cerca de 40 años cuando se iniciaron los primeros intentos para predecir las características de las olas oceánicas sobre las playas de Normandia. Durante la segunda guerra mundial, grupos de científicos concentraron su atención en la predicción del oleaje con la intención de encontrar condiciones que permitieran el desembarco de tropas y vehículos anfibios en las playas enemigas (Silvester, 1974).

El grupo en los Estados Unidos fué dirigido por H.V. Sverdrup y W.H. Munk (en 1947), quienes usaron datos visuales para relacionar las velocidades del viento con las oscilaciones más distintivas de la compleja superficie marina (Silvester, 1974). Este trabajo fué posteriormente revisado y aumentado por Johnson (en 1950) y Bretschneider (en 1957), quedando como el

método S-M-B de predicción de oleaje (Kinsman, 1965).

El oleaje puede ser considerado como un proceso aleatorio, la palabra proceso introduce el concepto de tiempo o espacio y el termino aleatorio infliere su representación mediante una ley de probabilidad. Cuando dos registros de oleaje tomados razonablemente juntos (en tiempo o espacio) son graficados, prácticamente no presentan semejanza alguna. Sin embargo, las propiedades estadísticas pueden indicar la similitud de su origen. En algun sentido, las estadísticas permiten encontrar un orden en el caos de la superficie marina.

En 1952, Pierson reconoció el problema de las olas en el mar como un problema estadístico (Silvester, 1974). De su conocimiento de espectros de energía en circuitos eléctricos, estimó el tipo de datos necesarios para formular una relación entre la velocidad del viento y la altura de las olas. Para ese tiempo no existian aún análisis de registros de oleaje con las cuales él pudiera comprobar su teoría. Simultáneamente, Neumann (en 1953) formulaba un espectro de energía para el oleaje a partir de observaciones tomadas a bordo de un barco alemán como función de la velocidad y duración del viento y fetch (área sobre la cual sopla el viento). Esto, junto con la suposición de una distribución gaussiana para las elevaciones en un mar completamente desarrollado (concepto que nacía en esa época),

permitieron encontrar una fórmula de predicción de oleaje basada en procesos estocásticos (Kinsman, 1965).

Para 1955 se unificaron los trabajos de Pierson, Neumann y James en un método de predicción de oleaje (método PNJ) basado en sus formas espectrales, para velocidades de viento y fetch dados (Silvester, 1974). Como parte de ese trabajo, Pierson y Neumann desarrollaron un espectro de densidad de energía teórico para el oleaje el cual es llamado comunmente Espectro Direccional de Neumann. Una descripción amplia de los trabajos de Sverdrup y Munk y de Pierson y Neumann puede leerse en Kinsman (1965).

En 1964, Pierson y Moskowitz usaron la información obtenida de registros de olas y vientos hechos por barcos en el Océano Atlántico para probar la teoría de similitud propuesta por Kitaigorodskii (1961). De esta forma, la variable velocidad del viento es adimensionalizada y se obtiene una forma espectral quasi-universal. La ecuación de la forma espectral que se obtuvo después de muchas pruebas estadísticas y la cual es función de la velocidad del viento, se conoce como el Espectro Teórico de Pierson-Moskowitz (Silvester, 1974).

En las últimas dos décadas, los esfuerzos para conocer el comportamiento de las ondulaciones de la superficie marina

(causadas principalmente por viento) se han concentrado en el uso de los sensores remotos (fotografía aérea, señales de radar, microondas, detectores de infrarojo, etc.) De ésta manera las técnicas desarrolladas a través de los años en otras áreas han sido eventualmente aplicadas a la oceanografía. Uno de los campos en los que ha existido un desarrollo muy interesante últimamente es el del Procesado Óptico de Información.

Las técnicas matemáticas usadas en el procesado óptico de Información son similares en gran manera a las usadas en el procesamiento electrónico de datos. El procesado óptico permite, con una simple configuración de láser, lentes y filtros, la implementación de funciones matemáticas tales como multiplicación, transformada de Fourier, correlación y convolución (Shulman, 1970). A través de la operación de transformada de Fourier, la distribución de frecuencias de una señal puede ser representada por una distribución de la amplitud de luz en un plano. El filtrado óptico de una señal es una operación sencilla que requiere solo bloquear los puntos de luz que corresponden a las frecuencias no deseadas. Esta técnica requiere únicamente de componentes ópticos comunes, mientras que la misma operación hecha electrónicamente (numéricamente), precisa de una tecnología más compleja (hardware) (Shulman, 1970).

Las señales en un sistema óptico son en forma de distribuciones de amplitud de luz en planos perpendiculares a los ejes ópticos. Las señales de entrada deben ser variaciones de transmisión óptica en un plano -por ejemplo- una transparencia fotográfica (negativo). Una señal puede variar punto por punto en un plano y depende entonces de dos coordenadas. Estas características bidimensionales de las señales ópticas representan ventajas sobre los sistemas electrónicos, los cuales están limitados a una sola coordenada (generalmente tiempo).

Las señales bidimensionales (como fotografías) pueden ser procesadas como un todo, sin tener que ser digitizadas, como se hace para los sistemas electrónicos (los cuales requieren reducir a una sola dimensión). Así, todo un bloque de Información puede ser procesada simultáneamente en lugar de serlo bit por bit (Shulman, 1970).

Desde hace algún tiempo, varios Investigadores han tratado de aprovechar las cualidades de los sistemas ópticos para obtener Información de fotografías aéreas de la superficie marina. Barber (1954) utilizó un método óptico para encontrar la dirección del oleaje en una superficie del mar. Otras Investigaciones han sido realizadas por Denzli (1969) y Sugimori (1975). Ellos utilizaron un método que consiste en tomar fotografías de la superficie del mar y obtener su espectro óptico bidimensional. Una de las ventajas de este método es que puede

ser aplicado a aguas someras o profundas a bajo costo, a diferencia de los métodos tradicionales de medición in situ comunmente usados (dificiles de aplicar en aguas profundas). Sin embargo, los espectros ópticos obtenidos de las fotografías reales por estos investigadores, son espectros (a un primer orden) de las pendientes de las olas y no de sus alturas. Por ésta razón Alvarez y Machado (1985) hacen una simulación de primer orden de una fotografía marina conteniendo el espectro teórico de Pierson-Neumann y realizan un análisis cualitativo de su espectro óptico.

La idea central de este trabajo consiste en generar numéricamente superficies cuya forma sea gobernada por los espectros teóricos de Pierson-Neumann y de Pierson-Moskowitz. Estas superficies son impresas en película fotográfica simulando de ésta forma fotografías aéreas de la superficie del mar. A cada superficie numérica se le hace un análisis espectral via Transformada Rápida de Fourier (FFT) Independiente del proceso de simulación. Un análisis espectral óptico semejante es hecho para cada imagen fotográfica generada con el espectro teórico de Pierson-Moskowitz, por medio de un sistema óptico coherente de acuerdo con Alvarez y Machado (1985). Las superficies regidas por el espectro de Pierson-Moskowitz son filtradas numéricamente en frecuencia e impresas en película

fotográfica. Nuevamente se realizan los dos tipos de análisis (óptico y numérico) para cada una de estas superficies filtradas vía FFT y se comparan con las imágenes obtenidas por un filtrado semejante realizado en el sistema óptico. Finalmente, se discuten las semejanzas y las ventajas y desventajas de ambos métodos.

De esta manera se pretende caracterizar las respuestas del sistema óptico ante funciones de entrada y salida bien conocidas numéricamente y su posible aplicación a superficies marinas reales, en un intento por contribuir al desarrollo de una metodología alterna que permita conocer y predecir el oleaje.

## 1.2 Objetivos

A) Aplicación del método óptico y digital para obtener el espectro direccional de densidad de energía de superficies marinas simuladas numéricamente y B) realizar un filtrado de frecuencias espaciales. Discutir su posible aplicación a superficies marinas reales.

### 1.2.1 Objetivos Particulares

- 1.- Implementar en computadora un programa para el análisis digital de superficies. Esto incluye graficado, Transformada de Fourier bidimensional en el número de onda y cuantificación de la energía.
- 2.- Simular numéricamente superficies marinas regidas por el espectro teórico de densidad de energía de Pierson-Neumann y el de Pierson-Moskowitz.
- 3.- Análisis digital de los mares simulados: obtención de sus espectros discretos, cuantificación de la energía y filtrado de frecuencias.

- 4.- Impresión en película fotográfica de las imágenes simuladas (generadas con el espectro de Pierson-Moskowitz) usando un microdensitómetro.
- 5.- Análisis óptico de las imágenes simuladas de mar: montaje de un sistema óptico coherente, obtención de los espectros ópticos de potencia de las superficies y filtrado de frecuencias en el plano de Fourier.
- 6.- Descripción del comportamiento espacial de las ondas de mayor energía.
- 7.- Comparación de resultados ópticos y numéricos.

### 1.3 Contenido

El capítulo 2 describe las bases matemáticas del modelo de simulación de los mares. Se describe también la metodología seguida para la impresión de las imágenes en película fotográfica. En el capítulo 3 se hace una breve introducción a la teoría del análisis de Fourier y se muestran matemáticamente los pasos a seguir para obtener los espectros discretos de densidad de energía y realizar el filtrado numérico de la superficie simulada. Estos conceptos son presentados para una dimensión y se describe la implementación numérica para dos dimensiones.

Un análisis espectral óptico, similar al numérico, se describe en el capítulo 4. Se hace una introducción a la teoría de ondas planas. Se muestran algunas de las herramientas matemáticas usadas para definir el fenómeno lineal de difracción. Se analiza cómo una lente convergente puede llevar a cabo en su plano focal una transformada de Fourier bidimensional del campo de amplitud compleja recibida. Se describe el sistema óptico coherente para llevar a cabo ésta transformación.

Los resultados obtenidos de ámbos análisis son presentados en el capítulo 5, y discutidos en el capítulo 6.

## 2.- SIMULACION DE LAS SUPERFICIES MARINAS

Las superficies rugosas aleatorias simuladas numéricamente para que contengan espectros direccionales específicos son importantes en el estudio de algunos fenómenos físicos. La técnica usada en este trabajo para generar éstas superficies fué desarrollada originalmente por Caruthers y Novarini (1971) y está basada en una extensión de la teoría de sistemas lineales (teoría de filtros) a dos dimensiones. Conceptualmente, la forma más simple para generar superficies rugosas aleatorias con espectros direccionales específicos es sumar (sobre el espacio del número de onda), un conjunto de ondas seno bidimensionales, cada una teniendo una amplitud compleja formada por una fase aleatoria y magnitud igual a la raíz cuadrada del espectro direccional en el número de onda dado. Desafortunadamente este procedimiento genera un conjunto de elevaciones independientes de la superficie. La razón es que es esencialmente una transformada de Fourier de un espectro limitado en el número de onda. La técnica de filtros no sufre esta limitación.

El espectro direccional es la transformada de Fourier de la ACN, el cual es calculado por :

$$E_z(g,h) = \frac{\sigma_z^2 \Delta x \Delta y}{2\pi^2} \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n \delta_r \delta_s C_z(r,s) \cos\left(\frac{\pi r g}{m} + \frac{\pi s h}{n}\right) + C_z(r,-s) \cos\left(\frac{\pi r g}{m} + \frac{\pi s h}{n}\right) \quad (2.4)$$

donde la integración es aproximada por una suma mediante la regla trapezoidal con :

$$\begin{aligned} \delta_r &= 1/2 & r &= 0, m & \delta_s &= 1/2 & s &= 0, n \\ &= 1 & 0 < r < m & & = 1 & 0 < s < n \end{aligned} ,$$

$g$  y  $h$  son los índices del número de onda angular en los rangos:

$$g = 0, 1, \dots, m \quad \text{y} \quad h = 0, \pm 1, \dots, \pm n.$$

Ellos definen el vector número de onda  $\bar{K} = K_x \bar{L}_x + K_y \bar{L}_y$  donde  $\bar{L}_x$  y  $\bar{L}_y$  son vectores unitarios en las direcciones de incremento de  $x$  y  $y$ , y los componentes del número de onda son :

$$K_x = g \Delta K_x \quad ; \quad K_y = h \Delta K_y \quad (2.5)$$

Los  $\Delta K$ 's son los anchos de banda en el número de onda angular dados por:

$$\Delta K_x = \frac{\pi}{m \Delta x} = \frac{2\pi}{M \Delta x} \quad ; \quad \Delta K_y = \frac{\pi}{n \Delta y} = \frac{2\pi}{N \Delta y} \quad (2.6)$$

El análisis espectral actualmente se presenta en un desarrollo de tercera o cuarta generación. La técnica descrita anteriormente para la simulación es esencialmente una variedad de la segunda generación. Para el análisis numérico de las superficies en este trabajo se usará la técnica de transformada rápida de Fourier en dos dimensiones, la cual se haya mucho más adelantada.

## 2.2 Modelado de superficies rugosas aleatorias

La técnica numérica con la cuál se forma una superficie con un espectro direccional específico se describe a continuación. La idea básica es el suavizado de un arreglo de números aleatorios no correlacionados con la aplicación de un filtro numérico bidimensional adecuado, el cuál produce un arreglo de números que contiene un cierto espectro direccional deseado. Lo que sigue es un resumen de los conceptos básicos con los cuales los autores de esta técnica (Caruthers y Novarini, 1971) extendieron los conceptos de sistemas lineales a dos dimensiones.

La salida  $y$  de un sistema (ó filtro), está determinada completamente por la entrada  $u$  y las características del sistema. Esto se expresa como :

$$y(t) = \Psi u(t) \quad , \quad (2.7)$$

donde  $\Psi$  es el operador lineal diferencial que convierte la entrada en la salida. La forma funcional de esta ecuación es :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad , \quad (2.8)$$

donde  $H(\tau)$  es la función de respuesta al impulso, la cuál es dada

por :

$$H(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad , \quad (2.9)$$

donde  $F(\omega)$  es la función de transferencia que relaciona la salida con la entrada en el dominio de la frecuencia por:

$$Y(\omega) = F(\omega)U(\omega) \quad , \quad (2.10)$$

donde  $Y(\omega)$  y  $U(\omega)$  representan la transformada de Fourier de  $y(t)$  y  $u(t)$  respectivamente. Finalmente  $F(\omega)$  es determinada por los espectros de potencia de la entrada  $\Phi_U(\omega)$  y de la salida  $\Phi_Y(\omega)$ , de acuerdo con

$$|F(\omega)| = \left( \frac{\Phi_Y(\omega)}{\Phi_U(\omega)} \right)^{1/2} \quad . \quad (2.11)$$

En la siguiente extensión de teoría de filtros, los componentes espaciales  $(x,y)$  son usados en lugar del tiempo y la transformada de Fourier da una representación en el espacio del número de onda  $(K_x, K_y)$ .

La función de transferencia está dada por:

$$|F(K_x, K_y)| = \left( \frac{E_z(K_x, K_y)}{E_x(K_x, K_y)} \right)^{1/2} \quad , \quad (2.12)$$

donde  $E_x$  y  $E_y$  son los espectros direccionales de las superficies de entrada y salida, respectivamente. La función impulso es :

$$H(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F(K_x, K_y) e^{i(K_x \xi + K_y \eta)} dK_x dK_y \quad . \quad (2.13)$$

Para la selección de  $E_x(K_x, K_y)$  se considera lo siguiente:

para satisfacer el desarrollo técnico, la superficie debe tener una ACN igual a uno en  $r = s = 0$  y cero en otro punto. La superficie debe tener una varianza  $\sigma_x^2$  conocida, la cuál se escogió igual a la unidad y un espectro de densidad de energía también conocido  $E_x(K_x, K_y)$ .

Una apropiada selección de este último es :

$$E_x(K_x, K_y) = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{4K_x(\max)K_y(\max)} & \begin{cases} -K_x(\max) \leq K_x \leq K_x(\max) \\ -K_y(\max) \leq K_y \leq K_y(\max) \end{cases} \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases} \quad (2.14)$$

donde la Integración de esta función sobre el espacio del número de onda es la varianza y su transformada de Fourier dividida por la varianza es la ACN, la cuál es :

$$C(\xi, \eta) = \frac{\text{sen } K_x(\max)\xi}{K_x(\max)\xi} \cdot \frac{\text{sen } K_y(\max)\eta}{K_y(\max)\eta}$$

Esta función es uno para  $\xi = \eta = 0$  y cero para todos los puntos dados por :

$$K_x(\max)\xi = r\pi \quad r=0, 1, \dots, m$$

$$K_y(\max)\eta = s\pi \quad s=0, 1, \dots, m$$

los cuales son los puntos de la malla :

$$\xi = \frac{r\pi}{K_x(\max)} = r\Delta x \quad ; \quad \eta = \frac{s\pi}{K_y(\max)} = s\Delta y \quad , .$$

en realidad, esto no es cero para los puntos que no forman la malla, pero esto no tiene consecuencias ya que no se usan en el análisis digital.

Para modelar los mares de Pierson-Neumann y de Pierson-Moskowitz se requiere tomar el eje X positivo en la dirección de propagación del viento y usar  $E_z(K_x, K_y)$  como la mitad de los valores espectrales de los espectros teóricos para cada  $K_x$  positiva ( $K_y$  positiva ó negativa) y definir:

$$E_z(K_x, K_y) = E_z(-K_x, K_y)$$

Como resultado de las suposiciones anteriores, un mar con ondas de leva cruzadas no puede ser modelado. (sin embargo, la eliminación de esta restricción no es difícil (Caruthers y Novarini, 1971)).

De acuerdo a lo anterior, se tiene :

$$F(-K_x, -K_y) = F(-K_x, K_y) = F(K_x, -K_y) = F(K_x, K_y) \quad (2.15)$$

y la ecuación (2.13) puede reducirse a :

$$H(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(K_x, K_y) \cos K_x \xi \cos K_y \eta dK_x dK_y \quad (2.16)$$

por ser pares las funciones coseno,  $H(\xi, \eta)$  es par en  $\xi$  y  $\eta$ .

La integración trapezoidal de la ecuación (2.16) da :

$$H(p, q) = \frac{\Delta K_x \Delta K_y}{\pi^2} \sum_{g=0}^m \sum_{h=0}^n \delta_g \delta_h F(g, h) \cos \frac{\pi p g}{m} \cos \frac{\pi q h}{n} \quad (2.17)$$

donde :

$$\xi = p \Delta x \quad ; \quad p = 0, 1, \dots, m \quad \text{y} \quad \eta = q \Delta y \quad ; \quad q = 0, 1, \dots, n$$

se asume que  $F(K_x, K_y) = 0$  para toda  $K_x > m \Delta K_x$  o  $K_y > n \Delta K_y$ . Por virtud de la simetría antes discutida :

$$H(-p,-q) = H(-p,q) = H(p,-q) = H(p,q) \quad (2.18)$$

La ecuación (2.14) puede ser reescrita y la selección de más conveniente es:

$$E_x(g,h) = E_x(-g,h) = E_x(g,-h) = E_x(-g,-h) = \frac{\Delta x \Delta y}{4\pi^2} \quad (2.19)$$

donde  $g=0,1,\dots,m$  y  $h=0,1,\dots,n$  y  $E_x(g,h)=0$  en cualquier otro lado.

La función de autocovarianza normalizada discretizada espacialmente para este espectro es uno para  $r,s = 0$  y cero en otro punto. Por otro lado la superficie de entrada  $[X(i,j) \quad i=0,1,\dots,K; j=0,1,\dots,L]$  es simplemente un conjunto de números aleatorios no correlacionados con varianza unitaria (y, por conveniencia, con promedio cero). Este conjunto de números puede ser generado muy fácilmente en cualquier computadora digital.

Usando las ecuaciones (2.6) y (2.29) en la (2.17), se obtiene :

$$H(p,q) = \frac{2\pi}{mn(\Delta x \Delta y)^{3/2}} \sum_{g=0}^m \sum_{h=0}^n \delta_g \delta_h \sqrt{E_z(g,h)} \cos \frac{\pi p g}{m} \cos \frac{\pi q h}{n} \quad (2.20)$$

Esta ecuación es usada ahora en la forma discreta bidimensional de la ecuación (2.8), esto es:

$$Z(i,j) = \sum_{p=-m}^m \sum_{q=-n}^n \delta_p \delta_q H(p,q) X(i+p, j+q) \Delta x \Delta y \quad , \quad (2.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta p &= 1/2 & p &= \pm m & \delta q &= 1/2 & q &= \pm n \\ &= 1 & -m < p < m & & = 1 & -n < q < n & , \end{aligned}$$

y  $i = m, m+1, \dots, K-m$  ,  $j = n, n+1, \dots, L-n$ , donde  $(K, L)$  son las dimensiones de la superficie de entrada. Las dimensiones de la superficie de salida son  $(M, N) = [K+2(m-1), L+2(n-1)]$ .

Si Introducen ahora los pesos de suavizado  $W(p, q)$  de acuerdo a la definición :

$$W(p, q) = \delta p \delta q H(p, q) \Delta x \Delta y , \quad (2.22)$$

la ecuación (2.21) se convierte entonces :

$$Z(i, j) = \sum_{p=-m}^m \sum_{q=-n}^n W(p, q) X(i+p, j+q) . \quad (2.23)$$

### 2.3 Modelo numérico con los espectros teóricos

En la actualidad, dos de las formas espectrales comúnmente usadas para estudiar el comportamiento de la superficie marina son los espectros direccionales de densidad de energía de Pierson-Neumann y de Pierson-Moskowitz. La forma funcional del espectro de Pierson-Neumann es :

$$A(\omega, \theta)^2 = \begin{cases} c\omega^{-6} \exp\{-2g^2/\omega^2 u^2\} \cos^2 \theta & \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 \leq \omega \leq \infty \\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \end{array} \right. \\ 0 & \text{en otro punto.} \end{cases} \quad (2.24)$$

donde:

$$c = 3.05 \text{ m}^2 \cdot \text{seg}^{-5}$$

$$g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{seg}^{-2}$$

$u$  = es la velocidad del viento  $\text{m} \cdot \text{seg}^{-1}$ , dirección  $\theta = 0$

$\omega$  = es la frecuencia angular ( $\text{rad} \cdot \text{seg}^{-1}$ )

$\omega_1$  = es el límite inferior de la frecuencia angular, el cuál depende del fetch y la duración.

En el caso de un mar completamente desarrollado, ( en el cuál fetch y duración son suficientes para la velocidad del viento dada )  $\omega_1 = 0$ . Se supone esta consideración para el modelado de los mares.

El espectro de Pierson-Moskowitz está dado por :

$$B(\omega, \theta)^2 = \alpha g^2 2\pi \omega^{-5} \exp\{-\beta(g/u\omega)^4\} \cos^2 \theta \quad , \quad (2.25)$$

donde:

$$\alpha = 8.10 \times 10^{-3}$$

$$\beta = 0.74$$

y las demás variables con la misma definición y limitaciones que (2.24) . Ambos espectros se muestran en la figura 2.1.

Debe notarse que ambos espectros son de "un lado", es decir que no hay energía en componentes negativas al viento, y que las fórmulas descritas anteriormente han sido desarrolladas con espectros simétricos. Como se considera una situación estática instantánea únicamente, esto puede solucionarse simplemente reteniendo la mitad de la energía propagándose en la dirección del viento y suponer que la otra mitad simétrica de la energía se propaga en la dirección negativa.

Para la simulación de las superficies marinas se requiere que el espectro direccional sea en función de los componentes  $(K_x, K_y)$  del número de onda. Las ecuaciones necesarias para la transformación son :

$$\omega = (gK)^{1/2} \quad ; \quad K = (K_x^2 + K_y^2)^{1/2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}(K_y/K_x) \quad (2.26)$$

donde el Jacobiano de la transformación es calculado como:

$$J(\omega, \theta / K_x, K_y) = \begin{vmatrix} \partial\omega/\partial K_x & \partial\omega/\partial K_y \\ \partial\theta/\partial K_x & \partial\theta/\partial K_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2g} K^{-3/2} \quad . \quad (2.27)$$

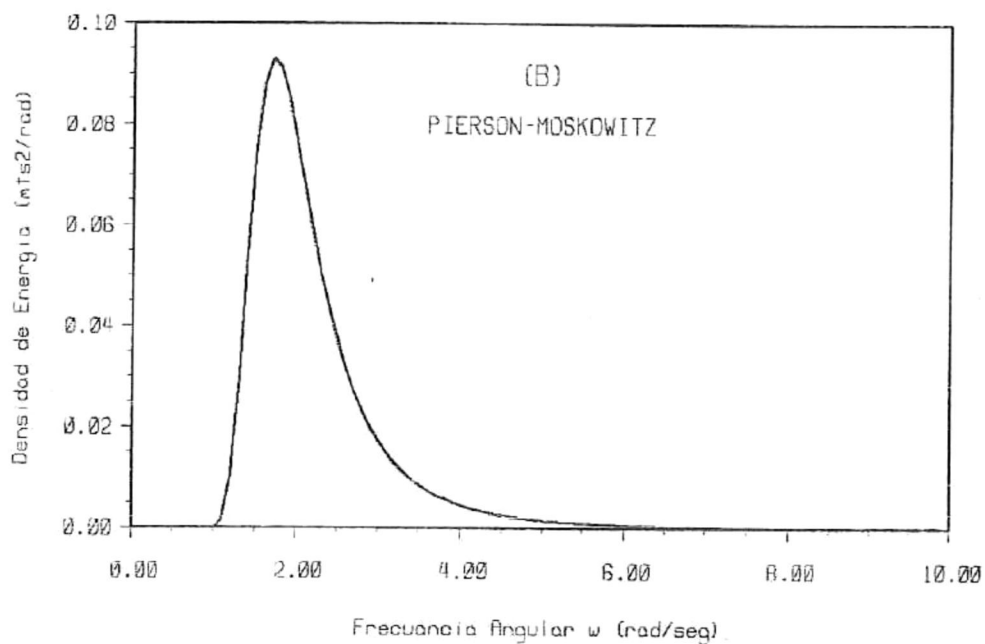
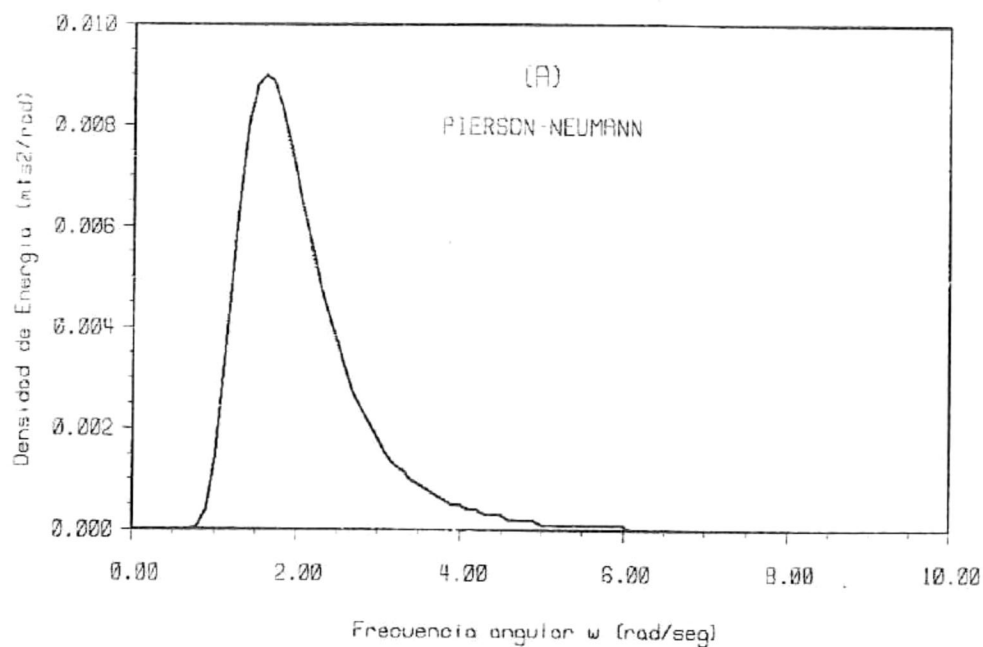


Figura 2.1.- Espectros teóricos de densidad de energía en función de la frecuencia angular .

Con esto el espectro direccional llega a ser :

$$E(Kx, Ky) = J(\omega, \theta / Kx, Ky) A^2 [\omega(Kx, Ky); \theta(Kx, Ky)] \quad (2.28)$$

Por tanto el espectro de Pierson-Neumann es :

$$AE(Kx, Ky) = (1/2) C g^{-5/2} K^{-9/2} \exp(-2g/u^2 K) \cos^2[\tan^{-1}(Ky/Kx)] \quad (2.29)$$

y el de Pierson-Moskowitz :

$$\beta E(Kx, Ky) = (\rho/2) g^{-2} K^{-4} \exp(-\beta g^2/u^4 K^2) \cos^2[\tan^{-1}(Ky/Kx)] \quad (2.30)$$

Donde  $\rho = 4.8978 \text{ m}^2 \text{ seg}^{-4}$

La selección de coordenadas (x,y) para la superficie es tal que el eje X es a lo largo de la dirección del viento ( $\theta=0$ ). En las ecuaciones (2.29) y (2.30) Kx existe en el intervalo  $[0, +\infty]$  y Ky en  $[-\infty, +\infty]$ . Los valores espectrales usados en la ecuación (2.20) fueron obtenidos de :

$$E_z(g, h) = E_z(g \Delta Kx, h \Delta Ky) = (1/2) E(Kx, Ky) \quad (2.31)$$

los intervalos de muestreo en esta generación son  $\Delta x = 2.74 \text{ m}$ . y  $\Delta y = 5.45 \text{ m}$ . con  $m = 104$  y  $n = 80$ . La discusión de la selección de estos parámetros se efectúa en detalle en el documento original (Caruthers y Novarini, 1971).

Con las ecuaciones descritas anteriormente se generaron numéricamente tres mares con el espectro de Pierson-Neumann y tres con el de Pierson-Moskowitz, usándo diferente semilla

aleatoria para la generación de la superficie gaussiana en cada uno de ellos. En este trabajo se utilizan áreas 113 veces mayores que en Caruthers y Novarini (1971), quedando mares con (208,160) datos de elevaciones de la superficie en centímetros. La implementación del programa en FORTRAN se hizo en la computadora PRIME 750 del C.I.C.E.S.E. .

#### *2.4 Impresión de las imágenes en película fotográfica*

La película fotográfica ha sido y sigue siendo una componente importante en la mayoría de los sistemas de procesamiento óptico. Una emulsión fotográfica está constituida de finos granos de halogenuro de plata suspendidos en una gelatina firmemente adherida a una base que puede ser acetato para películas o vidrio para placas. Cuando el material fotosensible se expone a la luz, los granos absorben la energía luminosa y ocurre un proceso físico complejo : los granos que absorben una cantidad considerable de energía forman pequeños parches de plata metálicos llamados "centros de revelado". La película expuesta es entonces sometida al proceso químico denominado "revelado", durante el cuál, la existencia de un solo centro de revelado puede precipitar el cambio de todos los granos de halogenuro de plata a plata metálica en una región local. Los granos que no

contienen centros de revelado no sufren cambio alguno. Finalmente la película se fija sometiéndola a un proceso químico que quita los granos de halogenuro de plata dejando solo la plata metálica, previniendo así el deterioro de los granos claros (Goodman, 1968).

Existen diferentes características en las películas fotográficas según sea el uso que se les dé (dichas características dependen de la densidad de granos de plata). Las películas de alto contraste resaltan notablemente los puntos luminosos sin importar mucho las variaciones de intensidad de dichos puntos. Por otro lado, las películas de alta resolución poseen un amplio intervalo de tonos de gris que las hace muy sensibles a las variaciones en la intensidad de luz recibida.

La película usada para éste trabajo fué la KODAK TECHNICAL PAN 2415 (ESTAR-AH BASE), caracterizada por un grano extremadamente fino y una muy alta resolución (Eastman Kodak Company, 1983). Dicha película fué calibrada por Alvarez (1987) escribiendo una escala creciente de tonos de gris utilizando un microdensitómetro MICRO-10 de PERKIN ELMER en su modo de escritura. Después de revelarse la película con D-19, se leyeron con el microdensitómetro los valores de densidad a los cuáles respondió la película. Se encontró una respuesta cuasi-lineal en un rango de 1.5 a 3.0 en valor de densidad dado por el

microdensitómetro (ver figura 2.2). De esta manera, los valores de altura en cm del mar simulado se hicieron corresponder a tonos de gris (valores de densidad) dentro del rango antes mencionado, con forma de pixeles cuadrados de 21 micras de lado. Debido a que el intervalo de muestreo en Y es aproximadamente dos veces el de X, cada renglón escrito en la dirección de X fue repetido una vez, de tal forma que el pixel quedara de 21 micras en X y 42 micras en Y.

Así, el valor mínimo de altura (-159 cm.) corresponde a un valor de densidad de 1.48 y cada 2 cm. de altura representan un aumento de 0.01 . De esta manera, a la parte baja de la onda (valle) le corresponde el tono más claro de densidad y a la parte más alta (cresta), el tono más oscuro, Interpolándose linealmente los valores intermedios.

Este tipo de simulación no toma en cuenta la variación en la iluminación sobre la superficie que tendría un mar real. En realidad, la imagen fotográfica de un mar es impresa en película por la luz del sol reflejada por las pendientes de las olas. En este modelo los valores de " luz reflejada " corresponden a valores de altura de ola y no a valores de pendiente . Es importante tener en cuenta esta consideración ya que ésta simulación es solo una aproximación de primer orden a la situación física real.

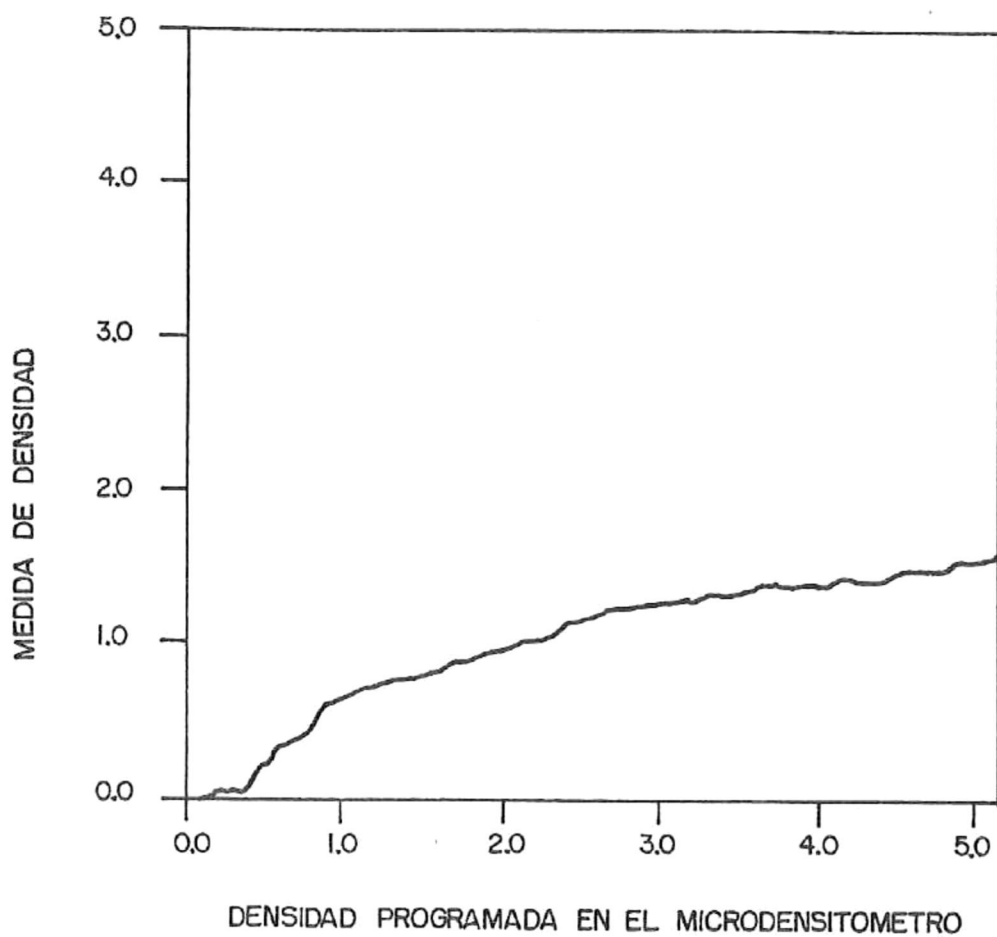


Figura 2.2.- Calibración de la película fotográfica KODAK TECHNICAL PAN 2415 (ESTAR-AH BASE) (Tomado de Alvarez, 1987).

### 3.- ANALISIS NUMERICO DE LAS SUPERFICIES MARINAS SIMULADAS

Se ha encontrado experimentalmente que la mayoría de los fenómenos físicos poseen la propiedad básica de que su respuesta a diversos estímulos actuando simultáneamente es exactamente igual a la suma de las respuestas a cada uno de los estímulos componentes actuando individualmente. Un fenómeno así es llamado lineal y la propiedad que posee es llamada linealidad. Esta propiedad proporciona una gran simplificación en la descripción matemática del fenómeno y representa el fundamento de una estructura matemática referida como Teoría de Sistemas Lineales (Goodman, 1968).

La gran ventaja de los sistemas lineales es la habilidad de expresar la respuesta (voltaje, corriente, altura de la ola, intensidad o amplitud de la luz, la marea oceánica, etc.) a un complicado estímulo en términos de las respuestas a ciertos estímulos elementales. Las respuestas individuales pueden ser comparadas y determinarse su importancia relativa y por tanto, la de los estímulos elementales, caracterizando de ésta forma el fenómeno físico estudiado. Este tipo de análisis es conocido como análisis espectral y su uso es muy extenso en todas las

ramas de la ciencia. En particular, en la oceanografía es indispensable para tratar de entender el comportamiento del oleaje y conocer la importancia relativa de los agentes causales.

En este capítulo se describen algunas de las herramientas matemáticas necesarias para llevar a cabo el análisis espectral, primero en una sola dimensión y extendiéndolo después a dos dimensiones, aplicándolo a las superficies marinas simuladas y la correspondiente adaptación para su uso en computadoras digitales.

### *3.1 Análisis de Fourier*

Una herramienta matemática de gran utilidad en el análisis de los fenómenos lineales (y aún en los no lineales) es el análisis de Fourier. La base de este análisis es la conocida transformada de Fourier, que juega un importante papel en las teorías de muchas ramas de la ciencia (Bracewell, 1978).

La transformada de Fourier es usada para descomponer una función dada en sus componentes exponenciales ortogonales. La función  $G(f)$  es la transformada de Fourier de la función  $g(t)$  y representa la amplitud y fase de los varios componentes de frecuencia que juntos forman la función  $g(t)$ . La función  $G(f)$  es

una función de frecuencia y es conocida como la representación en el dominio de la frecuencia de la función que en el dominio del tiempo es representada por  $g(t)$ . En el procesado de imágenes, las cuales están dadas en un instante específico, las funciones están representadas en el dominio del espacio  $(x,y)$  y su transformación las lleva al dominio del número de onda  $(K_x, K_y)$ .

La transformada de Fourier en una dimensión es definida como (Bracewell, 1978):

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad , \quad (3.1)$$

con su correspondiente transformada inversa:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(i2\pi ft) df \quad . \quad (3.2)$$

En ésta transformación inversa es notoria la descomposición de la función  $g(t)$  en una combinación lineal (una integral) de funciones elementales, cada una con una forma específica  $\exp(i2\pi ft)$ . Evidentemente el número complejo  $G(f)$  es solamente un factor de peso que debe ser aplicado a las funciones elementales de frecuencia  $f$  para sintetizar la deseada  $g(t)$ .

### 3.2 Transformada discreta de Fourier

Para el análisis en computadora, las series de tiempo continuas deben ser muestreadas discretamente y de longitud finita.

Considerando la serie de tiempo muestreada  $g_n = g(n\Delta)$ ,  $n=0, 1, \dots, (N-1)$  donde  $\Delta$  es el intervalo de muestreo y  $N$  el número de datos, la transformada de Fourier de la muestra puede ser calculada directamente por:

$$\hat{G}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-i2\pi f n \Delta) \quad (3.3)$$

por lo tanto, la integral de la transformada de Fourier finita de una serie de tiempo discretamente muestreada se reduce a una suma sobre un número discreto de términos (Bracewell, 1978).

La transformada de Fourier de la muestra, ec.(3.3), es una función continua en frecuencia. Además, si  $\hat{G}(f)$  es conocida sobre un conjunto finito especial de frecuencias discretas, entonces  $\hat{G}(f)$  puede ser determinado para cualquier frecuencia (Bracewell, 1978). Esto es, para cualquier entero  $m$ ,

$$\hat{G}\left(f + \frac{m}{\Delta}\right) = \hat{G}(f) \quad (3.4)$$

Por lo tanto,  $\hat{G}(f)$  es periódico con período  $1/\Delta$ . De esta manera, no es necesario calcular  $\hat{G}(f)$  fuera del rango de frecuencias  $0 < f < 1/\Delta$ .  $\hat{G}(f)$  puede ser calculado

equivalentemente sobre el rango

$$-\frac{1}{2\Delta} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta} \quad (3.5)$$

sin pérdida de información. La frecuencia  $1/2\Delta$  es conocida como la frecuencia de Nyquist asociada a un intervalo de muestreo y es la mayor frecuencia que puede ser resuelta.

El teorema de muestreo aplicado en el dominio de la frecuencia muestra que, ya que  $g_n$  está limitada en tiempo al rango  $0 \leq t \leq (N-1)\Delta$ , entonces  $\hat{G}(f)$  en un conjunto discreto de frecuencias  $f = j/n\Delta$ , para  $j=0$  a  $(N-1)$ , es adecuado para describir completamente la serie  $g_n$  limitada en tiempo (Chelton, 1984). Estas son las llamadas frecuencias de Fourier. Son, por lo tanto, un total de  $N$  frecuencias discretas para la transformada de Fourier discreta (TDF) de una serie de tiempo que consiste de un total de  $N$  observaciones discretas. La TDF es dada, de (3.3), por

$$\hat{G}_j = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(-i2\pi jn/N) \quad (3.6)$$

para  $j=0, 1, \dots, (N-1)$

La serie de tiempo discretamente muestreada  $g_n$  puede ser reconstruída de la TDF por la inversa

$$g_n = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{G}_j \exp(i2\pi jn/N) \quad (3.7)$$

$n=0, 1, \dots, (N-1)$

Las ecuaciones 3.6 y 3.7 constituyen el par de transformadas de Fourier discreto derivado directamente de las integrales de Fourier convencionales de una serie de tiempo discretamente muestreada (Bracewell, 1978).

Hay alguna desventaja al usar esta forma del par transformado discreto que no será discutida aquí (ver Chelton, 1984). Existen otras definiciones para el par transformado discreto, algunas que reversan el signo de las exponenciales y otras normalizan la TDF por la longitud de medición  $N\Delta$ . Cualquiera definición puede ser usada, pero debe tenerse cuidado de unir correctamente la Inversa TDF con su correspondiente TDF. Cuando se usa la TDF para examinar la distribución de varianza con la frecuencia, deben normalizarse las transformadas de Fourier de tal manera que su suma sea igual a la varianza total de la serie de tiempo muestreada.

Para este trabajo se usó el par de transformadas discretas de Fourier definidas como

$$\hat{G}_j = \hat{G}\left(\frac{j}{n\Delta}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \exp(i2\Delta jn/N) \quad , \quad j=0,1,\dots,N-1$$

(3.8)

$$g_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{G}_j \exp(-i2\pi jn/N) \quad n=0,1,\dots,N-1$$

### 3.3 Filtrado por análisis de Fourier

El análisis de Fourier puede ser usado para filtrar una serie de tiempo real muestreada discretamente  $g_n = g(n\Delta)$ . El método consiste en computar la TDF a las  $N$  frecuencias de Fourier por (3.8). Entonces  $g_n$  puede ser reconstruida exactamente por la transformada Inversa de (3.8). Una versión filtrada pasabanda de  $g_n$  puede ser construida al realizar la transformada Inversa de acuerdo con

$$g_n^f = \frac{1}{N} \sum_{j=j_1}^{j_2} \hat{G}_j e^{-i2\pi jn/N} + \frac{1}{N} \sum_{j=N-j_2}^{N-j_1} \hat{G}_j e^{-i2\pi jn/N} \quad (3.9)$$

La serie de tiempo filtrada dejando pasar una banda incluirá solo aquellas frecuencias entre  $j_1/n\Delta$  y  $j_2/n\Delta$ . Es esencial incluir las frecuencias de Fourier en el rango de  $(N-j_2)/N\Delta$  a  $(N-j_1)/N\Delta$  para asegurar que  $g_n$  sea real (Chelton, 1984).

### 3.4 Espectros de densidad de energía

En la actualidad existen dos métodos para obtener la densidad espectral de una serie de tiempo muestreada discretamente. Antes de la introducción de la transformada rápida de Fourier FFT, la densidad espectral era obtenida a

partir de la transformada discreta de Fourier de la autocovarianza de la muestra. Este es el llamado método "estandar" o de "Blackman-Tukey". El método usado actualmente es el de la transformada directa de Fourier o de "Cooley-Tukey" que consiste en computar el módulo cuadrado de la transformada discreta de Fourier de la serie muestreada. A pesar de que éste último método es más deseable desde el punto de vista de eficiencia computacional, el antiguo método es algunas veces usado. En ocasiones permite obtener información de series de tiempo que el segundo no podría. Tal es el caso de series que tengan valores perdidos en la serie de tiempo o que el espaciamiento entre los datos no sea el mismo (Chelton, 1984).

Para éste trabajo se utiliza el método de la transformada directa de Fourier, con la definición del par de transformadas dado por (3.8) y de acuerdo con el siguiente desarrollo:

Se asume que el valor promedio de la serie de tiempo discreta es cero (como efectivamente sucede en los mares simulados) o simplemente se le quita el promedio a la serie. Entonces si los datos  $g_n$  son todos reales y el proceso es estacionario, la varianza de la muestra está definida como:

$$\{g_n^2\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n^2 \quad (3.10)$$

de acuerdo con la ecuación 3.8, esto puede ser escrito como:

$$\{g_n^2\} \doteq \frac{1}{N^3} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{G}_j \hat{G}_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi n(j+k)/N} \quad (3.11)$$

La condición de ortogonalidad en la TDF a las frecuencias de Fourier  $j/N$  señala que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi n(j+k)/N} \doteq N\delta_{j,-k} \quad (3.12)$$

por lo tanto

$$\{g_n^2\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{G}_j \hat{G}_{-j} \quad (3.13)$$

sustituyendo  $j$  por  $-j$  en la primera ecuación de la definición 3.8 tenemos que:

$$\hat{G}_{-j} = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-i2\pi jn/N} = \hat{G}_j^* \quad (3.14)$$

ya que  $g_n$  es real para toda  $n$ . Por lo tanto (3.13) se convierte en:

$$\{g_n^2\} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{G}_j \hat{G}_j^* \quad (3.15)$$

En palabras, la varianza de la serie de tiempo discreta  $g_n$  puede ser descompuesta en una suma de contribuciones de las frecuencias de Fourier ( $j/N\Delta$ ). Este resultado es conocido como el teorema de Parseval (Chelton, 1984). La ecuación (3.15) puede escribirse como

$$\{g_n^2\} \doteq \sum_{j=0}^{N-1} S_j \Delta f \quad (3.16)$$

donde  $\Delta f = 1/N\Delta$  es el intervalo de la frecuencia de Fourier y

$$\hat{S}_j = \hat{S}_{(-j)} = \frac{\Delta}{N} \hat{G}_j \hat{G}_j^* \quad (3.17)$$

$$j=0, 1, \dots, N-1$$

es la densidad espectral de potencia muestreada.

La densidad espectral de potencia a frecuencia  $f_j = j/N\Delta$  es  $1/\Delta$  veces la varianza de la muestra de la serie de tiempo  $g_n(t)$  dentro de un intervalo de frecuencia  $\Delta f = 1/N\Delta$  centrada en la frecuencia de Fourier  $j/N\Delta$ . (cabe hacer la aclaración de que, si se usan definiciones alternativas del par transformado (3.8) entonces la expresión para la densidad del espectro de potencia puede cambiar).

Como se mostró en 3.14, si  $g_n$  es real, entonces  $\hat{G}_j = \hat{G}_j^*$ . Por tanto

$$\hat{S}_{-j} = \frac{\Delta}{N} \hat{G}_j^* \hat{G}_j = \hat{S}_j \quad (3.18)$$

lo cual muestra que la densidad espectral de la muestra es simétrica si la serie de tiempo de entrada  $g_n$  es real (el caso usual de interés).

La densidad espectral (3.17) es por lo tanto un espectro de dos "lados", el cuál es usualmente presentado para frecuencias entre menos y más la frecuencia de Nyquist, por ejemplo  $-1/2\Delta$  a  $+1/2\Delta$ . Debido a la simetría, los espectros son presentados como

funciones de un "lado" donde la energía espectral a frecuencias positivas y negativas se combinan.

Es útil considerar separadamente los casos donde el número de observaciones  $N$  es par e impar. En el primer caso, cuando  $N$  es par, entonces la frecuencia de Fourier  $j/N\Delta$  donde  $j=N/2$  corresponde a la frecuencia de Nyquist  $1/2\Delta$ . Existe una sola estimada espectral de la muestra a la frecuencia de Nyquist, es decir, no hay frecuencias de Nyquist negativas equivalentes. Así, el espectro de dos "lados" consiste de la frecuencia cero, la frecuencia de Nyquist y cada una de las frecuencias positivas y negativas entre las dos. Combinando las frecuencias positivas y negativas, el espectro de un "lado" cuando  $N$  es par consiste de:

$$\hat{S}_j = \begin{cases} \hat{S}_j & \text{para } j=0 \\ 2\hat{S}_j & \text{para } 0 < j < N/2 \\ \hat{S}_j & \text{para } j=N/2 \end{cases} \quad (3.19)$$

En el caso de que  $N$  sea impar, la frecuencia de Nyquist es  $1/2\Delta = N/2/2\Delta$ . Pero las frecuencias de Fourier  $j/N\Delta$  son definidas solo para  $j$  enteros. Por tanto, ninguna de las frecuencias de Fourier corresponde a la frecuencia de Nyquist. Entonces, el espectro de dos "lados" consiste de la frecuencia cero y cada una de las frecuencias positivas y negativas fuera de (pero no incluyendo) la frecuencia de

Nyquist. No hay frecuencia de Nyquist en la estimada espectral de la muestra. Combinando las frecuencias positivas y negativas, el espectro de un "lado" cuando N es Impar consiste de:

$$\hat{S}_j = \begin{cases} \hat{S}_j & \text{para } j=0 \\ 2\hat{S}_j & \text{para } 0 < j < \frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (3.20)$$

### 3.5 Implementación numérica en dos dimensiones

Una innovación relativamente reciente en el análisis espectral es la transformada rápida de Fourier (FFT). Este es un algoritmo para computar la transformada discreta de Fourier mucho más rápidamente que por el método directo, pero conservando precisión. Así, mientras que por una aproximación directa se requieren, para transformar una serie de N datos, aproximadamente  $N^2$  operaciones. Por la FFT se requiere solo  $2N \log_2 N$  operaciones. El tiempo de computo ahorrado puede ser considerable si se trata de series de datos muy grandes (Jenkins, 1968).

Para el análisis espectral numérico de las superficies marinas simuladas es necesario tener en cuenta algunos detalles importantes. La transformada se hace del dominio del espacio (x,y) al dominio del número de onda (Kx,Ky). Las relaciones

entre los incrementos espaciales y en el número de onda están dados por las ecuaciones 2.6,

$$\Delta K_x = \frac{2\pi}{M\Delta x} \quad ; \quad \Delta K_y = \frac{2\pi}{N\Delta y} \quad ,$$

estas relaciones son similares a las que existen entre el tiempo y la frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$

$$\Delta = \frac{1}{\Delta f} = \frac{2\pi}{\Delta \omega} \quad ,$$

por lo cual, la transformada discreta de Fourier debe hacerse para frecuencia angular, lo cual es exactamente igual a que sea para número de onda. Prácticamente no existen cambios al usar frecuencia angular  $\omega$  o número de onda  $\bar{K}$  en vez de frecuencia cíclica  $f$ . El único cambio es que surge un par de constantes que anteceden los signos de las integrales que definen el par transformado de Fourier, (3.1) y (3.2). Este par de constantes puede ser cualesquiera cuyo producto se  $1/2\pi$  (Splegel, 1976).

Para este trabajo he usado  $1/\sqrt{2\pi}$  para ambas transformadas (la razón de esto se discute más adelante), quedando entonces el par transformado de Fourier en dos dimensiones como:

$$G(K_x, K_y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{i2\pi(F_x x + F_y y)} dx dy \quad , \quad (3.21)$$

con su correspondiente transformada inversa:

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(K_x, K_y) e^{-i2\pi(F_x x + F_y y)} dK_x dK_y \quad , \quad (3.22)$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  son los componentes espaciales de frecuencia

$$F_x = \frac{1}{\Delta x} = \frac{K_x}{2\pi} \quad ; \quad F_y = \frac{1}{\Delta y} = \frac{K_y}{2\pi} \quad (3.23)$$

Este par transformado es una extensión directa de su par transformado análogo en una dimensión. Los mismos teoremas y propiedades aplicados a una dimensión tienen sus correspondientes en dos dimensiones (Bracewell, 1978). En base a esto, los resultados obtenidos en las secciones anteriores son extendidos directamente a dos dimensiones para el análisis espectral de los mares simulados.

La transformada directa bidimensional de Fourier usada es:

$$\hat{G}_{kj} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{N-1} g_{lm} e^{i2\pi(kl/M + jm/N)} \quad (3.24)$$

y su transformada inversa

con  $k=0,1,\dots,M-1$   
y  $j=0,1,\dots,N-1$

$$g_{kj} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{G}_{lm} e^{-i2\pi(kl/M + jm/N)} \quad (3.25)$$

este par de ecuaciones son usadas mediante una subrutina de transformada rápida de Fourier (FFT).

La figura 3.1 muestra un diagrama de bloques esquematizado como el usado para obtener los espectros de densidad de energía de la superficie. La superficie original, cuyo origen de coordenadas se localiza en una de las esquinas del rectángulo que forma la malla numérica, es reacomodada de tal forma que el origen quede al centro de la malla. Esta superficie es

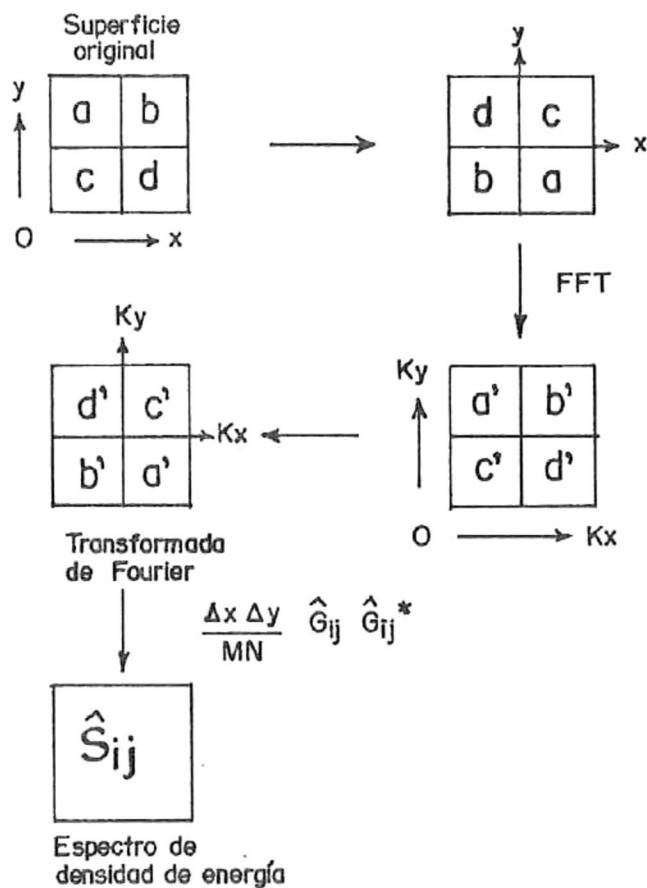


Figura 3.1.- Diagrama de bloques usado para obtener los espectros numéricos de densidad de energía de las superficies marinas simuladas.

transformada por la FFT, la cuál vuelve el origen a una esquina de la malla escribiendo las frecuencias positivas en los índices de cero a  $M/2$  y  $0$  a  $N/2$ , los cuales representan las frecuencias de Nyquist para los incrementos espacial  $\Delta x$  y  $\Delta y$ .

$$\begin{aligned} F_{N_x} &= k\Delta K_x = (M/2)(2\pi/M\Delta x) = \pi/\Delta x \\ F_{N_y} &= j\Delta K_y = (N/2)(2\pi/N\Delta y) = \pi/\Delta y \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nuevamente la malla numéricamente es reacomodada para volver el origen a centro, de tal forma que sea más fácil visualizar la forma del espectro en el intervalo:

$$\begin{aligned} -\pi/\Delta x &\leq K_x \leq \pi/\Delta x \quad , \\ -\pi/\Delta y &\leq K_y \leq \pi/\Delta y \quad . \end{aligned}$$

Para obtener el espectro de densidad de potencia descrito en la ecuación (3.17), es necesario obtener el módulo al cuadrado de la transformada, esto es:

$$S_{ij} = \frac{\Delta x \Delta y}{MN} \hat{G}_{ij} \hat{G}_{ij}^* = \frac{\Delta x \Delta y}{MN} (\text{Re}\{\hat{G}_{ij}\}^2 + \text{Im}\{\hat{G}_{ij}\}^2) \quad (3.27)$$

donde  $\text{Re}$  representa la parte real y  $\text{Im}$  la parte imaginaria del número complejo  $\hat{G}_{ij}$ .

Al obtener el módulo cuadrado de la transformada de Fourier,  $\hat{S}_{ij}$  tendrá un factor de  $1/4 \pi^2$  por las constantes introducidas en (3.21) el cuál es anulado cuando se integra para obtener la varianza, al multiplicarse por  $\Delta K_x = 2\pi/\Delta x$  y por  $\Delta K_y = 2\pi/\Delta y$ .

#### 4.- ANALISIS OPTICO DE LAS SUPERFICIES SIMULADAS

A lo largo de su trayectoria, la luz se encuentra con Infinidad de obstáculos. Cada uno de estos modifica la luz incidente sobre él de acuerdo a sus características. Parte de la luz es reflejada por el objeto, otra es refractada y aún otra más es difractada. Precisamente, Sommerfeld en 1954 definió el término difracción como cualquier desviación de los rayos de luz de su trayectoria rectilínea que no pueda ser interpretada como reflexión ni refracción (Goodman, 1968).

En este capítulo se describen algunas de las herramientas matemáticas usadas para describir el fenómeno lineal de difracción de la luz como una aproximación a la transformada de Fourier bidimensional del campo de amplitud compleja, y como una lente convergente puede transformar dicha aproximación a una transformada de Fourier exacta y describir la perturbación de la luz como una distribución espacial de valores reales de Intensidad (espectro de potencia del campo difractado). La siguiente descripción es ampliamente desarrollada en los libros de Stark (1982), Collier (1971) y Goodman (1968).

#### 4.1 Ondas planas

La teoría de difracción escalar esta relacionada con soluciones para la ecuación de onda escalar:

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad , \quad (4.1)$$

donde  $\nabla^2$  es el operador laplaciano,  $u(\vec{r}, t)$  es el campo escalar (o una componente del campo vectorial),  $\vec{r}$  es el vector de posición,  $t$  es tiempo y  $c$  es la velocidad de la luz. Para iluminación monocromática, una solución de la ecuación (4.1) es

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos(2\pi\nu t + \phi(\vec{r})) \quad (4.2)$$

donde  $a(\vec{r})$  es la amplitud independiente del tiempo,  $\nu$  es la frecuencia en Herzt (Hz), y  $\phi(\vec{r})$  es una fase independiente del tiempo. La ecuación (4.2) puede ser escrita como :

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{a(\vec{r})e^{-i\phi(\vec{r})}e^{-i2\pi\nu t}\} \equiv \text{Re}\{U(\vec{r})e^{-i2\pi\nu t}\} \quad , \quad (4.3)$$

donde  $U(\vec{r}) \equiv a(\vec{r}) \exp(-i\phi(\vec{r}))$  , es comunmente llamada la amplitud compleja y satisface la ecuacion de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)U(\vec{r}) = 0 \quad (4.4)$$

donde  $k$  es el número de onda y está relacionado con la longitud de onda de la luz en el espacio libre  $\lambda$  por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} \quad (4.5)$$

Todas la operaciones lineales que envuelvan  $u(\vec{r}, t)$  pueden

ser hechas usando solamente  $U(\vec{r})$ , y son por tanto soluciones reales.

Un plano de amplitud unitaria con vector número de onda  $\vec{K}$  es descrito por una amplitud compleja

$$B(\vec{r}) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} \quad (4.6)$$

y corresponde a una onda real de la forma

$$b(\vec{r}, t) = \cos(2\pi\nu t - \vec{K}\cdot\vec{r}) \quad (4.7)$$

En un medio lineal homogéneo, el vector número de onda tiene magnitud  $|\vec{K}| = \kappa$ , y su dirección es en la dirección de propagación de la onda. La amplitud compleja es constante sobre los puntos  $\vec{r}$  tales que  $\vec{K}\cdot\vec{r} = C_0$ , una constante. Pero  $\vec{K}\cdot\vec{r} = C_0$  es la ecuación de un plano (por eso el término onda plana).

La superficie de fase constante es normal a  $\vec{K}$ , la dirección de propagación. Haciendo  $\vec{K} = K_x\vec{i}_x + K_y\vec{i}_y + K_z\vec{i}_z$ , donde  $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$  son vectores unitarios paralelos a los ejes cartesianos, se puede definir un conjunto de cosenos directores  $\alpha, \beta, \gamma$  y un conjunto de ángulos  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  de acuerdo con

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\hat{\alpha} = (\vec{K}\cdot\vec{i}_x)/K = K_x/K, \\ \beta &= \cos\hat{\beta} = (\vec{K}\cdot\vec{i}_y)/K = K_y/K, \\ \gamma &= \cos\hat{\gamma} = (\vec{K}\cdot\vec{i}_z)/K = K_z/K. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En la figura (4.1) se puede notar que  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$  son los ángulos entre  $\vec{K}$  y los vectores unitarios cartesianos  $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$ ,

respectivamente. Debido a que  $\bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{K}}/K^2 = 1$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , la ecuación (4.6) puede ser escrita como

$$B(x,y,z) = e^{i(K_x x + K_y y + K_z z)} = e^{iK(\alpha x + \beta y)} e^{iK(1-\alpha^2-\beta^2)^{1/2} z}, \quad (4.9)$$

donde se ha usado el hecho que  $\bar{\mathbf{r}} = x\bar{\mathbf{i}}_x + y\bar{\mathbf{i}}_y + z\bar{\mathbf{i}}_z$ .

Sí se adopta la notación  $B(x,y,z) = B_z(x,y)$ , tenemos que

$$\frac{B_z(x,y)}{B_0(x,y)} = \exp\{i2\pi\left[\frac{1}{\lambda}z - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2\right]^{1/2} z\} \equiv H_z\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right), \quad (4.10)$$

donde  $H_z\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$  es la función de transferencia en el espacio libre, que describe la propagación de una onda plana con cosenos directores  $\alpha, \beta, \gamma$  a través de una distancia  $z$ . Las frecuencias espaciales cartesianas  $u, v, w$  se definen por

$$\begin{aligned} u &\equiv \alpha/\lambda, \\ v &\equiv \beta/\lambda, \\ w &\equiv \gamma/\lambda. \end{aligned} \quad (4.11)$$

En términos de estas frecuencias espaciales, la función de transferencia en el espacio libre puede escribirse como

$$H_z(u,v) = \exp\{i(2\pi/\lambda)(1-\lambda^2 u^2 - \lambda^2 v^2)^{1/2} z\} \quad (4.12)$$

La propagación requiere que  $u^2 + v^2 < 1/\lambda^2$ . De otra manera, el exponente en (4.12) es real y ocurriría un desvanecimiento (disipación) de las ondas (Stark, 1982).

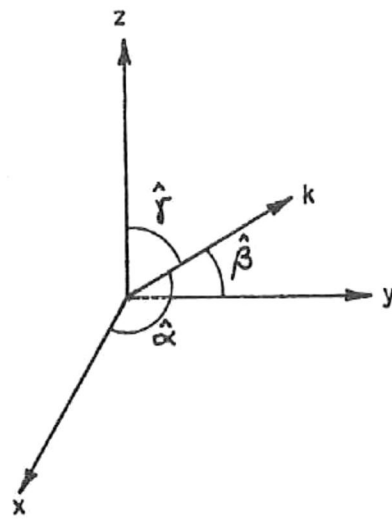


Figura 4.1.- Cosenos directores

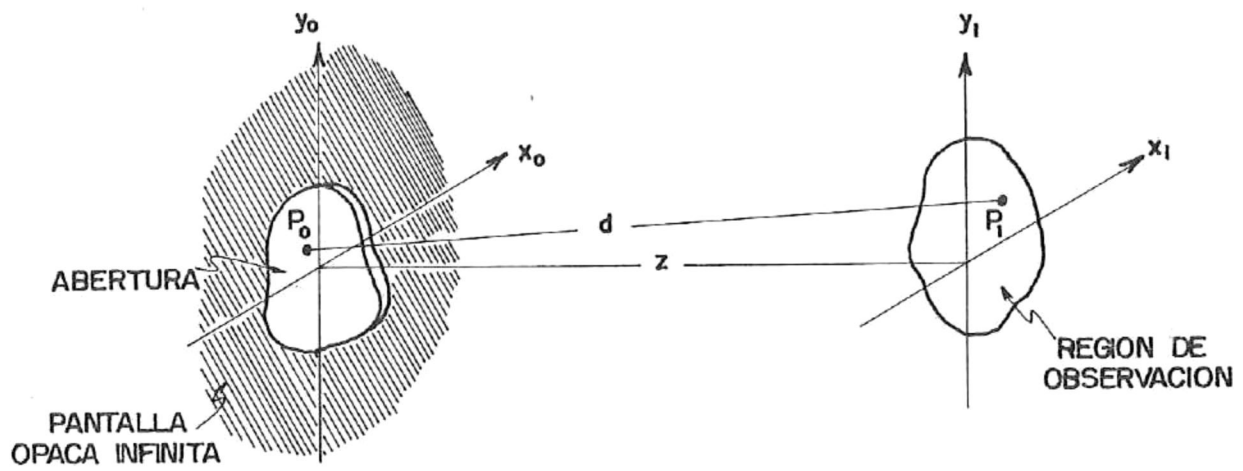


Figura 4.2.- Geometria de difracción

#### 4.2 La Integral de difracción

Considerando una onda viajando esencialmente a lo largo del eje  $z$  e Incidiendo sobre un plano  $xy$ , en  $z = 0$  (figura 4.2). La transformada de Fourier permite la representación de tal onda en terminos de un número infinito de ondas planas infinitesimales de acuerdo a

$$U_0(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(u,v) e^{i2\pi(ux,vy)} du dv \quad , \quad (4.13)$$

donde  $U_0(x,y)$  es la amplitud compleja a través del plano  $xy$  en  $z = 0$  y

$$dU_0 \equiv A_0(u,v) du dv e^{i2\pi(ux,vy)} \quad (4.14)$$

representa una onda plana de amplitud infinitesimal  $A(u,v) du dv$  viajando con cosenos directores

$$\alpha = u\lambda \quad , \quad \beta = v\lambda \quad , \quad \gamma = \sqrt{1-(u\lambda)^2-(v\lambda)^2} \quad (4.15)$$

Similarmente, la amplitud compleja en un plano transversal  $xy$  a una distancia  $z$  tambien puede ser descompuesta en ondas planas infinitesimales  $dU_z \equiv A_z(u,v) du dv \exp\{i2\pi(ux,vy)\}$  de acuerdo con

$$U_z(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_z(u,v) e^{i2\pi(ux,vy)} du dv \quad . \quad (4.16)$$

De las ecuaciones (4.10) y (4.12), se puede relacionar  $dU_z$  con  $dU_0$  de acuerdo a  $dU_z = H_z(u,v) \cdot dU_0$  , por lo tanto

$$A_z(u,v) = A_0(u,v) \exp\left\{\frac{i2\pi}{\lambda}(1-\lambda^2u^2 - \lambda^2v^2)^{1/2} \cdot z\right\} \quad (4.17)$$

La intención es relacionar  $U_z$  con  $U_0$ . Se usa la transformada directa de Fourier para escribir

$$A_0(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi,\eta) e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta \quad (4.18)$$

Se puede ahora relacionar el campo  $U_z$  con el campo  $U_0$  usando la ecuación (4.18) para  $A_0(u,v)$  en la ecuación (4.17) y luego reemplazando  $A_z(u,v)$  en (4.16) por el lado derecho de (4.17). El resultado es

$$U_z(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta U_0(\xi,\eta) G(x-\xi, y-\eta) \quad (4.19)$$

donde

$$G(x-\xi, y-\eta) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{iK\{1-(u\lambda)^2 - (v\lambda)^2\}^{1/2} z} e^{i2\pi\{u(x-\xi) + v(y-\eta)\}} du dv \quad (4.20)$$

Las ecuaciones (4.19) y (4.20) representan la solución para el problema de difracción. Muestran la amplitud compleja en un plano transversal a  $z$  expresada en términos del campo difractado en una abertura en el plano  $z = 0$ . El único problema es la simplificación de tales ecuaciones. Esto puede hacerse de acuerdo con lo siguiente:

Utilizando el cambio de variables  $u = \rho \cos \phi$ ,  $v = \rho \sin \phi$ ,  $x - \xi = r \cos \theta$ ,  $y - \eta = r \sin \theta$ , tenemos que

$$\begin{aligned} G(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \iint_0^{2\pi} e^{iK(1-\lambda^2 \rho^2)^{1/2} z} e^{i2\pi r \rho \cos(\theta-\phi)} \rho d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{iKz(1-\lambda^2 \rho^2)^{1/2}} J_0(2\pi r \rho) \rho d\rho \equiv \tilde{G}(r) \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde  $J_0$  representa la función de Bessel de orden cero.

Con el cambio de variable  $t=2\pi\rho$  ; (4.21) puede ser reescrita como

$$\tilde{G}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-z(t^2 - K^2)^{1/2}} J_0(tr) t dt \quad (4.22)$$

Esta Integral puede ser evaluada por un resultado dado por Erdélyi (1953). La fórmula es

$$\int_0^{\infty} J_0(bt) e^{-a(t^2-y^2)^{1/2}} (t^2-y^2)^{-1/2} t dt = e^{-iy(a^2+b^2)^{1/2}} (a^2+b^2)^{-1/2} \quad (4.23)$$

$$\arg(t^2-y^2)^{1/2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } t < y$$

si la formula de Erdélyi es derivada con respecto a  $a$  y se hacen las asociaciones  $a = z, y = -K, b = r$ , se obtiene

$$\tilde{G}(r) = \frac{e^{iK(z^2+r^2)^{1/2}}}{i\lambda\sqrt{r^2+z^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{iK\sqrt{r^2+K^2}}\right) \quad (4.24)$$

de esta fórmula se pueden hacer varias observaciones:

- 1) Para  $Z \gg \lambda$ , el segundo término en el parentesis es  $\ll 1$  y puede ser ignorado.
- 2)  $z(r^2+z^2)^{1/2} = \cos \Phi$ , donde  $\Phi$  es el ángulo entre el eje positivo y la línea pasando a través de los puntos  $(\xi, \eta, 0)$  y  $(x, y, z)$ .  $\cos \Phi$  es llamado el factor de oblicuidad y es aproximadamente 1

cuando las dimensiones de la región de interés son pequeñas comparadas con  $z$ . Reemplazar  $\cos \phi$  por uno es equivalente a la aproximación paraxial y es común en la óptica de Fourier (Stark, 1982).

- 3)  $(r^2 + z^2)^{1/2}$  es la distancia entre  $(\xi, \eta, 0)$  y  $(x, y, z)$ . En la aproximación paraxial, la cantidad en el denominador puede ser reemplazada por  $z$ .

Con esto, (4.24) queda como

$$\tilde{G}(r) \approx e^{iK(z^2+r^2)^{1/2}} / i\lambda z, \quad (4.25)$$

y la Integral de difracción toma la forma

$$U_z(x,y) = \frac{1}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi,\eta) e^{iK(z^2+r^2)^{1/2}} d\xi d\eta. \quad (4.26)$$

La última aproximación es hacer la llamada aproximación de Fresnel

$$\begin{aligned} (z^2+r^2)^{1/2} &= \{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{1/2} \\ &\approx z + (x-\xi)^2/2z + (y-\eta)^2/2z \end{aligned} \quad (4.27)$$

Se observa en (4.27) que se han omitido los términos de orden mayor que dos. La parte crítica de esta aproximación consiste en que las pequeñas ondas esféricas son reemplazadas por superficies cuadráticas. Goodman (1968) discute la validez de la aproximación de Fresnel.

La ecuación (4.26) puede ser escrita finalmente como

$$U_z(x,y) = \frac{e^{iKz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(\xi,\eta) \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda z}((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)\right\} d\xi d\eta \quad (4.28)$$

La naturaleza de convolución de esta ecuación sugiere que los efectos de la difracción de Fresnel pueden ser analizados en el dominio de la frecuencia espacial, al ser afectado el espectro de Fourier de las ondas por una función de transferencia cuya forma es

$$H(u,v) = \exp(iKz) \exp(-i\pi\lambda z(u^2+v^2)) \quad (4.29)$$

y que describe los efectos de la propagación en la región de Fresnel. El primer factor exponencial representa la retardación total de fase sufrida por cualquier componente del espectro angular propagado entre los dos planos separados una distancia  $z$ . El segundo factor exponencial representa la dispersión de fase con dependencia de las frecuencias cuadráticas (Goodman, 1968).

Una forma alternativa para la ecuación (4.28) puede hallarse expandiendo los términos cuadráticos y haciendo un poco de álgebra, quedando como

$$U_z(x,y) = \frac{\exp(iKz)}{i\lambda z} \exp\left\{\frac{iK}{2z}(x^2+y^2)\right\} \iint_{-\infty}^{\infty} \{U_0(\xi,\eta) \exp\left(\frac{iK}{2z}(\xi^2+\eta^2)\right)\} \exp\left\{\frac{-i2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)\right\} d\xi d\eta \quad (4.30)$$

Así, la función  $U_z(x,y)$  puede ser encontrada por una

transformada de Fourier de  $U_0(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{iK}{2Z} (\xi^2 + \eta^2)\right\}$ , donde la transformación debe ser evaluada en frecuencias  $u = \xi/\lambda z$  y  $v = \eta/\lambda z$  para asegurar el correcto escalamiento de coordenadas en el plano de observación (Goodman, 1968).

#### **4.3 Transformada de Fourier por una lente**

Una de las características destacables de las lentes convergentes es su propiedad para llevar a cabo transformadas de Fourier bidimensionales.

Una lente esférica simple consiste de material transparente (por lo general vidrio) con sus dos superficies esféricas. La luz se propaga a través del material del lente  $n$  veces más lenta que en el espacio libre, donde  $n$  es el índice de refracción del material del lente (Shulman, 1970). Si una onda plana incide paralelo al eje óptico de la lente, al salir tendrá un desfase debido al retraso en la velocidad de la luz, mayor en la parte más ancha de la lente y disminuyendo hacia la parte más delgada. Esto es lo que le permite a la lente realizar la transformada óptica de Fourier.

Supóngase que en un objeto plano con función de transmitancia

$t(x)$  es iluminado con una onda plana monocromática de amplitud unitaria incidendo normalmente a la superficie del objeto. El campo de amplitud compleja inmediatamente después del objeto es  $U_0(x_0, y_0)$ , (ver fig. 4.3) con su espectro de Fourier  $F_0(F_x, F_y)$ . El campo que incide sobre el lente es  $U_1(x_1, y_1)$ , con su espectro de Fourier  $F_1(F_x, F_y)$ . Suponiendo que la propagación de Fresnel es válida sobre la distancia  $d$ , la relación entre  $F_0$  y  $F_1$  es, según (4.29)

$$F_1(F_x, F_y) = F_0(F_x, F_y) \exp\{-i\pi\lambda d(F_x^2 + F_y^2)\} \quad , \quad (4.31)$$

donde se ha anulado una constante de fase.

La extensión finita de la abertura de la lente puede ser tomada en cuenta al asociar con la lente una función de pupila  $P(x, y)$  definida por: (Goodman, 1968).

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dentro de la abertura de la lente} \\ 0 & \text{fuera de la abertura de la lente} \end{cases} \quad (4.32)$$

Entonces, la distribución de la amplitud detrás de la lente es

$$U_z(x_1, y_1) = U_1(x_1, y_1) T_1(x_1, y_1) P(x_1, y_1) \quad (4.33)$$

donde  $T_1(x_1, y_1)$  es una transformación de fase debida a la lente (Goodman, 1968), definida como

$$T_1(x, y) = \exp\{-iK/2f(x^2 + y^2)\} \quad (4.34)$$

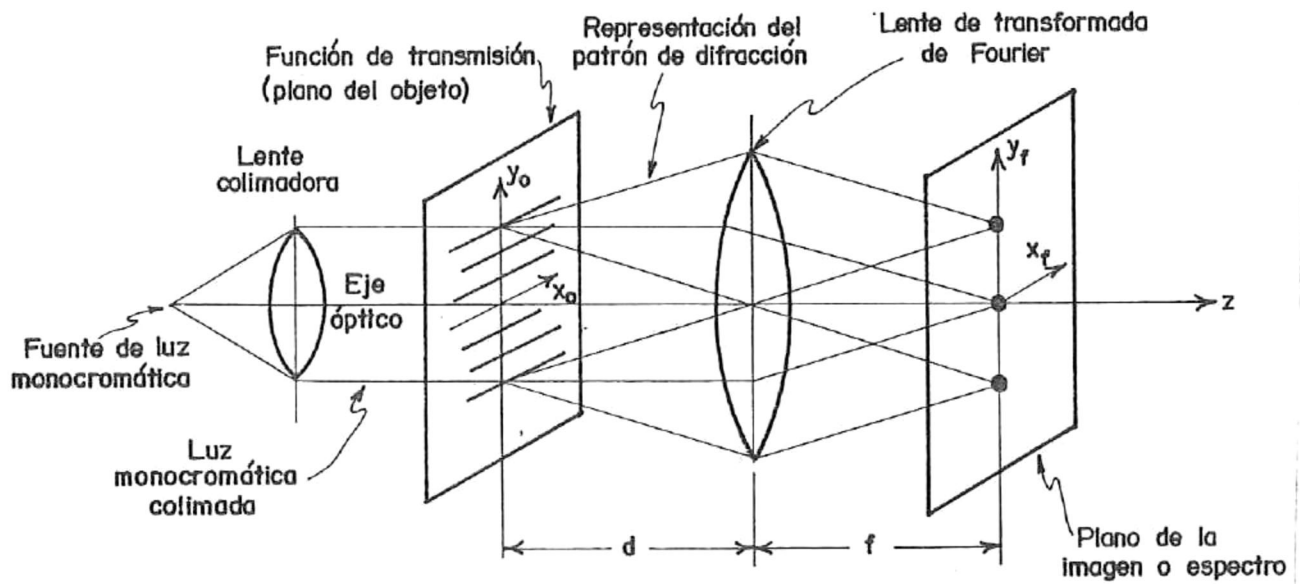


Figura 4.3.- Representación esquemática de la transformación de Fourier llevada al cabo por una lente.

donde  $f$  es la longitud focal de la lente y  $\Phi$  es una constante de fase (la cuál puede omitirse y no afecta en forma significativa para este trabajo).

En el plano focal frontal de la lente, la distribución es:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{e^{\{ \frac{ik}{2f}(x_f^2 + y_f^2) \}}}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} U_2(x, y) \exp\left\{ \frac{ik}{2f}(x_1^2 + y_1^2) \right\} \exp\left\{ \frac{-i2\pi}{\lambda f}(x_1 x_f + y_1 y_f) \right\} dx_1 dy_1 \quad (4.35)$$

donde un factor de fase ha sido eliminado.

Sustituyendo (4.33) en (4.35) los factores de fase cuadráticos del integrando se cancelan, quedando

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left\{ \frac{ik}{2f}(x_f^2 + y_f^2) \right\} \iint_{-\infty}^{\infty} U_1(x_1, y_1) P(x_1, y_1) \exp\left\{ \frac{-i2\pi}{\lambda f}(x_1 x_f + y_1 y_f) \right\} dx_1 dy_1 \quad (4.36)$$

Si la extensión física del objeto es menor que la abertura de la lente, el factor  $P(x_1, y_1)$  es igual a uno. Por tanto el campo  $U_f$  es proporcional a una transformada de Fourier bidimensional del campo incidente sobre la lente.

La ecuación (4.36) puede escribirse como:

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left\{ \frac{ik}{2f}(x_f^2 + y_f^2) \right\} F_1\left(\frac{x_f}{f}, \frac{y_f}{f}\right) \quad (4.37)$$

y sustituyendo (4.31) en (4.36)

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left\{ \frac{ik}{2f}\left(1 - \frac{d}{f}\right)(x_f^2 + y_f^2) \right\} F_0\left(\frac{x_f}{f}, \frac{y_f}{f}\right)$$

ó bien,

$$U_f(x_f, y_f) = \frac{1}{i\lambda f} \exp\left\{\frac{ik}{2f}\left(1-\frac{d}{f}\right)(x_f^2 + y_f^2)\right\} \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \exp\left\{-\frac{i2\pi}{\lambda f}(x_0 x_f + y_0 y_f)\right\} dx_0 dy_0. \quad (4.38)$$

En esta ecuación se observa que si  $d = f$ , es decir que si el objeto es colocado en el plano focal atrás de la lente, el término que precede la integral desaparece, quedando solo una relación exacta de la transformada de Fourier, con coordenadas en el plano de Fourier dados por:

$$x_f = F_x \lambda f \quad \text{y} \quad y_f = F_y \lambda f \quad (4.39)$$

Si  $d$  no es igual a  $f$ , la relación de transformada de Fourier no es exacta debido al factor cuadrático de fase que precede la integral. A pesar de que la distribución de fase a través del plano focal no es igual a la distribución de fase del plano del espectro, lo que en muchos casos interesa es la intensidad a través del plano focal (intensidad es lo que los detectores pueden medir).

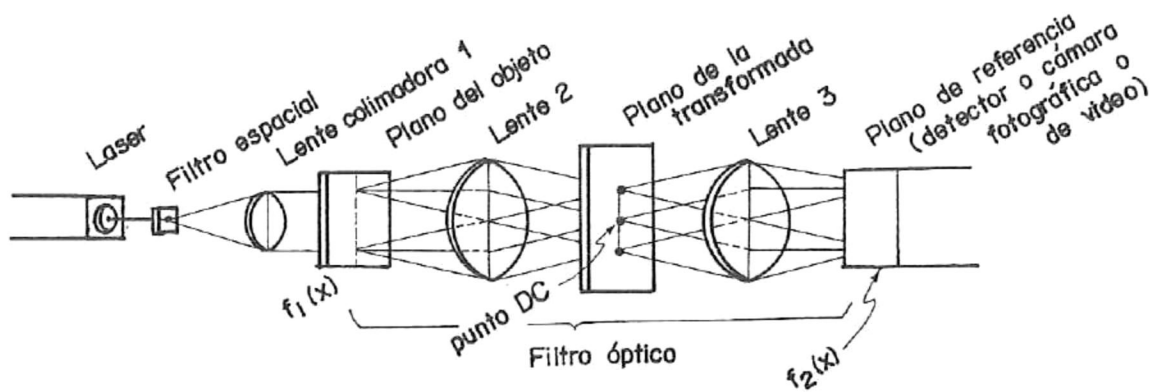
Entonces, con  $A$  siendo la amplitud de la onda plana, tenemos que

$$I_f(x_f, y_f) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x_0, y_0) \exp\left\{-\frac{i2\pi}{\lambda f}(x_0 x_f + y_0 y_f)\right\} dx_0 dy_0 \right\}^2 \quad (4.40)$$

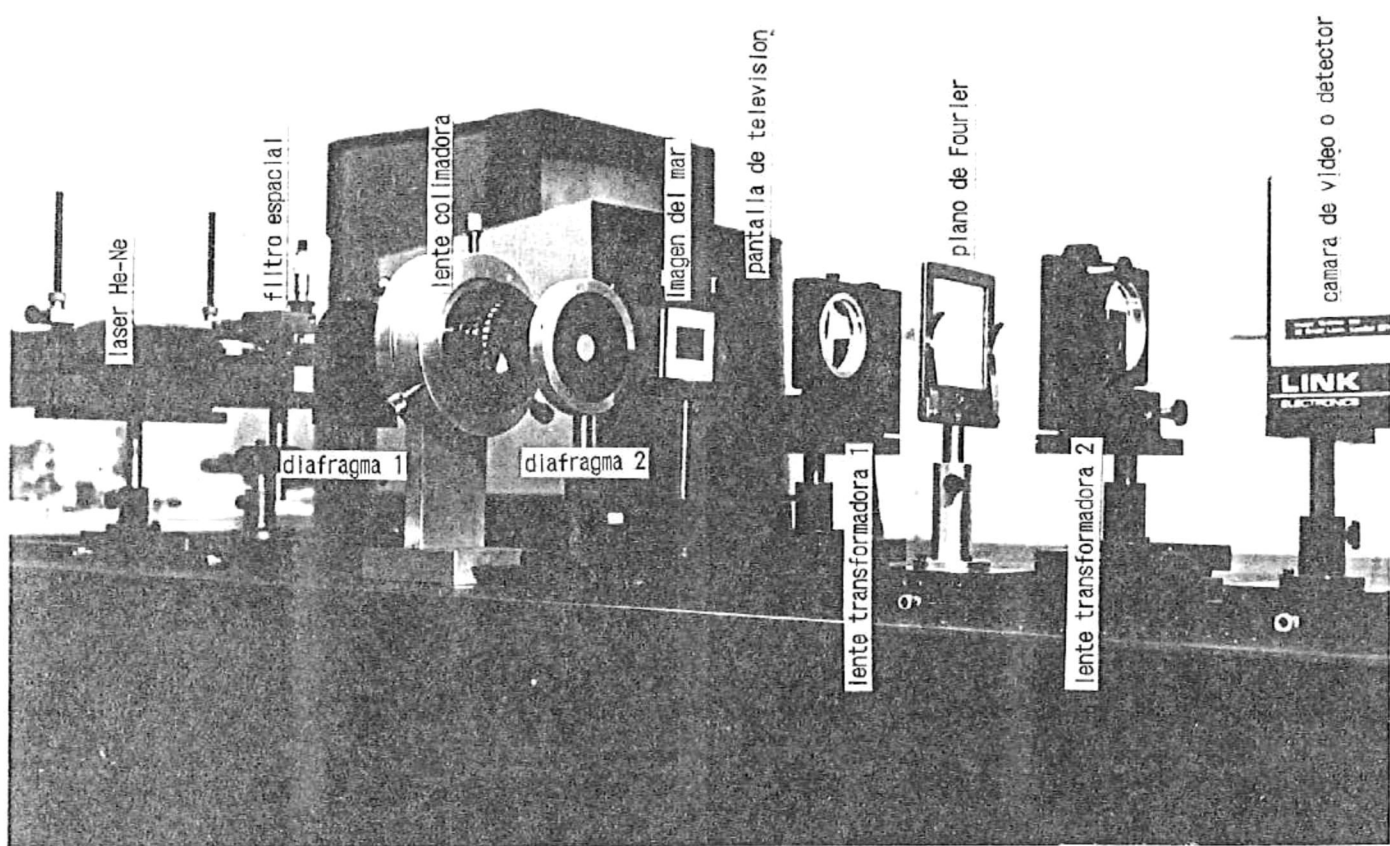
es la distribución de intensidad en el plano focal de la lente y es el espectro de potencia del objeto (Alvarez, 1983).

#### *4.4 Sistema óptico coherente*

Para obtener el espectro de potencia de una imagen de la superficie del mar se utilizó el sistema óptico coherente mostrado esquemáticamente en la figura 4.4a y cuya fotografía es mostrada en la figura 4.4b. El arreglo óptico consiste de una fuente de luz laser de He-Ne, de 632.8 nm de longitud de onda. Un objetivo de microscopio inmediatamente después de la salida del haz del laser en cuyo foco se coloca un filtro espacial (un pequeño agujero de 25 micrones) cuyo propósito es expandir la luz y filtrar las altas frecuencias provenientes del ruido inherente a las fluctuaciones aleatorias de intensidad causadas principalmente por efectos de interferencia de la luz esparcida por partículas de polvo de aire y sobre los espejos, además de los defectos de la lente del objetivo de microscopio. Los frentes de onda esféricos que emergen del filtro espacial inciden sobre la lente colimadora situada a una distancia igual a su longitud focal (para este caso 50cm.) Esta lente convierte los frentes de onda esféricos en frentes de onda planos los cuales iluminan uniformemente la imagen de la superficie del mar en película fotográfica (los diafragmas solo controlan el área de iluminación que llega al objeto). Un poco adelante está colocada la lente que realiza la transformada directa de Fourier de la



(a)



(b)

Figura 4.4.- Sistema óptico coherente usado para la obtención de los espectros ópticos.

imagen (lente transformadora 1), (como el interés de este trabajo es el espectro de potencia y no la fase, no importa que la imagen no esté a una distancia  $f$  de la lente). El plano del espectro de potencia se encuentra a 70 cm de la lente (distancia focal de ésta), donde pueden filtrarse las frecuencias no deseadas simplemente obstruyendo el paso de los puntos luminosos que las representan. Más adelante está situada una lente similar que realiza la transformada inversa de Fourier (lente transformadora 2) que reconstruye la imagen (completa ó filtrada) la cual es captada en la cámara de video, que puede ser también una cámara fotográfica sin sus lentes. El espectro de potencia puede ser captado poniendo en el plano de Fourier una cámara fotográfica (también sin lentes, de tal forma que el foco de la lente transformadora coincida en el mismo plano que el negativo de la cámara) ó tomando mediciones de intensidad con un fotomultiplicador.

## 5.- RESULTADOS

De acuerdo a la técnica descrita en el capítulo 2, se generaron tres mares de 208 datos en x y 160 datos en y, conteniendo el espectro teórico de Pierson-Neumann (NEUMANN1, NEUMANN2, NEUMANN3) y 3 con el de Pierson-Moskowitz (MOSKO1, MOSKO2, MOSKO3). Cada uno de estos mares se generó con diferente "semilla aleatoria" y con velocidad de viento de 5 m/seg. La elevación máxima promedio para los mares de Neumann es de 52 cm y para los de Moskowitz de 155 cm. La varianza promedio es de  $0.0161 \text{ m}^2$  y  $.1480 \text{ m}^2$  respectivamente.

Para cada uno de los seis mares se llevó a cabo el análisis espectral numérico descrito en la sección 3.5, obteniéndose sus espectros de densidad de energía. La figura 5.1 muestra el espectro de dos "lados" de uno de los mares generado con el espectro teórico de Pierson-Moskowitz. Dicho espectro teórico para el número de onda, en dos dimensiones, se presenta en la figura 5.2 como un espectro de un "lado".

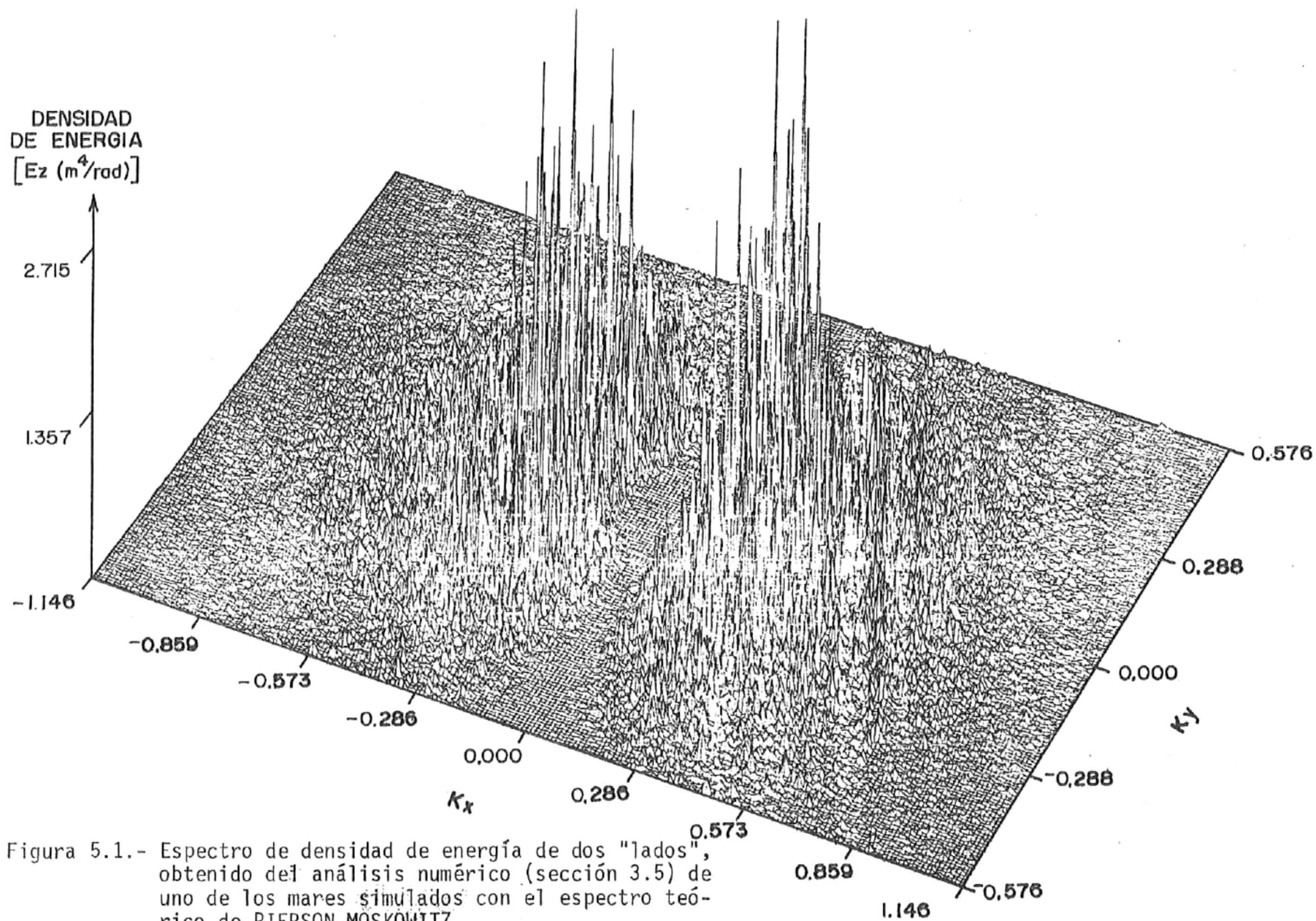


Figura 5.1.- Espectro de densidad de energía de dos "lados", obtenido del análisis numérico (sección 3.5) de uno de los mares simulados con el espectro teórico de PIERSON-MOSKOWITZ.

DENSIDAD DE ENERGIA  
 $[E_z (m^4/rad)]$

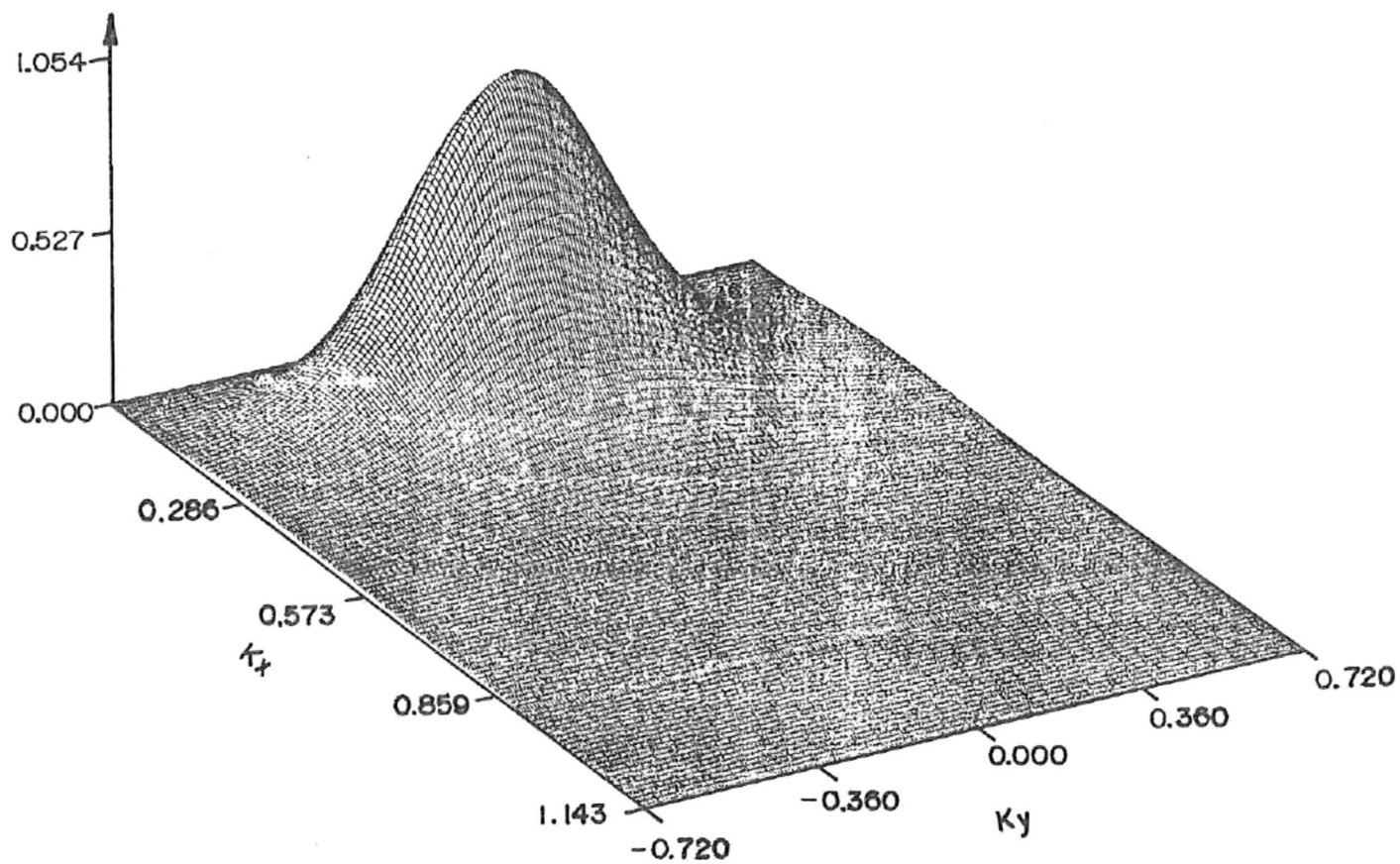


Figura 5.2.- Espectro teórico de densidad de energía de Pierson-Moskowitz de un solo "lado", en función del número de onda  $K(K_x, K_y)$ .

Con fines de comparación, en cada uno de los espectros, para cada banda Kx se integró la energía a lo largo de Ky (positivas y negativas), y similarmente para cada banda Ky se integró la energía a lo largo de Kx. El resultado de esto es mostrado en la figura 5.3 para los espectros de Pierson-Neumann y en la figura 5.4 para los espectros de Pierson-Moskowitz. Se observa que el ajuste en ámbos casos es bueno.

La figura 5.5c muestra una gráfica de un mar de 100 por 100 datos que contiene el espectro de Pierson-Moskowitz. En la figura 5.5a se observa que la distribución de elevaciones es muy aproximada a una distribución normal. El eje horizontal superior de la figura 5.5a muestra valores de densidad de gris asociados a cada valor de altura (la distribución de estos valores es conocida como Histograma de grises). Las estadísticas de la superficie fueron obtenidas directamente de la superficie del mar (208,160 datos) y no de su espectro.

La misma superficie marina numérica de la figura 5.5c, fue impresa en película fotográfica (sección 2.4). Una ampliación fotográfica de ésta imagen se muestra en la figura 5.6. Debe aclararse que en ésta fotografía los tonos de grises están invertidos con respecto al negativo, así la parte alta de la onda (cresta) corresponde a los tonos claros y la parte baja (valle) a los tonos oscuros.

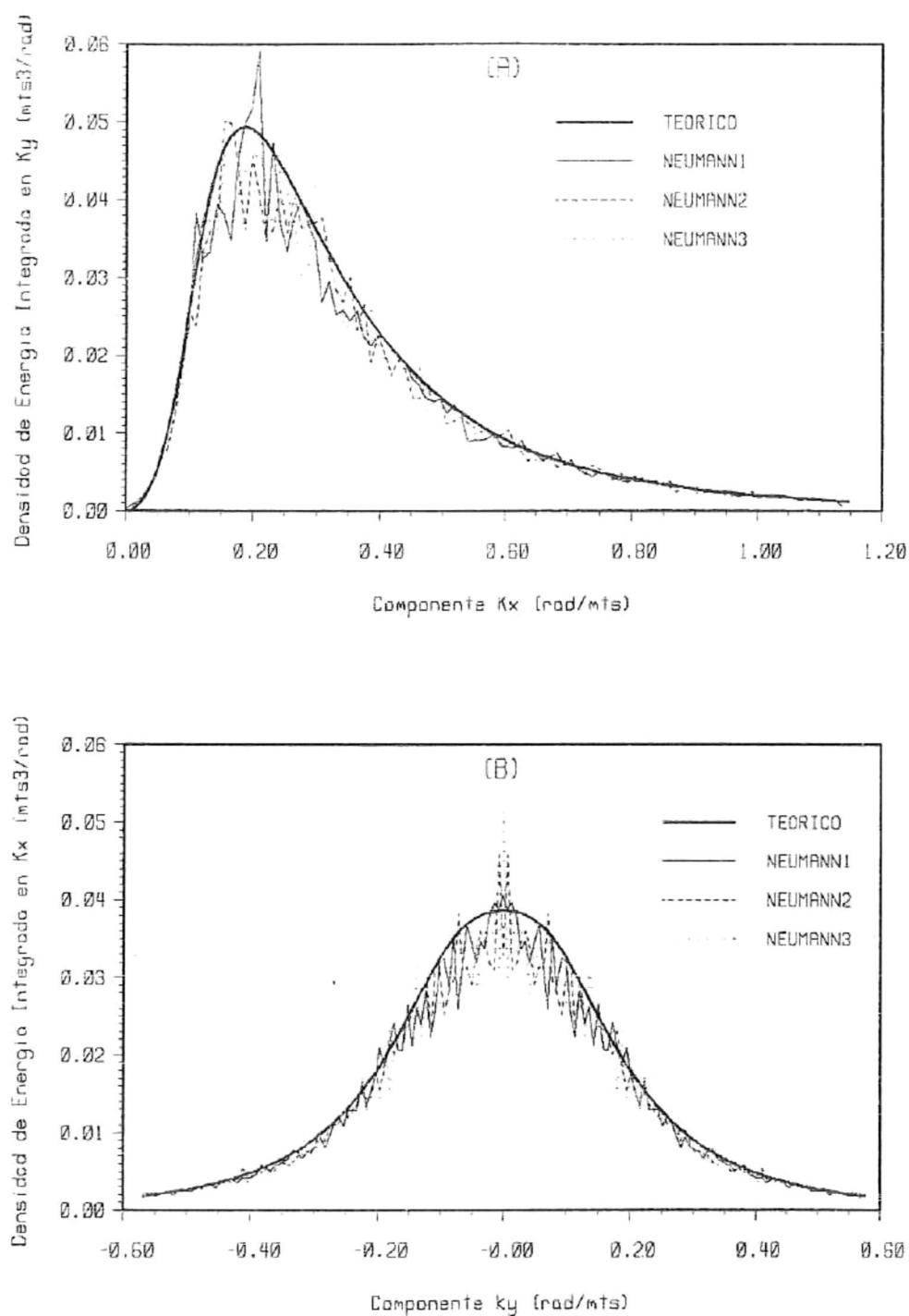


Figura 5.3.- Perfiles de los espectros obtenidos mediante el análisis numérico de los mares generados con el espectro teórico de PIERSON-NEUMANN. En (A) se integraron todas las bandas en  $K_y$  (positivas y negativas) y en (B) todas en  $K_x$  (positivas y negativas) para cada banda del perfil.

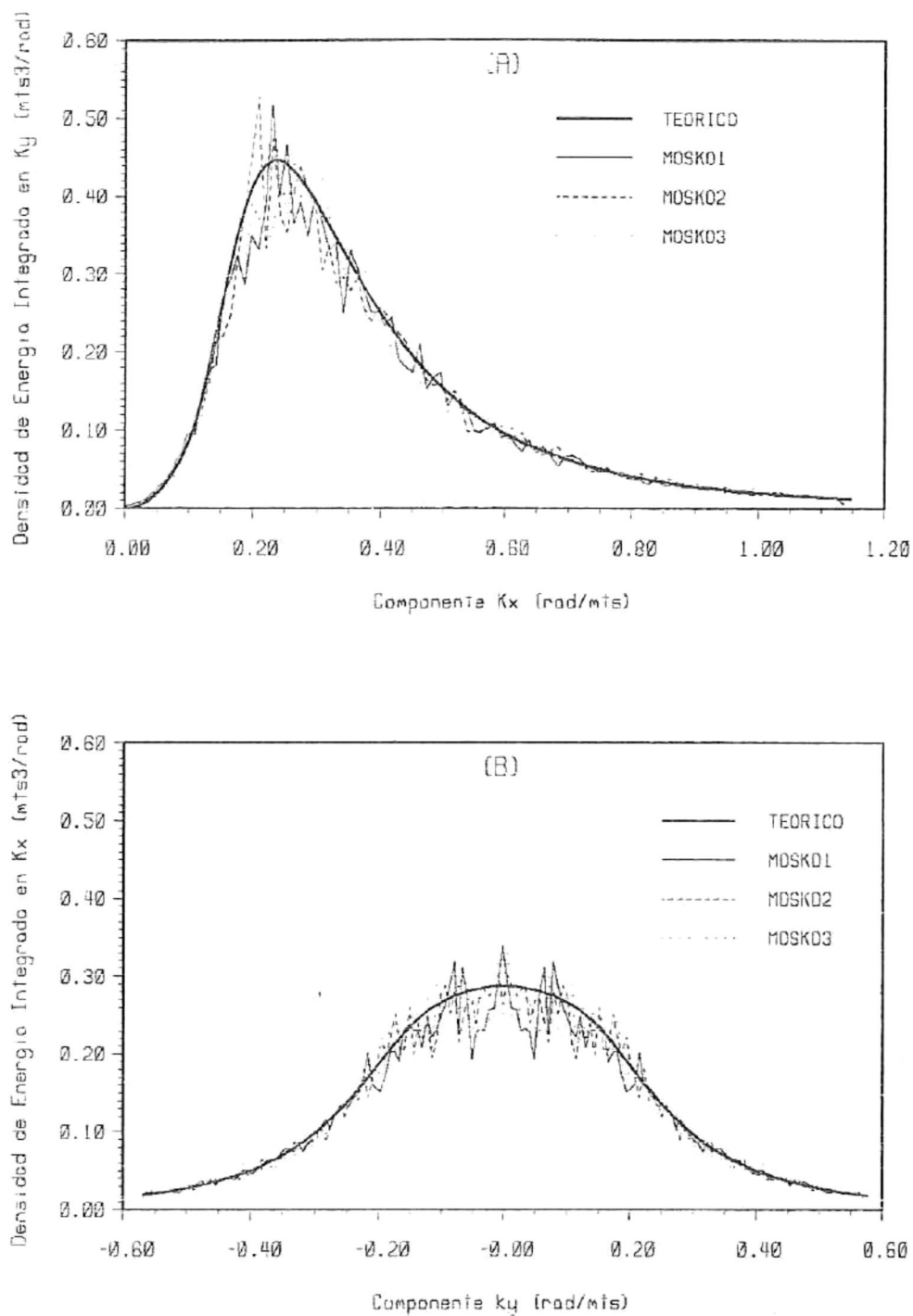
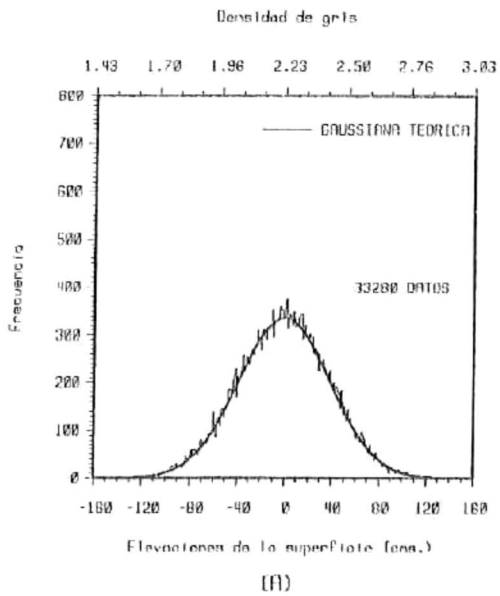


Figura 5.4.- Igual que la figura 5.3 pero para los mares de PIERSON-MOSKOWITZ.



ESTADISTICAS DE LA SUPERFICIE:

VARIANZA	1478.6116	cm <sup>2</sup> .
PROMEDIO	-0.0318	cm.
H MAX.	149.0000	cm.
H MIN.	-159.0000	cm.
$\frac{1}{2}$ H $\frac{1}{3}$	41.2690	cm.
$\frac{1}{2}$ H $\frac{1}{10}$	67.5240	cm.
DELTA X	274.0000	cm.
DELTA Y	545.0000	cm.

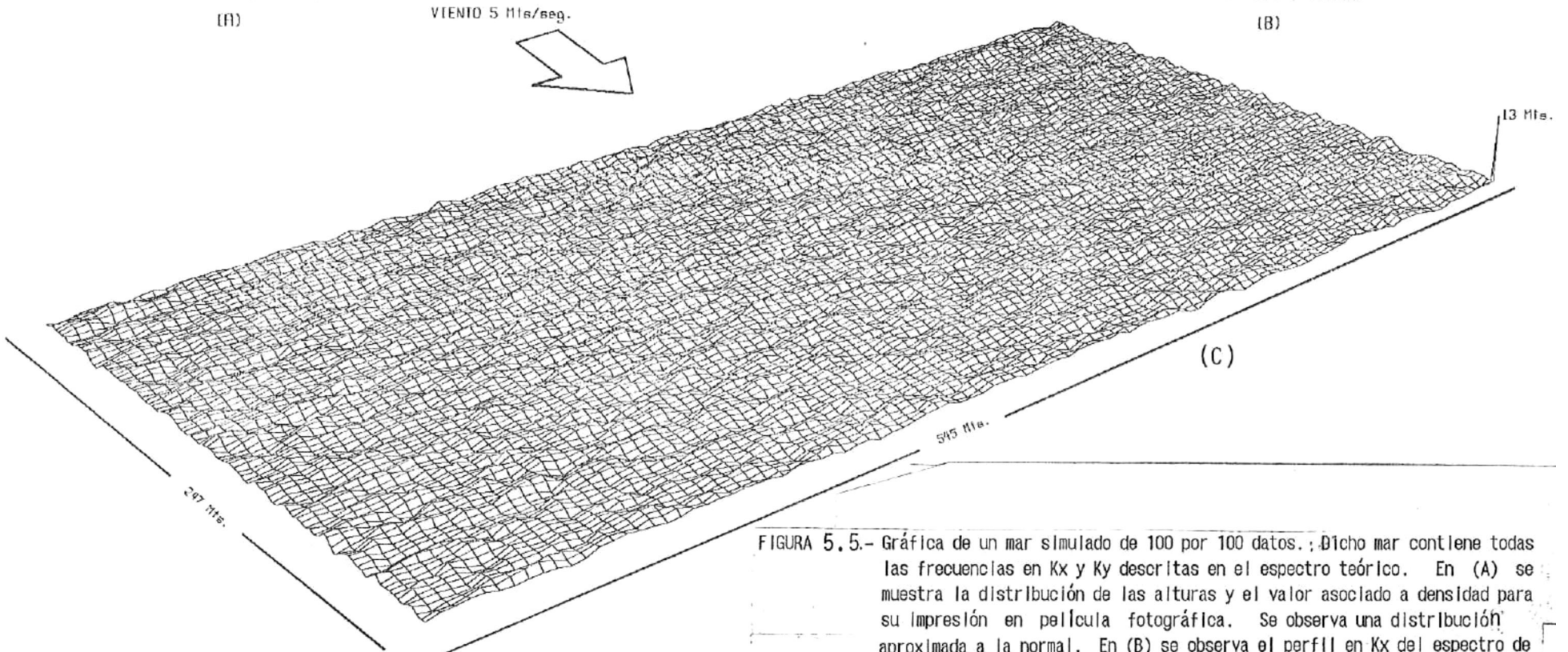
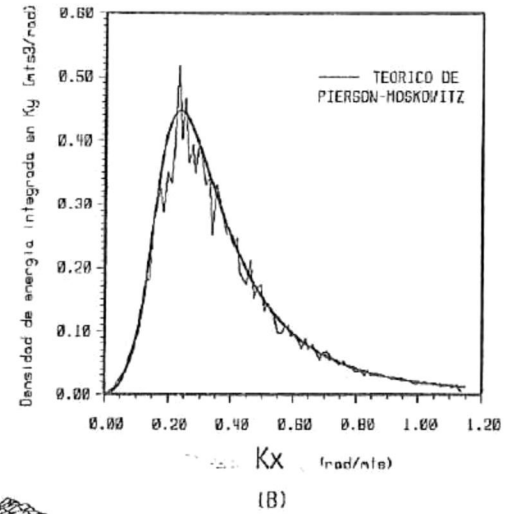


FIGURA 5.5.- Gráfica de un mar simulado de 100 por 100 datos. ; Dicho mar contiene todas las frecuencias en  $K_x$  y  $K_y$  descritas en el espectro teórico. En (A) se muestra la distribución de las alturas y el valor asociado a densidad para su impresión en película fotográfica. Se observa una distribución aproximada a la normal. En (B) se observa el perfil en  $K_x$  del espectro de densidad de energía y la comparación con el teórico.

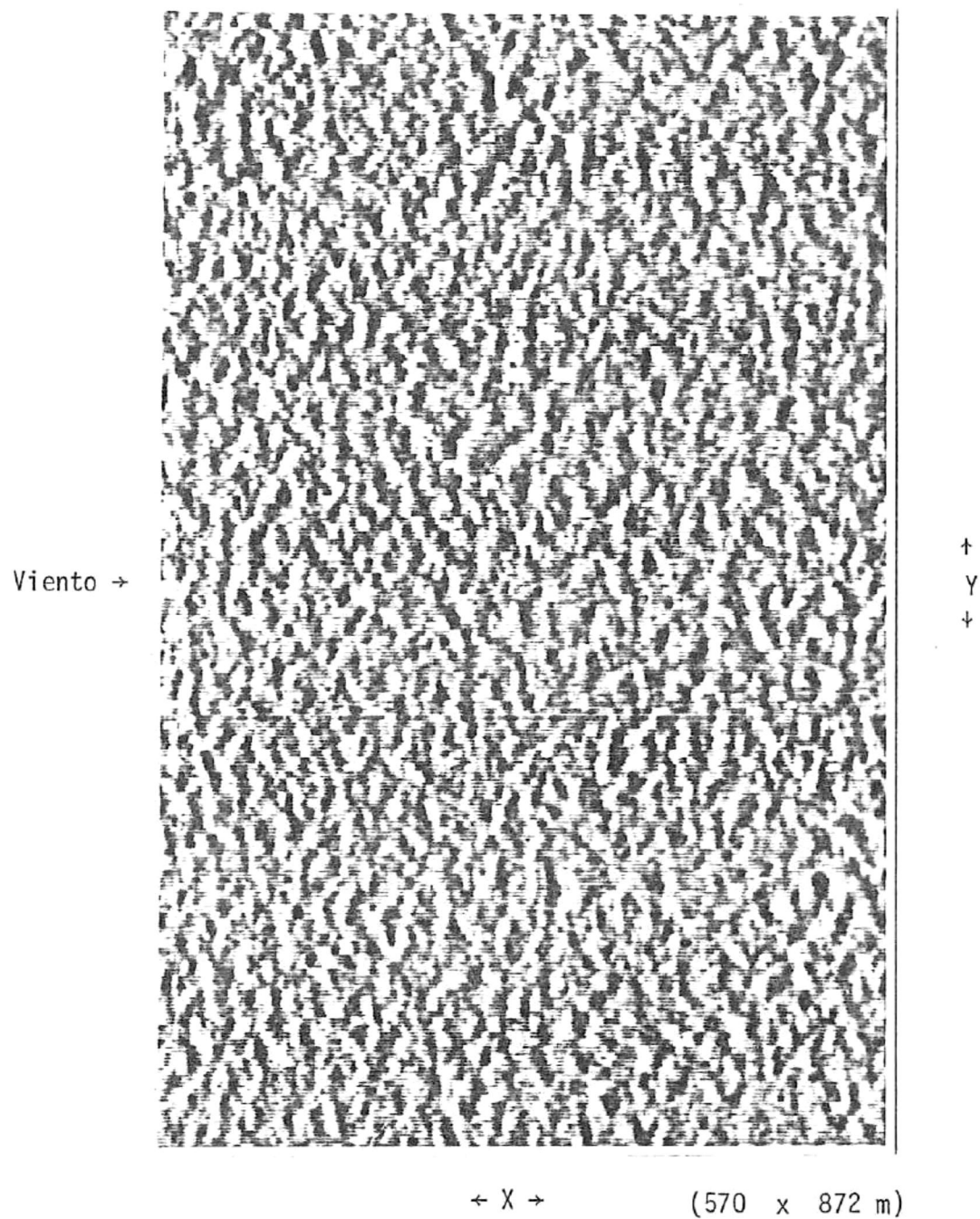


Figura 5.6.- Ampliación fotográfica de una imagen simulada del mar regida por el espectro teórico de PIERSON-MOSKOWITZ. Escala 24.25:1.

El espectro óptico de potencia de ésta imagen se obtuvo de acuerdo al desarrollo descrito en la sección 4.5 y una amplificación fotográfica (6.04 veces aproximadamente) se muestra en la figura 5.7b . La figura 5.7a muestra una fotografía del espectro óptico visto "en el campo lejano". Se pueden observar los puntos luminosos en  $K_y$  que corresponden a la alta frecuencia espacial asociada al "rayado" en  $Y$  producido por el microdensitómetro. Dichos puntos están localizados a 21.09 mm del centro del espectro y corresponden a una frecuencia espacial de  $47.62 \text{ mm}^{-1}$  (de acuerdo con la fórmula 4.39). La longitud de onda correspondiente es de 0.021 mm (el ancho del pixel).

La tabla V.1 muestra la relación existente entre la posición de los números de onda en el espectro numérico y su localización en el plano de Fourier. La longitud de onda  $L$  y el período de las olas  $T$  en aguas profundas, se calculó a partir de la teoría lineal de primer orden (Kinsman, 1965) de acuerdo con:

$$L = 2\pi/k \quad T = (2\pi L/g)^2 . \quad (5.1)$$

La componente espacial de frecuencia  $F_x$  es el inverso de la longitud de onda en la película y  $X_f$  es calculado de acuerdo con la ecuación (4.39).

La superficie numérica del mar con el espectro de Pierson-Moskowitz fue filtrada en la computadora. El filtrado se

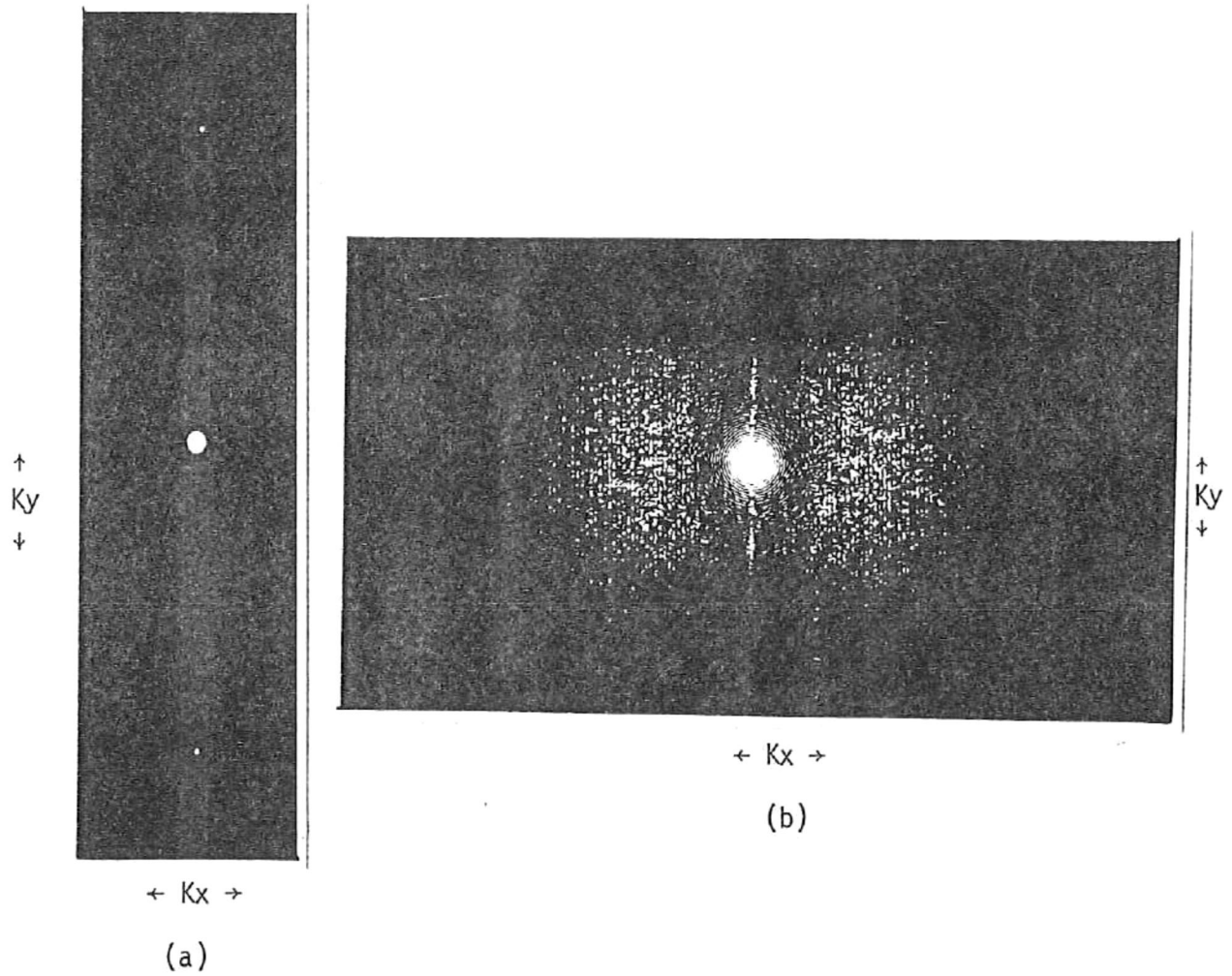


Figura 5.7.- Espectro óptico de la imagen de la figura 5.6. En (a) el espectro es visto en el "plano lejano" y en (b) se observa en detalle en el plano de Fourier.

Tabla V.1  
Relación entre la posición de los números de onda en el espectro numérico y su localización en el plano de Fourier (espectro óptico).

## EN LA DIRECCION DE X

Indice I del espectro	Período (seg)	Componente Kx (mts <sup>-1</sup> )	Longitud de onda (mar) (mts)	Longitud de onda (película) (mm)	Frecuencia espacial Fx (mm <sup>-1</sup> )	Xf (mm)
10	6.0443	0.1102	56.9920	0.4368	2.2894	1.0141
20	4.2740	0.2205	28.4960	0.2184	4.5788	2.0282
30	3.4897	0.3307	18.9973	0.1456	6.8681	3.0423
43	2.9148	0.4741	13.2540	0.1016	9.8443	4.3606
50	2.7031	0.5512	11.3984	0.0874	11.4469	5.0705
60	2.4676	0.6615	9.4987	0.0728	13.7363	6.0846
70	2.2845	0.7717	8.1417	0.0624	16.0256	7.0987
80	2.1370	0.8820	7.1240	0.0546	18.3150	8.1128
90	2.0148	0.9922	6.3324	0.0485	20.6044	9.1269
103	1.8833	1.1355	5.5332	0.0424	23.5806	10.4453

## EN LA DIRECCION DE Y

Indice J del espectro	Período (seg)	Componente Ky (mts <sup>-1</sup> )	Longitud de onda (mar) (mts)	Longitud de onda (película) (mm)	Frecuencia espacial Fy (mm <sup>-1</sup> )	Yf (mm)
10	7.4765	0.0721	87.2000	0.6720	1.4881	0.6592
20	5.2867	0.1441	43.6000	0.3360	2.9762	1.3183
30	4.3165	0.2162	29.0667	0.2240	4.4643	1.9775
37	3.8868	0.2666	23.5676	0.1816	5.5060	2.4389
50	3.3436	0.3603	17.4400	0.1344	7.4405	3.2958
60	3.0523	0.4323	14.5333	0.1120	8.9286	3.9550
70	2.8258	0.5044	12.4571	0.0960	10.4167	4.6142
80	2.6433	0.5764	10.9000	0.0840	11.9048	5.2733

realizó calculando la transformada directa de Fourier de la superficie y separando los números reales e imaginarios en arreglos diferentes. Cada superficie de éstas fue multiplicada por separado por una función de transferencia que consiste de unos para las frecuencias deseadas y ceros para las no deseadas, de tal manera que se esté dejando pasar solo una banda específica de frecuencias. De acuerdo con la sección 3.3 la banda deseada de frecuencias debe incluir también las frecuencias negativas. La superficie filtrada del mar es reconstruida al obtener la transformada inversa de Fourier de la superficie compleja formada por las partes real e imaginaria filtradas.

La tabla V.II muestra algunas de las características de los mares filtrados y su comparación con el mar completo. Las características se describen en términos de las frecuencias positivas del espectro (104,80).

Los valores de  $H_{1/3}$  y  $H_{1/10}$  se calcularon directamente de las superficies, tomando el promedio de la tercera y la décima parte de las elevaciones más altas, respectivamente. (como éstas elevaciones representan la amplitud sobre el promedio, se calcula el promedio del  $1/3$  y  $1/10$  de las amplitudes mayores y se supone que la altura  $H$  es 2 veces la amplitud).

Las figuras de 5.8 a 5.13 muestran la gráfica de una parte

Tabla V.11  
Características de los mares filtrados

EN LA DIRECCION DE Kx

Indices del espectro numérico	Kx (rad/mts)	Longitud de onda Lx (mts)		Período T (Seg)		H 1/3 (mts)	H 1/10 (mts)		
		min.	max.	min.	max.				
Completo	0-104	0.000	1.146	5.48	569.92	1.87	19.10	0.82	1.35
Altas frecuencias	44-104	0.485	1.146	5.48	12.95	1.87	2.88	0.42	0.69
Bajas frecuencias	0- 11	0.000	0.121	51.92	569.92	5.76	19.10	0.17	0.28
Pasabanda	11- 44	0.121	0.485	12.95	51.92	2.88	5.76	0.74	1.20
Altas e inter.	11-104	0.121	1.146	5.48	51.92	1.87	5.76	0.85	1.38

EN LA DIRECCION DE Ky

Indices del espectro numérico	Ky (rad/mts)	Longitud de onda Ly (mts)		Período T (Seg)		H 1/3 (mts)	H 1/10 (mts)		
		min.	max.	min.	max.				
Altas frecuencias	38- 80	0.273	0.576	10.90	23.01	1.87	19.10	0.39	0.66
Bajas frecuencias	0- 38	0.000	0.273	23.01	872.00	1.87	19.10	0.77	1.26

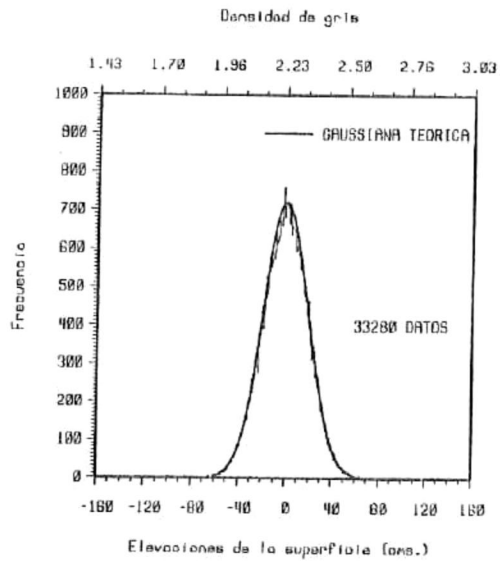
(100 por 100 datos) de los mares filtrados. Para cada mar filtrado se muestra en (a) la distribución de alturas y su comparación con una distribución normal (gaussiana), se presenta también el histograma de grises asociado a la superficie para su representación en película fotográfica. En (b) se observa el perfil de densidad integrando en  $K_y$  (para 5.8, 5.9, 5.10 y 5.11) y el perfil Integrado en  $K_x$  (para 5.12 y 5.13) que muestra la distribución de la energía en las bandas de frecuencia que no fueron filtradas.

Las seis superficies filtradas numéricamente fueron impresas en película fotográfica y se obtuvieron sus espectros ópticos. En forma simultánea, se calcularon los espectros de densidad de energía numéricos de tales superficies, presentándolos en forma de espectros de un "lado". Los resultados de ámbos procesos se presentan en las figuras 5.14 a 5.19 . Se observa una gran semejanza en los resultados, (los espectros ópticos fueron amplificados en papel de alto contraste, para resaltar los puntos que tuviesen información).

De acuerdo con la información de la tabla V.1, se diseñaron filtros espaciales para implementar un filtrado semejante en el sistema óptico. Este filtrado consiste en dejar pasar las bandas de luz que corresponden a las frecuencias deseadas en el plano de Fourier del sistema descrito en la figura 4.4 (debe dejarse pasar

Relación de figuras de las paginas siguientes:

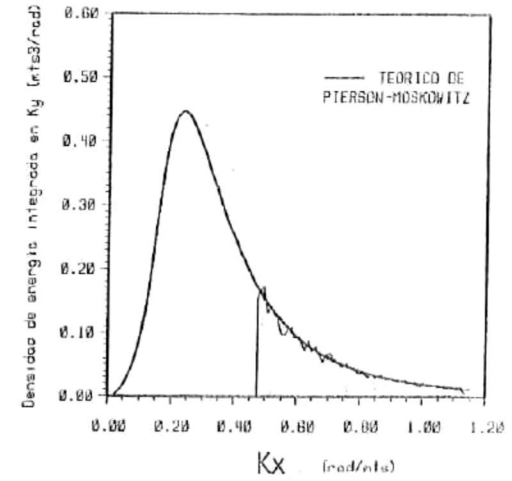
Figura		pagina
5.8	Mar simulado de 100 x 100 datos que contiene solo las altas frecuencias en la dirección Kx. Las longitudes de ondas presentes en la dirección x, son de 5.48 a 13.00 m. En (a) se observa una buena distribución normal y en (b) se muestra el perfil de las frecuencias presentes en la superficie.	77
5.9	Igual que en la figura 5.8 pero que contiene las bajas frecuencias en Kx. Las longitudes de onda presentes son de 52.00 a 570.00 m.	78
5.10	Igual que la figura 5.8 pero para la banda más importante de frecuencias en Kx. Las longitudes de onda presentes en x son de 13.00 a 52.00 m.	79
5.11	Igual que para la figura 5.8 pero para las frecuencias altas e intermedias. Las longitudes de onda presentes en x son de 5.48 a 52.00 m.	80
5.12	Igual que la figura 5.8 pero para las altas frecuencias en Ky. Las longitudes de onda presentes en y son de 10.90 a 23.00 m.	81
5.13	Igual que la figura 5.12 pero para las bajas frecuencias en Ky. Las longitudes de onda presentes en y son de 23.00 a 870.00 m.	82



(A)

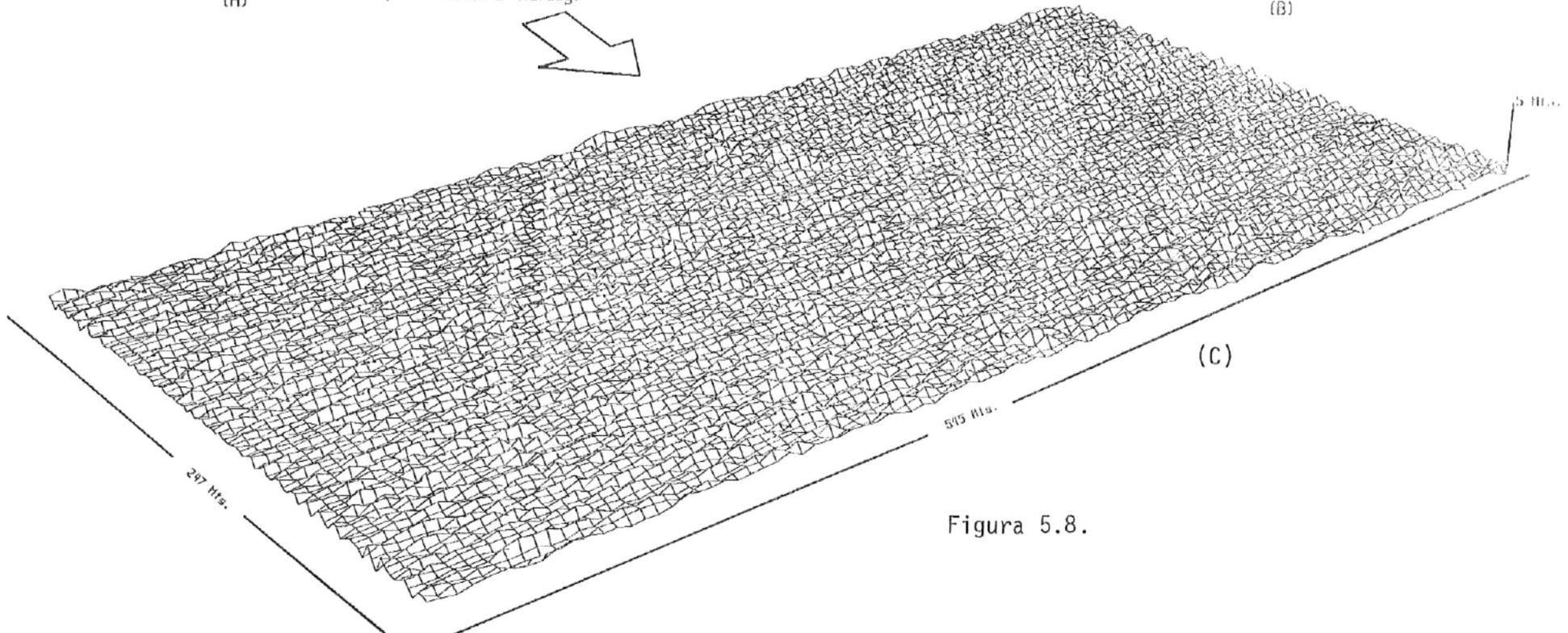
ESTADISTICAS DE LA SUPERFICIE:

VARIANZA	369.9822	cm <sup>2</sup> .
PROMEDIO	-0.0002	cm.
H MAX.	92.1730	cm.
H MTN.	-72.1260	cm.
$\frac{1}{2}H$ 1/3	21.2977	cm.
$\frac{1}{2}H$ 1/10	34.6792	cm.
DELTA X	274.0000	cm.
DELTA Y	545.0000	cm.



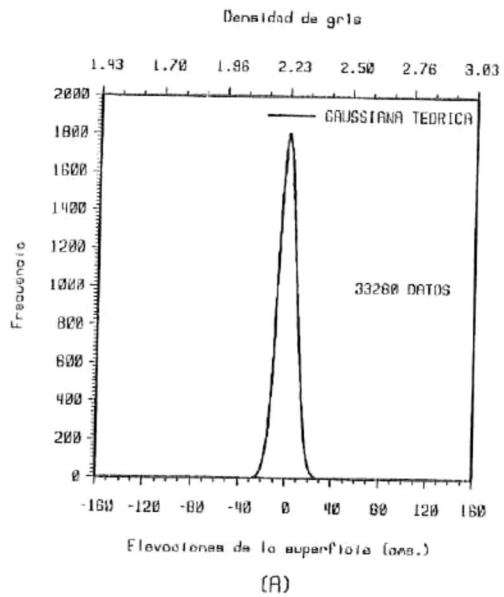
(B)

VIENTO 5 Mts/seg.



(C)

Figura 5.8.



ESTADISTICAS DE LA SUPERFICIE:

VARIANZA	60.3893	cm <sup>2</sup> .
PROMEDIO	0.0330	cm.
H MAX.	34.9600	cm.
H MIN.	-37.7860	cm.
$\frac{1}{Z}$ H 1/3	0.7194	cm.
$\frac{1}{Z}$ H 1/10	14.3369	cm.
DELTA X	274.0000	cm.
DELTA Y	545.0000	cm.

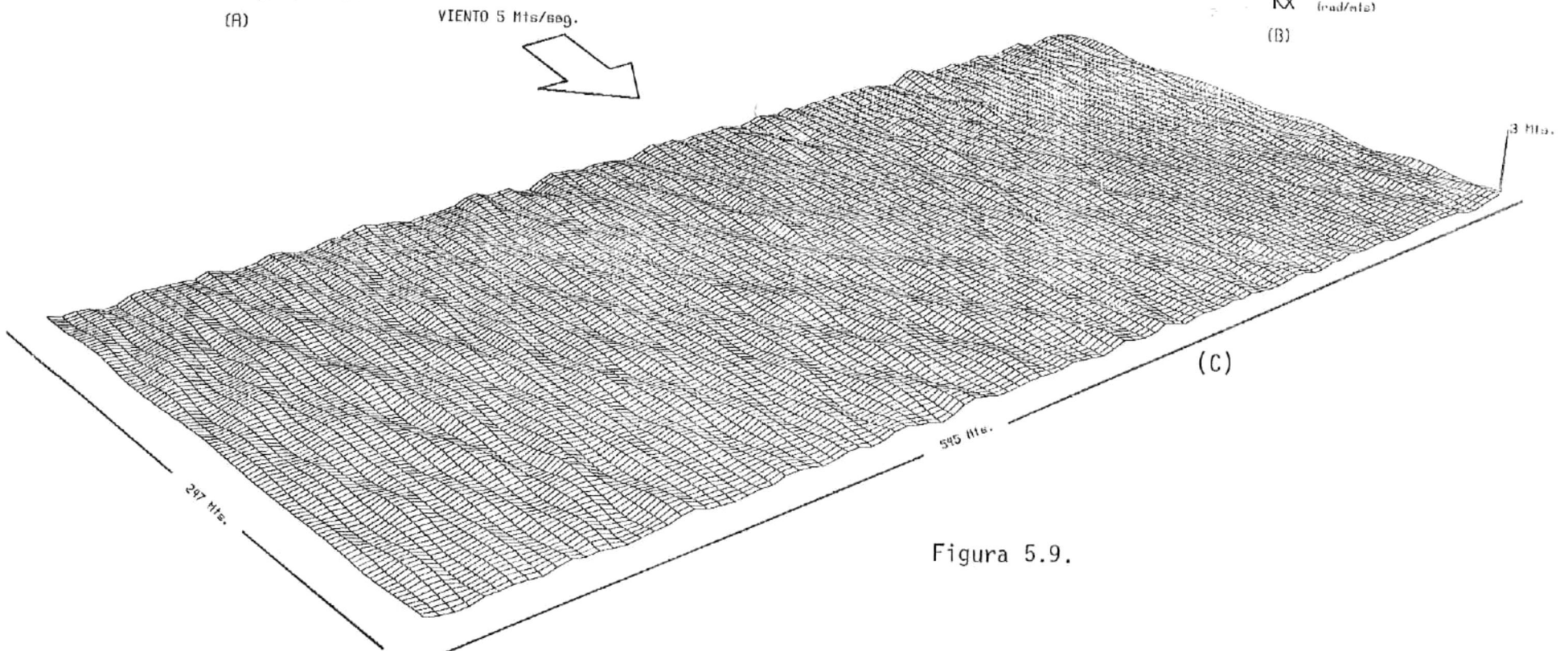
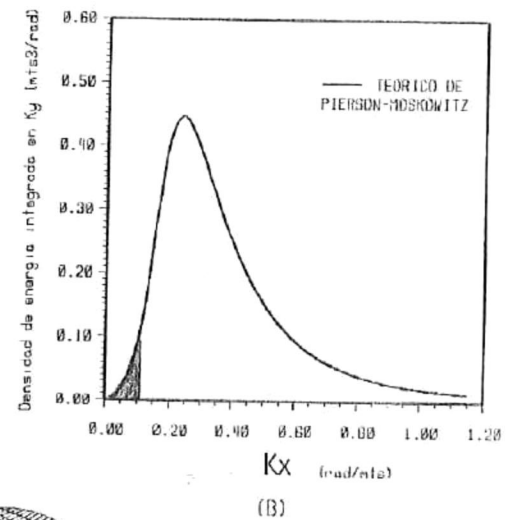
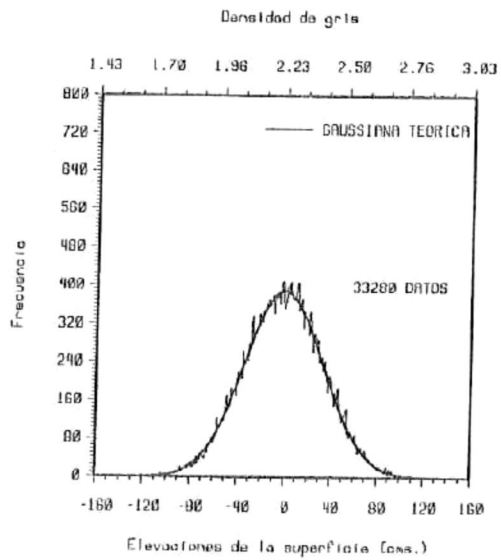


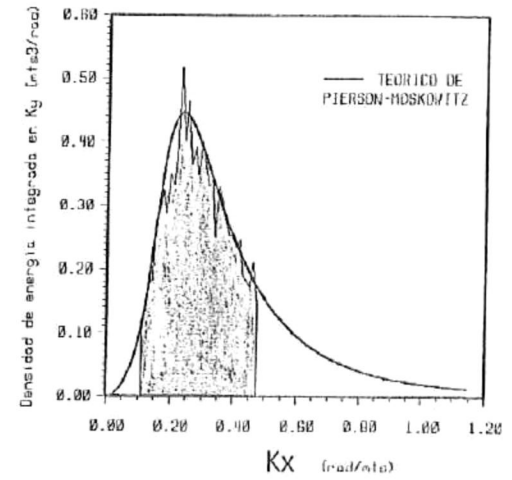
Figura 5.9.



(A)

ESTADISTICAS DE LA SUPERFICIE:

VARIANZA	1142.7437 cm <sup>2</sup> .
PROMEDIO	0.0012 cm.
H MAX.	142.6070 cm.
H MIN.	-133.7140 cm.
$\frac{1}{2}H$	37.0994 cm.
$\frac{1}{10}H$	60.2026 cm.
DELTA X	274.0000 cm.
DELTA Y	545.0000 cm.



(B)

VIENTO 5 Mts/seg.

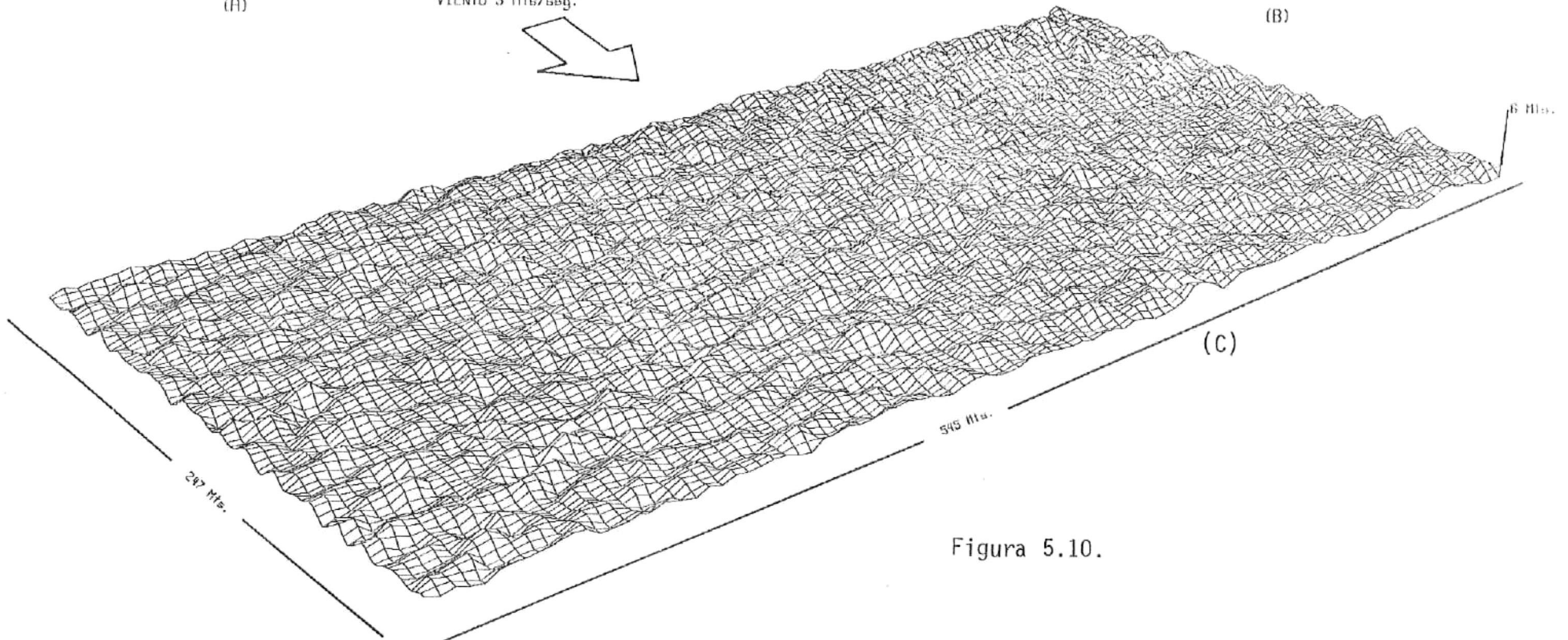
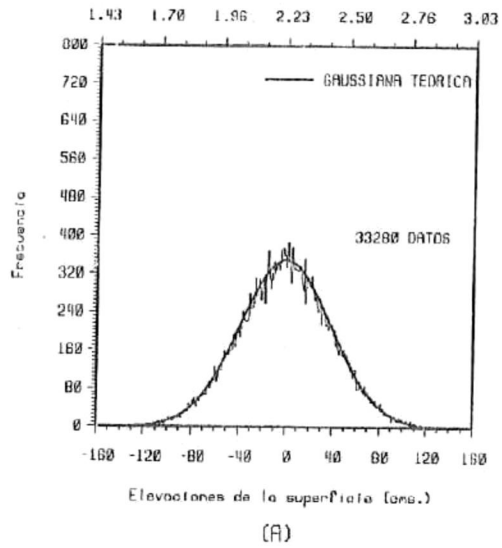


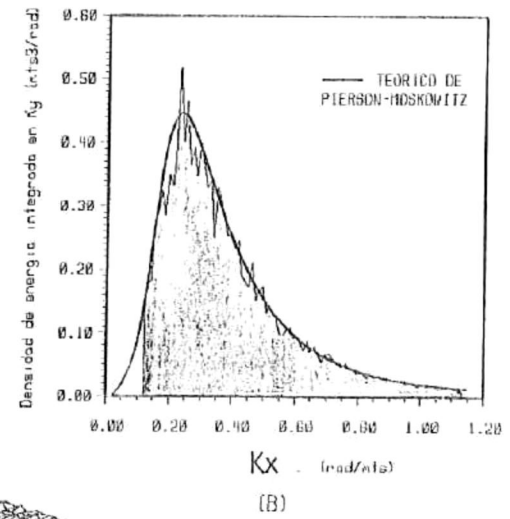
Figura 5.10.

Densidad de gr1a



ESTADISTICAS DE LA SUPERFICIE:

VARIANZA	1513.0522	cm <sup>2</sup> .
PROMEDIO	-0.0002	cm.
H MAX.	160.1690	cm.
H MIN.	-150.4900	cm.
1/2 H 1/3	42.6005	cm.
1/2 H 1/10	69.2725	cm.
DELTA X	274.0000	cm.
DELTA Y	545.0000	cm.



VIENTO 5 Mts/seg.

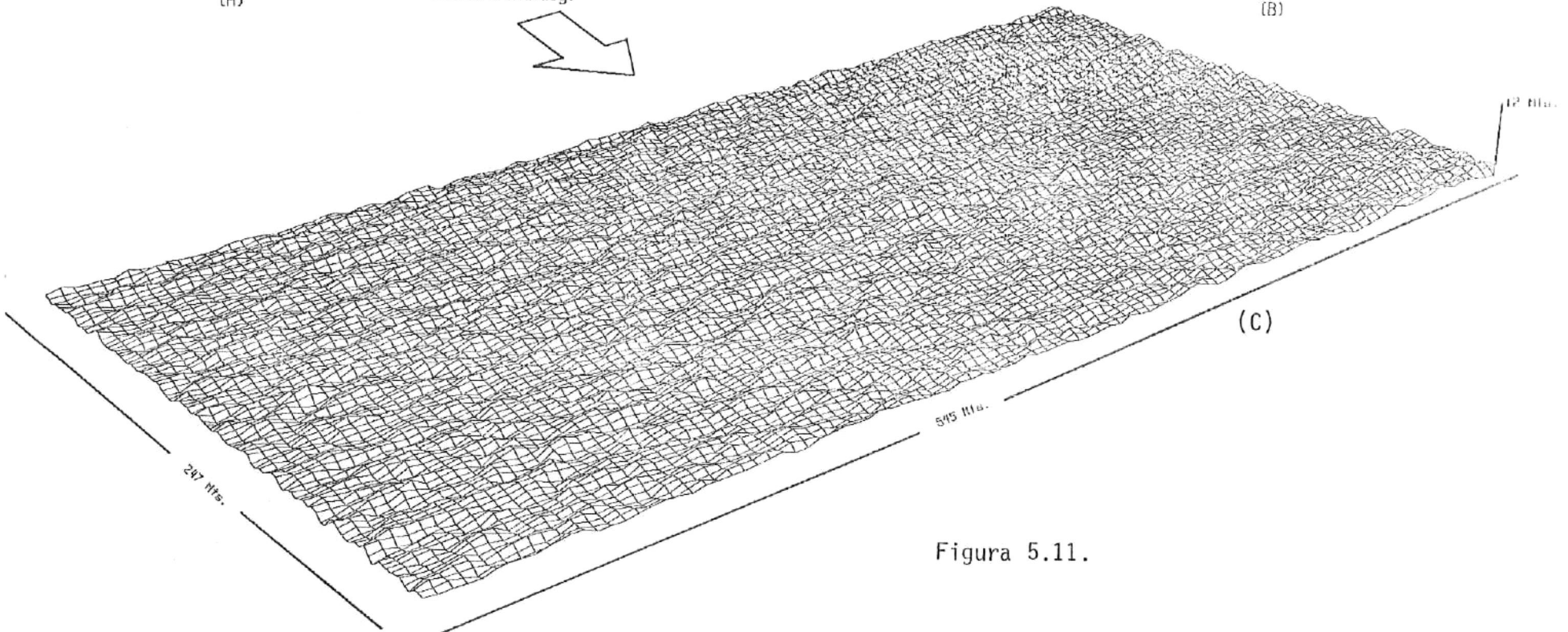
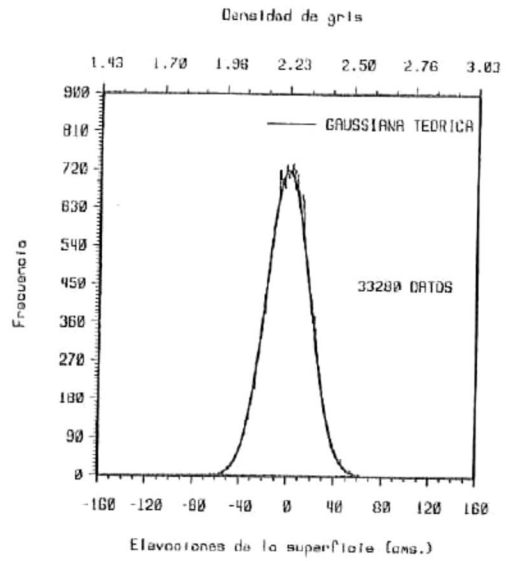


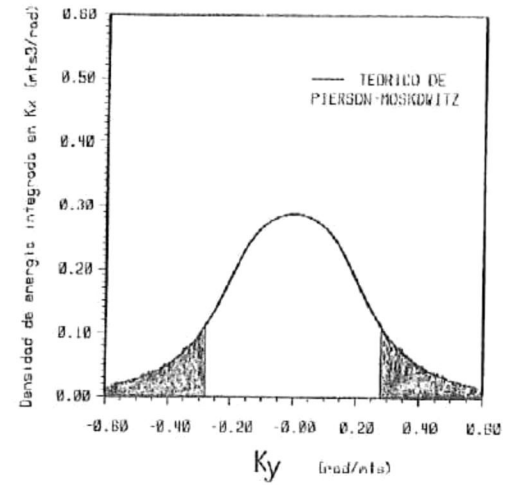
Figura 5.11.



(A)

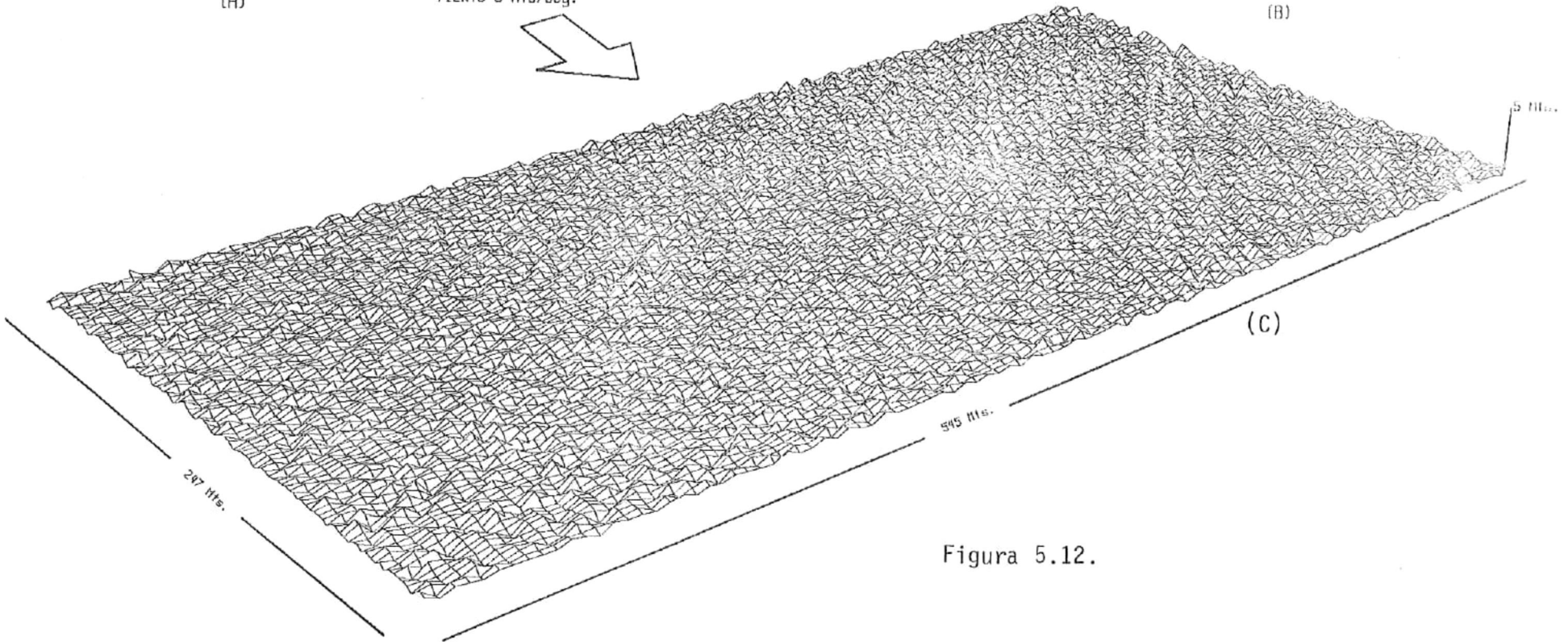
ESTADISTICAS DE LA SUPERFICIE:

VARIANZA	328.3702 cm <sup>2</sup> .
PROMEDIO	-0.0002 cm.
H MAX.	70.2700 cm.
H MIN.	-91.7110 cm.
1/2 H 1/3	19.6004 cm.
1/2 H 1/10	33.0039 cm.
DELTA X	274.0000 cm.
DELTA Y	545.0000 cm.



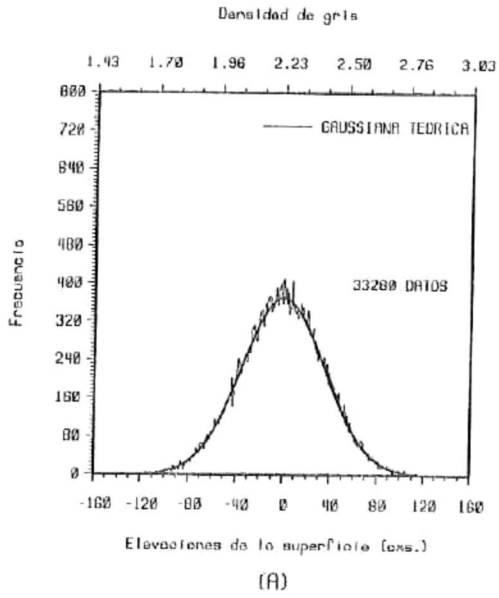
(B)

VIENTO 5 Mts/seg.



(C)

Figura 5.12.



ESTADISTICAS DE LA SUPERFICIE:

VARIANZA	1246.4797	cm <sup>2</sup> .
PROMEDIO	0.0330	cm.
H MAX.	143.8000	cm.
H MIN.	-145.3470	cm.
1/2H 1/3	30.0753	cm.
1/2H 1/10	63.0168	cm.
DELTA X	274.0000	cm.
DELTA Y	545.0000	cm.

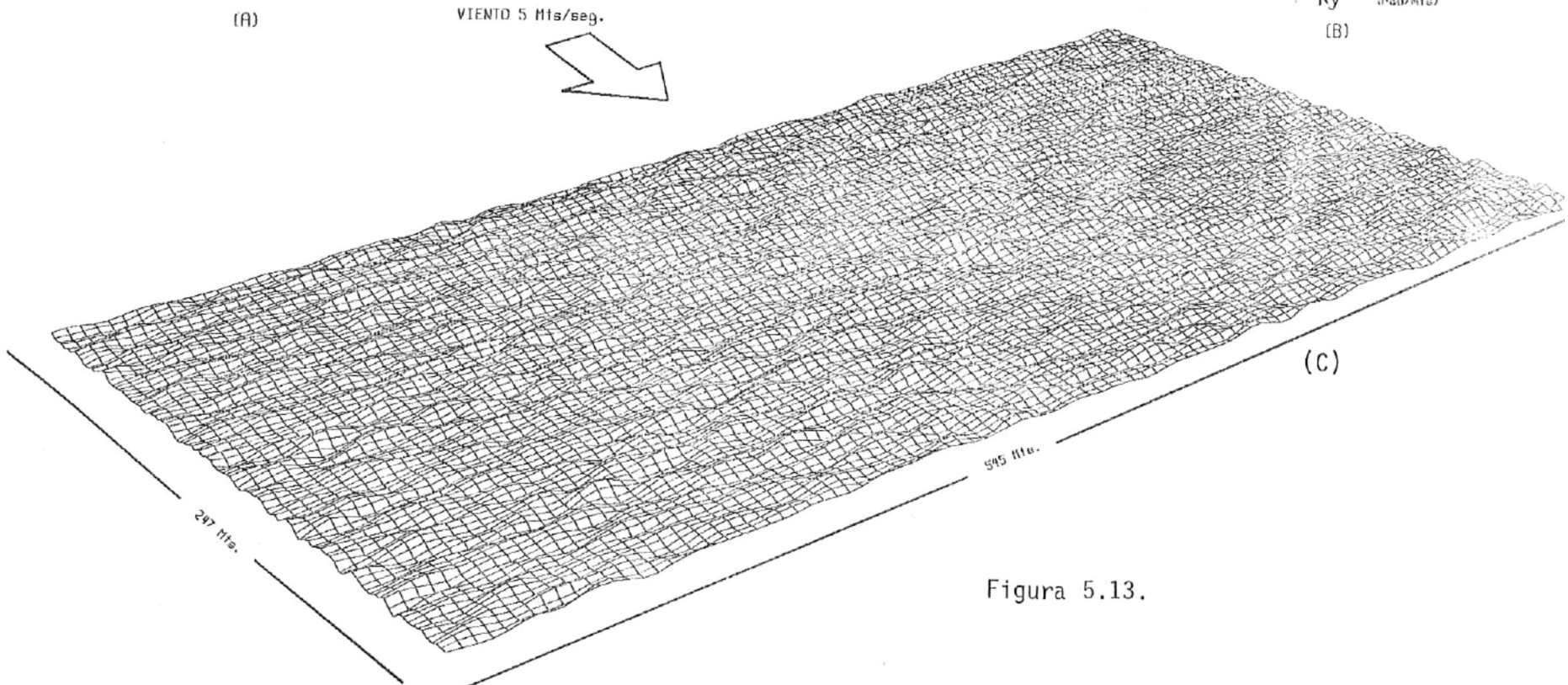
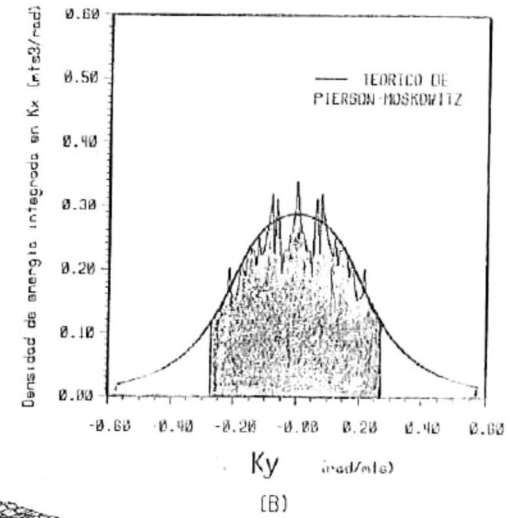


Figura 5.13.

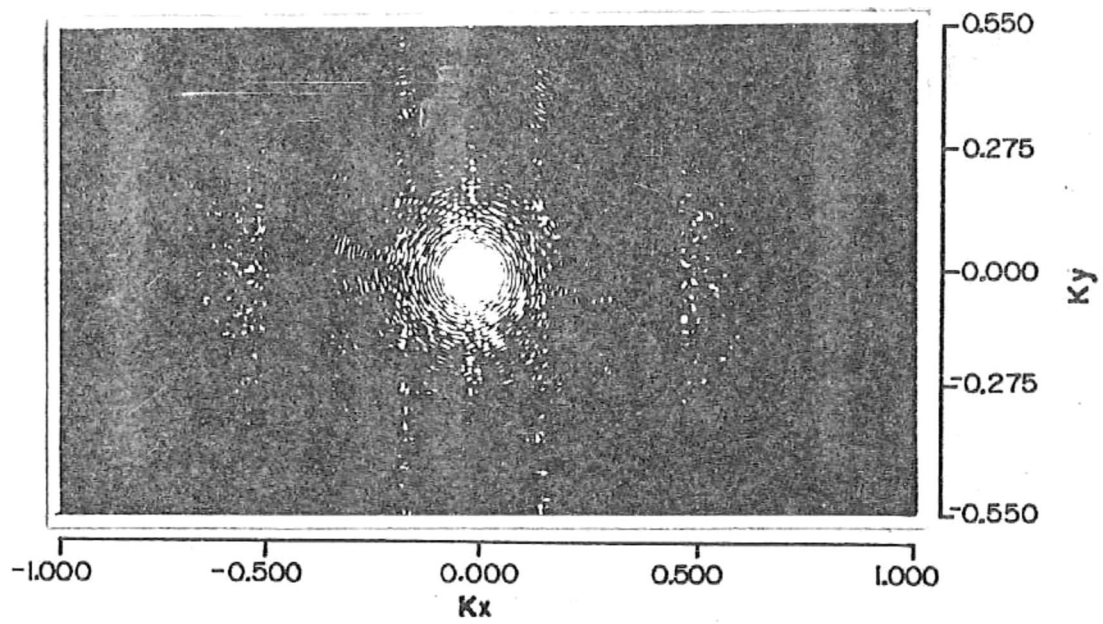
también el término DC, que es el punto luminoso del centro del espectro y que corresponde a la luz que viaja a lo largo del eje óptico y que no sufre difracción y además, contiene información del patrón de difracción de la abertura circular con la que se está iluminando la imagen).

Las imágenes filtradas se reconstruyen en la pantalla de televisión mostrada en la figura 4.4b observando sus características y variaciones al cambiar la forma de los filtros espaciales usados. La imagen del mar completo (figura 5.6) pero sin la información de los píxeles (rayado del micro) es mostrada en la figura 5.20. Las imágenes filtradas numéricamente e impresas con el microdensitómetro y las obtenidas con un filtrado óptico similar son presentadas en las figuras 5.21 a 5.26 .

Para comprobar que las imágenes filtradas ópticamente realmente contengan el espectro deseado, una de ellas (filtrada con una banda de frecuencia en  $Kx$ ), es puesta en el lugar de la imagen del mar en el sistema óptico y se obtiene su espectro óptico. El resultado de esto es mostrado en la figura 5.27. Se observa que la imagen realmente contiene la banda deseada de frecuencia.

Relación de figuras de las paginas siguientes:

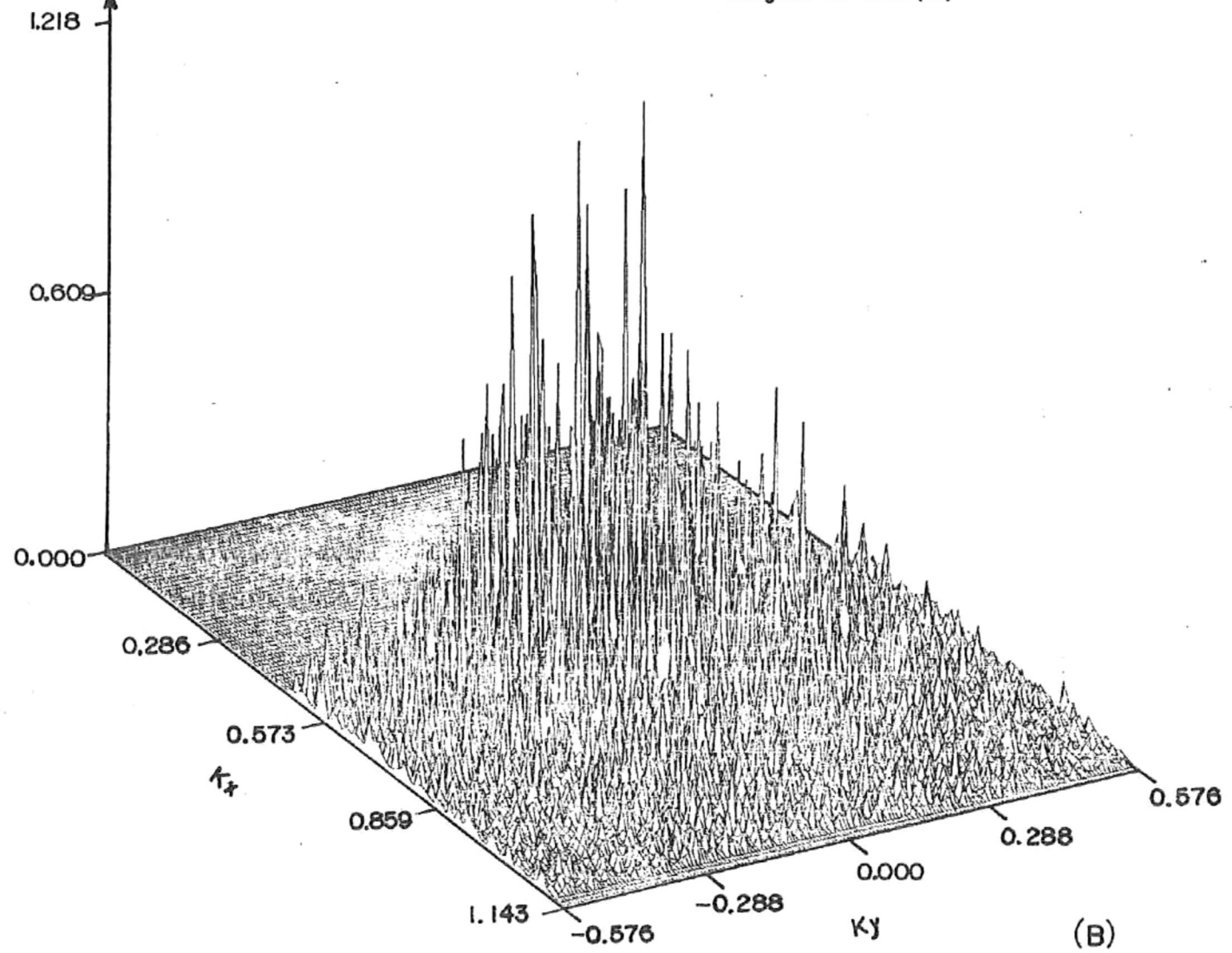
Figura		pagina
5.14	Espectro óptico (a) y espectro numérico (b) de un "lado", del mar filtrado con las altas frecuencias en Kx [(208,160) datos] de la figura 5.8. Escala de (a) 6.25:1.	85
5.15	Igual que la figura 5.14, para el mar filtrado con bajas frecuencias en Kx de la figura 5.9.	86
5.16	Igual que la figura 5.14, para el mar filtrado pasabanda en Kx de la figura 5.10.	87
5.17	Igual que la figura 5.14, para el mar filtrado con las frecuencias altas e intermedias en Kx de la figura 5.11.	88
5.18	Igual que la figura 5.14, para el mar filtrado con las altas frecuencias en Ky de la figura 5.12.	89
5.19	Igual que la figura 5.15, para el mar filtrado con bajas frecuencia en Ky de la figura 5.13.	90



DENSIDAD DE ENERGIA  
[ $E_z$  ( $m^4/rad$ )]

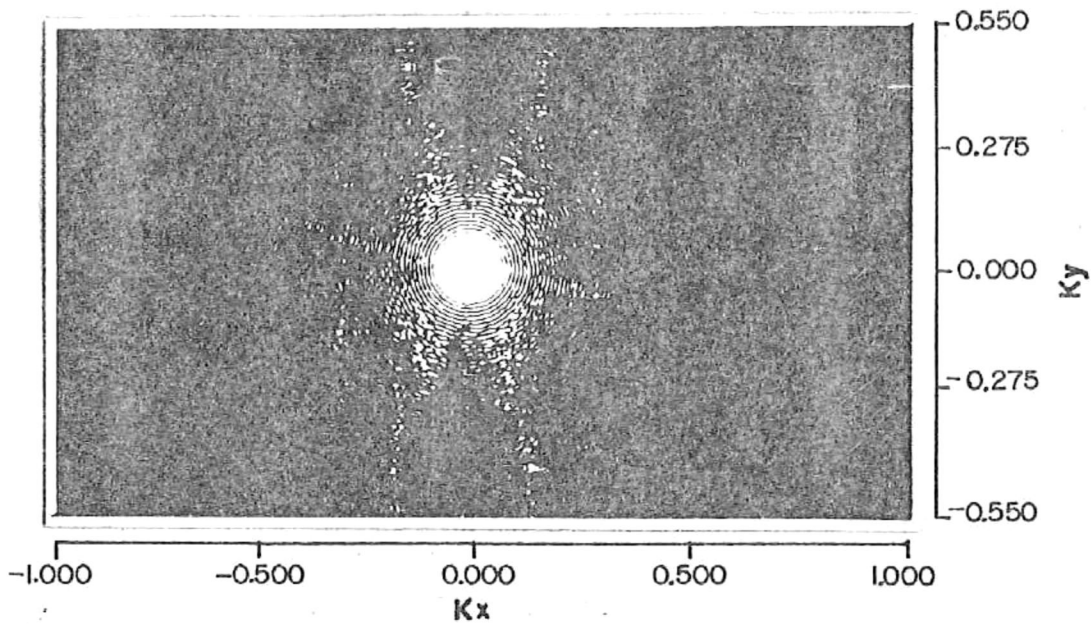
25.13 12.56 8.37 6.28  
Longitud de onda (m)

(A)



(B)

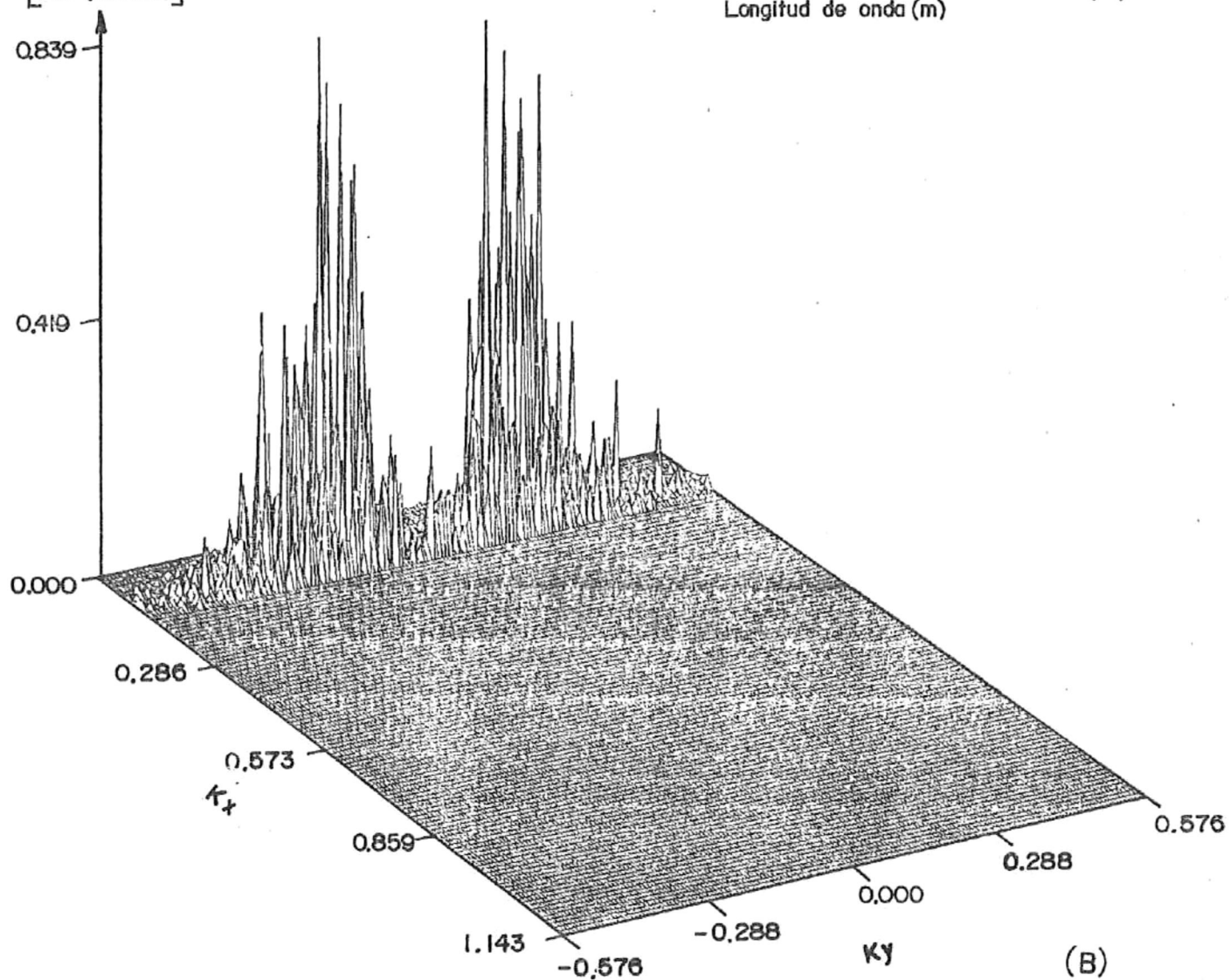
Figura 5.14.



DENSIDAD DE ENERGIA  
[ $E_z$  ( $m^4/rad$ )]

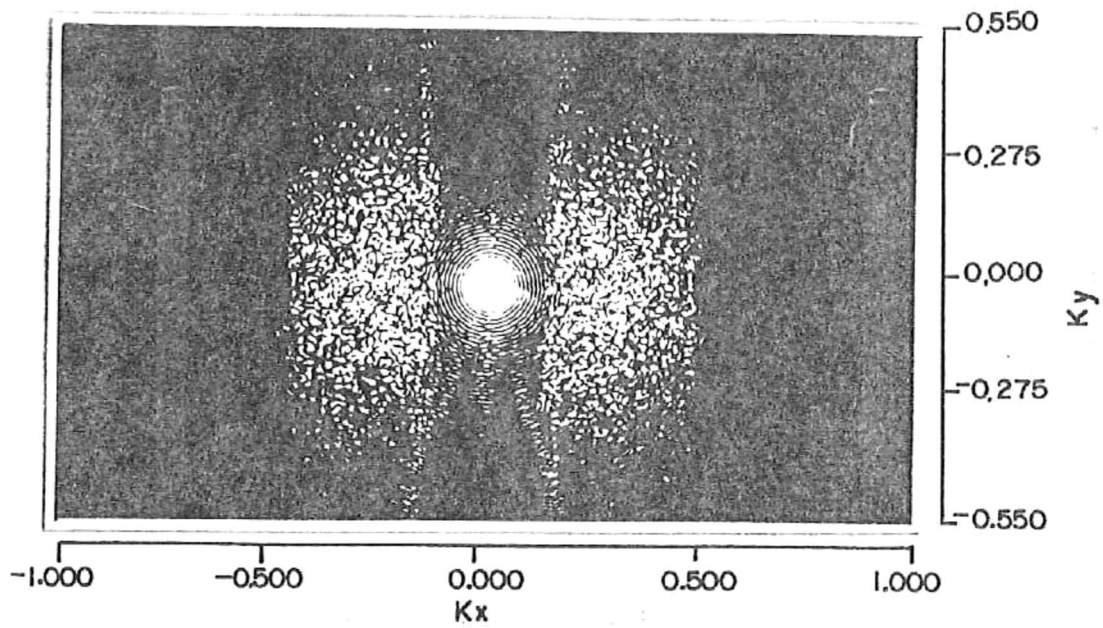
25.13 1256 8.37 6.28  
Longitud de onda (m)

(A)



(B)

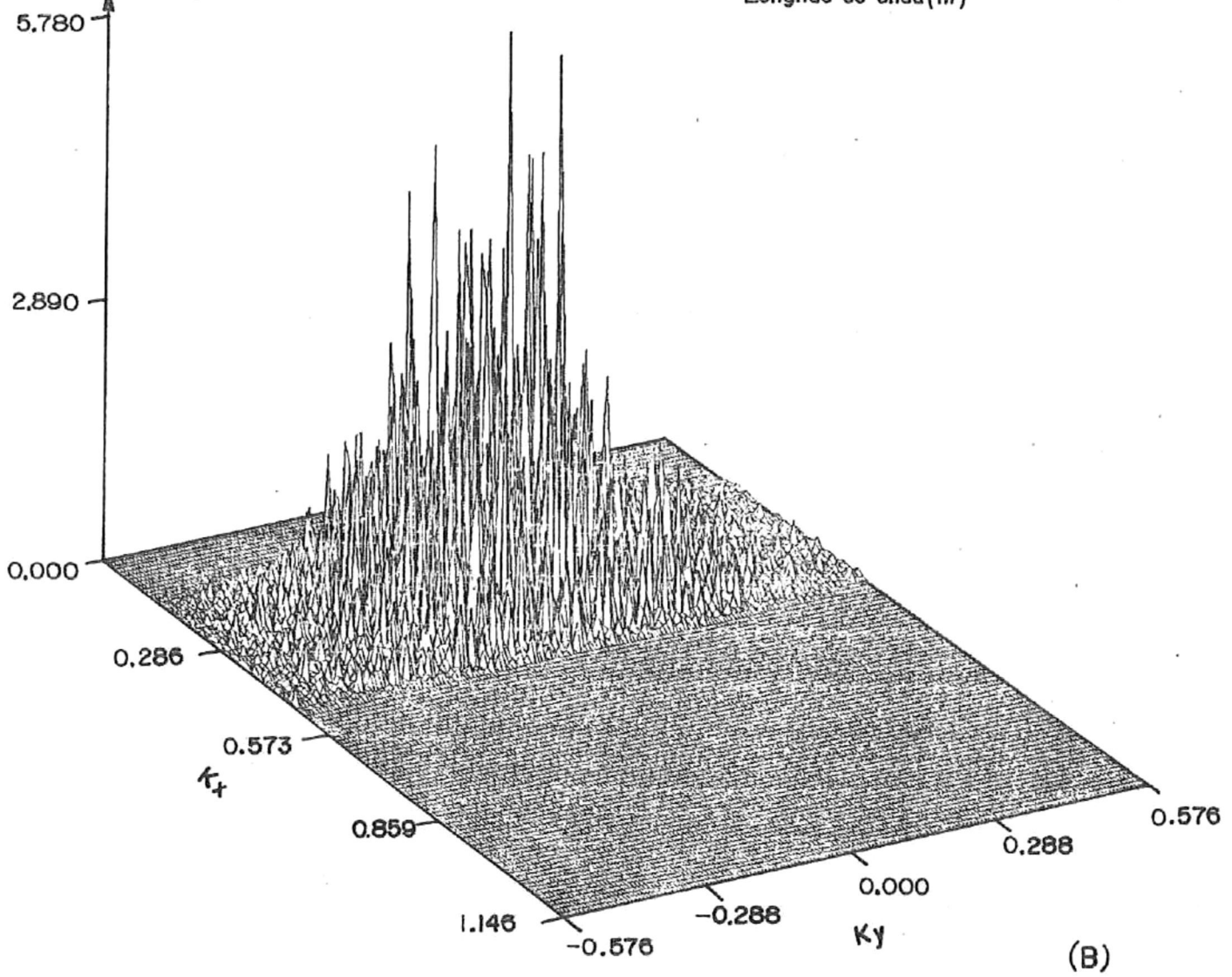
Figura 5.15.



DENSIDAD DE ENERGIA  
[ $E_z$  ( $m^4/rad$ )]

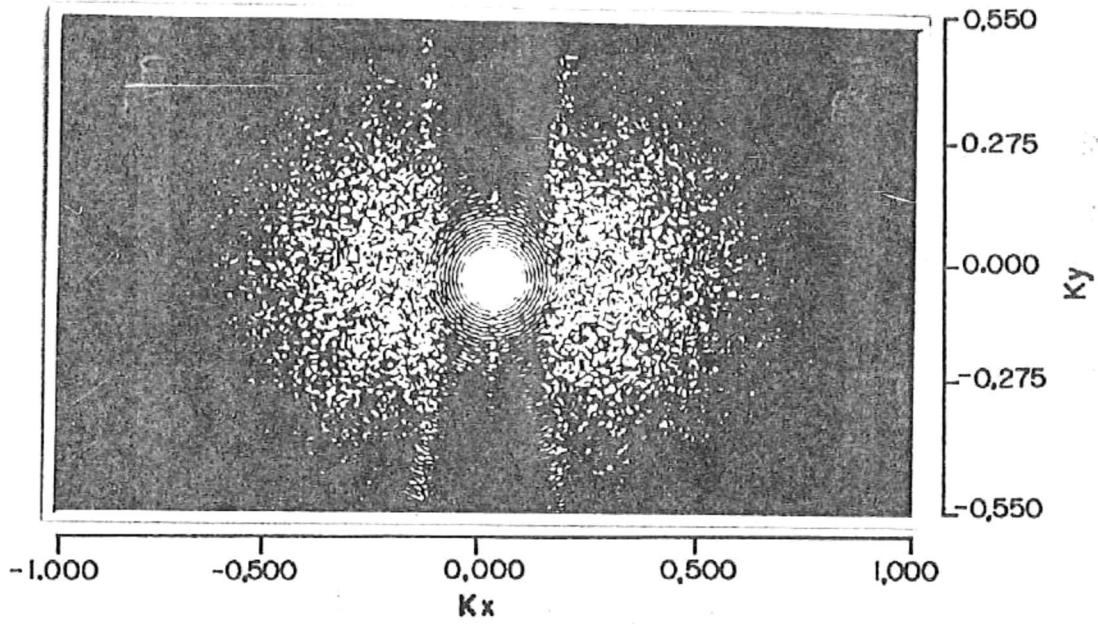
25.13 12.56 8.37 6.28  
Longitud de onda (m)

(A)



(B)

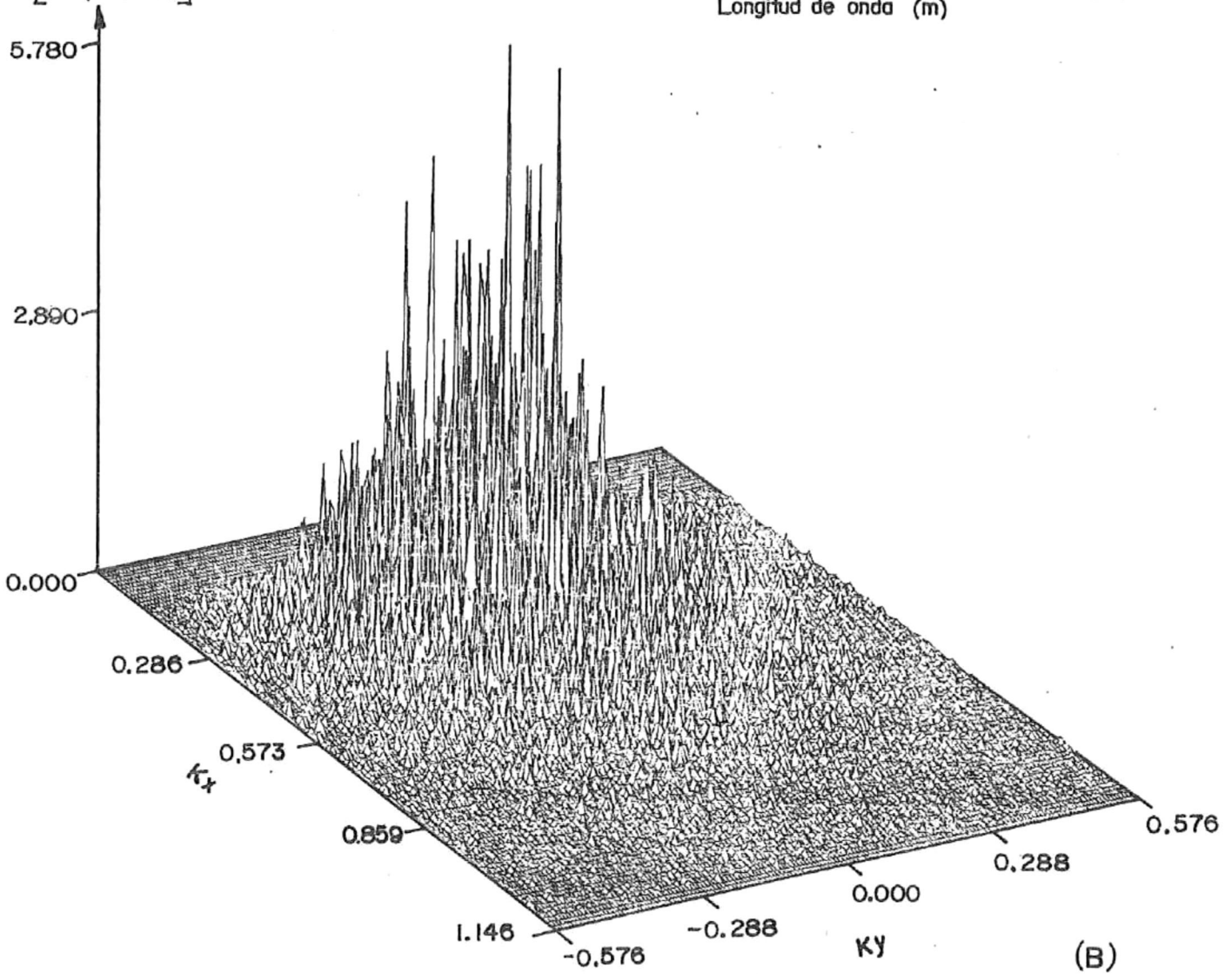
Figura 5.16.



DENSIDAD DE ENERGIA  
 $[E_z \text{ (m}^4/\text{rad)}]$

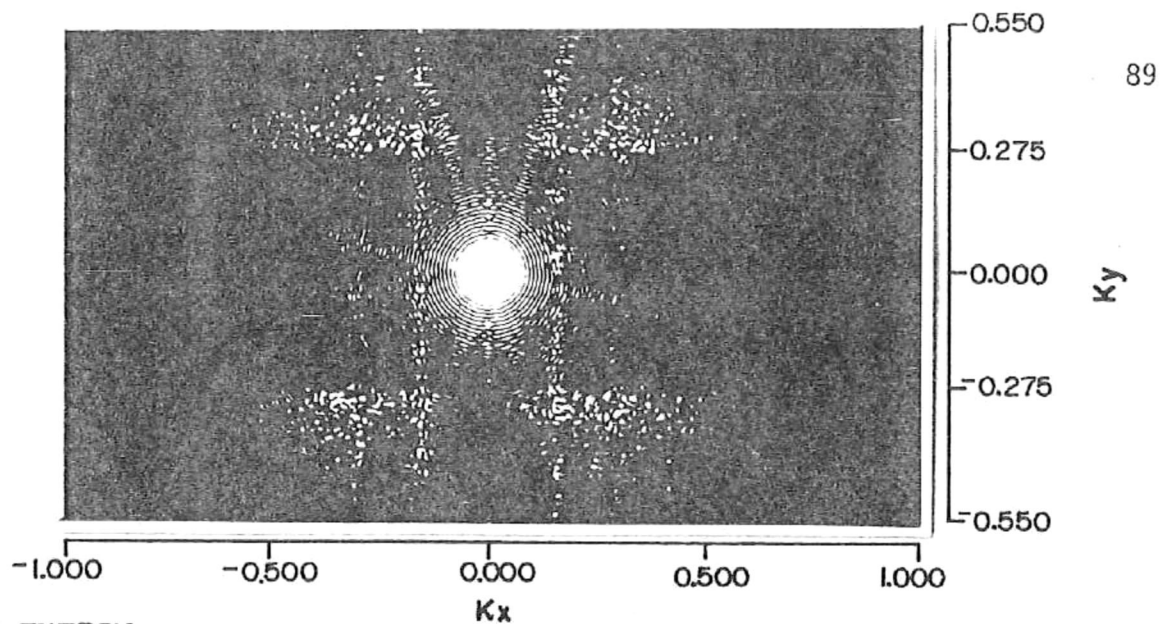
25,13    12,56    8,37    6,28  
 Longitud de onda (m)

(A)



(B)

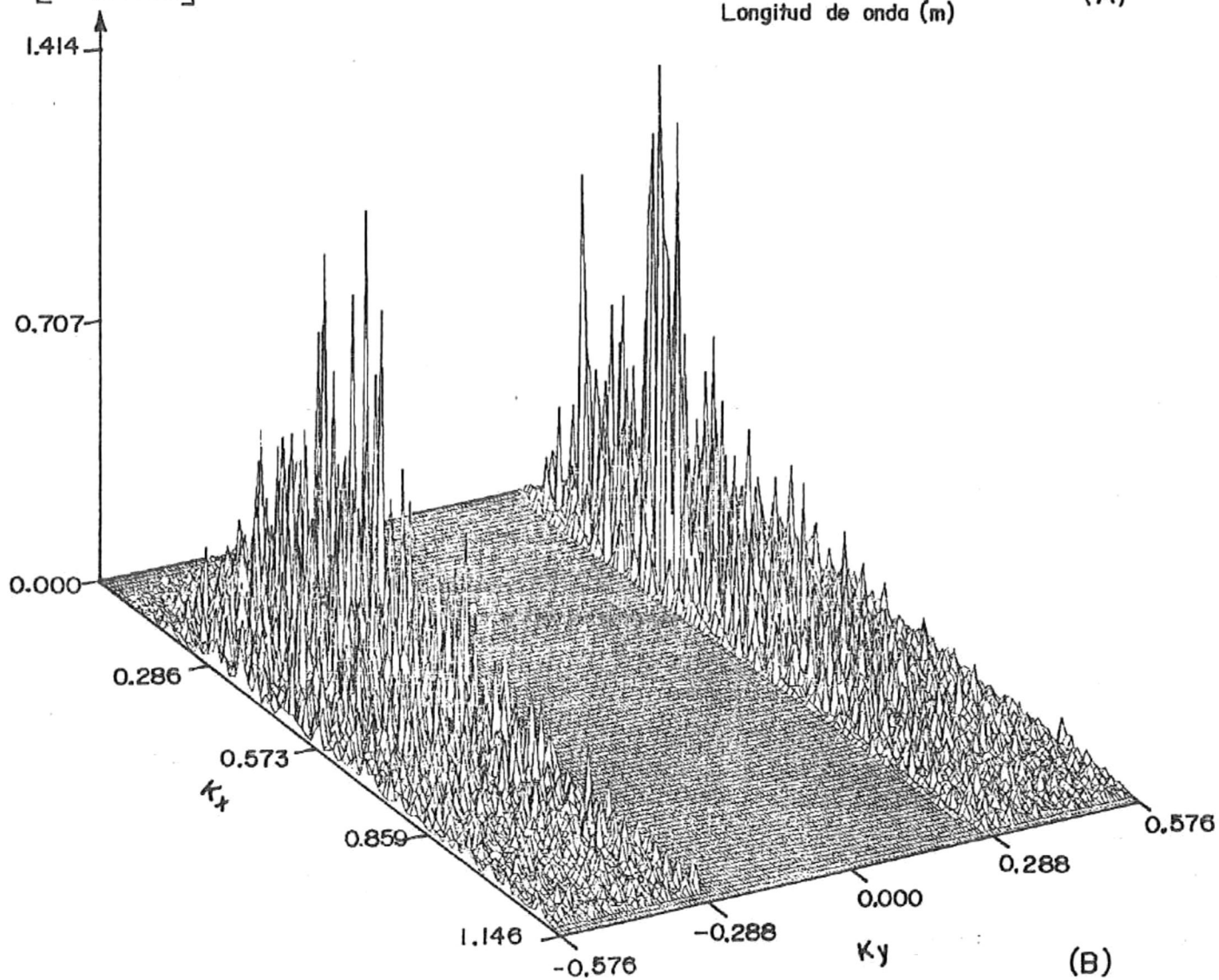
Figura 5.17.



DENSIDAD DE ENERGIA  
 $[E_z \text{ (m}^4/\text{rad)}]$

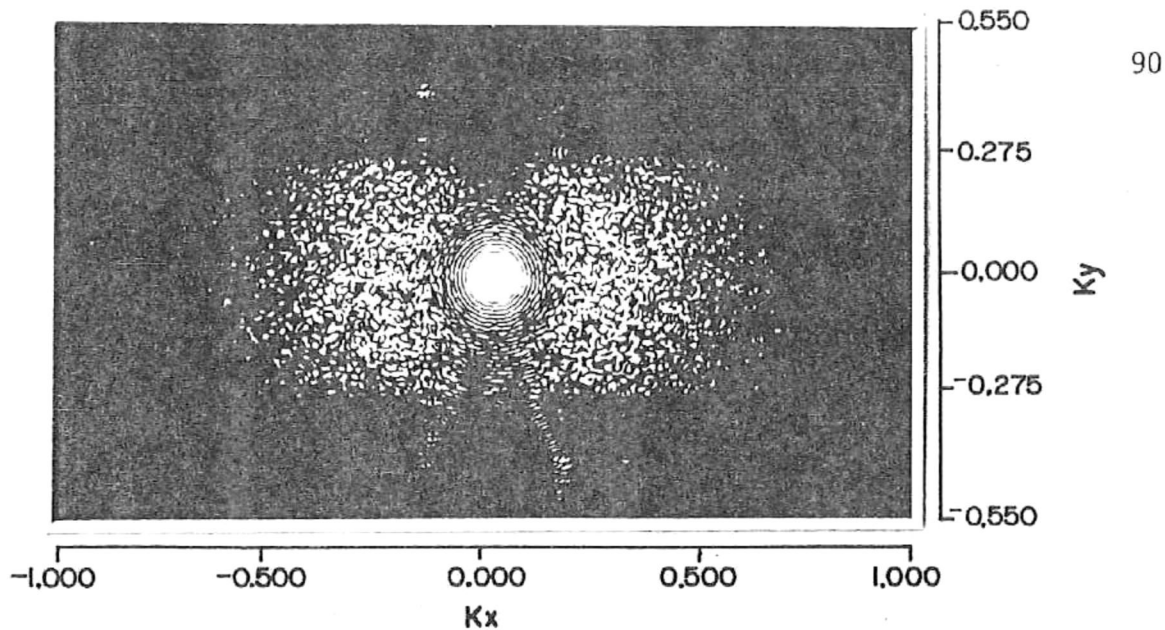
25.13 12.56 8.37 6.28  
 Longitud de onda (m)

(A)



(B)

Figura 5.18.



25.13 12.56 8.37 6.28  
Longitud de onda (m) (A)

DENSIDAD DE ENERGIA  
[ $E_z$  ( $m^4/rad$ )]

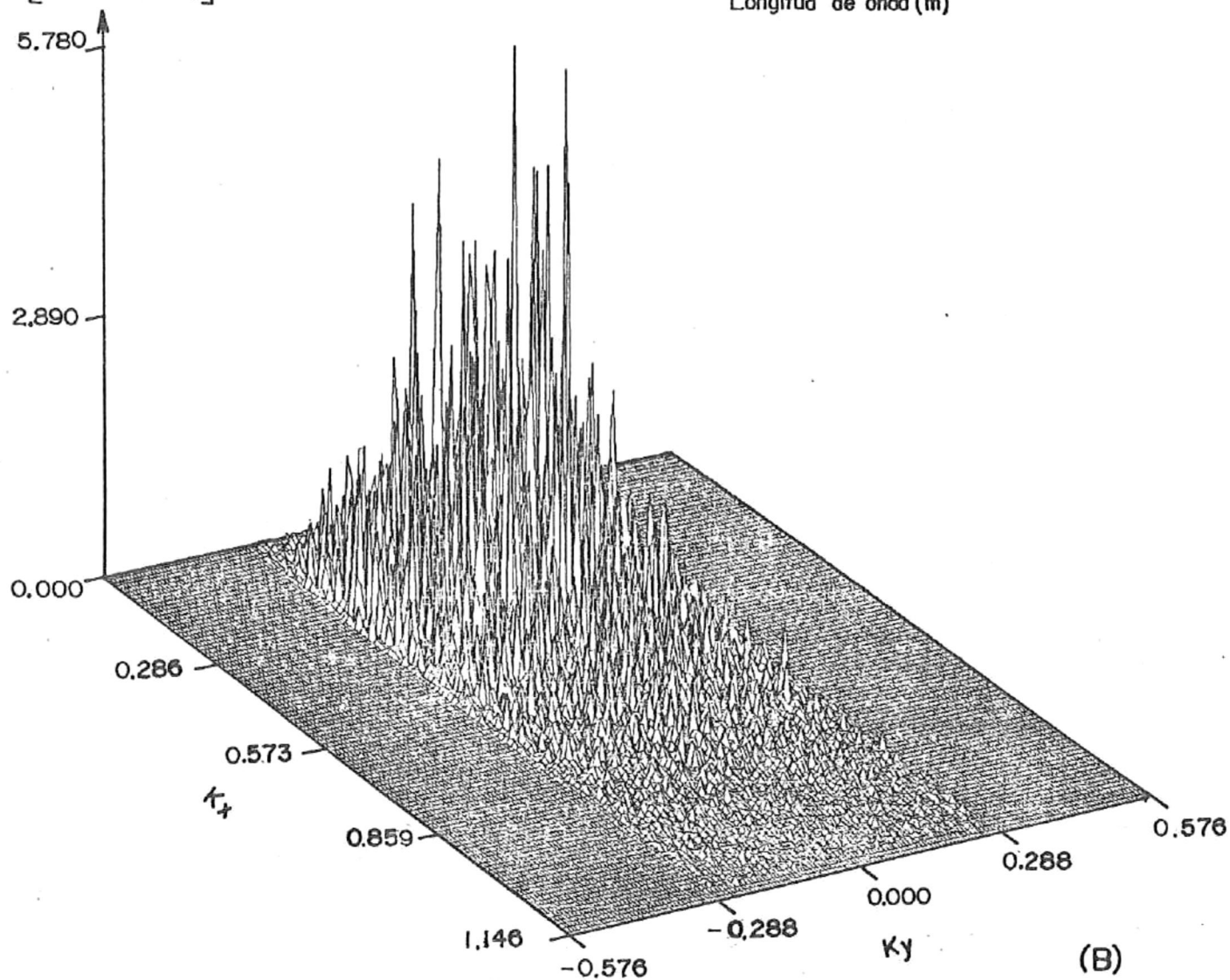
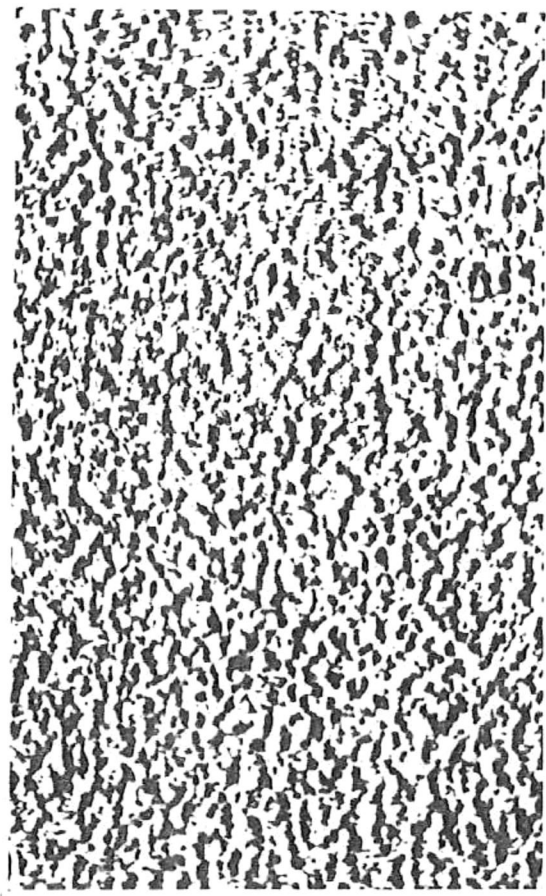


Figura 5.19.



↑  
Y  
↓

← X →

(570 x 872 m)

Figura 2.20.- Reconstrucción en el sistema óptico de la imagen del mar completo de la figura 5.6 pero filtrando los puntos luminosos con información del rayado del microdensitómetro, visibles en la figura 5.7a. Escala 16.5:1.

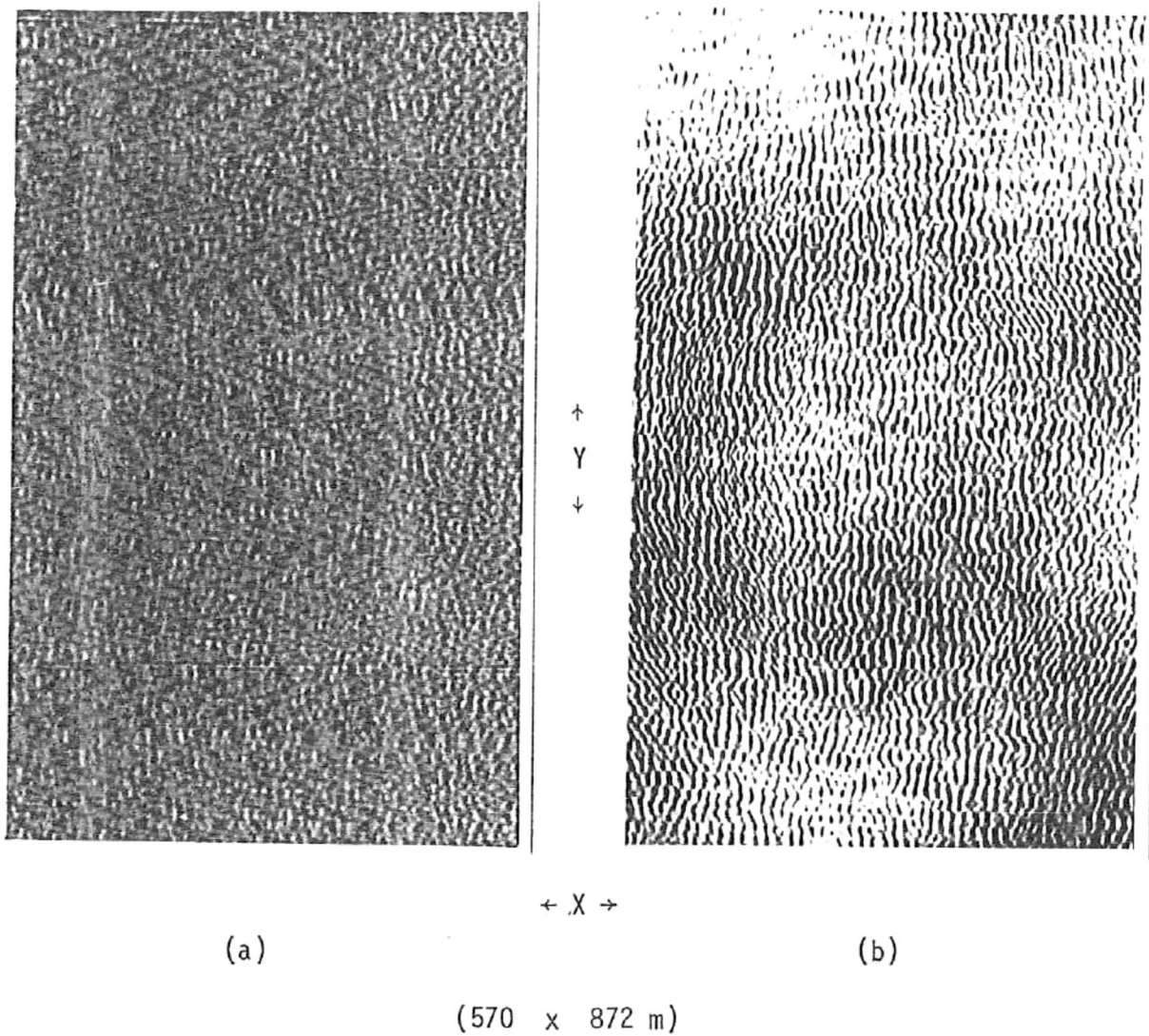


Figura 2.21.- Imágenes filtradas con las altas frecuencias en  $K_x$ , (a) numéricamente y (b) ópticamente. El rango de posibles longitudes de onda en la dirección  $X$  es de 5.48 m a 12.95 m. (ver figuras 5.8 y 5.14). Escala 16.5:1.

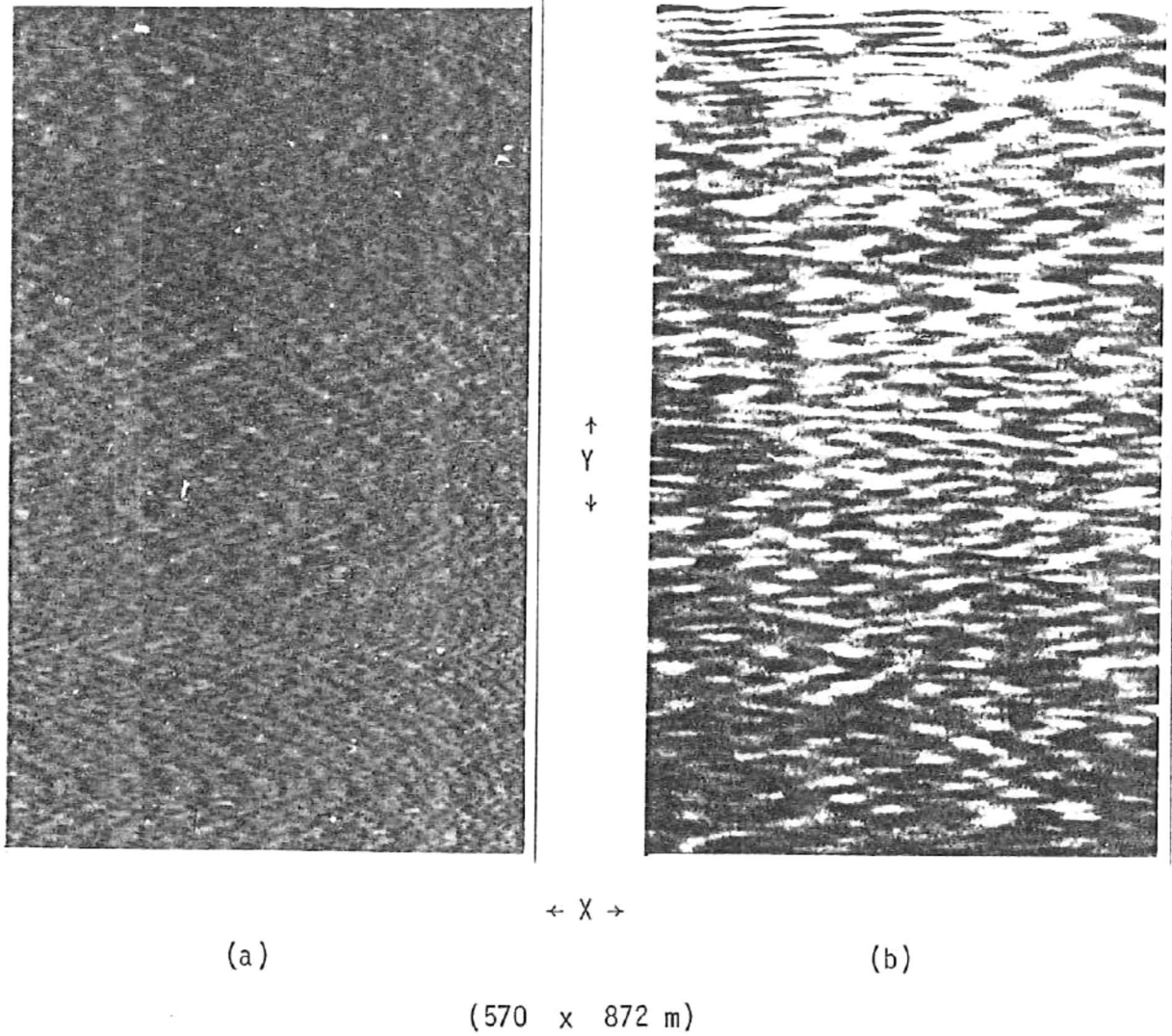


Figura 2.22.- Imágenes filtradas con bajas frecuencias en  $K_x$ , (a) numéricamente y (b) ópticamente. El rango de longitudes de onda presentes en  $X$  es de 51.92 a 570 m. (ver figuras 5.9 y 5.15). Escala 16.5:1.

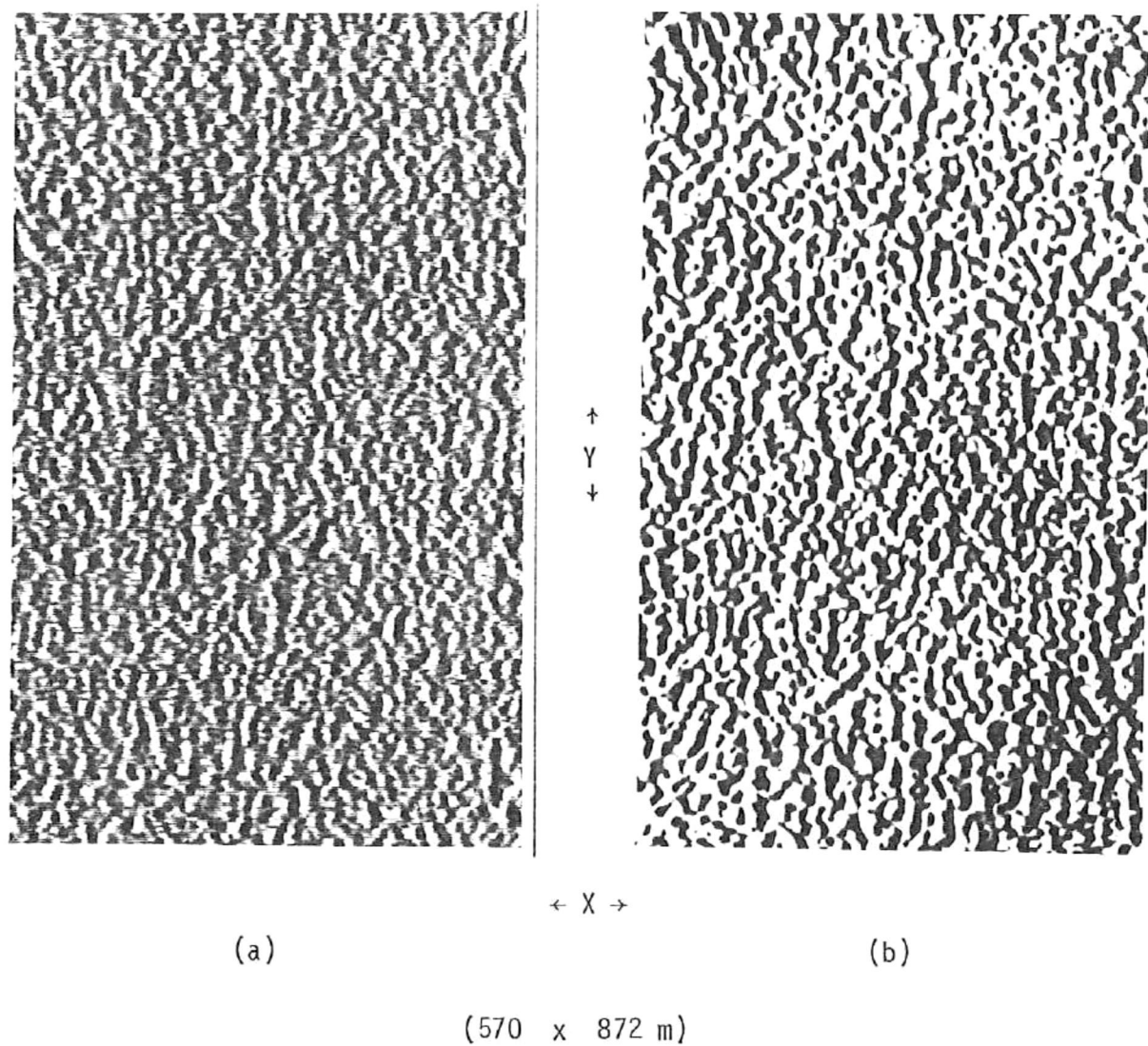


Figura 2.23.- Imágenes filtradas pasabanda en Kx, (a) numéricamente y (b) ópticamente. El rango de longitudes presentes es de 12.95 a 51.92 m. (ver figuras 5.10 y 5.16). Escala 16.5:1.

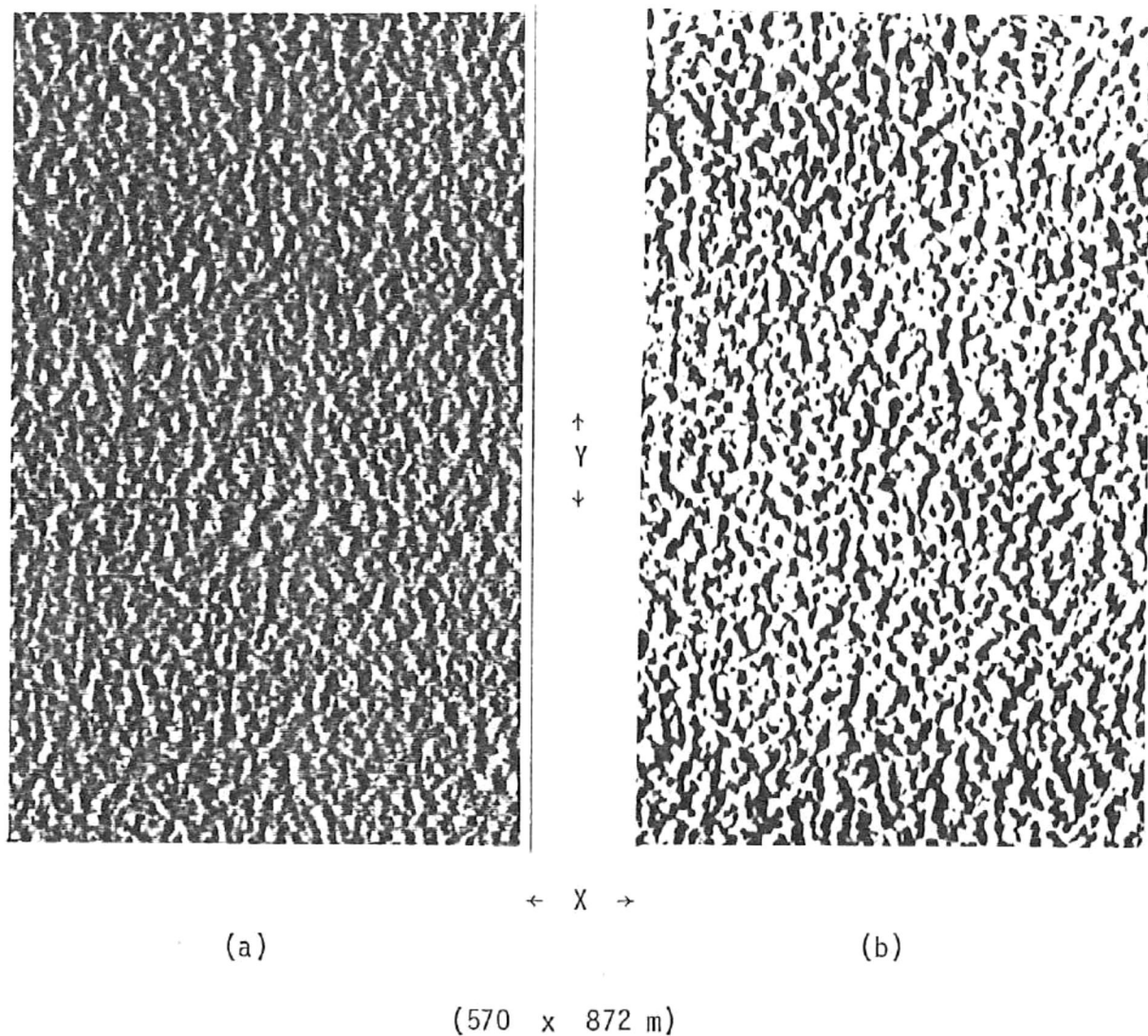


Figura 2.24.- Imágenes filtradas con las frecuencias altas e Intermedias en  $K_x$ , (a) numéricamente y (b) ópticamente. EL rango de longitudes presentes es de 5.48 a 51.9 m.ver figuras 5.11 y 5.17). Escala 16.5:1.

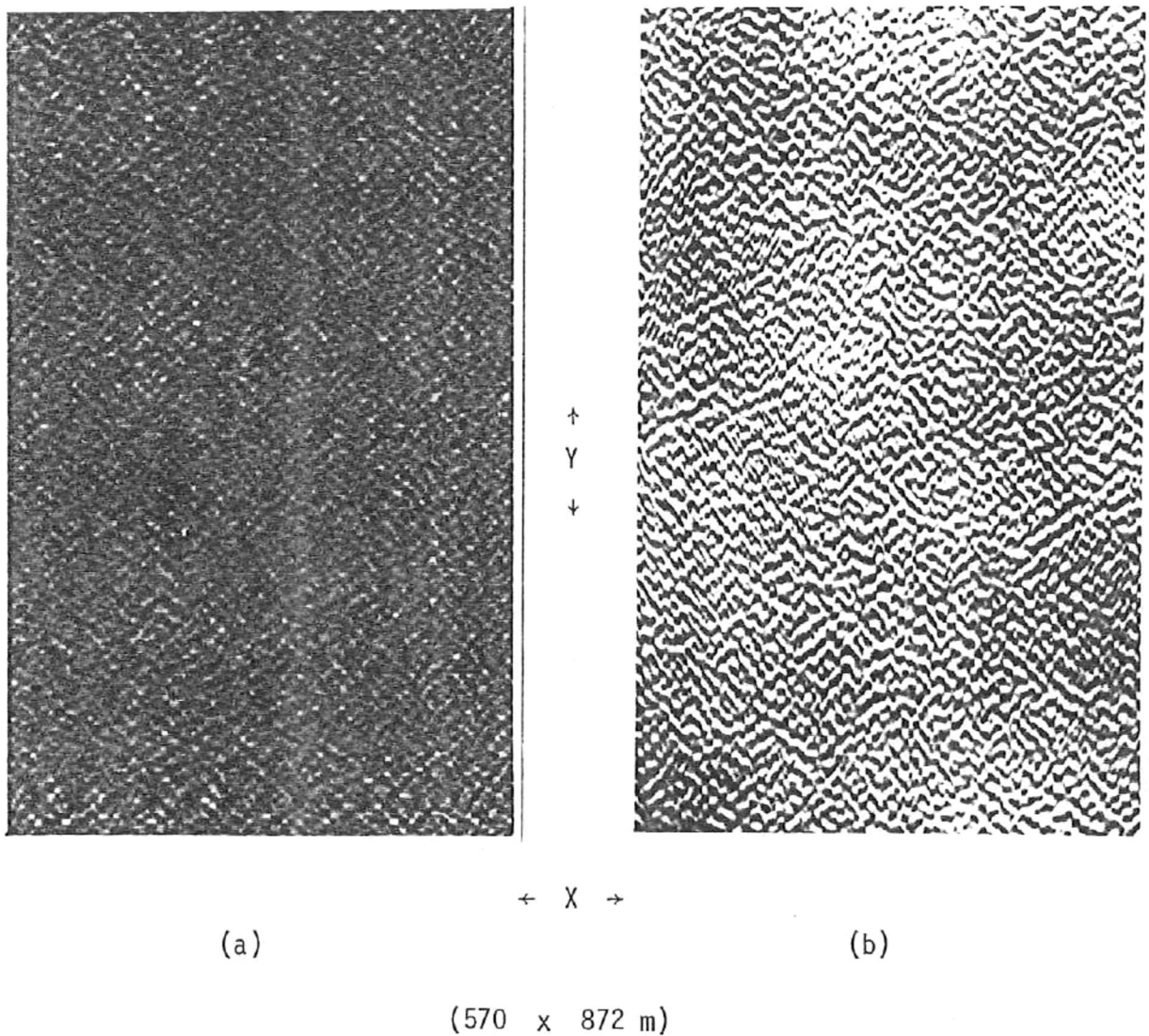


Figura 2.25.- Imágenes filtradas con las altas frecuencias en  $K_y$ , (a) numéricamente y (b) ópticamente. El rango de posibles longitudes de onda en  $Y$  es de 10.9 a 23 m. (ver figuras 5.12 y 5.18). Escala 16.5:1.

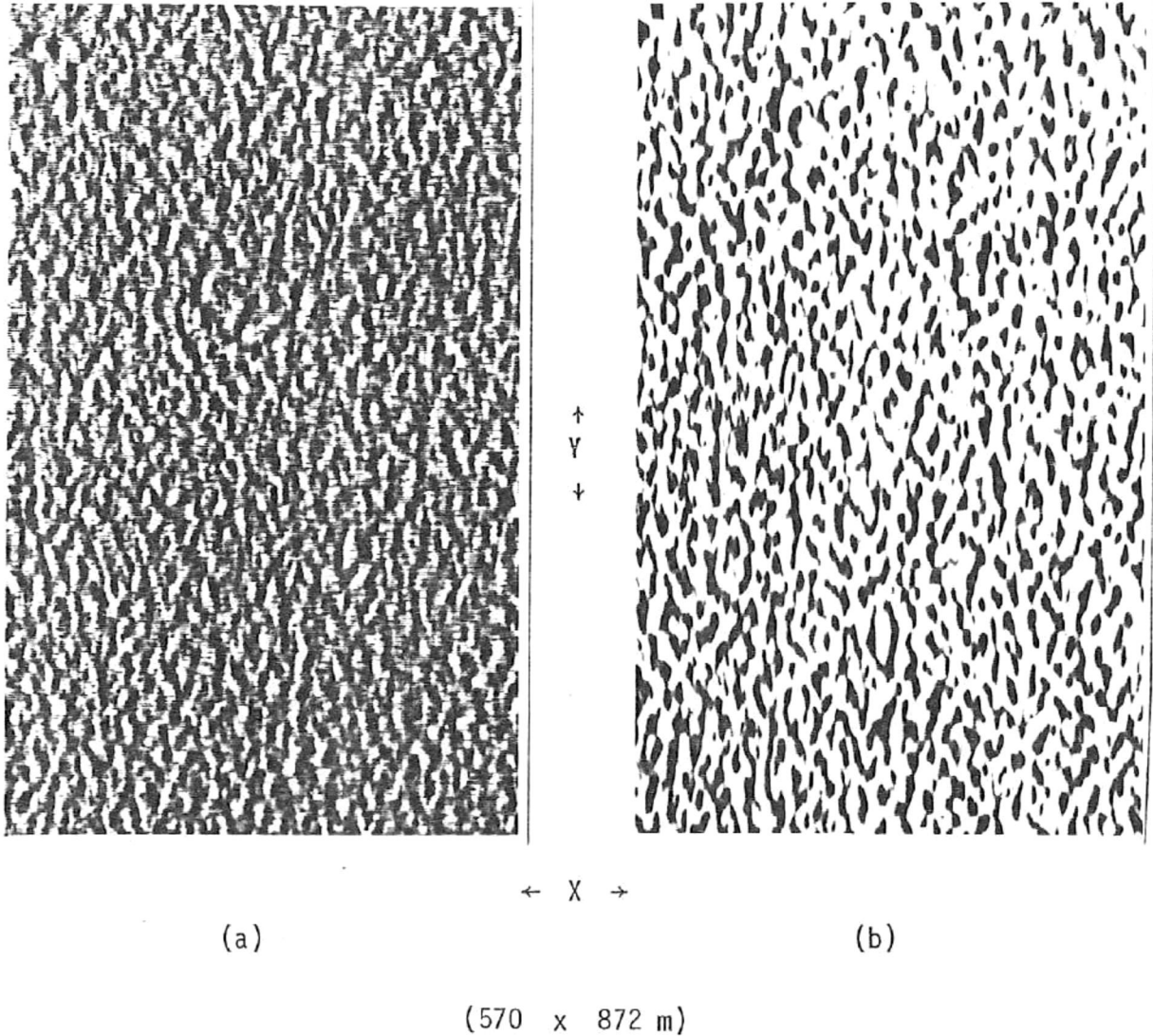


Figura 2.26.- Imágenes filtradas con las bajas frecuencias en  $K_y$ , (a) numéricamente y (b) ópticamente. El rango de longitudes de onda en Y es de 23 a 872 m. (ver figuras 5.13 y 5.18). Escala 16.5:1.

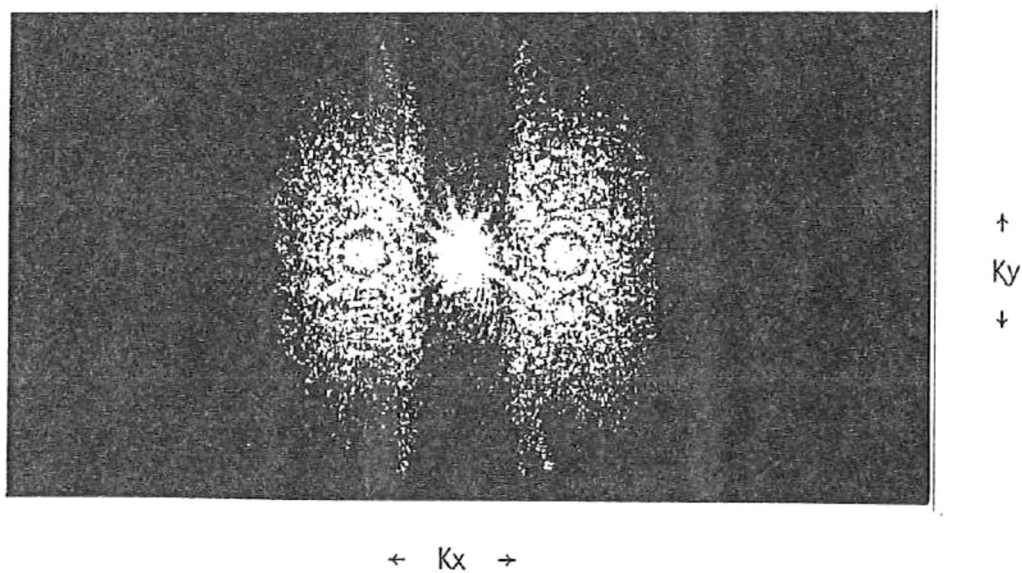


Figura 2.27.- Espectro óptico de la Imagen del mar filtrada pasabanda en  $K_x$  ópticamente (Figura 5.23b). Escala 5.8:1.

## 6.- DISCUSIONES

Las superficies marinas se simularon con un viento de 5 m/s por ser éste semejante al promedio real que existe en la región de Ensenada, B.C. (Alvarez, 1983). El área de la superficie se extendió a ser mucho más grande que el modelo original (Caruthers y Novarini, 1971), para poder simular elevaciones de gran longitud de onda (570 m en la dirección del viento y 872 m perpendicular a él).

Como se puede apreciar en las figuras 2.1, 5.3 y 5.4, el espectro de Pierson-Moskowitz es aproximadamente un orden de magnitud más energético que el de Pierson-Neumann. La razón de esto es que el primero fué desarrollado para velocidades de viento tomadas a 19.5 m sobre la superficie, mientras que el de Pierson-Neumann lo fue para mediciones a 7.5 m (Silvester, 1974).

Esto explica las mayores elevaciones que presentan los mares que contienen el primero (aproximadamente tres veces mayores). El rango de frecuencias importantes del espectro corresponde a

períodos de olas de 2 a 5 segundos, es decir, frecuencias de 0.2 a 0.47 ciclos por segundo (ver figura 2.1).

El espectro numérico de la figura 5.1 muestra la distribución de la energía en las frecuencias de Fourier que componen las ondulaciones de la superficie. Los perfiles integrados de las figuras 5.3 y 5.4 muestran una buena aproximación con los espectros teóricos. Se encontró, para un nivel de confianza del 90 por ciento, para cada  $K_x$  (con 160 frecuencias integradas en  $K_y$ , lo cual es similar o equivalente a promediarlas), un intervalo de confianza de:

$$0.86 \hat{S}_x < S_x < 1.00 \hat{S}_x$$

donde  $\hat{S}_x$  es el valor de densidad espectral numérica con los valores en  $K_y$  integrados y  $S_x$  es el valor real del espectro de la superficie. Esto significa que el 90 por ciento del espectro verdadero de la superficie en  $K_x$  (con los  $K_y$ 's integrados) puede tomar cualquier valor dentro del rango descrito como función del valor del espectro numérico muestreado.

Para los perfiles de  $K_y$  (con 208 frecuencias de  $K_x$  integradas), se encontró un intervalo de confianza de :

$$0.89 \hat{S}_y < S_y < 1.12 \hat{S}_y$$

(éstos intervalos fueron calculados usando la fórmula para grandes muestras de Bendat, 1965).

En las figuras 5.3 y 5.4 , gran parte del espectro teórico se halla localizado en el rango antes mencionado. Sobre todo, el ajuste es mejor en las altas y bajas frecuencias. Los picos del espectro que se presentan en las frecuencias importantes difieren poco significativamente del espectro teórico, es decir, el espectro verdadero de la superficie muestreada puede oscilar en un intervalo que no difiere significativamente del espectro numérico obtenido.

La varianza numérica de la superficie es un poco menor que la varianza obtenida de integrar el perfil del espectro teórico ( o el volumen bajo el espectro de la figura 5.2). Sin embargo la varianza que se obtiene al integrar cualquiera de los perfiles espectrales numéricos obtenidos mediante el análisis digital, es exactamente la misma que la varianza de la superficie. Esto demuestra que la pérdida de varianza es efecto de la simulación y no del análisis numérico.

En la figura 5.5a se observa que las alturas en la superficie poseen una muy buena distribución normal y en 5.5c puede apreciarse la dirección predominante de las ondas, paralela a la dirección del viento.

La figura 5.6 muestra la amplificación de la imagen de la superficie de la figura 5.5, escrita con el

microdensitómetro. La amplificación de ésta imagen es de aproximadamente 24.5 veces, siendo el tamaño de la imagen en el negativo de 4.368 mm en X y 6,72 mm en Y. Las imágenes fueron escritas en la dirección X y debido a un ligero error mecánico del microdensitómetro, cada renglón de X no ajustó perfectamente con el siguiente, provocando de esta manera el rayado horizontal que se observa en la fotografía.

El sistema óptico resuelve perfectamente la alta frecuencia en la dirección Y, asociada con el mencionado rayado.(ver figura 5.7a), lo cuál significa que puede resolver todas las frecuencias presentes en la imagen simulada del mar.

Se escribieron en película nueve imágenes juntas de la superficie marina (cada una de 208 datos en X por 320 en Y, ya que cada renglón de X se repitió dos veces), con la intención de incrementar la señal del espectro sobre el ruido de fondo en el sistema óptico. Hubiera sido adecuado colocar la transparencia de la imagen del mar dentro de una celda líquida (con aceite de un índice de refracción igual al del vidrio de las paredes de la celda), que incrementará también la señal sobre el ruido, pero no existía ninguna disponible en ese momento. La figura 5.7b presenta la forma del espectro contenido en la transparencia. El punto luminoso del centro del espectro, que representa el término DC (término directo), más los anillos a su alrededor forman el

patrón de difracción de Airy. El diámetro del orden cero de difracción (DC) está relacionado con el diámetro de la pupila de entrada (Goodman, 1968). La línea vertical que cruza el centro del espectro, está relacionada con la difracción provocada por el cuadrículado formado al unir las nueve imágenes.

El defecto mecánico del microdensitómetro y una posible falla en la calibración del mismo, provocaron bandas ruidosas en los espectros ópticos. Tales bandas verticales se atenúan alejándose del DC en la dirección Kx. Se observó que éstas bandas tienden a desaparecer cuando se disminuye el diámetro de la pupila de iluminación (aunque la señal del espectro disminuye similarmente). Tales bandas son más notorias en las figuras 5.14 a 5.19 por estar impresas en papel fotográfico de alto contraste. Alvarez y Machado (1985), no detectaron problemas de este tipo. Esto puede ser atribuido en parte a la antigüedad del aparato.

Se comprobó también, que en caso de no obtener la imagen de la superficie del mar con la tonalidad de grises deseada, son preferibles las imágenes subexpuestas, por permitir dejar pasar la luz y obtenerse el espectro de energía o la imagen reconstruida (Similares resultados fueron obtenidos por Alvarez, 1983).

Para la obtención de las fotografías de los espectros, en este caso particular, se hicieron pruebas para conocer el tiempo de exposición adecuado para el láser de 15 mW y la película usada (TECHNICAL-PAN 2415, ASA 100) y se encontró que la velocidad adecuada oscila entre 1/125 a 1/30 segundos, dependiendo de la abertura de la pupila de entrada.

El análisis óptico para los mares generados con el espectro teórico de Pierson-Neumann, no se llevó a cabo por haber sido ya realizado por Alvarez y Machado (1985), ellos encontraron formas espectrales similares a la figura 5.7, y realizaron mediciones en los perfiles del espectro donde observaron que éste presentaba atenuación hacia las altas frecuencias en Kx. Alvarez (1987), llevó a cabo mediciones a lo largo el eje Kx para un espectro de Pierson-Moskowitz obtenido con un procedimiento similar a este trabajo. El encontró un buen ajuste entre la intensidad normalizada medida con un detector y la energía teórica también normalizada del espectro. Alvarez (1987) discute estos resultados y atribuye parte de las diferencias de sus mediciones con los espectros teórico a la abertura del detector usado.

Las coordenadas teóricas para  $X_f$  y  $Y_f$ , mostradas en la tabla 5.1, fueron verificadas en la película fotográfica que contenía el espectro óptico. Esto fué más fácil de hacer en los espectros de mares filtrados, ya que se conocían bien las bandas de

frecuencia presentes. Las mediciones concuerdan con la teoría.

Los resultados presentados en la figura 5.14 a 5.19 muestran que el filtrado numérico llevado a cabo fué bueno. La selección de las bandas de frecuencia aceptadas fué arbitrario. Existe una gran semejanza entre los resultados numéricos y los ópticos. El hecho que el espectro numérico se presente con picos tan pronunciados en algunas frecuencias y casi ausente en otras, no significa que el ancho de las bandas  $K_x$  y  $K_y$  no sea el adecuado. Muy similares resultados se observan en los espectros ópticos, los cuales presentan puntos muy intensos y otros no. Con esto se puede afirmar que, la forma espectral que contiene la superficie completa es la de las figuras 5.1 ó 5.7. Las diferencias con el espectro teórico son entonces producto del proceso numérico de simulación.

El filtrado de las imágenes es correcto por ámbos métodos, no obstante el método óptico es mucho más rápido (por ser en tiempo real) y maniobrable que el numérico. Sin embargo éste último es más preciso en cuanto al control de las frecuencias deseadas. Cabe la posibilidad de que las imágenes filtradas ópticamente no contengan exactamente las bandas deseadas de frecuencias, debido a falta de precisión en alguno de los filtros espaciales diseñados, ó bien por fallas en la alineación de las lentes del sistema. Se observa en estas imágenes el efecto de

los anillos causados por la difracción de la abertura circular del diafragma 2 de la figura 4.4 .

En el filtrado óptico es más notorio el tamaño y la dirección de las ondas presentes, a pesar de haber pérdida de resolución al atenuarse las pequeñas variaciones de la intensidad en el sistema óptico.

## 7.- CONCLUSIONES

Dentro de las limitaciones del modelo de simulación, en términos generales, podemos concluir que fué buena. De los análisis numérico y óptico, se observa que la energía asociada a todas las frecuencias (en el espectro teórico) se concentra en algunas de ellas, por esto los valores de densidad de energía tan altos (cuatro veces más aproximadamente) observados en los espectros numéricos. Esto último es un resultado del modelo para simular las imágenes y no del análisis llevado a cabo. Debido a que la técnica de simulación es de hace varios años, el tiempo de computo utilizado para estos algoritmos es excesivo (días), mientras que el tiempo usado por la FFT para transformar la matriz de elevaciones es de solo un minuto aproximadamente.

Las imágenes escritas con el microdensitómetro no fueron el 100 por ciento de la calidad deseada, debido a los problemas con el funcionamiento de este. Sin embargo, los espectros ópticos obtenidos (filtrados y completos) mostraron una muy alta semejanza con los resultados numéricos, por lo cuál es posible distinguir las señales que son solamente ruido generado por el mal funcionamiento del microdensitómetro.

La capacidad de un sistema óptico coherente para obtener el espectro de potencia de imágenes de superficies rugosas ha sido verificado por el análisis numérico de la misma superficie, encontrándose una muy alta semejanza en los resultados.

En las superficies completas estudiadas en este trabajo, se encontró en los espectros una dirección predominante en la dirección x. Sin embargo, el ancho del lóbulo espectral señala la presencia de pequeñas ondas propagándose en la dirección Y. Esto último es observable en los mares filtrados dejando pasar las altas frecuencias en y. El modelo de simulación considera tales ondas "locales", viajando aproximadamente a 30 grados a cada lado de la dirección del viento (debido a la función de direccionalidad del modelo,  $\cos \theta$ ) (Caruthers y Novarini, 1971).

El filtrado óptico es más maniobrable que el numérico, sobre todo si se cuenta con una pantalla de televisión donde proyectar las imágenes y observar los cambios producidos al cambiar los filtros. En este sentido, el filtrado numérico es más preciso por el control que se tiene sobre las frecuencias, pero requiere de pasos intermedios que pueden estar sujetos a algún error (microdensitómetro).

El propósito a largo plazo de este trabajo, es el de poder aplicar la metodología aquí descrita, a fotografías reales de la

superficie del mar. Una fotografía real del mar difiere de las imágenes simuladas en este trabajo en que los tonos de gris en el negativo son causadas por la luz solar reflejada por las pendientes de las olas presentes y no existe aún una relación bien determinada entre la intensidad de la luz recibida, la pendiente de las olas y la elevación de las mismas (la información realmente importante en oceanografía es la última).

Se recomienda usar nuevos modelos para generar superficies con espectros direccionales específicos y comparar su eficiencia computacional y sus resultados. Así mismo, se recomienda hacer un análisis semejante al de éste trabajo para fotografías reales en el sistema óptico y arreglos numéricos de tales fotografías, digitalizadas por el microdensitómetro para el análisis espectral numérico (procesado digital de imágenes). Tales fotografías reales deberán ser tomadas a suficiente altura, de tal forma que las longitudes de onda grandes presentes en el mar, no lo parezcan tanto en la imagen fotográfica. Esto permitirá que los puntos luminosos asociados a estas frecuencias en el espectro óptico se hallen lo suficientemente separados del patrón de difracción de Airy, para que la información no se interfiera.

Actualmente se están desarrollando trabajos de investigación que pretenden encontrar la relación altura-pendiente descrita anteriormente, con lo cual se logrará poseer un mejor

conocimiento acerca de las complejas interacciones de las ondas en la superficie marina (Alvarez, 1988).

## LITERATURA CITADA

- Alvarez, B. J. 1983. Análisis óptico de una imagen simulada de la superficie del mar. Tesis de Maestría. C.I.C.E.S.E.
- Alvarez, B. J. 1987. Optical analysis of two simulated images of the sea surface. Advances in image processing. SPIE volume 804. 31 March-3 April.
- Alvarez, B. J. y M. A. Machado. 1985. Optical analysis of a simulated image of the sea surface. Applied optics. 24(7).
- Alvarez, B. J. 1988. Comunicación personal.
- Barber, N. E. 1954. Finding the direction of travel of sea waves. Nature London 154, 1048.
- Bendat J. S. y A. G. Piersol. 1971. Random Data. Wiley interscience. New York.

- Bracewell, R. N. 1978. The Fourier Transform and its Applications. McGraw-Hill Book Company. New York. 2nd. Ed.
- Caruthers, J. W. y J. C. Novarini. 1971. Numerical modeling of randomly rough surfaces with application to sea surfaces. Texas A. and M. research foundation. Reference 71-13-T.
- Chelton, D. 1984. Notas de un curso de series de tiempo. Oregon State University.
- Collier, Burckhardt, Lin. 1971. Optical Holography. Academic press. New York.
- Denzil, s. Jr. 1969. Directional energy spectra of the sea from photographs. J. Geophysical Res. 74, No. 8 (April, 15).
- Erdélyi, A. 1953. Higher Transcendental Functions, vol 2. McGraw-Hill, New York.
- Goodman, W. J. 1968. Introduction to Fourier Optics. McGraw-Hill Inc., U.S.A.

- Jenkins, G. M. y D. G. Watts. 1968. Spectral Analysis and Its Applications. Holden-Day, San Francisco.
- Kinsman, B. 1965. Wind Waves. Dover publications Inc. New York. Edición 1984.
- Kitaigorodskii, S. A. 1961. Applications of the theory of similarity to the analysis of wind-generated wave motion as a stochastic process. Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Geofiz., 1:105-117 (English transl., 1:73-80).
- Kodak, 1983. KODAK TECHNICAL PAN FILM 2415. Eastman Kodak Company, Rochester, N.Y. No. p-255.
- O'Neill, E. L. 1963. Introduction to Statistical Optics. Addison Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- Shulman, A. R. 1970. Optical Data Processing. John Wiley and Sons, Inc.
- Silvester, R. 1974. Coastal Engineering, 1. Elsevier scientific publishing company. Amsterdam.
- Spiegel, M. R. 1976. Análisis de Fourier. McGraw-Hill, México.

Sugimori, Y. 1975. A study of the application of the holographic method of the determination of the directional spectrum of ocean waves. Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts, 22(5), May.

Stark, H. 1982. Applications of Optical Fourier Transforms. Academic Press, Inc.