UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNÍA FACULTAD DE INGENIERÍA ENSENADA



PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA (MyDCI) EN ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN CONTROL

Sincronización de sistemas complejos

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

Cornelio Posadas Castillo

Ensenada, Baja California octubre de 2008.

TESIS DEFENDIDA POR

Cornelio Posadas Castillo

Y aprobada por el siguiente comité:

Dr. César Cruz Hernández

Director del comité

Dr. Didier López Mancilla

Miembro del Comité

Dr. Oscar R. López Bonilla

Miembro del Comité

Dr. Miguel Enrique Martínez Rosas

Miembro del Comité

Dr. Rosa Martha López Gutiérrez

Miembro del Comité

RESUMEN de la tesis de **Cornelio Posadas Castillo**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELÉCTRICA con orientación en CONTROL. Ensenada, B. C. octubre de 2008.

Sincronización de sistemas complejos

Resumen aprobado por:

Director de Tesis

Este trabajo de tesis doctoral, versa sobre la sincronización de sistemas complejos construidos con osciladores caóticos. En particular, se aborda el problema de **sincronizar redes complejas** compuestas por N nodos caóticos. Empleando las características y propiedades de los sistemas cooperativos, se estudia la sincronización en diferentes arquitecturas de acoplamiento: global, estrella, anillo e irregulares.

Se presenta la sincronización de redes complejas conformadas, por diferentes tipos de nodos (láseres, redes neuronales, circuitos caóticos, etc.) interconectados en diferentes topologías. Se consideran básicamente dos escenarios: i) sincronía de redes sin nodo maestro (donde la dinámica final de la red sincronizada, es un nuevo estado caótico diferente a las dinámicas caóticas de los nodos aislados) y ii) sincronía redes con nodo maestro (donde la dinámica de la red sincronizada, es impuesta por el nodo maestro).

Se incluye un estudio experimental de la realización práctica (empleando circuitería electrónica) de la sincronización de redes con circuitos de Chua conectados con acoplamiento global. La sincronía de múltiples circuitos de Chua se logra recurriendo a la teoría de sistemas complejos.

Palabras clave: Sincronización, sistemas complejos, caos.

ABSTRACT of the thesis presented by **Cornelio Posadas Castillo**, as a partial requirement to obtain the DOCTOR IN SCIENCE degree in ELECTRIC with orientation in CONTROL. Ensenada, B. C. October 2008.

Synchronization of complex systems

Abstract approved by:

Thesis Advisor

In this PhD thesis, the synchronization of complex systems with chaotic oscillators is studied. In particular, synchronization of complex networks, composed by N nodes (systems with dynamics extremely complex) is approached. Using the characteristics and properties of cooperative systems, synchronization is studied in different coupling configurations (global, star, ring, and irregular).

The presented study is includes the synchronization of complex networks constructed by different kinds of interconnected nodes (lasers, neural networks, chaotic circuits, etc.). We consider basically two scenarios: i) synchronization of networks without master node (where the final dynamics of the synchronized networks, is a new chaotic state) and ii) synchronization of networks with master node (where the dynamics of the synchronized network, it is imposed by the master node).

An experimental study on practical realization (with electronic devices) of synchronization in globally coupled networks with Chua's circuits like nodes is presented. Synchronization of coupled multiple Chua's circuits is achieved by appealing to results from complex systems theory.

Keywords: Synchronization, complex systems, chaos.

Tabla de Contenido

Capít	ulo	F	Página
Resu	men		II
Abst	ract		III
Agra	decin	nientos	\mathbf{V}
Lista	de F	l'iguras	VIII
I.	\mathbf{Intr}	oducción	1
	I.1.	Sincronía	. 2
		I.1.1. Antecedentes históricos	. 2
		I.1.2. Sincronización de osciladores caóticos	. 5
	I.2.	Redes complejas	. 7
		I.2.1. Complejidad	. 8
		I.2.2. Antecedentes históricos	. 9
		I.2.3. Aplicaciones de las redes complejas	. 11
	I.3.	Objetivos y alcances de la tesis	. 16
	I.4.	Organización del manuscrito	. 17
II.	Sinc	cronización de redes complejas	19
	II.1.	1	
		II.1.1. Condiciones de sincronización	. 21
	II.2.	Estabilidad de redes complejas	
	II.3.	Conclusiones	
III.	_	ología de redes complejas	28
	III.1	. Redes complejas irregulares	
		III.1.1. Topología sin nodo aislado o maestro	
		III.1.2. Topología con nodo aislado o maestro	
	III.2	. Redes complejas regulares	
		III.2.1. Acoplamiento global	
		III.2.2. Acoplamiento en anillo	
		III.2.3. Acoplamiento en estrella	
		III.2.4. Conclusiones	
IV.		cronización de redes de circuitos de Chua	41
		. Modelo matemático del circuito de Chua	41
	IV.2	<i>5</i> 1	
	IV.3		
V.		cronización de redes neuronales	50
	V.1.	Red neuronal caótica	
	V.2.	Ejemplos ilustrativos	
	V.3.	Conclusiones	
VI	Sinc	ronización de redes de láseres caóticos	59

Tabla de Contenido (Continuación)

Capít		Página
	I.1. Dinámicas de un láser de Nd:YAG	. 61
	I.2. Red dinámica de láseres de Nd:YAG	. 62
	I.3. Ejemplos ilustrativos	. 65
	I.4. Conclusiones	. 68
VII.	incronización experimental de una red compleja	70
	II.1. Modelo matemático e implementación física del circuito de Chua	. 70
	VII.1.1. Implementación física del circuito de Chua	. 71
	VII.1.2. Modelo matemático del circuito de Chua	. 72
	II.2. Red compleja de circuitos de Chua	. 73
	II.3. Implementación física de la sincronización de una red compleja .	. 76
	VII.3.1. Red regular con acoplamiento global	. 76
	VII.3.2. Red irregular con un nodo maestro	. 80
	II.4. Conclusiones	. 85
VIII.	onclusiones generales	86
	III.1. Productos derivados de este trabajo doctoral	. 87
	III.2. Principales contribuciones de este trabajo doctoral	. 87
	III.3. Problemas abiertos	. 88
	eratura Citada	. 89

Lista de Figuras

Figura	Pá	igina
1.	Dibujo original de Christiaan Huygens ilustrando su experimento con dos relojes de pendulo colocados en un soporte común	3
2.	Mapa de Königsberg de la época de Euler, muestra donde se encontraban los siete puentes y las ramas del río	10
3.	Representación gráfica de un nodo aislado i con entradas u_{i1} , estados \mathbf{x}_i y salidas y_{i1}	21
4.	a) Cinco nodos caóticos desacoplados a ser sincronizados (cada nodo tiene su propia dinámica). b) Nodos de la red compleja con acoplamiento irregular, sin nodo maestro. c) Sincronización de los estados de los cinco	21
5.	nodos de la red (nuevo comportamiento colectivo caótico) a) Cinco nodos caóticos desacoplados a ser sincronizados (cada nodo tiene su propia dinámica). b) Nodos de la red compleja con acoplamiento irregular, con nodo maestro (nodo 1). c) Sincronización de los estados de los cinco nodos de la red (el nodo maestro 1 impone su dinámica al resto	25
6.	de los nodos de la red)	26 30
7.	Configuración de una red compleja con acoplamiento irregular con 5 nodos $(N = 5)$, el la cual, el nodo 1, es considerado aislado o maestro	32
8.	Configuración de una red compleja con acoplamiento global con 5 nodos $(N=5)$	34
9.	Configuración de una red compleja con acoplamiento en anillo con 5 nodos $(N = 5)$ y $K = 2$	37
10.	Ilustración de una red con configuración de acoplamiento en estrella con 5 nodos $(N = 5)$	39
11.	Circuito de Chua	42
12.	Atractores caóticos generados por el circuito de Chua: a) $x_1 vs x_2$ a) $x_1 vs x_3 y$ c) $x_2 vs x_3$	43
13.	Red de 4 nodos (circuitos de Chua) con acoplamiento global	44
14.	Sincronización de los primeros estados x_{11} , x_{21} , x_{31} y x_{41} en la red con acoplamiento global de 4 circuitos de Chua	45
15.	Sincronización de los segundos estados x_{12} , x_{22} , x_{32} y x_{42} en la red con acoplamiento global de 4 circuitos de Chua	45
16.	Sincronización de los terceros estados x_{13}, x_{23}, x_{33} y x_{43} en la red con acoplamiento global de 4 circuitos de Chua	46
17.	Red "compleja" formada con 4 nodos acoplados en una configuración en	46

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Pági	ina
18.	Sincronización de los primeros estados x_{11}, x_{21}, x_{31} y x_{41} de los 4 nodos de la red, acoplados en anillo de 4 circuitos de Chua	47
19.	Red "compleja" de 4 nodos con acoplamiento en estrella con nodo aislado	48
20.	Sincronización de los primeros estados x_{11}, x_{21}, x_{31} y x_{41} , se muestra el	49
21.	Célula aislada: entrada u_{ij} , umbral z_{ij} , estados $x_{ij} \in \mathbb{R}^x$ y salida y_{ij} para	51
22.	Atractor caótico generado por la CNN de dimensión 3×4 (45)-(46) y proyectado sobre el plano (x_1, x_2)	53
23.	Sincronización del primer estado de las cinco CNNs, $x_{i1}(t)$, $i = 1, 2,, 5$ y el plano de fase (x_{11}, x_{12}) del comportamiento de la red con arquitectura	
24.	en acoplamiento global	55
25.	red compleja en el plano de fase (x_{11}, x_{12})	56 57
26.	Sincronización de los estados de las cinco células, $x_{i1}(t)$, $i = 1, 2,, 5$ y el comportamiento de la red compleja en el plano de fase (x_{11}, x_{12})	58
27.		60
28.	Atractor caótico generado por el láser de Nd:YAG proyectado sobre el plano (X, F)	62
29.	Para $d=0,3$, el estado X_{11} de un láser caótico de Nd:YAG es estabilizado	63
30.	Acoplamiento en estrella de 5 láseres caóticos de Nd:YAG como nodos.	65
31.	Sincronización de los estados caóticos $(X_{i1, i} = 1, 2,, 5)$ de 5 láseres de Nd:YAG acoplados en estrella y el nuevo atractor caótico del comportamiento colectivo en la red, proyectado sobre el plano (X_{11}, F_{12})	67
32.	Acoplamiento irregular con láseres de Nd:YAG, con el nodo 1 como	68
33.	Sincronización del primer estado $(X_{i1, i=1,2,,5})$ de los 5 láseres de	69
34.	(a) Circuito de Chua consistente de un inductor L , dos capacitores lineales $C1$ y $C2$, una resistencia lineal R y una resistencia no lineal NR .	00
35.	(b) Curva característica $v_{C1} - i_{NR}$ de la resistencia nolineal NR Implementación del diodo de Chua utilizando dos Op-Amps $U1$ y seis	71
33.	resistencias lineales	72

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Pá	ágina
36.	(a) Red "compleja" con acoplamiento global (de tres circuitos de Chua).(b) Red "compleja" con acoplamiento irregular (de tres circuitos de	
	Chua) con nodo maestro (N_1)	74
37.	Atractor caótico de Chua proyectado en el plano (x_1, x_2)	76
38.	Configuración experimental para la sincronización de una red dinámica	
20	de tres circuitos caóticos de Chua con acoplamiento global	78
39.	(a) Comportamiento caótico de los primeros estados: x_{11} , x_{21} y x_{31} en la	
	red de tres circuitos caóticos de Chua. (b) Comportamiento caótico de	
	los segundos estados: x_{12} , x_{22} y x_{32} en la red de tres circuitos caóticos	70
40	de Chua (con acoplamiento global)	79
40.	Sincronización de los primeros estados de los tres circuitos caóticos de	
	Chua con acoplamiento global; (a) x_{11} vs x_{21} , (b) x_{21} vs x_{31} y (c) x_{11} vs x_{31} , en una red con acoplamiento global	80
41.	Configuración experimental para la sincronización de una red dinámica	00
т1.	de tres circuitos caóticos de Chua con acoplamiento irregular y con nodo	
	maestro (N_1)	81
42.	(a) Comportamiento caótico de los primeros estados: x_{11} , x_{21} y x_{31} en la	O1
	red irregular con nodo maestro (N_1) de los tres circuitos de Chua. (b)	
	Comportamiento caótico de los segundos estados: x_{12} , x_{22} y x_{32} en la red	
	irregular con nodo maestro (N_1) de los tres circuitos de Chua	82
43.	Sincronización de los segundos estados de los tres circuitos caóticos de	
	Chua; (a) x_{12} vs x_{22} , (b) x_{22} vs x_{32} y (c) x_{12} vs x_{32} , en una red irregular	
	con nodo maestro N_1	83
44.	Plano de fase experimental (x_{11}, x_{12}) del ciclo límite generado por el	
	circuito de Chua.	84
45.	Sincronización de los primeros estados de los tres circuitos caóticos de	
	Chua; (a) x_{11} vs x_{21} , (b) x_{21} vs x_{31} y (c) x_{11} vs x_{31} , en una red irregular	
	con nodo maestro periódico N_1	85

Capítulo I

Introducción

La presente tesis doctoral se ha realizado con el propósito de contribuir a la solución de problemas abiertos en la sincronización de sistemas complejos. En los últimos años, esta línea de investigación ha despertado enorme interés en diferentes disciplinas científicas y tecnológicas, debido probablemente a las numerosas aplicaciones benéficas para el hombre, en areas como biología, economía, química, ingeniería, ciencias sociales, etc. En particular, se abordó el problema de sincronizar redes complejas en diferentes configuraciones de acoplamiento (redes con acoplamiento regular e irregular). Como ejemplos de redes regulares, podemos mencionar las descritas por medio de acoplamiento global, estrella y anillo. Mientras que las redes irregulares tienen un acoplamiento que no corresponde a un patrón definido; por ejemplo: redes del mundo pequeño, redes de libre escala, redes aleatorias, etc.

Las evoluciones en el tiempo de los sistemas caóticos, como Chua, Rössler, Lorenz, redes neuronales, láseres, etc., pueden exhibir comportamientos extremadamente complejos. En este trabajo doctoral son seleccionados estos sistemas, como nodos a sincronizar en grupos formando redes con diferentes configuraciones de acoplamiento.

Consideramos el caso de redes complejas que no tienen un nodo maestro, es decir, la dinámica final de la red sincronizada, corresponde a un nuevo estado caótico, diferente a la dinámica original de cada uno de los nodos antes del acoplamiento. Además, consideramos el caso donde tenemos un nodo maestro, es decir, este nodo maestro impone su dinámica (por compleja que esta sea) al resto de los nodos de la red.

Por considerar importante y prudente, comenzaremos describiendo aunque breve y de manera informal, el concepto de *sincronía*.

I.1. Sincronía

I.1.1. Antecedentes históricos

La palabra sincronía proviene de los vocablos griegos $\chi\rho\delta\nu\sigma\varsigma$ (cronos, que significa tiempo) y $\sigma\acute{v}\nu$ (sin, que significa lo mismo, común, coincidencia). En una traducción directa, "sincronía" según el Diccionario de la Real Academia Española, significa: "sucesos ocurriendo al mismo tiempo" o bien "coincidencia de movimientos, sucesos o fenómenos al mismo tiempo". De manera general, definiremos sincronía a la propiedad que adquiere un conjunto de "objetos" (de una misma o diferente especie) de manifestar un ritmo o comportamiento común (generalmente distinto a los ritmos individuales de los objetos considerados), partiendo de ritmos o comportamientos individuales distintos, debido a la presencia de un medio acoplante (un medio físico de conexión) entre ellos, el cual, en la mayoría de los casos, es extremadamente débil.

Historicamente, se atribuye al científico holandés Christiaan Huygens el primer registro de la sincronía. La primera observación formal de este fenómeno se remonta al siglo XVII, Huygens observó y explicó la sincronía ocurrida entre dos péndulos de relojes colgados de una viga como se observa en la figura 1 [Pikovsky et al. 2001]. Este acontecimiento, sucedió mas o menos como sigue: dos relojes suspendidos de una misma viga muy delgada, los encontró oscilando exactamente con la misma frecuencia y moviéndose en direcciones opuestas, debido al acoplamiento establecido a través de la viga, es decir, a las casi imperceptibles vibraciones de la viga, ocasionadas por el movimiento de ambos relojes. Huygens observó también, que los tic-tacs de ambos relojes se escuchaban al unísono. Asombrado Huygens, se preguntó la causa de dicho fenómeno, ya que al colocar

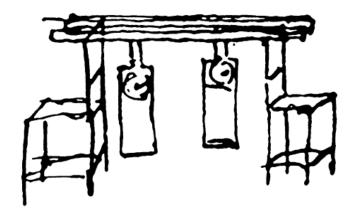


Figura 1: Dibujo original de Christiaan Huygens ilustrando su experimento con dos relojes de pendulo colocados en un soporte común.

después ambos relojes sobre una pared (es decir, interrumpido el acoplamiento), aquél fenómeno cesaba.

A partir de entonces, la sincronía, se viene manifestando con sistemas de naturaleza muy diversa; por ejemplo, en sistemas eléctricos, mecánicos, biológicos, químicos, celestes, entre muchos otros.

La sincronía desempeña un papel importante en mecánica celeste, donde explica el "amarre" de periodos de revolución entre planetas y satélites, por ejemplo: la relación en números enteros entre las velocidades angulares promedio de rotación y traslación de cuerpos celestes. Uno de los aspectos más notorios de este hecho, es que la Luna y la Tierra tienen la misma velocidad angular promedio en sus movimientos de rotación y traslación, esto significa que están sincronizados [Goldreich 1975].

La sincronía también se observa en sistemas neurobiológicos, donde ritmos y ciclos pueden hallar su explicación; por ejemplo, la sincronía de grupos de neuronas, cuya operación se considera crucial para el procesamiento de información en el cerebro [Schechter 1996; Schiff et al. 1996], oscilaciones sincronizadas de los núcleos y células de tumores malignos, sincronía del tejido muscular y de transferencia de exitación nerviosa, etc.

Una aplicación importante de la sincronía en medicina, son los marcapasos, los cuales, envían pulsos eléctricos dentro de áreas específicas del corazón, imponiendo a los músculos cardíacos una frecuencia necesaria de contracción, entre 60 a 70 por minuto [Babsky y Ulianovsky 1961].

La sincronía se ha observado también en sistemas vibroexitadores mecánicos, los cuales, se emplean en granulómetros y mecanismos elevadores mediante ductos vibratorios [Signeull 1958].

Podemos mencionar también, que la sincronía se manifiesta en el comportamiento colectivo de los humanos, ya sea voluntaria o involuntariamente; por ejemplo, en los aplausos prolongados en una audiencia, en los gritos al unísono de frases en apoyo o en contra de alguna persona, en grupos de personas desfilando o en la menstruación en grupos de mujeres; llamada sincronía menstrual. Este fenómeno de sincronización se produce cuando un grupo de mujeres conviven en forma cercana. Antes de formarse el grupo tienen ciclos distintos de menstruación durante el mes y después de 15 semanas de vida en común, los periodos menstruales tienden a coincidir [Wolf 1998].

En estos y otros numerosos casos, la sincronía representa un papel fundamental ya que establece alguna relación especial entre sistemas o mecanismos acoplados. A continuación, se mencionan algunos ejemplos particulares en nuestra área de interés:

- Sincronización de generadores cuánticos de radio frecuencia ("massers").
- Sincronización de osciladores caóticos con aplicación en comunicaciones privadas y seguras de información confidencial.

- Sincronización de robots para realizar una tarea común.
- Sincronización de oscilaciones eléctricas y electromagnéticas en electrónica y radio.
- Sincronización de láseres que permite generar pulsos de luz muy potentes.

I.1.2. Sincronización de osciladores caóticos

Un elemento importante en este trabajo de investigación es el **caos**, los nodos que conforman las redes, en muchos casos exhiben dinámicas caóticas. Aunque la palabra misma, invita a pensar en desorden, desde el punto de vista científico, caos se refiere a un comportamiento dinámico complejo, que puede modelarse por ecuaciones no lineales diferenciales o en diferencias. El caos, posee características muy particulares, como ser extremadamente sensible a condiciones iniciales, generar atractores "extraños", tener al menos un exponente de Lyapunov positivo, entre otras que se describirán con detalle posteriormente.

Hoy en día, los sistemas caóticos son utilizados en distintas disciplinas de la ciencia, por ejemplo, en meteorología; en un intento por modelar el comportamiento de la atmósfera y predicción del clima. En biología, en estudios sobre crecimiento de población, en colonias de animales o en la propagación de epidemias. En física, dentro de la teoría de partículas elementales y los desplazamientos de electrónes en el átomo, etc.

Fujisaka y Yamada en [Fujisaka y Yamada 1983] y Pecora y Carroll en [Pecora y Carroll 1990] fueron pioneros en obtener sincronía de sistemas caóticos (es decir, hacer que dos osciladores con dinámica caótica coincidan en tiempo y forma). Desde entonces, ha existido enorme interés en las comunidades científicas y tecnológicas en aprovechar esta propiedad. En la literatura especializada en este tópico se reportan diferentes métodos para sincronizar dos osciladores caóticos: sincronización por retroalimentación

del error [Chen y Dong 1993a; 1993b; Liu et al. 2002; Wu et al. 2006; Rafikov y Manoel 2008, sincronización utilizando observadores de estado [Ushio 1996; Nijmeijer y Mareels 1997; Grassi y Mascolo 1999; Sira-Ramírez y Cruz-Hernández 2000; 2001; Yamamoto et al. 2002; Morgül 2003], sincronización utilizando control impulsivo [Stojanovski T. et al. 1996; Yang y Chua 1997; Itoh et al. 1999a; 1999b; 2001; Khadra et al. 2003a; 2003b], sincronización utilizando acoplamiento a modelos [López-Mancilla y Cruz-Hernández 2004; 2005; Aguilar-Bustos y Cruz-Hernández 2006; 2008], sincronización empleando filtro extendido de Kalman [Sobiski y Thorp 1998; Cruz-Hernández y Nijmeijer 1999; 2000; Aguilar-Bustos y Cruz-Hernández 2006, sincronización empleando sistemas inversos [Feldmann et al. 1996], sincronización utilizando control adaptable [Fradkov y Markov 1997; Tech-Lu y Shin-Hwa 2000; Wagg 2002; Bowong 2007, sincronización empleando modos deslizantes [López-Mancilla y Cruz-Hernández 2004]. Sobre sincronización de caos se han escrito algunos libros [Fradkov y Pogromsky 1998; Chen y Don 1998; Pikovsky et al. 2001; González-Miranda 2004; Cruz-Hernández y Martynyuk 2009] y prestigiosas revistas han editado números especiales: On chaos synchronization and control: theory and applications, IEEE Trans. Circuits Systems I (1997), 44(10), Syst. Contrl. Lett. 31 (1997), Control and synchronization of chaos, Int. J. Bifurc. and Chaos (2000), $\mathbf{10}(3-4)$, etc. por mencionar algunos.

Sin embargo, en la actualidad, algunas aplicaciones de especial interés científico, industrial y tecnológico, requieren extender la sincronía a múltiples osciladores, constituyendo redes complejas, ver por ejemplo [Blekhman et al. 1997; Wang y Chen 2002a; Wang y Chen 2002b; Wang 2002; Rodríguez-Angeles y Nijmeijer 2004; Marubia 2004; Belykh et al. 2005; Yalcin 2005; Posadas-Castillo et al. 2005; 2008a; 2008b]. En algunos casos, con el objetivo de realizar una tarea común (sistemas cooperativos), en la formación de grupos de robots móviles, de agentes, etc. En otros casos, para estudiar las características y propiedades emergentes de estas estructuras, para aplicarse

a modelos reales (físicos, biológicos, sociales, etc.), que nos ayude a entender mas el comportamiento y crecimiento de este tipo de estructuras, para beneficio del hombre.

I.2. Redes complejas

La teoría de redes, originaria de los enfoques de las teorías de sistemas complejos de la física estadística, nos permite caracterizar estos sistemas, de una manera simple para, posteriormente, intentar explicar las propiedades emergentes de los sistemas a los que representan esas redes.

Los sistemas naturales y artificiales complejos, suelen estar compuestos por miles de unidades llamadas nodos o células, de las que podemos conocer (o no) su comportamiento individual [Green y Bossomaier 1993; Yaneer 1997; Watts 2003; Dieter 2005; Número especial 2004; 2007]. Pensemos en las neuronas y otras neurocélulas del cerebro, en grupos de animales (cardúmenes, enjambres, colonias de hormigas, etc.), en los componentes de un circuito electrónico, en el conjunto de páginas "web" en la Internet, o incluso en la red física de ordenadores y servidores que conforman las redes de computadoras. También existen otros tipos de redes, como las que formamos grupos de personas, llamadas redes sociales. Otro ejemplo, son los ecosistemas o nuestro código genético. De aquí, la importancia que adquiere conocer el comportamiento colectivo y sincronizar este tipo de estructuras, compuestas por múltiples nodos (quizás caóticos), a las que llamaremos en este trabajo redes complejas.

Expresado de otra manera, las propiedades de un sistema complejo que constituye una red, no se pueden deducir de las propiedades del nivel inferior, es decir, por mas que entendamos el funcionamiento de la neurobioquímica neuronal y la neurona en sí, no podremos entender las propiedades emergentes que posee nuestro cerebro, como la memoria, el pensamiento y el lenguaje. Visto de otra forma, el comportamiento de una hormiga no puede ser representativo del comportamiento del hormiguero en su conjunto, es en este sentido que entendemos la complejidad.

I.2.1. Complejidad

El término **complejo** de una forma preliminar, se refiere a las características de los **nodos** por sí mismos o a la estructura de la red. La naturaleza de estos nodos pudiera ser *discreta* (modelada por un conjunto de ecuaciones en diferencias) o *continua* (modelada por un conjunto de ecuaciones diferenciales). Un nodo puede representarse por un sistema no lineal, el cual, puede exhibir equilibrios múltiples, ciclos límites y caos. Las bifurcaciones de estos equilibrios pueden cambiar el comportamiento de estos nodos, así como sus propiedades de estabilidad, llevando a estos sistemas a comportamientos tales como el *caos* e *hipercaos*, mostrandonos así una riqueza dinámica tal, que puede aprovecharse en un gran número de aplicaciones benéficas para el hombre.

En segunda instancia, hay que referirnos a la complejidad que la **estructura o topología** (forma o patrón regular o irregular, en que estan conectados o acoplados los nodos) añade a la red. Los nodos pueden estar conectados desde formas regulares (globales, estrella o anillo, con características y propiedades bien definidas), hasta formas irregulares, formando con esto, intrincadas y caprichosas formas (**complejidad estructural**), donde las conexiones entre nodos no siguen una regla específica (redes del mundo pequeño, redes de libre escala, redes aleatorias, etc.).

La complejidad y el gran número de nodos, la complejidad estructural de las conexiones de la red, además, de las propiedades emergentes de este tipo de estructuras al conformar una red, permiten sin lugar a dudas, que estas estructuras formen parte de los llamados sistemas complejos.

I.2.2. Antecedentes históricos

Historicamente, el estudio de las **redes** ha sido normalmente dominado por una rama de las matemáticas conocida como teoría de grafos. Desde su nacimiento en 1736, cuando el matemático suizo **Leonard Euler** publicó la solución al problema de los siete puentes de Königsberg (Prusia Oriental en el siglo XVIII -ciudad natal de Kanty actualmente, Kaliningrado, en la óblast rusa de Kaliningrado), ver figura 2. Este problema consiste en encontar una ruta para pasar por cada uno de los puentes de la ciudad por una sola vez. Dos islas en el río Pregel que cruza Königsberg se unen entre ellas y con tierra firme mediante siete puentes. El problema es el siguiente: ¿Es posible dar un paseo empezando por cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida?. Euler enfocó el problema representando cada isla por un punto y cada puente, por una línea, uniendo los puntos que se corresponden. Euler demostró que no era posible, puesto que el número de líneas que inciden en cada punto no es par (condición necesaria para entrar y salir de cada punto retornando al punto de partida por caminos distintos en todo momento) [http://es.wikipedia.org/wiki/Problema de los puentes de K %C3 %B6nigsberg].

En 1845, **Gustav Kirchhoff** publicó sus leyes para calcular el voltaje y la corriente en una red de circuitos eléctricos.

En 1852, Francis Guthrie con relación al problema de los cuatro colores, plantea si es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países, de tal forma, que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este problema, que fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, puede considerarse como el origen de la teoría de grafos. En su intento por resolver este problema, los matemáticos definieron términos y crearon conceptos teóricos, fundamentales para el estudio de grafos [http://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa de grafos].

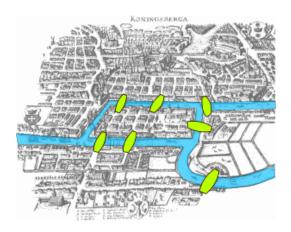


Figura 2: Mapa de Königsberg de la época de Euler, muestra donde se encontraban los siete puentes y las ramas del río.

La última década ha dado testimonio del nacimiento de un nuevo movimiento de interés e investigación en el estudio de las redes complejas. Al amparo de términos y conceptos teóricos fundamentales de la teoría de grafos, se reportan trabajos relevantes sobre redes complejas; por ejemplo, podemos mencionar a Watts y Strogatz con su trabajo "Small-world neworks" publicado en la revista Nature en el año 1998 y el artículo de Barabási y Albert "Scale-free networks" publicado un año después en la revista Science. Los estudios sobre redes complejas inició por definir nuevos conceptos y medidas para caracterizar las topologías o arquitecturas de redes reales.

Actualmente, numerosos trabajos pueden encontrarse en la literatura especializada en el tópico; por ejemplo: el libro de Watts [Watts 1999] reporta los estudios de la estructura y la dinámica de las redes del llamado "mundo pequeño". Strogatz en un número especial de la revista Nature [Strogatz 2001] sobre sistemas complejos realiza una discusión sobre las redes y sus unidades dinámicas. Albert y Barabási en [Albert y Barabási 2002] y Dorogovtsev y Mendes en [Dorogovtsev y Mendes 2002; 2003] realizan una revisión de modelos y crecimiento de grafos desde el punto de vista de la

mecánica estática. Un estudio exhaustivo de las propiedades estructurales, mediciones y modelos de redes es proporcionado por **Newman** en [Newman 2003]. **Pastor-Satorras** y **Vespignani** en [Pastor-Satorras y Vespignani 2004] se dedican al análisis y modelado de la Internet. Los libros de **Wasserman** y **Faust** [Wasserman y Faust 1994] y **Scott** [Scott 2000] son ampliamente conocidos en la comunidad científica que investiga el comportamiento de las redes sociales.

I.2.3. Aplicaciones de las redes complejas

Las redes complejas estan en nuestro entorno, desempañando un papel crucial en el diario acontecer de la vida del ser humano. El buen funcionamiento (sincronía de sus nodos) o falla (interrupciones en la sincronía) de éstas, trae como consecuencia un bienestar o perjuicio respectivamente en la vida del hombre. Por ejemplo, el 10 de agosto de 1996, una anomalía en la operación de la red eléctrica en Oregon, ocasionó una serie de fallas en cascada, dejando sin energía eléctrica a once estados de los Estados Unidos de América y dos provincias de Canada. Afectando en diferentes grados a más de siete millones de personas, que quedaron sin energía eléctrica por más de 16 horas. Sin embrago, como lo hemos mencionado anteriormente, el estudio de las redes complejas traen también grandes beneficios para el hombre y a modo de motivación, damos algunos ejemplos de aplicaciones en diferentes áreas, donde las redes complejas juegan un papel importante y crucial en el estudio de estos fenómenos.

Redes sociales

Una **red social** esta compuesta por un conjunto de actores (individuales o grupos sociales) y una relación alrededor de ellos [Wasserman y Faust 1994; Scott 2000]. El análisis estadístico de una red social, ha revelado un conjunto de características muy

importantes y que repercute directamente en el quehacer humano cotidiano. Ejemplo de ello, tenemos interacciones importantes, entre un grupo de amigos estudiantes con adolecentes delincuentes [Haynie 2002], hasta la cuantificación de las interaciones sociales de células terroristas [Krebs 2002]. El estudio de estos dos fenómenos nos ayuda evidentemente a la prevención de problemas familiares, así como a actos delictivos de consecuencias catastróficas, como puede ser un ataque terrorista [Latora y Marchiori 2004].

Otro tipo de red social, la forma las colaboraciones entre científicos (coautores de libros o artículos). Es un interesante ejemplo de red social de colaboración, que nos ofrece un entendimiento mejor de los mecanismos y reglas de colaboración entre científicos [Newman 2001a]. Redes de coautores son construídas cuando se establece comunicación entre dos científicos (conexión entre dos nodos), si ellos han sido coautores de al menos un artículo en común.

Redes construidas con bases de datos en diferentes disciplinas, como "Medline" o la "Stanford Public Information Retrieval (SPIRES)", se ha observado que presentan algunas propiedades no triviales del comportamiento del fenómeno llamado mundo pequeño [Newman 2001b]. Por otra parte, el estudio de las redes sociales suele tener grandes beneficios, incluso en la salud de una comunidad. La prevención de la transmisión de agentes infecciosos (por contacto sexual, adictos que comparten drogas, etc.) en una población, es otro ejemplo en la cual, el estudio de la estructura de una red compleja ha arrojado información importante para el modelado de dinámicas realistas de un agente infeccioso. Resultados con datos reales confirman que la topología de la red social juega un papel importante en el contagio de diferentes enfermedades infecciosas, por ejemplo: el virus de la hepatitis B (VHB), virus de inmunodeficiencia humana (VIH), neumonía, sífilis, gonorrea, etc. En algunos casos, los estudios de estas redes han ayudado a crear acciones y controles de prevención, detectando los grupos de

alto riesgo en una comunidad [Potterat et al. 1999; 2002; Eames y Keeling 2004].

Redes biológicas

En 1999, **Hartwell** y colaboradores publicaron un artículo que marcó el punto de partida para nuevos retos para la biología moderna [Hartwell et al. 1999]. Los autores señalaban el desarrollo de un marco general, en el cual, las funciones biológicas deben ser entendidas como organizaciones complejas, constituidas por moléculas o células. En otras palabras, la biología moderna debe explicar no sólo el funcionamiento de componentes celulares individuales, sino también, cómo estos componentes están interconectados a través de una red compleja para realizar una función o actividad común. Formando con ésto, órganos vitales complejos como corazón, pulmones, cerebro, etc. y su relación o conexión con otros órganos del cuerpo humano.

Un ejemplo diferente pero no menos importante, fue observado en el año 1680. Un viajero holandés que recorría el reino de Siam, hoy Tailandia, anotó una curiosa observación sobre su descenso por el río Meinam: "Unos gusanos brillantes habían tomado posesión de un árbol y se extendían por sus ramas; a veces ocultaban su luz todas a la vez y, un momento después, la hacían aparecer con regularidad y exactitud". Los gusanos de los que hablaba **Kaempfer** eran luciérnagas, y el fenómeno ya había sido constatado por otros marineros que surcaron mares del sur (**Buck J.** y **Buck E.**). Miles de luciérnagas prendían y apagaban su luz de una manera sincronizada sobre las hojas de un árbol, haciendo "aparecer" y "desaparecer" en la obscuridad al árbol.

Algunas enfermedades del cerebro, como la epilepsia, son resultado de una anormal y algunas veces abrupta sincronización entre grupos de muchas neuronas. Esta sincronización es una característica esencial de la generación y propagación de actividad epiléptica. Sin embargo, no obstante los progresos considerables en el entendimiento de

los procesos fisiológicos, la red de mecanismos que involucran la generación y propagación de desordenes epilépticos son aún desconocidos. Simulaciones realistas de estos procesos cerebrales, fueron basadas en un tipo de red llamada "mundo pequeño". Los resultados muestraron una enorme diversidad de dinámicas neuronales, que pueden ser obtenidas cambiando el valor del acoplamiento entre cada neurona, conocido por "synapse" [Netoff et al. 2004].

Redes en ingeniería

En el área de ingeniería y tecnología, existe una multitud de ejemplos de aplicaciones de las redes complejas. Algunas de estas redes se han diseñado como tales (desde un inicio fue concebida su creación como una red) y otras se han ido formando al requerir satisfacer las crecientes necesidades. Como primer ejemplo, tenemos el estudio sobre la forma y características de una de las más grandes e importantes redes de comunicación, la Internet, fue reportada en 1999 en [Faloutsos et al. 1999]. La Internet es una red en la cual, los nodos son representados por servidores y entre los servidores conexiones físicas (cable coaxial, fibra óptica, etc.). Desde su creación, la red de la Internet ha tenido un crecimiento vertiginoso, siendo empleada esta red en cada vez mas áreas de nuestra actividad cotidiana (actividades bancarias, comerciales, telefónicas, científicas, educativas, navales, militares, etc.). La falla o colapso de esta red, tendría consecuencias de grandes magnitudes.

Otra red de comunicaciones también de gran importancia y que ha sido caracterizada recientemente es la "World Wide Web" (WWW) [Albert et al. 1999]. Esta red está formada por "hyperlinks" en diferentes páginas webs, con mas de 10⁸ nodos conocidos. Cada nodo es representado por una página web y esta conectada por medio de los hyperlinks a otras páginas. Esta red es aún mas grande que la de la internet y su importancia radica en los servicios (comunicación, comerciales, consultas, etc.) e

información que se puede encontrar en ellas.

Además de las redes de comunicaciones mencionadas anteriormente, se describen otros tipos de redes de suma utilidad en ingeniería. Actualmente, se ha incrementado el interés por investigar redes compuestas de múltiples robots autónomos, efectuando tareas cooperativas [Uny Cao et al. 1997], un ejemplo de éstas, es una red de robots realizando una tarea común en las industrias para realizar actividades monótonas o peligrosas de manera sincronizada.

Otro ejemplo concreto de este tipo de redes son los arreglos de láseres que conforman una red [Winful y Wang 1988]. Cada láser es caracterizado por una ganancia, polarización, fase y amplitud de su campo eléctrico. Usualmente esperamos que el láser se comporte en estado estable. Pero pulsaciones periódicas y algunas veces caóticas pueden ocurrir. Ahora, supóngase que N láseres son dispuestos en una cadena o anillo formando una red, interactuando con sus vecinos con sus campos eléctricos. Los láseres "amarrarán" sus fases entre ellos (a este fenómeno se le conoce como auto sincronización) produciendo como consecuencia, una mayor potencia (N^2 veces) que la potencia de un sólo láser.

Por otra parte, desde la antigüedad, el encriptado de información con el propósito de comunicación confidencial ha sido un problema de mucho interés para el hombre. Durante muchos años, se han utilizado diferentes técnicas para tratar de resolver este problema. Actualmente, la sincronización de osciladores caóticos (por ejemplo de Lorenz, Chua, Rössler, etc.) y recientemente láseres en régimen caótico [Mirasso et al. 1996; Sánchez-Díaz et al. 1999; Terry 2002; Posadas-Castillo et al. 2008a; 2006a; 2008e]. En los siguientes trabajos se proponen una alternativa de solución a dicho problema de encriptamiento de información [Chow et al. 2001; Feldmann et al. 1996; Kocarev et al. 1992; López-Mancilla y Cruz-Hernández 2005a]. En especial, en el área de comunicaciones privadas o seguras, la aplicación de diferentes esquemas de comunicación

para múltiples usuarios, es uno de los campos de investigación, en donde los conceptos, definiciones y propiedades de las redes complejas participan activamente [Kouomou y Woafo 2003].

I.3. Objetivos y alcances de la tesis

Dado el enorme interés que ha despertado el estudio de las redes complejas en los últimos años en muchas áreas científicas y en tecnología, en particular, la sincronización de redes complejas, y a las muchas aplicaciones en la ingeniería; con la realización de este trabajo de tesis doctoral, se planteó alcanzar el siguiente **objetivo general.**

Sincronizar REDES COMPLEJAS compuestas por N nodos o células (sistemas con dinámicas extremadamente complejas, pudiendo ser caóticas, hipercaóticas, de dimensión infinita, etc.). Empleando las características y propiedades de los sistemas cooperativos; en particular, abordar aspectos relacionados con la robustez ante variaciones paramétricas.

Los problemas particulares que fueron abordados son los siguientes:

- Sincronizar redes complejas dispuestas en una topología de acoplamiento regular (acoplamiento global, estrella y anillo).
- 2. Sincronizar redes complejas dispuestas en una topología de acoplamiento irregular.
- 3. Aplicar la sincronización de redes a diferentes sistemas complejos formados por láseres, redes neuronales caóticas y sistemas caóticos.
- 4. Realizar experimentalmente la sincronía de redes complejas, implementando éstas mediante circuitería electrónica.

No obstante que en los objetivos originales planteados para este trabajo doctoral, se limitó el alcance a resultados teóricos y numéricos, en este trabajo como un producto adicional, se reportan también resultados experimentales, implementando éstos mediante circuitería electrónica.

Las contribuciones de este trabajo de investigación con relación a los objetivos mencionados, se pueden consultar en la sección de **productos derivados de este trabajo** de tesis doctoral (Cap VIII.1).

I.4. Organización del manuscrito

Esta memoria de tesis doctoral se organiza en seis capítulos como sigue. En el primer capítulo, se da una introducción al trabajo desarrollado, mencionando los objetivos que dieron su origen. En el capítulo dos, se presenta la teoría empleada para sincronizar redes complejas, se proporcionan condiciones de acoplamiento necesarias para obtener la sincronización de estas redes. Además, se describen las condiciones para garantizar estabilidad de las redes complejas empleando la teoría de Lyapunov. El tercer capítulo muestra con base a la sincronización de redes complejas, diferentes topologías de redes tanto regulares como irregulares (global, estrella y anillo), además, condiciones de acoplamiento y características especiales de estas redes. En el capítulo cuatro se presenta la sincronización de redes complejas, aplicada al circuito caótico de Chua. En el quinto capítulo se muestra la sincronía de redes neuronales caóticas con diferentes topologías de acoplamiento. El capítulo seis reporta de manera teórica y numérica, la sinconización de láseres caóticos, con topología de acoplamiento tanto regular como irregular. El séptimo capítulo muestra resultados experimentales de la sincronía de redes, mediante circuitería electrónica. Finalmente, en el capítulo ocho se dan las conclusiones más importantes del trabajo doctoral y se mencionan las

posibilidades de trabajos futuros en esta dirección.

Capítulo II

Sincronización de redes complejas

En este capítulo se presenta la teoría empleada en este trabajo doctoral para sincronizar redes complejas. Se describen las condiciones necesarias de acoplamiento para obtener la sincronización de estas redes. Además, se aborda el análisis de estabi-lidad en la sincronización de las redes complejas recurriendo a la teoría de Lyapunov.

II.1. Dinámica de redes complejas

Consideremos una red compleja compuesta de N nodos idénticos, acoplados linealmente a través de la primera variable de estado de cada nodo. En esta red dinámica, cada nodo constituye un sistema dinámico de dimensión n, descrito como sigue

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + u_i, \qquad i = 1, 2, \dots, N, \tag{1}$$

donde $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ x_{i2}, \ ..., \ x_{in})^T \in \mathbb{R}^n$ son las variables de estado del nodo i, mientras que $u_i = u_{i1} \in \mathbb{R}$ es la señal de entrada del nodo i, definida por

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \Gamma \mathbf{x}_{j}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$
 (2)

la constante c>0 representa el grado de acoplamiento de los nodos en la red dinámica y $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante de conexiones, que conecta a las variables de estado de los nodos acoplados. Por simplicidad se asume que $\Gamma = \text{diag}\left(r_1,\ r_2,\ldots,r_n\right)$ es una matriz diagonal con $r_i=1$ para una i en particular y $r_j=0$ para $i\neq j$. Esto quiere, decir que cualquier par de nodos estan acoplados a través de su i-ésima variable de estado.

La matriz

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n},\tag{3}$$

es la matriz de acoplamiento. Representa la configuración de acoplamiento de los nodos en la red dinámica. Si existe conexión entre el nodo i y el nodo j, entonces la entrada $a_{ij} = 1$; de otra manera, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Los elementos de la diagonal de la matriz de acoplamiento \mathbf{A} se definen por

$$a_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} a_{ij} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$
 (4)

Si el grado del nodo i es d_i , entonces

$$a_{ii} = -d_i, i = 1, 2, \dots, N.$$
 (5)

Ahora, suponiendo que la red dinámica (1)-(2) esta conectada de manera que no hay nodos aislados. Entonces, la matriz de acoplamiento **A** es una matriz simétrica irreducible. Se conoce que en este caso, *cero* es un *valor propio* de la matriz de acoplamiento **A**, con multiplicidad 1 y el resto de los valores propios son estrictamente negativos [Wang 2002; Wang y Chen 2002b].

La sincronización de los estados de los nodos de la red compleja, puede determinarse por los valores propios diferentes de cero de la matriz de acoplamiento **A**. Se dice que la red dinámica (1)-(2) **sincroniza** (asintóticamente), sí [Wang 2002]:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t), \quad \text{cuando } t \to \infty.$$
 (6)

La arquitectura de acoplamiento establecida en (4) garantiza que la sincronización de los estados de los nodos de la red, corresponde a una solución $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{R}^n$, de un nodo aislado, es decir satisfacen

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = f\left(\mathbf{s}(t)\right),\tag{7}$$

donde la solución $\mathbf{s}(t)$, puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. Esto implica que, la estabilidad de la sincronización de los estados de

los nodos, es decir

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{s}(t), \tag{8}$$

de la red dinámica (1)-(2) está determinada por la dinámica de un nodo aislado, de la función no lineal f y de su solución $\mathbf{s}(t)$, del grado de acoplamiento c, de la matriz de conexiones Γ y de la matriz de acoplamiento \mathbf{A} .

En la figura 3, se puede observar gráficamente la estructura de un nodo aislado para el caso de una entrada y una salida, en la cual, la salida puede ser definida como $y_{i1} = g_i(\mathbf{x}_i)$, donde $g_i(\bullet)$ es en general, una función no lineal de los estados del nodo i. Sin embargo, en muchos casos, la señal de salida de interés coincide con una de las variables de estado. En este trabajo consideramos como salida de interés a $y_{i1} = x_{i1}$, es decir, el primer estado de cada nodo i.

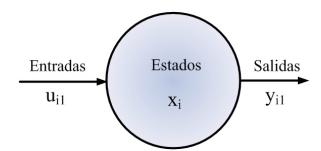


Figura 3: Representación gráfica de un nodo aislado i con entradas u_{i1} , estados \mathbf{x}_i y salidas y_{i1} .

II.1.1. Condiciones de sincronización

Teorema 1 [Wang 2002; Wang y Chen 2002b] Considere la red dinámica (1)-(2). Sean

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge \dots \ge \lambda_N,\tag{9}$$

los valores propios de la matriz de acoplamiento **A**. Suponiendo que existe una matriz diagonal (de dimensión $n \times n$) **D** > **0** y dos constantes $\bar{d} < 0$ y $\tau > 0$, tales que

$$[Df(\mathbf{s}(t)) + d\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D} [Df(\mathbf{s}(t)) + d\Gamma] \le -\tau \mathbf{I}_n$$
(10)

para todo $d \leq \bar{d}$, donde $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. Si, además, se cumple que

$$c\lambda_2 \le \bar{d},\tag{11}$$

entonces, la sincronización de los estados como expresado en (8), es exponencialmente estable.

Ya que $\lambda_2 < 0$ y $\bar{d} < 0$, la desigualdad (11) es equivalente a

$$c \ge \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right|. \tag{12}$$

Esta condición dice, que dado que $|\lambda_2|$ puede ser muy grande, implica que la red dinámica (1)-(2) pueda sincronizar con un valor de acoplamiento pequeño c. Así que, la sincronización de la red dinámica (1)-(2) con respecto a una configuración particular de acoplamiento (regular o irregular) se puede determinar por el segundo valor propio más grande de la matriz de acoplamiento \mathbf{A} . Más adelante veremos que la matriz de acoplamiento \mathbf{A} , guarda estrecha relación con la configuración de acoplamiento de la red compleja.

El lector interesado en profundizar en el material previamente presentado, puede consultar por ejemplo, las referencias [Wang 2002; Wang y Chen 2002a; Wang y Chen 2002b; Belykh et al. 2005; Posadas-Castillo et al. 2008a].

II.2. Estabilidad de redes complejas

En esta sección, se describen condiciones para garantizar estabilidad del error de sincronía de una red compleja definida por (1)-(2), contemplando distintos escenarios de acoplamiento.

Considerando: i) el caso de una red compleja que no tenga un nodo aislado, esto se ilustra en la figura 4b), es decir, la dinámica final de la red, corresponde a un nuevo estado caótico (esta situación, se ilustra en la figura 4c)) y ii) el caso de una red compleja que contiene un nodo aislado (nodo maestro), como se ilustra en la figura 5b), es decir, la dinámica final de la red, corresponde a la dinámica del nodo aislado (maestro), esta situación, se ilustra en la figura 5c). El estudio de estabilidad que se presenta a continuación, se basa en la teoría de Lyapunov.

Considerando una red compleja compuesta de N sistemas caóticos (nodos), los cuales, están acoplados a través de alguna función de acoplamiento, de la forma

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + v_i(x_1, x_2, ..., x_N), \quad i = 1, 2, ..., N,$$
(13)

donde $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{iN})^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados del *i*-ésimo nodo, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función no lineal del estado y v_i , i = 1, ..., N es una función de acoplamiento (señal de entrada al nodo *i*).

Para esta situación se toma en cuenta que los estados de los sistemas tienen la misma dimensión, lo cual es verdad en nuestro caso, donde tenemos sistemas idénticos como nodos.

Esto requiere decir que

$$v_i(x_1, x_2, ..., x_N) = 0,$$
 $i = 1, 2, ..., N.$ (14)

cuando los estados de la red (13) convergen, es decir, $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \dots = \mathbf{x}_N(t)$, cuando $t \to \infty$. Esto implica que la sincronización de los estados de cualquier solución $\mathbf{x}_i(t)$ de un nodo aislado, es también una solución de la red dinámica (13).

Los estados de cualesquiera dos nodos caóticos $\mathbf{x}_i(t)$, $\mathbf{x}_j(t)$ de la red satisfacen

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\| = 0, \qquad i, j = 1, 2, ..., N, \qquad i \neq j.$$
 (15)

Si se define el error de sincronía por $\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}, \ i = 1, 2, ..., N$, entonces, podemos obtener el siguiente sistema dinámico del error de sincronía

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \tilde{f}(\mathbf{x}_i, \ \mathbf{x}_{i+1}) + \tilde{v}_i, \qquad i = 1, 2, ..., N - 1,$$
 (16)

donde

$$\tilde{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}) = f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}_{i+1}), \ \tilde{v}_i = v_i(x_1, x_2, ..., x_N) - v_{i+1}(x_1, x_2, ..., x_N).$$
 (17)

Ahora, proponiendo

$$\tilde{v}_i = -\tilde{f}(\mathbf{x}_i, \ \mathbf{x}_{i+1}) - \alpha \mathbf{e}_i, \qquad \alpha > 0, \qquad i = 1, 2, ..., N - 1,$$
 (18)

entonces, el sistema del error (16) es globalmente asintóticamente estable alrededor de cero, es decir,

$$\mathbf{e}_{i}(t) \to 0, \qquad i = 1, 2, ..., N - 1,$$
 (19)

consecuentemente el objetivo (15) se cumple.

La condición anterior se puede demostrar por los siguientes argumentos:

Si la función $f(x_i)$ en (13) es conocida, entonces podemos escoger la función \tilde{v}_i en el sistema (16) como

$$\tilde{v}_i = -\tilde{f}(\mathbf{x}_i, \ \mathbf{x}_{i+1}) - \alpha \mathbf{e}_i, \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, ..., N - 1.$$
 (20)

Proponiendo una función candidata de Lyapunov como

$$V(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i, \tag{21}$$

la cual, es definida positiva y la derivada temporal de la función $V(\mathbf{e})$ corresponde a

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i \dot{\mathbf{e}}_i, \tag{22}$$

evaluando $\dot{V}(\mathbf{e})$ a través de las trayectorias del sistema dinámico del error (16), tenemos que

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i \left(\tilde{f}(x_i, x_{i+1}) + \tilde{v}_i \right),$$

y proponiendo a \tilde{v}_i como

$$\tilde{v}_i = -\tilde{f}(\mathbf{x}_i, \ \mathbf{x}_{i+1}) - \alpha \mathbf{e}_i, \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, ..., N-1,$$

entonces se tiene que

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i \left(\tilde{f}(\mathbf{x}_i, \ \mathbf{x}_{i+1}) - \tilde{f}(\mathbf{x}_i, \ \mathbf{x}_{i+1}) - \alpha \mathbf{e}_i \right),$$

simplificando llegamos a

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = -\alpha \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{e}_i^2, \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, ..., N-1,$$
 (23)

es decir, la derivada de la función de Lyapunov evaluada a través de las trayectorias del sistema diámico del error, es una función definida negativa. Por tanto, con base a la teoría de Lyapunov [Khalil 2002; Martynyuk 2007] el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable en forma global para el sistema dinámico del error (16). Con (23), se prueba que los estados de los nodos caóticos que conforman la red compleja sin nodo aislado sincronizan a un nuevo estado caótico, como se ilustra en la figura 4.

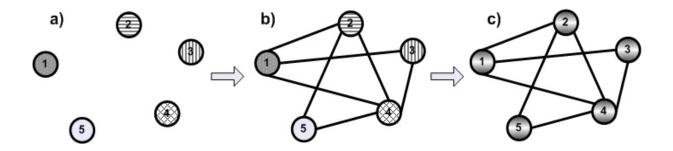


Figura 4: a) Cinco nodos caóticos desacoplados a ser sincronizados (cada nodo tiene su propia dinámica). b) Nodos de la red compleja con acoplamiento irregular, sin nodo maestro. c) Sincronización de los estados de los cinco nodos de la red (nuevo comportamiento colectivo caótico).

Si la función de acoplamiento es $v_k = 0$, entonces estamos considerando el caso

en que la red compleja tiene un nodo aislado (maestro), es decir, la dinámica final de todos los nodos de la red sincroniza con la dinámica de este nodo aislado o maestro y la función de acoplamiento (señal de entrada al nodo i), es de la forma

$$v_i = f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_i) + \alpha (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, ..., N - 1.$$

Esto implica que el nodo desacoplado k se toma como nodo maestro (por tanto, el estado final de los nodos de la red, debe de sincronizar con la dinámica de este nodo) y los otros nodos con acoplamiento son tomados como esclavos, en este caso, todos los estados de la red (13) sincronizarán con los estados del nodo k, es decir

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_k(t)\| = 0, \qquad i, \ k = 1, 2, ..., N.$$
 (24)

Esto significa, que se puede garantizar que los estados de la red sincronizan con los estados arbitrarios de un nodo desacoplado k. En particular, se requiere que los estados de los nodos de la red compleja, sincronizen con el estado del nodo aislado o maestro $\mathbf{s}(t)$ (como se ilustra en la figura 5), que satisface

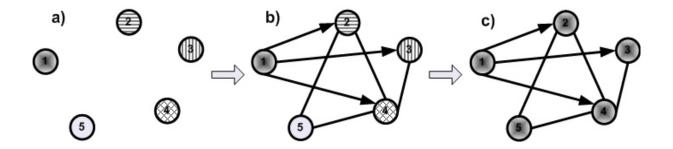


Figura 5: a) Cinco nodos caóticos desacoplados a ser sincronizados (cada nodo tiene su propia dinámica). b) Nodos de la red compleja con acoplamiento irregular, con nodo maestro (nodo 1). c) Sincronización de los estados de los cinco nodos de la red (el nodo maestro 1 impone su dinámica al resto de los nodos de la red).

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = f(\mathbf{s}(t)). \tag{25}$$

La dinámica de este nodo aislado o maestro, puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. Se escoge una función de acoplamiento de la forma

$$v_i = f(\mathbf{s}) - f(\mathbf{x}_i) + \alpha (\mathbf{s} - \mathbf{x}_i), \qquad \alpha > 0, \qquad i = 1, 2, ..., N - 1,$$
 (26)

tal que satisfaga la condición de sincronía (24) y que, por tanto, garantice la sincronización asintótica y global.

El lector interesado en profundizar en el contenido del segundo epígrafe del presente capítulo, relativo a la estabilidad de redes complejas, puede consultar las referencias [Wu y Chua 1995; Li y Chen 2004].

II.3. Conclusiones

En este capítulo se reportó la teoría empleada en este trabajo de tesis para sincronizar redes complejas.

Se consideró el escenario de una red compleja compuesta de N nodos idénticos, linealmente acopladas a través de la primera variable de estado de cada nodo.

Se describieron condiciones necesarias de acoplamiento para garantizar la sincronización de estas redes en un acoplamiento irregular (se identificó el valor mínimo del acoplamiento necesario c, para garantizar sincronización en la red compleja).

La sincronización de una red compleja con respecto a una configuración particular de acoplamiento (regular o irregular), se puede determinar por el segundo valor propio más grande (λ_2) de la matriz de acoplamiento **A**.

Se considera el caso en que la red compleja no tiene un nodo maestro y el caso en que tiene un nodo maestro. En ambos casos, se describieron las condiciones necesarias para garantizar sincronización asintótica y global, empleando la teoría de Lyapunov.

Capítulo III

Topología de redes complejas

En este capítulo se presentan diferentes arquitecturas o configuraciones de acoplamiento en las redes. En este trabajo de tesis, nos referiremos a la configuración de acoplamiento de las redes, a la forma en que están conectados los nodos que conforman la red. Podemos considerar que existen dos grupos principales dentro de las redes dinámicas complejas (acorde a la forma en que sus nodos están acoplados o conectados): i) redes complejas regulares (las cuales, siguen un patrón definido en la forma en que sus nodos estan conectados), por ejemplo: redes con un acoplamiento global entre sus nodos, redes con nodos acoplados en anillo y redes con nodos acoplados en estrella [Wang 2002] y ii) redes complejas irregulares (sin un patrón definido en la forma en que son conectados sus nodos) [Wang y Chen 2002b], ejemplo de éstas son las llamadas redes del mundo pequeño, redes aleatorias, redes de libre escala, etc.

En este trabajo se consideran redes complejas en una configuración irregular (sin nodo maestro y con nodo maestro). Además, a las redes complejas en una configuración regular (global, anillo y estrella). El mayor interés, es sincronizar redes complejas en los escenarios mencionados, cuando los nodos que las forman son caóticos.

III.1. Redes complejas irregulares

III.1.1. Topología sin nodo aislado o maestro

Sea G=(V,E) un grafo, que consiste de N=|V| nodos, con $V=V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ el conjunto de nodos y M=|E| conexión entre nodos, donde $E=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ el conjunto de nodos y M=|E| conexión entre nodos, donde $E=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ el conjunto de nodos y M=|E| conexión entre nodos, donde $E=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ el conjunto de nodos y M=|E| conexión entre nodos, donde $E=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ el conjunto de nodos y M=|E| conexión entre nodos, donde $E=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ el conjunto de nodos y M=|E| conexión entre nodos, donde $E=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ el conjunto de nodos y $M=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$ el conjunto de nodos y $M=\{v_1,v_2,\ldots,v_N\}$

 $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_M\}$ representa el conjunto de conexiones. En esta sección se considera una red compleja, donde todos los nodos están conectados sin un patrón definido. Para esta red compleja en particular, todos los nodos estan conectados y son finitos.

Existen dos matrices principales de interés asociadas a un grafo G: i) la matriz de adyacencia (1, 0), A(G): matriz de $N \times N$, en la cual, los elementos a_{ij} estan dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad (i,j) \in E(G), \\ 0, & \text{de otra forma,} \end{cases}$$
 (27)

donde $(i, j) \in E(G)$ significa que el nodo i esta conectado con el nodo j. Para un grafo simple sin auto conexiones, la matriz de adyacencia debe tener ceros en la diagonal principal. Y ii) una matriz diagonal llamada matriz de grado D(G), de dimensión $N \times N$. Los elementos de esta matriz d_{ij} están dados por

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{de otra forma,} \end{cases}$$
 (28)

donde d_i es el grado del nodo i y dado que en esta configuración de acoplamiento, cada nodo i esta conectado sin un patrón definido, entonces tenemos que d_i es la suma de los elementos de la fila i de la matriz de adyacencia A(G).

La matriz laplaciana de un grafo L(G) con N nodos, es una matriz de dimensión $N \times N$, L(G) = D(G) - A(G), con elementos l_{ij} determinados como

$$l_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad (i,j) \in E(G), \\ d_i, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$
 (29)

Cuando se tiene una red compleja con acoplamiento irregular sin nodo aislado o maestro, la matriz laplaciana no toma una forma definida (como más adelante veremos, esto no ocurre cuando se presenta acoplamientos regulares) y por tanto, sus propiedades

son diferentes para cada configuración de acoplamiento. Permítasenos calcular la matriz laplaciana L(G) = D(G) - A(G), para una red compleja con acoplamiento irregular de 5 nodos, como se ilustra en la figura 6, la cual, corresponde a una matriz de acoplamiento

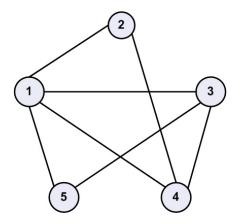


Figura 6: Configuración de una red compleja con acoplamiento irregular con 5 nodos (N=5).

A, esto es

$$\mathbf{A} = L\left(G
ight) = \left(egin{array}{cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}
ight) - \left(egin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}
ight),$$

de esta manera, la matriz de acoplamiento $\bf A$ para una red con acoplamiento irregular como la mostrada en la figura $\bf 6$, es dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios para esta configuración de acoplamiento son: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,5858,\ \lambda_3=-3,\ \lambda_4=-4,41$ y $\lambda_5=-5.$

III.1.2. Topología con nodo aislado o maestro

Una red compleja con una configuración de acoplamiento irregular con un nodo aislado o maestro, tiene un nodo aislado (que no recibe influencia del resto de la red, es decir, solo tiene salidas pero no entradas), el cual, en caso de alcanzar sincronización, impone su dinámica, por compleja que esta sea (peródica, caótica, hipercaótica, etc.), al resto de los nodos que conforman la red. Para este caso, la matriz laplaciana no toma una forma definida (al igual que el caso del acoplamiento irregular sin nodo aislado) y por tanto, sus propiedades son diferentes para cada configuración de acoplamiento.

Se calcula la matriz laplaciana para este tipo de arquitectura de acoplamiento L(G) = D(G) - A(G), para una red compleja con acoplamiento irregular con 5 nodos, en la cual, el nodo 1 es considerado aislado o maestro. Este escenario se ilustra en la figura 7.

La matriz de acoplamiento ${\bf A}$ para una red con acoplamiento irregular como se ilustra en la figura 6, es dada por

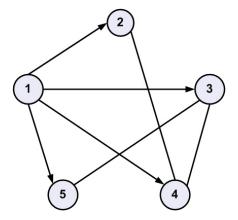


Figura 7: Configuración de una red compleja con acoplamiento irregular con 5 nodos (N = 5), el la cual, el nodo 1, es considerado aislado o maestro.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios para esta configuración de acoplamiento son: $\lambda_1=0,~\lambda_2=-1,$ $\lambda_3=-1,58,~\lambda_4=-3$ y $\lambda_5=-4,41.$

III.2. Redes complejas regulares

Las configuraciones de acoplamiento regulares comunmente estudiadas son: redes con acoplamiento global, redes acopladas en anillo y redes acopladas en estrella [Wang 2002]. En este trabajo de tesis se consideran estas tres principales configuraciones. En todos los casos tratados, se consideran unicamente redes complejas con nodos idénticos.

III.2.1. Acoplamiento global

Se considera una red compleja donde todos los nodos estan conectados unos con otros. Este tipo de red compleja, con acoplamiento regular son reportadas en la literatura como redes con *acoplamiento global*. Además, para esta red compleja en particular, todos los nodos estan conectados y son finitos.

La matriz de adyacencia (27) y la matriz diagonal o matriz de grado (28), se calculan como en el caso de las redes complejas con acoplamiento irregular, definidas anteriormente. Particularizando para este caso de acoplamiento global, tenemos que en esta configuración de acoplamiento, cada nodo i esta conectado con N-1 nodos.

Los elementos de la **matriz laplaciana** de un grafo L(G) con N nodos acoplados globalmente, es una matriz de dimensión $N \times N$; L(G) = D(G) - A(G), con elementos l_{ij} definidos como

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E(G), \\ d_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases}$$

en donde tenemos $d_1 = d_2 = \cdots = d_N = N - 1$.

Se calcula la matriz laplaciana L(G) = D(G) - A(G), para la mencionada red compleja con acoplamiento global entre sus nodos, la cual, corresponde a la siguiente matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{qc} , es decir

$$\mathbf{A}_{gc} = L(G) = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

de esta manera, la matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{gc} para una red con acoplamiento global, es dada por

$$\mathbf{A}_{gc} = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & N-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & N-1 \end{pmatrix}.$$
(30)

Note que la suma de los elementos de las columnas de la matriz laplaciana es cero. Esta matriz tiene un valor propio en 0 y los otros valores propios en -N. Así que, el segundo valor propio mayor de esta matriz laplaciana es $\lambda_{2gc} = -N$ que disminuye a $-\infty$ cuando $N \to \infty$, esto se expresa como

$$\lim_{N \to \infty} \lambda_{2gc} = -\infty. \tag{31}$$

La configuración de una red compleja con acoplamiento global, significa que cualesquiera dos nodos están conectados directamente. Esta situación para cinco nodos (N=5), se ilustra en la figura 8. La matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{gc} para una red con

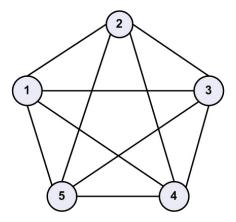


Figura 8: Configuración de una red compleja con acoplamiento global con 5 nodos (N=5).

acoplamiento global como se ilustra en la figura 8, es dada por

$$\mathbf{A}_{gc} = \left(egin{array}{ccccc} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{array}
ight).$$

III.2.2. Acoplamiento en anillo

Una red dinámica con acoplamiento en anillo, con una condición de acotamiento periódica, consiste de N nodos acoplados en anillo y cada nodo i es adyacente a los nodos vecinos $i \pm 1$, $i \pm 2$, $i \pm \frac{K}{2}$ con K un número par.

Además, para esta red compleja en particular, todos los nodos estan conectados y son finitos.

La matriz de adyacencia (27) y la matriz diagonal o matriz de grado (28), se calculan como en el caso de las redes complejas con acoplamiento irregular, definidas anteriormente. Particularizando para este caso, en la red compleja con acoplamiento en anillo cada nodo i esta conectado con su nodo vecino $i \pm 1$, $i \pm 2$, $i \pm \frac{K}{2}$.

La matriz laplaciana de un grafo L(G) con N nodos acoplados en anillo, es una matriz de dimensión $N \times N$; L(G) = D(G) - A(G), con elementos l_{ij} definidos como

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E(G), \\ d_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Para el caso particular en que K=2, entonces tenemos $d_1=d_2=\cdots=d_N=K$.

La matriz laplaciana L(G), para la mencionada red compleja con acoplamiento en

anillo, corresponde a la matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{nc} , dada por

$$\mathbf{A}_{nc} = L(G) = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

de esta manera, la matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{nc} para una red con acoplamiento global, es dada por

$$\mathbf{A}_{nc} = \begin{pmatrix} K & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & K & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & K \end{pmatrix}.$$

Note que la suma de los elementos de las columnas de la matriz laplaciana es cero. En la matriz de acoplamiento A_{nc} , el segundo valor propio mayor puede ser encontrado mediante

$$\lambda_{2nc} = -4\sum_{i=1}^{\frac{K}{2}} sen^2 \left(\frac{j\pi}{N}\right),\,$$

puede observarse claramente, que para un valor fijo de K, λ_{2nc} disminuye a cero cuando N tiende a infinito, es decir

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{2nc}=0.$$

La configuración de una red compleja con acoplamiento de sus nodos en anillo, para cinco nodos (N = 5) y K = 2, se ilustra en la figura 9. La matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{nc} para una red con acoplamiento en anillo como se ilustra en la figura 9, es dada por

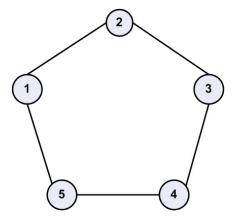


Figura 9: Configuración de una red compleja con acoplamiento en anillo con 5 nodos (N=5) y K=2.

$$\mathbf{A}_{nc} = \left(egin{array}{ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}
ight).$$

III.2.3. Acoplamiento en estrella

Una red dinámica con acoplamiento en estrella para sus nodos, consiste en acoplar un sólo nodo (llamado común o central) de la red compleja con los restantes N-1 nodos. Para esta red compleja en particular, todos los nodos están conectados y son finitos.

La matriz de adyacencia (27) y la matriz diagonal o matriz de grado (28), se calculan como en el caso de las redes complejas con acoplamiento irregular, tratadas anteriormente.

La matriz laplaciana de un grafo L(G) con N nodos acoplados en estrella, es una

matriz de dimensión $N \times N$; así L(G) = D(G) - A(G) con elementos l_{ij} definidos como

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (i,j) \in E(G), \\ d_i & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

En la configuración de acoplamiento en estrella, tenemos $d_1=N-1,\,d_2=\cdots=d_N=1.$

Calculando la matriz laplaciana como L(G) = D(G) - A(G), para la mencionada red compleja con acoplamiento en estrella, la cual, corresponde a la matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{nc} , esto es

$$\mathbf{A}_{st} = L\left(G\right) = \left(egin{array}{ccccc} -N+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ dots & \ddots & \ddots & \ddots & dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}
ight) - \left(egin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ dots & \ddots & \ddots & \ddots & dots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}
ight),$$

de esta manera, la matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{nc} para una red con acoplamiento en estrella, es dada por

$$\mathbf{A}_{st} = \begin{pmatrix} -N+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que la suma de los elementos de las columnas de la matriz laplaciana es cero. Los valores propios de la matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{st} , son $\{0, -N, -1, \cdots, -1\}$, el segundo valor propio mayor es

$$\lambda_{2nc} = -1$$
,

puede observarse que el valor de λ_{2nc} no depende del tamaño (número de nodos) de la red.

La configuración de una red compleja con acoplamiento en estrella, para 5 nodos (N=5), se ilustra en la figura 10.

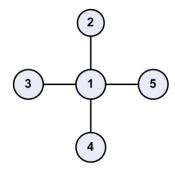


Figura 10: Ilustración de una red con configuración de acoplamiento en estrella con 5 nodos (N = 5).

La matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{st} para una red con acoplamiento en estrella para sus 5 nodos, como se ilustra en la figura 10, es dada por

$$\mathbf{A}_{st} = \left(\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Remitimos al lector interesado en profundizar en los temas tratados en este capítulo, a los trabajos [Wang 2002; Wang y Chen 2002a; Wang y Chen 2002b; Posadas-Castillo et al. 2008a; Posadas-Castillo et al. 2008c].

III.2.4. Conclusiones

En este cápitulo se mostraron las topologías o configuraciones de acoplamiento más comunes de las redes complejas.

Las redes complejas se clasificaron en dos grandes grupos, por la forma en que estan conectados los nodos en la red. Redes complejas regulares sin nodo aislado y con nodo aislado y redes complejas regulares (globales, anillo y estrella).

Una red compleja con acoplamiento irregular (sin nodo aislado y con nodo aislado), tiene una matriz de acoplamiento sin una forma definida, por tanto, sus propiedades son diferentes para cada configuración de acoplamiento. En la matriz de acoplamiento \mathbf{A} , el segundo valor propio λ_2 , depende de las conexiones de la red compleja.

En una red con acoplamiento global, la matriz de acoplamiento tiene un valor propio en 0 y los otros valores propios en -N. El segundo valor propio mayor la matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{gc} es $\lambda_{2gc} = -N$, que se disminuye a $-\infty$ cuando $N \to \infty$. Esto quiere decir, que la sincronización no depende del número de nodos que conforman la red.

En una red con acoplamiento en anillo, puede observarse claramente que para un valor fijo de K, λ_{2nc} decrementa a cero cuando N tiende a infinito. Esto quiere decir que λ_{2nc} de la matriz \mathbf{A}_{nc} , depende del número de nodos que conforman a la red y que la sincronización de una red compleja con este tipo de acoplamiento se puede perder, conforme el número de nodos se incrementa en la red compleja.

Una red con acoplamiento en estrella tiene los valores propios de la matriz de acoplamiento \mathbf{A}_{st} , en $\{0, -N, -1, \cdots, -1\}$, el segundo valor propio mayor es $\lambda_{2nc} = -1$. Puede observarse claramente, que el valor de λ_{2nc} no depende del tamaño de la red. En este caso, se puede garantizar la sincronización de la una red con acoplamiento en estrella, no dependiendo del número de nodos que conformen la red compeja.

Capítulo IV

Sincronización de redes de circuitos de Chua

En este capítulo, se presenta la sincronización de un conjunto de circuitos de Chua, actuando como nodos y operando en régimen caótico. Se consideran redes complejas con circuitos de Chua, los cuales, serán acoplados a través de la primer variable de estado de cada nodo. Los objetivos por alcanzar son, sincronizar el comportamiento colectivo de los circuitos de Chua, impuesto por la dinámica particular de un nodo maestro al resto de los nodos (esclavos) de la red compleja. Se Ilustran redes de circuitos de Chua en diferentes arquitecturas de acoplamiento, como son: global, anillo y estrella.

IV.1. Modelo matemático del circuito de Chua

El circuito de Chua [Kennedy 1992] se muestra en la figura 11, este es un oscilador que exhibe una variedad grande de bifurcaciones y atractores caóticos. El circuito tiene tres elementos lineales que retienen energía (un inductor L y dos capacitores C1 y C2), una resistencia lineal R y una resistencia no lineal N_R .

Considere al circuito de Chua como nodo fundamental para construir redes con diferentes arquitecturas de acoplamiento con el propósito de sincronizarlos. El circuito de Chua que se muestra en la figura 11 es modelado por las ecuaciones de estado

$$\begin{pmatrix}
\frac{dv_{C1}}{dt} \\
\frac{dv_{C2}}{dt} \\
\frac{di_L}{dt}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{RC1} \left(v_{c_2} - v_{c_1} \right) - \frac{1}{C1} g \left(v_{c_1} \right) \\
\frac{1}{RC2} \left(v_{c_2} - v_{c_1} \right) + \frac{1}{C2} i_L \\
-\frac{1}{L} v_{c_2}
\end{pmatrix},$$
(32)

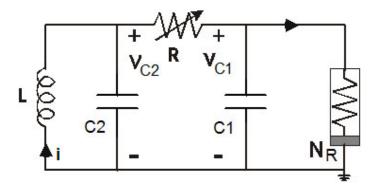


Figura 11: Circuito de Chua.

donde v_{c_1} , v_{c_2} e i_L son el voltaje del capacitor C1, el voltaje del capacitor C2 y la corriente a través del inductor L, respectivamente y $g(v_{c_1})$ es la curva característica $V_{C1} - i_{NR}$ del diodo de Chua NR, definida por

$$g(v_{c_1}) = m_0 v_{c_1} + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) (|v_{c_1} + B_p| - |v_{c_1} - B_p|).$$
(33)

Después de una normalización y manipulación algebráica, el modelo del circuito de Chua es dado por [Madan 1993]:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(x_2 - x_1 - f(x_1) \right) \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ -\beta x_2 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

con la función no lineal definida como

$$f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|).$$
(35)

El circuito de Chua (34)-(35) con parámetros $\alpha=10,\,\beta=14,87,\,a=-1,27$ y b=-0,68 genera los atractores caóticos, que se muestran en la figura 12.

El modelo matemático de la red compleja formada por N circuitos de Chua, tiene

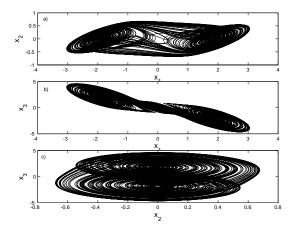


Figura 12: Atractores caóticos generados por el circuito de Chua: a) x_1 vs x_2 a) x_1 vs x_3 y c) x_2 vs x_3 .

la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(x_{i2} - x_{i1} - f(x_{i1}) \right) + u_{i1} \\ x_{i1} - x_{i2} + x_{i3} \\ -\beta x_{i2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, ..., N,$$
(36)

$$f(x_{i1}) = bx_{i1} + \frac{1}{2}(a-b)(|x_{i1}+1|-|x_{i1}-1|),$$
(37)

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_{j1}. (38)$$

Con propósitos ilustrativos y de facilitar la exposición, en particular, consideraremos N=4, es decir, tenemos 4 circuitos de Chua como nodos formando la red "compleja". Considere el modelo de la red compleja descrito por (36)-(38).

A continuación se muestra la sincronización de estas redes considerando varios escenarios de acoplamiento.

IV.2. Ejemplos ilustrativos

Caso 1 (Acoplamiento global) Considere una red compleja construida por circuitos de Chua (36)-(38) con un acoplamiento global, como se muestra en la figura 13.

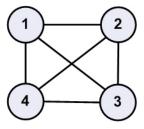


Figura 13: Red de 4 nodos (circuitos de Chua) con acoplamiento global.

Para esta red, la matriz de acoplamiento (3), está dada por

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Los valores propios correspondientes son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -4$ y $\lambda_4 = -2,2204E-16$, con un valor en el acoplamiento de c = 10 y con condiciones iniciales: $x_{11}(0) = 1$, $x_{21}(0) = -1$, $x_{31}(0) = 3$, $x_{41}(0) = -3$. Con estos valores el teorema 1 garantiza sincronización completa (es decir, sincronizan todos los estados de los 4 nodos) de la red compleja [Posadas-Castillo *et al.* 2006c]. En la figura 14 se muestra la sincronización del primer estado de los 4 nodos (x_{11} , x_{21} , x_{31} y x_{41}). La sincronización de los 4 estados de los 4 circuitos de Chua se alcanza en un tiempo aproximado de 7,5 segundos.

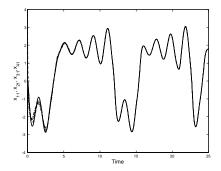


Figura 14: Sincronización de los primeros estados x_{11} , x_{21} , x_{31} y x_{41} en la red con acoplamiento global de 4 circuitos de Chua.

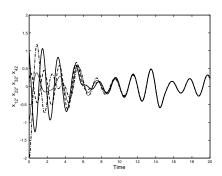


Figura 15: Sincronización de los segundos estados x_{12} , x_{22} , x_{32} y x_{42} en la red con acoplamiento global de 4 circuitos de Chua.

La figura 15 muestra la sincronización del segundo estado de los 4 nodos, es decir, x_{12} , x_{22} , x_{32} y x_{42} de los circuitos de Chua en un tiempo aproximado de 15 segundos.

La figura 16 muestra la sincronización del tercer estado de los 4 nodos, es decir, x_{13} , x_{23} , x_{33} y x_{43} . La sincronización de estos estados del circuito de Chua se logra aproximadamente en 15 segundos y el tiempo de sincronización en la red, para este caso, es el mismo. Por tanto, el tiempo de sincronía de la red es aproximadamente 15 segundos.

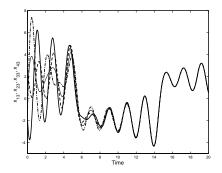


Figura 16: Sincronización de los terceros estados x_{13}, x_{23}, x_{33} y x_{43} en la red con acoplamiento global de 4 circuitos de Chua.

Caso 2 (Acoplamiento en anillo) Considere una red "compleja" construída con 4 circuitos de Chua (36)-(38) con un acoplamiento en anillo [Posadas-Castillo *et al.* 2006c], esta arquitectura se ilustra en la figura 17.

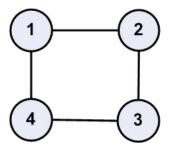


Figura 17: Red "compleja" formada con 4 nodos acoplados en una configuración en anillo.

La matriz de acoplamiento (3) está dada por

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

los correspondientes valores propios son: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = -2$ y $\lambda_4 = 0$, con un acoplamiento de c = 10 y condiciones iniciales las mismas empleadas que en el caso anterior, la sincronización de los estados x_{11}, x_{21}, x_{31} y x_{41} se muestra en la figura 18. Se puede observar en esta figura, que el tiempo de sincronización para el primer estado

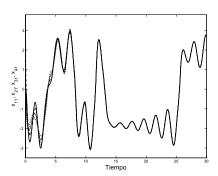


Figura 18: Sincronización de los primeros estados x_{11}, x_{21}, x_{31} y x_{41} de los 4 nodos de la red, acoplados en anillo de 4 circuitos de Chua.

 $(x_{11}, x_{21}, x_{31} y x_{41})$ es aproximadamente de 20 segundos.

Caso 3 (Acoplamiento irregular) Considere una red de circuitos de Chua (36)-(38) con acoplamiento irregular [Posadas-Castillo *et al.* 2006c], como se muestra en la figura 19, donde el nodo 1 esta aislado (y por tanto actuará como maestro) y este nodo impondrá su dinámica a los restantes 2, 3 y 4.

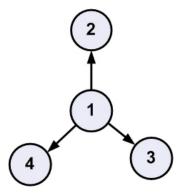


Figura 19: Red "compleja" de 4 nodos con acoplamiento en estrella con nodo aislado 1, que impone su dinámica caótica al resto de la red (nodos 2, 3 y 4).

Para esta red, la matriz de acoplamiento (3) está dada por

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\tag{41}$$

los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$, con un valor en el acoplamiento de c = 10 y empleamos las mismas condiciones iniciales que en los casos anteriores, con estos valores, el teorema 1 garantiza sincronización completa de la red.

En la figura 20 podemos observar, que el tiempo de sincronía para los primeros estados de la red de 4 circuitos de Chua $(x_{11}, x_{21}, x_{31} \text{ y } x_{41})$ es aproximadamente de 20 segundos.

IV.3. Conclusiones

Se obtuvo sincronía completa de 4 circuitos de Chua con diferentes arquitecturas de acoplamiento. Se utilizó acoplamiento global, anillo e irregular, para la red "compleja" de 4 circuitos de Chua. Mostramos que para un valor apropiado de acoplamiento c, la

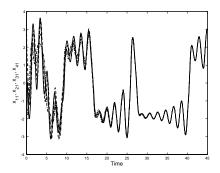


Figura 20: Sincronización de los primeros estados x_{11}, x_{21}, x_{31} y x_{41} , se muestra el primer estado de cada nodo.

sincronía se alcanza y el tiempo de sincronía se controla al variar este parámetro. Por medio de cálculo numérico, se ilustró la sincronía completa, en una red de 4 circuitos de Chua en diferentes configuraciones de acoplamiento.

Capítulo V

Sincronización de redes neuronales

Las estructuras de redes complejas se han observado en física, biología, economía, electrónica, ciencias computacionales, etc. En particular, las redes neuronales (CNNs, por sus siglas en ingles), constituyen un importante ejemplo en tales casos. La CNN es un sistema no lineal definido por un acoplamiento entre sistemas dinámicos idénticos llamados células [Chua 1998]. Las CNNs tienen muchas aplicaciones en procesamiento de imágenes, video, robótica, visión biológica, etc. [Werblin et al. 1994]. Además, las CNNs pueden bajo ciertas condiciones de trabajo, mostrar un conjunto grande de dinámicas extremadamente complejas (caos e hipercaos). Cuando esto último ocurre, se dice que es una red neuronal caótica e hipercaótica, respectivamente. En el contexto de las CNNs, hablaremos de células refiriendonos a los nodos que conforman las redes complejas.

V.1. Red neuronal caótica

En esta sección, se presentan dos ejemplos ilustrativos de sincronización de múltiples CNNs. A continuación primeramente mostramos un material introductorio sobre CNNs.

Definición (red neuronal, CNN). Una CNN es un arreglo espacial de células acopladas, cada célula es un sistema dinámico, con una entrada y estados evolucionando acorde a sus leyes dinámicas [Chua 1998].

La arquitectura de una CNN en tres dimensiones, tiene matemáticamente en cada célula C_{ijk} , una ubicación espacial (i, j, k), constituye un sistema dinámico, en el cual, los estados evolucionan acorde a algunas **ecuaciones de estado** prescritas. Sus dinámicas son acopladas sólo entre vecinos que se encuentren dentro de una **esfera de influencia** S_{ijk} , centrada en (i, j, k). En el caso de dos dimensiones, se puede utilizar doble subíndice, las variables para una célula aislada son: la entrada $u_{ij}(t) \in \mathbb{R}^u$, el umbral $z_{ij}(t) \in \mathbb{R}^z$, los estados $x_{ij}(t) \in \mathbb{R}^x$ y la salida $y_{ij}(t) \in \mathbb{R}^y$. Una CNN se dice que esta aislada, si ésta no está acoplada o conectada con otras células (ver figura 21).

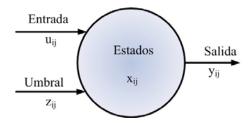


Figura 21: Célula aislada: entrada u_{ij} , umbral z_{ij} , estados $x_{ij} \in \mathbb{R}^x$ y salida y_{ij} para una CNN en dos dimensiones.

En este trabajo, asumiremos que las células aisladas C_{ij} son idénticas y por simplicidad, consideraremos que $z_{ij}(t)$ es una constante. Además, asumimos que, para cualquier $x_{ij}(t_0)$ en $t = t_0$, cualquier umbral $z_{ij}(t)$ y cualquier entrada $u_{ij}(t)$, los estados de cada célula aislada C_{ij} se asume que evolucionan para $t \geq t_0$ como un conjunto no autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias como sigue

$$\dot{x}_{ij} = f(x_{ij}, z_{ij}, u_{ij}), \quad i = 1, 2, ..., M, \quad j = 1, 2, ..., N,$$

$$y_{ij} = g_{ij}(x_{ij}),$$

donde $g_{ij}(\cdot)$ es una función no lineal del estado. Sin embargo, en muchos casos, alguna salida de interés coincide con el estado, $y_{ij}(t) = x_{ij}(t)$.

Las ecuaciones normalizadas de una CNN más utilizadas en la literatura, son

propuestas en [Chua y Yang 1988] para un arreglo de $M \times N$, definidas por

$$\dot{x}_{ij} = -x_{ij} + z_{ij} + \sum_{kl \in S_{ij}(r)} a_{kl} \ y_{kl} + \sum_{kl \in S_{ij}(r)} b_{kl} \ u_{kl}, \quad i = 1, 2, ..., M, \ j = 1, 2, ..., N, \quad (42)$$

$$y_{ij} = f(x_{ij}), (43)$$

donde $S_{ij}(r)$ es la esfera de influencia de radio r; $\sum_{kl \in S_{ij}(r)} a_{kl} y_{kl} y \sum_{kl \in S_{ij}(r)} b_{kl} u_{kl}$ son los acoplamientos locales entre células vecinas y

$$f(x_{ij}) = \frac{1}{2} (|x_{ij} + 1| - |x_{ij} - 1|) = \begin{cases} 1, & x_{ij} \ge 1 \\ x_{ij}, & |x_{ij}| < 1 \\ -1, & x_{ij} \le -1 \end{cases}$$

Para el caso particular donde M=3 y N=4, las ecuaciones (42)-(43) adquieren la forma simple de un arreglo CNN de extensión 3×4 como sigue

$$\dot{x}_{1} = -x_{1} + a_{00}f(x_{1}) + a_{01}f(x_{2}) + b_{00}u_{1}(t), \qquad (44)$$

$$\dot{x}_{2} = -x_{2} + a_{0,-1}f(x_{1}) + a_{00}f(x_{2}) + b_{00}u_{2}(t),$$

$$y_{1} = f(x_{1}),$$

$$y_{2} = f(x_{2}).$$

Ahora considere una CNN reportada en [Chua 1998] de segundo orden y no autónoma. Si $a_{00} = 2$, $a_{0,-1} = -a_{0,1} = 1.2$, $b_{00} = 1$, $u_1(t) = 4.04 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y $u_2(t) = 0$, entonces la ecuación (44) adquiere la forma

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2f(x_1) - 1.2f(x_2) + 4.04 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right),$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + 1.2f(x_1) + 2f(x_2),$$
(45)

con una función no lineal definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|) = \begin{cases} 1, & x \ge 1 \\ x, & |x| < 1 \\ -1, & x \le -1. \end{cases}$$
 (46)

La figura 22 muestra el plano de fase del atractor caótico de la CCN de 3×4 definida por (45)-(46). Las condiciones iniciales empleadas son $(x_1(0), x_2(0)) = (0.1, -0.1)$.

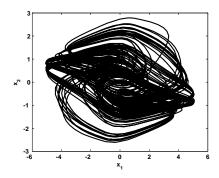


Figura 22: Atractor caótico generado por la CNN de dimensión 3×4 (45)-(46) y proyectado sobre el plano (x_1, x_2) .

La red compleja de N nodos CNNs diseñada en este caso, toma la siguiente forma,

$$\dot{x}_{i1} = -x_{i1} + 2f(x_{i1}) - 1.2f(x_{i2}) + 4.04 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) + u_{i1},$$

$$\dot{x}_{i2} = -x_{i2} + 1.2f(x_{i1}) + 2f(x_{i2}),$$

$$f(x_{i1}) = \frac{1}{2}(|x_{i1} + 1| - |x_{i1} - 1|),$$

$$f(x_{i2}) = \frac{1}{2}(|x_{i2} + 1| - |x_{i2} - 1|),$$

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_{j1}, \quad i = 1, 2, ..., N.$$
(47)

En particular, consideraremos N=5, es decir, tenemos 5 células CNNs constituyendo la red "compleja" por sincronizar.

V.2. Ejemplos ilustrativos

Caso 1 (Acoplamiento global) Todas las células tienen comportamiento caótico, la matriz de acoplamiento (3) está dada por

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

los valores propios correspondientes son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -5$ y $\lambda_5 = 0$, con un valor de acoplamiento de c = 500, con condiciones iniciales: $x_{11}(0) = 0.1$, $x_{21}(0) = 0.21$, $x_{31}(0) = 0.31$, $x_{41}(0) = 0.4$ y $x_{51}(0) = 0.5$. Con estos valores el teorema 1 garantiza sincronización de la red "compleja" (Posadas-Castillo *et al.* 2007b). La figura 23, muestra la sincronización del primer estado de las 5 células, es decir, $x_{i1}(t)$, i = 1, 2, ..., 5. También se muestra el comportamiento colectivo de la red "compleja", a través del plano de fase x_{11} versus x_{12} .

Caso 2 (Acoplamiento irregular) Una célula aislada (célula maestra) con comportamiento caótico y el resto de las células tienen un comportamiento periódico, en este caso la matriz de acoplamiento (3) está dada por

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

los valores propios correspondientes son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -5$, $\lambda_4 = -1$ y $\lambda_5 = 0$, con un valor de acoplamiento de c = 500, condiciones iniciales: $x_{11}(0) = 0.1$, $x_{21}(0) = 0.21$, $x_{31}(0) = 0.31$, $x_{41}(0) = 0.4$ y $x_{51}(0) = 0.5$. Con estos valores el teorema 1 garantiza la sincronización de la red "compleja" [Posadas-Castillo *et al.* 2007b]. La figura 24 ilustra

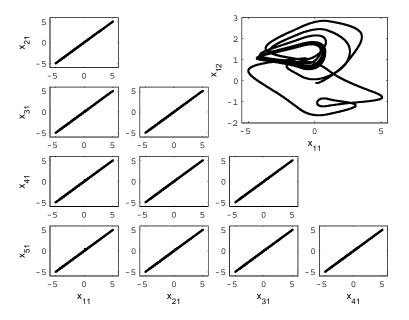


Figura 23: Sincronización del primer estado de las cinco CNNs, $x_{i1}(t)$, i = 1, 2, ..., 5 y el plano de fase (x_{11}, x_{12}) del comportamiento de la red con arquitectura en acoplamiento global.

la sincronización de los primeros estados de las 5 células, es decir, $x_{i1}(t)$, i = 1, 2, ..., 5. También, se muestra el comportamiento colectivo de las células en la red, en el plano de fase de x_{11} versus x_{12} .

Es importante mencionar que para este caso, los segundos estados de las 5 células de la red compleja $(x_{i2}(t), i = 1, 2, ..., 5)$ no es posible obtener sincronización exacta en todas las células. Sin embargo, los errores de sincronización correspondientes $\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_{i+1}(t)$, i = 1, 2, ..., 4 permanecen acotados.

Caso 3 Osciladores con un tiempo de retardo, representan ejemplos de generadores caóticos. Ahora, el sistema considerado tiene una CNN con retardo de tiempo [Lu et

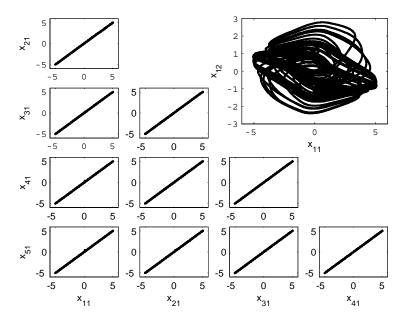


Figura 24: Sincronización del primer estado de las cinco CNNs, $x_{i1}(t)$, i = 1, 2, ..., 5 con arquitectura irregular de acoplamiento y el comportamiento de la red compleja en el plano de fase (x_{11}, x_{12}) .

al. 1998] para cada célula, como sigue

$$\dot{x}(t) = 0.001x(t) - 3.8(|x_{\tau} + 1| - |x_{\tau} - 1|) + 2.85\left(\left|x_{\tau} + \frac{4}{3}\right| - \left|x_{\tau} - \frac{4}{3}\right|\right)$$
 (50)

donde $x_{\tau} = x (t - \tau)$. La solución de (50) tiene dimensión infinita, con condiciones iniciales como una función continua definida en el intervalo cerrado $[-\tau, 0]$. Considerando $\tau = 1$ y condiciones iniciales como una función constante igual a 0.5 en [-1, 0] y estados iniciales x(0) = -1. Se muestra en la figura 25 el atractor caótico de la CNN con retardo de tiempo proyectado sobre el plano (x, x_{τ}) .

Una red compleja compuesta con N CNNs con retardo de tiempo diseñada en este ejemplo, toma la siguiente forma

$$\dot{x}_{i}(t) = 0.001x_{i}(t) - 3.8(|x_{\tau i} + 1| - |x_{\tau i} - 1|) + 2.85\left(\left|x_{\tau i} + \frac{4}{3}\right| - \left|x_{\tau i} - \frac{4}{3}\right|\right) + u_{i}, (51)$$

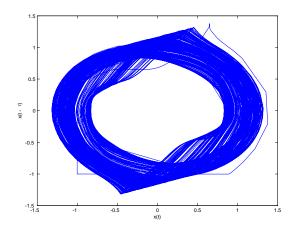


Figura 25: Plano de fase de la dinámica de la CNN con retardo, en el plano (x, x_{τ}) .

para i=1,2,...,N, con estado $x_{\tau i}=x_{i}\left(t-\tau \right)$ y una entrada definida por

$$u_i = c \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_{j1}. (52)$$

Considere en particular N=5, es decir, tenemos 5 células que componen la red "compleja", acopladas globalmente. Para este caso todas las células en la red "compleja" tienen comportamiento caótico, la matriz de acoplamiento (3) está dada por

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$(53)$$

los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -5, \lambda_4 = -1$ y $\lambda_5 = 0$, con un valor de acoplamiento de c = 1, condiciones iniciales: $x_{11}(0) = -1, x_{21}(0) = -1.1$, $x_{31}(0) = -1.2, x_{41}(0) = 1$ y $x_{51}(0) = 1.1$. Con estos valores el teorema 1, garantiza la sincronización de la red "compleja" [Posadas-Castillo *et al.* 2008c]. La figura 26 muestra la sincronización del primer estado de las cinco células, $x_{i2}(t)$, i = 1, 2, ..., 5. Además,

ilustra el comportamiento colectivo de las células en la red, mediante el plano de fase x_{11} versus x_{12} .

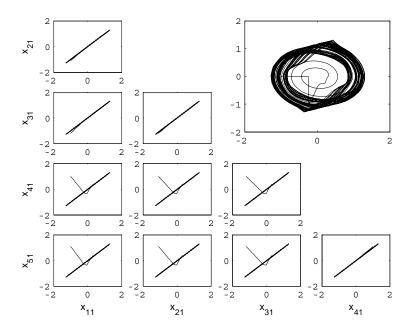


Figura 26: Sincronización de los estados de las cinco células, $x_{i1}(t)$, i = 1, 2, ..., 5 y el comportamiento de la red compleja en el plano de fase (x_{11}, x_{12}) .

V.3. Conclusiones

La sincronización de múltiples CNNs caóticas, conformando una red compleja con diferentes topologías fue obtenida y mostrada a través de varios ejemplos ilustrativos. Se alcanzó la sincronización considerando células en una red compleja, utilizando un acoplamiento global.

Se mostró que la sincronización de una red compleja conformada por CNNs caóticas es posible desde este punto de vista.

Capítulo VI

Sincronización de redes de láseres caóticos

La dinámica caótica puede ser orservada en diversos sistemas no lineales. Como se observa en capítulos anteriores, diferentes esquemas de sincronización y aplicaciones han sido propuestas para estos sistemas. Estos esquemas fueron primeramente estudiados utilizando circuitos electrónicos osciladores y mas recientemente, con el incremento de velocidad y capacidad en la transmisión de datos, se han considerado sistemas ópticos, fundamentalmente constituidos por fibras ópticas y láseres.

Básicamente podemos definir a un láser (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation - Amplificación de Luz por Emisión Estimulada de Radiación-) como un dispositivo que utiliza un efecto de la mecánica cuántica, la emisión inducida o estimulada, para generar un haz de luz coherente de un medio adecuado y con el tamaño, la forma y la pureza controlados.

Debido a que no es objetivo ni propósito de este trabajo profundisar en los conceptos y principios de funcionamiento de los láseres, nos limitaremos, a mencionar de manera breve, algunos de los procesos y componentes que intervienen en los láseres.

Existen cuatro procesos básicos que se producen en la generación del láser, estos son denominados: bombeo, emisión espontánea de radiación, emisión estimulada de radiación y absorción. Los componentes básicos de un láser se pueden observar en la figura 27 y estos son:

1.- el medio activo para la formación del láser,

- 2.- la energía bombeada para el láser,
- 3.- un espejo 100% reflejante,
- 4.- un espejo 99 % reflejante y
- 5.- la emisión del rayo láser.

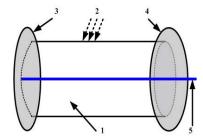


Figura 27: Componentes básicos de un láser

Existen diferentes tipos de láseres, algunos ejemplos de estos son: láseres de fibra [Van Wiggeren y Roy 1998], láseres de semi conductor [Mirasso et al. 1996; Sánchez-Díaz et al. 1999; Sivaprakasam y Shore 2000], láseres de microchip [Uchida et al. 1999], etc. El propósito fundamental de este capítulo es considerar láseres en régimen caótico como nodos, dispuestos en diferentes topologías de acoplamiento, para obtener sincronización.

Debido a que las ecuaciones del láser deben de guardar ciertas características, para aplicar la teoría fundamental de sincronización y el conocimiento de las condiciones iniciales son necesarias para el cálculo numérico, tanto para reproducción de la dinámica del láser, como para el cálculo de sincronía, se adoptan láseres de estado solido Nd:YAG [Terry 2002], que cumplen con lo antes mencionado.

Láseres de estado solido Nd:YAG (*Neodymium doped: Yttrium Aluminium Garnet*) serán usados como nodos caóticos, para construir redes complejas a ser sincronizadas con acoplamiento en estrella.

Sincronización significa que el comportamiento de un láser (amplitud del campo eléctrico), pueda ser exactamente reproducida por otros láseres para todo tiempo. En particular, 5 láseres de Nd:YAG caóticos conformarán la red "compleja" considerando dos escenarios: *i*) caso de acoplamiento de los nodos en estrella y *ii*) un caso de acoplamiento irregular (acoplamiento en estrella con nodo maestro).

La sincronización de la red dinámica compleja es alcanzada (la sincronización se logra en la amplitud del campo eléctrico de cada láser).

VI.1. Dinámicas de un láser de Nd:YAG

En esta sección, describimos el modelo matemático de un láser de Nd:YAG, utilizado como nodo fundamental en las redes dinámicas a ser sincronizadas. Como en [Posadas-Castillo et al. 2008a], tomamos una modificación de las ecuaciones sugeridas en [Terry 2002] para un sólo láser de estado sólido Nd:YAG, representado por las siguientes ecuaciones de estado

$$\dot{X} = (F - (\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t))) X,$$

$$\dot{F} = \gamma (A_0 - F - FX^2),$$
(54)

donde X(t) y F(t) constituyen los estados. Físicamente representan la amplitud del campo eléctrico del láser y la ganancia, respectivamente. Los parámetros α_0 y A_0 representan la razón de pérdidas en la cavidad y potencia de bombeo respectivamente. Mientras, α_1 representa la potencia de modulación de las pérdidas en la cavidad a una frecuencia ω y γ es la relación de tiempo de la luz en la cavidad láser y el tiempo de vida de la emisión espontánea de niveles superiores del medio de emisión.

El láser de Nd:YAG se modula con un ancho α_1 proporcional a las pérdidas α_0 . En ausencia de modulación, el láser de Nd:YAG es estable y exhibe oscilaciones periódicas.

Con los valores de los parámetros $\gamma=10^{-2},~\alpha_0=0.9,~\alpha_1=0.2,~A_0=1.2,~w=0.0$

0.045t, el láser de Nd:YAG, exhibe oscilaciones caóticas [Terry 2002]. En la figura 28 se muestra el atractor caótico generado por el láser de Nd:YAG proyectado sobre el plano (X, F).

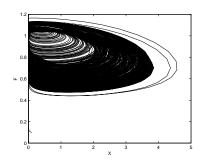


Figura 28: Atractor caótico generado por el láser de Nd:YAG proyectado sobre el plano $(X,\ F)$.

VI.2. Red dinámica de láseres de Nd:YAG

Mostramos en esta sección, la sincronización de redes dinámicas conformadas por láseres caóticos de Nd:YAG, utilizando un acoplamiento en estrella para estos nodos.

Con base en el modelo matemático del láser de Nd:YAG (54) como nodo fundamental, se diseño una red dinámica compleja con N láseres caóticos de Nd:YAG, descrito por [Posadas-Castillo $et\ al.\ 2008a$] como

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{i1} \\ \dot{F}_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_{i2} - (\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t)))X_{i1} + u_{i1} \\ \gamma (A_0 - F_{i2} - F_{i2}X_{i1}^2) \end{pmatrix},$$

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^{N} a_{ij}X_{j1}, \quad i = 1, 2, ..., N.$$
(55)

En particular, consideramos N=5 y $\Gamma={\rm diag}\,(1,\ 0),$ es decir, tenemos 5

láseres caóticos de Nd:YAG constituyendo la red dinámica a ser sincronizada con un acoplamiento en estrella. Otra manera de satisfacer las condiciones del teorema 1, es tener una constante positiva d tal que, cero sea un punto de equilibrio del sistema de dimensión n

$$Df(\mathbf{s}(t)) + d\Gamma, \tag{56}$$

lo cual, es equivalente a tener un nodo simple con una retroalimentación, donde la constante positiva d es tal que, el término de retroalimentación, $-dz_1$, puede estabilizar un nodo aislado de la forma

$$\dot{z}_1 = f_1(\mathbf{z}) - dz_1,
\dot{z}_2 = f_2(\mathbf{z}),
\vdots
\dot{z}_n = f_n(\mathbf{z}).$$
(57)

Con el valor particular de d = 0.3 podemos estabilizar a cero el estados (X_{11}) de un láser de estado sólido de Nd:YAG (57), esto se ilustra en la figura 29. Con estos valores, el teorema 1 garantiza sincronización de la red dinámica "compleja" con 5 láseres de Nd:YAG, esto será mostrado a continuación.

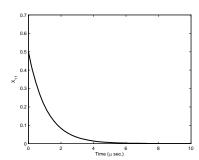


Figura 29: Para d=0,3, el estado X_{11} de un láser caótico de Nd:YAG es estabilizado en cero.

El arreglo explícito para la red dinámica con 5 láseres caóticos de Nd:YAG; se define como sigue, para el nodo caótico 1,

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{11} \\ \dot{F}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_{12} - (\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t))) X_{11} + u_{11} \\ \gamma (A_0 - F_{12} - F_{12} X_{11}^2) \end{pmatrix}, \tag{58}$$

$$u_{11} = c \begin{pmatrix} a_{11}X_{11} + a_{12}X_{21} + \\ a_{13}X_{31} + a_{14}X_{41} + a_{15}X_{51} \end{pmatrix},$$
 (59)

mientras que el nodo caótico 2 es diseñado como

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{21} \\ \dot{F}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_{22} - (\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t))) X_{21} + u_{21} \\ \gamma (A_0 - F_{22} - F_{22} X_{21}^2) \end{pmatrix}, \tag{60}$$

$$u_{21} = c \begin{pmatrix} a_{21}X_{11} + a_{22}X_{21} + \\ a_{23}X_{31} + a_{24}X_{41} + a_{25}X_{51} \end{pmatrix}, \tag{61}$$

el nodo caótico 3 es definido por

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{31} \\ \dot{F}_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_{32} - (\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t)))X_{31} + u_{31} \\ \gamma (A_0 - F_{32} - F_{32}X_{31}^2) \end{pmatrix}, \tag{62}$$

$$u_{31} = c \begin{pmatrix} a_{31}X_{11} + a_{32}X_{21} + \\ a_{33}X_{31} + a_{34}X_{41} + a_{35}X_{51} \end{pmatrix}, \tag{63}$$

el nodo caótico 4 es descrito por

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{41} \\ \dot{F}_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_{42} - (\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t))) X_{41} + u_{41} \\ \gamma (A_0 - F_{42} - F_{42} X_{41}^2) \end{pmatrix}, \tag{64}$$

$$u_{41} = c \begin{pmatrix} a_{41}X_{11} + a_{42}X_{21} + \\ a_{43}X_{31} + a_{44}X_{41} + a_{45}X_{51} \end{pmatrix}, \tag{65}$$

y el nodo caótico 5 es

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{51} \\ \dot{F}_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_{52} - (\alpha_0 + \alpha_1 \cos(\omega t))) X_{51} + u_{51} \\ \gamma (A_0 - F_{52} - F_{52} X_{51}^2) \end{pmatrix}, \tag{66}$$

$$u_{51} = c \begin{pmatrix} a_{51}X_{11} + a_{52}X_{21} + \\ a_{53}X_{31} + a_{54}X_{41} + a_{55}X_{51} \end{pmatrix}.$$
 (67)

VI.3. Ejemplos ilustrativos

Caso 1: Cinco láseres caóticos desacoplados definidos por (54) a ser sincronizados en una red dinámica con nodos acoplados en estrella [Posadas-Castillo et al. 2008e].

Un diagrama de esta topología de acoplamiento se muestra en la figura 30, donde la señal de acoplamiento se establece mediante $X_{i1}(t)$.

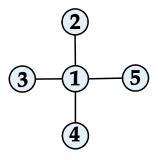


Figura 30: Acoplamiento en estrella de 5 láseres caóticos de Nd:YAG como nodos.

La matriz de acoplamiento (3) es dado por

$$\mathbf{A}_{sc} = \left(egin{array}{cccccc} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}
ight),$$

con valores propios: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ y $\lambda_5 = -5$, valor de acoplamiento de c = 1. Para este caso, utilizamos las señales de acoplamiento X_{i1} , i = 1, 2, ..., 5; diseñadas en esta forma, las señales de entrada $u_{i1} = g(X_{i1}; c)$, i = 1, 2, ..., 5, dadas

explicitamente por:

$$u_{11} = -4X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51}, (68)$$

$$u_{21} = X_{11} - X_{21}, (69)$$

$$u_{31} = X_{11} - X_{31}, (70)$$

$$u_{41} = X_{11} - X_{41}, (71)$$

$$u_{51} = X_{11} - X_{51}. (72)$$

Para construir el acoplamiento en estrella que se muestra en la figura 30, utilizamos las ecuaciones (58), (60), (62), (64) y (66) con las señales de entrada (68)-(72).

Con la selección de condiciones iniciales:

$$X_{11}(0) = 0.1, F_{12}(0) = 0.1;$$

 $X_{21}(0) = 0.6, F_{22}(0) = 0.6;$
 $X_{31}(0) = 0.7, F_{32}(0) = 0.7;$
 $X_{41}(0) = 0.4, F_{42}(0) = 0.4;$
 $X_{51}(0) = 0.55, F_{52}(0) = 0.55.$

La figura 31 muestra la sincronización de los primeros estados $(X_{11} \text{ vs } X_{21}, X_{11} \text{ vs } X_{31}, X_{11} \text{ vs } X_{41}, X_{11} \text{ vs } X_{51}, X_{21} \text{ vs } X_{31}, X_{21} \text{ vs } X_{41}, X_{21} \text{ vs } X_{51}, X_{31} \text{ vs } X_{41}, X_{31} \text{ vs } X_{51},$ and $X_{41} \text{ vs } X_{51}$) de los 5 láseres caóticos de Nd:YAG (la sincronización se alcanza en 5 segundos aproximadamente) y el atractor caótico del comportamiento colectivo en la red (un nuevo estado caótico).

Caso 2 (Red con acoplamiento irregular): 5 láseres caóticos desaclopados definidos por (54) a ser sincronizados en una red dinámica, con acoplamiento en estrella con nodo maestro 1 [Posadas-Castillo et al. 2008e].

El arreglo de nodos se ilustra en la figura 32, con un nodo común o central 1 como nodo maestro. La señal de acoplamiento se establece a través de $X_{i1}(t)$.

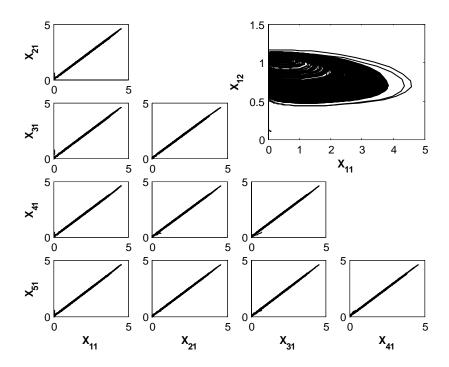


Figura 31: Sincronización de los estados caóticos $(X_{i1}, i = 1, 2, ..., 5)$ de 5 láseres de Nd:YAG acoplados en estrella y el nuevo atractor caótico del comportamiento colectivo en la red, proyectado sobre el plano (X_{11}, F_{12}) .

La matriz de acoplamiento (3) está dada por

$$\mathbf{A}_{sc} = \left(egin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}
ight),$$

con valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1$ y un valor en el acoplamiento de c = 1. Para construir el arreglo correspondiente, utilizamos la señal de acoplamiento X_{11} solo para el diseño de la señal de entrada $u_{i1} = g(X_{i1}; c)$, i = 2, ..., 5. Utilizamos las mismas ecuaciones (58), (60), (62), (64) y (66), con las señales de entrada (69)-(72)

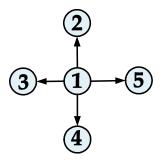


Figura 32: Acoplamiento irregular con láseres de Nd:YAG, con el nodo 1 como maestro.

y para $u_{11} \equiv 0$ en (68). Consideramos las mismas condiciones iniciales que en el caso anterior. Se muestra en la figura 33, la sincronización del primer estado de los 5 láseres de Nd:YAG: X_{11} vs X_{21} , X_{11} vs X_{31} , X_{11} vs X_{41} , X_{11} vs X_{51} , X_{21} vs X_{31} , X_{21} vs X_{41} , X_{21} vs X_{51} , X_{31} vs X_{41} , X_{31} vs X_{51} , and X_{41} vs X_{51} . En este, caso la sincronización se alcanza aproximadamente en 5 segundos y el comportamiento colectivo de toda la red dinámica compleja, es impuesta por el láser caótico 1.

VI.4. Conclusiones

Se logró numericamente la sincronización de 5 láseres caóticos de Nd:YAG (utilizado como nodo fundamental) en dos escenarios de acoplamiento: i) acoplamiento en estrella y ii) acoplamiento irregular (con el nodo 1, considerado como maestro). Éstos resultados son particularmente interesantes por su posible aplicación en redes de comunicaciones privadas, donde se requiere que un sólo transmisor envíe simultaneamente información a un conjunto de receptores. Véase las referencias asociadas a cada caso presentado en este capítulo, si se requiere profundizar cada caso en particular.

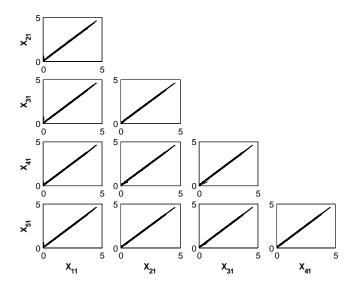


Figura 33: Sincronización del primer estado $(X_{i1}, i=1,2,...,5)$ de los 5 láseres de Nd:YAG caóticos, con nodo maestro 1.

Capítulo VII

Sincronización experimental de una red compleja

En este capítulo, se presenta de manera experimental, la sincronización de una red compleja compuesta de sistemas dinámicos idénticos. Utilizando las técnicas proporcionadas en capítulos anteriores, se muestran resultados experimentales de la sincronización de una red con acoplamiento global de tres circuitos de Chua como nodos, operando con comportamiento periódico y caótico. Las redes se construyen con base en circuitería electrónica considerando dos escenarios: i) sincronización de una red irregular (una red con nodo maestro), donde el comportamiento colectivo de la red es impuesto por la dinámica del nodo maestro y ii) sincronización de una red con acoplamiento global, donde el comportamiento colectivo de los nodos, es un nuevo estado caótico (diferente al comportamiento individual de los nodos desacoplados).

VII.1. Modelo matemático e implementación física del circuito de Chua

Brevemente, se describe de nuevo por conveniencia el modelo matemático y la implementación física del circuito de Chua. Este circuito será utilizado como nodo fundamental para construir la red dinámica compleja con distintas arquitecturas de acoplamiento. Posteriormente, se mostrará la implementación de redes dinámicas complejas en dos escenarios: red con acoplamiento irregular (con nodo aislado) y red con acoplamiento

regular (acoplamiento global). Seleccionamos al circuito de Chua para la realización experimental, debido a que sobre este circuito se han reportado muchos estudios, además su implementación eléctronica es fácil y económica [Kennedy 1992; Madan 1993; Cruz-Hernández et al. 2005]. El circuito de Chua es un oscilador no lineal que muestra una gran variedad de comportamientos incluyendo el fenómeno caótico.

VII.1.1. Implementación física del circuito de Chua

Varias implementaciones del circuito de Chua se reportan en la literatura. Sin embargo, la forma mas robusta y económica para realizar el circuito de Chua de manera experimental se reporta en [Kennedy 1992]. El circuito de Chua consiste de sólo cuatro elementos lineales (una resistencia R, un inductor L y dos capacitores C1 y C2) y una resistencia no lineal NR, también llamada diodo de Chua. El circuito de Chua se muestra en la figura 34(a), la curva carácteristica $V_{C1} - i_{NR}$ del diodo de Chua NR se muestra en la figura 34(b). Los valores para la implementación física del circuito de

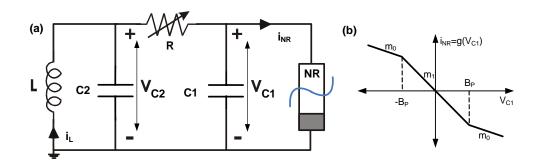


Figura 34: (a) Circuito de Chua consistente de un inductor L, dos capacitores lineales C1 y C2, una resistencia lineal R y una resistencia no lineal NR. (b) Curva característica $v_{C1} - i_{NR}$ de la resistencia nolineal NR.

Chua son: $L=18~mH,\,C1=10~nF,\,C2=100~nF,\,R=1.5~k\Omega$ y la implementación de

NR es dado como sigue: en esta implementación experimental, el diodo de Chua NR, se construye con dos Op-Amps y seis resistencias lineales, como se ilustra en la figura 35. Los valores para la implementación física del diodo de Chua son: dos Op-Amps U1 (TL084) (con fuentes de alimentación de $\pm 12~V$), $R2 = R3 = 22~k\Omega$, $R4 = R5 = 220~\Omega$, $R6 = 2.2~k\Omega$ y $R7 = 3.3~k\Omega$.

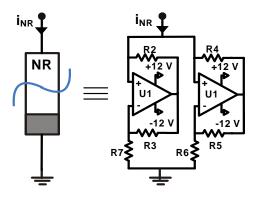


Figura 35: Implementación del diodo de Chua utilizando dos Op-Amps U1 y seis resistencias lineales.

VII.1.2. Modelo matemático del circuito de Chua

Aplicando las leyes de Kirchhoff, el circuito de Chua mostrado en la figura 34(a) es modelado por las ecuaciones de estado

$$\begin{pmatrix}
\frac{dv_{C1}}{dt} \\
\frac{dv_{C2}}{dt} \\
\frac{di_L}{dt}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{RC1} (v_{c_2} - v_{c_1}) - \frac{1}{C1} g (v_{c_1}) \\
\frac{1}{RC2} (v_{c_2} - v_{c_1}) + \frac{1}{C2} i_L \\
-\frac{1}{L} v_{c_2}
\end{pmatrix},$$
(73)

donde v_{c_1} , v_{c_2} y i_L son el voltaje del capacitor C1, el voltaje del capacitor C2 y la corriente a través del inductor L, respectivamente y $g(v_{c_1})$ representa a la curva característica $V_{C1} - i_{NR}$ del diodo de Chua NR, definida por

$$g(v_{c_1}) = m_0 v_{c_1} + \frac{1}{2} (m_1 - m_0) (|v_{c_1} + B_p| - |v_{c_1} - B_p|), \qquad (74)$$

las pendientes en las regiones internas y externas son $m_0 < 0$ y $m_1 < 0$ respectivamente, mientras $\pm B_P$ corresponde a los puntos de quiebre del diodo de Chua, estos parámetros se muestran en la figura 34(b).

Para la sincronización analítica y numérica de la red dinámica con circuitos de Chua, aprovechamos la versión normalizada de las ecuaciones (73)-(74), las cuales, se obtienen rescalando las variables como sigue: $x_1 = v_{c_1}/B_p$, $x_2 = v_{c_2}/B_p$, $x_3 = i_L R/B_p$, $B_p = 1$ y $\tau = t/RC2$. De esta manera, el circuito de Chua normalizado está dado por

$$\begin{pmatrix}
\dot{x}_1 \\
\dot{x}_2 \\
\dot{x}_3
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\alpha (x_2 - x_1 - f(x_1)) \\
x_1 - x_2 + x_3 \\
-\beta x_2
\end{pmatrix},$$
(75)

donde $\dot{x} = dx/d\tau$; $\alpha = C2/C1 > 0$ y $\beta = C2R^2/L > 0$ son los parámetros principales de bifurcación y la función no lineal $f(x_1)$ es definida por

$$f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a-b)(|x_1+1|-|x_1-1|), \qquad (76)$$

con $a = m_1 R < 0$ y $b = m_0 R < 0$.

VII.2. Red compleja de circuitos de Chua

En esta sección, se describe la red dinámica compleja a ser construida con N circuitos de Chua (75)-(76) acoplados, la cual, toma la siguiente forma (acorde a las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{i1} \\ \dot{x}_{i2} \\ \dot{x}_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(x_{i2} - x_{i1} - f(x_{i1}) \right) + u_{i1} \\ x_{i1} - x_{i2} + x_{i3} \\ -\beta x_{i2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, ..., N,$$
 (77)

$$f(x_{i1}) = bx_{i1} + \frac{1}{2}(a-b)(|x_{i1}+1|-|x_{i1}-1|),$$
(78)

$$u_{i1} = c \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \Gamma x_{j1}. \tag{79}$$

Si la señal de acoplamiento en (79) es $u_{i1} \equiv 0$ para i = 1, 2, ..., N, entonces tenemos el conjunto original de N circuitos de Chua desacoplados (75)-(76), los cuales, evolucionan acorde a sus dinámicas individuales y por supuesto, no están sincronizados. En particular, consideraremos para propósitos ilustrativos N = 3 y $\Gamma = \text{diag}(1,0,0)$, es decir, tenemos tres circuitos de Chua acoplados con N_1 , N_2 y N_3 como nodos, a través de la primer variable de estado de cada nodo, que componen la red dinámica "compleja" a ser sincronizada.

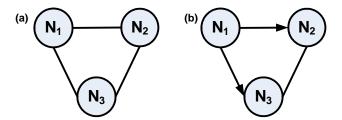


Figura 36: (a) Red "compleja" con acoplamiento global (de tres circuitos de Chua). (b) Red "compleja" con acoplamiento irregular (de tres circuitos de Chua) con nodo maestro (N_1) .

Caso 1 (Red compleja con acoplamiento global): Tres nodos desacoplados N_1 , N_2 y N_3 (ecuaciones (75)-(76)) a ser sincronizados en una red dinámica con acoplamiento global.

Para este caso, el primer nodo (N_1) de la red dinámica es descrito por

$$N_{1}: \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(x_{12} - x_{11} - f(x_{11}) \right) + u_{11} \\ x_{11} - x_{12} + x_{13} \\ -\beta x_{12} \end{pmatrix}, \tag{80}$$

$$f(x_{11}) = bx_{11} + \frac{1}{2}(a-b)(|x_{11}+1| - |x_{11}-1|), \tag{81}$$

$$u_{11} = c \left(a_{11} x_{11} + a_{12} x_{21} + a_{13} x_{31} \right), \tag{82}$$

el segundo nodo (N_2) , por medio de

$$N_{2}: \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{x}_{22} \\ \dot{x}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(x_{22} - x_{21} - f(x_{21}) \right) + u_{21} \\ x_{21} - x_{22} + x_{23} \\ -\beta x_{22} \end{pmatrix}, \tag{83}$$

$$f(x_{21}) = bx_{21} + \frac{1}{2}(a-b)(|x_{21}+1| - |x_{21}-1|), \tag{84}$$

$$u_{21} = c \left(a_{21} x_{11} + a_{22} x_{21} + a_{23} x_{31} \right), \tag{85}$$

y el tercer nodo (N_3) , como

$$N_{3}: \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x}_{31} \\ \dot{x}_{32} \\ \dot{x}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(x_{32} - x_{31} - f(x_{31}) \right) + u_{31} \\ x_{31} - x_{32} + x_{33} \\ -\beta x_{32} \end{pmatrix}, \tag{86}$$

$$f(x_{31}) = bx_{31} + \frac{1}{2}(a-b)(|x_{31}+1| - |x_{31}-1|),$$
(87)

$$u_{31} = c \left(a_{31} x_{11} + a_{32} x_{21} + a_{33} x_{31} \right). \tag{88}$$

Esta configuración de la red con acoplamiento global se ilustra en la figura 36(a). A continuación mostramos el segundo escenario, donde existe un nodo maestro en la red, como sigue.

Caso 2 (Red en configuración irregular con nodo maestro): Tres nodos desacoplados N_1 , N_2 y N_3 (ecuaciones (75)-(76)) a ser sincronizados en una red dinámica con nodo maestro N_1 y nodos esclavos N_2 y N_3 .

Para este caso, utilizamos las mismas ecuaciones (80)-(82), (83)-(85) y (86)-(88) para construir el arreglo, con sólo una diferencia, la señal de acoplamiento en (82) es ahora

 $u_{11} \equiv 0$ con $c \neq 0$ puesto que $a_{11} = a_{12} = a_{13} \equiv 0$. La configuración de acoplamiento para esta red irregular se ilustra en la figura 36(b). En la siguiente sección, mostramos la realización física de la sincronización de las redes complejas previamente diseñadas.

VII.3. Implementación física de la sincronización de una red compleja

En esta sección, se muestra la implementación de la sincronización de tres circuitos de Chua acoplados globalmente, utilizando dispositivos electrónicos. Se muestran dos escenarios: Una red regular con acoplamiento global y una red irregular con un nodo maestro, la configuración de estas redes se muestra en la figura 36.

VII.3.1. Red regular con acoplamiento global

Considere el caso 1, con nodos caóticos desacoplados N_1 , N_2 y N_3 (ecuaciones (75)-(76)) a ser sincronizados en una red con acoplamiento global (figura 36(a)).

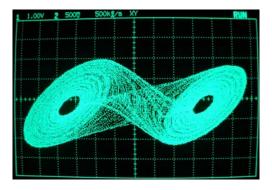


Figura 37: Atractor caótico de Chua proyectado en el plano (x_1, x_2) .

Las pendientes $v_{C1} - i_{NR}$ de la curva característica (figura 34(b)) se obtienen por

medio de $m_0 = -(R5/R4R6) + (1/R2) = -0.5 \ mA/V \ y \ m_1 = -(R5/R4R6) - (R3/R2R7) = -0.7575 \ mA/V$. Los puntos de quiebre son determinados por los voltajes de saturación E_{sat} de los Op-Amps: $\pm B_p = (R7/(R3 + R7)) E_{sat} \approx 1.46 \ V$, donde $E_{sat} \approx 11.2 \ V$. De esta manera, un circuito de Chua desacoplado (aislado) (75)-(76) con parámetros $\alpha = 10$, $\beta = 12.5$, $a = -1.27 \ y \ b = -0.68$ tiene un comportamiento caótico. La figura 37 muestra el atractor caótico del circuito de Chua, el cual, se observa en las terminales de la resistencia R con un osciloscopio Agilent de 500 Mz.

Acontinuación, con base en los circuitos de Chua desacoplados, ecuaciones (80)-(82), (83)-(85) y (86)-(88), y conforme a la topología ilustrada en la figura 36(a), se muestra la implementación física con dispositivos electrónicos, de una red dinámica compleja con tres circuitos caóticos de Chua con una arquitectura de acoplamiento global.

La configuración experimental diseñada para la sincronización de esta red dinámica, con tres circuitos caóticos de Chua se ilustra en la figura 38.

Componentes y valores utilizados para la construcción son: Op-Amps U1 del tipo TL084 (con fuentes de alimentación de $\pm 12~V$), inductancias L1 = L2 = L3 = 18~mH, capacitores C1 = C3 = C5 = 10~nF, C2 = C4 = C6 = 100~nF, resistencias R1 = R17 = R33 resistencias variables de $2~k\Omega$, $R2 = R3 = R18 = R19 = R34 = R35 = 22~k\Omega$, $R4 = R5 = R20 = R21 = R36 = R37 = 220~\Omega$, $R6 = R22 = R38 = 2.2~k\Omega$, $R7 = R23 = R39 = 3.3~k\Omega$, $R8 = R11 = R15 = R24 = R27 = R31 = R40 = R43 = R47 = 10~k\Omega$, $R9 = R25 = R41 = 500~k\Omega$, $R10 = R26 = R42 = 1~k\Omega$, $R12 = R13 = R28 = R29 = R44 = R45 = 10~k\Omega$, R14 = R30 = R46 resistencias variables de $1~M\Omega$, $R16 = R32 = R48 = 1.5~k\Omega$.

Para esta red dinámica con acoplamiento global, la diagonal principal de la matriz \mathbf{A}_{gc} es dada por $a_{11} = \frac{R10}{R9}$, $a_{22} = \frac{R26}{R25}$ y $a_{33} = \frac{R42}{R41}$, respecto a la matriz de acoplamiento

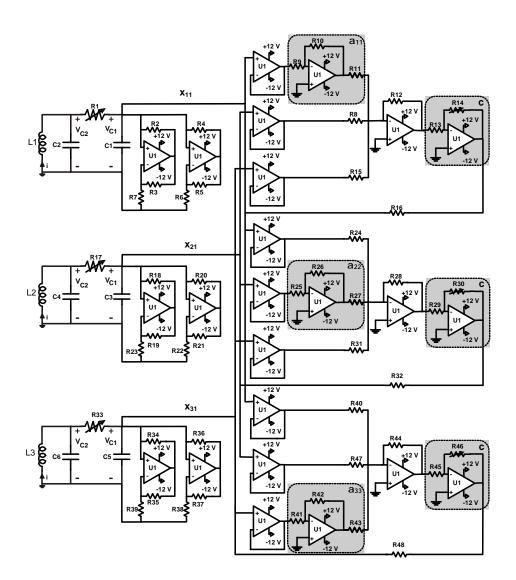


Figura 38: Configuración experimental para la sincronización de una red dinámica de tres circuitos caóticos de Chua con acoplamiento global.

(30), está dada por

$$\mathbf{A}_{gc} = \left(egin{array}{ccc} -2 & 1 & 1 \ 1 & -2 & 1 \ 1 & 1 & -2 \end{array}
ight),$$

el valor del acoplamiento c, es obtenido por $c = \frac{R14}{R13} = \frac{R30}{R29} = \frac{R46}{R45}$ y los valores propios correspondientes son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$. La figura 39(a) muestra las dinámicas caóticas de los tres circuitos de Chua sincronizados en el primer estado, es decir, $x_{i1}(t)$, i = 1, 2, 3. Mientras, la figura 39(b) muestra los comportamientos caóticos de los segun-

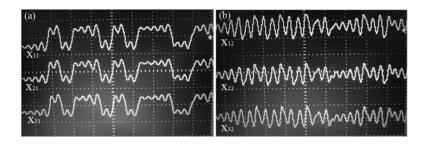


Figura 39: (a) Comportamiento caótico de los primeros estados: x_{11} , x_{21} y x_{31} en la red de tres circuitos caóticos de Chua. (b) Comportamiento caótico de los segundos estados: x_{12} , x_{22} y x_{32} en la red de tres circuitos caóticos de Chua (con acoplamiento global).

dos estados de los tres circuitos caóticos de Chua, es decir, $x_{i2}(t)$, i = 1, 2, 3. Puesto que el estado $x_3(t)$ en el circuito caótico de Chua es la corriente $i_L(t)$, no es posible mostrar gráficamente esta variable en el osciloscopio. Se muestra experimentalmente en la figura 40, los planos de fase de la sincronización de los primeros estados: (a) x_{11} vs x_{21} (nodo N_1 y N_2), (b) x_{21} vs x_{31} (nodo N_2 y N_3) y (c) x_{11} vs x_{31} (nodo N_1 y N_3) en un conjunto de tres osciloscopios. Se observa experimentalmente la sincronización de una red con circuitos caóticos de Chua acoplados globalmente. Después del acoplamiento, la red compleja tiene un nuevo estado caótico como comportamiento colectivo completamente

distinto al comportamiento de cada nodo previo al acoplamiento.

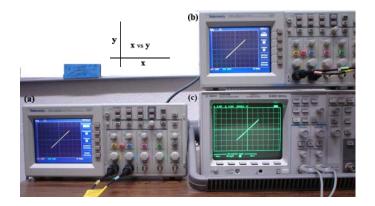


Figura 40: Sincronización de los primeros estados de los tres circuitos caóticos de Chua con acoplamiento global; (a) x_{11} vs x_{21} , (b) x_{21} vs x_{31} y (c) x_{11} vs x_{31} , en una red con acoplamiento global.

VII.3.2. Red irregular con un nodo maestro

En esta sección, con base en el arreglo de tres circuitos de Chua (80)-(82), (83)-(85) y (86)-(88) con señal de acopamiento $u_{11} \equiv 0$ en (82), se muestra la implementación con dispositivos elctrónicos de esta red, de acuerdo con la arquitectura que se muestra en la figura 36(b) de tres circuitos caóticos de Chua acoplados irregularmente y con nodo maestro. La implementación física para la sincronización de esta red dinámica irregular con nodo maestro, se muestra en la figura 41. Componentes y valores utilizados para la construcción son: Op-Amps son del tipo TL084 (con fuentes de alimentación de ± 12 V), inductores L1 = L2 = L3 = 18 mH, capacitores C1 = C3 = C5 = 10 nF, C2 = C4 = C6 = 100 nF, R1 = R17 = R33 resistencias variables de 2 $k\Omega$, R2 = R3 = R18 = R19 = R34 = R35 = 22 $k\Omega$, R4 = R5 = R20 = R21 = R36 = R37 = 220 Ω , R6 = R22 = R38 = 2.2 $k\Omega$, R7 = R23 = R39 = 3.3 $k\Omega$, R24 = R36 = R37 = 220 Ω , R6 = R22 = R38 = 2.2 $k\Omega$, R7 = R23 = R39 = 3.3 $k\Omega$, R24 = R35 = R39

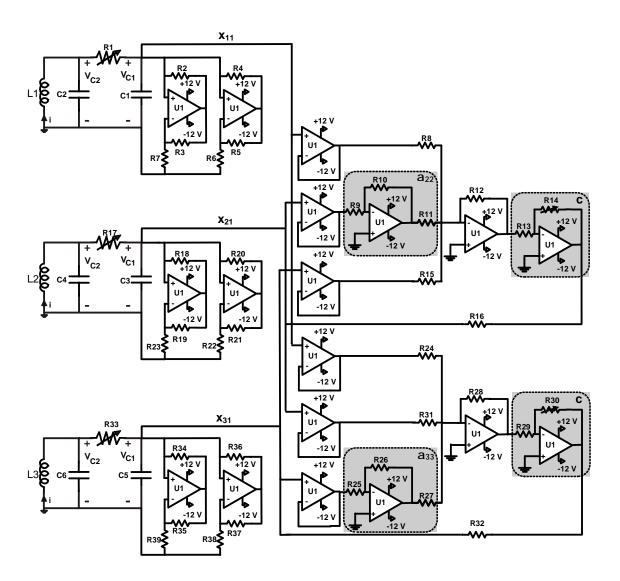


Figura 41: Configuración experimental para la sincronización de una red dinámica de tres circuitos caóticos de Chua con acoplamiento irregular y con nodo maestro (N_1) .

 $R27 = R31 = R40 = R43 = R47 = 10 \ k\Omega, R25 = R41 = 500 \ k\Omega, R26 = R42 = 1$ $k\Omega, R28 = R29 = R44 = R45 = 10 \ k\Omega, R30 = R46$ resistencias variables de 1 $M\Omega, R32 = R48 = 1.5 \ k\Omega.$

Primero, se consideran: Nodos caóticos desacoplados N_1 , N_2 y N_3 (75)-(76) a ser sincronizados en la red irregular con nodo maestro N_1 y nodos esclavos N_2 y N_3 .

La configuración experimental diseñada para la sincronización de tres circuitos caóticos de Chua, con dispositivos electrónicos se muestra en la figura 41. Para esta red irregular la diagonal principal de la matriz \mathbf{A}_{gc} esta dada por $a_{11}=0$, $a_{22}=\frac{R26}{R25}$ y $a_{33}=\frac{R42}{R41}$, con respecto a la matriz de acoplamiento (3) es dada por

$$\mathbf{A}_{gc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \tag{89}$$

el valor del acoplamiento es dado por $c = \frac{R30}{R29} = \frac{R46}{R45}$ y los valores propios correspondientes son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -3$. La figura 42(a) muestra las dinámicas caóticas de los primeros estados de los tres circuitos de Chua sincronizados en la red irregular, es decir, $x_{i1}(t)$, i = 1, 2, 3 (con nodo maestro caótico). En la figura 42(b) muestra las

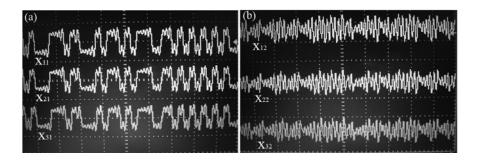


Figura 42: (a) Comportamiento caótico de los primeros estados: x_{11} , x_{21} y x_{31} en la red irregular con nodo maestro (N_1) de los tres circuitos de Chua. (b) Comportamiento caótico de los segundos estados: x_{12} , x_{22} y x_{32} en la red irregular con nodo maestro (N_1) de los tres circuitos de Chua.

dinámicas caóticas de los tres circuitos de Chua sincronizados en los segundos estados, es decir, $x_{i2}(t)$, i = 1, 2, 3 (con nodo maestro caótico). Se muestra experimentalmente en la figura 43, el plano de fase de la sincronización de los segundos estados: (a) x_{12} vs x_{22} (nodos N_1 y N_2), (b) x_{22} vs x_{32} (nodos N_2 y N_3) y (c) x_{12} vs x_{32} (nodos N_1 y N_3) en un conjunto de tres osciloscopios. Se observa experimentalmente la sincronización de

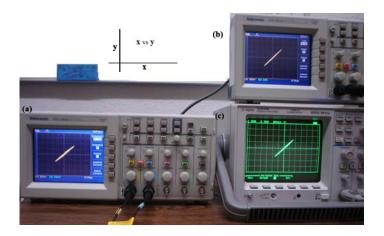


Figura 43: Sincronización de los segundos estados de los tres circuitos caóticos de Chua; (a) x_{12} vs x_{22} , (b) x_{22} vs x_{32} y (c) x_{12} vs x_{32} , en una red irregular con nodo maestro N_1 .

una red irregular, formada por nodos caóticos N_1 , N_2 y N_3 .donde el nodo N_1 es maestro y el que impone su dinámica caótica a los nodos esclavos N_2 y N_3 .

Ahora, se considera: Nodo periódico N_1 y dos nodos caóticos N_2 y N_3 a ser sincronizados en la red irregular con nodo periódico N_1 y nodos esclavos N_2 y N_3 .

La red irregular diseñada con nodo maestro periódico se ilustra en la figura 36(b). Para esta red dinámica irregular con nodo maestro periódico N_1 , la matriz de acoplamiento (3) es dada por (89) y los valores propios son los mismos que en el caso anterior. La figura 44 muestra el comportamiento (plano de fase experimental) de el

nodo maestro periódico N_1 , este comportamiento periódico es generado cambiando el valor de R1 a 1,52 $k\Omega$ en el circuito mostrado en la figura 41. Mientras, los nodos N_2 y N_3 son los mismos que el caso anterior, es decir, tienen un comportamiento caótico cuando estan desacoplados.

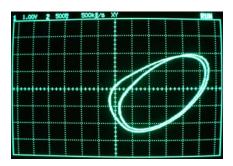


Figura 44: Plano de fase experimental (x_{11}, x_{12}) del ciclo límite generado por el circuito de Chua.

Mostramos experimentalmente en la figura 45, el plano de fase de la sincronización de los primeros estados: (a) x_{11} vs x_{21} (nodos N_1 y N_2), (b) x_{21} vs x_{31} (nodos N_2 y N_3) y (c) x_{11} vs x_{31} (nodos N_1 y N_3) en un conjunto de tres osciloscopios. Observamos experimentalmente la sincronización de la red dinámica irregular con el nodo maestro periódico N_1 y nodos esclavos caóticos N_2 y N_3 (cuando están desacoplados), después del acoplamiento el comportamiento colectivo de la red dinámica irregular es periódico (ver figura 44), esto es, los nodos esclavos N_2 y N_3 sincronizan con el nodo maestro periódico N_1 .

El lector interesado en profundizar en el contenido del presente capítulo, puede consultar las referencias que inspiraron a la escritura de éste [Cruz-Hernández et al. 2005; Posadas-Castillo et al. 2006b; Posadas-Castillo et al. 2006d; Posadas-Castillo et al. 2008b].

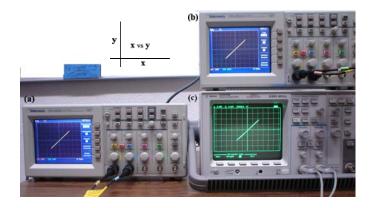


Figura 45: Sincronización de los primeros estados de los tres circuitos caóticos de Chua; (a) x_{11} vs x_{21} , (b) x_{21} vs x_{31} y (c) x_{11} vs x_{31} , en una red irregular con nodo maestro periódico N_1 .

VII.4. Conclusiones

En este capítulo, se llevo a cabo un estudio experimental de la sincronización de una red dinámica compleja, compuesta por circuitos de Chua como nodos acoplados goblalmente. En particular se mostró experimentalmente la realización física de la sincronización de tres circuitos de Chua acoplados sin nodo maestro, donde el comportamiento colectivo de los nodos de la red dinámica es caótica. Además, se mostró la sincronía de una red compleja con nodo maestro (con dinámica periódica y caótica) de manera experimental, donde el comportamiento colectivo de la red dinámica es impuesto por la dinámica del nodo maestro.

Capítulo VIII

Conclusiones generales

En este trabajo de tesis doctoral, se presentaron algunos problemas relacionados con la sincronización de sistemas complejos. En particular, se estudió la sincronización de redes complejas, conformadas por diferentes tipos de nodos, los cuales, exhiben dinámicas extremadamente complejas. Los nodos seleccionados para formar las redes fueron: circuitos de Chua, redes neuronales caóticas CNNs, láseres caóticos de Nd:YAG, arreglados en diferentes arquitecturas de acoplamiento (redes con acoplamiento regular e irregular).

Se determinaron condiciones de acoplamiento necesarias para garantizar la sincronización de estas redes con diferentes tipos de acoplamiento (regular e irregular).

Se mostraron las propiedades de las redes con acoplamientos regulares (global, anillo y estrella). Además, para las redes consideradas se reportaron las condiciones de estabilidad de las redes complejas empleando la teoría de Lyapunov.

Se encontraron condiciones que garantizan la sincronización asintótica y global en los casos: i) red compleja con nodo maestro y ii) red compleja sin nodo maestro.

Se reportaron resultados experimentales para redes formadas con circuitos de Chua, implementando estos mediante circuitería electrónica. Estos mostraron fuerte coincidencia con los resultados numéricos correspondientes.

VIII.1. Productos derivados de este trabajo doctoral

Las principales aportaciones que arrojó este trabajo de investigación a la sincronización de sistemas complejos, se resumen a continuación (y que dan fe de esto los árticulos publicados en **revistas** [Posadas-Castillo et al. 2008a; Posadas-Castillo et al. 2008b; Posadas-Castillo et al. 2008c], en **partes de libro** [Posadas-Castillo et al. 2007a; Posadas-Castillo et al. 2007b] en **congresos** [Posadas-Castillo et al. 2005a; Posadas-Castillo et al. 2005b; Posadas-Castillo et al. 2006a; Posadas-Castillo et al. 2006b; Posadas-Castillo et al. 2006c; Posadas-Castillo et al. 2006d; Posadas-Castillo et al. 2006e; Posadas-Castillo et al. 2008f; Posadas-Castillo et al. 2008e; Posadas-Castillo et al. 2008f; López-Gutiérrez et al. 2008a].

VIII.2. Principales contribuciones de este trabajo doctoral

Un resumen a modo de puntuario, de las principales contribuciones de este trabajo de investigación, se da a continuación:

- Sincronización de redes complejas que contienen nodo maestro. Este nodo maestro impone su dinámica (por compleja que esta sea) al resto de los nodos de la red.
- Aplicar la teoría de sincronización a redes complejas formadas por CNNs (redes neuronales).
- Aplicar la teoría de sincronización a modelos de redes complejas formadas por láseres caóticos de Nd:YAG.

- Esta metodología de trabajo se aplicó teóricamente a diferentes clases de sistemas complejos (láseres, redes neuronales caóticas, sistemas caóticos, etc.), mostrándo así, una versatilidad del método de sincronización utilizado.
- Bajo ciertas condiciones, se determinó una manera sistemática de obtener sincronización, utilizando teoría de sistemas complejos.
- Sincronización experimental de redes complejas conformadas por circuitos de Chua, implementando estas mediante circuitería electrónica.
- Validación de resultados analíticos con resultados numéricos y experimentales, en el caso de circuitos de Chua.

VIII.3. Problemas abiertos

El estudio de los sistemas complejos se encuentra en pleno auge. Así lo muestran las numerosas investigaciones sobre el tópico. En la literatura y congresos se reportan estas contribuciones. Las aplicaciones a distintas disciplinas científicas y tecnológicas va en aumento.

A continuación, se mencionan brevemente algunos problemas abiertos detectados y que representan trabajo a futuro en esta dirección:

- Extender los resultados obtenidos de sincronización a redes del mundo pequeño,
 redes de libre escala, redes aleatorias, etc.
- Aplicación de la sincronización de redes complejas a comunicación privada de multiusuarios, utilizando información digital o analógica (audio, video, imágenes, etc.).
- Analizar la sincronización de redes complejas considerando retrasos de tiempo en la señal acoplante.

- Implementar físicamente la sincronización de redes complejas formadas por láseres caóticos.
- Analizar la sincronización de redes complejas en el caso que se tenga ruido en la señal acoplante.
- Aplicación de la sincronización de redes complejas a equipos de trabajo formados por robots manipuladores o móviles.
- Aplicación de la sincronización a modelos de redes sociales y biológicas.
- Sincronizar redes complejas empleando control "pinning".
- Extender estos resultados a la sincronización de redes con "cientos" o "miles" de nodos.

Literatura Citada

Aguilar-Bustos A.Y. y Cruz-Hernández C. (2006) "Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems through extended Kalman filtering", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **6**(4), pp. 319-336.

Aguilar-Bustos A.Y. y Cruz-Hernández C. (2008) "Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems: An application in communications", *Chaos, Solitons & Fractals*, en prensa doi:10.1016/j.chaos.2008.05.012.

Albert R., Jeong H. y Barabási A.L. (1999) "Diameter of the World-Wide Web", *Nature*, **401**, pp. 130-131.

Albert R. y Barabási A.L. (2002) "Statistical mechanics of complex networks", Reviews of modern physics, **74**(1), pp. 47-97.

Babsky E.V. y Ulianovsky L.S. (1961) "Electrical simulation of the heart", AN SSSR Publish. House.

Belykh I., Hasler M., Laurent M. y Nijmeijer H. (2005) "Synchronization and graph topology", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15**(11), pp. 3423-3433.

Blekhman I.I., Fradkov A.L., Nijmeijer H. y Pogromsky A. (1997) "On self-synchronization and controlled synchronization" *Syst. Control Lett.*, **31**(5), pp. 299-306.

Bowong Samuel (2007) "Adaptive synchronization between two different chaotic dynamical systems", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 12(6), pp. 976-985.

Chen G. y Dong X. (1993a) "Controlling Chua's circuit", *Journal Circuits Syst. Computers*, **3**(1), pp. 139-149.

Chen G. y Dong X. (1993b) "From chaos to order: perspectives and methodologies in controlling nonlinear dinamical systems", *International Journal of Bifurcation and*

Chaos, 3, pp. 1343-1389.

Chen G. y Dong X. (1998) From Chaos to Order-Perspectives, Methodologies, and Applications, World Scientific Pub. Co. Singapore.

Chow T.W.S., Jiu-Chao F. y Ng K.T. (2001) "Chaotic network synchronization with application to communications", *International Journal Commun. Syst.*, **14**, pp. 217-230.

Chua L.O., Kocarev L. y Eckert K. (1993) "Chaos synchronization in Chuas's circuit", *Journal Circs. Syst. Computers* **3**(1), pp. 93-108.

Cruz-Hernández C. y Martynyuk A.A. (2009) Advances in chaotic systems with applications, Series on Stability, Oscillations, and Optimization of Systems, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge.

Dieter A., Kaneko K. y Mikhailov A. (2005) "Networks of interacting machines: production organization in complex industrial systems and bilogical cells", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, London.

Dorogovtsev S.N., Goltsev A.V. y Mendes J.F.F. (2002) "Ising model on networks with an arbitrary distribution of connections", *Physical Review E*, **66**(1), pp. 016104-1 - 016104-5.

Dorogovtsev S.N. y Mendes J.F.F. (2003) *Evolution of networks*, Oxford University Press, Oxford.

Eames K.T.D. y Keeling M.J. (2004) "Monogamous networks and the spread of sexually transmitted diseases", *Mathematical Biosciences*, **189**(2), pp. 115-130.

Faloutsos M., Faloutsos P. y Faloutsos C. (1999) "On Power-Law Relationships of the Internet Topology", *Comput. Commun. Rev.*, **29**, pp. 251-262.

Feldmann U., Hasler M. y Schwarz W. (1996) "Communication by chaotic signals: the inverse system approach", *International Journal Circuits Theory and Applications*, **24**, pp. 551-579.

Liu F., Ren Y., Shan X. y Zulian (2002) "A linear feedback synchronization theorem for a class of chaotic systems", *Chaos, Solitons & Fractals*, **13**(4), pp. 723-730.

Fradkov A. L. y Markov A.Y. (1997) "Adaptive synchronization of chaotic systems based on speed gradient method and passification", *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, **44**(10), pp. 905-917.

Fradkov A.L. y Pogromsky A.Y. (1998) Introduction to control of oscillations and chaos, World Scientific Publishers, Singapure.

Fujisaka H. y Yamada T. (1983) "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems", *Prog. Theor. Phys.*, **69**(1), pp. 32-47.

Goldreich P. (1975) "Explanation of a frequent encounterment of commensurable average motions in solar systems", In Tides and resonances in solar systems M.:Mir.

González-Miranda J.M. (2004) Synchronization and control of chaos: an introduction for scientists and engineers, Imperial College Press, Singapore.

Grassi G. y Mascolo S. (1999) "Synchronization of high-dimensional chaos generators by observer design", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**(6), pp. 1175-1180.

Green D.G. y Bossomaier T. (1993) Complex systems: from biology to computation, IOS Press.

Halle K.S., Chua L.O., Anischenko V.S. y Safonova M.A. (1992) "Signal amplification via chaos: Experimental evidence", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **2**(4), pp. 1011-1020.

Hartwell L.H., Hopfield J.J., Leibler S. y Murray A.W. (1999) "From molecular to modular cell biology", *Nature*, **402**, pp. C42-C47.

Haynie D.L. y Quant J. (2002) "Friendship networks and delinquency: The relative nature of peer delinquency", *Journal of Quantitative Criminology*, **18**(2), pp. 99-134.

Itoh M., Yang T y Chua L.O.(1999a) "Experimental study of impulsive synchronization of chaotic and hyperchaotic circuits", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**(7), pp. 1393-1424.

Itoh M., Yamamoto N., Yang T y Chua L.O. (1999b) "Performance Analysis of Impulsive Synchronization", *Proc. of the 1999 European Conf. on Circuit Theory and Design*, pp. 353-356.

Itoh M., Yang T. y Chua L.O. (2001) "Conditions for Impulsive Synchronization of Chaotic and Hyperchaotic Systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**(2), pp. 551-560.

Kennedy M.P. (1992) "Robust Op-Amp realization of Chua's circuit", Fre-quenz, **46**, pp. 66-80.

Khalil H. (1992) Nonlinear systems, Mcmillan Publishing Company.

Kocarev Lj., Halle K.S., Eckert K. y Chua L.O. (1992) "Experimental demostration of secure communications via chaotic synchronization", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **2**(3), pp. 709-713.

Khadra A., Liu X.Z. y Shen X. (2003a) "Application of impulsive synchronization to communication security", *IEEE Trans. Circuits and Sys.-I*, **50**(3), pp. 341-351.

Khadra A., Liu X.Z. y Shen X. (2003b) "Robust impulsive synchronization and application to communication security", *DCDIS*, *Series B: Applications & Algorithms*, **10**, pp. 403-416.

Kouomou Y.C. y Woafo P. (2003) "Cluster synchronization in coupled chaotic semiconductor lasers and application to switching in chaos-secured communication networks", *Optics Communications*, **223**(4-6), pp. 283-293.

Krebs V. (2002) "Mapping networks of terrorist cells", Connections, **24**(3), pp. 43-52.

Latora V. y Marchiori M. (2004) "How the science of complex networks can help

developing strategies against terrorism", Chaos, Solitons & Fractals, 20(1), pp. 69-75.

Li Z. y Chen G. (2004) "Design of coupling functions for global synchronization of uncertain chaotic dynamical networks", *Physics Letters A*, **326**(5-6), pp 333-339.

López-Gutiérrez R.M., Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Mancilla D. (2008a) "Communicating via robust synchronization of chaotic lasers", Por publicarse en *Chaos Solitons & Fractals*.

López-Gutiérrez R.M., Cruz-Hernández C., Posadas-Castillo C., García-Guerrero E.E. e Inzunza-González E. (2008b) "Encriptamiento de información utilizando circuitos y láseres caóticos", *V Encuentro, Participación de la Mujer en la Ciencia*, León, Guanajuato, 21 al 23 de mayo.

López-Gutiérrez R.M., Cruz-Hernández C., Posadas-Castillo C., García-Guerrero E.E. (2008c) "Encrypted audio transmission using synchronized Nd:YAG lasers", *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, **30**, pp. 1032-1036.

López-Mancilla D. y Cruz-Hernandez C. (2004) "An analysis of robustness on the synchronization of chaotic systems under nonvanishing perturbations using modes", WSEAS Transactions on Mathematics 3(2), pp. 364-369.

López Mancilla D. y Cruz-Hernández C. (2005a) "Output synchronization of chaotic systems: Model-matching approach with application to secure communication," *Non-linear Dynamics & Systems Theory*, **5**(2), pp. 141-156.

Rafikov M. y Balthazar J.M. (2008) "On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic systems via linear feedback control", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **13**(7), pp. 1246-1255.

Marubia S.C., Mikhailov A.S. y Zanette D.H. (2004) Emergence of dynamical order: synchronization phenomena in complex systems, World Scientific Publishing Co. Ltd., Singapore.

Mirasso C.R., Colet P. y García-Fernández P. (1996) "Synchronization of chaotic

semiconductor lasers: Application to encoded communications", *Phot. Technol Lett*, **8**(2), pp. 299–301.

Morgül Ö., Solak E. y Akgül M. (2003) "Observer based chaotic message transmission", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13**(4), pp. 1003-1017.

Netoff T.I., Clewley R., Arno S., Keck T. y White J.A. (2004) "Epilepsy in small-world networks", *The Journal of Neuroscience*, **24**(37), pp. 8075–8083.

Newman M.E.J. (2001) "Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results", *Physical Review E*, **64**(1), pp. 016131-1 - 016131-8.

Newman M.E.J. (2001b) "Scientific collaboration networks. II. Shortest paths, weighted networks, and centrality", *Physical Review E*, **64**(1), pp. 016132-1 - 016132-7.

Newman M.E.J. (2003) "The structure and function of complex networks", SIAM Review, 45(2), pp. 167-256.

Nijmeijer H. y Mareels I.M.Y. (1997) "An observer looks at synchronization", *IEEE Trans. Circuit Syst. I*, **44**(10), pp. 882-890.

Número especial (2004) "Towards a new vision of complexity", *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**(1).

Número especial (2007) "In search of a theory of complexity", Chaos, Solitons & Fractals, **34**(1).

Pastor-Satorras R. y Vespignani A. (2004) Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach, Cambridge University Press, Cambridge.

Pecora L.M. y Carroll T.L. (1990) "Synchronization in chaotic systems", *Phys. Rev. Lett.*, **64**(8), pp. 821-824.

Pikovsky A., Rosenblum M. y Kurths J. (2001) Syncronization: a universal concept in nonlinear sciences, Cambridge University Press, United Kingdom.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Mancilla D. (2005a) "Synchronization of chaotic neural networks: A generalized Hamiltonian systems approach",

International Conference on Fuzzy Systems, Neural Networks and Genetic Algorithms (FNG 2005), Tijuana, México, 13 al 14 octubre.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Mancilla D. (2005b) "Sincronización de múltiples osciladores de Rössler", Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático, Cuernavaca Morelos, 19 al 21 de octubre.

Posadas-Castillo C., López-Gutierrez R.M. y Cruz-Hernández C. (2006a) "Secure communication based on synchronized solid state Nd:YAG laser", 10th World Multi—Conference on Systemics, Cybernetics, and Informatics, Orlando Fl, USA, 16 al 19 de julio.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M (2006b) "Realización y sincronización experimental de una red de circuitos de Chua" *Memorias del Congreso Nacional de la Sociedad Mexicana de Instrumentación SOMI XXI*, Ensenada Baja California, México, 22 al 25 de octubre.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2006c) "Synchronization in a network of Chua's circuits", *The Fourth IASTED, International Conference on Circuits, Signals, and Systems*, San Francisco, California, USA, 20 al 22 de noviembre.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2006d) "Red compleja de circuitos de Chua: construcción y sincronización", 2da Conferencia Internacional de Diseño Electrónico ICED, Veracruz, México, 21 al 23 de noviembre.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2006e) "Synchronization in a network of Chua's circuits", 9th Experimental Chaos Conference, San Jose dos Campos, Sao Paulo, Brasil.(Poster #84), 29 de mayo al 1 de junio.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Mancilla D. (2007a) "Synchronization of chaotic neural networks: A generalized Hamiltonian systems approach", *Hybrid Intelligent Systems Analisis and Design*, Springer Verlag.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2007b) "Synchronization in arrays of Chaotic Neural Networks", Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing, Springer Verlag, pp. 743-754.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2007c) "Experimental realization of synchronization in complex networks", *European Conference on Complex Systems*, Dresden, del 1 al 6 de octubre, pp. 134.

Posadas-Castillo C., López-Gutierrez R.M. y Cruz-Hernández C. (2008a) "Synchronization of chaotic solid-state Nd:YAG lasers: Application to secure communication", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(8), pp. 1655-1667.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M (2008b) "Experimental realization of synchronization in complex networks with Chua's circuits like nodes", *Chaos, Solitons & Fractals*. Por publicarse, doi:10.1016/j.chaos.2007.09.076.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutierrez R.M. (2008c) "Synchronization of chaotic neural networks with delay in irregular networks", *Applied Mathematics and Computation*, por publicarse, doi: 10.1016/j.amc.2008.08.015.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2008d) "Synchronization of 3D CNNs in irregulars array", 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, Ajaccio, Corsica, France, 25 al 27 de junio, pp. 321-325.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2008e) "Synchronization in a network of chaotic solid-state ND:YAG lasers", 17th IFAC World Congress, Seul Korea, 6 al 11 de julio, pp. 1565-1570.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2008f) "Experimental chaos synchronization in networks with Rössler oscillators like nodes", 10th Experimental Chaos Conference, 3 al 6 de julio, Catania, Italia.

Posadas-Castillo C., Cruz-Hernández C. y López-Gutiérrez R.M. (2008f) "Synchronization in a network of Chua's circuits", Sometido a: Nonlinear Dynamics & Systems

Theory.

Potterat J.J., Rothenberg R.B. y Muth S.Q. (1999) "Network structural dynamics and infectious disease propagation", *International Journal of STD & AIDS*, **10**(3), pp. 182-185.

Potterat J.J., Phillips-Plummer L, Muth S.Q., Rothenberg R.B., Woodhouse E, Maldonado-Long T.S., Zimmerman-Roger H., Zimmerman H.P. y Muth J. B. (2002) "Risk network structure in the early epidemic phase of HIV transmission in Colorado Springs", Sex. Trans. Infect. 78 (Suppl. 1), pp. i159-i163.

Rodríguez-Angeles A. y Nijmeijer, H. (2004) "Mutual synchronization of robots via estimated state feedback: a cooperative approach", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **12**(4), pp. 542-554.

Sánchez-Díaz A., Mirasso C., Colet P. y García-Fernández P. (1999) "Encoded Gbits digital communications with synchronized chaotic semiconductor lasers", *IEEE Journal Quant Electron*, **35**(3), pp. 292–297.

Schechter B. (1996) "How the brain gets rhythm", *Science*, **274**(5286), doi: 10.1126/science.274.5286.339, pp. 339-340.

Schiff S.J., So P., Chang T., Burke R.E. y Sauer T. (1996) *Phys. Rev. E*, **54**(6), pp.6708.

Signeul R.A.O. (1958) "Apparat for behandling av ett objeki modelst riktade vibrationer", Sverige, patent No. 163270, Ki. 80a: 49. Patenttid fran den 6 Augusti 1946; pablicerat den 13 maj.

Sira-Ramírez H. y Cruz Hernández C. (2001) "Synchronization of chaotc systems: A generalized hamiltonian systems approach", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **11**(5), pp. 1381-1395.

Scott J. (2000) Social network analysis: A handbook, 2da ed., Sage Publications, Londres.

Sivaprakasam S y Shore KA. (2000) "Message encoding and decoding using chaotic external-cavity diode lasers", *IEEE J Quant Electron*, **36**(1), pp.35–44.

Sobiski D. J. y Thorp J. S. (1998) "Chaotic communication via the extended Kalman Filter", *IEEE Trans. Circuit Syst. I*, **45**(2), pp. 194-197.

Stojanovski T., Kocarev L. y Parlitz U. (1996) "Driving and Synchronizing by Chaotic Impulses", *Phys. Rev. E*, **54**(2), pp. 2128-2131.

Strogatz S. H. (2001) "Exploring complex networks", Nature, 410, pp. 268-276.

Tech-Lu Lioa y Shin-Hwa Tsai (2000) "Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications", *Chaos, Solitons & Fractals* **11**(9), pp. 1387-1396.

Terry J. R. (2002) "A comparative analysis of Rössler type dynamics and laser systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(3), pp. 495-509.

Uny Cao Y., Fukunaga A. S. y Kahng A.B. (1997) "Cooperative mobile robotics: Antecedents and directions", *Autonomous Robots*, **4**(1), pp. 7-27.

Uchida A., Shinozuka M., Ogawa T. y Kannari F. (1999) "Experiments on chaos synchronization in two separate microchip lasers" *Opt. Lett.* **24**(13), pp. 890-892.

Ushio T. (1996) "Synthesis of synchronized chaotic systems based on observers", International Journal of Bifurcation and Chaos, 9(3), pp. 541-546.

Van Wiggeren G.D. y Roy R. (1998) "Communication with chaotic lasers" *Science*, **279**(5354), pp. 1198-1200.

Van Wiggeren G.D. y Roy R. (1999) International Journal of Bifurcation and Chaos **9**(11), pp. 2129-2156.

Wagg D.J. (2002) "Partial synchronization of nonidentical chaotic systems via adaptive control with applications to modeling coupled nonlinear systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(3), pp. 561-570.

Wang X. F. (2002) "Complex networks: Topology, dynamics and synchronization",

International Journal of Bifurcation and Chaos, 12(5), pp. 885-916.

Wang X. F. y Chen G. (2002a) "Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility," *IEEE Trans. Circuits Syst.I*, **49**(1), pp. 54-62.

Wang X. F. y Chen G. (2002b) "Synchronization in small-world dynamical networks", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(1), pp. 187-192.

Wasserman S. y Faust K. (1994) Social Networks Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Watts D.J. (2003) Six degrees: the science of connected age, W.W. Norton & Company.

Watts D. J. (1999) Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Watts D. J. y Strogatz S. H.(1998) "Collective dynamics of 'small-world' networks", Nature, **393**(6684), pp. 440-442.

Winful H.G. y Wang, S.S. (1988) "Stability of phase locking in coupled semiconductor laser arrays", *Appl. Phys. Lett.* **53**(20), pp. 1894-1896.

Wolf R. (1998) "Mensajes químicos: de la planta del maíz a la sincronía menstrual", Avance y Perspectiva, 17, pp. 3-13.

Wu C.W. y Chua L.O. (1995) "Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems", *IEEE Trans. Circuits Sist. I*, **42**(8), pp 430-447.

Wu X., Cai J. y Zhao Y. (2006) "Some new algebraic criteria for chaos synchronization of Chua's circuits by linear state error feedback control", *International Journal of Circuit Theory and Applications*, **34**, pp. 265-280.

Yamamoto S., Hino T. y Ushio T. (2002) "Delayed feedback control with a minimal-order observer for stabilization of chaotic discrete-time systems", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(5), pp. 1047-1055.

Yalcin M.E., Suykens J. A. K. y Vandewalle J.P.L. (2005) Cellular neural networks,

multi-scrol chaos and synchronization, World Scientific Publishing Co. Ltd. Singapore.

Yang T. y Chua L.O. (1997) "Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication", *IEEE Trans. Circ.* Syst. I, 44(10), pp. 976-988.

Yaneer Bar-Yam (1997) Dynamics of complex systems, Addison-Wesley.