

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

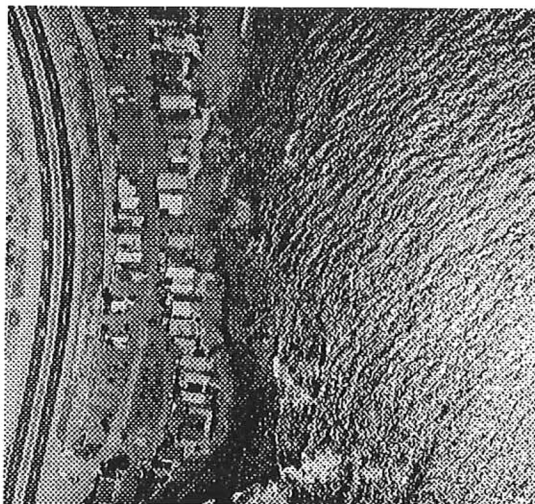
FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS



ESTADISTICAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN DE SUPERFICIES

RUGOSAS ALEATORIAS A PARTIR DE IMAGENES REMOTAS

CONSIDERANDO UNA FUNCION DE BRILLO GAUSSIANA.



TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

OCEANOLOGO

PRESENTA:

MARK MARIN HERNANDEZ

Ensenada, Baja California, Enero de 1997

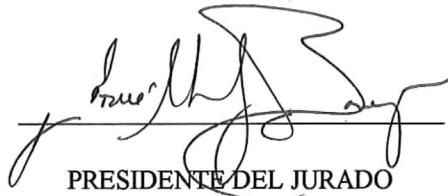
**ESTADISTICAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN DE SUPERFICIES
RUGOSAS ALEATORIAS A PARTIR DE IMAGENES REMOTAS
CONSIDERANDO UNA FUNCION DE BRILLO GAUSSIANA**

TESIS

QUE PRESENTA

MARK MARIN HERNANDEZ

APROBADA POR



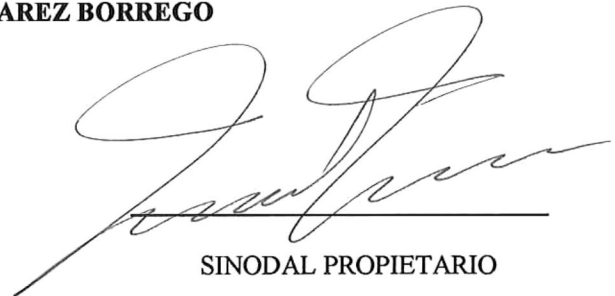
PRESIDENTE DEL JURADO

DR. JOSUE ALVAREZ BORREGO



SINODAL PROPIETARIO

M.C. RAFAEL HERNANDEZ WALLS



SINODAL PROPIETARIO

M.C. MANUEL MORENO MERCADO

RESUMEN

El problema de obtener información de las propiedades estadísticas de superficies rugosas aleatorias a partir de imágenes remotas fue resuelto por Alvarez Borrego en 1993, que presentó un modelo para superficies uni y bidimensionales, validando éstos con ejemplos numéricos y resultados experimentales.

En este trabajo se realizó el mismo desarrollo descrito por Alvarez Borrego en 1993, utilizando los mismos parámetros geométricos y también para superficies uni y bidimensionales, pero con una función de brillo Gaussiana y no una tipo rect o circ, como en el caso presentado por él.

Este trabajo ha sido motivado por la inquietud de algunos investigadores que han trabajado en este mismo campo y que han comentado que posiblemente una manera mas sencilla de describir las estadísticas de primer y segundo orden de superficies rugosas aleatorias, sea a través de una función de brillo Gaussiana y no mediante una función rect o circ.

Los resultados mostraron que con la función de brillo Gaussiana es posible obtener una relación analítica en las ecuaciones y no tan solo numérica como sucede al utilizar la función rect o función circ. Pero al analizar el comportamiento de las relaciones analíticas obtenidas en las distintas geometrías, pudo observarse que los valores obtenidos de variancia y de la correlación son muy pobres. Además, la imagen que se obtiene al utilizarse una función de brillo Gaussiana nos deja con el problema inicial de tener un rango de valores de grises en la imagen y esto es una dificultad cuando uno desea aplicar este modelo a situaciones físicas reales. Concluyendo que las funciones de brillo rect o circ son de mayor utilidad en la aplicación del modelo que una función de brillo Gaussiana.

AGRADECIMIENTOS

Al CICESE por permitirme realizar este trabajo en sus instalaciones.

Al CONACYT por su apoyo para la realización de este trabajo a través del proyecto 1884P-T “Determinación de propiedades estadísticas de la superficie del mar a partir de imágenes remotas.

Al Dr. Josué Alvarez Borrego por dirigir y detallar este trabajo.

Al M.C. Rafael Hernández Walls y al M.C. Manuel Moreno Mercado por aceptar ser mis sinodales propietarios y por sus comentarios sobre el trabajo.

A Fabiola Lafarga de la Cruz por su apoyo durante la carrera y la realización de este trabajo.

Al equipo de procesado de imágenes: Victor, Pech, Octavio.

DEDICATORIA

A MIS PADRES

Carlos y Yolanda

A MIS HERMANOS

Antonio y Edgar

INDICE

I INTRODUCCION.....	1
II OBJETIVO.....	5
II.1 Objetivos particulares.....	5
III METODOLOGIA.....	6
IV RESULTADOS.....	12
IV.1 Relaciones entre las variancias de la imagen, pendiente y superficie.....	12
IV.2 Caso Unidimensional.....	12
IV.3 Caso Bidimensional.....	18
IV.3.1 Caso Isotrópico.....	19
IV.3.2 Caso Anisotrópico.....	22
IV.4 Correlaciones.....	26
IV.4.1 Caso Unidimensional.....	26
IV.4.2 Caso Bidimensional.....	32
V CONCLUSIONES.....	40
VI LITERATURA CITADA.....	41

Lista de figuras

Figura 1	Esquema de la situación física.....	6
Figura 2	Esquema de la diferencia entre la función $\text{rect}(x)$ y la función Gaussiana.....	11
Figura 3	Esquema del ángulo que se forma entre el eje x y el plano tangente a la superficie.....	13
Figura 4	Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales y la variancia de la intensidad de la imagen Caso unidimensional. a) función Gaussiana. b) función rect	17
Figura 5	Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales y la variancia de la intensidad de la imagen Caso bidimensional isotrópico. a) función Gaussiana. b) función rect	21
Figura 6	Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales y la variancia de la intensidad de la imagen Caso bidimensional anisotrópico. Función Gaussiana. a) para un valor de σ_{Iy}^2 de 0.02 b) para un valor de σ_{Iy}^2 de 0.12.....	24

Lista de figuras (continuación)

Figura 7	Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales y la variancia de la intensidad de la imagen Caso bidimensional anisotrópico Función rect. a) para un valor de $\sigma_{\Gamma y}^2$ de 0.02 b) para un valor de $\sigma_{\Gamma y}^2$ de 0.12.....	25
Figura 8	Gráfica de las relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso unidimensional. Función Gaussiana. a) con un valor de $\sigma_{\Pi} = 0.2121$. b) con un valor de $\sigma_{\Pi} = 0.4242$	30
Figura 9	Gráfica de las relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso unidimensional Función rect a) con un valor de $\sigma_{\Pi} = 0.2121$. b) con un valor de $\sigma_{\Pi} = 0.4242$	31
Figura 10	Gráfica de las relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso bidimensional. Función Gaussiana.....	38

Lista de figuras (continuación)

Figura 11	Gráfica de las relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso bidimensional. Función rect.....	39
-----------	--	----

I INTRODUCCIÓN

Los estudios físicos que se realizan en el medio ambiente marino y especialmente en las zonas costeras, constituyen un aporte al conocimiento hidrodinámico de éstas. Las investigaciones que se realizan con la finalidad de conocer detalladamente la hidrodinámica de las aguas costeras, son de particular importancia para atender las necesidades que se presentan en la programación de la explotación de los recursos naturales y en el diseño de obras e instalaciones que serán utilizadas por la industria, el turismo o la maricultura.

Los oceanógrafos han tratado de entender la compleja estructura de la superficie marina para lo que han desarrollado técnicas que les permitan obtener series de tiempo de altura de oleaje con la ayuda de sensores de presión. La importancia de obtener esta información radica, en que apartir de ella, se pueden explicar la generación de las olas, la propagación y predicción de las mismas y los intercambios de energía entre masas de agua.

Recientemente, con la gran necesidad que se tiene de poder contar con mediciones locales de oleaje, tanto en escala espacial como temporal se han realizado estudios para estimarlo de manera cuantitativa empleando imágenes de radar y fotografías aéreas. Desde fines del siglo pasado se empezaron a medir algunos parámetros ópticos

(irradiancia ascendente, irradiancia descendente, etc.) y oceanográficos (temperatura, salinidad, densidad, etc.) con la finalidad de estudiar la superficie del mar (Jerlov, 1976). La irradiancia de la luz reflejada sobre la superficie del mar fue el primer parámetro óptico que se midió, después se efectuaron mediciones de la irradiancia espectral a varias profundidades, la cual aunada a otras variables oceanográficas se utiliza para determinar la productividad orgánica primaria del océano. Las ventajas que presentan los métodos ópticos para el estudio de la superficie marina es que pueden aplicarse tanto para el estudio de olas en aguas profundas como en aguas someras, y el procesamiento de los datos es rápido y sencillo comparado con otros métodos (Alvarez Borrego, 1993).

A mediados de este siglo, Cox y Munk (1954a, 1954b) realizaron estudios de las pendientes de la superficie del mar derivadas de las reflexiones especulares de la luz sobre la superficie marina, patrón de brillo, las cuales son grabadas en fotografías aéreas. En una primera aproximación, estos autores encontraron que la distribución de las pendientes es Gaussiana. Simultáneamente con estos estudios, Barber (1954) estimó la direccionalidad de las ondas del mar a partir del patrón de difracción de una imagen de la superficie marina.

Tiempo después, en 1958, Cox realiza mediciones de pendientes de olas capilares, encontrando un comportamiento bastante complicado de la variancia de las pendientes en función de la velocidad del viento. Estudios posteriores en el estudio del oleaje fueron

llevados a cabo por Stilwell (1969) quien analizó fotografías de la superficie del mar con la ayuda de un sistema óptico; Kasevich (1975) continuó el trabajo de Stilwell, llegando a concluir que la luz que llega a la cámara, después de ser reflejada por la superficie, está relacionada con la orientación y la altura de la cámara; Peppers y Ostrem (1978) propusieron un modelo para determinar fielmente las pendientes de las ondas a partir de fotografías del mar; Chapman e Irani (1981) reportaron un análisis de los errores involucrados al estimar el espectro de pendientes de la superficie del mar mediante fotografías aéreas.

Actualmente se han llevado a cabo estudios para calcular las propiedades estadísticas de la superficie marina por medio de fotografías aéreas. Alvarez-Borrego (1993) trabajando con superficies rugosas aleatorias en una y dos dimensiones, aplica una función, llamada función de brillo, utilizada para encontrar la relación entre la función de autocorrelación de las variaciones de la intensidad en la imagen del patrón de brillo con la función de autocorrelación de las alturas de la superficie.

La función de brillo describe el brillo que se produce cuando la luz que proviene de la fuente se refleja sólo una vez en la superficie. De esta manera, puede observarse que la imagen de la superficie consiste en regiones brillantes y oscuras que forman un patrón de brillo, el cual es codificado en dos niveles escogiendo un umbral adecuado después de analizar el histograma de intensidad de la imagen. A los niveles “brillantes” se les asignó

el valor de uno y a las regiones oscuras se les asignó el valor de cero. De esta manera encuentra que los patrones de brillo obtenidos en el plano imagen contienen información estadística de las alturas de la superficie del mar, ya que, dependiendo de la pendiente local, la luz reflejada por cada punto de la superficie contribuye o no en la imagen.

En este trabajo se presenta la metodología desarrollada por Alvarez Borrego (1993) pero con una función de brillo distinta. La función utilizada aquí es una función Gaussiana. Esta función físicamente describe el perfil de intensidad de la fuente de luz el cual tiene una forma Gaussiana y no una distribución constante como el caso presentado por Alvarez-Borrego (1993).

Este trabajo ha sido motivado por la inquietud de algunos investigadores que han trabajado en este mismo campo y que han comentado que posiblemente una manera más sencilla de describir las estadísticas de primer y segundo orden sea a través de una función de brillo Gaussiana.

II OBJETIVO

Comprobar si una función de brillo de forma Gaussiana puede aplicarse para resolver estadísticas de primer y segundo orden de superficies aleatorias como la superficie del mar.

II.1 OBJETIVOS PARTICULARES

a) Obtención de momentos de primer y segundo orden de superficies bidimensionales de una sola escala que contienen información de un espectro Gaussiano.

III METODOLOGÍA

Descripción de la situación física.

Se ilumina la superficie con una fuente gaussiana e incoherente y con una extensión angular σ , su imagen es formada en D. El ángulo de incidencia, θ_s , se define como el ángulo entre la dirección de incidencia de la luz y la normal a la superficie promedio y θ_d representa el ángulo promedio que subtende el sistema óptico de detección con la normal a la superficie promedio, β es el diámetro aparente de la fuente. La luz que proviene de la fuente llega a la superficie, y ésta es reflejada sólo una vez, y dependiendo de la pendiente la luz reflejada contribuirá o no a la imagen de la superficie. La imagen obtenida consistirá de regiones brillantes, semioscuras y oscuras, formando el “patrón de brillo”. Los patrones de brillo obtenidos en la imagen contienen información estadística de la superficie (Alvarez-Borrego, 1995).

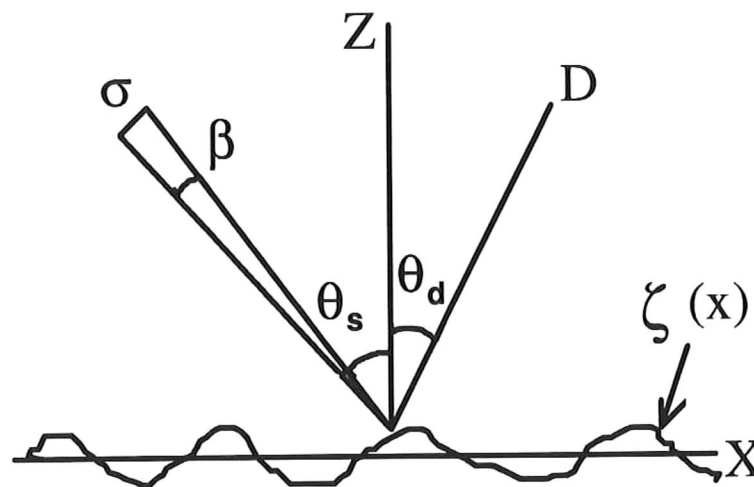


Figura 1. Esquema de la situación física.

Para obtener la información de la estadística de las variaciones de altura de la superficie rugosa, primero se definen ciertas variables. Las variaciones de altura de la superficie están dadas por la función $\zeta(x)$, que en todos los casos representará un proceso aleatorio Gaussiano con una función de correlación $C_\zeta(\tau) = \langle \zeta(x + \tau)\zeta(x) \rangle$ y una variancia σ_ζ^2 . La pendiente de la superficie la representaremos como $\Pi(x)$, con su función de correlación $C_\Pi = \langle \Pi(x + \tau)\Pi(x) \rangle$ y su variancia σ_Π^2 .

La función de correlación de las alturas de la superficie $C_\zeta(\tau)$ está relacionada con la función de correlación de las pendientes $C_\Pi(\tau)$, como: (Papoulis, 1981)

$$C_\Pi(\tau) = -\frac{d^2 C_\zeta(\tau)}{d\tau^2}, \quad (1)$$

Por otro lado, las pendientes de la superficie $\Pi(x)$, son un proceso aleatorio Gaussiano, por lo que la función de densidad de probabilidad conjunta de las pendientes, para dos distintas posiciones x_1 y x_2 está dada por (Davenport y Root, 1958):

$$p(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Pi}^2[1-C_{\Pi}^2(\tau)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - 2C_{\Pi}(\tau)\Pi_1\Pi_2}{2\sigma_{\Pi}^2[1-C_{\Pi}^2(\tau)]}\right], \quad (2)$$

donde, Π_1 y Π_2 corresponden a $\Pi(x_1)$ y $\Pi(x_2)$ respectivamente.

La imagen, $i(x)$, formada en el plano D, figura 1, es un proceso aleatorio no estacionario determinado por $\Pi(x)$ y la geometría del problema. El proceso $i(x)$ no es estacionario a pesar de que los procesos $\zeta(x)$ y $\Pi(x)$ sean estacionarios, y esto es debido a que las propiedades estadísticas de $i(x)$ son función de su posición en x .

Sin embargo esta no estacionaridad se puede evitar si consideramos un plano de observación lejano y restringimos el campo de visión. Para este caso y solo con las consideraciones anteriores tendremos la función de correlación del proceso $i(x)$, asociado a la imagen, como $C_i(\tau) = \langle i(x+\tau)i(x) \rangle$, y su variancia como σ_i^2 .

El patrón de brillo, regiones brillantes y oscuras que forman la imagen, está determinada por la superficie misma, y por la “función de brillo”, que se calcula de las posiciones y los diámetros aparentes de la fuente y el detector. Dicha función opera sobre las pendientes y la definiremos como $B(\Pi(x))$, y con la que podemos encontrar la

ubicación espacial y la extensión de los brillos. Así la autocorrelación de la imagen, $C_I(\tau)$, puede escribirse como:

$$C_I = \langle B(\Pi_1)B(\Pi_2) \rangle, \quad (3)$$

o

$$C_I(\tau) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(\Pi_1)B(\Pi_2)}{2\pi\sigma_{\Pi}^2[1-C_{\Pi}^2(\tau)]^{1/2}} \exp\left[-\frac{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - 2C_{\Pi}(\tau)\Pi_1\Pi_2}{2\sigma_{\Pi}^2[1-C_{\Pi}^2(\tau)]}\right] d\Pi_1 d\Pi_2. \quad (4)$$

Con la evaluación de esta integral se obtiene la relación entre los valores que adquieren las funciones de correlación $C_I(\tau)$ y $C_{\Pi}(\tau)$.

La metodología utilizada en este trabajo varía con respecto al realizado por Alvarez-Borrego (1993), en el tipo de función de brillo. Puesto que Alvarez-Borrego utiliza una función de brillo $\text{rect}(x)$ considerando que la intensidad con que llega la luz es uniforme en toda la superficie. Por la que en este trabajo se está considerando una

función de brillo de tipo gaussiana de tal manera que la intensidad de la luz será mayor en el centro e irá disminuyendo hacia las orillas.

La diferencia entre estas dos funciones se puede ver gráficamente en la figura 2, donde $2a$ corresponde al ancho de la fuente.

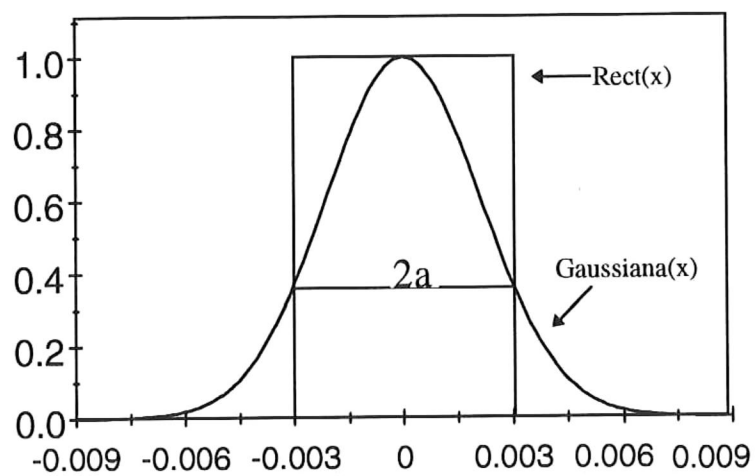


Figura 2. Esquema de la diferencia entre la función $\text{rect}(x)$ y la función gaussiana.

IV RESULTADOS

IV.1 Relaciones entre las variancias de la imagen, pendiente y superficie.

IV.2 Caso Unidimensional.

La función de brillo en forma Gaussiana puede definirse como:

$$B(\Pi) = \exp\left[-\frac{(\Pi - \Pi_0)^2}{a^2}\right], \quad (5)$$

donde $\Pi = \tan \alpha$, y α es el ángulo entre el eje x y el plano tangente a la superficie en un punto $(X_0, \zeta(X_0))$ (figura 3), $\Pi_0 = \tan[(\theta_s - \theta_d)/2]$ y $2a = (1 + \Pi_0^2)\beta/2$ define el ancho de la fuente. La función de brillo es la que nos describe la formación de los patrones de brillo que constituyen la imagen. Esta función relaciona las pendientes de la superficie con los patrones de brillo que la forman. A partir de la información obtenida del patrón de brillo se desea obtener la información del espectro de energía o de la función de correlación de las alturas de la superficie.

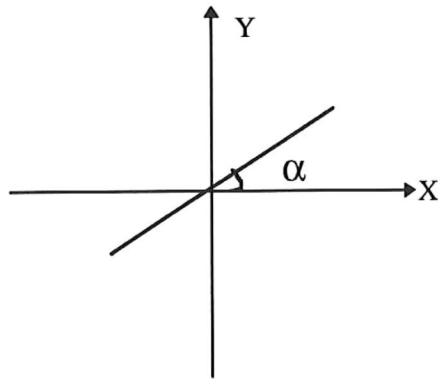


Figura 3. Esquema del ángulo que se forma entre el eje x y el plano tangente a la superficie.

De la teoría de procesos aleatorios, se tiene que el proceso aleatorio $\Pi(x)$ que representa las pendientes de la superficie es un proceso aleatorio Gaussiano. Por lo tanto en una dimensión la función de densidad de probabilidad está dada por

$$p(\Pi) = \frac{1}{\sigma_{\Pi}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\Pi^2}{2\sigma_{\Pi}^2}\right], \quad (6)$$

donde σ_{Π}^2 es la variancia de las pendientes. El promedio de la imagen, se puede escribir como (Papoulis, 1981)

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} B(\Pi)p(\Pi)d\Pi. \quad (7)$$

Sustituyendo la ecuación (5) y (6) en la ecuación (7)

$$\mu_j = \frac{1}{\sigma_{\Pi} \sqrt{2\Pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\Pi - \Pi_0)^2}{a^2}\right] \exp\left[-\frac{\Pi^2}{2\sigma_{\Pi}^2}\right] d\Pi, \quad (8)$$

e integrando se obtiene

$$\mu_j = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{\sigma_{\Pi}^2}{a^2}}} \exp\left[-\frac{\Pi_0^2}{a^2 + 2\sigma_{\Pi}^2}\right]. \quad (9)$$

La variancia de la imagen, $i(x)$, se define como (Papoulis, 1981):

$$\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [B(\Pi) - \mu_i]^2 p(\Pi) d\Pi , \quad (10)$$

y sustituyendo las ecuaciones (5), (6) y (9) en (10) e integrando se obtiene

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \frac{\sigma_{\Pi}^2}{a^2}}} \exp\left[-\frac{2\Pi_0^2}{a^2 + 4\sigma_{\Pi}^2}\right] - \frac{1}{1 + 2 \frac{\sigma_{\Pi}^2}{a^2}} \exp\left[-\frac{2\Pi_0^2}{a^2 + 2\sigma_{\Pi}^2}\right] . \quad (11)$$

La relación que existe entre la variancia de la imagen, σ_i^2 , y la variancia de las pendientes de la superficie, σ_{Π}^2 , está representada en la ecuación (11) la cual se puede observar gráficamente en la figura 4a, para unos casos típicos, utilizando la geometría descrita en la figura (1) con $\beta = 0.68^\circ$, $\theta_d = 0$ y el ángulo de incidencia, θ_s , se fue variando de 10° hasta 50° .

De esta gráfica, se puede apreciar que para ángulos de incidencia pequeños y valores de variancia de pendientes también pequeños se obtienen valores altos de variancia de la intensidad de la imagen.

Este comportamiento depende únicamente de la geometría del experimento y de la función de probabilidad de las pendientes.

De la figura 4a también se observa que para algunos casos de ángulos de incidencia, θ_s , a un mismo valor de variancia de la intensidad de la imagen le corresponden dos valores de la variancia de las pendientes, σ_{Π}^2 .

Este problema se puede resolver analizando imágenes que correspondan a dos o mas ángulos de incidencia y de estos escoger el valor de variancia de pendientes que sea consistente con los datos, Alvarez-Borrego, (1993).

Si comparamos la gráfica obtenida para este caso con la obtenida por Alvarez Borrego, figura 4b, observamos que el comportamiento de la curvas es similar, sin embargo los valores encontrados para la función de tipo Gaussiana son mas pequeños que para la de tipo rect.

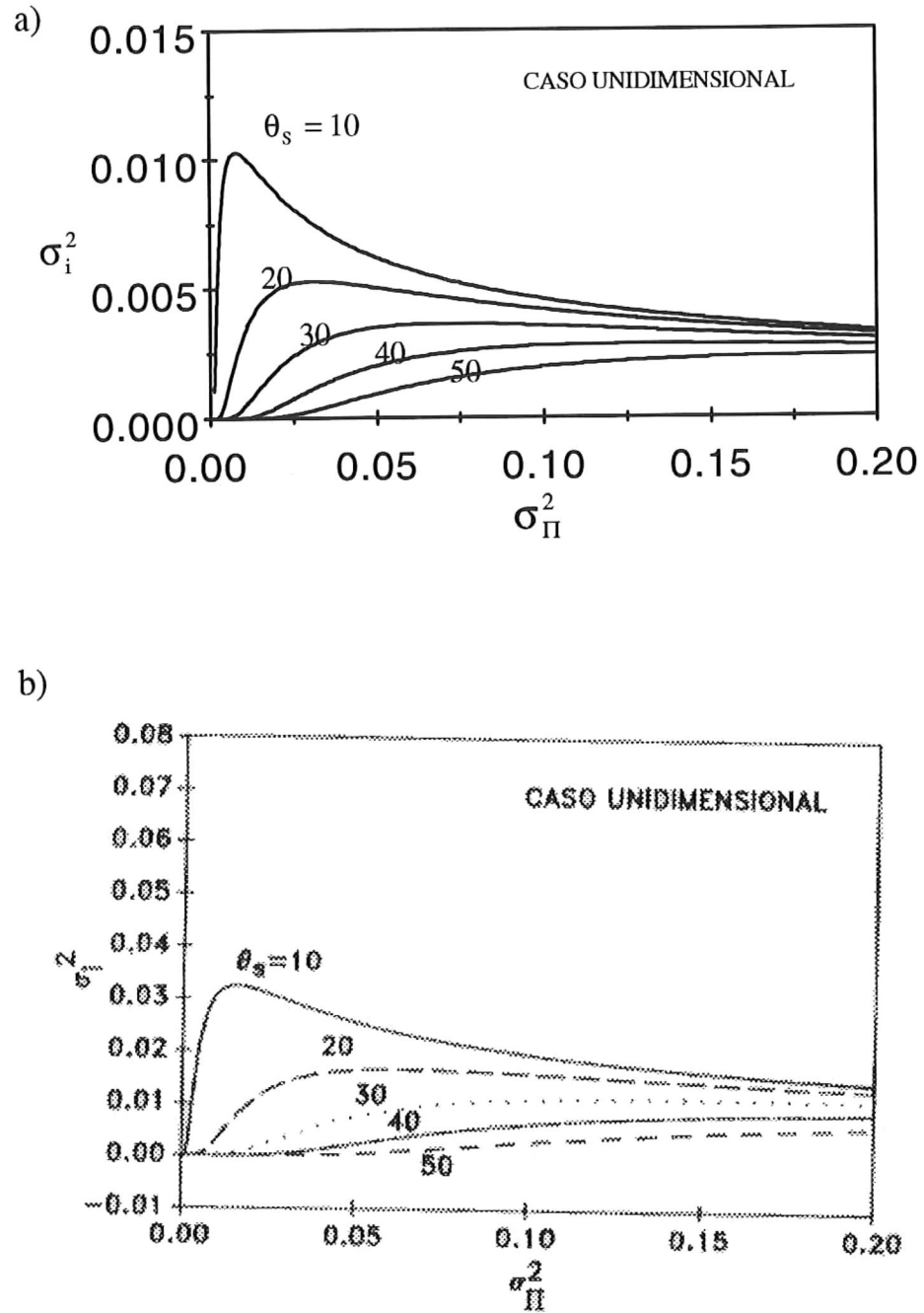


Figura 4. Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales y la variancia de la intensidad de la imagen. a) Para la función tipo Gaussiana. b) para la función tipo rect (Tomado de Alvarez-Borrego, 1993).

IV.3 Caso bidimensional

Al igual que el caso anterior, la función de brillo y la función de densidad de probabilidad en dos dimensiones está definida respectivamente como:

$$B(\Pi_x, \Pi_y) = \exp \left[-\frac{(\Pi_x - \Pi_0)^2 + (\Pi_y - \Pi_0)^2}{a^2} \right], \quad (12)$$

$$p(\Pi_x, \Pi_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Pi_x}\sigma_{\Pi_y}} \exp \left[-\frac{\Pi_x^2}{2\sigma_{\Pi_x}^2} - \frac{\Pi_y^2}{2\sigma_{\Pi_y}^2} \right], \quad (13)$$

El promedio de la imagen, μ_i se define como:

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\Pi_x, \Pi_y) p(\Pi_x, \Pi_y) d\Pi_x d\Pi_y, \quad (14)$$

sustituyendo las ecuaciones (12) y (13) en (14) obtenemos

$$\mu_i = \frac{1}{2\Pi\sigma_{\Pi_x}\sigma_{\Pi_y}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\Pi_x - \Pi_0)^2 + (\Pi_y - \Pi_0)^2}{a^2}\right] \exp\left[-\frac{\Pi_x^2}{2\sigma_{\Pi_x}^2} - \frac{\Pi_y^2}{2\sigma_{\Pi_y}^2}\right] d\Pi_x d\Pi_y. \quad (15)$$

IV.3.1 Caso Isotrópico

En este caso $\sigma_{\Pi_x} = \sigma_{\Pi_y} = \sigma_{\Pi}$, por lo tanto de la ecuación (15)

$$\mu_i = \frac{1}{1 + 2\frac{\sigma_{\Pi}^2}{a^2}} \exp\left[-\frac{2\Pi_0^2}{a^2 + 2\sigma^2}\right]. \quad (16)$$

Definiendo a la variancia como:

$$\sigma_i^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[B(\Pi_x, \Pi_y) - \mu_i\right]^2 p(\Pi_x, \Pi_y) d\Pi_x d\Pi_y, \quad (17)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{1 + 4 \frac{\sigma_{\Pi}^2}{a^2}} \exp\left[-\frac{4\Pi_0^2}{a^2 + 4\sigma_{\Pi}^2}\right] - \frac{1}{\left(1 + 2 \frac{\sigma_{\Pi}^2}{a^2}\right)^2} \exp\left[-\frac{4\Pi_0^2}{a^2 + 2\sigma_{\Pi}^2}\right]. \quad (18)$$

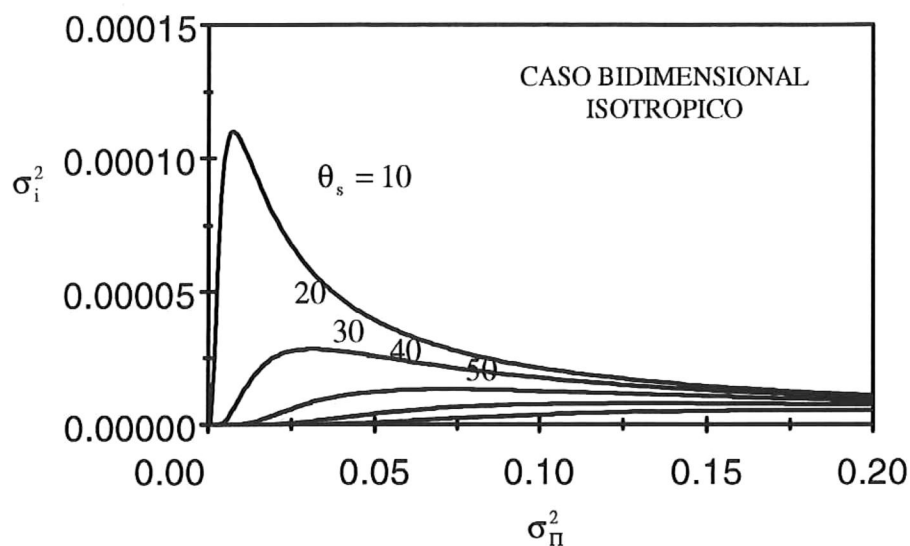
En la figura 5a se muestra la relación que existe entre la variancia de la imagen, σ_i^2 , y la variancia de las pendientes de la superficie, σ_{Π}^2 , en este caso los ángulos de incidencia se fueron variando de 10 a 50° y el ángulo de detección se mantuvo en 0°.

Para este caso se observa un comportamiento similar al caso unidimensional en el que para valores de ángulos de incidencia pequeños y valores de variancia de pendientes pequeños encontramos valores altos de variancia de la intensidad de la imagen

Pero en este caso las curvas son un poco mas abruptas que las obtenidas para el caso unidimensional, y se puede ver que para valores altos de σ_{Π}^2 la diferencia entre los valores de σ_i^2 es muy poca.

En este caso las diferencias encontradas con los resultados obtenidos con la función circ figura 5b, los valores obtenidos son mayores y las curvas descritas por esta función se cruzan.

a)



b)

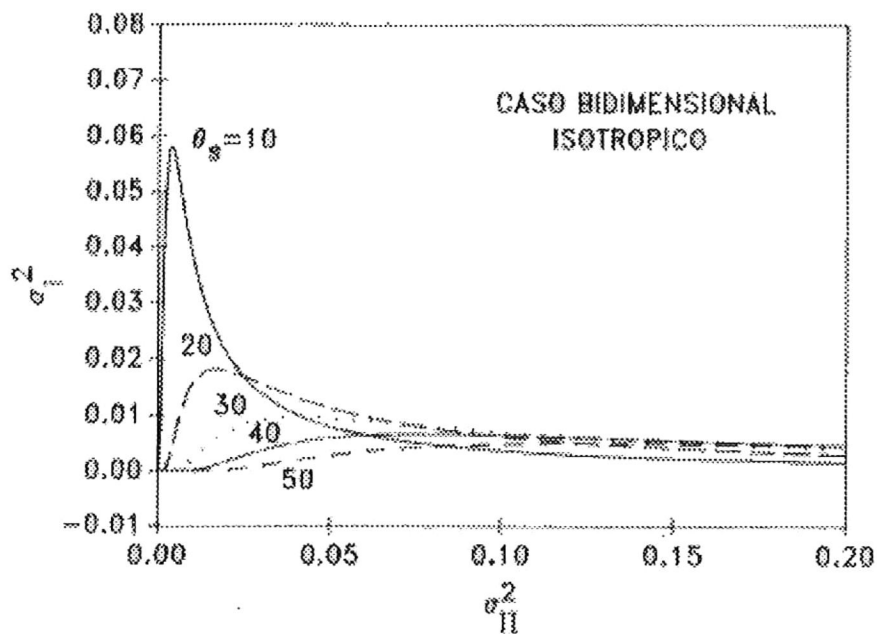


Figura 5. Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales y la variancia de la intensidad de la imagen. a) Para la función tipo Gaussiana. b) para la función tipo circ (Tomado de Alvarez-Borrego, 1993),

IV.3.2 Caso Anisotrópico

Para este caso la ecuación (15) es la que nos define el promedio de la imagen y al integrarla obtenemos:

$$\mu_i = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 2\sigma_{\Pi x}^2} \sqrt{a^2 + 2\sigma_{\Pi y}^2}} \exp \left\{ \left[\left(\frac{\sigma_{\Pi x}^2}{a^2 + 2\sigma_{\Pi x}^2} + \frac{\sigma_{\Pi y}^2}{a^2 + 2\sigma_{\Pi y}^2} \right) - 1 \right] \left(\frac{\sqrt{2}\Pi_0}{a} \right)^2 \right\}. \quad (19)$$

La variancia queda definida como:

$$\sigma_i^2 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 4\sigma_{\Pi x}^2} \sqrt{a^2 + 4\sigma_{\Pi y}^2}} \exp \left\{ \left[\left(\frac{2\sigma_{\Pi x}^2}{a^2 + 4\sigma_{\Pi x}^2} + \frac{2\sigma_{\Pi y}^2}{a^2 + 4\sigma_{\Pi y}^2} \right) - 1 \right] \left(\frac{2\Pi_0}{a} \right)^2 \right\} -$$

$$\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 2\sigma_{\Pi x}^2} \sqrt{a^2 + 2\sigma_{\Pi y}^2}} \exp \left[\left(\frac{\sigma_{\Pi x}^2}{a^2 + 2\sigma_{\Pi x}^2} + \frac{\sigma_{\Pi y}^2}{a^2 + 2\sigma_{\Pi y}^2} \right) - 1 \right] \left(\frac{\sqrt{2}\Pi_0}{a} \right)^2 \right)^2. \quad (20)$$

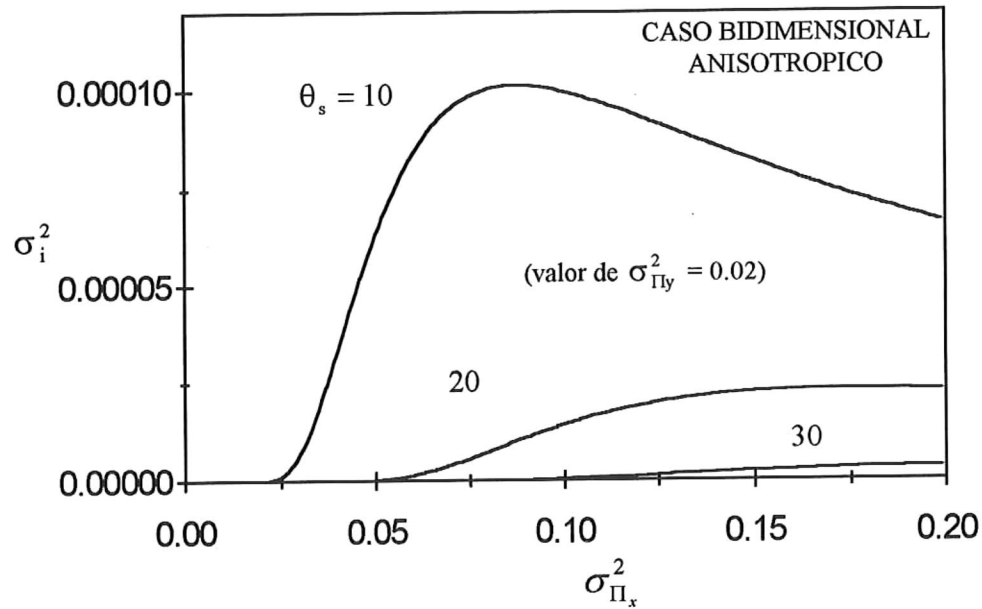
En este caso en particular se fijó el valor de $\sigma_{\Pi y}^2$, mostrando solo la variancia de σ_i^2 con $\sigma_{\Pi x}^2$ (figura 6).

El primer ejemplo se fijó en $\sigma_{\Pi y}^2 = 0.02$ (figura 6a). En este ejemplo se variaron los ángulos de incidencia de 10° a 50° , observando que para ángulos mayores a 30° los valores obtenidos de σ_i^2 son muy pequeños por lo que en la gráfica no se llegan a notar, también si se observa la escala de las dos gráficas se puede ver que para este ejemplo la escala de σ_i^2 es mucho mayor que la del segundo ejemplo. Otro aspecto que se ve para este caso, son las curvas descritas que son mucho mas suaves que para los casos anteriores.

El segundo ejemplo se fijó en $\sigma_{\Pi y}^2 = 0.12$ (figura 6b). En este caso se puede ver que solo aparece la curva correspondiente al ángulo de incidencia de 10° para los ángulos subsecuentes (20° a 50°) los valores de σ_i^2 son muy pequeños y no se alcanzan a ver sus curvas.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos con la función de tipo circ figura 7, vemos que en estos últimos sí aparecen las cinco curvas correspondientes a los diferentes ángulos, también podemos ver que para el caso de $\sigma_{\Pi y}^2 = 0.12$ hay cruzamiento entre las curvas.

a)



b)

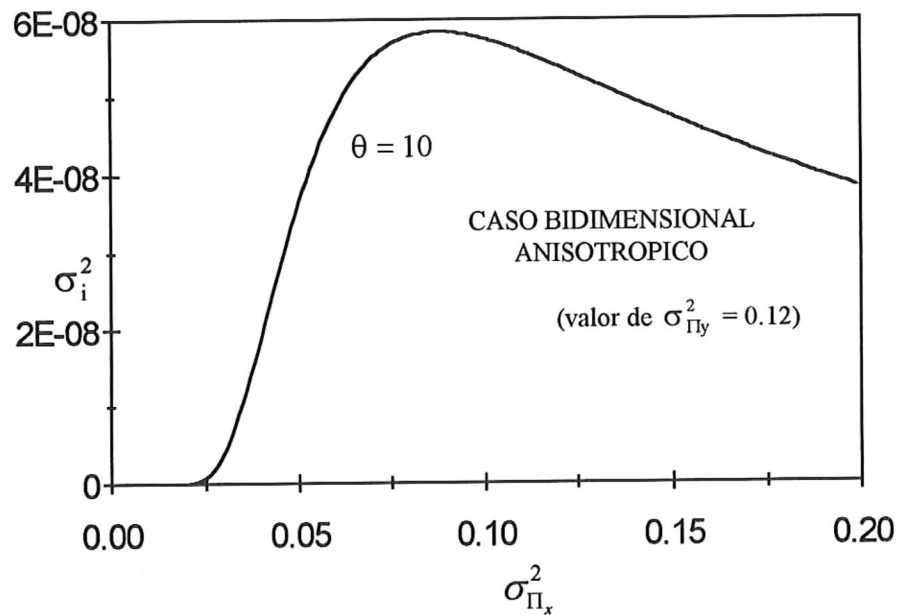


Figura 6. Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales en la dirección x con la variancia de la intensidad de la imagen. Caso bidimensional anisotrópico para función tipo Gaussiana a) Para un valor de la variancia de las pendientes en la dirección y de 0.02. b) Para un valor de la variancia de las pendientes en la dirección y de 0.12.

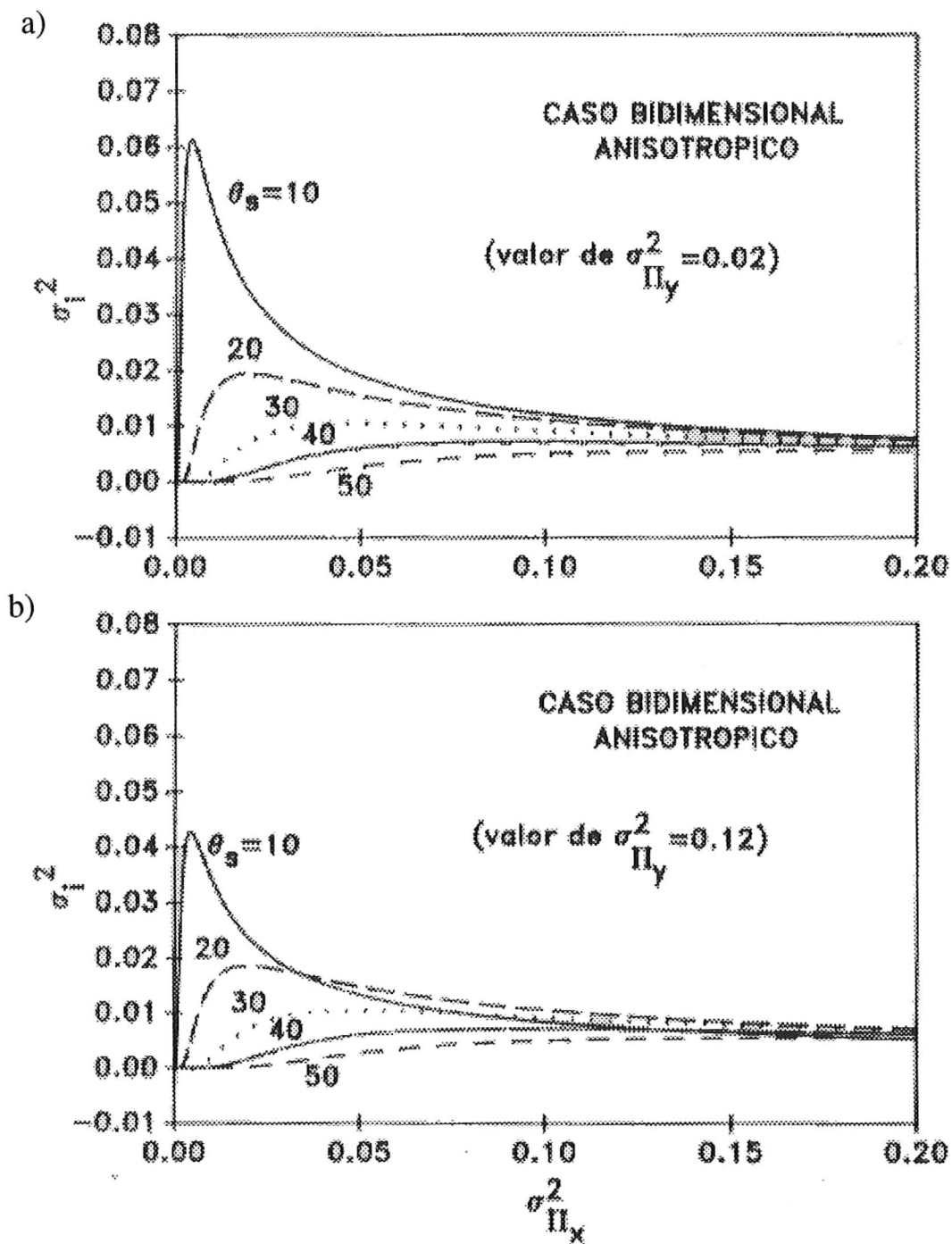


Figura 7. Gráfica de la relación entre la variancia de las pendientes superficiales en la dirección x con la variancia de las intensidades de la imagen. Caso bidimensional anisotrópico. a) Para un valor de la variancia de las pendientes en la dirección y de 0.02. b) para un valor de la variancia de las pendientes en la dirección y de 0.12. (Tomado de Alvarez-Borrego, 1993)

IV.4 CORRELACIONES

Relaciones entre las funciones de correlación de la imagen y de las alturas de la superficie. Como se mencionó anteriormente, nuestro análisis involucra tres procesos aleatorios: el perfil de la superficie, $\zeta(x)$, sus pendientes, $\Pi(x)$, y la imagen, $i(x)$.

IV.4.1 Caso unidimensional

Cada proceso tiene una función de correlación. Para el caso unidimensional la función de correlación de la imagen es:

$$C(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} B(\Pi_1)B(\Pi_2)p(\Pi_1, \Pi_2)d\Pi_1d\Pi_2 , \quad (21)$$

$$C(\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\Pi}^2[1-C_{\Pi}^2(\tau)]^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\Pi_1 - \Pi_0)^2}{a^2}\right] \exp\left[-\frac{(\Pi_2 - \Pi_0)^2}{a^2}\right]$$

$$\exp\left[-\frac{\Pi_1^2 + \Pi_2^2 - 2C(\tau)\Pi_1\Pi_2}{2\sigma_{\Pi}^2(1-C_{\Pi}^2(\tau))}\right] d\Pi_1d\Pi_2 . \quad (22)$$

Definiendo nuevas variables $X_0 \dots X_5$:

$$X_0 = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2\sigma_{\Pi}^2(1-C_{\Pi}^2(\tau))} \right),$$

$$X_1 = \left(\frac{C_{\Pi}^2(\tau)}{\sigma_{\Pi}^4(1-C_{\Pi}^2(\tau))^2} \right),$$

$$X_2 = \left(X_0 - \frac{X_1}{4X_0} \right),$$

$$X_3 = \left(\frac{\Pi_0 C_{\Pi}(\tau)}{a^2 \sigma_{\Pi}^2(1-C_{\Pi}^2(\tau))} \right),$$

$$X_4 = \left(\frac{4\Pi_0^2}{a^4} + \frac{4\Pi_0}{a^2} \left(\frac{X_3}{X_0} \right) \right),$$

$$X_5 = \left(\frac{2\Pi_0^2}{a^2} - \frac{\Pi_0^2}{X_0} \right),$$

podemos escribir el resultado como:

$$C(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\frac{\sigma^2}{a^2} + 4\frac{\sigma^4(1 - C_{\Pi}^2(\tau))}{a^4}}} \exp \left[\frac{X_4 + \left(\frac{X_3}{X_0}\right)^2}{4X_2} - X_5 \right]. \quad (23)$$

En la figura 8 podemos ver las relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen para dos diferentes valores de σ_{Π} . Para los dos casos el ángulo θ_d se mantuvo en 0° .

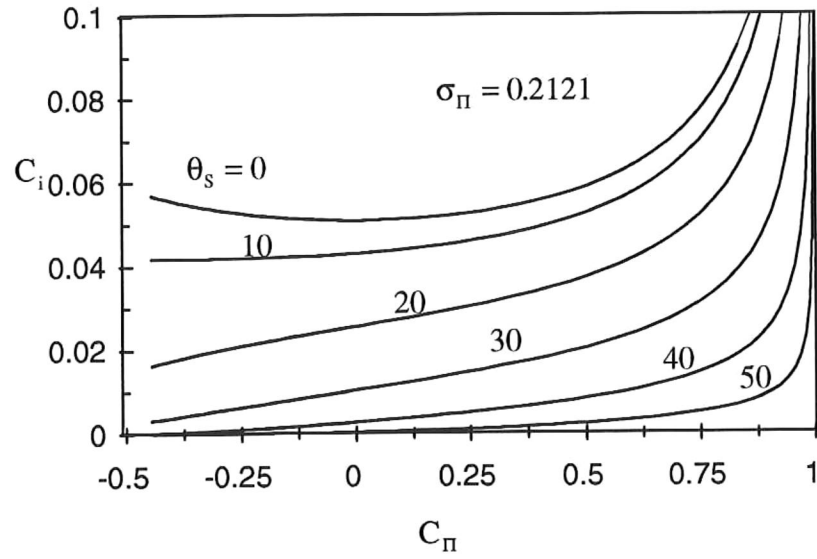
Para el primer caso se observa que para ángulos de incidencia de la luz menores a los 10° tenemos que a ciertos valores de C_i le corresponden dos valores de C_{Π} .

En el segundo caso vemos este mismo comportamiento para los ángulos menores a 20° , solo que en este caso las curvas descritas se encuentran mas cerca una de otra que en el caso anterior.

Si comparamos estos resultados con los obtenidos para una función de tipo rect

figura 9, vemos que el comportamiento es similar solo que en estos últimos las curvas descritas están más cerca una de otra.

a)



b)

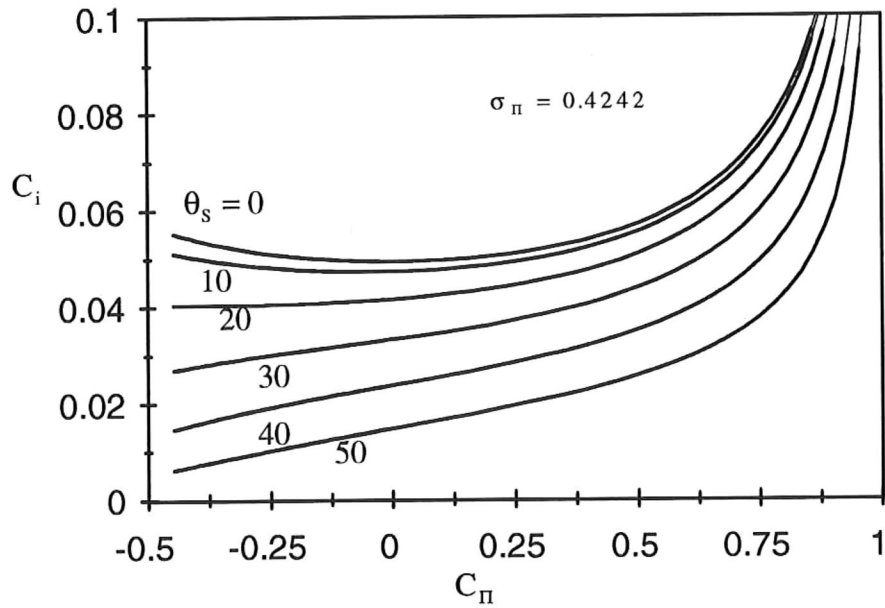


Figura 8 Relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Para función tipo Gaussiana. Caso unidimensional. a) para un valor de $\sigma_\pi = 0.2121$. b) para un valor de $\sigma_\pi = 0.4242$.

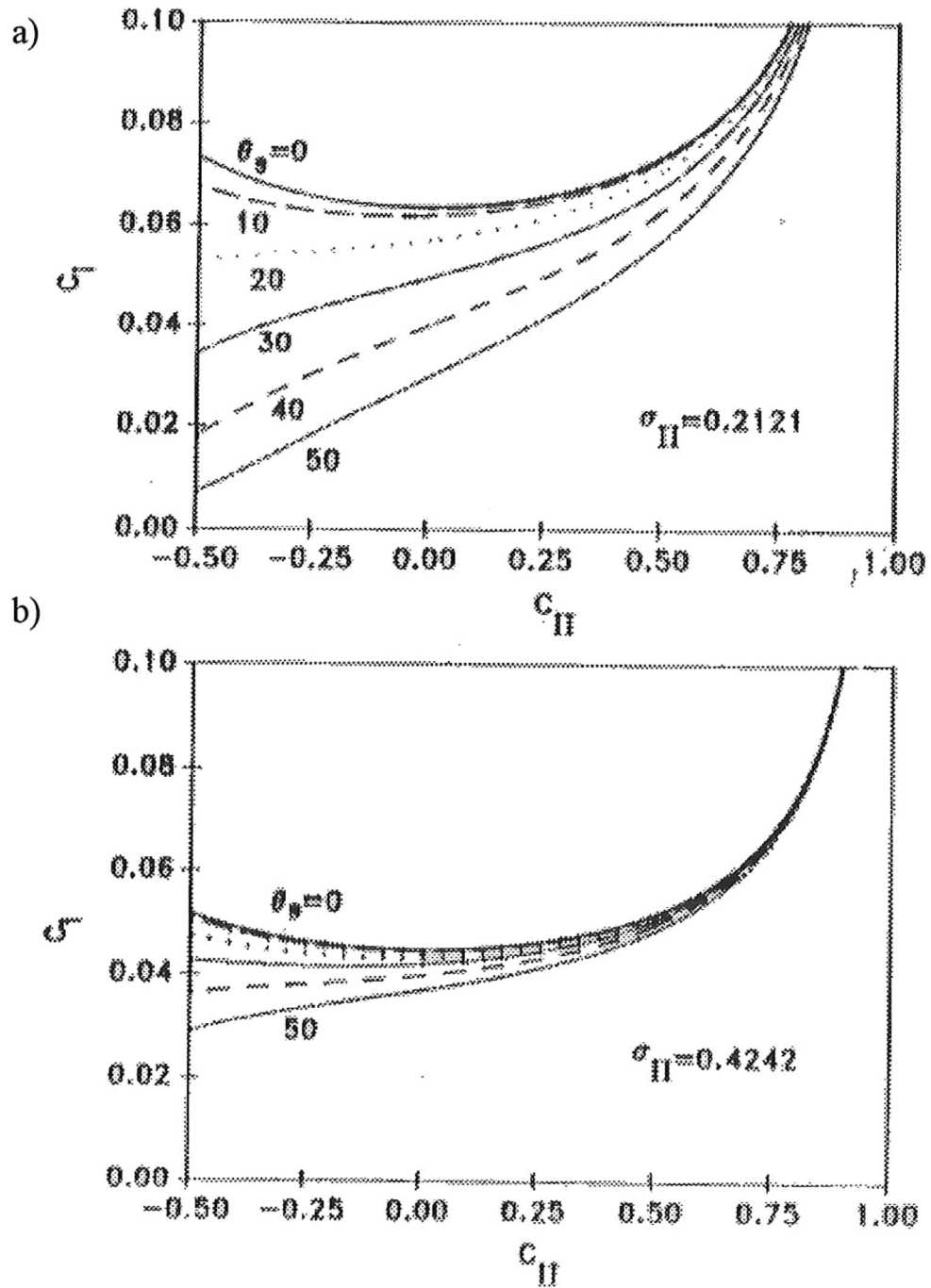


Figura 9. Relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso unidimensional. a) para un valor de $\sigma_{II} = 0.2121$. b) para un valor de $\sigma_{II} = 0.4242$. (Tomado de Alvarez-Borrego, 1993).

IV.4.2 Caso Bidimensional

Para el caso bidimensional la función de correlación de la imagen es :

$$C(\xi, \eta) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Pi_x, \Pi_y) B(\Pi_{x'}, \Pi_{y'}) p(\Pi_x, \Pi_y, \Pi_{x'}, \Pi_{y'}) d\Pi_x d\Pi_y d\Pi_{x'} d\Pi_{y'} , \quad (24)$$

donde

$$B(\Pi_x, \Pi_y) = \exp \left[-\frac{(\Pi_x - \Pi_0)^2}{a^2} - \frac{(\Pi_y - \Pi_0)^2}{a^2} \right] , \quad (25)$$

$$B(\Pi_{x'}, \Pi_{y'}) = \exp \left[-\frac{(\Pi_{x'} - \Pi_0)^2}{a^2} - \frac{(\Pi_{y'} - \Pi_0)^2}{a^2} \right] , \quad (26)$$

$$p(\Pi_x, \Pi_y, \Pi_{x'}, \Pi_{y'}) = \frac{1}{4\pi^2 |\Delta|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2|\Delta|} \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 |\Delta|_{nm} \Pi_n \Pi_m \right] , \quad (27)$$

considerando aquí que:

$$\Pi_1 = \Pi_x = \Pi_x(x_1),$$

$$\Pi_2 = \Pi_y = \Pi_y(y_1),$$

$$\Pi_3 = \Pi_{x'} = \Pi_x(x_2),$$

$$\Pi_4 = \Pi_{y'} = \Pi_y(y_2).$$

El argumento de la exponencial es entonces:

$$\begin{aligned} \arg = \frac{1}{2|\Delta|} \sum_{n=1}^4 \sum_{m=1}^4 |\Delta|_{nm} \Pi_n \Pi_m = \frac{1}{2|\Delta|} \left\{ |\Delta|_{11} (\Pi_x^2 + \Pi_{x'}^2) + |\Delta|_{22} (\Pi_y^2 + \Pi_{y'}^2) + 2|\Delta|_{13} \Pi_x \Pi_{x'} + 2|\Delta|_{24} \Pi_y \Pi_{y'} \right. \\ \left. + 2|\Delta|_{12} (\Pi_x \Pi_y + \Pi_y \Pi_{x'}) + 2|\Delta|_{14} (\Pi_x \Pi_{y'} + \Pi_{x'} \Pi_{y'}) \right\}, \end{aligned}$$

donde para el caso isotrópico $\sigma_{\Pi x}^2 = \sigma_{\Pi y}^2 = \sigma_{\Pi}^2$

$$|\Delta|_{11} = \sigma_{\Pi}^6 - \sigma_{\Pi}^2 C_{\Pi y}^2 + 2C_{\Pi xy}^2 [C_{\Pi y} - \sigma_{\Pi}^2],$$

$$|\Delta|_{22} = \sigma_{\Pi}^6 - \sigma_{\Pi}^2 C_{\Pi x}^2 + 2C_{\Pi xy}^2 [C_{\Pi x} - \sigma_{\Pi}^2],$$

$$|\Delta|_{13} = 2C_{\Pi xy}^2 [\sigma_{\Pi y}^2 - C_{\Pi y}] - C_{\Pi x} [\sigma_{\Pi y}^4 - C_{\Pi y}^2],$$

$$|\Delta|_{24} = 2C_{\Pi xy}^2 [\sigma_{\Pi x}^2 - C_{\Pi x}] - C_{\Pi y} [\sigma_{\Pi x}^4 - C_{\Pi x}^2],$$

$$|\Delta|_{12} = C_{\Pi xy} [\sigma_{\Pi x}^2 \sigma_{\Pi y}^2 - \sigma_{\Pi y}^2 C_{\Pi x} - \sigma_{\Pi x}^2 C_{\Pi y} + C_{\Pi x} C_{\Pi y}],$$

$$|\Delta|_{14} = C_{\Pi xy} [\sigma_{\Pi x}^2 \sigma_{\Pi y}^2 - \sigma_{\Pi x}^2 C_{\Pi y} - \sigma_{\Pi y}^2 C_{\Pi x} + C_{\Pi x} C_{\Pi y}],$$

$$|\Delta| = \sigma_{\Pi}^4 \sigma_{\Pi}^4 - \sigma_{\Pi}^4 C_{\Pi y}^2 - \sigma_{\Pi}^4 C_{\Pi x}^2 + C_{\Pi x}^2 C_{\Pi y}^2 - 4C_{\Pi xy}^2 (\sigma_{\Pi}^4 - \sigma_{\Pi}^2 C_{\Pi y}^2 - \sigma_{\Pi}^2 C_{\Pi x}^2 + C_{\Pi x} C_{\Pi y}).$$

Integrando una vez la ecuación (24) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 C(\xi, \eta) = & \frac{\exp[-(2\Pi_0)^2]}{4\pi^2|\Delta|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\Delta|_{11}}{2|\Delta|}\right)}} \exp \left[\frac{\left[-\frac{2\Pi_0}{a^2} + \frac{|\Delta|_{13}}{|\Delta|} \Pi_{x'} + \frac{|\Delta|_{12}}{|\Delta|} \Pi_y + \frac{|\Delta|_{14}}{|\Delta|} \Pi_{y'} \right]^2}{4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\Delta|_{11}}{2|\Delta|}\right)} \right. \\
 & - 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\Delta|_{11}}{2|\Delta|}\right) \left(\frac{\Pi_y^2}{a^2} - \frac{2\Pi_0\Pi_y}{a^2} + \frac{\Pi_{x'}^2}{a^2} - \frac{2\Pi_0\Pi_{x'}}{a^2} + \frac{\Pi_{y'}^2}{a^2} - \frac{2\Pi_0\Pi_{y'}}{a^2} + \frac{|\Delta|_{11}}{2|\Delta|} \Pi_{x'}^2 + \frac{|\Delta|_{22}}{2|\Delta|} \Pi_y^2 + \frac{|\Delta|_{22}}{2|\Delta|} \Pi_{y'}^2 \right. \\
 & \left. \left. + \frac{|\Delta|_{24}}{|\Delta|} \Pi_y \Pi_{y'} + \frac{|\Delta|_{12}}{|\Delta|} \Pi_y \Pi_{x'} + \frac{|\Delta|_{14}}{|\Delta|} \Pi_{x'} \Pi_{y'} \right) \right] d\Pi_y d\Pi_{x'} d\Pi_{y'} . \quad (28)
 \end{aligned}$$

Definiendo nuevas variables $Y_0 \dots Y_9$:

$$Y_0 = 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{|\Delta|_{11}}{2|\Delta|}\right) ,$$

$$Y_1 = \frac{1}{a^2} + \frac{|\Delta|_{22}}{2|\Delta|} - Y_0 \frac{|\Delta|_{12}^2}{|\Delta|^2} ,$$

$$Y_2 = \frac{1}{a^2} + \frac{|\Delta|_{11}}{2|\Delta|} - Y_0 \frac{|\Delta|_{13}^2}{|\Delta|^2} ,$$

$$Y_3 = \frac{|\Delta|_{12}}{|\Delta|} + \frac{2|\Delta|_{13}|\Delta|_{12}}{Y_0|\Delta|^2} ,$$

$$Y_4 = \frac{1}{a^2} + \frac{|\Delta|_{22}}{2|\Delta|} - Y_0 \frac{|\Delta|_{14}^2}{|\Delta|^2} ,$$

$$Y_5 = -\frac{2|\Delta|_{14}|\Delta|_{12}}{Y_0|\Delta|^2} + \frac{|\Delta|_{24}}{|\Delta|} ,$$

$$Y_6 = \frac{|\Delta|_{14}}{|\Delta|} - \frac{2|\Delta|_{14}|\Delta|_{13}}{Y_0|\Delta|^2} ,$$

$$Y_7 = -\frac{2}{a^2} + \frac{4|\Delta|_{12}}{Y_0 a^2 |\Delta|} ,$$

$$Y_8 = -\frac{2}{a^2} + \frac{4|\Delta|_{13}}{Y_0 a^2 |\Delta|} ,$$

$$Y_9 = -\frac{2}{a^2} + \frac{4|\Delta|_{14}}{Y_0 a^2 |\Delta|} ,$$

$$Y_{10} = \frac{Y_0 Y_1}{4} \left(Y_2 - \frac{Y_3^2}{4Y_1} \right),$$

$$Y_{11} = Y_4 - \frac{Y_5^2}{4Y_1} - \frac{\left(Y_6 - \frac{Y_3 Y_5}{2Y_1} \right)^2}{4 \left(Y_2 - \frac{Y_3^2}{4Y_1} \right)},$$

$$Y_{12} = -\frac{4}{a^2} - \frac{4}{Y_0 a^4} + \frac{Y_7^2}{4Y_1} + \frac{\left(Y_8 - \frac{Y_7 Y_3}{2Y_1} \right)^2}{4 \left(Y_2 - \frac{Y_3^2}{4Y_1} \right)},$$

$$Y_{13} = Y_9 - \frac{Y_7 Y_5}{2Y_1} - \frac{\left(Y_8 - \frac{Y_7 Y_3}{2Y_1} \right) \left(Y_6 - \frac{Y_3 Y_5}{2Y_1} \right)}{2 \left(Y_2 - \frac{Y_3^2}{4Y_1} \right)},$$

$$Y_{14} = Y_4 - \frac{Y_5^2}{4Y_1} - \frac{\left(Y_6 - \frac{Y_3 Y_5}{2Y_1} \right)^2}{4 \left(Y_2 - \frac{Y_3^2}{4Y_1} \right)},$$

podemos escribir el resultado como :

$$C_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4|\Delta|^{1/2}} \sqrt{\frac{1}{(Y_{10})(Y_{11})}} \exp\left[\Pi_0^2\left(Y_{12} + \frac{Y_{13}^2}{4Y_{14}}\right)\right]. \quad (29)$$

Los resultados obtenidos para el caso bidimensional se muestran en la figura 10 donde vemos la relación entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen en dos dimensiones.

Para este caso el modelo solo nos permitió obtener valores para los ángulos de incidencia de 0° a 6° . Las curvas obtenidas son casi iguales si las graficamos contra C_Π^x o contra C_Π^y .

Los resultados obtenidos con la función circ figura 11, son muy diferentes a los obtenidos con la función Gaussiana, en los primeros la curvas se encuentran mucho mas juntas y se encuentran graficadas curvas hasta los 12° , aunque el modelo para este caso si alcanza a obtener resultados para ángulos mayores, también podemos ver que para la función circ si hay diferencia al graficar contra C_Π^x o C_Π^y .

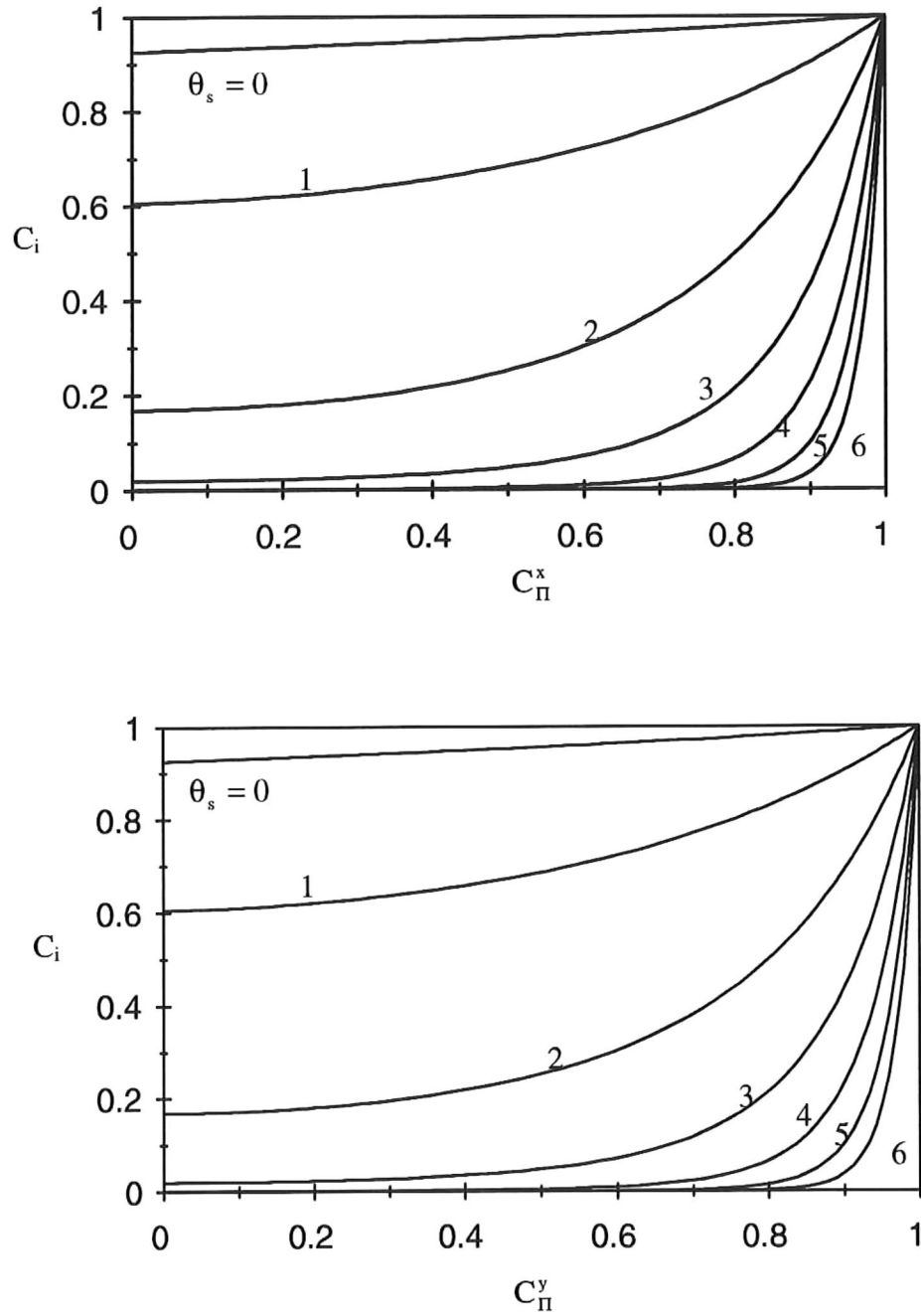


Figura 10 Relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen Para función de tipo Gaussiana. Caso bidimensional.

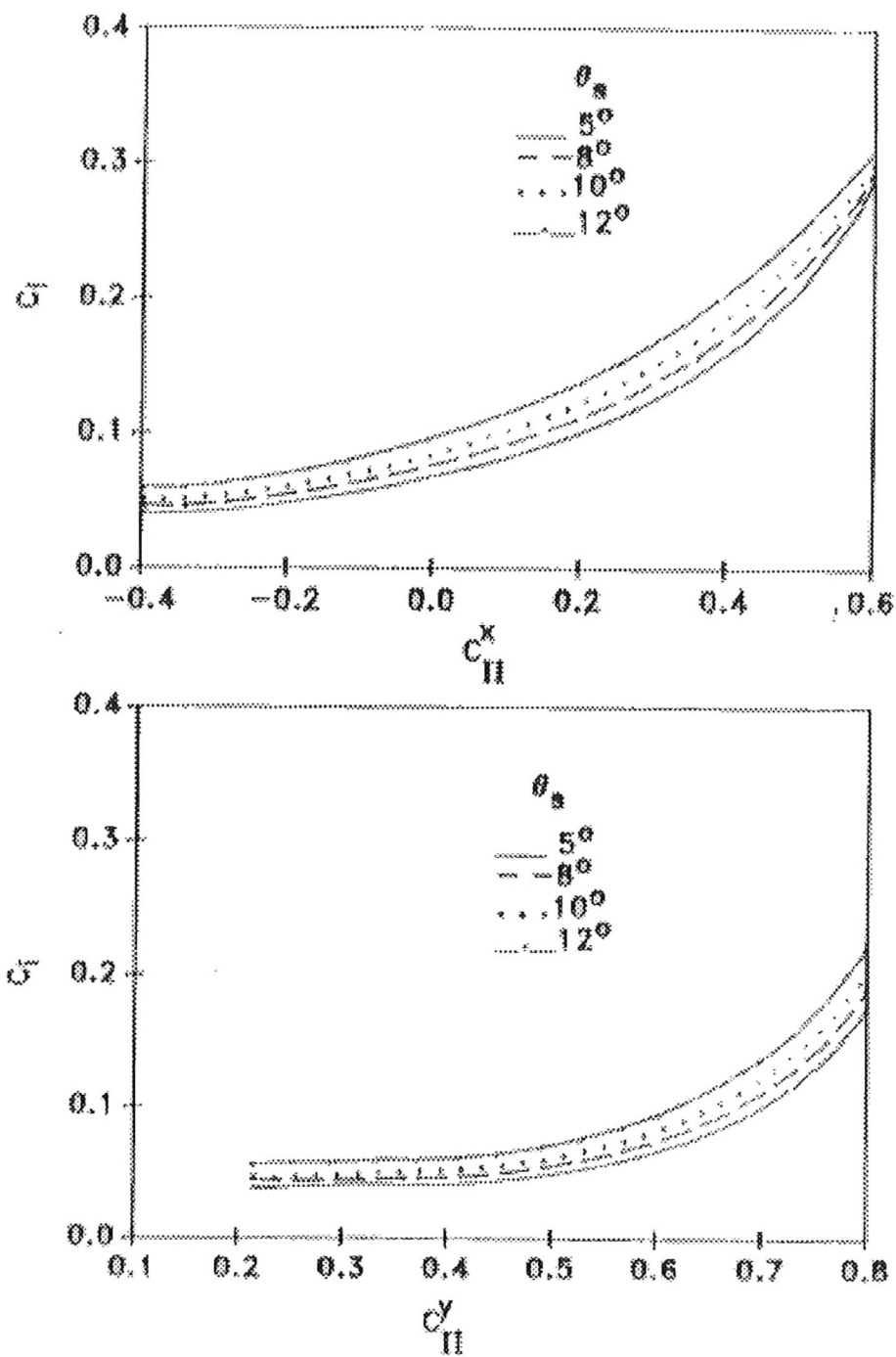


Figura 11. Relaciones entre la función de autocorrelación de las pendientes y la función de autocorrelación de la intensidad de la imagen. Caso bidimensional. (Tomado de Alvarez-Borrego, 1993).

V CONCLUSIONES

Los resultados mostraron que con la función de brillo Gaussiana es posible obtener una relación analítica en las ecuaciones y no tan solo numérica como sucede al utilizar la función rect o función circ. Pero al analizar el comportamiento de las relaciones analíticas obtenidas en las distintas geometrías, pudo observarse que los valores obtenidos de variancia y de la correlación son muy pobres. Además, la imagen que se obtiene al utilizarse una función de brillo Gaussiana nos deja con el problema inicial de tener un rango de valores de grises en la imagen y esto es una dificultad cuando uno desea aplicar este modelo a situaciones físicas reales. En conclusión, podemos decir con toda certeza que las funciones de brillo rect o circ son de mayor utilidad en la aplicación del modelo, que una función de brillo Gaussiana.

VI LITERATURA CITADA

Alvarez Borrego, J., 1993, Determinación de propiedades estadísticas de superficies rugosas aleatorias a partir de imágenes remotas, Tesis Doctoral, CICESE, Ensenada B.C. pp. 117.

Alvarez Borrego, J., 1995, Some statistical properties of surface heights via remote sensing. *Journal of Modern Optics*, 42, 2, pp. 279-288.

Barber, N.F., 1954. Finding the direction of travel of sea waves. *Nature*, 174, pp. 1048-1050

Cox, C., y Munk, W. 1954a. Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter. *Journal of the Optical Society of America.*, 44, 11, pp. 838-850.

Cox, C., y Munk, W. 1954b. Statistics of the sea surface derived from sun glitter. *Journal of Marine Research*, 13, 2 , pp. 198-227.

Cox, C., 1958. Measurement of slopes of high-frequency wind waves. *J. Mar. res.*, 16, pp. 199-225.

Davenport, W. B. Jr., y W.L. Root, 1958. An introduction to the theory of random signals and noise. McGraw-Hill, New-York.

Jerlov, N.G., 1976. Marine Optics, Vol. 14, American Elsevier, New-York.

Kasevich, R. S., 1975. Directional wave spectra from daylight scattering. J. Geophys. Res., 80, No. 33, pp. 4535-4541.

Papoulis, A., 1981. Probability, random variables, and stochastic processes, Chap. (, McGraw-Hill, New-York.

Peppers, N., y J. S. Ostrem, 1978. Determination of wave slopes from photographs of the ocean surface: a new approach. Applied Optics, 17, pp. 3450-3458

Silvester R. (1974), Coastal Engineering, 1. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

Stilwell, D. Jr., 1969. Directional energy spectra of the sea from photographs. J. Geophys. Res., 74, pp. 1974-1986