

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS



FLUJOS ASOCIADOS A FUNCIONES ELÍPTICAS
T E S I S

Que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta:

ALBERTO RIESGO TIRADO

Ensenada, Baja California, México, marzo de 2010

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

FLUJOS ASOCIADOS A FUNCIONES ELÍPTICAS

T E S I S P R O F E S I O N A L

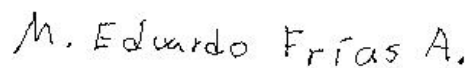
QUE PRESENTA

ALBERTO RIESGO TIRADO

APROBADO POR:



DR. ALVARO ALVAREZ PARRILLA
Presidente del Jurado



DR. MARTIN EDUARDO FRÍAS
ARMENTA
1^{ER.} VOCAL



DR. CARLOS YEE ROMERO
SECRETARIO

DEDICATORIA

A MI FAMILIA, AMIGOS Y MAESTROS

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, pa' y ma', por todo lo que aguantaron, todo el apoyo y el amor brindado.

A mis hermanos, tencha y miguel, por ser los mejores amigos, los consejos y hasta por los golpes y posibles traumas.

A mis amigos, Mitra, 8a, Aza, Charly, Migue, Gaby, Luvia, Amaranta, Mayra, Tany, Monica, Jano, Julio, Sol, Niño, Hanna, Dulce, Fernanda, JC, Adiancito, Pixtin y a temor de olvidar a alguien, a todo aquel que esté en mi facebook, por todo el apoyo y la amistad incondicional.

A mi director de tesis, Alvaro, por los consejos, patadas, y amistad incondicional.

A mis maestros, por compartir sus conocimientos y vivencias conmigo.

A la playa, Ragnarok Online, la música, el café, Manolo y todos esos pequeños detalles que te hacen sobrevivir.

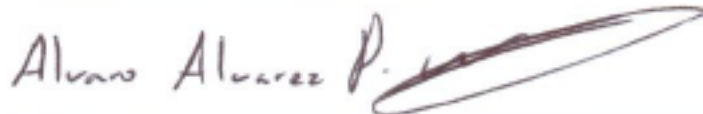
RESUMEN de la Tesis de Alberto Riesgo Tirado presentada como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Ensenada, Baja California, México, marzo del 2010.

Flujos asociados a funciones elípticas

En éste trabajo se caracteriza a los campos vectoriales elípticos como campos de Newton, mas importante aun, se calcula explícitamente al cubriente ramificado Ψ que lo define. Para ello, se tomaron dos perspectivas igualmente importantes, la analítica y la geométrica: de la perspectiva analítica destaca el encontrar explícitamente el cubriente ramificado; por otro lado la perspectiva geométrica permite un entendimiento claro y sencillo del porque los campos vectoriales elípticos son de Newton.

Algunas ventajas que tiene el saber que un campo vectorial es un campo de Newton es que permite una manera sencilla de encontrar nuevos campos de Newton (a través de la perspectiva geométrica) y permite utilizar un método de visualización muy eficiente que no involucra integración numérica (utilizando el cubriente ramificado Ψ dado explícitamente por la perspectiva analítica).

Resumen aprobado:

A handwritten signature in dark ink, reading "Alvaro Alvarez P." followed by a stylized flourish.

Dr. Alvaro Alvarez Parrilla

Índice general

1. Introducción y motivación	1
2. Antecedentes	4
2.1. Vectores tangentes y espacios tangentes	4
2.2. Campos vectoriales reales	6
2.3. Antecedentes de variable compleja.	7
2.4. Campos vectoriales complejos	11
2.5. Campos vectoriales Newtonianos	12
2.6. La verdadera cara del toro	13
2.7. Funciones elípticas	16
2.8. Las funciones de Weierstrass	22
2.9. Comportamiento de funciones elípticas	29
3. Los campos elípticos son campos de Newton	34
3.1. Perspectiva analítica.	35
3.2. Perspectiva geométrica.	37
4. Conclusiones y trabajos futuros	42

Capítulo 1

Introducción y motivación

Los campos vectoriales han sido estudiados en relación con distintos problemas y desde muchos puntos de vista. Podemos mencionar que en el caso de los campos vectoriales analíticos complejos, existe una correspondencia entre campo vectorial analítico, ecuaciones diferenciales autónomas y algunas formas diferenciales cuadráticas.

El objeto de interés en este trabajo son los llamados campos vectoriales Newtonianos (o de Newton) que son campos vectoriales que se pueden expresar como el negativo del cociente de una función y su derivada, esto es,

$$X(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.1)$$

para alguna función $\Psi(z)$. Desde los 80's, cuando Hirsch, Smale y otros [6, 9, 10], estudiaron el llamado flujo de Newton de un polinomio en relación con el método de Newton para encontrar raíces, ha existido un interés en el estudio de los campos vectoriales Newtonianos y sus flujos asociados.

Desde entonces se ha hecho mucho al respecto en los flujos y los campos vectoriales

Newtonianos. Como ejemplos están los trabajos de Jongen et. al. [8, 7, 5] y Benzinger et. al [3, 4]. De los trabajos [7, 8] se caracterizan (hasta conjugación) los flujos de Newton racionales con una condición genérica, mientras que en [5] se muestra que el flujo de Newton asociado a la función $\wp$ de Weirstrass puede ser caracterizada (hasta conjugación) en tres tipos de comportamiento de acuerdo a la forma del paralelogramo fundamental asociado a $\wp$. Por otra parte, Benzinger muestra que todo campo vectorial racional es un campo vectorial Newtoniano y con esta información procede a mostrar que la esfera de Riemann se descompone en un número finito de conjuntos abiertos donde el flujo es analítico. Alvarez-Parrilla et. al [2] generalizan este resultado y muestran que todo campo meromorfo en el plano es Newtoniano.

Como podemos ver en los trabajos antes mencionados, el hecho de que el campo vectorial asociado sea Newtoniano es un gran paso en el entendimiento del comportamiento de dicha familia de campos vectoriales. En particular, la visualización de dicho campo vectorial permite un mejor entendimiento de la dinámica del mismo. En el aspecto de la visualización, Alvarez-Parrilla et. al. [1] desarrolla un método de visualización de campos vectoriales Newtonianos que presenta claras ventajas sobre los métodos tradicionales, por ejemplo, no necesita un proceso iterativo (luego entonces, el error no se propaga), e incluso se puede obtener información relativa a la parametrización del flujo. Es conveniente notar que para que este método pueda ser utilizado es preciso conocer explícitamente la función Ψ que caracteriza el campo Newtoniano.

En este trabajo se muestra que todos los campos vectoriales elípticos son Newtonianos, calculando explícitamente la función $\Psi(z)$ que lo caracteriza. Para esto, se presenta un marco geométrico donde se muestra que los campos vectoriales Newto-

nianos, $X(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$, son el pullback¹ del campo vectorial $Y(w) = -w \frac{\partial}{\partial w}$ vía precisamente por la función $\Psi(z)$, misma que resulta ser un cubriente ramificado sobre la esfera.

El trabajo se divide en tres partes, la primera será dedicada a recordar conceptos básicos de variable compleja. Entre los de mayor importancia se encuentra la definición de campo vectorial complejo, para después definir a los campos vectoriales elípticos, construir el toro y dar propiedades de las funciones elípticas, recordar que las funciones elípticas tienen un comportamiento análogo al de las funciones racionales. En la segunda parte se definirá el objeto de estudio: los campos vectoriales Newtonianos, así mismo se enunciará y demostrará el teorema principal del trabajo donde se muestra que los campos vectoriales elípticos son campos Newtonianos. Por último, se dedica un espacio a conclusiones y posibles trabajos futuros.

¹En esta tesis utilizamos el término anglosajón pullback del campo vectorial en vez del término “campo vectorial inducido por la imagen inversa de un difeomorfismo”.

Capítulo 2

Antecedentes

En esta sección se definirán los conceptos básicos y recordaremos algunos otros conceptos que necesitaremos.

Se empezará por definir algunos conceptos muy básicos, para llegar a uno de los objetos principales de estudio, *campo vectorial analítico complejo*. Así, comenzamos definiendo que es un campo vectorial real, para ello recordamos las definiciones de vectores y espacios tangente:

2.1. Vectores tangentes y espacios tangentes

Definición 2.1.1. Sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una trayectoria de $\mathbb{R}^n$ de clase C^1 , tal que $\gamma(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Definimos un vector tangente en x_0 como el vector (basado en el origen) dado por $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$. Al conjunto de vectores tangentes en x_0 lo denotaremos por $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ y lo llamaremos espacio tangente a $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.2. Definimos el haz tangente de $\mathbb{R}^n$, denotado por $T\mathbb{R}^n$, como el conjunto de todas las parejas (x_0, v) con $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$.

Es claro que, una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable, induce un mapa de $T\mathbb{R}^n$ a $T\mathbb{R}^m$, dado por

$$\begin{aligned} DF : T\mathbb{R}^n &\rightarrow T\mathbb{R}^m \\ (x_0, \gamma'(0)) &\mapsto (F(x_0), DF_{x_0}\gamma'(0)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para generalizar los conceptos de vector y espacio tangente, sera conveniente utilizar una definición equivalente, pero esta vez en términos de la derivada direccional.

Definición 2.1.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Entonces la derivada direccional de f en x_0 en la dirección v se puede expresar como*

$$\left. \frac{df}{dt}(x_0 + tv) \right|_{t=0} = Df_{x_0}v,$$

donde Df_{x_0} es el gradiente de f en x_0 .

Recordando la definición de Df_{x_0} obtenemos

$$Df_{x_0}v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(x_0)\gamma'_j(0) = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}, \tag{2.2}$$

donde $v_j = \gamma'_j(0)$ son las componentes de

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in T_{x_0}\mathbb{R}^n.$$

Así, se ve de forma clara una equivalencia entre $T_{x_0}\mathbb{R}^n$, el espacio tangente en x_0 en $\mathbb{R}^n$, y el espacio cotangente $T_{x_0}^*\mathbb{R}^n$.

Además, la ecuación (2.1), queda expresada por

$$DF : T\mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^m$$

$$\left(x_0, \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{x_0} \right) \mapsto \left(y_0, \sum_{i=1}^m (DF_i(x_0) \cdot v) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{y_0} \right),$$

donde

$$y_0 = F(x_0) = (F_1(x_0), F_2(x_0), \dots, F_m(x_0)) \in \mathbb{R}^m,$$

y

$$DF_i(x_0) \cdot v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{x_0}$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

2.2. Campos vectoriales reales

Se define un campo vectorial real como una sección del haz tangente, esto es una función

$$\tilde{X} : \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto (x, X(x)),$$

donde,

$$X(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definición 2.2.1. *Un campo vectorial real de dimensión n es una expresión de la*

siguiente forma

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n v_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

donde v_j es una función real diferenciable.

En este trabajo solo se consideran campos vectoriales reales de dimensión dos que cumplan con la condición de que la matriz de derivadas parciales de las funciones que la definen es de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

2.3. Antecedentes de variable compleja.

En esta sección definiremos a los campos analíticos complejos, para ello recordaremos la siguiente definición.

Definición 2.3.1. *Una función f es analítica en z_0 si en un entorno abierto a z_0 , esta función se puede representar como una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ con un radio de convergencia positivo.*

Existen diversas formas equivalentes de definir a una función analítica, una de ellas es que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica en z_0 si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, en este caso denotamos a este límite por $f'(z_0)$.

Algunas consecuencias de esto es que $f(z)$ es analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$, si y sólo si:

- f es C^1 en una vecindad de z_0 y

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0,$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z_0),$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right\} \quad (2.3)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right\}. \quad (2.4)$$

- $f(z)$ es conforme¹, esto es, si f es vista desde la perspectiva del cálculo vectorial, esto es como una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, es derivable y la derivada Df_{z_0} es de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Definición 2.3.2. *Un punto $a \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada de f si f es analítica en una vecindad de a , pero no necesariamente en a .*

Ejemplos 2.3.3.

1. La función $e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad aislada en 0.
2. La función $\frac{1}{\sin(z)}$ tiene singularidades aisladas cuando $\sin(z) = 0$, esto es, cuando $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

¹Usualmente se requiere que $f'(z) \neq 0$ de manera que Df_{z_0} no es la matriz cero. En este caso f es localmente 1-1.

3. Si $f(z)$ es analítica en un abierto $\mathbb{A}$ y $z_0 \in \mathbb{A}$, entonces la función $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ es analítica en $\mathbb{A} \setminus \{z_0\}$ y por lo tanto tiene en z_0 una singularidad aislada.

Las singularidades aisladas se clasifican en singularidades removibles, polos y singularidades esenciales. En el cuadro I, a manera de resumen se muestra los distintos tipos de singularidades aisladas que una función puede tener en un punto a de acuerdo a ciertas características de la función, para después definir las formalmente.

tipo	$\lim_{z \rightarrow a} f(z) $	serie	comportamiento geométrico
singularidad removible	$\in \mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$	existe una extensión analítica de f en a
polo de orden $k > 0$	∞	$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-a)^n$	existe un menor entero positivo k tal que $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) \in \mathbb{C}$
singularidad esencial	no existe	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$	$f(B(a, r) \setminus \{a\})$ evita a lo mas 1 puntos en $\mathbb{C}$, para todo $r > 0$

Cuadro I: Cuadro que muestra los tres tipos de singularidades aisladas que una función f puede tener en el punto a .

Definición 2.3.4. Una singularidad aislada z_0 de una función $f(z)$ tal que:

1. $|f(z)| \rightarrow r \in \mathbb{R}$ cuando $z \rightarrow z_0$ se llama singularidad removible.
2. $|f(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$ se llama un polo de $f(z)$.
3. El límite de $|f(z)|$ cuando $z \rightarrow z_0$ no existe, es llamada una singularidad esencial.

Ejemplos 2.3.5.

1. La función $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$ tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$.

2. La función $f(z) = \frac{1}{z}$ tiene un polo en $z_0 = 0$.

3. La función $e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad esencial en $z_0 = 0$.

Es útil pensar en las funciones meromorfas como funciones que pueden asumir el valor de “ ∞ ”. También es útil poder evaluar la función en “ ∞ ”. Para cumplir estos dos objetivos introduciremos la proyección estereográfica

$$\Phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus (0, 0, 1)$$

$$z \mapsto \left(\frac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

que nos permite identificar a la compactificación de $\mathbb{C}$ con S^2 (llamada la esfera de Riemann). Esto es $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$, lo que nos permite decir que una función toma el valor de ∞ en a si y sólo si f tiene un polo en a , y el comportamiento de f en $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ se determina por el comportamiento de $f(\frac{1}{z})$ cuando $z \rightarrow 0$. Entonces una función es analítica en ∞ si $f(\frac{1}{z})$ es analítica en 0, y tiene un polo de orden k en a si k es el menor número natural tal que $\lim_{z \rightarrow a} ((z - a)^k f(z)) \in \mathbb{C}$, similarmente con el caso de una singularidad esencial.

Ejemplo 2.3.6. La función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ es analítica en ∞ ya que la función $f(\frac{1}{z}) = e^z$ es analítica en $z_0 = 0$.

Ejemplos 2.3.7.

1. Todas las funciones racionales, es decir $f(z) = \frac{Q(z)}{R(z)}$ con $Q(z)$ y $R(z)$ polinomios, son funciones meromorfas en la esfera de Riemann.
2. La función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ esta definida en todo el plano complejo exceptuando el origen. Sin embargo, el punto $z_0 = 0$ no es un polo de la función sino una

singularidad esencial. Por lo tanto, esta función no es meromorfa en todo el plano complejo. Sin embargo, si es meromorfa (incluso analítica) en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. La función $f(z) = \log(z)$ no es meromorfa en todo el plano complejo, ya que no se puede definir de manera continua en todo el plano y ni siquiera quitando un conjunto de puntos aislados. En realidad es analítica en el plano complejo menos un rayo.

2.4. Campos vectoriales complejos

Definición 2.4.1. Supongamos que $f(z) = u(z) + iv(z)$ es una función meromorfa en $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ entonces:

$$X(z) = f(z) \frac{\partial}{\partial z} = (u(z) + iv(z)) \frac{\partial}{\partial z}.$$

es llamado un campo vectorial analítico complejo en $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$.

Ya que el operador diferencial $\frac{\partial}{\partial z}$ se define como $\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ entonces un campo vectorial analítico complejo, se compone por dos campos vectoriales reales dados por:

$$2\Re(X)(x, y) = F(x, y) = u(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

y

$$-2\Im(X)(x, y) = JF(x, y) = -v(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + u(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Conviene notar que estos campos vectoriales reales tienen la característica de ser perpendiculares en todos sus puntos regulares, por lo que, es suficiente conocer uno

de ellos para especificar completamente el campo vectorial analítico complejo².

Por otra parte, cada uno de los campos vectoriales reales tiene un flujo real $\gamma(t)$ asociado a él, que en el caso del campo vectorial F se define por:

$$\begin{cases} \gamma'_{z_0}(t) = F(\gamma_{z_0}(t)), \\ \gamma_{z_0}(0) = z_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Por todo lo anterior diremos que el flujo de un campo vectorial analítico complejo dado por la definición 2.4.1 es el flujo $\gamma(t)$ dado por la ecuación (2.5).

Ejemplos 2.4.2. $X(z) = e^{i\theta} z \frac{\partial}{\partial z}$ donde su campo vectorial es:

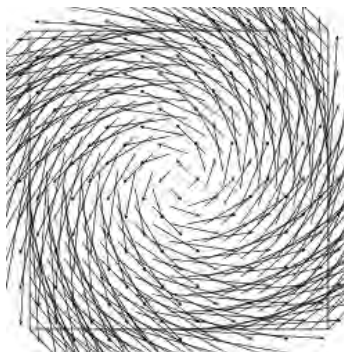


Figura 2.1: Ejemplo de un campo vectorial analítico dado por $X(z) = e^{i\theta} z \frac{\partial}{\partial z}$.

2.5. Campos vectoriales Newtonianos

Definición 2.5.1. Un campo vectorial analítico complejo $X(z) = f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ se dice que es un campo vectorial Newtoniano (o campo vectorial de Newton) en $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ si existe

²Equivalentemente, si se tiene un campo vectorial real de dimensión dos cuya matriz de derivadas parciales es de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ entonces existe un campo vectorial analítico complejo cuya parte real es precisamente el campo vectorial real.

una función analítica (posiblemente multivaluada) Ψ en U^* tal que:

$$X(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.6)$$

donde U^* es $U \setminus W$, para algún subconjunto $W \subset U$.

Ejemplo 2.5.2. El campo vectorial $X(z) = -\tan(z) \frac{\partial}{\partial z}$ es un campo vectorial Newtoniano, ya que tomando $\Psi(z) = \sin(z)$, podemos reescribir a $X(z) = -\frac{\sin(z)}{\cos(z)} \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$.

Nos interesa poder introducir el concepto de campo vectorial elíptico, para ello será necesario recordar la construcción del toro.

2.6. La verdadera cara del toro

Sean $2\omega_1$ y $2\omega_2$ vectores linealmente independientes sobre el plano.

Definición 2.6.1. La retícula generada por $2\omega_1$ y $2\omega_2$ es el conjunto de puntos:

$$L_{2\omega_1, 2\omega_2} = \{2n\omega_1 + 2m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Para construir al toro, definimos la siguiente relación de equivalencia para puntos en el plano

$$(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow (x, y) = (u, v) + 2n\omega_1 + 2m\omega_2 \text{ para algún } n, m \in \mathbb{Z}.$$

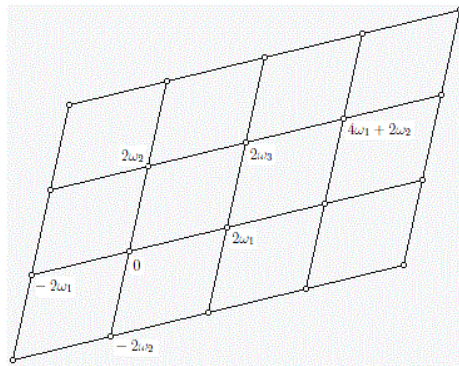


Figura 2.2: Ejemplo de retícula.

De manera que las clases de equivalencia serán:

$$[x, y] = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : (a, b) \sim (x, y)\}.$$

En ocasiones diremos que (x, y) y (a, b) son congruentes si pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Por último consideremos el conjunto de clases de equivalencia, esto es:

$$\mathbb{X}_{2\omega_1, 2\omega_2} = \{[x, y] : [x, y] \text{ es una clase de equivalencia}\},$$

denotemos $2\omega_1 + 2\omega_2$ por $2\omega_3$ y consideraremos los vértices $0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3$, y sea $[a, b]$ el segmento de línea que une a y b . Este segmento se puede representar por la ecuación paramétrica

$$z = (1 - t)a + tb, \quad (0 \leq t \leq 1),$$

y $[a, b)$ denota el segmento de línea semi abierta que une a y b , con la ecuación

$$z = (1 - t)a + tb \quad (0 \leq t < 1).$$

Ahora consideremos la curva de Jordan

$$\Gamma = [0, 2\omega_1] \cup [2\omega_1, 2\omega_3] \cup [2\omega_3, 2\omega_2] \cup [2\omega_2, 0].$$

Definición 2.6.2. *Un paralelogramo es la figura dada por*

$$\Delta = \text{int}(\Gamma) \cup [0, 2\omega_1) \cup [0, 2\omega_2),$$

donde $\text{int}(\Gamma)$ es el interior de la curva de Jordan Γ . A un paralelogramo Δ le llamaremos paralelogramo fundamental si tiene sus vértices en períodos fundamentales y denotaremos por $\Delta_{2\omega_1, 2\omega_2}$

Ahora consideremos la función

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{X}_{2\omega_1, 2\omega_2} &\rightarrow \overline{\Delta} \\ [x, y] &\mapsto (x, y) + 2n\omega_1 + 2m\omega_2 \quad \text{para algún } n, m \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

y notemos que es sobreyectiva, pero no es inyectiva puesto que los 4 vértices del paralelogramo corresponden a la misma clase de equivalencia y los lados se identifican en parejas que difieren por $2\omega_1$ y $2\omega_2$ como se ven en la figura 2.3.

De tal manera que $\mathbb{X}$ corresponde al paralelogramo con sus lados opuestos identificados. Y esta es la representación del toro. A $2\omega_1$ y $2\omega_2$ se le llama los períodos del toro $\mathbb{X}_{2\omega_1, 2\omega_2}$.



Figura 2.3: Construcción del toro identificando los lados opuestos de un paralelogramo fundamental.

2.7. Funciones elípticas

Un número $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(z + \alpha) = f(z)$ para todo z en $\mathbb{C}$ se le llama período de f . Por una función bi-periódica se entiende que existen dos números complejos α_1 y α_2 no nulos tal que:

$$f(z) = f(z + \alpha_1) = f(z + \alpha_2), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

y tal que $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ no es un número real³. De aquí se deduce que si f es bi-periódica con períodos α_1 y α_2 , entonces

$$f(z + m\alpha_1 + n\alpha_2) = f(z) \quad , \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Definición 2.7.1. *Una función elíptica es una función meromorfa en el plano complejo y bi-periódica.*

Si dos períodos ω_1 y ω_2 son tales que cualquier otro período w' puede ser escrito

³Esta condición nos indica que los números α_1 y α_2 pensados como vectores en $\mathbb{R}^2$ no son colineales.

como $w' = m\omega_1 + n\omega_2$ con m y n enteros, entonces a ω_1 y ω_2 se les llama períodos fundamentales. Toda función elíptica tiene un par de períodos fundamentales, aunque este par no es único, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.7.2. *Dada una función bi-periódica $g(z)$ con períodos fundamentales ω_1 y ω_2 , sea ω' y ω'' los períodos de $g(z)$ de la forma*

$$\begin{aligned}\omega' &= m'\omega_1 + n'\omega_2, \\ \omega'' &= m''\omega_1 + n''\omega_2,\end{aligned}\tag{2.7}$$

donde

$$m'n'' - n'm' = \pm 1,\tag{2.8}$$

entonces ω' y ω'' también son períodos fundamentales de $g(z)$.

Demostración. Resolviendo el sistema (2.7) para ω_1 y ω_2 , obtenemos

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \pm(n''\omega' - n'\omega''), \\ \omega_2 &= \pm(-m''\omega' + m'\omega''),\end{aligned}$$

de forma que cualquier período $\Omega = m\omega_1 + n\omega_2$ puede ser escrito como una combinación lineal de ω' y ω'' con coeficientes enteros:

$$\Omega = \pm[(mn'' - nm')\omega' + (-mn' + nm'')\omega''],$$

en otras palabras, ω' y ω'' son un par de períodos fundamentales de $g(z)$. $\square$

A no ser que la función elíptica sea constante, todo paralelogramo fundamental tiene al menos un polo, como consecuencia del teorema de Liouville, así mismo,

el número de polos en cualquier paralelogramo es finito (e igualmente para todo paralelogramo fundamental).

Teorema 2.7.3 (Teorema de Liouville). *Si $f(z)$ entera y si $|f(z)| < M$ para todo z finito, entonces $f(z) \equiv \text{constante}$, i.e., toda función entera y acotada es una función constante⁴.*

Teorema 2.7.4. *Si $g(z)$ es una función elíptica entera, entonces $g(z) \equiv \text{constante}$.*

Demostración. Como $g(z)$ es entera, entonces es continua y el paralelogramo fundamental cerrado $\overline{\Delta_{\omega_1, \omega_2}}$ está acotado. Sabemos que dado un punto z en el plano y cualquier paralelogramo $\Delta_{\omega_1, \omega_2}$ existe algún punto en $\overline{\Delta_{\omega_1, \omega_2}}$ congruente a z , entonces para cualquier punto del plano el valor de $g(z)$ es el mismo que el valor de $g(z)$ en algún punto de $\overline{\Delta_{\omega_1, \omega_2}}$. Puesto que $|g(z)|$ es una función continua con valores reales en un conjunto cerrado y acotado, entonces alcanza su máximo en $\overline{\Delta_{\omega_1, \omega_2}}$ por lo tanto $|g(z)| \leq M < \infty$ para todo z , entonces $g(z) \equiv \text{constante}$ por el teorema de Liouville. $\square$

Corolario 2.7.5. *Las funciones elípticas $g(z) \neq \text{constante}$ tienen al menos un polo en $\overline{\Delta_{\omega_1, \omega_2}}$. Más aun, el número de polos en $\Delta_{\omega_1, \omega_2}$ es un número finito.*

Demostración. Por el Teorema 2.7.4, notemos que si $\Delta_{\omega_1, \omega_2}$ contiene un número infinito de polos, entonces $\overline{\Delta_{\omega_1, \omega_2}}$ debería contener un punto límite de polos, contrario a la suposición de que $g(z)$ debe ser meromorfa. Si contuviera un número infinito de polos, tendría un punto de acumulación de polos, y este punto no corresponde a una singularidad aislada, lo que indica que no puede ser una función meromorfa. $\square$

⁴Para una demostración formal ver Teorema I.16.8 de [11]

El siguiente es un resultado importante que utilizaremos en la demostración del Teorema 2.9.2, y para su demostración se necesita introducir la definicion de residuo.

Definición 2.7.6. *Supongamos que $f(z)$ es una función analítica en una vecindad de una singularidad aislada $A(z_0)$ excepto quizias en z_0 . Entonces el residuo de $f(z)$ en z_0 , denotado por*

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z),$$

es el coeficiente a_{-1} en la expansión de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in A(z_0).$$

Teorema 2.7.7. *La suma de los residuos de una función elíptica $g(z)$ en $\Delta_{2\omega_1, 2\omega_3}$ es igual a 0.*

Demostración. Sea ρ la distancia entre el conjunto de polos de $g(z)$ en $\Delta_{2\omega_1, 2\omega_2}$ y el conjunto $[2\omega_1, 2\omega_3] \cup [2\omega_3, 2\omega_2]$, notemos que si la frontera de Γ no contiene polos entonces $\rho = 0$. Entonces, trasladando $\Delta_{2\omega_1, 2\omega_2}$ a lo largo de la diagonal $[0, \omega_3]$ por una cantidad menor a ρ (el traslado es en la dirección de $2\omega_2$ a 0 y no hay traslado si $\rho = 0$), obtenemos un nuevo paralelogramo Δ' con vértices

$$z_0, z_0 + 2\omega_1, z_0 + 2\omega_2, z_0 + 2\omega_3,$$

($z_0 = 0$ si $\rho = 0$). La frontera Γ' de Δ' no tiene polos de $g(z)$, pero $I(\Gamma')$ contiene el mismo número de polos que el paralelogramo original $\Delta_{2\omega_1, 2\omega_2}$.

Se sigue que

$$\sum_{\Delta} \text{Res } g(z) = \sum_{I(\Gamma')} \text{Res } g(z),$$

donde

$$\sum_E \text{Res } g(z)$$

denota la suma de los residuos en los polos de $g(z)$ en el conjunto E . Pero $g(z)$ no tiene polos en Γ' , entonces:

$$\sum_{\Delta} \text{Res } g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} g(z) dz. \quad (2.9)$$

Calculando la integral 2.9, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} g(z) dz &= \int_{z_0}^{z_0+2\omega_1} g(z) dz + \int_{z_0+2\omega_1}^{z_0+2\omega_3} g(z) dz + \int_{z_0+2\omega_3}^{z_0+2\omega_2} g(z) dz + \int_{z_0+2\omega_2}^{z_0} g(z) dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_0+2\omega_1} g(z) dz + \int_{z_0+2\omega_1}^{z_0+2\omega_2} g(z) dz - \int_{z_0+2\omega_2}^{z_0+2\omega_3} g(z) dz - \int_{z_0}^{z_0+2\omega_2} g(z) dz, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} g(z) dz &= \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_1 t) dt + \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_1 + (2\omega_2 - 2\omega_1)t) dt - \\ &\quad - \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_3 + (2\omega_2 - 2\omega_3)t) dt - \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_3 t) dt \\ &= \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_1 t) dt + \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_1 + 2\omega_3 t) dt - \\ &\quad - \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_3 + 2\omega_1 t) dt - \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_3 t) dt \\ &= \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_1 t) dt + \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_3 t) dt - \\ &\quad - \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_1 t) dt - \int_0^1 g(z_0 + 2\omega_3 t) dt = 0, \end{aligned}$$

y acorde a 2.9,

$$\sum_{\Delta} \text{Res}g(z) = 0.$$

□

Una forma de distinguir a las funciones elípticas, es de acuerdo a su orden, que se define como:

Definición 2.7.8. *El número total de polos de una función elíptica $g(z)$ en Δ , cada uno de ellos contado un número de veces igual a su orden, es llamado el orden de $g(z)$.*

Y es importante notar, que las funciones elípticas tienen orden al menos 2, como se enuncia en el siguiente Teorema.

Teorema 2.7.9. *El orden de una función elíptica $g(z) \neq \text{constante}$ es al menos dos.*

Demostración. Si $g(z)$ tiene orden menor a 2, entonces $g(z)$ no tiene polos en Δ , o bien, tiene un único polo simple $\alpha \in \Delta$. En el segundo caso, la parte principal de la serie de Laurent de $g(z)$ en α es de la forma

$$\frac{A}{z - \alpha}$$

donde A es el residuo de $g(z)$ en α . Pero $A = 0$ por el Teorema (2.7.7), entonces $g(z)$ no tiene polos en Δ . De manera que en ambos casos, por el Teorema (2.7.4), $g(z) \equiv \text{constante}$, contrario a las hipótesis. □

2.8. Las funciones de Weierstrass

Para poder expresar nuestros resultados en forma clara necesitaremos introducir un par de funciones muy especiales, la función σ y ζ de Weierstrass, para ello, primero debemos definir a la función elíptica $\wp$ de Weierstrass. Empezaremos citando el siguiente lema.

Lema 2.8.1. *La serie*

$$\sum'_{\omega \in \Omega} \frac{1}{|\omega|^\lambda}, \quad (2.10)$$

es convergente si $\lambda > 2$, la suma se extiende a todos los puntos de la retícula

$$\Omega = \{2m\omega_1 + 2n\omega_3 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

y la prima sobre la suma denota que se excluye el valor $\omega = 0$.

Demostración. Notemos que todos los puntos de Ω distintos del cero, están en los contornos de ciertos paralelogramos semejantes entre si, con el centro en el origen. El primero de ellos contiene ocho puntos distintos, el segundo dieciséis. Así el k -ésimo paralelogramo contiene $8k$ puntos. En resumen la cantidad de puntos crece en progresión aritmética con una diferencia de 8. Además, como los paralelogramos son semejantes y todos tienen como centro al origen de los ejes coordenados, designando por d la distancia del origen de coordenadas hasta el contorno del primer paralelogramo, de la siguiente forma,

$$d = \min_{z \in \tau_1} |z|,$$

tendremos que la distancia desde el origen hasta el contorno del k -ésimo paralelogramo

es igual a

$$\min_{z \in \tau_k} |z| = kd,$$

donde τ_k es el contorno del k -ésimo paralelogramo, y por lo tanto, al calcular el módulo de cualquier periodo ω situado en el último paralelogramo, obtenemos la siguiente desigualdad

$$|\omega| \geq kd,$$

de donde

$$\frac{1}{|\omega|^\lambda} \leq \frac{1}{k^\lambda d^\lambda},$$

y por consiguiente, la suma de los términos de la serie (2.10) que corresponden a los $8k$ puntos situados en el contorno del k -ésimo paralelogramo, está acotado por

$$\frac{8k}{k^\lambda d^\lambda} = \frac{8}{d^\lambda k^{\lambda-1}}.$$

De aquí se deduce, que las sumas parciales de los términos de la serie (2.10) que corresponden a los puntos que están situados en el interior y en los lados del k -ésimo paralelogramo, están acotado por

$$\frac{8}{d^\lambda} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^{\lambda-1}}.$$

es claro que la serie $\sum_{j=1}^k \frac{1}{j^{\lambda-1}}$ converge para $\lambda > 2$, además, si definimos

$$D = \max_{\tau_1} |z|$$

de forma analoga se deduce que los terminos de la suma (2.10) es inferior a

$$\frac{8}{D^\lambda} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^{\lambda-1}},$$

se concluye que la serie (2.10) también converge para $\lambda > 2$. $\square$

De este lema, se deriva que la serie

$$f(z) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^3} \quad (2.11)$$

es uniformemente convergente en cada región acotada en el plano. Es suficiente suponer que z pertenece a un círculo fijado arbitrariamente con el centro en el origen de coordenadas $|z| < R$, y considerar los términos de la serie que corresponden a los periodos ω que estan situados fuera de un círculo de radio $2R$. Entonces para estos términos $|\frac{z}{\omega}| < \frac{1}{2}$, y obtenemos la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{1}{(1 - \omega)^3} \right| \leq \frac{1}{(|\omega| - |z|)^3} = \frac{1}{(1 - \frac{|z|}{|\omega|})^3} \frac{1}{|\omega|^3} < \frac{8}{|\omega|^3}$$

donde, por el lema anterior, se deduce la convergencia uniforme.

Teorema 2.8.2. *La función (2.11) es una función elíptica impar de orden 3, con periodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_2$.*

Demostración. Demostraremos que $2\omega_1$ y $2\omega_2$ son periodos fundamentales de la función $f(z)$. En efecto, sea ω' un periodo de esta función. Como $\omega \in \Omega$ es un polo de la función $f(z)$, $\omega + \omega'$ tiene que ser uno de los polos, o sea $\omega + \omega' \in \Omega'$, por consiguiente, cualquier periodo de la función $f(z)$ es combinación lineal de los periodos $2\omega_1$ y $2\omega_2$

con coeficientes enteros.

Ahora, demostraremos que es una función impar. En efecto,

$$f(-z) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(-z - \omega)^3} = - \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{[z - (-\omega)]^3}, \quad (2.12)$$

y notando que el conjunto Ω coincide con el conjunto $-\Omega$, se concluye que las series (2.12) y (2.11) solo difieren en el orden de sus términos y su suma sigue siendo $f(z)$.

De aquí

$$f(-z) = f(z).$$

□

Ahora, utilizaremos (2.11) para construir una función elíptica de orden 2. Sea z_0 cualquier punto del plano complejo, que no sea un polo de $f(z)$. Después, integrando $f(z)$ término a término a lo largo de cualquier curva rectificable γ que une z_0 a otro punto z sin pasar por polos de $f(z)$, obtenemos una nueva función

$$\varphi(z) = C + \int_{z_0}^z f(z) dz = C - \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{(z_0 - \omega)^2} \right]. \quad (2.13)$$

Como la serie (2.11) es uniformemente convergente en conjuntos compactos, no contiene elementos de la forma $\omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$, y lo mismo ocurre para la función (2.13). Así pues, $\varphi(z)$ es una función meromorfa cuyos polos son el conjunto Ω . Escribiendo a $\varphi(z)$ en la forma

$$\varphi(z) = C - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} \sum'_{\omega \in \Omega} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{(z_0 - \omega)^2} \right], \quad (2.14)$$

donde, la prima en la suma indica la omisión del término $\omega = 0$, vemos que

$$\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}$$

es una función meromorfa con una singularidad removible en el origen, donde toma el valor

$$\left[\varphi(z) + \frac{1}{2z^2} \right] \Big|_{z=0} = C + \frac{1}{2(z_0)^2} - \frac{1}{2} \sum'_{\omega \in \Omega} \left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(z_0 - \omega)^2} \right]. \quad (2.15)$$

Tomando C tal que (2.15) sea cero, y restando (2.15) a (2.14), obtenemos

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Omega} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \right\}.$$

La función entre corchetes (que equivale a $-2\varphi(z)$) fue introducida por Weierstrass, y se denota por $\wp(z)$,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{\omega \in \Omega} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]. \quad (2.16)$$

Así pues $\wp(z)$ es una función meromorfa, con polos de orden dos en

$$\Omega = \{2m\omega_1 + 2n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

y ninguna otra singularidad. Además, en cada punto $\omega \in \Omega$, la parte principal de $\wp$ esta dada por

$$\frac{1}{(1 - \omega)^2}.$$

La función $\wp(z)$ y su derivada $\wp'(z)$ juegan un papel importante en la teoría de funciones elípticas, y son llamadas las funciones elípticas de Weierstrass.

Las funciones σ y ζ de Weierstrass quedan definidas por la función $\wp$ de la siguiente manera.

La función ζ de Weierstrass está determinada por la siguiente condición

$$\frac{d}{dz}\zeta(z) = -\wp(z), \quad \lim_{z \rightarrow 0} \left[\zeta(z) - \frac{1}{z} \right] = 0,$$

que juntas implican

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = - \int_0^z \left[\wp(Z) - \frac{1}{Z^2} \right] dZ,$$

donde la integral es a lo largo de cualquier curva rectificable que no pasa a través de los periodos $\omega \neq 0$. Reemplazando $\wp(z)$ por su expansión en fracciones parciales (2.16) (que converge uniformemente en conjuntos compactos como ya se mostró) e integrando término a término, obtenemos

$$\zeta(z) - \frac{1}{z} = \int_0^z \sum'_{\omega \in \Omega} \left[\frac{1}{(Z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] dZ = \sum'_{\omega \in \Omega} \left[\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right],$$

por lo tanto

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{\omega \in \Omega} \left[\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right]. \quad (2.17)$$

Entonces, $\zeta(z)$ es meromorfa con polos simples y parte principal $\frac{1}{z - \omega}$ en el punto $\omega \in \Omega$.

El siguiente resultado lo utilizaremos en la demostración del Teorema (2.9.1).

Teorema 2.8.3. *La función ζ es casi-periódica en el sentido de que satisface*

$$\zeta(z + 2\omega_j) = \zeta(z) + 2\eta_j,$$

es decir, $\zeta(z)$ cambia por la constante $2\eta_j$ cuando z cambia por $z + 2\omega_j$. Donde ω_j y η_j ($j = 1, 2, 3$) satisfacen

$$2\omega_3\eta_1 - 2\omega_1\eta_3 = \pi i, \quad \omega_1\eta_2 - 2\omega_1\eta_2 = -\pi i, \quad 2\omega_3\eta_2 - 2\omega_3\eta_2 = -\pi i,$$

conocidas como las relaciones de Legendre

Ahora, definiremos la función σ de Weierstrass, la cual queda determinada por la siguiente condición

$$\frac{d}{dz} \ln \sigma(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z), \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1, \quad (2.18)$$

que juntas implican

$$\ln \frac{\sigma(z)}{z} = \int_0^z \left[\zeta(Z) - \frac{1}{Z} \right] dZ.$$

Sustituyendo (2.17) obtenemos

$$\ln \frac{\sigma(z)}{z} = \sum'_{\omega \in \Omega} \left[\ln \left(1 - \frac{z}{\omega} \right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right],$$

entonces,

$$\sigma(z) = z \exp \left\{ \int_0^z \left[\zeta(Z) - \frac{1}{Z} \right] dZ \right\} = z \prod'_{\omega \in \Omega} \left(1 - \frac{z}{\omega} \right) \exp \left(\frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right).$$

Teorema 2.8.4. Cuando z es reemplazado por $z + 2\omega_j$, $\sigma(z)$ es multiplicada por el factor $e^{i\pi + 2\eta_j(z + \omega_j)}$, i.e.

$$\sigma(z + 2\omega_j) = -\sigma(z) e^{2\eta_j(z + \omega_j)} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Demostración. utilizando (2.18) y que la función $\zeta(z)$ es casi-periódica, obtenemos

$$\frac{\sigma'(z + 2\omega_j)}{\sigma(z + 2\omega_j)} - \frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = 2\eta_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

para toda z . Integrando esta última expresión

$$\ln \frac{\sigma(z + 2\omega_j)}{\sigma(z)} = 2\eta_j z + c_j,$$

o bien, exponenciando

$$\sigma(z + 2\omega_j) = \sigma(z)e^{2\eta_j z + c_j}. \quad (2.19)$$

Reemplazando $z = -\omega_j$, en (2.19), y como $\sigma(z)$ es impar,

$$-1 = e^{-2\eta_j \omega_j + c_j}$$

que junto con (2.19) se concluye lo deseado. $\square$

2.9. Comportamiento de funciones elípticas

Como ya hemos visto, las funciones meromorfas en la esfera son las funciones racionales, y estas forman un campo algebraico, a continuación se muestran dos teoremas que nos indican que las funciones elípticas tienen un comportamiento análogo.

Teorema 2.9.1. *Dada una función elíptica f de orden n , con períodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_2$, sean $a_1, \dots, a_n$ y $b_1, \dots, b_n$ los ceros y polos respectivamente de f en el paralelogramo fundamental, cada uno contado un número de veces igual a su orden.*

Entonces

$$f(z) = C \frac{\sigma(z - a_1)\sigma(z - a_2) \cdots \sigma(z - a_n)}{\sigma(z - b_1)\sigma(z - b_2) \cdots \sigma(z - b'_n)} \quad (2.20)$$

donde $\sigma(z)$ es la función sigma de Weirstrass, C es una constante y

$$b'_n = (a_1 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}).$$

Demostración. La función $\sigma(z - c)$ solo tiene ceros simples en $c + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Además, el número

$$b'_n - b_n = (a_1 + \cdots + a_n) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

es un período de $f(z)$, i.e., b'_n es congruente con b_n . Entonces los polos y ceros de la función meromorfa

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z - a_1)\sigma(z - a_2) \cdots \sigma(z - a_n)}{\sigma(z - b_1)\sigma(z - b_2) \cdots \sigma(z - b'_n)},$$

coinciden con los de $f(z)$ en todo el plano z . Por otro lado $\varphi(z)$ es bi-periódica, con períodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_2$, entonces, por el teorema (2.8.4)

$$\begin{aligned} \varphi(z + 2\omega_j) &= \exp \{ 2\eta_j [(z - a_1 - \omega_j) + \cdots + (z - a_n - \omega_j) - \\ &\quad - (z - b_1 - \omega_j) - \cdots - (z - b'_n - \omega_j)] \} \end{aligned}$$

$$= \exp \{ 2\eta_j [(b_1 + \cdots + b'_n) - (a_1 + \cdots + a_n)] \} \varphi(z) = \varphi(z),$$

donde η_j y ω_j satisfacen las relaciones de Legendre:

$$2\omega_2\eta_1 - 2\omega_1\eta_2 = \pi i, \quad 2\omega_1\eta_2 - 2\omega_2\eta_1 = -\pi i, \quad 2\omega_2\eta_2 - 2\omega_1\eta_1 = -\pi i.$$

Así pues, $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ es una función elíptica sin polos ni ceros, y por el teorema (2.7.3),

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \equiv C = \text{constante},$$

que es equivalente a 2.20. □

Una consecuencia directa de este teorema es que las funciones elípticas con los mismos periodos fundamentales forman un campo algebraico⁵, siendo la inversa de $f(z)$

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{C} \frac{\sigma(z - b_1)\sigma(z - b_2) \cdots \sigma(z - b'_n)}{\sigma(z - a_1)\sigma(z - a_2) \cdots \sigma(z - a_n)}$$

y es claro que, $\frac{1}{f(z)}$ es una función elíptica.

El siguiente teorema muestra que, las funciones elípticas tienen una descomposición en fracciones parciales, de la misma manera que las funciones racionales.

Teorema 2.9.2. *Dada una función elíptica $f(z)$ con períodos fundamentales $2w_1$ y $2w_2$, sea $b_1, \dots, b_r$ los polos de $f(z)$ en el paralelogramo fundamental. Supongamos que b_k es de orden β_k , con parte principal*

$$G_k(z) = \frac{A_{1k}}{z - b_k} + \cdots + \frac{A_{\beta_k k}}{(z - b_k)^{\beta_k}} \quad (k = 1, \dots, r).$$

⁵Es claro que la suma de dos funciones elípticas es elíptica y la función cero también lo es.

Entonces

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{\beta_k} (-1)^{j-1} \frac{A_{jk}}{(j-1)!} \zeta^{(j-1)}(z - b_k), \quad (2.21)$$

donde $\zeta(z)$ es la función zeta de Weirstrass y C es una constante⁶.

Demostración. La función $\zeta^j(z - c)$, $j \geq 0$ tiene polos de orden $j + 1$ con parte principal

$$(-1)^j \frac{j!}{(z - c - 2m\omega_1 - 2n\omega_3)^{j+1}},$$

en todo punto $c + 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, y solo tiene estos polos. De manera que los polos de la función meromorfa

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \sum_{k=1}^r \left\{ A_{1k} \zeta(z - b_k) + \frac{A_{2k}}{1!} \zeta'(z - b_k) + \dots + \right. \\ \left. + (1)^{\beta_k-1} \frac{A_{k\beta_k}}{(\beta_k - 1)!} \zeta^{(\beta_k-1)}(z - b_k) \right\} \end{aligned}$$

coinciden con los de la función $f(z)$ en todo el plano z , tienen el mismo orden y parte principal. Pero $\varphi(z)$ es bi-periódica, con períodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$. De hecho,

$$\begin{aligned} \varphi(z + 2\omega_j) - \varphi(z) &= \sum_{k=1}^r A_{1k} \{ \zeta(z + 2\omega_j - b_k) - \zeta(z - b_k) \} \\ &= 2\eta_j \sum_{k=1}^r A_{1k}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde η_j y ω_j satisfacen las relaciones de Legendre.

La suma (2.22) es cero por el teorema 2.7.7, pues es la suma de los residuos de una función elíptica $f(z)$ en los polos dentro del paralelogramo fundamental. Por lo tanto

⁶Es conveniente notar que $\zeta'(z) = \wp(z)$, entonces se puede sustituir $\zeta^{(j)}$ por $\wp^{(j-1)}$ para $j \geq 1$, donde $\wp$ es la función $\wp$ de Weirstrass.

$f(z) - \varphi(z)$ es una función elíptica sin polos, por lo que,

$$f(z) - \varphi(z) \equiv C = \textit{constante}$$

que es equivalente a 2.21.

□

Capítulo 3

Los campos elípticos son campos de Newton

En este capítulo se muestra el resultado principal de esta tesis, esto es que todo campo vectorial elíptico es un campo vectorial Newtoniano.

Como en la mayoría de los casos en la variable compleja, se tendrán dos perspectivas, la analítica y la geométrica. Para presentar la perspectiva geométrica se requerirán algunos conceptos como *cubriente ramificado*, *pullback* y la *relación entre campos vectoriales complejos y su pullback*.

Un campo vectorial elíptico, es un campo vectorial complejo, esto es,

$$X(z) = g(z) \frac{\partial}{\partial z},$$

con $g(z)$ una función elíptica.

3.1. Perspectiva analítica.

Nos interesa poder representar a la función elíptica $g(z)$ que define a nuestro campo vectorial elíptico $g(z)\frac{\partial}{\partial z}$ como el cociente $-\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)}$ para alguna $\Psi(z)$. Para encontrar $\Psi(z)$ procederemos como sigue:

1. Primero notamos que $-\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)} = -\frac{1}{(\log(\Psi(z)))'} = -\frac{1}{g(z)}$.
2. Enseguida observamos que las funciones elípticas inducen de forma natural funciones sobre el toro,
3. Por consecuencia del Teorema de Liouville, estas funciones $g(z)$ son meromorfas, además, por el teorema 2.9.2, las funciones elípticas tienen “*descomposición en fracciones parciales*”, en términos de las funciones $\wp$, ζ y σ de Weierstrass.
4. Así se podrá finalmente integrar y exponenciar la expresión $-(\log(\Psi(z)))' = \frac{1}{g(z)}$ para obtener una representación explícita para $\Psi(z)$.

A continuación se enunciará el teorema que mostrará que todo campo vectorial $X(z) = g(z)\frac{\partial}{\partial z}$ con $g(z)$ una función elíptica, es un campo vectorial Newtoniano $X(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)}\frac{\partial}{\partial z}$ y además, obtendremos una representación explícita de la función $\Psi(z)$ que lo caracteriza.

Teorema 3.1.1. *Sean $g(z)$ una función elíptica con periodos fundamentales $2w_1$ y $2w_2$, y $b_1, \dots, b_r$ los polos de $g(z)$ en el paralelogramo fundamental. Suponga que b_k es de orden β_k , con parte principal*

$$G_k(z) = \frac{A_{1k}}{z - b_k} + \dots + \frac{A_{\beta_k k}}{(z - b_k)^{\beta_k}} \quad (k = 1, \dots, r),$$

Entonces existen constantes C' y C tales que

$$\Psi(z) = C' e^{-Cz} \prod_{k=1}^r \left\{ \sigma(z - b_k)^{-A_{1k}} \exp \left[\sum_{j=2}^{\beta_k} (-1)^j \frac{A_{jk}}{(j-1)!} \zeta^{(j-2)}(z - b_k) \right] \right\}.$$

$$\text{y } g(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)}.$$

Demostración. Por el Teorema 2.9.2, sabemos que

$$g(z) = C + \sum_{k=1}^r \left\{ A_{1k} \zeta(z - b_k) - \frac{A_{2k}}{1!} \zeta'(z - b_k) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{\beta_k-1} \frac{A_{\beta_k k}}{(\beta_k - 1)!} \zeta^{(\beta_k-1)}(z - b_k) \right\},$$

ahora bien,

$$-(\log(\Psi))' = -\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)} = C + \sum_{k=1}^r \left\{ A_{1k} \zeta(z - b_k) - \frac{A_{2k}}{1!} \zeta'(z - b_k) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{\beta_k-1} \frac{A_{\beta_k k}}{(\beta_k - 1)!} \zeta^{(\beta_k-1)}(z - b_k) \right\},$$

por lo que integrando, y recordando que $\frac{\partial}{\partial z} \log \sigma(z) = \zeta(z)$, obtenemos

$$-\log(\Psi) = C_0 + Cz + \sum_{k=1}^r \left\{ A_{1k} \log \sigma(z - b_k) - \frac{A_{2k}}{1!} \zeta(z - b_k) + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{\beta_k-1} \frac{A_{\beta_k k}}{(\beta_k - 1)!} \zeta^{(\beta_k-2)}(z - b_k) \right\},$$

exponenciando y renombrando $C' = e^{-C_0}$

$$\Psi(z) = C' e^{Cz} \exp \left[- \sum_{k=1}^r \{ A_{1k} \log \sigma(z - b_k) + \sum_{j=2}^{\beta_k} (-1)^{j-1} \frac{A_{jk}}{(j-1)!} \zeta^{(j-2)}(z - b_k) \} \right],$$

y finalmente:

$$\Psi(z) = C' e^{-cz} \prod_{k=1}^r \left[\sigma(z - b_n)^{-A_{1k}} \exp \left\{ \sum_{j=2}^{\beta_k} (-1)^j \frac{A_{jk}}{(j-1)!} \zeta^{j-2}(z - b_k) \right\} \right].$$

□

Corolario 3.1.2. Sea $X(z) = g(z) \frac{\partial}{\partial z}$ con $g(z)$ una función elíptica, sea $f = \frac{1}{g}$, entonces $X(z)$ es un campo vectorial Newtoniano $X(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$, con $\Psi(z)$ como en el teorema 3.1.1.

3.2. Perspectiva geométrica.

Para ver la perspectiva geométrica, se tiene que introducir los términos de *cubriente ramificado* y *pullback*.

Definición 3.2.1. Un cubriente $\Psi : V \rightarrow W$ es un mapa continuo y suprayectivo, tal que, $\forall w \in W, \exists$ un conjunto abierto $U \ni w$ con la característica de que $\Psi^{-1}(U)$ es la unión de conjuntos abiertos disjuntos $O_\alpha \subset V$, y cada uno de ellos es un homeomorfismo en U , esto es $\Psi_1 : O_\alpha \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Un cubriente ramificado $\Psi : V \rightarrow W$ es un cubriente excepto en un número finito de puntos en W , estos puntos son llamados puntos de ramificación.

Definición 3.2.2. Sea Ψ un difeomorfismo local, el pullback de Y por medio de Ψ es el campo vectorial complejo $X(z)$ en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ cuya imagen por $\Psi'(z)$ es $Y(w)$. Esto es $(\Psi^*Y)(z) = X(z)$ tal que $\Psi'(z)X(z) = Y(\Psi(z))$.

La relación entre campos vectoriales complejos y su pullback esta dado por el siguiente lema cuya demostración es local y esta dada por el lema 3.2.4:

Lema 3.2.3. Sea $Y(w) = g(w) \frac{\partial}{\partial w}$ un campo vectorial complejo en $\widehat{\mathbb{C}}_w$ y $\Psi : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$ un cubriente ramificado. El campo vectorial complejo $X(z) = f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ es el pullback de Y en Ψ si y solo sí:

$$f(z) = \frac{g(\Psi(z))}{\Psi'(z)}. \quad (3.1)$$

Demostración. Es inmediata de la regla de la cadena. □

Una manera de caracterizar los campos vectoriales, es a través del siguiente lema.

Lema 3.2.4. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Un campo vectorial $X(z) = f(z) \frac{\partial}{\partial z}$ es un campo Newtoniano en U .
2. $X(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ con $\Psi(z) = \exp \left[-\int^z \frac{1}{f(\zeta)} d\zeta \right]$ analítica en U^* , donde la integral es sobre un camino $\gamma(t)$ clase C^1 contenido en U tal que $\gamma(0) = z_0$ es fijo y además $\gamma(1) = z$.
3. $X(z)$ es el pullback de $-w \frac{\partial}{\partial w}$ vía Ψ .

Demostración. La demostración de $(1) \Leftrightarrow (3)$ es inmediata de la definición de pullback y el lema 3.2.3. Para obtener la equivalencia $(1) \Leftrightarrow (2)$, consideremos

$$\frac{1}{f(z)} = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)} = \frac{\partial}{\partial z} \{ \log \Psi(z) \} ,$$

integrando a lo largo de un camino γ de clase C^1 en U para algun z_0 escogido de manera que (3) se satisfaga, y finalmente exponenciando. $\square$

La interpretación geométrica del lema en términos de pullback es como sigue: La trayectoria $z(t)$ de un campo vectorial Newtoniano $X(z)$, es el flujo del f , via Ψ , del campo $-w \frac{\partial}{\partial w}$ (cuyas trayectorias son líneas rectas, parametrizadas por e^{-t} , que comienzan en ∞ y terminan en 0 en $\widehat{\mathbb{C}}_w$). Más aun, $\Psi(z(t)) = \Psi(z_0)e^{-t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

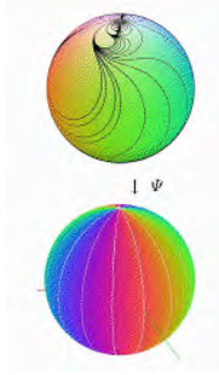


Figura 3.1: Las trayectorias $z(t)$ corresponden a las trayectorias $-w \frac{\partial}{\partial w}$ bajo el cubriente Ψ .

Como los campos vectoriales Newtonianos se expresan como $X(z) = f(z) \frac{\partial}{\partial z}$, entonces tenemos que

$$\Psi(z) = \exp \left[- \int^z \frac{1}{f} dZ \right],$$

donde no siempre es sencillo encontrar explícitamente a $\Psi(z)$, sin embargo, existe un modo de generar campos de Newton explícitamente de forma sencilla, considerando a $\Psi(z)$ como un cubriente ramificado de la esfera de Riemann en ella misma.

Notemos que la composición de cubrientes ramificados es un cubriente ramificado,

Proposición 3.2.5. Sea $Y(t) = g(t)\frac{\partial}{\partial t}$ un campo vectorial en $\widehat{\mathbb{C}}_t$ y supongamos que

$$\Psi_1 : \widehat{\mathbb{C}}_z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_w$$

y

$$\Psi_2 : \widehat{\mathbb{C}}_w \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}_t$$

son cubrientes ramificados. Entonces $X(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ es el pullback via $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$ de $Y(t)$ si y sólo si

$$f(z) = \frac{g(\Psi(z))}{\Psi'(z)} = \frac{g(\Psi_2(\Psi_1(z)))}{\Psi_2'(\Psi_1(z))\Psi_1'(z)}.$$

De esta forma, considerando $Y(t) = -t\frac{\partial}{\partial t}$ podemos construir diversos campos vectoriales de Newton, como por ejemplo.

Ejemplo 3.2.6. El campo vectorial complejo $X(z) = e^z\frac{\partial}{\partial z}$ se obtiene de $-t\frac{\partial}{\partial t}$ via pullback con $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$, donde $\Psi_2 = e^w$ y $\Psi_1 = e^{-z}$.

Ahora bien, bajo el entendimiento de que la composición de cubrientes ramificados, nuevamente es un cubriente ramificado, nuestro objetivo es mostrar que los campos vectoriales elípticos son el pullback de $-w\frac{\partial}{\partial w}$. En la figura 3.2 se muestra explícitamente la composición de estos cubrientes.

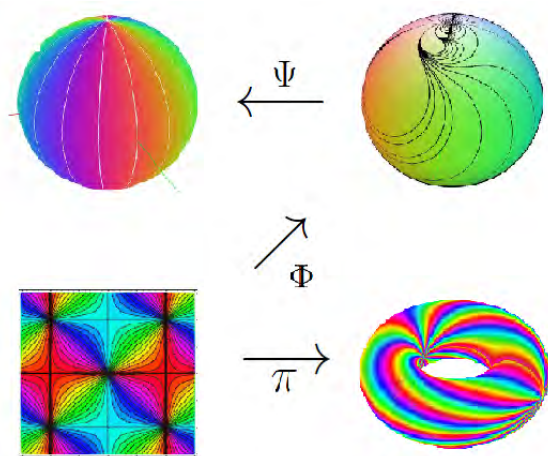


Figura 3.2: Figura que muestra que los campos elípticos son pullback mediante un cubriente ramificado del campo $-w\frac{\partial}{\partial z}$. En la figura Φ es la proyección estereográfica, Ψ es el cubriente ramificado encontrado explícitamente en el teorema 3.1.1 y π es la proyección usual sobre el toro

Capítulo 4

Conclusiones y trabajos futuros

A lo largo de este trabajo, se caracterizaron a los campos vectoriales elípticos como campos de Newton. Además se calculó de manera explícita a la función Ψ que lo define.

Dado que el flujo asociado a los campos Newtonianos se visualiza de una manera muy eficiente si se conoce explícitamente el cubriente ramificado que lo define (vease [1]), entonces se tienen ahora ya los elementos para poder visualizar todos los campos elípticos.

Mucho queda por hacer al respecto de los campos vectoriales elípticos, en particular, en este trabajo Ψ queda expresada en términos de las funciones σ y ζ , lo cual podría representar un problema, pues no siempre es sencillo calcularlas, sin embargo, las funciones elípticas pueden ser representadas en términos de la función θ , ya que la función $\wp$ de Weierstrass y la función θ están estrechamente relacionadas. Esto provee un enlace con la teoría de números (pues la función θ aparece de manera natural en teoría de números), además de facilitar el cálculo de Ψ , ya que la convergencia numérica de las funciones θ es mucho más eficiente.

Como último punto, este trabajo sirve como un primer esbozo de lo que se tiene que hacer para extender la teoría al caso de superficies de Riemann de género mayor a 1. Las superficies de Riemann de género mayor a 1, se pueden representar como cocientes del semiplano superior bajo la acción de un subgrupo de $SL_2(\mathbb{R})$, de manera que en este caso las funciones invariantes bajo la acción de este subgrupo son las funciones que tomarían el papel de las funciones elípticas.

Bibliografía

- [1] Alvarez-Parrilla, A; Solorza-Calderón, S.; Yee-Romero, C.: *Complex analytic vector field visualization without numerical integration*. Preprint, 2008
- [2] Alvarez-Parrilla, A.; Gómez-Arciga A.; Riesgo-Tirado A. *Newton Vector Fields on the Plane and on the Torus*. Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 54: No. 5, pp. 449–461, 2009.
- [3] Benzinger, Harold E. *Plane autonomous systems with rational vector fields*. Trans. Amer. Math. Soc. 326 (1991), no. 2, 465–483
- [4] Benzinger, Harold E. *Julia sets and differential equations*. Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), no. 4, 939–946
- [5] Helminck, G. F.; Kamphof, F. H.; Streng, M. and Twilt, F. *The Qualitative Behaviour of Newton Flow for Weierstrass' $\wp$ -function*. Complex Variable and Elliptic Equations, 47:10, (2002), 867–880
- [6] Hirsch, G.F.; Smale, S *On Algorithms for solving $f(z) = 0$* . Comm. Pure Appl. Math., 32, (1979), 281–312.

- [7] Jonger, H.Th.; Jonker P. and Twilt, F *On the classification of plane graphs representing structurally stable rational Newton flows*. J. Comb. Th. Series B. 15(2), (1991), 256–270
- [8] Jonger, H.Th.; Jonker P. and Twilt, F *The continuous, desingularized Newton method for meromorphic functions*. Acta Appl. Math., 13, (1988), 81–121
- [9] Smale, S. *A convergent process of price adjustment and global Newton methods*. J. Math. Econom. 3, (1976), 107–120
- [10] Smale, S. *On the efficiency of algorithms of analysis*. Bulletin of Amer. Math. Soc., 13, 2, October 1985, 87–121
- [11] Markushevich A. I. *Theory of functions of a complex variable*. Chelsea Publishing Company.