

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

ESCUELA DE CIENCIAS

ESTUDIO DE PROPIEDADES ANISOTROPICAS EN SOLIDOS

USANDO ELIPSOMETRIA

T E S I S P R O F E S I O N A L

QUE PRESENTA

Gustavo Pérez Uribe

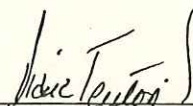
Aprobado por:



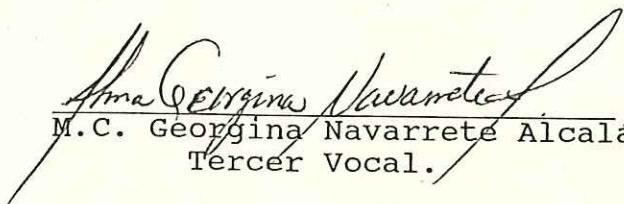
Dr. Roberto Machorro Mejía  
Presidente del Jurado.



Dr. Jesús Siqueiros Beltrones  
Primer Vocal.



Dra. Diana Tentori Santacruz  
Segundo Vocal.



M.C. Georgina Navarrete Alcalá  
Tercer Vocal.



M.C. José Valenzuela Benavides  
Secretario.

A G R A D E C I M I E N T O S

A todo el personal del Instituto de Fisica de la Universidad Nacional Autonoma de Mexico Laboratorio Ensenada que de alguna manera hizo posible la realizacion de este trabajo.

D E D J C A I D R J A G

*A mis Abuelos*

*A mis Padres*

*A mi Familia.*

## RESUMEN

El trabajo consiste en caracterizar materiales anisotrópicos homogéneos por medio de mediciones elipsométricas. Se parte de un tratamiento matricial de  $4 \times 4$  y se obtiene Reflectancia y Transmitancia en las dos polarizaciones S y P, así como los términos cruzados. Se ilustra el método aplicando el tratamiento a diferentes sistemas de multicapas.

## ABSTRACT

In this work we developed an algorithm to obtain the Reflectance and Transmittance of an anisotropic homogeneous thin layer. The model for microstructure is based on cylindrical columns and the propagation of electromagnetic waves through them.

The polarizations P and S are obtained and the cross terms, due to the asymmetry, are present. The phase and amplitude are related to the ellipsometric parameters.

## INDICE

pags.

INTRODUCCION.....	1
CAPITULO I. Notación para un sistema de multicapas isotrópicas.....	4
1.1 Notación y definiciones.....	4
1.2 Relaciones fundamentales de recurrencia.....	8
1.3 Soluciones a las relaciones de recurrencia.....	9
1.3.1 Medios absorbentes.....	10
1.4 Matriz característica.....	11
CAPITULO II. Propagación de ondas electromagnéticas en materiales isotrópicos.....	13
2.1 Generalidades.....	14
2.1.1 Ecuaciones de Maxwell.....	14
2.1.2 Matriz de propagación.....	15
2.1.3 Matrices R y T.....	19
2.1.4 Medio homogéneo.....	22
2.2 Generalización de Abelés.....	24
CAPITULO III. Propagación de ondas electromagnéticas en materiales anisotrópicos.....	29
3.1 Modos de Polarización lineal.....	30
3.1.1 Estructura columnar normal.....	30
3.1.2 Estructura columnar oblicua.....	37
3.2 Programa computacional utilizado.....	44
CAPITULO IV . Uso del elipsómetro para caracterización de materiales.....	45
4.1 Parámetros elipsométricos.....	46
4.2 Principio de funcionamiento.....	48
4.3 Método para síntesis de dieléctricos.....	52
4.3.1.- Espesor Optico ( $\Lambda_s$ ).....	53
4.3.2.- Diferencia relativa de camino óptico (DRCO).....	54
4.3.3.- Razón de amplitud ( $\psi$ ).....	56

4.3.4.- Angulo de Brewster ( $\theta_B$ ).....	56
4.3.5.- Angulo de capas ausentes ( $\theta_{aus}$ ).....	58
4.4 Aproximación de primer orden utilizada.....	59
<i>CAPITULO V.- Resultados y conclusiones.....</i>	<i>65</i>
5.1 Aplicaciones.....	66
5.1.1 Capas delgadas.....	68
5.2 Resultados y conclusiones.....	70
<i>CONCLUSIONES GENERALES.....</i>	<i>74</i>
<i>APENDICE-A. Conceptos generales.....</i>	<i>76</i>
<i>APENDICE-B. Representación del tensor <math>\epsilon</math> en los ejes coordenados.....</i>	<i>86</i>
<i>APENDICE-C Ecuaciones de Maxwell.....</i>	<i>89</i>
<i>APENDICE-D Campos Tangenciales.....</i>	<i>92</i>
<i>BIBLIOGRAFIA.....</i>	<i>95</i>

## INTRODUCCION

La caracterización óptica de materiales es de suma importancia para : interferometría, diseño de sistemas ópticos, construcción de dispositivos y sistemas electro-ópticos, etc. Existe el problema adicional de que las propiedades ópticas de los sistemas dependen de una serie de parámetros, entre ellos los de elaboración de la muestra misma. Por ejemplo, en películas delgadas depositadas por la técnica de evaporación en vacío, el medio ambiente (humedad, temperatura, etc) afecta la estructura de la película y valor de su función dieléctrica.

Existen reportadas en la literatura una gran variedad de técnicas de evaluación de las constantes ópticas, (Hass G. 1967), cada una de ellas presenta sus ventajas e inconvenientes . Resulta de particular importancia la elipsometría, que es una técnica de gran precisión y que permite tomar en cuenta aspectos como la heterogeneidad y la anisotropía de los materiales. Al considerar estos aspectos, el análisis del problema se complica, pues las matrices de propagación deben incorporar los efectos

cruzados de polarización, pero las ganancias que se obtienen lo ameritan, (Teitler S. 1970).

En este trabajo se presenta el análisis para un sistema de multicapas, donde los materiales a usar pueden presentar estructura columnar lo que induce anisotropía. Sin embargo, también es posible considerar anisotropía por medio de los índices de refracción, (Horowitz F. 1983).

El problema que se tiene es obtener la Transmitancia y Reflectancia en ambas polarizaciones y términos cruzados para un material anisotrópico. Este tipo de materiales puede darse de diferentes maneras, ya sea en forma natural como la calcita, cuarzo, etc, ó en forma inducida, como en catalizadores químicos y en películas delgadas evaporadas. Nosotros nos limitamos a este último caso. La manera de crecerlas es bajo un cierto ángulo- $\nu$  de incidencia respecto al haz molecular, fig.(4.1). Esto permite que se forme una estructura columnar del material a nivel de microestructura. Se propone a las constantes ópticas del material  $(n,k)$  en forma de tensor dieléctrico y de ellas se obtienen las matrices de reflectancia  $(R)$  y transmitancia  $(T)$ .

En el capítulo I se hace un breve desarrollo semejante al tratamiento tradicional de Abelés (1950) para obtener  $R$  y  $T$ , en ambas polarizaciones, para materiales homogéneos e isotrópicos solamente.

En el capítulo II se generaliza el tratamiento anterior

para obtener R y T en ambas polarizaciones y términos cruzados. Se trata el caso de un medio homogéneo, ya que los materiales a tratar serán de este tipo, isotrópicos o anisotrópicos.

En el capítulo III se desarrolla la teoría para medios anisotrópicos homogéneos con estructura columnar, bajo crecimiento del material a incidencia oblicua y normal. También se implementan los programas computacionales que calculan R y T para los dos casos anteriores, y se generalizan a un sistema de multicapas.

Se esboza el problema inverso (cap.IV). Es decir, obtener las constantes del material dadas las R y T. Para este caso se tienen varios métodos de aproximaciones sucesivas probables sin llegar a tener la solución general del problema, (Heather L. 1981). Se utilizan, por tanto, técnicas más convencionales, las más comunmente utilizadas son : métodos mecánicos, interferométricos y elipsométricos. Para medir el espesor de una película delgada se pueden usar los métodos mecánicos e interferométricos.

Por último en el capítulo V se presentan los resultados obtenidos para distintos filtros anisotrópicos y enseguida se presentan las conclusiones de los resultados obtenidos.

## CAPITULO I

### NOTACION PARA UN SISTEMA DE MULTICAPAS ISOTROPICAS

#### *Introducción.*

Existen diversos tratamientos que han sido propuestos, por diferentes autores, para manejar un sistema de multicapas. El que se presenta aquí lo desarrolló W. Weinstein (1954), y se intenta dar una idea básica de la teoría desarrollada por Abelés (1950). Una película delgada se caracteriza por tener un espesor del orden de la longitud de onda utilizada y con una extensión infinita comparada con su espesor. Un sistema de multicapas es un apilamiento de películas delgadas de materiales.

#### *1.1.- Notación y Definiciones.*

Para el estado del comportamiento de las películas delgadas la luz que se utiliza como onda se representa, por simplicidad, por una onda monocromática plana. También se

supone que los efectos de difracción en los bordes de las películas pueden despreciarse debido a la extensión de las capas.

El campo eléctrico ( $\mathcal{E}$ ) correspondiente a la luz que interacciona con la película será la onda plana polarizada:

$$\mathcal{E} = E \exp \frac{2\pi i}{\lambda_0} (ct - nz) \quad (1.1)$$

Aquí  $z$  es la dirección de propagación de la onda,  $n$  el índice de refracción del medio de propagación,  $\lambda_0$  la longitud de onda en el vacío,  $c$  la velocidad de la luz y  $t$  el tiempo.  $E$  es la amplitud compleja del vector de campo eléctrico (en  $z=t=0$ ). Por lo que un factor ( $\exp i\Omega$ ) va incluido dentro del vector  $E$ , que implica una fase inicial de  $\Omega$  radianes. Similarmente para la intensidad de campo magnético  $\mathcal{H}$ , asociado a la onda tenemos,

$$\mathcal{H} = H \exp \frac{2\pi i}{\lambda_0} (ct - nz) \quad (1.2)$$

donde  $H$  es la amplitud compleja del campo magnético asociado que incluye la fase inicial del campo.

Notemos que la forma exponencial de estas ecuaciones satisface las ecuaciones de Maxwell para  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$ .

Para un medio isotrópico se sabe que  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{H}$  están relacionados por medio de

$$\mathcal{H} = n(\hat{k} \times \mathcal{E}) \quad (1.3)$$

donde  $\hat{k}$  es un vector unitario en la dirección de propagación.

La iluminación vista en una pantalla perpendicular a la dirección de propagación de la onda definida en (1.1) es

proporcional a la potencia por unidad de área, es decir, al vector de Poynting  $S = E \times H$  entonces, usando (1.3) tenemos que la iluminación es

$$\begin{aligned} I = S &= |E| \cdot |H| \\ &= n|E|^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Esta es la cantidad que se usa para determinar las Transmitancias y Reflectancias.

Para un sistema de multicapas sea,  $E$ ,  $E''$  y  $E'$  los vectores eléctricos incidente, reflejado y transmitido respectivamente. Los medios inicial y final tienen índices  $n$  y  $n'$  respectivamente. La Reflectancia se define como,

$$R = \left| \frac{E''}{E} \right|^2 \quad (1.5)$$

Similarmente la Transmitancia viene dada por

$$T_a = \frac{n'}{n} \left| \frac{E'}{E} \right|^2 \quad (1.6)$$

esta es el factor de iluminación en las pantallas de prueba perpendiculares a los rayos en ambos lados del sistema de multicapas. También se puede definir la Transmitancia como el cociente del flujo total de luz incidente entre el flujo total transmitido, considerando el área completa de la multicapa para ambos flujos. Si los ángulos incidente y final son  $\varphi$  y  $\varphi'$  tenemos

$$T_b = \frac{n \cdot \cos \varphi}{n' \cos \varphi'} \left| \frac{E'}{E} \right|^2 \quad (1.7)$$

Notemos que las expresiones (1.6) y (1.7) son idénticas cuando se tiene incidencia normal. Si consideramos flujos de energía, se tendrá,  $R + T_b = 1$  cuando el medio es no

absorbente esta expresión representa la conservación de la energía.

Consideremos un apilamiento de  $p-1$  medios del sistema de multicapas, acotados por los medios 0 y  $p$ , y sea  $\varphi_p$  el ángulo de incidencia en el medio  $p$ , con respecto a la normal, como se muestra en la fig.(1.1). Sean  $(h_j, n_j, \varphi_j)$  los espesores, índices de refracción y ángulos de propagación respectivamente para el medio  $j$ . Los resultados se pueden representar convenientemente en función de los vectores de campo paralelos a las interfaces. Estas componentes tangenciales se denotarán por  $E$  y  $H$  con superíndices y subíndices apropiados. Cuando se tiene luz incidente de tal manera que el vector eléctrico está en el plano de incidencia, la componente  $E$  también estará en el plano de incidencia. En cada medio de la fig.(1.1), excepto para el medio 0, tendremos dos ondas, una viajando en la dirección positiva de  $z$  y otra en la negativa. Las componentes tangenciales de estas ondas en el medio  $j$  se denotan por  $E_j^+$  y  $E_j^-$ . Similarmente las correspondientes componentes magnéticas se representan por  $H_j^+$  y  $H_j^-$ . Aclaremos que en la figura las flechas denotan la dirección del haz y no la dirección de las componentes  $E_j^+$  y  $E_j^-$ . Más específicamente,  $E_j^+$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) se define como el valor instantáneo de la amplitud de la luz en la interfaz correspondiente. Similarmente para  $H_j^+$ .

No se hace distinción para las polarizaciones S ó P, de

los campos E y H, porque las ecuaciones son formalmente las mismas si se toma en cuenta una cierta simplificación. Esto se tratará en la siguiente sección.

### 1.2.- Relaciones Fundamentales de Recurrencia.

La notación definida anteriormente se usa para expresar

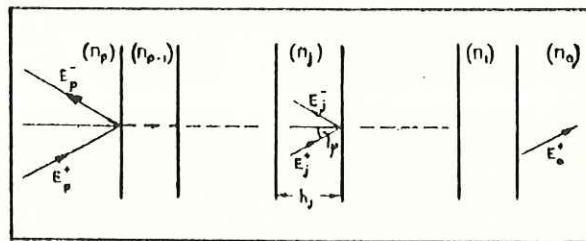


Fig.1.1 Situación geométrica y notación.

las relaciones básicas entre las amplitudes de los campos para las interfaces de la multicapa.

La componente tangencial de los campos electromagnéticos es continua al atravesar una interfaz; usando estas condiciones y la relación (1.3) para eliminar la componente magnética, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones (ver apéndice D),

$$\begin{aligned}
 E_{j+1}^{\dagger} + E_{j+1}^{\bar{}} &= E_j^{\dagger} \exp(ig_j) + E_j^{\bar{}} \exp(-ig_j) \\
 u_{j+1} E_{j+1}^{\dagger} - E_{j+1}^{\bar{}} &= u_j E_j^{\dagger} \exp(ig_j) - E_j^{\bar{}} \exp(-ig_j)
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

(j = 0, 1, \dots, p-1)

donde

$$g_j = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_j h_j \cos\phi_j
 \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}
 Y \quad u_j &= n_j / \cos \varphi_j && \text{polarización-P} \\
 u_j &= n_j \cos \varphi_j && \text{polarización-S}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

dependiendo de la polarización que se tenga. Para las ecuaciones (1.8) si se trabaja sólo con el haz transmitido a través de la primera superficie se tiene que  $E_0^-$  es cero.

Las cantidades  $g_j$  son los espesores ópticos efectivos de los respectivos medios. Las  $u_j$  son los llamados índices generalizados que dependen del ángulo de propagación y el tipo de polarización.

Las ecuaciones (1.8) son un conjunto homogéneo de  $2p$  ecuaciones lineales simultáneas, con  $2p+1$  incógnitas  $E_j^\pm$ . Se encontrarán las soluciones en la siguiente sección.

Las expresiones para  $R$  y  $T_b$  para ambas polarizaciones son

$$R = \left| \frac{E_p^-}{E_p^+} \right| ; \quad T_b = \frac{n_0 \cos \varphi_p}{n_p \cos \varphi_0} \left| \frac{E_0^-}{E_p^+} \right| \tag{1.11}$$

### 1.3.- Soluciones Básicas a las Relaciones de Recurrencia.

Las soluciones de las ecuaciones (1.8) son inmediatas: podemos resolver para  $E_{j+1}^\pm$  en función de los campos para el medio  $j$ , y se obtienen las siguientes soluciones

$$E_{j+1}^\pm = \frac{1}{2u_{j+1}} \left[ (u_{j+1} \pm u_j) \exp(i g_j) E_j^\pm + (u_{j+1} \mp u_j) \exp(-i g_j) E_j^\mp \right] \tag{1.12}$$

donde los signos se van alternando en forma lógica, el signo  $E^+$  corresponde a los campos propagándose en la dirección positiva de  $z$ . Las ecuaciones anteriores son relaciones de

recurrencia, de modo que si se toma un valor de  $E_0^+$  (digamos la unidad) los demás campos ( $E_1^+, E_2^+ \dots E_p^+$ ) se determinan automáticamente. Y de estas soluciones se puede obtener la Reflectancia y la Transmitancia para el sistema.

Los coeficientes de Fresnel para reflexión y transmisión para la interface (j+1) y (j) se definen por,

$$r_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{u_{j+1} + u_j} \quad ; \quad t_j = 2u_{j+1} / (u_{j+1} + u_j) \quad (1.12a)$$

Si las ecuaciones (1.12) se ponen en función de estos coeficientes, toman la forma,

$$\begin{aligned} E_{j+1}^+ &= \frac{1}{t_j} \left[ \exp(ig_j) E_j^+ + r_j \exp(-ig_j) E_j^- \right] \\ E_{j+1}^- &= \frac{1}{t_j} \left[ r_j \exp(ig_j) E_j^+ + \exp(-ig_j) E_j^- \right] \end{aligned} \quad (1.12b)$$

las soluciones dadas por (1.12) algunas veces no son muy adecuadas para los métodos computacionales. A continuación se hace una serie de transformaciones con diferentes variables para escribir estas ecuaciones en forma apropiada para la utilización de los métodos computacionales.

### 1.3.1.- Medios Absorbentes.

Para las derivaciones anteriores se supuso que ningún medio de la multicapa es absorbente. Los efectos de absorción se toman en cuenta al introducir el índice complejo de refracción  $N \equiv n - ik$ . Si este nuevo número se sustituye por  $n$  en la ecuación (1.1) aparece un factor real de atenuación dado por  $\exp(-2\pi kz/\lambda_0)$ , indicando que la amplitud compleja de la onda se reduce por un factor de

$\exp(-2\pi k)$  por longitud de onda en el vacío en la dirección de propagación. Se puede mostrar que todas las relaciones anteriores son válidas para estos medios si se sustituye el índice complejo  $N$  en lugar de  $n$ . Los valores de  $\cos\phi$  en las ecuaciones (1.9,1.10) salen de la ley de Snell y se vuelven complejos, es decir, se tienen ahora ángulos complejos. Cuando se tienen ángulos complejos de incidencia, los vectores  $k$  (de propagación) y  $S$  (de Poynting) no necesariamente están en la misma dirección; para ángulos reales si coinciden esas direcciones.

#### 1.4.- Matriz Característica.

Como ya se menciono anteriormente las relaciones (1.8) no son la mejor opción para métodos numéricos. Se obtiene una solución alternativa al problema, poniendo las soluciones (1.12) en términos de  $E_j$  y  $H_j$ , donde

$$\begin{aligned} E_j &= E_j^+ + E_j^- \\ H_j &= H_j^+ + H_j^- \\ &= u_j (E_j^+ - E_j^-) \end{aligned} \quad (1.13)$$

estos campos  $E_j$  y  $H_j$  son las componentes tangenciales de los vectores de intensidad eléctrica y magnética; resolviendo para  $E_j^+$  tenemos

$$E_j^+ = (E_j \pm H_j/u_j) \quad (1.14)$$

cuando este resultado se sustituye en las soluciones (1.12) se obtiene

$$\begin{aligned} E_{j+1} &= E_j \cos(g_j) + \frac{1}{u_j} H_j \sin(g_j) \\ H_{j+1} &= iu_j E_j \sin(g_j) + H_j \cos(g_j) \end{aligned} \quad (1.15)$$

o si expresamos estas soluciones en forma matricial

$$\begin{bmatrix} E_{j+1} \\ H_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(g_j) & \frac{i}{u_j} \sin(g_j) \\ i u_j \sin(g_j) & \cos(g_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_j \\ H_j \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

donde ( $j = 1 \dots p-1$ )

Los valores iniciales de los campos están dados por  $E_1 = E_0^+$  y  $H_1 = u_0 E_0^+$  y los valores de  $E_p^+$  se obtienen de (1.14). La matriz que contiene a los senos y cosenos es la llamada Matriz Característica para el medio  $j$ . Esta forma de presentar soluciones al problema es usualmente la mejor para métodos numéricos. Cuando ninguna de las películas es absorbente, lo cual ocurre frecuentemente, todos los valores de las  $u$  y  $g$  son reales; entonces los elementos de la diagonal en las matrices características son reales y los demás elementos son imaginarios puros. Cuando alguna de las películas es absorbente las matrices son complejas y se debe de tratar a las funciones trigonométricas de acuerdo a esto. Es decir los valores de los  $g_j$  serán complejos.

Hemos estudiado un tratamiento matricial de  $2 \times 2$  que permite obtener las reflectancias y transmitancias, en las polarizaciones  $S$  y  $P$ , para un sistema de multicapas isotrópicas. En los capítulos posteriores se estudian sistemas de multicapas más completos y se introduce anisotropía en los mismos.

## CAPITULO II

### PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN MATERIALES ISOTROPICOS.

#### *Introducción.*

Básicamente lo que se presenta en este capítulo es una generalización del tratamiento de Abelés (1950) para la obtención de R y T en materiales isotrópicos, obteniéndose los términos cruzados para las polarizaciones P y S.

Matemáticamente, una manera de caracterizar a un material isotrópico es escribiendo su tensor de permitividad  $\epsilon(\omega)$  en forma diagonal y con los elementos diagonales

Nota.

En éste capítulo se hace una generalización del tratamiento expuesto en el capítulo I. Las ecuaciones 1.1 y 1.2 corresponden a las ecuaciones 2.6 directamente, con la transformación de

$$\Omega = -(S\omega/c)x$$

$$g = \delta$$

(1.17)

y se tomó g de la ecuación 1.9 para el caso de una película delgada. En un sistema de multicapas se generalizan los espesores ópticos  $\delta$  a  $\delta_j$ .

iguales entre sí.

La luz consiste de campos eléctricos y magnéticos, perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación. La onda electromagnética se propaga en el vacío con velocidad  $c$  de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell. Por tanto, resolviendo dichas ecuaciones tendremos la solución al problema.

## 2.1 Generalidades.

Los desarrollos y tratamientos que se exponen aquí son válidos tanto para materiales isotrópicos como anisotrópicos, ya sean homogéneos o no. Lo anterior es posible debido a que las ecuaciones de Maxwell son completamente generales.

### 2.1.1 Ecuaciones de Maxwell.

Partiremos de las ecuaciones para los rotacionales en medios lineales, no magnéticos  $\left\{ \mu_{ij} = \delta_{ij} \right\}$  y polarizables para el sistema de unidades gaussiano. Notemos que las permeabilidades se pueden representar por una delta de Kronecker y esto significa que estas cantidades son mutuamente ortonormales,

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{y} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.2a)$$

donde tenemos

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{y} \quad \mu = 1 \quad (\text{medio no magnético}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.4)$$

y como tenemos medios lineales

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \quad (2.5)$$

De las ecuaciones (2.2a) y (2.5) , para  $\mathbf{J}$ , tenemos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \epsilon_f \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.2b)$$

$$\text{donde} \quad \epsilon_f = \epsilon + 4\pi\sigma \mathbf{E} \left( \frac{1}{\partial \mathbf{E} / \partial t} \right)$$

nos referiremos, por simplicidad, al tensor "dieléctrico efectivo"  $\epsilon_f$  como  $\epsilon$ , que caracteriza al medio en general. En este tensor se incluye cualquier contribución de la corriente eléctrica, luego no necesariamente es real, simétrico o hermitiano (Teitler S. 1970).

Supondremos que los campos electromagnéticos se propagan en el medio como ondas planas atenuadas o no, según el valor del índice ( $n$ ) del medio en que se propaga la onda,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z,t) &= \mathbf{E}(z) \exp \left[ -i \left( \frac{S\omega}{c} x - \omega t \right) \right] \\ \text{y} \quad \mathbf{H}(z,t) &= \mathbf{H}(z) \exp \left[ -i \left( \frac{S\omega}{c} x - \omega t \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

con la geometría de la figura (2.1) y  $S = n_0 \sin \theta_0$  se conoce como invariante de Snell. El argumento de la exponencial es el conocido factor de fase (Heather L. 1981).

### 2.1.2 Matriz de propagación.

La matriz de propagación, que denotaremos por  $[L(z)]$  tiene la propiedad de que nos mapea las componentes tangenciales de los campos en la interfaz de  $z = 0$  a las correspondientes componentes dentro del medio para  $z \geq 0$ .

Si expandemos los vectores de amplitud de campo (2.6)

en sus tres componentes rectangulares sobre los ejes coordenados tendremos,

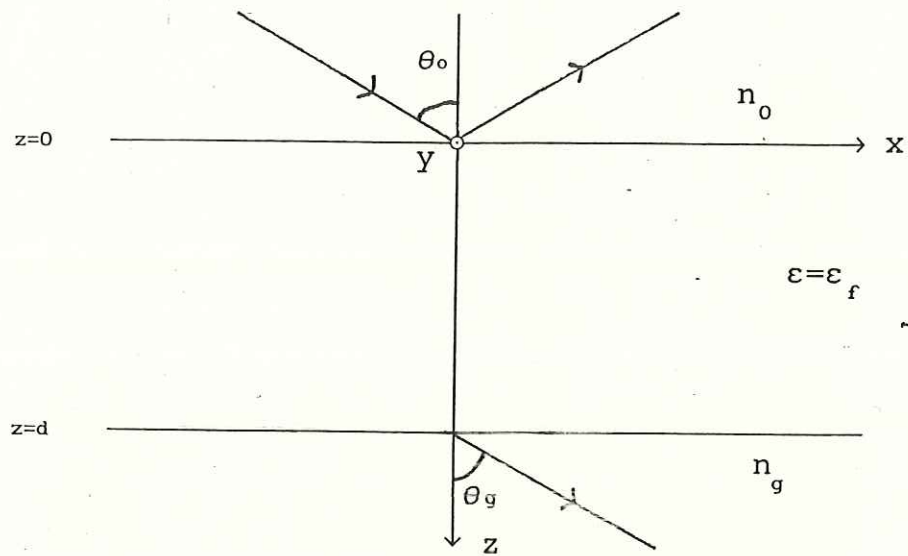


Fig.2.1 Geometría para un medio anisotrópico estratificado.

$$E(z) = \sum_{j=1}^3 E_j(z) \hat{e}_j \quad (2.7)$$

$$H(z) = \sum_{j=1}^3 H_j(z) \hat{e}_j \quad ; \quad (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \equiv (\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$$

sustituyendo directamente en (2.1) y (2.2b) se obtienen seis ecuaciones para cada una de las componentes. Si se tiene que  $\epsilon_{33}$  es diferente de cero, es posible eliminar las componentes  $E_3(z)$  y  $H_3(z)$ ; ya que al sustituir en las ecuaciones de Maxwell, la condición anterior asegura que no haya indeterminaciones. Entonces al hacer las sustituciones las partes temporales se eliminan y se obtienen expresiones en función de las partes espaciales. Si simplificamos la notación a través de las identidades,

$$u_n \equiv E_n(z), \quad u_{n+2} \equiv H_n(z) \quad \text{para } n = 1, 2$$

$$y \quad D \equiv \frac{c}{i\omega} \frac{d}{dz}$$

las cuatro ecuaciones resultantes quedan

$$\begin{aligned} Du_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{14}u_4 \\ Du_2 &= u_3 \\ Du_3 &= c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + c_{34}u_4 \\ Du_4 &= c_{41}u_1 + c_{42}u_2 + c_{44}u_4 \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde las constantes  $c_{ij}$  son de la forma,

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{S}{\epsilon_{33}} \epsilon_{31} & c_{12} &= \frac{S}{\epsilon_{33}} \epsilon_{32} & c_{14} &= \frac{S^2}{\epsilon_{33}} - 1 \\ c_{31} &= \epsilon_{21} - \epsilon_{31} \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} & c_{32} &= \epsilon_{22} - S^2 - \epsilon_{32} \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} & c_{34} &= -S \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} \\ c_{41} &= \epsilon_{31} \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} - \epsilon_{11} & c_{42} &= \epsilon_{32} \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} - \epsilon_{12} & c_{44} &= -S \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Las expresiones para la  $c_{ij}$  se obtienen en el apéndice C.

Las ecuaciones 2.8 forman un sistema de cuatro ecuaciones lineales, de modo que cualquier solución puede expresarse en general como una combinación lineal de las cuatro soluciones independientes. Teitler y Henvis (1970) llamaron a estas soluciones independientes  $u^\alpha$  ( $\alpha = a, b, c, d$ ), con componentes  $u_\beta^\alpha$  donde ( $\beta = 1, 2, 3, 4$ ). Son estos vectores solución  $u^\alpha$  los que forman la llamada matriz de propagación, cuando los ponemos en forma de columnas

$$L(z) \equiv \begin{bmatrix} u_1^a(z) & u_1^b(z) & u_1^c(z) & u_1^d(z) \\ u_2^a(z) & u_2^b(z) & u_2^c(z) & u_2^d(z) \\ u_3^a(z) & u_3^b(z) & u_3^c(z) & u_3^d(z) \\ u_4^a(z) & u_4^b(z) & u_4^c(z) & u_4^d(z) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

esta matriz tiene la propiedad de mapear las componentes de los campos tangenciales  $u_\beta^0$  en la interfaz  $z = 0$  a las correspondientes componentes  $u_\beta(z)$  en  $z \geq 0$ , dentro del mismo medio,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = L(z) \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ u_4^0 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad u(z) = L(z) u(0) \quad (2.11)$$

por esta razón se le llama matriz de propagación a  $L(z)$ .

Las condiciones a la frontera determinan las soluciones de interés del problema y excluyen situaciones singulares del mismo. Para nuestro caso se escogen las soluciones tales que en la interfaz  $z = 0$  se cumplan las condiciones,

$$u_1^a(0) = u_2^b(0) = u_3^c(0) = u_4^d(0) = 1$$

y  $u_\beta^\alpha(0) = 0$  para  $\alpha \neq a, b, c, d$ ;  $\beta \neq 1, 2, 3, 4$  (2.12)

entonces las componentes de la matriz de propagación cumplen con una delta de Kronecker ( $u_\beta^\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ ) en la frontera. Es decir, se inicializan los campos en la interface  $z = 0$  a una constante arbitraria: la unidad (Teitler S. 1970).

Si tenemos  $N$  capas o películas entre 0 y  $z$ , (2.11) se extiende simplemente a,

$$u(z) = \left[ \prod_{j=1}^n L_j(z) \right] u(0) \quad (2.13)$$

donde tenemos

$$\prod_{j=1}^n L_j(z) = L_1(d_1) \cdot L_2(d_2) \cdot \dots \cdot L_n(d_n) \quad (2.13a)$$

ya que tenemos que la función de cada una de las matrices de propagación, es transferir los campos de 0 a  $d_1$ , con  $L_n$ , desde  $d_1$  a  $d_2$ , con  $L_{n-1}$  y así sucesivamente. Esto permite que la matriz de propagación sea particularmente útil para manejar sistemas de multicapas.

### 2.1.3 Matrices de Reflectancia y Transmitancia.

Obtendremos las matrices complejas de reflectancia  $R$  y transmitancia  $T$  para un medio en general, es decir, heterogéneo y anisotrópico. Diremos que el campo eléctrico incidente  $E_o^+$  se compone de dos ondas planas, que tienen la forma,

$$E_{op}^+ \exp\{i(\omega t - \omega Sx/c)\} \quad (2.14)$$

para la polarización-P, y

$$E_{os}^+ \exp\{i(\omega t - \omega Sx/c)\} \quad (2.15)$$

para polarización-S es decir

$$E_o^+ = \begin{bmatrix} E_{op}^+ \\ E_{os}^+ \end{bmatrix} \exp\{i \exp(\omega t - \omega Sx/c)\} \quad (2.15.1)$$

para el vector de campo eléctrico incidente. Los campos reflejados tendrán amplitudes  $E_{op}^-$  y  $E_{os}^-$  para las polarizaciones P y S respectivamente. Los campos transmitidos son  $E_p^+$  y  $E_s^+$  similarmente. Convenciones

similares se toman para los campos electromagnéticos que se muestran en la figura (2.2).

Usando las condiciones a la frontera para los campos electromagnéticos y conectándolos a través de la matriz de propagación se obtiene (ver apéndice D para un mayor desarrollo de los conceptos usados y la obtención de las siguientes ecuaciones),

$$\begin{aligned} a_p^- E_{op}^- + a_s^- E_{os}^- + a_p^+ E_{op}^+ + a_s^+ E_{os}^+ &= 0 \\ b_p^- E_{op}^- + b_s^- E_{os}^- + b_p^+ E_{op}^+ + b_s^+ E_{os}^+ &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} a_p^\pm &= (l_{11} \cos \theta_o \pm l_{14} n_o) n_g - (l_{41} \cos \theta_o \pm l_{44} n_o) \cos \theta_g \\ a_s^\pm &= (l_{12} \mp l_{13} N_o) n_g - (l_{42} \mp l_{43} N_o) \cos \theta_g \\ b_p^\pm &= (l_{12} \cos \theta_o \pm l_{24} n_o) N_g + (l_{31} \cos \theta_o \pm l_{34} n_o) \\ b_s^\pm &= (l_{22} \mp l_{23} N_o) N_g + (l_{32} \mp l_{33} N_o) \end{aligned} \quad (2.17)$$

con  $N_o = n_o \cos \theta_o$ ,  $N_g = n_g \cos \theta_g$ , y  $l_{ij}$  es el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz  $L$  evaluada en  $z = d$ .

Ahora definimos los coeficientes de reflexión y transmisión (matrices) por medio de,

$$\begin{aligned} E_o^- &= [r] E_o^+ \\ E^+ &= [t] E_o^+ \end{aligned} \quad (2.18)$$

es decir, se definen los campos eléctricos reflejados ( $E_o^-$ ) y transmitidos ( $E^+$ ) en función del incidente ( $E_o^+$ ) y de las amplitudes de reflectancia  $[r]$  y transmitancia  $[t]$  respectivamente. Estas cantidades dependen, en general, del sistema de multicapas o del material en volumen que se esté

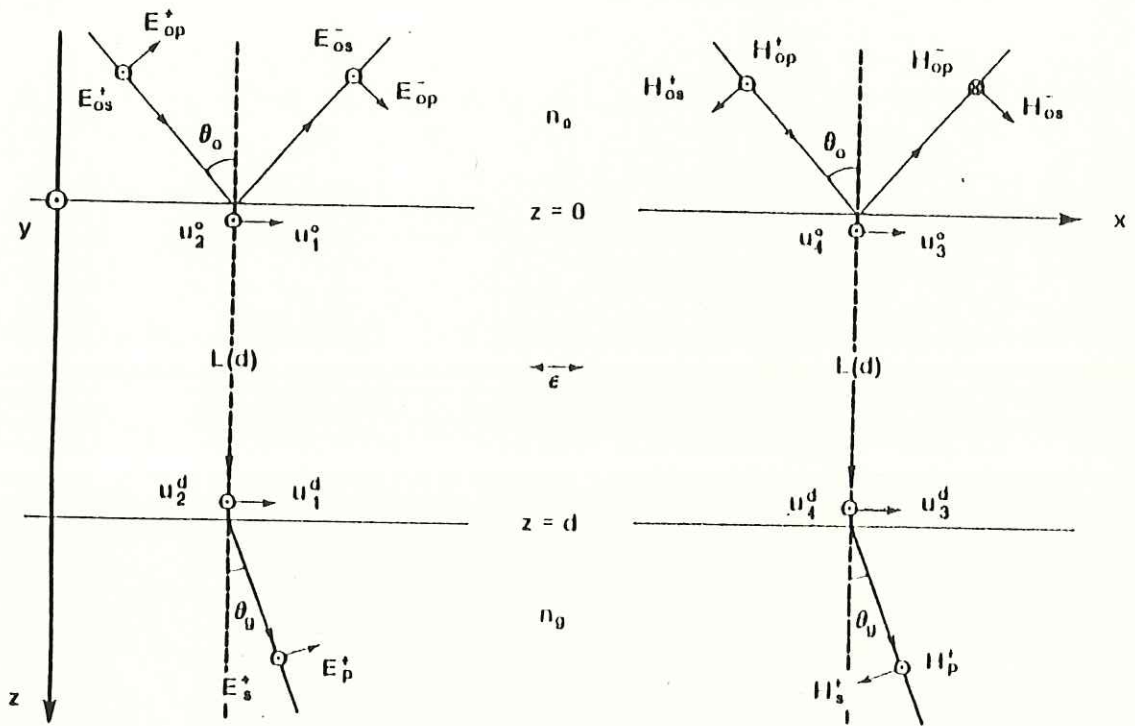


Fig.2.2 Convenciones para los campos reflejados y transmitidos.

utilizando. Los elementos de  $[r]$  y  $[t]$  se determinan a través de (2.16), es decir, resolvemos el sistema anterior para  $E_{op}^-$  y  $E_{os}^-$  quedando en función de  $[r]$  y  $E_{op}^+$ ,  $E_{os}^+$ . Para obtener  $[t]$  se necesita desarrollar más algebra (Teitler S. 1970); para  $[r]$  y  $[t]$  se tiene,

$$\begin{bmatrix} r_{pp} & r_{ps} \\ r_{sp} & r_{ss} \end{bmatrix} = (a_s^- b_p^- - a_p^- b_s^-)^{-1} \begin{bmatrix} a_p^+ b_s^- - a_s^- b_p^+ & a_s^+ b_s^- - a_s^- b_s^+ \\ a_p^- b_p^+ - a_p^+ b_p^- & a_p^- b_s^+ - a_s^+ b_p^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t_{pp} & t_{ps} \\ t_{sp} & t_{ss} \end{bmatrix} = N_g^{-1} \begin{bmatrix} a_{p1}^- & a_{s1}^- \\ b_{p1}^- & b_{s1}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{pp} & r_{ps} \\ r_{sp} & r_{ss} \end{bmatrix} + N_g^{-1} \begin{bmatrix} a_{p1}^+ & a_{s1}^+ \\ b_{p1}^+ & b_{s1}^+ \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

El subíndice 1 (es decir  $\alpha_{p1}^-$ ) se refiere al primer término

de la correspondiente cantidad en (2.17), es decir a  $(a\bar{p})$ .

De (2.19) se obtienen las matrices complejas de reflectancia y transmitancia definidas por (Teitler S. 1970)

$$\begin{aligned} [R] &= [r^* \cdot r] \\ [T] &= \frac{N_g}{N_0} [t^* \cdot t] \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde el simbolo \* significa el complejo conjugado. Notemos que estas cantidades  $[R]$  y  $[T]$  son las que se miden experimentalmente.

#### 2.1.4 Medio homogéneo anisotrópico.

El tratamiento hasta ahora es completamente general, es decir, se aplica a sistemas heterogéneos y anisotrópicos. Sin embargo es deseable simplificar para el caso en que se tiene un medio homogéneo, anisotrópico. Para este caso podemos formar a la matriz  $L$  de soluciones que son combinaciones lineales de ondas planas. Luego, consideremos vectores solución cuyas componentes tienen la forma,

$$u_j(z) = A_j \exp(-k_o \eta z), \quad k_o \equiv \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_o} \quad (2.21)$$

donde las  $A_j$  son las amplitudes,  $\lambda_o$  es la longitud de onda en el vacío de la luz utilizada y  $\eta$  es un parámetro a determinarse (índice de propagación). Luego de sustituir la expresión 2.21 en las ecuaciones 2.8, toman la forma,

$$\begin{aligned} (\eta + c_{11}) u_1 + c_{12} u_2 + c_{14} u_4 &= 0 \\ \eta u_2 + u_3 &= 0 \\ c_{13} u_1 + c_{32} u_2 + \eta u_3 + c_{34} u_4 &= 0 \\ c_{41} u_1 + c_{42} u_2 + (\eta + c_{44}) u_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

los valores permitidos del índice de propagación  $\eta$  están determinados de la ecuación secular para el sistema (2.22). Este sistema de ecuaciones se puede reducir convenientemente a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que tendrá soluciones no triviales cuando su determinante sea igual a cero. Entonces resulta equivalente el igualar a cero el determinante del sistema (2.22) que el que se obtiene al reducir el sistema a dos ecuaciones homogéneas con dos incógnitas,

$$\begin{vmatrix} (\eta + c_{11}) & c_{12} & 0 & c_{14} \\ 0 & \eta & 1 & 0 \\ c_{13} & c_{32} & \eta & c_{34} \\ c_{14} & c_{42} & 0 & (\eta + c_{44}) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.22a)$$

Al resolver el determinante se obtiene el polinomio característico de cuarto grado ó ecuación secular,

$$\begin{aligned} \eta^4 + \eta^3(c_{11} + c_{44}) + \eta^2(c_{11}c_{44} - c_{32} - c_{14}c_{41}) \\ + \eta(c_{34}c_{42} + c_{12}c_{13} - c_{32}c_{44} - c_{11}c_{32}) \\ + c_{11}c_{34}c_{42} + c_{12}c_{31}c_{44} + c_{14}c_{32}c_{41} \\ - c_{11}c_{32}c_{44} - c_{12}c_{34}c_{41} - c_{14}c_{31}c_{42} = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

la ecuación (2.23) se reduce a un polinomio de segundo grado en  $\eta$  cuando se tiene incidencia normal ( $S = 0$ ) según indican las constantes (2.9). Pero también se da el caso a incidencia oblicua y con  $c_{11} + c_{44} = 0$  y  $c_{34}c_{42} + c_{12}c_{31} = 0$  (es decir  $\epsilon_{13} + \epsilon_{31} = \epsilon_{12}\epsilon_{23} + \epsilon_{21}\epsilon_{32} = 0$ ). Este último caso significa que el tensor de permitividad  $\epsilon$  es diagonal, que

corresponde al caso que consideramos a continuación.

## 2.2 Generalización del tratamiento de Abelés.

El término *generalización* se aplica a que tenemos aquí la permitividad expresada como un tensor complejo, es decir, consideremos una capa isotrópica, homogénea con espesor  $d$ , cuyo tensor  $\epsilon$  se expresa en la forma<sup>†</sup>,

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

De (2.9) tenemos que para este tensor  $\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0 & c_{12} &= 0 & c_{14} &= \frac{S^2}{\epsilon} - 1 \\ c_{13} &= 0 & c_{32} &= \epsilon - S^2 & c_{34} &= 0 \\ c_{41} &= -\epsilon & c_{42} &= 0 & c_{44} &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

y la ecuación secular (2.23) toma la forma,

$$\eta^4 + \eta^2 2(S^2 - \epsilon) + (S^2 - \epsilon)^2 = 0 \quad (2.26)$$

que se transforma en una ecuación cuadrática haciendo el cambio de variable correspondiente, los 2 valores soluciones son,

$$\eta_{\mp} \equiv \pm \eta = \pm (\epsilon - S^2)^{1/2} \quad (2.27)$$

Ahora el sistema (2.22) toma la forma [tomando en cuenta los coeficientes (2.25)],

$$\begin{aligned} \pm \eta u_1 - \frac{1}{\epsilon} \eta^2 u_4 &= 0 \\ \pm \eta u_2 + u_3 &= 0 \\ \eta^2 u_2 \pm \eta u_3 &= 0 \\ -\epsilon u_1 \pm \eta u_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Este es claramente un sistema indeterminado, al menos

que  $u_4 = u_1 = 0$  o que  $u_3 = u_2 = 0$ , ya que no tenemos relación entre las cuatro ecuaciones. Si en general no se tiene esta situación tendremos que de (2.28),

$$\frac{u_4}{u_1} = \pm \frac{\varepsilon}{\eta} \quad \frac{u_3}{u_2} = \pm \eta \quad (2.29)$$

Entonces las soluciones serán ondas planas (2.21) tales que (2.29) se satisfaga,

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \exp(\mp ik_0 \eta z) & u_2 &= A_2 \exp(\mp ik_0 \eta z) \\ u_3 &= \pm A_2 \eta \exp(\mp ik_0 \eta z) & u_4 &= \pm A_1 \frac{\varepsilon}{\eta} \exp(\mp ik_0 \eta z) \end{aligned} \quad (2.30)$$

con los valores de  $\eta$  dados por (2.27).

Tomamos ahora combinaciones lineales de estas soluciones de tal forma que las condiciones de frontera (2.12) sean satisfechas. Tomemos primero dos soluciones arbitrarias linealmente independientes,

$$\begin{aligned} &[ A_1 \exp(-ik_0 \eta z), 0, 0, A_1 \frac{\varepsilon}{\eta} \exp(-ik_0 \eta z) ] \\ &[ A_1 \exp(+ik_0 \eta z), 0, 0, -A_1 \frac{\varepsilon}{\eta} \exp(+ik_0 \eta z) ] \end{aligned}$$

y las sumamos para obtener, con  $A_i = 1/2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ya que

† El tratamiento matricial de  $2 \times 2$  es válido si y sólo si los campos polarizados en S y P viajan, dentro del material, independientemente uno del otro. Para un ángulo arbitrario de incidencia esto se tendrá cuando se cumpla que,

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$$

y de aquí que los tensores de permitividad que se utilizan en el desarrollo, sean todos diagonales. Esto en la representación de los ejes principales  $P \equiv (n_1, n_2, n_3)$ . Las relaciones anteriores se cumplen siempre que una de las polarizaciones S ó P, vibre a lo largo de uno de los ejes principales del material.

los campos están normalizados,

$$u^a(z) = \left[ \cos(k_0 \eta z), 0, 0, -i \frac{\epsilon}{\eta} \operatorname{sen}(k_0 \eta z) \right] \quad (2.31a)$$

de tal forma que  $u^a(z=0) = [1, 0, 0, 0]$ , como se requiere. Este vector lineal forma la primera columna de la matriz de propagación L.

Similarmemente para los vectores faltantes (b, c y d),

$$u^b(z) = [0, \cos(k_0 \eta z), -i \eta \operatorname{sen}(k_0 \eta z), 0] \quad (2.31b)$$

$$u^c(z) = [0, \frac{-i}{\eta} \operatorname{sen}(k_0 \eta z), \cos(k_0 \eta z), 0] \quad (2.31c)$$

$$u^d(z) = [-i \frac{\eta}{\epsilon} \operatorname{sen}(k_0 \eta z), 0, 0, \cos(k_0 \eta z)] \quad (2.31d)$$

Ahora se puede construir la matriz L que propaga los campos tangenciales de la interfaz  $z = 0$  hasta la interfaz  $z = d$ , sólo que ahora tomaremos a los vectores solución en forma de vectores columna para formar a la matriz L.

Notemos que la matriz de propagación tendrá en la diagonal cosenos, mientras que en la diagonal opuesta senos y ceros en los otros elementos,

$$L(z=d) = \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & 0 & -i \frac{\eta}{\epsilon} \operatorname{sen} \delta \\ 0 & \cos \delta & \frac{i}{\eta} \operatorname{sen} \delta & 0 \\ 0 & -i \eta \operatorname{sen} \delta & \cos \delta & 0 \\ -i \frac{\epsilon}{\eta} \operatorname{sen} \delta & 0 & 0 & \cos \delta \end{bmatrix}$$

(2.32)

donde

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \eta d = k_0 \eta d$$

Para mayor claridad examinemos el caso de una capa

dieléctrica con índice de refracción  $n$ . Con  $\epsilon = n^2$  y de (2.27),

$$\eta = (n^2 - s^2)^{1/2} = n \cos\theta \quad (2.33)$$

donde se utilizó la ley de Snell y  $\theta$  es el ángulo de refracción dentro del medio. Se reordena la matriz de propagación de (2.32) y se obtiene,

$$\begin{bmatrix} u_1^d \\ u_4^d \\ u_2^d \\ u_3^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & -i \frac{\cos\theta}{n} \operatorname{sen}\delta & 0 & 0 \\ -i \frac{n}{\cos\theta} \operatorname{sen}\delta & \cos\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\delta & -i \frac{\operatorname{sen}\delta}{n \cos\theta} \\ 0 & 0 & -i n \cos\theta \operatorname{sen}\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_4^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Si se toma la convención de  $[u_1, u_2, u_3, u_4] \equiv [E_x, E_y, H_x, H_y]$  y si se separa el sistema anterior de  $4 \times 4$  en sus sistemas de  $2 \times 2$  (submatrices), tendremos una vez obtenidas las inversas de dichas submatrices,

$$\begin{bmatrix} E_x^0 \\ H_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & \frac{1}{n_p} \operatorname{sen}\delta \\ i n_p \operatorname{sen}\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^d \\ H_y^d \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\begin{bmatrix} E_y^0 \\ H_x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta & \frac{1}{n_s} \operatorname{sen}\delta \\ i n_s \operatorname{sen}\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^d \\ H_x^d \end{bmatrix}$$

donde

$$n_p = \frac{n}{\cos\theta} \quad \{\text{para polarización-P}\}$$

$$n_s = n \cos\theta \quad \{\text{para polarización-S}\}$$

$$y \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n d \cos\theta \quad (2.36)$$

Acabamos de obtener el resultado tradicional dado por Abelés en 1950. Las matrices para las polarizaciones P y S de las ecuaciones (2.35) son las matrices características.

## CAPITULO III

### PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN MATERIALES ANISOTROPICOS.

#### *Introducción.*

En 1970 Teitler y Hennis desarrollaron una técnica matricial de  $4 \times 4$  para encontrar las transmitancias y reflectancias en medios anisotrópicos estratificados o en volúmenes. Este tratamiento es más general que el tradicional de  $2 \times 2$  desarrollado por Jones y Abelés (capítulo I).

Sin embargo existe el tratamiento matricial de  $4 \times 4$  desarrollado por Berreman 1972. Este es matemáticamente equivalente a la técnica de Teitler pero con diferentes aproximaciones y conceptos. Físicamente el tratamiento de Berreman es más explícito, ya que incluye las matrices ópticas del sistema, las cuáles contienen toda la información física del material. Sin embargo es preferido el

sugerido por Teitler ya que es particularmente ventajoso en cuanto a métodos computacionales. En este caso las soluciones para los campos dentro del material se proponen en base a las expresiones fuera del material y se verifica que son soluciones del problema, facilitando así la construcción de la matriz de propagación del sistema. De cualquier forma ambas técnicas son equivalentes, llegando a los mismos resultados.

En este capítulo se desarrolla el tratamiento de Teitler (1970) para materiales con estructura columnar normal. Enseguida se trata el caso de estructura columnar oblicua del material y se obtiene su correspondiente matriz de propagación.

Se consideran materiales no magnéticos ( $\mu_{ij} = \delta_{ij}$ ) para facilitar el tratamiento. Veremos que el tensor dieléctrico  $\epsilon_{ij}$  es en general complejo. También se supone la geometría de la figura (2.1) y que la radiación electromagnética incidente es una onda plana monocromática de frecuencia  $\omega$ .

### 3.1. - Modos de Polarización Lineal.

Cuando se evapora una capa de un material dado sobre un sustrato, puede suceder que el haz molecular arribe a incidencia normal u oblicua (ángulo  $\nu$ ) con respecto al eje (z). Esto ocasiona que la película crezca con microestructura columnar, fig.(3.1).

#### 3.1.1 Estructura Columnar a incidencia normal.

Consideremos una capa homogénea, anisotrópica y de espesor  $d$  cuyos ejes principales, coinciden con los ejes coordenados  $(x,y,z)$  sobre la superficie de la capa. La correspondiente configuración de estructura columnar se muestra en la fig.3.1(a). A esta capa se le asocia un tensor de permitividad  $\epsilon$  de la forma,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} ; \quad \epsilon_{jj} = n_j^2 \quad (j = 1,2,3) \quad (3.1)$$

esto en la representación de los ejes principales (P) que coincide con los ejes cartesianos (C) (Apéndice B). De (2.9) tenemos que los coeficientes, para este caso, toman la forma,

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0 & c_{12} &= 0 & c_{14} &= \frac{S^2}{\epsilon_{33}} - 1 \\ c_{31} &= 0 & c_{32} &= \epsilon_{22} - S^2 & c_{34} &= 0 \\ c_{41} &= -\epsilon_{11} & c_{42} &= 0 & c_{44} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

con las correspondientes ecuaciones componentes (2.22),

$$\begin{aligned} \eta u_1 + c_{14} u_4 &= 0 \\ \eta u_2 + u_3 &= 0 \\ c_{32} u_2 + \eta u_3 &= 0 \\ c_{41} u_1 + \eta u_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

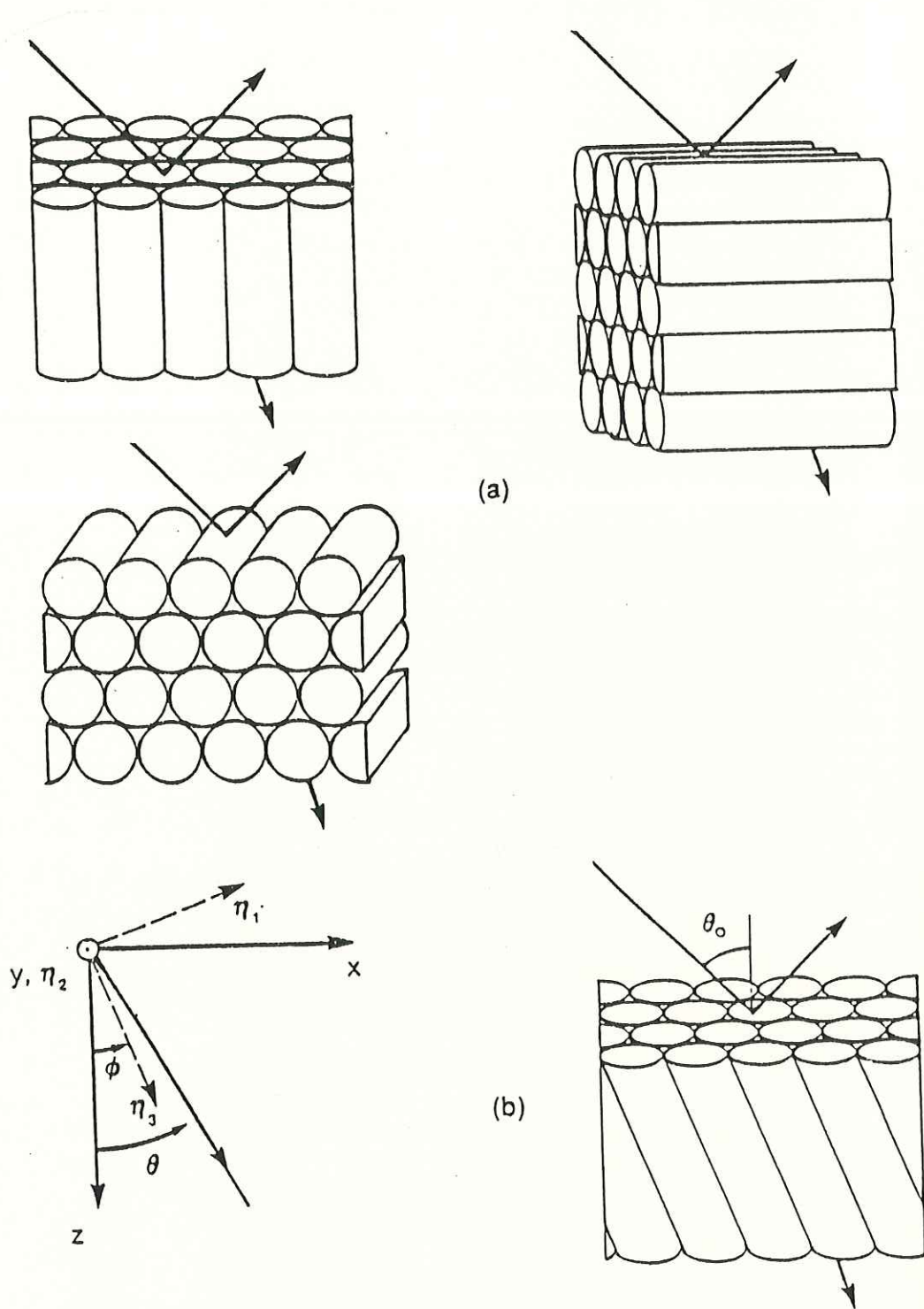


Fig.3.1.- Casos posibles de estructura columnar.

(a).- Modelo de microestructura para un material anisotrópico. (b).- Microestructura de un material anisotrópico evaporado oblicuamente respecto del haz molecular.

de donde se determinan los valores permitidos de  $\eta$  para estos casos. Es decir, de las ecuaciones para  $u_2$  y  $u_3$  determinamos las soluciones  $\eta$ . Similarmente para  $u_1$  y  $u_4$  tenemos,

$$\begin{aligned}\eta_s^\pm &\equiv \pm\eta_s = \pm(c_{32})^{1/2} \\ \eta_p^\pm &\equiv \pm\eta_p = \pm(c_{14} c_{41})^{1/2}\end{aligned}\quad (3.4)$$

hemos puesto aquí los subíndices S y P para las soluciones porque resultan independientemente de las ecuaciones para  $[u_2, u_3]$  y  $[u_1, u_4]$  en este orden. Es decir, asociamos las soluciones a las polarizaciones S y P respectivamente. Ahora, si en las soluciones anteriores para los índices de propagación, sustituimos los valores de las constantes (3.2) tenemos

$$\eta_s^2 = n_2^2 - n_0^2 \text{sen}^2 \theta_0$$

$$\text{Y} \quad \eta_p^2 = \frac{n_1^2}{n_3^2} (n_3^2 - n_0^2 \text{sen}^2 \theta_0) \quad (3.4a)$$

Estas soluciones, corresponden a los valores permitidos de los índices de propagación si se considera que los  $n_j^2 = \epsilon_{jj}$  ( $j = 1, 2, 3$ ), son los índices de refracción del material que están en las direcciones de los ejes coordenados.

Ahora, necesitamos obtener la matriz de propagación para nuestro sistema. Para esto hacemos una analogía con el caso isotrópico (capítulo II) y escribimos las soluciones tales que se satisfacen las siguientes relaciones,

$$\frac{u_3}{u_2} = \pm \eta_s \quad \text{y} \quad \frac{u_4}{u_1} = \pm \frac{\epsilon_{11}}{\eta_p} \quad (3.5)$$

obtenidas de la segunda y última ecuaciones del sistema (3.3). Utilizando estas relaciones y las soluciones de onda plana resulta que:

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \exp(\mp i k_0 \eta_p z) & u_4 &= \pm \frac{\epsilon_{11}}{\eta_p} A_1 \exp(\mp i k_0 \eta_p z) \\ u_2 &= A_2 \exp(\mp i k_0 \eta_s z) & u_3 &= \pm \eta_s A_2 \exp(\mp i k_0 \eta_s z) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para obtener la matriz de propagación del sistema, construimos vectores linealmente independientes cuyas componentes están formadas por las soluciones (3.6), similarmente al caso isotrópico. Tomando dos vectores arbitrarios independientes,

$$\left[ A_1 \exp(-i k_0 \eta_p z), 0, 0, A_1 \frac{\epsilon_{11}}{\eta_p} \exp(-i k_0 \eta_p z) \right]$$

y

$$\left[ A_1 \exp(+i k_0 \eta_p z), 0, 0, -A_1 \frac{\epsilon_{11}}{\eta_p} \exp(+i k_0 \eta_p z) \right]$$

y sumándolos ( $A_1 = 1/2$  ya que los campos están normalizados) se obtiene

$$u^a = \left[ \cos(k_0 \eta_p z), 0, 0, -i \frac{\epsilon_{11}}{\eta_p} \operatorname{sen}(k_0 \eta_p z) \right] \quad (3.7a)$$

Para  $u^b$  y, en general, para los vectores solución que forman la matriz de propagación, hacemos una analogía con las soluciones de la matriz de propagación isotrópica. Se debe de cumplir que las soluciones consideradas satisfacen las condiciones de frontera de Abelés : los campos se normalizan

en la interfaz  $z = 0$  para obtener los campos en  $z > 0$ ,

$$\left[ 0, A_2 \exp(-ik_0 \eta_s z), A_2 \eta_s \exp(-ik_0 \eta_s z), 0 \right]$$

$$\text{y } \left[ 0, A_2 \exp(+ik_0 \eta_s z), -A_2 \eta_s \exp(+ik_0 \eta_s z), 0 \right]$$

que al sumarlas ( $A_2 = 1/2$ ) tenemos,

$$u^b = \left[ 0, \cos(k_0 \eta_s z), -i \eta_s \text{sen}(k_0 \eta_s z), 0 \right] \quad (3.7b)$$

Para obtener  $u^c$  tomamos la relación inversa de (3.5), es decir,  $u_2/u_3 = \pm 1/\eta_s$ ; y se proponen soluciones de la forma,

$$\left[ 0, \frac{A_2}{\eta_s} \exp(-ik_0 \eta_s z), A_2 \exp(-ik_0 \eta_s z), 0 \right]$$

$$\text{y } \left[ 0, -\frac{A_2}{\eta_s} \exp(+ik_0 \eta_s z), A_2 \exp(+ik_0 \eta_s z), 0 \right]$$

sumándolas se obtiene

$$u^c = \left[ 0, -\frac{i}{\eta_s} \text{sen}(k_0 \eta_s z), \cos(k_0 \eta_s z), 0 \right] \quad (3.7c)$$

Por último para  $u^d$  tomamos la relación inversa de (3.5),  $u_1/u_4 = \pm \eta_p/\epsilon_{11}$  para formar dos soluciones arbitrarias,

$$\left[ i \frac{\eta_p}{\epsilon_{11}} A_1 \exp(-ik_0 \eta_p z), 0, 0, A_1 \exp(-ik_0 \eta_p z) \right]$$

$$\text{y } \left[ -\frac{\eta_p}{\epsilon_{11}} A_1 \exp(+ik_0 \eta_p z), 0, 0, A_1 \exp(+ik_0 \eta_p z) \right]$$

para obtener, con  $A_1 = 1/2$  como antes,

$$u^d = \left[ -i \frac{\eta_p}{\epsilon_{11}} \text{sen}(k_0 \eta_p z), 0, 0, \cos(k_0 \eta_p z) \right] \quad (3.7d)$$

Notemos que estas ecuaciones (3.7) cumplen con las condiciones a la frontera establecidas ( $u_\beta^\alpha(0) = \delta_\beta^\alpha$ ).

Con estas ecuaciones (3.7) formamos ahora la matriz de

propagación L(en  $z = d$ ) como vectores columnas,

$$L(z=d) = \begin{bmatrix} \cos\delta_p & 0 & 0 & -i \frac{\eta_p}{n_1^2} \operatorname{sen}\delta_p \\ 0 & \cos\delta_s & -\frac{i}{\eta_s} \operatorname{sen}\delta_s & 0 \\ 0 & -i \eta_s \operatorname{sen}\delta_s & \cos\delta_s & 0 \\ -i \frac{n_1^2}{\eta_p} \operatorname{sen}\delta_p & 0 & 0 & \cos\delta_p \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde

$$\delta_s = \frac{2\pi}{\lambda_0} \eta_s d$$

$$\delta_p = \frac{2\pi}{\lambda_0} \eta_p d$$

$$\eta_s^2 = n_2^2 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0$$

$$\eta_p^2 = \frac{n_1^2}{n_3^2} (n_3^2 - n_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0)$$

$$n_j^2 \equiv \epsilon_{jj} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

Notemos que, a incidencia normal, los índices de propagación toman los valores de los índices del material  $n_2$  para la polarización S y  $n_1$  para la polarización P. Las variables  $\delta_{s,p}$  son los espesores ópticos para las polarizaciones S y P respectivamente a incidencia oblicua (Born y Wolf 1963).

La matriz anterior (3.8) obtenida se puede descomponer adecuadamente en dos submatrices de  $2 \times 2$  y tomando las inversas de dichas submatrices se puede escribir,

$$\begin{bmatrix} E_y^o \\ H_x^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta_s & \frac{1}{\eta_s} \sin\delta_s \\ i\eta_s \sin\delta_s & \cos\delta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^d \\ H_x^d \end{bmatrix} \quad \text{pol-S} \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} E_x^o \\ H_y^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta_p & i\frac{\eta_p}{n_1^2} \sin\delta_p \\ i\frac{1}{\eta_p} \sin\delta_p & \cos\delta_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^d \\ H_y^d \end{bmatrix} \quad \text{pol-P}$$

Comparando estas ecuaciones y las obtenidas para el caso isotrópico, se observa que son iguales cuando  $n_1 = n_2 = n_3$ , como es de esperarse. Notemos que para la polarización-S la forma de la ecuación correspondiente se transforma igual que para el caso isotrópico, aunque los valores de  $\eta_s$  y  $\delta_s$  cambian. Para incidencia normal se tiene que  $\eta_s = n_2$  y  $\eta_p = n_1$ , y las matrices anteriores también son equivalentes al caso isotrópico (2.35). Entonces, para incidencia normal, el material anisotrópico se comporta como si fuera isotrópico para cada estado de polarización por separado. Entonces, podemos definir el concepto de admitancia isotrópica equivalente ( $n_{eq}$ ) si pensamos que tenemos dos capas isotrópicas equivalentes, una para cada estado de polarización. Este concepto nos permitirá escribir la ley de Snell para un medio anisotrópico, como veremos más adelante.

### 3.1.2 Estructura Columnar a Incidencia Oblicua.

El modelo que utilizaremos para una estructura columnar cuyos ejes principales  $(n_1, n_3)$  forman un cierto ángulo

arbitrario  $\phi$  con el eje (z), se muestra en la fig. 3.1(b). Este sistema o plano de admitancias (o ejes principales)  $n_1$  y  $n_3$  está en el plano de incidencia. Notemos que esta situación implica que las polarizaciones S y P se propagan independientemente una de la otra dentro del material, debido a que la admitancia  $n_2$  es perpendicular al plano de incidencia y ésta es la dirección en que vibra el campo eléctrico polarizado en S.

Entonces, para tal modelo, se sigue asociando al sistema una matriz de permitividad  $\epsilon$  diagonal en la representación de los ejes principales con valores distintos entre sí.

Ya que estos ejes se obtienen de los ejes coordenados  $C \equiv (x, y, z)$  a través de una rotación, en el sentido de las manecillas del reloj, bajo un cierto ángulo arbitrario  $\phi$  alrededor del eje-y, es decir,  $C = RP$  para la transformación directa y tenemos que en la representación-C (apéndice B),

$$\epsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \cos^2 \phi + \epsilon_{33} \sin^2 \phi & 0 & (\epsilon_{11} - \epsilon_{33}) \sin \phi \cos \phi \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ (\epsilon_{11} - \epsilon_{33}) \sin \phi \cos \phi & 0 & \epsilon_{11} \sin^2 \phi + \epsilon_{33} \cos^2 \phi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Los coeficientes (2.9), para nuestro sistema de columnas oblicuas, son ahora de la forma,

$$\begin{aligned}
c_{11} &= S \frac{\varepsilon'_{31}}{\varepsilon'_{33}} & c_{12} &= 0 & c_{14} &= \frac{S^2}{\varepsilon'_{33}} \\
c_{31} &= 0 & c_{32} &= \varepsilon'_{22} - S^2 & c_{34} &= 0 \\
c_{41} &= \frac{\varepsilon'_{13} \varepsilon'_{31}}{\varepsilon'_{33}} - \varepsilon'_{11} & c_{42} &= 0 & c_{44} &= S \frac{\varepsilon'_{13}}{\varepsilon'_{33}}
\end{aligned}
\tag{3.12}$$

donde los elementos  $\varepsilon'_{ij}$  ( $i, j=1,2,3$ ) son ahora elementos de la matriz (3.11).

De las ecuaciones para las soluciones de ondas planas para los campos,

$$\begin{aligned}
(\eta + c_{11}) u_1 + c_{12} u_2 + c_{14} u_4 &= 0 \\
\eta u_2 + u_3 &= 0 \\
c_{13} u_1 + c_{32} u_2 + \eta u_3 + c_{34} u_4 &= 0 \\
c_{41} u_1 + c_{42} u_2 + (\eta + c_{44}) u_4 &= 0
\end{aligned}
\tag{2.22}$$

tomamos las dos ecuaciones correspondientes a la polarización-S, (que incluyen los campos  $u_2$  y  $u_3$ ) y utilizando las relaciones (3.12) toman la forma,

$$\eta u_2 + u_3 = 0$$

$$(\varepsilon_{22} - S^2) u_2 + \eta u_3 = 0 \tag{3.13}$$

Si resolvemos ahora para  $\eta$  ( $\equiv \eta_s$ ) y con  $\varepsilon_{22} = n_2^2$ , tenemos,

$$\eta_s^2 = n_2^2 - S^2 ; \quad S = n_0 \sin \theta_0 \tag{3.14}$$

Este resultado es el mismo para el caso de estructura columnar normal y para el caso isotrópico, cuando los índices son iguales.

Haciendo un desarrollo similar para la polarización-P, las ecuaciones resultantes del sistema (2.22) para esta

polarización (campos  $u_1$  y  $u_4$ ) son,

$$\begin{aligned} (\eta + c_{11})u_1 + c_{14}u_4 &= 0 \\ c_{41}u_1 + (\eta + c_{44})u_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

La ecuación secular para este sistema se encuentra igualando el determinante a cero y resolviendo para el índice de propagación  $\eta$ ,

$$\eta^2 + \eta(c_{11} + c_{44}) + (c_{11}c_{44} - c_{41}c_{14}) = 0 \quad (3.16)$$

notando que  $c_{11} = c_{44}$  (ya que podemos ver del tensor  $\varepsilon$  que las componentes  $\varepsilon_{13}$  y  $\varepsilon_{31}$  son iguales) y resolviendo la ecuación secular de segundo grado resultante

$$\eta_p^\pm = - \left( \frac{c_{11} + c_{44}}{2} \right) \pm g \Rightarrow \eta_p^\pm = -c_{11} \pm g \quad (3.17)$$

Resulta conveniente definir, en la solución (3.17), las cantidades  $g$  y  $\eta_{po}$ :

$$g^2 \equiv c_{14}c_{41} = \left( 1 - \frac{S^2}{\varepsilon'_{33}} \right) \eta_{po}^2 \quad (3.18)$$

y ( $\eta_{po}$ ) como,

$$\frac{1}{\eta_{po}^2} \equiv \frac{1}{c_{41}} = \frac{\cos^2 \phi}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{n_2^2} \quad (3.19)$$

ahora notemos que a incidencia normal  $S = 0$ , y tenemos de (3.18)  $g = \eta_{po}$ . También notemos que si  $S = 0$  entonces  $c_{11} = 0$  y por tanto (de 3.17),

$$\eta_p^\pm (\theta_0=0) = \pm \eta_{po} \quad (3.20)$$

A continuación proponemos soluciones componentes, en base a los parámetros de propagación y a las soluciones de ondas planas, con las siguientes formas:

$$u_2 = A_2 \exp(\mp i k_0 \eta_s z) \quad \text{y} \quad u_3 = \pm \eta_s A_2 \exp(\mp i k_0 \eta_s z)$$

y

$$\begin{aligned}
 u_1 &= A_1 \exp(ik_0 c_{11} z) \exp(\mp ik_0 g z) \\
 u_4 &= \pm \gamma A_1 \exp(ik_0 c_{11} z) \exp(\mp ik_0 g z) ; \quad \gamma = -\frac{c_{41}}{g} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado la ecuación (3.17). Siguiendo los mismos razonamientos de la sección anterior donde se forman los vectores solución, podemos obtener la matriz de propagación como,

$$\begin{bmatrix}
 \Phi \cos \delta'_p & 0 & 0 & -\frac{i\Phi}{\gamma} \text{sen} \delta'_p \\
 0 & \cos \delta_s & -\frac{i}{\eta_s} \text{sen} \delta_s & 0 \\
 0 & -i\eta_s \text{sen} \delta_s & \cos \delta_s & 0 \\
 -i\gamma\Phi \text{sen} \delta'_p & 0 & 0 & \Phi \cos \delta'_p
 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

evaluada en  $z=d$ , donde los parámetros son tales que,

$$\begin{aligned}
 \delta_s &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \eta_s d & \delta'_p &= \frac{2\pi}{\lambda_0} g d \\
 \eta_s^2 &= n_2^2 - S^2 & g^2 &= \left(1 - \frac{S^2}{\epsilon'_{33}}\right) \eta_{p0}^2 \\
 \Phi &= \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda_0} d S \frac{\epsilon'_{31}}{\epsilon'_{33}}\right) & \gamma &= \frac{\eta_{p0}^2}{g} \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Ahora, nos interesa obtener un sistema de ecuaciones similar al sistema (3.10), que es el caso de columnas crecidas en las direcciones de los ejes cartesianos, pero para el caso de columnas crecidas a un cierto ángulo  $\phi$  con respecto al eje ( $z$ ) que se trata aquí, fig.3.1(b).

EL sistema similar al (3.10) se obtiene de la matriz (3.23) y de la ecuación (2.11) cuando ponemos los campos en

la interfaz  $z=0$  en función de los campos para la interfaz  $z=d$ ,

$$\begin{bmatrix} E_y^o \\ H_x^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\delta_s & \frac{1}{\eta_s} \text{sen}\delta_s \\ i\eta_s \text{sen}\delta_s & \cos\delta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_y^d \\ H_x^d \end{bmatrix} \quad \{\text{pol-S}\}$$

$$\begin{bmatrix} E_x^o \\ H_y^o \end{bmatrix} = \Phi^* \begin{bmatrix} \cos\delta_p' & \frac{1}{\gamma} \text{sen}\delta_p' \\ i\gamma \text{sen}\delta_p' & \cos\delta_p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^d \\ H_y^d \end{bmatrix} \quad \{\text{pol-P}\}$$

(3.24)

Para la polarización-S tenemos que el sistema es el mismo que el representado por (3.10), es decir, esta polarización se propaga de manera semejante dentro del medio, para cualquier configuración de estructura columnar. El símbolo \* significa el conjugado. Si se examina con cuidado este resultado y se compara con el sistema (3.10) para la polarización-P, vemos que son el mismo en el límite de  $\phi = 0$ . Esto es de esperarse, ya que en el límite,  $\text{sen}\phi = 0$  y  $\text{cos}\phi = 1$ , con lo que el tensor (3.11) se vuelve diagonal e igual a (3.1).

Si  $n_{eq}$  es el índice de refracción equivalente isotrópico definido después de (3.10), podemos escribir la ley de Snell como,

$$S \equiv n_o \text{sen}\theta_o = n_{eq} \text{sen}\theta_e \quad (3.25)$$

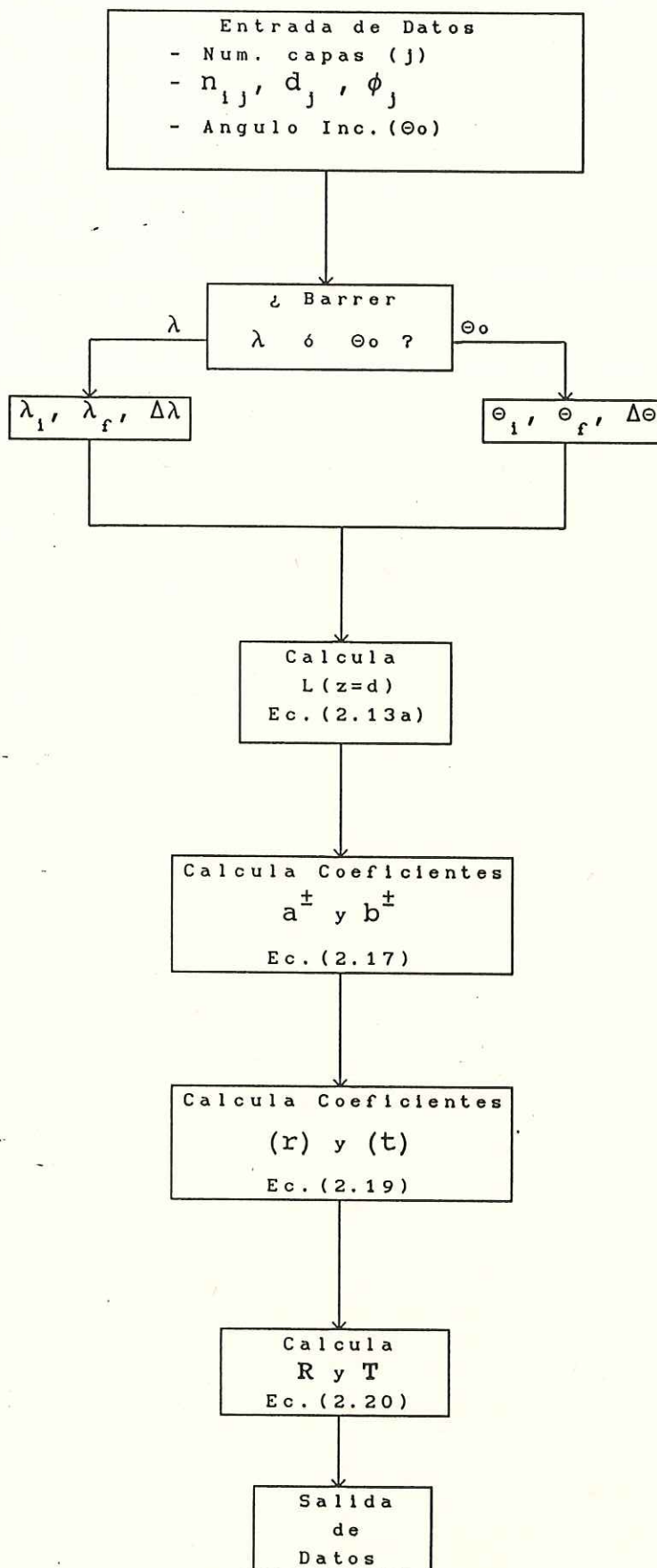
Para la polarización S se tiene que  $n_{eq} = n_2$  para cualquier ángulo de incidencia, ya que la dirección de vibración asociada a esta polarización es la dirección del eje-y que

es la de  $n_2$ . Notemos ahora que a incidencia normal  $n_s = n_2$ , por la ecuación correspondiente de (3.24). Estos resultados facilitarán la caracterización óptica de dieléctricos en el capítulo IV.

### 3.2.- Programa Computacional Utilizado.

El programa que se estructuró, está escrito en un lenguaje de alto nivel, el Pascal de Borland versión (5.1). Se usó una microcomputadora personal IBM-AT de 1512 Kb. con coprocesador 8027. EL programa calcula las matrices R y T dadas las constantes ópticas del material para sistemas anisotrópicos de multicapas. El tiempo que tarda en ejecutar un cálculo para un sistema dado depende del iterado de valores iniciales, finales e incrementos de los ángulos o la longitud de onda. Para los filtros que se presentan en el capítulo V los tiempos de ejecución fueron de 15 segundos aproximadamente. La explicación del programa está dada por el siguiente diagrama de flujo,

## DIAGRAMA DE FLUJO SIMPLIFICADO DEL PROGRAMA CASOPHI.PAS



## CAPITULO IV

### USO DEL ELIPSOMETRO PARA CARACTERIZACION DE MATERIALES

#### *Introducción.*

Como se puede observar en el apéndice A, la luz que incide sobre una superficie, puede representarse como la suma de dos ondas planas: una oscilando sobre el plano de incidencia (P), y otra perpendicular al mismo plano (S). En general, para la luz reflejada de una superficie se tendrán cambios diferentes en las fases de las componentes S y P y en la relación de sus amplitudes. Denotemos el cambio en la diferencia entre las fases de las componentes P ( $\delta_p$ ) y S ( $\delta_s$ ) de la luz reflejada con  $\Delta = \delta_p - \delta_s$ , y a la razón de las amplitudes reflejadas, con respecto a las incidentes, de las componentes P y S con  $\tan \psi = |r_p|/|r_s|$ . También se tiene el equivalente a las mismas cantidades para el haz transmitido, es decir, las cantidades anteriores son válidas para reflexión y transmisión (Saxena A. 1965).

En este capítulo se obtienen expresiones que permiten

caracterizar un cristal dieléctrico dadas las constantes elipsométricas y ciertas variables experimentales. Se usará la aproximación de primer orden para un material dieléctrico.

Una capa biaxial dieléctrica se caracteriza por su espesor físico  $d$  y un conjunto de tres índices de refracción  $(n_1, n_2, n_3)$  característicos de los cristales biaxiales, cada uno orientado a lo largo de los ejes principales del material. Para materiales con estructura columnar a incidencia normal al menos estas cuatro cantidades son necesarias para definir ópticamente al material. Cuando se tiene el caso de columnas inclinadas es necesario saber el ángulo  $\nu$  de evaporación. Conociéndolo se puede determinar empíricamente la orientación real ( $\phi$ ) de las columnas, con respecto a la normal, por medio de la relación  $\tan(\phi) = \frac{1}{2} \tan(\nu)$  que se conoce como regla de la tangente, ver fig.3.1(b).

Un material evaporado a un cierto ángulo  $\nu$  con respecto al haz molecular, fig.(4.1), presenta una condensación columnar del material evaporado, respecto a la normal del sustrato (Moyle J. 1987). Uno de los ejes principales es perpendicular a dicho plano y los campos S y P viajan independientemente dentro del material (capítulo III).

#### 4.1.- Parámetros Elipsométricos.

La elipsometría es la técnica que permite caracterizar

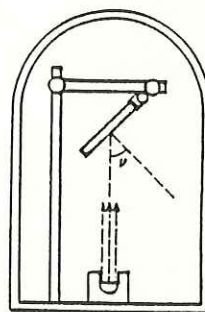


Fig.4.1.- Evaporación Oblicua de un material.  
El material se evapora en la campana de vacío incidiendo bajo un ángulo  $V$  con respecto a la normal del sustrato.

las propiedades ópticas de una superficie o una película delgada por medio de mediciones en los cambios de polarización y ángulos de extinción de un haz reflejado o transmitido. Las ventajas principales de ésta técnica no destructiva son: alta precisión en las mediciones y obtención del índice complejo de refracción  $(n, k)$ . La reflexión elipsométrica se basa en mediciones del estado de polarización de las ondas incidente y reflejada. A partir de ellas se determina la razón  $\rho$  entre los coeficientes complejos de Fresnel. Los coeficientes de Fresnel para reflexión, asociados a las polarizaciones P y S, están asociados a la razón  $\rho$  por:

$$\rho = \frac{r_p}{r_s} \quad (4.1)$$

Sin embargo, ya que los coeficientes de Fresnel pueden expresarse como:  $r_p = |r_p| \exp(i\delta_p)$  y  $r_s = |r_s| \exp(i\delta_s)$ , se tiene que:

$$\rho = \left( \frac{|r_p|}{|r_s|} \right) \exp\{i(\delta_p - \delta_s)\} \quad (4.1.a)$$

En estas ecuaciones,  $|r_p|$  y  $|r_s|$  son las razones de las

amplitudes del campo eléctrico reflejado, al campo eléctrico incidente, para cada estado de polarización;  $\delta_p$  y  $\delta_s$  son los cambios de fase para las ondas reflejadas en las polarizaciones P y S.

Resulta conveniente escribir  $\rho$  en la forma:

$$\rho = \tan \psi \exp(i\Delta); \quad (4.1.b)$$

usando (4.1.a) y (4.1.b) tenemos,

$$\tan \psi = |r_p|/|r_s| \quad \text{y} \quad \Delta = \delta_p - \delta_s, \quad (4.2)$$

entonces  $\psi$  y  $\Delta$  son los cambios en amplitud y fase para reflexión, de las polarizaciones P y S (Azzam 1979).

Si incide luz linealmente polarizada a  $45^\circ$  con respecto al plano de incidencia de la primera interfaz de una capa, entonces  $|r_p|$  y  $|r_s|$  no estarán en fase, y la luz reflejada estará elípticamente polarizada, fig.(4.2). La orientación de la elipse en el plano PS depende del ángulo de incidencia. Recíprocamente; si incide luz elípticamente polarizada, con parámetros  $\psi$  y  $\Delta$  adecuados a la interfaz, la luz reflejada es linealmente polarizada, (Hass G. 1967).

#### 4.2.- Principio de Funcionamiento.

El sistema experimental del elipsómetro se muestra en la Fig.(4.3). Esta es tan sólo una de las muchas posibles combinaciones de los elementos que lo componen. Otra sería el conmutar la posición de detector y fuente. En total hay 16 combinaciones posibles (Hass G., 1967). Una fuente de luz plana ( $\lambda_0$ ) y monocromática, dada por un laser o una lámpara

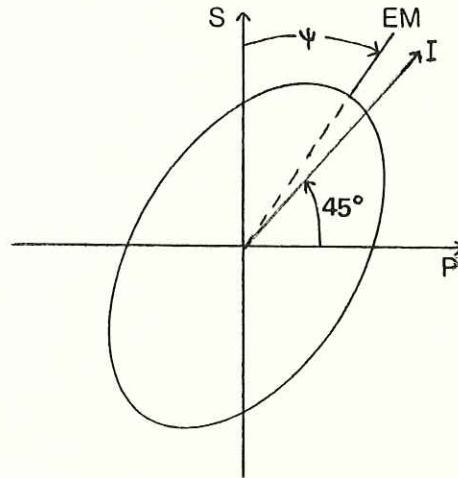


Fig.(4.2).- Luz elíptica reflejada de una superficie.

Luz reflejada para un ángulo de incidencia mayor que el ángulo principal. La luz incidente está a 45 grados respecto del plano de incidencia. La cantidad  $\psi$  es el ángulo del eje mayor de la elipse a la dirección S, y  $\Delta$  es la diferencia de fase entre las polarizaciones S y P.

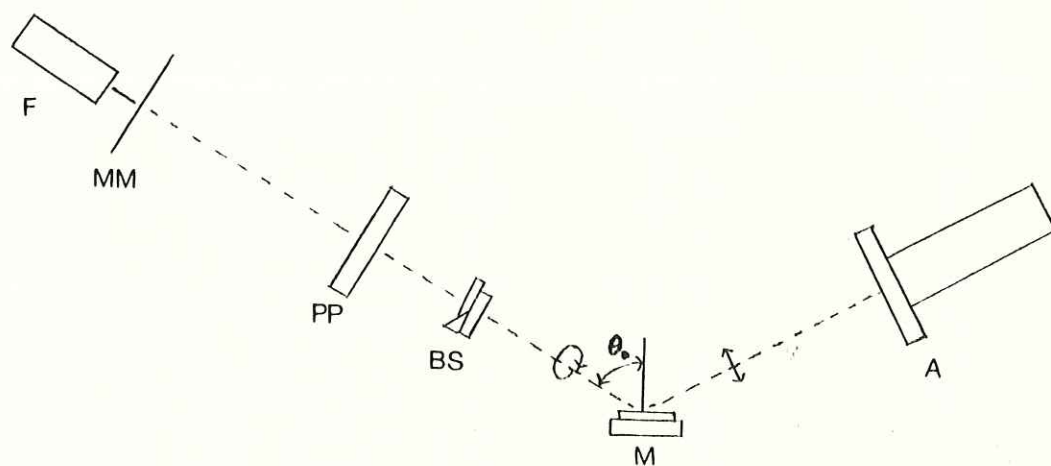


Fig. (4.3).- Partes de un Elipsómetro. Incide luz elípticamente polarizada a la muestra y se refleja luz linealmente polarizada.

(F) Es la fuente, (MM) el modulador, (PP) Polarizador, (BS) Compensador, (M) Muestra, (A) Analizador con detector y  $\theta_0$  es el ángulo de incidencia.

de mercurio (cuasimonocromática) , ilumina al sistema. Se cuenta con un modulador mecánico que divide el haz en pulsos de luz cuya frecuencia mecánica es la del modulador y que está sincronizado con el analizador. Los pulsos luminosos inciden en el polarizador, que produce luz polarizada linealmente. Enseguida se tiene un compensador de Babinet-Soleil, a  $45^\circ$  respecto del plano de incidencia, que imprime una diferencia de fase entre las polarizaciones P y S, de  $\pi/2$  radianes, esto es, un retardo de  $(\lambda_0/4)$ , para una  $(\lambda_0)$  en particular; entonces, la luz que sale del compensador está polarizada en general en forma elíptica. De acuerdo a lo anterior, incide luz elípticamente polarizada sobre la muestra y se refleja luz linealmente polarizada. Esta luz linealmente polarizada es la que incide sobre el analizador sincronizado que determina los valores experimentales de las reflectancias y transmitancias, para los ángulos de "extinción". Los ángulos del analizador y polarizador son variables tales que se produce extinción. Esto es una descripción general del elipsómetro utilizado, donde se tiene que  $\psi$  y  $\Delta$  se determinan a partir de los valores experimentales de R y T para cualquier ángulo de incidencia.

Para medir los parámetros  $\Delta$  y  $\psi$  se ajusta el eje rápido del compensador a  $45^\circ$  respecto al plano de incidencia. Enseguida se rotan los ejes de transmisión del polarizador y analizador hasta producir extinción del haz luminoso. Las

mediciones de  $\psi$  y  $\Delta$  se pueden hacer a cualquier ángulo de incidencia; sin embargo, se recomiendan valores cercanos al ángulo principal (donde  $\Delta=\pi/2$  para sólidos absorbentes), ya que proporcionan una gran sensibilidad.

Si designamos por  $(p)$  al ángulo de extinción que forman el eje rápido del polarizador y el plano de incidencia, por  $(a_p)$  al ángulo formado por el eje rápido del analizador, entonces los parámetros  $\Delta$  y  $\psi$  se obtienen a través de:

$$\Delta = \frac{1}{2}\pi + 2p \quad ; \quad \psi = a_p \quad (4.3)$$

esto es válido para un compensador muy preciso de un cuarto de longitud de onda ( $\lambda_0/4$ ). Para las relaciones (4.3) existen cuatro tipos de zonas de medición y se recomienda medir en las cuatro, promediando el valor obtenido en cada una (McCrakin F. 1963).

Los arreglos ópticos equivalentes también pueden usarse para determinar los parámetros  $\psi$  y  $\Delta$  (Hass G. 1967). Estas relaciones son válidas para capas isotrópicas y anisotrópicas donde los términos cruzados de R y T son cero.

Nos hemos limitado a esbozar los detalles técnicos y experimentales de las mediciones; sin embargo, en la práctica dichas mediciones son más complicadas ya que se deben hacer iteraciones para los ángulos de extinción.

#### 4.3.- Método para Caracterización de Dieléctricos.

Como ya se mencionó, se tiene una capa dieléctrica que fué crecida bajo incidencia oblicua del material en el sustrato a un ángulo conocido  $\nu$ . El método de evaluación

consiste en determinar  $\{n_1, n_2, n_3, d\}$  a partir de las cantidades observables  $\{\Lambda_s, \Lambda, \psi_t, \theta_B\}$ . Estas observables son el espesor óptico para la polarización S ( $\Lambda_s$ ), la variable  $\Lambda$  es el desfaseamiento ó retardo entre las polarizaciones S y P. Este es producido por el compensador.  $\psi$  es el parámetro elipsométrico que relaciona los coeficientes de amplitud  $r_p$  y  $r_s$ .  $\theta_B$  es el ángulo de Brewster. Estas observables se aplican únicamente al caso de capas no absorbentes:

#### 4.3.1.- Espesor Optico ( $\Lambda_s$ ).

La primer medición del espesor óptico nos sirve para encontrar el espesor físico de la muestra. Otras alternativas son los métodos interferométricos o mecánicos, como se mencionó en la introducción.

A incidencia normal se tiene que el espesor óptico  $\Lambda_s$ , para la polarización-S, viene dado por:

$$\Lambda_s \equiv n_s d = \left( \frac{\lambda_0}{4} \text{ ó } \frac{\lambda_0}{2} \right) + m \frac{\lambda_0}{2} \quad (4.4)$$

correspondiendo a un mínimo ó un máximo en la transmitancia respectivamente. Como ya se mencionó, una forma de determinar  $m$  es por el monitoreo de la capa al evaporarla.

En las evaporaciones no se tiene una película con espesor físico uniforme sino una cuña truncada, debido a la geometría en el sistema de depósito. Una manera de aproximar ( $m$ ) es muestrear la capa con el haz incidente y contar el número de franjas de interferencia, desde el vértice, que se observan en una cuña completa donde el espesor varía de cero hasta la región de interés. Generalmente se limita el

crecimiento de la película a espesores ópticos de  $(\lambda_0/4)$  o  $(\lambda_0/2)$  donde el número  $(m)$  es cero; los espesores de  $(\lambda_0/4)$  son los más utilizados.

Para materiales isotrópicos y dieléctricos, de diferentes índices de refracción, los máximos y mínimos (según sea el índice de la capa respecto al del soporte o sustrato) en las reflectancias ó transmitancias siguen un comportamiento periódico, como se muestra en la fig.(4.4), cuando se grafican contra el espesor óptico. Se calcula que, a incidencia normal, si se cuenta con una interfaz entre aire y vidrio la reflectancia tiene un valor de 4%. A ciertos espesores ópticos  $(nd=m\lambda/2)$  la reflectancia es independiente del índice del dieléctrico.

#### 4.3.2.- Diferencia Relativa de Camino Óptico (DRCO).

Un compensador es un dispositivo óptico que imprime una diferencia de fase relativa  $(\Delta\varphi = k_0\Lambda)$  entre las polarizaciones S y P de la luz incidente a él; la diferencia relativa de camino óptico está dada por,

$$\Lambda \equiv \xi d = (n_{p_0} - n_s) d \quad (4.5)$$

esto para incidencia normal de la luz sobre el compensador. El estado de polarización de la luz emergente depende de las amplitudes de las componentes S y P del campo incidente y de la fase relativa dada por el compensador  $(\Delta\varphi)$ .

Una manera sencilla de analizar la luz transmitida es la siguiente: empleando incidencia normal, para eliminar el parámetro del ángulo de incidencia, y los índices efectivos.

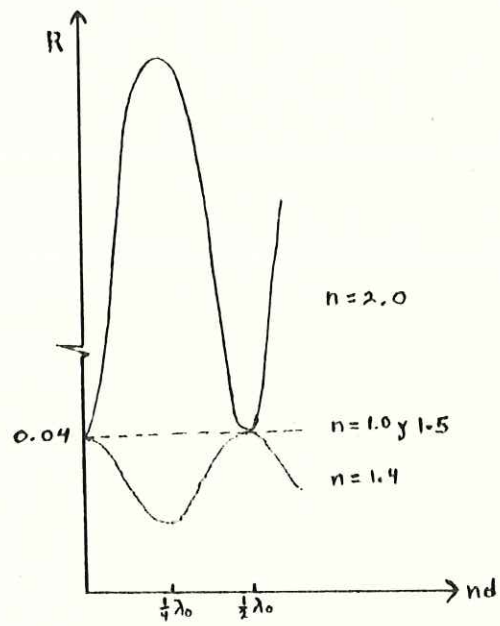


Fig. (4.4).- Curva de reflectancia contra espesor óptico de una capa dieléctrica con diferentes índices, para incidencia normal. Aquí ( $n$ ) es el índice de refracción del dieléctrico.

Se fija también el eje rápido del compensador a  $45^\circ$ .

Girando el analizador y polarizador se localiza las posiciones en las cuáles la intensidad en la transmisión sea mínima. De ellas se infiere los parámetros  $(\Delta, \psi)$ . Con esto se introduce un defase por el polarizador/compensador, que es igual y opuesto al defase que la película imprime a la luz, fig.(4.5), resultando luz linealmente polarizada después de la muestra.

#### 4.3.3.- Razón de Amplitud ( $\psi_t$ ).

Si representamos a  $\psi_t$  como la razón de las amplitudes de transmisión tenemos que la siguiente relación se cumple,

$$\tan\psi_t = \left| \frac{t_{pp}}{t_{ss}} \right| \approx \frac{n_{po}}{n_s} \left( \frac{n_s^2 + n_g^2}{n_{po}^2 + n_g^2} \right) \quad (4.6)$$

En la siguiente sección obtendremos ésta última relación de la teoría desarrollada en el capítulo III. Para reflexión es difícil determinar  $\psi_r$  experimentalmente a incidencia normal.

Señalemos que para los puntos anteriores del método, es necesario hacer las mediciones a incidencia normal, pero también son necesarias algunas mediciones a incidencia oblicua. Las mediciones necesarias son para los ángulos de Brewster y de capas ausentes iluminando al sistema con luz en el estado de polarización P.

#### 4.3.4.- Angulo de Brewster ( $\theta_B$ ).

Las mediciones del ángulo de Brewster  $\theta_B$  dan como resultado estimaciones en los índices de la película, considerada como no absorbente. Cuando incide luz con polarización P sobre la interfaz de dos medios transparentes

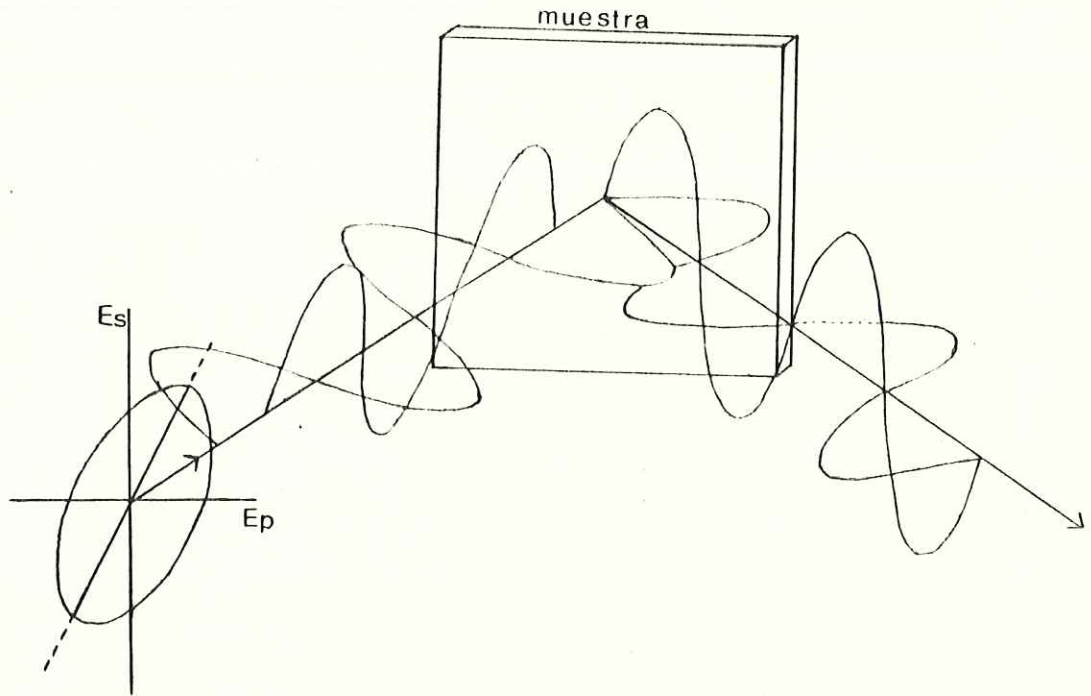


Fig.(4.5).- Defase imprimido por una muestra.

La luz elíptica que incide sobre la capa llega del compensador tal que la capa imprime un defase opuesto - al del compensador para reflejar - luz linealmente polarizada.

la onda reflejada desaparece completamente, para el ángulo de Brewster. Para un medio isotrópico y homogéneo se sabe que,

$$\tan \theta_B = n_1/n_o \quad (4.7)$$

determina el ángulo de Brewster. Aquí  $n_o$  es el índice del medio ambiente y  $n_1$  el índice del material. Para un material anisotrópico y homogéneo la relación del ángulo de Brewster se vuelve más compleja y toma la forma (Hörowitz F. 1983),

$$\tan \theta_B = \frac{n_o^{-2} - n_{po}^{-2}}{n_{po}^{-2} - n_o^{-2} (n_1 n_3)^{-2}} \quad (4.8)$$

donde  $n_1$  y  $n_3$  son los índices en las direcciones x, z respectivamente;  $n_{po}$  es la cantidad definida anteriormente, que para incidencia normal de evaporación resulta ser el índice para la dirección (x) ( $\equiv n_1$ ). Para el caso isotrópico la ecuación anterior se reduce a (4.7).

#### 4.3.5. - Capas Ausentes ( $\theta_{aus}$ ).

La última medición que se hace ocurre a incidencia oblicua para un ángulo tal que se tiene condición de "ausencia" de capas. Cuando esto ocurre tenemos que se cumple la siguiente relación,

$$\left[ 1 - \left( \frac{n_{po}}{n_1 n_3} \right)^2 \sin^2 \theta_{aus} \right] n_{po} d = m' \frac{\lambda_o}{2}, \quad (4.9)$$

la cual es válido para capas "ausentes". Aquí  $\theta_{aus}$  significa el ángulo tal que la reflectancia en P es igual a la del sustrato.

De las ecuaciones (4.4), (4.5), (4.6), (4.8), (4.9), y de

datos experimentales, podemos calcular el espesor físico de la capa y los tres índices de refracción de la película anisotrópica. Esto se hace simplemente manipulando las ecuaciones para ponerlas en función de las cantidades observables definidas anteriormente,

$$d = \Lambda_s / n_s$$

$$n_s = n_{po} / \sigma \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{\Lambda}{\Lambda_s} + 1$$

$$\text{para cuarto de longitud de onda : } n_{po} \approx \left( \frac{\sigma^2 - \sigma \tan \psi_t}{\sigma \tan \psi_t - 1} n_g \right)^{1/2}$$

$$\text{ángulo de Brewster : } (n_1 n_3) = \bar{n}_{po}^2 \operatorname{csc}^2 \theta_B - \operatorname{ctg}^2 \theta_B$$

$$\text{ángulo de ausencia : } (n_1 n_3) = \frac{1 - (g/n_{po})^2}{n_{po}^2 \operatorname{sen}^2 \theta_{aus}} ; \quad g = \frac{m' \lambda_0}{2d}$$

$$\text{ángulo de evaporación : } \tan \phi = \frac{1}{2} \tan \nu \quad (4.10)$$

De estas relaciones se obtienen los índices y el espesor por medio del concepto de índice isotrópico equivalente  $n_{eq}$  definido en el capítulo III. Es decir se tiene que  $n_s = n_2$  para incidencia normal. Esta es la razón por la cuál las tres primeras mediciones de las ecuaciones (4.9) se toman a incidencia normal. Luego, las tres primeras mediciones arrojan el espesor, el índice en la dirección-y ( $n_2$ ) y el índice para la polarización-P a incidencia normal. De las otras dos observables se obtienen los índices  $n_1$  y  $n_3$ .

#### 4.4.- Teoría de la Aproximación de Primer Orden Utilizada.

En esta sección obtendremos la aproximación para cuarto de longitud de onda de espesor óptico dado por las

ecuaciones (4.9). Para obtener este resultado se aproxima la matriz de propagación (3.23) para el sistema de columnas oblicuas y se logra obtener una expresión para  $n_{p0}$ .

Aplicaremos la teoría del capítulo III para obtener las ecuaciones que se manejaron en la sección anterior. Se aplicará una aproximación de primer orden para simplificar el tratamiento. Esta aproximación permite que se consERVE la energía en una forma exacta, es decir, se tendrá que  $R_{pp} + T_{pp} = R_{ss} + T_{ss} = 1$ , a primer orden.

Consideremos la siguiente situación particular del material dieléctrico que hemos tratado : (i) La dirección de propagación de la polarización-S está a lo largo de uno de los ejes principales como en la figura 3.1(b). (ii) Se tiene incidencia normal del haz de luz. (iii) En el área donde hay luz incidente se tiene que el material cuenta con un espesor óptico  $n_s d = \lambda_0/4$ , para la polarización-S.

De acuerdo al capítulo III, estas condiciones indican que  $S = 0$  y  $\delta_s = \pi/2$  ( ya que  $\delta_s = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_s d$ , para  $n_s d = \lambda_0/4$  ), de tal forma que la matriz de propagación (3.23), tomando en cuenta los parámetros (3.24), toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \cos\delta_p & 0 & 0 & -\frac{1}{n_{p0}} \operatorname{sen}\delta_{p0} \\ 0 & 0 & -1/n_s & 0 \\ 0 & -in_s & 0 & 0 \\ -in_{p0} \operatorname{sen}\delta_{p0} & 0 & 0 & \cos\delta_{p0} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Con las condiciones establecidas se tiene que  $\Phi = 1$  y que

$\gamma = n_{p_0}$ ; de donde las variables de la matriz (4.11) son:

$$\begin{aligned} \delta_{p_0} &= \frac{2\pi}{\lambda_0} n_{p_0} d & \delta_s &= \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{n_{p_0}^2} &= \frac{\cos^2 \phi}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \phi}{n_3^2} & n_s &= n_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Hemos definido anteriormente la cantidad  $\xi$  y definiremos ahora  $\delta'$  como,

$$\xi \equiv n_{p_0} - n_s \quad \delta' \equiv \delta_{p_0} - \delta_s \quad (4.13)$$

y sabemos que  $\delta_s = \pi/2$ . Luego esperamos que  $\delta'$  sea lo suficientemente pequeña como para poder escribir a primer orden de aproximación,

$$\cos \delta_{p_0} \approx -\delta' \quad \sin \delta_{p_0} \approx 1 \quad (4.14)$$

donde se ha usado las identidades trigonométricas para  $\sin(a+b)$  y  $\cos(a+b)$ , seguidas de las series de Taylor para los senos y cosenos. Notemos que se toma únicamente el primer término de la serie.

Los coeficientes (2.17) pueden escribirse, usando los elementos de la matriz (4.11), de la forma,

$$\begin{aligned} a_p^\pm &\approx (-\delta' \mp i/n_{p_0}) n_g + (i n_{p_0} \pm \delta') \\ a_s^\pm &= b_p^\pm = 0 \\ b_s^\pm &\approx \pm (i n_g / n_s) - i n_s \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde se ha considerado que el medio incidente es aire ( $n_0=1$ ).

Usando las relaciones (4.15) obtenemos las amplitudes de reflectancia  $r_{pp}$  y  $r_{ss}$  de (2.19) quedando,

$$r_{pp} = - \frac{a_p^+}{a_p^-} \approx - \frac{(n_{p_0}^2 - n_g) + i \delta' n_{p_0} (n_g - 1)}{(n_{p_0}^2 + n_g) + i \delta' n_{p_0} (n_g + 1)}$$

$$r_{ss} = - \frac{b_s^+}{b_s^-} \approx - \frac{n_s^2 - n_g^2}{n_s^2 + n_g^2} \quad (4.16)$$

Estas ecuaciones se reducen a las del caso isotrópico cuando se toma el límite de  $\delta' \rightarrow 0$ .

Ahora estamos en la aproximación de primer orden y hemos dicho anteriormente que se espera que  $\delta'$  sea suficientemente pequeña y, por tanto, podemos despreciar los términos en  $\delta'$  ( $\delta' \approx 0$ ) y tendremos de (4.16),

$$\left| \frac{r_{pp}}{r_{ss}} \right| \approx \left| \frac{n_{po}^2 - n_g^2}{n_s^2 - n_g^2} \right| \cdot \frac{n_s + n_g}{n_{po}^2 + n_g} \quad (4.17)$$

Siguiendo un razonamiento análogo al anterior, podemos llegar a obtener los valores absolutos de  $t_{pp}$  y  $t_{ss}$ . De acuerdo con (2.19), se obtiene,

$$\begin{aligned} |t_{pp}| &\approx 2n_{po}/(n_{po}^2 + n_g) \\ |t_{ss}| &\approx 2n_s/(n_s^2 + n_g) \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde se ha usado la aproximación a primer orden.

De estas últimas ecuaciones, obtenemos la expresión (4.6) en  $\lambda_0/4$ ,

$$\tan \psi_t = \left| \frac{t_{pp}}{t_{ss}} \right| \approx \frac{n_{po}}{n_s} \frac{(n_s^2 + n_g)}{(n_{po}^2 + n_g)} \quad (4.19)$$

De esta expresión se despeja  $n_{po}$ , Notemos que se ha obtenido la expresión anterior para un espesor óptico de la muestra de  $\lambda_0/4$ . Para obtener la expresión equivalente para media longitud de onda se sigue un tratamiento similar al anterior, con las consideraciones necesarias.

Las relaciones para el ángulo de Brewster y para capas

ausentes se obtienen a partir de las admitancias de la capa, sustrato, y medio incidente respectivamente para la polarización-P, utilizando la expresión matemática para la reflectancia en P ( $R_{pp}$ ) como veremos (Horowitz F. 1983);

Si ponemos la condición (iii) únicamente en la matriz de propagación (3.23) y determinamos el valor de  $R_{pp}$  tenemos,

$$R_{pp} = |a_p^+ / a_p^-|$$

$$R_{pp} = \frac{(\gamma_g - \gamma_o)^2 \cos^2 \delta_p' + (\gamma - \gamma_o \gamma_g / \gamma)^2 \sin^2 \delta_p'}{(\gamma_g + \gamma_o)^2 \cos^2 \delta_p' + (\gamma + \gamma_o \gamma_g / \gamma)^2 \sin^2 \delta_p'} \quad (4.20)$$

donde  $\gamma = n_{po}^2 / g$ ,  $\gamma_g = n_g / \cos \theta_g$ ,  $\gamma_o = n_o / \cos \theta_o$  son las admitancias de la capa, sustrato, y medio incidente, respectivamente, para la polarización P de la luz.

Definiendo la reflectancia para la polarización P ( $R_{ppg}$ ) del sustrato solo como :

$$R_{ppg} = \left| \frac{\gamma_g - \gamma_o}{\gamma_g + \gamma_o} \right|^2 \quad (4.21)$$

notamos de (4.20) y de (4.21) que la reflectancia  $R_{pp}$  de la capa es igual a la reflectancia del sustrato cuando  $\delta_p' = m' \pi$  donde  $m'$  es un entero. De (3.24) esto implica que,

$$\delta_p' = \frac{2\pi}{\lambda_o} g d = m' \pi \quad (4.22)$$

y usando las cantidades  $S$ ,  $n_{po}$ , y  $\epsilon'_{33}$  en la ecuación para  $g$  obtenemos,

$$\left[ 1 - \left( \frac{n_o n_{po}}{n_1 n_3} \right)^2 \sin^2 \theta_{aus} \right]^{1/2} n_{po} d = \frac{m' \lambda_o}{2} \quad (4.23)$$

donde  $\theta_{aus}$  es el ángulo de incidencia tal que la reflectancia de la polarización P ( $R_{pp}$ ) es igual a la del

sustrato ( $gR_{pp}$ ) solo o sin película.

En éste capítulo se logra obtener expresiones explícitas para los índices de refracción y espesor de una capa dieléctrica en función de las cantidades observables definidas. Esto dentro de la aproximación particular de primer orden.

## CAPITULO V

### RESULTADOS OBTENIDOS

#### *Introducción.*

Aquí se presentan resultados para distintos tipos de filtros Fabry-Perot anisotrópicos e isotrópicos. Es decir, se calculan las matrices  $R$  y  $T$  de los filtros Fabry-Perot dadas las características ópticas de los mismos. Se utilizan filtros Fabry-Perot ópticos para demostrar los tipos de anisotropía en índices y estructura columnar, así como para observar las diferencias entre los filtros Fabry-Perot isotrópicos con los anisotrópicos.

Los filtros Fabry-Perot son fabricados a partir de materiales dieléctricos, esencialmente sin absorción. La composición de los filtros Fabry-Perot estudiados consiste de dos espejos con estructura periódica, alternando materiales de índices alto y bajo, separados por una cavidad resonante. Se designan éstos filtros Fabry-Perot como,

$$v/HLHLHLHHLHLHLH/a \quad (5.1)$$

donde H se refiere a capas de espesor  $d_H$ , con índice alto y L a capas de espesor  $d_L$ , con índice bajo; (v) es el sustrato y (a) es el medio incidente.

Las respuestas de estos filtros Fabry-Perot es muy sensible a las variaciones de sus características ópticas tales como el espesor, los índices y la estructura columnar. Una variación en éstos parámetros ocasiona cambios en R y T. Para el caso de índices se introducen variaciones del 5%, con respecto a los índices isotrópicos con el objeto de simular la incertidumbre en la medida que tiene aproximadamente este valor.

La estructura columnar, figura(5.1), sufre alteraciones cuando se incrementa la temperatura del sustrato en la evaporación. El efecto del sustrato sobre la estructura de la capa es el de homogeneizar la distribución de los átomos ó moléculas y aumentar su densidad. Esto se debe a que la movilidad de los átomos aumenta al incidir sobre el sustrato caliente (Müller K. 1986).

#### 5.1.- Aplicaciones.

Los sistemas de multicapas tienen la propiedad de reflejar ciertas longitudes de onda y de transmitir otras; las longitudes de onda para las cuales el sistema de multicapas es altamente reflector ó transmisor puede alterarse al cambiar las características de las capas. Esto hace que éstos sistemas puedan ser usados como filtros Fabry-Perot. Estos filtros Fabry-Perot pueden usarse en las

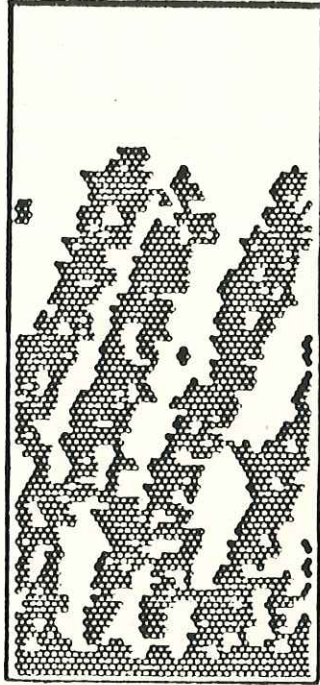


Fig.5.1.- Modelado del crecimiento columnar de una capa delgada.

regiones: ultravioleta, visible e infrarroja del espectro electromagnético, (Heather L. 1981). Un filtro Fabry-Perot es un dispositivo que sólo permite el paso de cierta o ciertas longitudes de onda por efecto de interferencia y/o absorción. Para nuestro caso dichos filtros Fabry-Perot son un apilamiento de películas delgadas ya sean anisotrópicas o isotrópicas.

Se calculó un filtro Fabry-Perot isotrópico por medio del programa computacional implementado para este propósito y enseguida se variaron sus características para determinar sus respuestas. Las gráficas de los resultados se presentan en las figuras(5.2). El procedimiento de análisis consiste en tomar un filtro Fabry-Perot isotrópico 5.2(a) variar los índices en las diferentes direcciones ( $y, z$ ) observando los cambios en las reflectancias y transmitancias cuando las variaciones de los parámetros son de un 5% respecto de los valores correspondientes a un filtro isotrópico.

#### 5.1.1.- Capas Delgadas.

Cuando el espesor óptico de las capas es de un cuarto de longitud de onda ( $\lambda_0/4$ ), se tienen valores máximos o mínimos en la reflectancia (Born y Wolf 1963), pues se sabe que las curvas de reflectancia contra el espesor óptico en los dieléctricos sigue un comportamiento periódico, ver figura(4.4).

Cuando se tiene una interfaz entre el aire y un

sustrato isotrópico, como el vidrio, se observa que el valor de la reflectancia es de 4% (0.04) para incidencia normal (Born y Wolf 1963), suponiendo que el índice de refracción del vidrio es de 1.5 aproximadamente.

El análisis se inicia calculando las Reflectancias y Transmitancias para un filtro isotrópico y, enseguida, se introduce anisotropía en los parámetros que se estudia. El filtro se compone de Sulfuro de Zinc (ZnS) para índice de refracción alto ( $n_H \approx 2.3$ ) y Criolita para índice de refracción bajo ( $n_L \approx 1.3$ ) con espesores de  $d_H = 53.2$  nm. y  $d_L = 90.6$  nm. Todos los cálculos se hacen para incidencia normal de la luz. Finalmente se graficaron las curvas de Reflectancia contra longitud de onda ( $\lambda$ ) para las polarizaciones S y P. Los términos cruzados fueron cero para todos los filtros Fabry-Perot; ya que se consideran capas no absorbentes con ángulos de incidencia reales.

La anisotropía se introduce a través de una variación en los índices de refracción y de las estructuras columnares. Para el caso en que se trabaja con índices de refracción, se toma un valor del 5% mayor que para los índices isotrópicos Fig. 5.2(a). La anisotropía por columnas se introduce por medio de un ángulo de orientación columnar de  $\phi = 50^\circ$  de acuerdo a la regla de la tangente según la ecuación (4.10). Todos los filtros Fabry-Perot considerados siguen la configuración dada por la ecuación (5.1); para el filtro isotrópico que se usa como referencia se tiene  $n_H =$

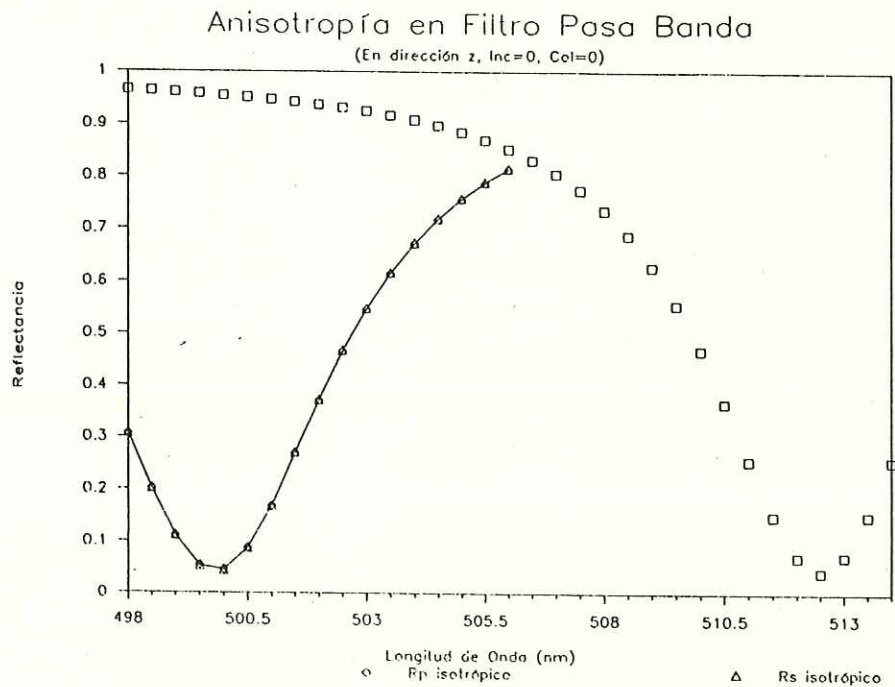
2.35 para índices de refracción altos y  $n_L = 1.38$  para valores bajos. Estos son los valores típicos del Sulfuro de Zinc y la Criolita respectivamente.

### 5.2.- Resultados y Conclusiones.

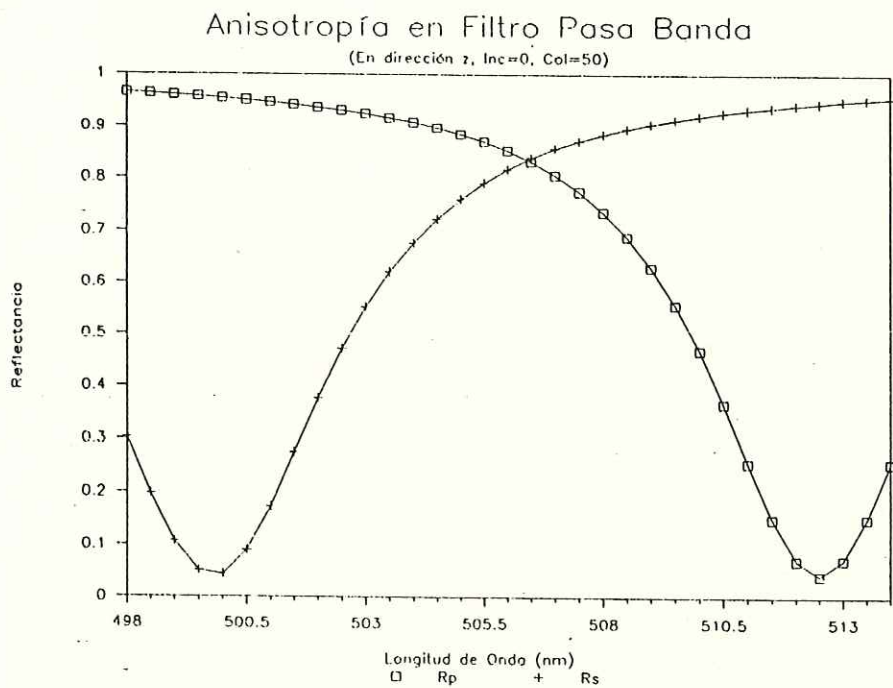
En la fig. 5.2(a) tenemos un filtro isotrópico (curva continua) en donde ambas polarizaciones coinciden en sus valores, de acuerdo con la teoría. El mínimo en la reflectancia ( $\approx 0.04$ ) aparece a una longitud de onda  $\lambda_0 = 500$  nm. Dicho valor es el calculado por medio de la ecuación (4.4) para un espesor óptico en la polarización S, de un cuarto de longitud de onda ( $\eta_s d = \lambda_0/4$ ), y a incidencia normal.

En la fig. 5.2(b) se tiene un filtro anisotrópico en la dirección (z) y también se introduce anisotropía por medio de la técnica de evaporar el material oblicuamente; esto ocasiona que las columnas crezcan a un ángulo de  $50^\circ$  de acuerdo a la regla de la tangente. Vemos en la gráfica que para este caso las polarizaciones S y P se desfasan una de la otra. Es decir, existe un corrimiento de la polarización P (a  $\lambda_0 = 512.5$  nm.) con respecto a la polarización S.

Para la Fig. 5.2(c); vemos un filtro con anisotropía en la dirección (y) con orientación columnar de  $50^\circ$ . Vemos que el mínimo para la reflectancia se encuentra a 500.5 nm para ambas polarizaciones. Notamos también que el desfase en las curvas es pequeño, lo que nos indica que, para éste filtro,

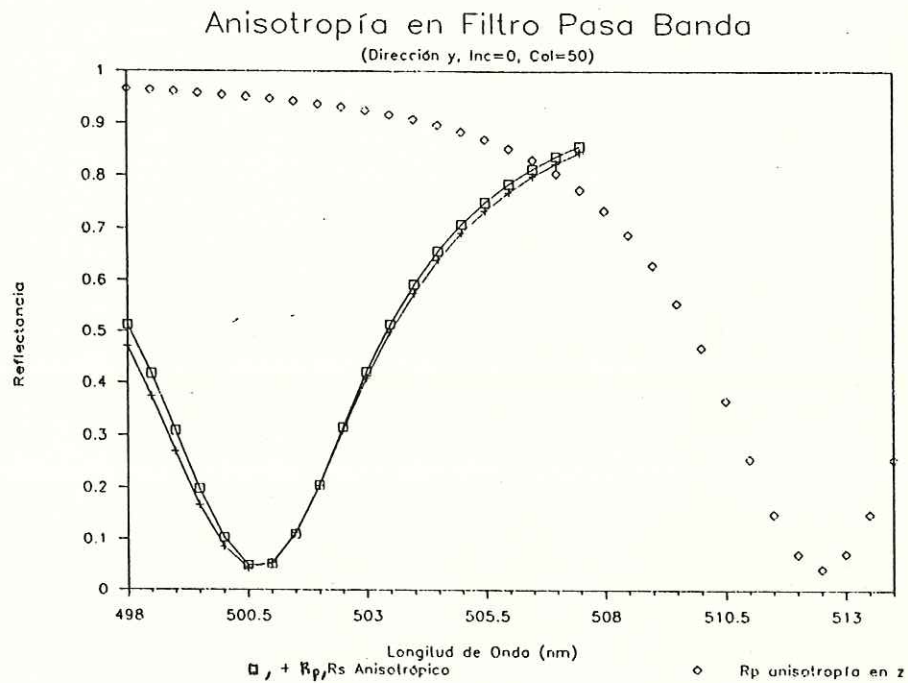


a

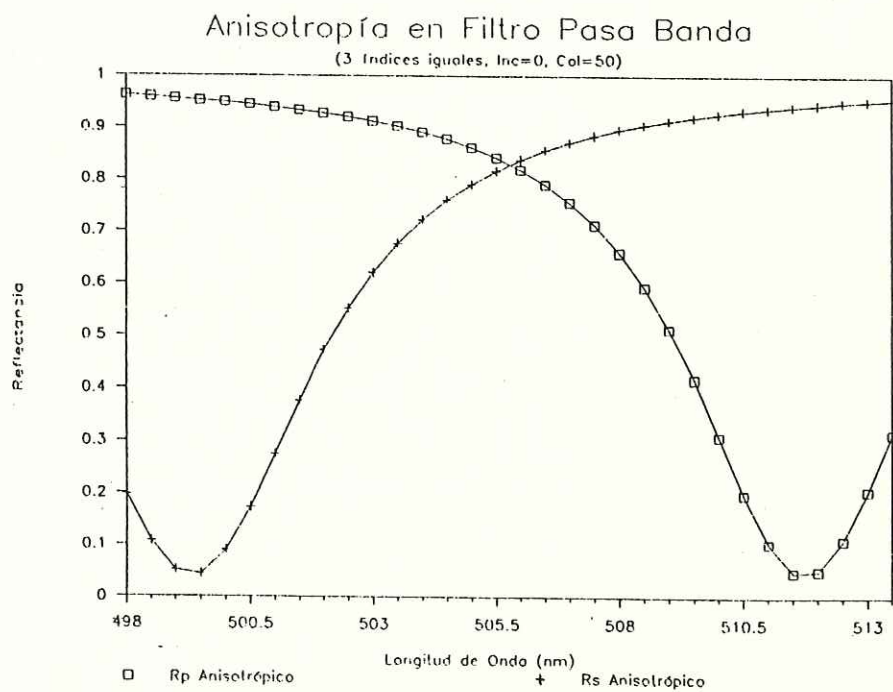


b

Fig.5.2.- Filtro isotrópico con crecimiento columnar a cero grados (a). Filtro anisotrópico en  $z$  con columnas a 50 grados(b),



c



d

Fig.5.2.- Filtro anisotrópico en (y) con columnas a 50 grados (c). Filtro isotrópico en los índices y columnas a 50 grados (d).

el efecto de la anisotropía no es muy notorio en esta dirección.

En la Fig. 5.2(d) tenemos un filtro isotrópico en los índices, pero anisotrópico en las columnas. Los valores de los índices corresponden a los valores del filtro isotrópico de 5.2(a). Las graficas muestran el efecto de la anisotropía columnar en las curvas de reflectancia para las polarizaciones S y P.

## CONCLUSIONES GENERALES.

La presencia de anisotropía en el recubrimiento de capas delgadas es prácticamente inevitable, por lo que es de suma importancia estudiar los efectos de ésta en el desempeño de los apilamientos.

Del análisis para sistemas de multicapas anisotrópicas y homogéneas se obtuvieron las Reflectancias y Transmitancias en ambas polarizaciones, incluyendo los términos cruzados. De los resultados del Cap.(V), dados por las figuras(5.2), se concluye que existe anisotropía debida tanto a la variación del valor de los índices de refracción, como de anisotropía producida por la presencia de estructuras columnares.

Se demuestra que la microestructura columnar normal es un caso particular de las estructuras columnares oblicuas. Esto tomando el límite en el que la orientación columnar  $\phi$  tiende a cero.

Para el caso de dieléctricos, por síntesis es posible caracterizar un material anisotrópico y obtener sus constantes ópticas. Esto de las variables experimentales definidas en el cap.(IV) y de las reflectancias y

transmitancias.

Los efectos importantes de rugosidad superficial pueden ser simulados por medio de una película superficial anisotrópica con espesor ( $d'$ ). Consideramos que este tratamiento puede considerar dichos efectos.

Por último, notemos que el tratamiento anisotrópico utilizado (4x4) es una generalización del tratamiento isotrópico (2x2) usado por Jones y Abelés (1950).

## APENDICE A

### CONCEPTOS GENERALES

#### *Definiciones.*

En el campo de la óptica se considera que una película es delgada, si su espesor tiene dimensiones comparables o menores que la longitud de onda de la radiación electromagnética con la que se trabaja.

Los materiales, en volumen ó en películas delgadas pueden ser considerados homogéneos o heterogéneos. Se dice que son homogéneos cuando el índice de refracción no varía en la dirección  $z$ , a lo largo de la dirección de propagación de la luz. Son heterogéneos cuando el índice de refracción varía a lo largo de la dirección de propagación.

Los materiales pueden ser isotrópicos o anisotrópicos. Se dice que son isotrópicos cuando sus propiedades son constantes en cualquier dirección. Son anisotrópicos cuando sus propiedades varían dependiendo de la dirección.

Consideraremos sistemas anisotrópicos y homogéneos para

su análisis y se mostrará que los sistemas isotrópicos homogéneos son un caso particular de los primeros (capítulo III).

La propagación de ondas planas en cualquier medio se describe en función del índice de refracción  $N$  que se puede escribir como,

$$N = n - jk \quad (\text{A.1})$$

donde  $n$  es la parte real del índice de refracción y  $k$  el coeficiente de extinción del medio.

Algunas veces se escribe el índice complejo de refracción como,

$$N = n(1 - j\kappa) \quad (\text{A.2})$$

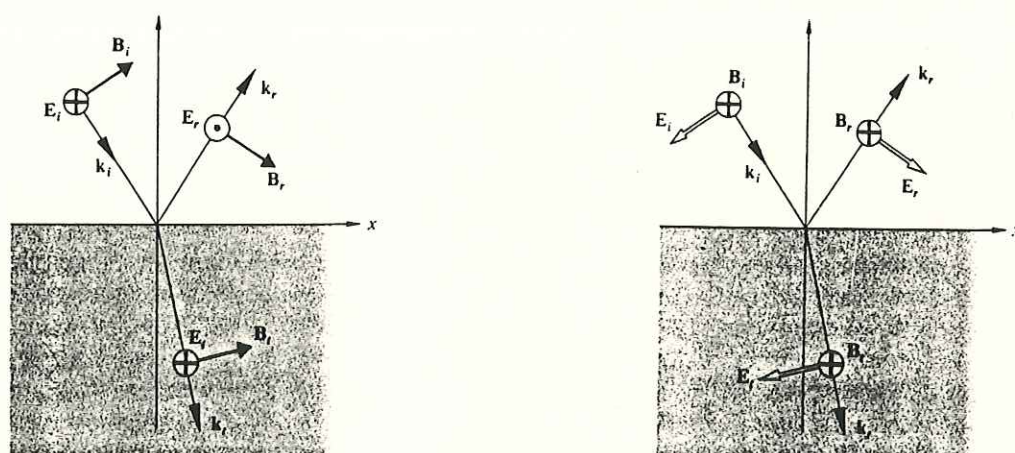
donde  $\kappa$  (kappa) se le denomina el coeficiente de absorción (Azzam y Bashara 1979).

Definamos ahora los dos tipos de polarización. Cuando el vector de campo eléctrico de la onda luminosa es perpendicular al plano de incidencia diremos que tenemos polarización-S. Tendremos polarización-P cuando el vector de campo eléctrico sea paralelo al plano de incidencia de la onda (ver fig. A.1). En general una onda o haz luminoso contiene a los dos tipos de polarización (Hecht y Zajac 1977).

#### *Conceptos Generales.*

Una onda luminosa, en su estructura más simple, está constituida por un campo eléctrico  $E$  y un campo magnético  $B$

oscilando mutuamente perpendiculares entre sí y con respecto a la dirección de propagación. Estos campos obedecen las ecuaciones de Maxwell, ya sea en el vacío o dentro de un material arbitrario (isotrópico o anisotrópico, homogéneo o inhomogéneo, con las ecuaciones debidamente modificadas para cada caso), Hecht y Zajac 1977.



(a) Polarización-S

(b) polarización-P

Fig.A.1.- Tipos de polarización.

- (a).-El vector de campo eléctrico incidente es perpendicular al plano de incidencia.
- (b).-El vector de campo eléctrico incidente es paralelo al plano de incidencia.

### Onda monocromática.

Veamos ahora un concepto importante: el de onda monocromática. En un campo escalar, sea  $V(p,t)$  el valor del campo en un punto  $p$  al tiempo  $t$ . Si la dependencia en el tiempo es senoidal en todos los puntos,

$$V(p,t) = A(p) \cos[\omega t - \phi(p)] \quad (\text{A.3})$$

si la amplitud  $A(p)$  y el ángulo de fase (o fase)  $\phi(p)$  varían continuamente de punto a punto, se dice que (A.3) representa una onda escalar. Un nombre alternativo que se usa frecuentemente es el de onda monocromática (Stone J. 1963).

*Condiciones a la frontera sobre los vectores de campo electromagnéticos.*

Consideremos dos medios, 1 y 2, en contacto y construyamos una trayectoria rectangular ABCD como en la fig.(A.2). En la trayectoria supondremos que las longitudes de AB y CD son  $\Delta l$  y que los segmentos rectilíneos AD y BC son suficientemente pequeños como para despreciarse, es decir,  $h_1$  y  $h_2$  tienden a cero. También se despreciará la corriente por el rectángulo, a menos de que exista una corriente superficial verdadera. Aplicando la ley circuital de Ampere al rectángulo ABCD tenemos,

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da$$

$$= I \quad (\text{A.4})$$

de donde tenemos

$$\mathbf{H}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} + \mathbf{H}_1 \cdot (-\Delta \mathbf{l}) = |\mathbf{j}_s \times \Delta \mathbf{l}| \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = |\mathbf{j}_s \times \mathbf{I}_0|$$

donde  $\mathbf{j}_s$  es la densidad de corriente superficial (corriente de transporte por unidad de longitud en la capa superficial) y  $\mathbf{I}_0$  es un vector unidad en la dirección de  $\Delta \mathbf{l}$ . Por tanto, la componente tangencial de la intensidad magnética ( $\mathbf{H} =$

$B/\mu_0$  para medios de magnetización [ M ] cero) es continua al atravesar la superficie de separación a menos que exista una corriente superficial verdadera. Es decir si  $j_s = 0$  entonces,

$$H_{2t} = H_{1t} \quad (\text{A.6})$$

de (A.5), y la componente tangencial de H es continua.

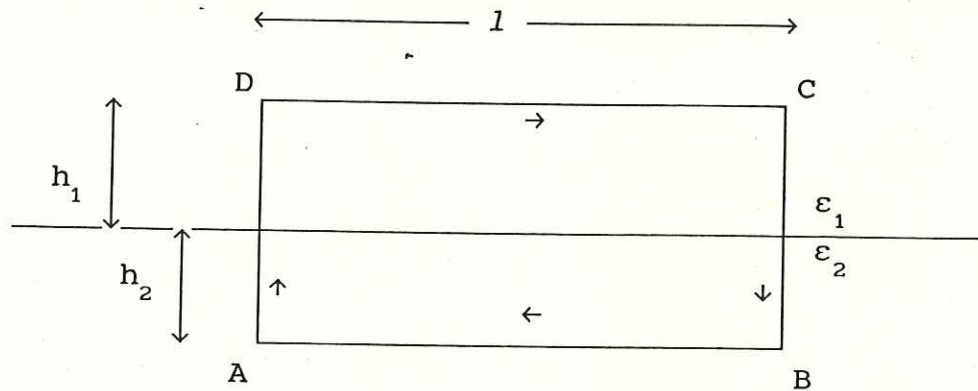


Fig.A.2 Medios en contacto para obtener las condiciones a la frontera.

La componente tangencial del campo eléctrico puede considerarse de una forma similar. La ecuación de Maxwell de la que se parte es la ley de Gauss,

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.7})$$

al integrar esta ecuación sobre la superficie limitada por el circuito rectangular da,

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, da = - \int_s \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} \, da \quad (\text{A.8})$$

y aplicando el teorema de Stokes,

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{A.9})$$

al primer miembro de (A.8) se tiene,

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1 E_{1n} + h_2 E_{2n} - h_2 E'_{1n} - h_2 E'_{2n} = - \int_s \left( \frac{\partial B}{\partial t} \right) \cdot n \, da \quad (\text{A.10})$$

si el circuito se encoge ahora dejando que  $h_1$  y  $h_2$  tiendan a cero, entonces los últimos cuatro términos del primer miembro se anulan, así como el segundo miembro. En esto último podemos decir que la superficie de integración también tiende a cero. De modo que tenemos de (A.10),

$$lE_{1t} - lE_{2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{1t} = E_{2t} \quad (\text{A.11})$$

Las transmitancias y reflectancias se obtienen aplicando las condiciones de frontera adecuadas : las componentes tangenciales de los campos electromagnéticos  $E$  y  $H$  deben ser continuas al atravesar una interfaz determinada (Reitz J. 1969).

#### *Polarización lineal.*

Ya se ha dicho que la luz es una onda electromagnética transversal. Consideremos luz linealmente polarizada o polarizada en un plano, es decir, donde la orientación del del campo eléctrico (que es el responsable de la mayoría de los fenómenos ópticos) sea constante, pudiendo variar su magnitud y signo con el tiempo. Consideremos, además, dos perturbaciones ópticas como se definieron anteriormente, sólo que ortogonales entre sí, una vibrando en el eje-x y la otra en el eje-y. Ambas viajando en la dirección positiva de  $z$ ,

$$E_x(z, t) = iE_{0x} \cos(kz - \omega t) \quad (\text{A.12})$$

$$y \quad E_y(z,t) = jE_{oy} \cos(kz - \omega t + \delta) \quad (\text{A.13})$$

donde  $\delta$  es la diferencia de fase entre las dos ondas. La perturbación óptica resultante es la suma de las dos,

$$E(z,t) = E_x(z,t) + E_y(z,t) \quad (\text{A.14})$$

Si  $\delta$  es cero o un múltiplo entero de  $\pm 2\pi$ , se dice que las ondas están en fase. En ese caso particular la ecuación (A.8) queda,

$$E = (iE_{ox} + jE_{oy}) \cos(kz - \omega t) \quad (\text{A.15})$$

La onda resultante es también linealmente polarizada con una amplitud igual a  $(iE_{ox} + jE_{oy})$ . La situación se muestra en la figura (A.3) (Hecht y Zajac 1977).

#### *Polarización circular.*

Esta tipo de polaridad se tiene cuando ambas ondas constitutivas tienen igual amplitud ( $E_o = E_{ox} = E_{oy}$ ) y además, su diferencia de fase  $\delta = \pi/2$  luego,

$$\begin{aligned} E_x &= iE_o \exp[i(kz - \omega t)] \\ E_y &= jE_o \exp[i(kz - \omega t + \pi/2)] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

tomando la forma exponencial y si sumamos tenemos,

$$E = E_o (i \exp[i(kz - \omega t)] + \exp[i(kz - \omega t + \pi/2)]) \quad (\text{A.17})$$

tomaremos  $z = 0$  por simplicidad. Luego cuando  $t = 0$ ,  $E = iE_o$ ; cuando  $t = \pi/2\omega$ ,  $E = jE_o$ ; cuando  $\pi/\omega$ ,  $E = -iE_o$ ; y cuando  $3\pi/\omega$ ,  $E = -jE_o$ . Entonces la amplitud resultante gira. Si la fase es  $\pi/2$ , rota en el sentido de las manecillas del reloj y será *polarización circular derecha*, fig.A.4(a), si la diferencia de fase es  $3\pi/2$ , rota en el sentido contrario

al de las manecillas y será polarización circular izquierda, (Nussbaum A. 1976).

*Polarización elíptica.*

Es el estado de polarización más general. El patrón trazado por el vector de campo eléctrico (la punta de la flecha) forma una hélice, y cuando se le mira de frente, la hélice parece una elipse. La proporción del eje mayor al eje menor de la elipse puede tomar valores entre la unidad e infinito, fig.(A.4). Vemos que el estado de polarización lineal es un caso especial de polarización elíptica con una proporción de  $\infty$ , y que polarización circular es otro caso especial con proporción de la unidad, (Nussbaum A. 1976).

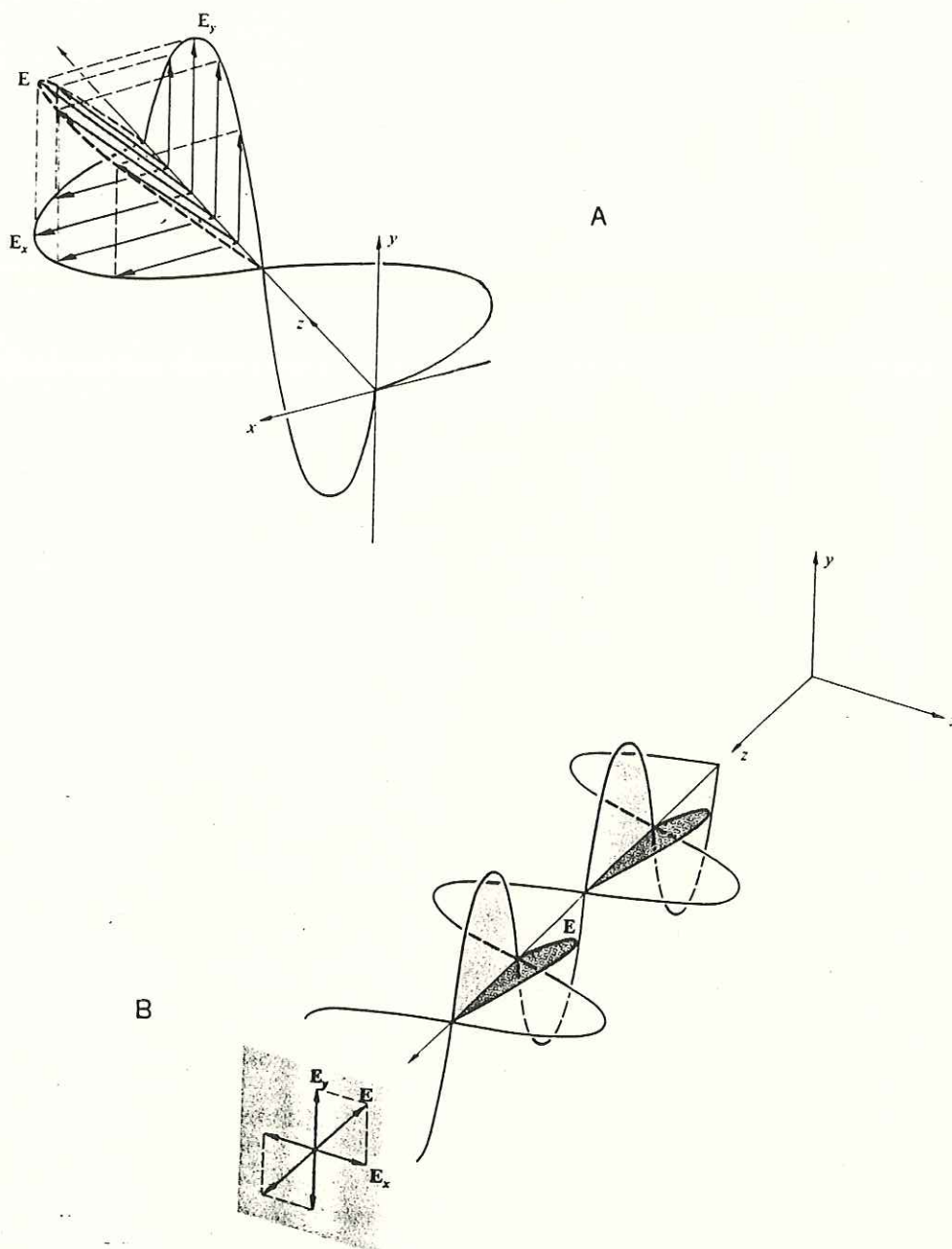


Fig. (A.3).- Luz linealmente polarizada.

(a) Componentes eléctricas para polarización lineal.

(b) Luz lineal viajando en la dirección positiva de  $z$ .

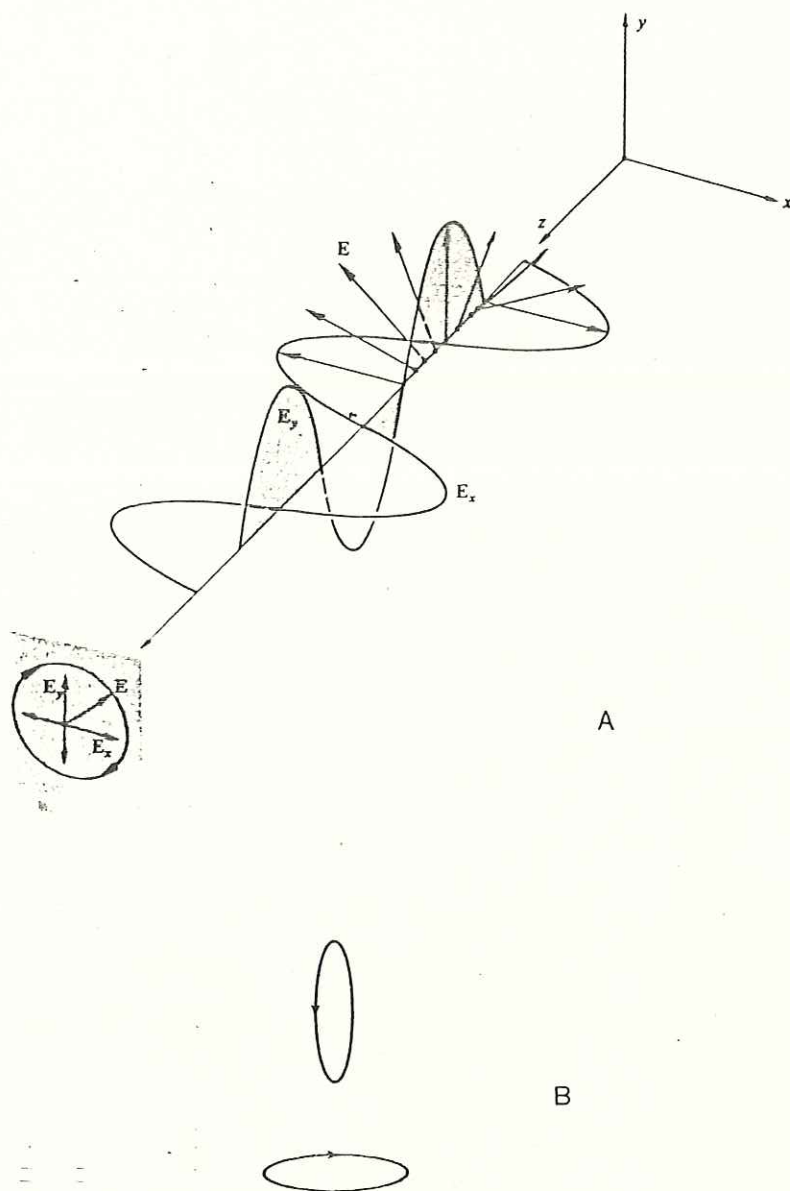


Fig. (A.4).- Polarización Circular y Elíptica.

- (a) Luz circular derecha viajando en la dirección positiva de  $z$ .
- (b) Luz elíptica. La relación del eje mayor al eje menor es 5.

## APENDICE B

### REPRESENTACION DEL TENSOR $\epsilon_{ij}$ EN LOS EJES COORDENADOS.

El tensor permitividad  $\epsilon$  se representa en el sistema de ejes principales  $P \equiv (n_1, n_2, n_3)$  por una matriz diagonal de la forma,

$$\epsilon_P \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Sea el sistema  $P$  obtenible del sistema de ejes coordenados  $C \equiv (x, y, z)$  mostrado en la fig.3.1(a) por medio de una rotación en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del eje  $y$ , por ejemplo, en un ángulo arbitrario  $\phi$ . Representamos esta operación por medio de una matriz de rotación ( $R$ ), que tiene la forma,

$$R \equiv \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\text{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Nos interesa conocer la forma del tensor  $\epsilon$  en la representación- $C$ . Ahora las ecuaciones que conectan los

vectores desplazamiento y campo eléctrico se pueden mapear de la representación-P a la representación-C a través de los siguientes pasos,

$$\begin{aligned} D_p &= \epsilon_p E_p \\ (R^{-1}R)D_p &= \epsilon_p (R^{-1}R)E_p \\ R^{-1}D_c &= \epsilon_p (R^{-1}E_c) \\ \Rightarrow D_c &= (R\epsilon_p R^{-1})E_c \end{aligned} \quad (B.3)$$

de donde se puede obtener el tensor  $\epsilon_c$  (representación-C) en función del tensor  $\epsilon_p$  (representación-P) como,

$$\epsilon_c = R\epsilon_p R^{-1} \quad (B.4)$$

notemos que en los anteriores pasos se toma en cuenta el hecho de que  $RR^{-1} = R^{-1}R = I$ .

También consideraremos situaciones en donde P se obtiene de C a través de la rotación-R, seguida de otra rotación-S en el sentido de las manecillas de reloj alrededor del eje-z en un ángulo  $\xi$  arbitrario, que se representa por medio de la matriz de rotación siguiente,

$$S \equiv \begin{bmatrix} \cos\xi & -\text{sen}\xi & 0 \\ \text{sen}\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.5)$$

Usando el mismo razonamiento que el que se utilizó para obtener (B.4) sólo que ahora debemos multiplicar por  $(S^{-1}SR^{-1}R)$ , es decir una rotación alrededor del eje y seguida de otra rotación alrededor del eje z, se obtiene,

$$\epsilon_c = SR\epsilon_p R^{-1}S^{-1} \quad (B.6)$$

Para el caso más general se tendrá una tercera rotación alrededor del eje x efectuada de forma similar. Su matriz de

rotación tendrá la forma,

$$G \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos\gamma & -\text{sen}\gamma \\ 0 & \text{sen}\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

La transformación más general se obtiene, entonces aplicando sucesivamente las matrices que representan las rotaciones alrededor de cada eje.

## APENDICE C

### ECUACIONES DE MAXWELL

Obtendremos las constantes  $c_{ij}$ , que relacionan las derivadas de los campos con los campos mismos, para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} Du_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{14}u_4 \\ Du_2 &= u_3 \\ Du_3 &= c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + c_{34}u_4 \\ Du_4 &= c_{41}u_1 + c_{42}u_2 + c_{44}u_4 \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde  $D \equiv (c/i\omega)\partial/\partial z$ ,  $[u_1, u_2, u_3, u_4] \equiv [E_x, E_y, H_x, H_y]$  y las constantes  $c_{ij}$  son de la forma

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{S}{\epsilon_{33}} \epsilon_{31} & c_{12} &= \frac{S}{\epsilon_{33}} \epsilon_{32} & c_{14} &= \frac{S^2}{\epsilon_{33}} - 1 \\ c_{31} &= \epsilon_{21} - \epsilon_{31} \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} & c_{32} &= \epsilon_{22} - S^2 - \epsilon_{32} \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} & c_{34} &= -S \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} \\ c_{41} &= \epsilon_{31} \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} - \epsilon_{11} & c_{42} &= \epsilon_{32} \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} - \epsilon_{12} & c_{44} &= -S \frac{\epsilon_{13}}{\epsilon_{33}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Lo que se hace es tomar la forma de los campos

electromagnéticos propuesta

$$E(z,t) = E(z) \exp\left[-i\left(\frac{S\omega}{c} z - \omega t\right)\right]$$

$$y \quad H(z,t) = H(z) \exp\left[-i\left(\frac{S\omega}{c} z - \omega t\right)\right] \quad (2.6)$$

e insertarlos en las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times E = - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times H = \frac{1}{c} \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.2b)$$

donde se ha tomado la convención de que  $\epsilon = \epsilon_r$ .

Para la primera ecuación se tiene, luego de hacer el rotacional y las derivadas con respecto a  $(x,y,z)$ , dejando indicada la derivada con respecto a  $z$ ,

$$\frac{c}{i\omega} \left[ - \frac{\partial E_y(z)}{\partial z} \mathbf{i} + \left( \frac{\partial E_x(z)}{\partial z} + E_z(z) \frac{S\omega_1}{c} \right) \mathbf{j} - E_y(z) \frac{S\omega_1}{c} \mathbf{k} \right] = - \left[ H_x(z) \mathbf{i} + H_y(z) \mathbf{j} + H_z(z) \mathbf{k} \right] \quad (c.1)$$

donde hemos tomado el hecho de que

$$E(z) = \sum_{j=1}^3 E_j(z) \hat{\mathbf{e}}_j \quad (2.7)$$

$$H(z) = \sum_{j=1}^3 H_j(z) \hat{\mathbf{e}}_j ; \quad (\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3) \equiv (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

Al descomponer (c.1) en sus respectivas componentes tenemos,

$$DE_y(z) = H_x(z) \quad (c.1.i)$$

$$DE_x(z) = - H_y(z) - SE_z(z) \quad (c.1.j)$$

$$SE_y(z) = H_z(z) \quad (c.1.k)$$

De aquí notamos que la componente  $\mathbf{i}$  arroja la segunda ecuación del sistema (2.8) directamente.

Ahora hacemos lo mismo para la ecuación (2.2b). Aquí se toma la forma tensorial de la permitividad  $E$  como sus

componente  $\epsilon_{ij}$  en forma de matriz y se multiplica por el vector columna E; al hacer las operaciones se puede eliminar la parte exponencial de ambos lados de la igualdad y obtenemos,

$$-DH_y(z) = \epsilon_{11} E_x(z) + \epsilon_{12} E_y(z) + \epsilon_{13} E_z(z) \quad (\text{c.2.i})$$

$$DH_x(z) = \epsilon_{21} E_x(z) + \epsilon_{22} E_y(z) + \epsilon_{23} E_z(z) - SH_z(z) \quad (\text{c.2.j})$$

$$-SH_y(z) = \epsilon_{31} E_x(z) + \epsilon_{32} E_y(z) + \epsilon_{33} E_z(z) \quad (\text{c.2.k})$$

Para cada una de las componentes. Si  $\epsilon_{33}$  es distinto de cero podemos despejar  $E_z(z)$  de (c.2.k) y si sustituimos en (c.1.j) tenemos luego de simplificar,

$$DE_x(z) = \frac{S}{\epsilon_{33}} \epsilon_{31} E_x(z) + \frac{S}{\epsilon_{33}} \epsilon_{32} E_y(z) + \left(\frac{S^2}{\epsilon_{33}} - 1\right) H_y \quad (\text{c.2})$$

que es la primera ecuación del sistema (2.8) y donde podemos identificar las  $c_{ij}$  directamente para esta igualdad. Siguiendo un razonamiento similar se obtienen las constantes restantes.

## APENDICE D

### CAMPOS TANGENCIALES

Obtendremos las ecuaciones (2.16) y (2.17). Se desarrolla la primera ecuación (2.16) con las constantes determinadas por (2.17). Para obtener las demás relaciones se sigue el mismo procedimiento expuesto aquí. Las ecuaciones (2.16) son,

$$\begin{aligned} \bar{a}_p \bar{E}_{op} + \bar{a}_s \bar{E}_{os} + a_p^+ E_{op}^+ + a_s^+ E_{os}^+ &= 0 \\ \bar{b}_p \bar{E}_{op} + \bar{b}_s \bar{E}_{os} + b_p^+ E_{op}^+ + b_s^+ E_{os}^+ &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

cuyos coeficientes (2.17) son,

$$\begin{aligned} a_p^\pm &= (l_{11} \cos\theta_0 \pm l_{14} n_0) n_g - (l_{41} \cos\theta_0 \pm l_{44} n_0) \cos\theta_g \\ a_s^\pm &= (l_{12} \mp l_{13} N_0) n_g - (l_{42} \mp l_{43} N_0) \cos\theta_g \\ b_p^\pm &= (l_{21} \cos\theta_0 \pm l_{24} n_0) N_g + (l_{31} \cos\theta_0 \pm l_{34} n_0) \\ b_s^\pm &= (l_{22} \mp l_{23} N_0) N_g + (l_{32} \mp l_{33} N_0) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Primero desarrollemos el sistema de cuatro ecuaciones dado por (2.11), tenemos que este sistema relaciona los campos tangenciales por medio de la matriz  $L$ ,

$$u(z) = L(z) u(0) \quad (2.11)$$

Ahora si hacemos  $z = d$  tenemos que,

$$\begin{aligned}
 U_1^d &= l_{11} U_1^0 + l_{12} U_2^0 + l_{13} U_3^0 + l_{14} U_4^0 \\
 U_4^d &= l_{41} U_1^0 + l_{42} U_2^0 + l_{43} U_3^0 + l_{44} U_4^0
 \end{aligned}
 \tag{E.1}$$

esto para el primer y último renglón de la matriz L. Ahora apliquemos las condiciones a la frontera sobre los campos tangenciales, es decir, la continuidad de los mismos, y de la fig.(2.2) tenemos,

$$\begin{aligned}
 U_1^0 &= E_{0p}^+ \cos\theta_0 + E_{0p}^- \cos\theta_0 \\
 U_2^0 &= E_{0s}^+ + E_{0s}^- \\
 U_1^d &= E_p^+ \cos\theta_g \\
 U_2^d &= E_s^+
 \end{aligned}$$

para los campos eléctricos, y

$$\begin{aligned}
 U_3^0 &= -H_{0s}^+ \cos\theta_0 + H_{0s}^- \cos\theta_0 \\
 U_4^0 &= H_{0p}^+ - H_{0p}^- \\
 U_3^d &= -H_s^+ \cos\theta_g \\
 U_4^d &= H_p^+
 \end{aligned}
 \tag{E.2}$$

para los campos magnéticos tangenciales. Si sustituimos las relaciones (E.2) en las ecuaciones (E.1) tenemos,

$$\begin{aligned}
 E_p^+ \cos\theta_g &= l_{11} E_{0p}^+ \cos\theta_0 + E_{0p}^- \cos\theta_0 + l_{12} E_{0s}^+ + E_{0s}^- + \\
 &+ l_{13} -H_{0s}^+ \cos\theta_0 + H_{0s}^- \cos\theta_0 + l_{14} H_{0p}^+ - H_{0p}^-
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 H_p^+ &= l_{41} \cos\theta_0 - E_{0p}^+ + E_{0p}^- + l_{42} E_{0s}^+ + E_{0s}^- + \\
 &+ l_{43} n_0 \cos\theta_0 - E_{0s}^+ + E_{0s}^- + l_{44} n_0 E_{0p}^+ + E_{0p}^-
 \end{aligned}
 \tag{E.3}$$

respectivamente. Ahora usando la ecuación  $n(\hat{k} \times E) = H$ , que para nuestro caso se simplifica a  $nE = H$  ya que los vectores H y E son ortogonales entre sí y a la dirección de propagación, ponemos las ecuaciones anteriores en función de los campos eléctricos; por ejemplo tenemos  $H_{0s}^+ = n_0 E_{0s}^+$ ,  $H_p^+ =$

$n_g E_p^+$ , etc. Y si agrupamos términos comunes para cada una de las polarizaciones S y P, las ecuaciones (E.3) quedan,

$$E_p^+ \cos\theta_g = E_{op}^- l_{11} \cos\theta_o - l_{14} n_o + E_{op}^+ l_{11} \cos\theta_o + l_{14} n_o + \\ + E_{os}^- l_{12} - l_{13} n_o \cos\theta_o + E_{os}^- l_{12} + l_{13} n_o \cos\theta_o$$

$$n_g E_p^+ = E_{op}^- l_{41} \cos\theta_o - l_{44} n_o + E_{op}^+ l_{41} \cos\theta_o + l_{44} n_o + \\ + E_{os}^+ l_{42} - l_{43} n_o \cos\theta_o + E_{os}^- l_{42} + l_{43} n_o \cos\theta_o$$

(E.4)

Finalmente, si dividimos la primera de estas últimas ecuaciones entre  $\cos\theta_g$ , la segunda entre  $n_g$  y restamos la primera de la segunda (notemos que la ecuación resultante queda igualada a cero) nos queda,

$$E_{op}^- \left( \frac{l_{11} \cos\theta_o - l_{14} n_o}{\cos\theta_g} - \frac{l_{41} \cos\theta_o - l_{44} n_o}{n_g} \right) +$$

$$E_{op}^+ \left( \frac{l_{11} \cos\theta_o - l_{14} n_o}{\cos\theta_g} - \frac{l_{41} \cos\theta_o + l_{44} n_o}{n_g} \right) +$$

$$E_{os}^- \left( \frac{l_{12} + l_{13} n_o \cos\theta_o}{\cos\theta_g} - \frac{l_{42} + l_{43} n_o \cos\theta_o}{n_g} \right) +$$

$$E_{os}^+ \left( \frac{l_{12} - l_{13} n_o \cos\theta_o}{\cos\theta_g} - \frac{l_{42} - l_{43} n_o \cos\theta_o}{n_g} \right) = 0$$

(E.5)

ahora si multiplicamos la relación (E.5) por  $(n_g \cos\theta_g)$  se obtiene la primera ecuación de (2.16). Si igualamos término a término obtenemos las constantes  $a_p^\pm$  y  $a_s^\pm$  dadas por (2.17). Para obtener las otras ecuaciones faltantes se hacen las mismas operaciones, pero ahora partiendo de las relaciones para  $u_2^d$  y  $u_3^d$ .

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Aspnes E. D. / ``Optical characterization by ellipsometry - a prospective''. Colloque C10, supplement au n°12, Tome 44, decembre 1983.
- 2.- Azzam and Bashara / ``Ellipsometry and polarized light''. North holland pub. co. Amsterdam 1979.
- 3.- Berreman W. Dwight / ``Optics in stratified and anisotropic media: 4x4 - matrix formulation''. JOSA, vol. 62, no. 4 1972.
- 4.- Born M. y Wolf E. / ``Principles of optics''. Pergamon Press 1965.
- 5.- Hass G. y Thun E. R. / ``Physics of thin films''. Academic Press vol.4 1967.
- 6.- Hetch and Zajac / ``Optica''. Fondo educativo interamericano 1977.
- 7.- Horowitz Flavio / ``Structure - induced optical anisotropy in thin films''. Tesis Doctoral. The university of Arizona (1983).
- 8.- Liddell M. H. / ``Computer-aided techniques for the design of multilayer filters''. Adam Hilger Ltd, Bristol,

1981.

9.- McCrackin Frank L. et al / "Measurement of the thickness and refractive index of very thin films and the optical properties of surfaces by ellipsometry". Journal of research of the National bureau of Standards of Physics and Chemistry, vol.67A, no.4, Julio-Agosto 1963.

10.- Moyle J. K., W. J. Gunning III and W. H. Southwell / "Microstructure modeling : scattering and form birefringence in dielectric thin films". SPIE vol. 821 Modeling of optical thin films (1987).

11.- Müller K. H. / "Monte Carlo calculation for structural modifications in ion-assisted thin film deposition due to thermal spikes". J. Vac. Sci. Technol. A., vol.4, no.2, 1986.

12.- Nussbaum Allen- A. Phillips Richard/ "Contemporary optics for scientists and engineers". Printice-Hall, 1976.

13.- Reitz R. John / "Fundamentos de la Teoría Electromagnética". UTEHA, 1969.

14.- Saxena N. A. / "Changes in the phase and amplitude of polarized light reflected from a film-covered surface and their relations with the film thickness". JOSA vol. 55, no. 9 1965.

15.- Stone M. John/ "Radiation and optics". McGraw-hill 1963.

16.- Teitler S. and Henvis B. W. / "Refraction in

stratified anisotropic media''. JOSA vol. 60 no. 6 1970.

17.- Weinstein W. / ''Computations in thin film optics''. Vacuum, vol.IV no.1 1954.