

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS



MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA
ÁREA DE MATEMÁTICAS APLICADAS

MODOS DE VIBRACIÓN TORSIONAL Y RADIAL EN ANILLOS
CILÍNDRICOS POROELÁSTICOS

TESIS

que para cubrir los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

JONATHAN VERDUGO OLACHEA


Ensenada, Baja California, México, 15 de enero de 2024.

Modos de Vibración Torsional y Radial en Anillos Cilíndricos Poroelásticos

Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ciencias presenta

Jonathan Verdugo Olachea

APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ



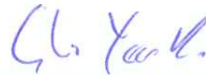
Dra. Selene Solorza Calderón

Directora del Comité



Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar

Miembro del Comité



Dr. Carlos Yee Romero

Miembro del Comité



Dr. Ramón Carrillo Bastos

Miembro del Comité



Dr. Antonio González Fernández

Miembro del Comité



Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado

Miembro del Comité

Ensenada, Baja California, 15 de enero de 2024.

RESUMEN de la tesis de JONATHAN VERDUGO OLACHEA, presentada como requisito para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS. Ensenada, Baja California, 15 de enero de 2024.

MODOS DE VIBRACIÓN TORSIONAL Y RADIAL EN ANILLOS CILÍNDRICOS POROELÁSTICOS

Resumen aprobado por:

SELENE SOLORZA

Dra. Selene Solorza Calderón

Directora de Tesis

En este trabajo de tesis se presenta una metodología para el estudio de la propagación de ondas torsionales y radiales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos. Este estudio contribuye al avance del conocimiento en el campo de la poroelasticidad y se amplía la comprensión de la propagación de ondas en estos medios. La importancia de contar con modelos teóricos que describan la propagación de ondas en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos radica en su gran diversidad de aplicaciones tanto teóricas como prácticas, en campos tan diversos como la ingeniería, la medicina y la geofísica. En particular, se analiza la propagación de ondas radiales y torsionales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos homogéneos, isotrópicos, con simetría axial que están completamente saturados por un fluido y con condiciones de frontera libre de esfuerzos. Se utiliza el marco teórico de la teoría de Biot de Viscosidad Extendida (TBVE).

Para abordar el problema de manera práctica, el análisis de la propagación de ondas se dividió en dos partes: ondas torsionales y ondas radiales. Para el caso de la propagación de ondas torsionales en anillos cilíndricos poroelásticos, se desarrolló una metodología que nos permite obtener expresiones analíticas para la velocidad de fase y la atenuación en términos de las propiedades físicas del medio, como la porosidad, la permeabilidad, la densidad del sólido, la viscosidad del fluido, el módulo de cizallamiento del marco sólido, entre otros. Estas expresiones incluyen el parámetro de la frecuencia (ω), las velocidades de las ondas S rápidas (β_1) y S lentas (β_2), y aparece de manera explícita el p -ésimo modo natural de vibración. En el caso de la propagación de ondas radiales en cilindros poroelásticos, se logró desacoplar las ecuaciones de frecuencias de las ondas P rápidas (α_1) y P lentas (α_2), lo que proporciona una metodología para calcular con precisión las frecuencias naturales de los modos naturales de vibración para las ondas radiales. Estas ecuaciones están en función de las propiedades físicas del medio, la frecuencia (ω) y las velocidades de las ondas S rápidas y S lentas, lo que facilita el análisis y la obtención de las frecuencias naturales y los modos naturales de vibración de las ondas radiales.

Palabras Clave: propagación de ondas; medios porosos; ondas torsionales; ondas radiales; teoría de poroelasticidad.

ABSTRACT of the thesis presented by JONATHAN VERDUGO OLACHEA, in fulfillment of the requirements of the degree of DOCTORATE IN SCIENCE, Ensenada, Baja California, January 15, 2024.

TORSIONAL AND RADIAL MODES OF VIBRATION IN HOLLOW POROELASTIC CYLINDERS

Approved by:

SELENE SOLORZA

Dra. Selene Solorza Calderón

Thesis Advisor

This work presents a methodology aimed at understanding the propagation of torsional and radial waves in poroelastic cylinders and hollow cylinders, contributing to the advancement of knowledge in the field of poroelasticity. The research expands our comprehension of wave propagation in these media, encouraging future investigations in this field. Having theoretical models that describe the propagation of waves in poroelastic cylinders and hollow cylinders has significant interest due to its wide range of both theoretical and practical applications in diverse fields such as engineering, medicine, and geophysics. Particularly, this thesis investigates the propagation of radial and torsional waves in homogeneous, isotropic, axially symmetric poroelastic cylinders and hollow cylinders, which are completely saturated with fluid and subjected to stress-free boundary conditions, based on the theoretical framework of the Biot Viscosity Extended Theory (BVET).

In order to approach this problem practically, we divide the analysis of wave propagation into two parts: torsional and radial waves. For propagation of torsional waves in poroelastic hollow cylinders, a methodology has been developed to obtain analytical expressions for phase velocity and attenuation. These expressions are functions of the physical properties of the medium, such as porosity, permeability, solid density, fluid viscosity, and solid-frame shear modulus, among others. Moreover, these expressions have as explicit parameters the frequency (ω), the fast (β_1) and slow (β_2) S wave velocities, and the p -th natural mode of vibration. For radial waves in poroelastic cylinders, I have successfully decoupled the frequency equations for fast (α_1) and slow (α_2) P waves. These equations depend on the medium's physical properties, the frequency (ω), and the velocities of fast and slow P waves, simplifying the analysis of the natural frequencies and natural vibration modes associated with radial waves.

Keywords: wave propagation; porous media; torsional waves; radial waves; poroelasticity theory.

A Karolina...

Tu presencia y apoyo incondicional han sido la luz que iluminó cada paso de esta travesía académica. Gracias por inspirarme a ser mejor cada día. La mejor noticia del 2023 me la diste tú.

A mi familia...

El amor de una familia es el refugio donde encontramos el apoyo incondicional que nos impulsa a crecer y enfrentar cada desafío.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a la Dra. Selene Solorza Calderón por su tiempo, paciencia y dedicación con el que me asesoró para realizar este trabajo de tesis. Su manera de trabajar es admirable y su amor por entender la naturaleza de las cosas es contagiosa.

A mis sinodales Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar, Dr. Carlos Yee Romero, Dr. Ramón Carrillo Bastos, Dr. Antonio González Fernández y Dr. Jonás de Dios De Basabe Delgado por su tiempo, sugerencias, correcciones y aportaciones para mejorar este trabajo de tesis. También deseo agradecer al Dr. Jesús Lerma Aragón, coordinador del posgrado en la Facultad de Ciencias por todo su apoyo en este proceso académico.

Al Dr. Jonás D. De Basabe por invitarme a conocer el laboratorio de física de rocas del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) y a Rubén Rioyos Romero (analista y encargado de laboratorio) por recibirme y explicarme el proceso para el análisis de las muestras de rocas.

A mis padres y hermanos por todo el amor, apoyo y cuidado que me han brindado a lo largo de mi vida. Gracias por estar siempre a mi lado.

A Karolina y su maravillosa familia, incluyendo a Maxi, por permitirme ser parte de sus vidas. Su forma de pensar y ver la vida es increíble.

Agradezco atentamente al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT) por el apoyo económico que me fue otorgado a través de una beca de doctorado con No. de CVU 706920 (2019-2023) para la realización de mis estudios. A la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) por el apoyo brindado mediante el proyecto interno con número 400/3613.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	ix
I. INTRODUCCIÓN	1
I.1 Antecedentes	3
I.2 Justificación	9
I.3 Preguntas de investigación	10
I.3.1 Preguntas secundarias	10
I.4 Hipótesis de investigación	11
I.5 Objetivos	11
I.5.1 Objetivo general	11
I.5.2 Objetivos específicos	11
I.6 Contenido de la tesis	12
II. ECUACIONES DE POROELASTICIDAD	14
II.1 Teoría de Biot	16
II.2 Teoría de Biot de viscosidad extendida	17
II.3 Las ecuaciones de poroelasticidad en su forma matricial	20
II.3.1 Las ecuaciones de la TBVE	20
II.3.2 Las ecuaciones de la TB	21
II.4 Ecuaciones de poroelasticidad de TBVE en coordenadas cilíndricas	22
III. MODO TORSIONAL DE VIBRACIÓN	25
III.1 Planteamiento del problema	25
III.2 La solución general	27
III.2.1 Las ecuaciones de frecuencias	29
III.2.2 Expresiones analíticas para calcular las raíces de la ecuación de frecuencias	33
III.3 La velocidad de fase y atenuación de la onda torsional rápida	36
III.4 La velocidad de fase y atenuación de la onda torsional lenta	39

Contenido (continuación)

	Página
IV. SIMULACIONES COMPUTACIONALES: ONDAS TORSIONALES	41
IV.1 Simulaciones computacionales	41
IV.2 Discusión de los resultados	50
V. MODO RADIAL DE VIBRACIÓN	53
V.1 La solución general	55
V.2 Las ecuaciones de frecuencias	58
V.3 La velocidad de fase y atenuación de la onda radial rápida	64
V.4 La velocidad de fase y atenuación de la onda radial lenta	66
V.5 Frecuencias naturales de las ondas radiales	66
VI. SIMULACIONES COMPUTACIONALES: ONDAS RADIALES	69
VI.1 Simulaciones computacionales	69
VI.2 Discusión de los resultados	74
VII. CONCLUSIONES	78
VII.1 Ondas torsionales	78
VII.2 Ondas radiales	80
VII.3 Trabajo a futuro	82
A. Parámetros de las ecuaciones de Biot de viscosidad extendida	84
B. Velocidad de fase y atenuación torsional utilizando la teoría de Biot	87
C. Raíces de las funciones Bessel J_n y Y_n	91
C.1 Raíces de $J_n(x)$	91
C.2 Raíces de $Y_n(x)$	95
C.3 Raíces de la función Bessel completa	96
D. Laboratorio de propiedades físicas de rocas (CICESE)	98

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Sistema de coordenadas cilíndricas en un anillo cilíndrico poroelástico. .	23
2	Sistema de coordenadas cilíndricas y esfuerzos en un anillo cilíndrico poroelástico.	26
3	Bosquejo de la superposición de los modos naturales de vibración. Recuperado de [1].	43
4	Velocidad de fase y atenuación de las ondas torsionales rápidas en anillos cilíndricos poroelásticos de arenisca completamente saturado con queroseno. El radio interior y exterior del anillo cilíndrico se toman como $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.1$ m. Las curvas azules continuas, las curvas rojas a trazos y las curvas verdes a puntos muestran el primer, segundo y tercer modo de vibración, respectivamente.	45
5	Velocidad de fase y atenuación de las ondas torsionales rápidas en anillos cilíndricos poroelásticos de arenisca completamente saturado con queroseno. El radio interior y exterior del anillo cilíndrico se toman como $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.1$ m. Las curvas azules continuas, las curvas rojas a trazos y las curvas verdes a puntos muestran el primer, segundo y tercer modo de vibración, respectivamente.	47
6	Velocidad de fase de las ondas torsionales rápidas en anillos cilíndricos poroelásticos de arenisca. (a) muestras saturadas con queroseno; (b) muestras saturadas con agua. Las curvas negras continuas representan un anillo cilíndrico delgado, $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.03$ m; las curvas azules a trazos representan un anillo cilíndrico grueso, $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.1$ m; las curvas rojas a puntos representan un cilindro de radio $R = 0.01$; las curvas cian a trazos representan un cilindro de radio $R = 0.1$ m. . .	48
7	Velocidad de fase de las ondas torsionales lentas para anillos cilíndricos de arenisca. (a) corresponden a las muestras completamente saturadas con queroseno. (b) corresponden a las muestras saturadas con agua. Las curvas azules a puntos, las curvas rojas a puntos y las curvas verdes a puntos (curvas sobrepuestas) muestran el primer, el segundo y el tercer modo de vibración, respectivamente.	49
8	Sistema de referencia de coordenadas y los tensores de esfuerzos en un cilindro con simetría axial en el corte $z = constante$	54

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
9	Frecuencias naturales para la onda P rápida y P lenta sobre un cilindro poroelástico de arenisca completamente saturado con queroseno (figuras de la izquierda) y con agua (figuras de la derecha). Las curvas azules, negras, rojas y verdes muestran el primer, segundo, tercer y cuarto modo natural de vibración, respectivamente.	71
10	Frecuencias naturales para la ondas P rápida y P lenta sobre un cilindro poroelástico de arenisca completamente saturado con queroseno (figuras de la izquierda) y con agua (figuras de la derecha). Las curvas azules, cyan, magenta y amarillas muestran el 10 %, 20 %, 30 % y 40 % de porosidad, respectivamente.	72
11	Frecuencias naturales para la onda P rápida y P lenta sobre un cilindro poroelástico de arenisca completamente saturado con queroseno (figuras de la izquierda) y con agua (figuras de la derecha). Las curvas azules, cyan, magenta y amarillas muestran el 10 %, 20 %, 30 % y 40 % de porosidad, respectivamente.	73
12	Sistema RTR-2000 de GCTS para pruebas triaxiales en rocas de CICESE. Fotografías tomadas en Ensenada, B.C., mayo del 2022. . . .	99

Lista de Tablas

Tabla	Página
I Parámetros de la matriz sólida usados en las simulaciones computacionales, conforme al sistema internacional de unidades (SI).	42
II Parámetros del fluido usados en las simulaciones computacionales, conforme al sistema internacional de unidades (SI).	42

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

La teoría de poroelasticidad es una rama de la mecánica que se enfoca en el comportamiento mecánico de materiales porosos saturados de fluidos [2, 3]. Estos materiales, comúnmente encontrados en la naturaleza como en el suelo, las rocas y materiales biológicos, exhiben un comportamiento complejo debido a la interacción entre los sólidos y los fluidos presentes en sus poros. La comprensión de esta interacción es esencial para abordar una amplia gama de aplicaciones en campos como la ingeniería civil, la geofísica, la biomedicina y la industria de la energía [4]. Por ejemplo, en ingeniería se ha utilizado para construir estructuras que ayuden a disipar las ondas de sonido y las vibraciones en pipas, ductos, estructuras de automóviles y aeronaves, lanzamientos espaciales, cascos de barcos, submarinos y construcciones de edificios, entre otros [5]. En medicina, la teoría de poroelasticidad ha sido utilizada para detectar de manera no invasiva posibles enfermedades como el cáncer de hueso, midiendo la cantidad de minerales, la cantidad de colágeno y otros nutrientes por medio de ondas de ultrasonido [6]. En el estudio de rocas, se ha utilizado para determinar propiedades de rocas que ayudan a obtener información de la litología, porosidad, fluido contenido y otras características del medio [7].

En la teoría de poroelasticidad se consideran dos componentes principales: los sólidos deformables y los fluidos contenidos en los poros interconectados de la matriz sólida. Algunas de las propiedades físicas más importantes de un medio poroelástico se enlistan a continuación [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]:

Módulo de volumen (K_s). Es la relación entre la variación de volumen del medio y la variación de la presión hidrostática. Este parámetro está influenciado por la porosidad y la elasticidad del medio, y se utiliza para describir la compresibilidad del medio.

Módulo de cizalla (μ_0). Es la relación entre el esfuerzo cortante aplicado al medio y la deformación resultante. Este parámetro se utiliza para describir la rigidez del medio, y está influenciado por la elasticidad del esqueleto sólido.

Permeabilidad (K). Es la capacidad del fluido para fluir a través del medio poroso. Este parámetro está influenciado por la porosidad del medio y la viscosidad del fluido.

Porosidad (η_0). Es la fracción del volumen del medio que está compuesta por poros. Este parámetro se utiliza para describir la cantidad de espacio vacío disponible en el medio poroso, y está influenciado por la geometría y la distribución de los poros en el medio.

Densidad ρ_s . Es la masa del medio por unidad de volumen. Este parámetro está influenciado por la densidad del esqueleto sólido y la densidad del fluido que llena los poros.

Tortuosidad (S). En un medio poroso, la tortuosidad se refiere a la cantidad de desvío que experimenta el fluido al moverse a través de los poros de este medio. Cuanto más desviado sea el camino del flujo a través del medio poroso, mayor será su tortuosidad.

Antes de llevar a cabo experimentos de laboratorio, es más eficiente y económico realizar simulaciones computacionales para comprender cómo las propiedades mecánicas influyen en los resultados experimentales. Un ejemplo relevante se encuentra en la

medicina, donde la teoría de poroelasticidad se emplea para detectar enfermedades de manera no invasiva, como la osteoporosis o el cáncer de hueso. Esto se logra midiendo parámetros como la porosidad (η_0) y su relación con los minerales presentes en los huesos, así como la cantidad de colágeno y otros nutrientes, utilizando la velocidad y la atenuación de ondas ultrasónicas [6].

La teoría de poroelasticidad es una herramienta poderosa para comprender el comportamiento mecánico de materiales porosos y sus interacciones con fluidos. Debido a que su aplicabilidad abarca una amplia gama de campos del conocimiento, la comprensión de esta teoría es fundamental para abordar desafíos técnicos en diversas áreas, impulsando el progreso en la ciencia y la tecnología. Contar con modelos o ecuaciones que describan el comportamiento mecánico de fenómenos físicos nos permite aprovechar los avances tecnológicos para una mejor comprensión y una resolución eficiente de distintos problemas en diversas ramas del conocimiento.

I.1 Antecedentes

La teoría de poroelasticidad fue formalizada y presentada por primera vez por Biot en la década de los cincuenta. En sus trabajos de 1956 [2, 3] abordó el problema de la propagación de ondas en rocas porosas completamente saturadas con agua, desarrollando las ecuaciones que describen el comportamiento de los esfuerzos y las deformaciones de un medio poroelástico completamente saturado con un fluido. Estos trabajos sentaron las bases para la comprensión de cómo la presión y el flujo de fluidos en los poros pueden influir en las propiedades mecánicas de los materiales porosos, como su deformación y respuesta a las cargas. A esta teoría se le conoce como la teoría de poroelasticidad de Biot o simplemente como la teoría de Biot (TB).

En un principio la TB se desarrolló con el propósito de estudiar problemas de propagación de ondas en sólidos elásticos porosos, es decir, aquellos que contienen un fluido viscoso compresible, como el caso de rocas saturadas con agua [2, 3]. Posteriormente, esta teoría se empezó a utilizar en problemas relativos al estudio de la dinámica de rocas (para describir la dispersión y atenuación de las ondas sísmicas) [13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28], vibraciones y sonidos acústicos [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36], modelos médicos [37, 38, 39, 40], mecánica estructural [5, 41], entre otros. Aunque la TB ha sido verificada por varios experimentos de laboratorio [18, 42, 43, 44, 45] al comprobar la existencia de las tres ondas predichas por esta teoría: las ondas P rápida y lenta que son ondas compresionales u ondas primarias, y la onda S rápida que es una onda de cizallamiento u onda secundaria, para un rango de frecuencias por debajo de los 10 kHz [1]. Sin embargo, la TB presenta discrepancias entre las curvas de atenuación de los datos experimentales y el modelo teórico en frecuencias ultrasónicas [25, 32]. Para reducir esta discrepancia, se incorporó en las ecuaciones de movimiento de Biot un término de deformación en el fluido que genera naturalmente la presencia de la onda S lenta, estudiada por Sahay [25]. Esta nueva teoría se conoce como la teoría Biot de viscosidad añadida o teoría de Biot de viscosidad extendida (TBVE). Con ella se reduce el error entre el modelo teórico y los datos experimentales en el rango de frecuencias ultrasónicas y se recuperan las predicciones hechas por la TB en bajas frecuencias. La TBVE consta de dos ondas rápidas (P y S) y dos ondas lentas (P y S). Además, en lugar de considerar los movimientos sólidos y de fluidos como lo hace la TB, se considera el centro de masa y el campo interno como vectores de desplazamiento. La TBVE no sólo considera el movimiento diferencial del fluido en relación con el marco sólido como un mecanismo de pérdida como en la TB, sino que también considera los mecanismos de pérdida de viscosidad volumétrica y de corte del fluido dentro de los poros [24, 25]. En el siguiente

capítulo se muestran las principales diferencias entre la TB y la TBVE.

En años recientes, se ha utilizado la TB y la TBVE para estudiar la propagación de ondas torsionales y ondas radiales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos con una gran variedad de aplicaciones. Por ejemplo, el diseño de turbinas, ejes de transmisión de automóviles, rotores de turbogeneradores, ejes de bombas [46, 47, 48], tuberías y ductos para transportar hidrocarburos [49, 50, 51, 52], así como materiales para reducir el ruido y vibraciones de aviones. También para modelar la propagación de ondas superficiales con el propósito de caracterizar depósitos de agua e hidrocarburos [18, 23, 28, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61]. Esta teoría ha sido aplicada también para desarrollar materiales y estructuras compuestas, como los nano-puentes, nano-tubos, nano-platos, nano-cables y nanosensores, con propiedades deseables como lo son una alta resistencia, ligereza, dureza y sencilla fabricación [17, 34, 35, 62, 63, 64]. A su vez, se ha utilizado para detectar enfermedades de manera no invasiva, como el cáncer de hueso al relacionar las propiedades fisiológicas del hueso y cómo estas afectan a la propagación de las ondas [6, 39, 65, 66, 67], o en el diagnóstico de enfermedades como la hipertensión, al medir la propagación y atenuación de las ondas y su relación con la resistencia de las paredes arteriales y compararlas con los resultados de la frecuencia cardíaca [40]. Así mismo, para detectar lesiones traumáticas cerebrales al medir la respuesta de la propagación de ondas en los microtúbulos de los axones [68, 69, 70, 71, 72, 73]. De igual manera, se han realizado simulaciones computacionales para investigar cómo las vibraciones excesivas conducen a la fatiga y a los daños mecánicos de las estructuras, lo que reduce la eficiencia [74, 75, 76, 77]. Los resultados de este tipo de estudios han sido usados para diseñar ejes de transmisión de automóviles, que requieren una mayor fuerza para satisfacer diversos requerimientos, como la máxima carga axial para evitar deformaciones y baja capacidad [48]. Este tipo de diseños requiere crear nuevos materiales que nos ayuden a atenuar vibraciones o el sonido para mejorar las propiedades mecánicas, como lo son

los materiales funcionalmente graduados (FGM por sus siglas en inglés) [17, 35, 78, 79].

Debido a la amplia gama de aplicaciones de la TB y la TBVE, se han realizado diversas investigaciones para entender la propagación de ondas torsionales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos [46, 47, 80, 81, 82, 83, 84, 85]. Por ejemplo, basado en la TB, en 1980, Tajuddin y Sarma obtienen expresiones para la velocidad de fase y atenuación para los modos de vibración axial en cilindros poroelásticos simétricos e infinitos bajo condiciones de frontera libres de esfuerzos [86]. Las ecuaciones están en términos de los parámetros de Biot, la velocidad de la onda S rápida, y los modos de vibración. En 2004 y en 2009, Solorza-Calderón y Sahay [13, 14] presentaron un estudio de las vibraciones torsionales y longitudinales en cilindros poroelásticos de arenisca completamente saturados con agua y queroseno, considerando condiciones de frontera libre de esfuerzos mediante la TBVE. Utilizando desarrollos asintóticos, lograron obtener expresiones analíticas para la velocidad de fase y la atenuación en términos de las propiedades del medio, las ondas rápidas y lentas (P y S), y la frecuencia para diferentes rangos de frecuencia. La metodología desarrollada permitió obtener los intervalos que describen el comportamiento por rangos de frecuencia y, a partir de ellas, extraer las propiedades dominantes del medio para cada caso (cilindro de arenisca completamente saturado con agua y con queroseno). En estos trabajos, se destacaron las propiedades dominantes del material, como la permeabilidad y las propiedades del fluido, que controlan la atenuación de las ondas. Pocos años después Tajuddin y Shah [87], utilizando la TB en lugar de la TBVE, presentaron un análisis de los modos naturales de vibración de anillos cilíndricos delgados y gruesos con condiciones de frontera libre de esfuerzos. En este trabajo obtuvieron una sola ecuación de frecuencias, la ecuación asociada a la onda S rápida. Sin embargo, es importante resaltar que al utilizar la TB y no la TBVE, no consideraron la aportación de la onda S lenta en la propagación de la onda S rápida. Por esto, la limitante más importante de

los resultados obtenidos en su trabajo, es que no son válidos en todo el espectro de frecuencias, en particular, para frecuencias ultrasónicas. Recientemente, usando la TBVE, Perati y Gurijala [4] estudiaron el modo torsional de vibración de anillos cilíndricos poroelásticos huecos con condiciones libres en ambas fronteras. Sin embargo, ellos decidieron resolver numéricamente el problema por el método de la bisección y encontraron la solución para un rango de frecuencias muy restringido, $[0.0001, 0.0009]$ Hz. Al resolver numéricamente el problema, no pueden obtener fórmulas explícitas para los modos naturales de vibración, para la velocidad de fase o la atenuación donde se vinculen explícitamente la velocidad de fase y la atenuación torsional con la velocidad de la onda S , las propiedades del medio y la frecuencia. Por otro lado, también resulta complejo identificar con precisión los modos torsionales que contribuyen de manera significativa al comportamiento de la onda. Es relevante señalar que en la literatura existen otros trabajos que han abordado la resolución numérica de la ecuación de frecuencia para ondas torsionales y radiales, sin lograr obtener expresiones precisas para los modos naturales de vibración o sus frecuencias correspondientes, tal como se evidencia en estudios previos [4, 65, 66, 67, 87, 88]. En contraste a estos trabajos, en 2021 Solorza-Calderón [15] abordó el problema de propagación de ondas torsionales en cilindros poroelásticos con condiciones libres en la frontera usando la TBVE. En este estudio, Solorza-Calderón obtiene ecuaciones para la velocidad de fase y la atenuación en frecuencias subsónicas, sónicas y ultrasónicas, en función de la onda S rápida, onda S lenta, la frecuencia, el espesor del cilindro, las propiedades del medio y el modo de vibración torsional explícito como parámetro, logrando resolver analíticamente y en un rango amplio de frecuencias. En ese trabajo, demostró que, aunque la onda torsional lenta no se propaga en el caso del cilindro, sí afecta la propagación de la onda torsional rápida. Es decir, la onda torsional rápida se propaga más lento al utilizar la TBVE comparado con la TB.

Este trabajo tiene como objetivo general obtener expresiones explícitas para los modos naturales de vibración para el caso torsional y el caso radial de cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos, con simetría axial, homogéneos, isótropos, que estén completamente saturados con un fluido considerando condiciones de frontera libre de esfuerzo en ambas fronteras (interior y exterior), utilizando el marco teórico de la TBVE. Al utilizar las ecuaciones de la TBVE, se incluye de manera natural la onda S lenta, por lo que se obtienen dos ecuaciones de frecuencias para las ondas S y dos ecuaciones de frecuencias para las ondas P . Dos de las ecuaciones están gobernadas por la velocidad de la onda P y S lenta, respectivamente, y las otras dos, por la velocidad de la onda P y S rápida, respectivamente. En este trabajo, se presenta una metodología para obtener las cuatro ecuaciones de frecuencias de manera explícita. Al resolver dichas ecuaciones, se pueden determinar las frecuencias naturales de los modos de vibración y estas frecuencias se pueden utilizar para obtener las fórmulas analíticas para la velocidad de fase y atenuación de las ondas torsionales y radiales, de cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos, explícitamente en términos de las propiedades del medio, las velocidades de las ondas rápidas y lentas, y el parámetro explícito del modo natural de vibración. Para el caso de las ondas S , las ecuaciones de frecuencia se resuelven analíticamente, en contraste con los trabajos de Perati y Gurijala que lo abordan de manera numérica [4]. La complejidad de obtener una solución analítica de las ecuaciones de frecuencias, se debe a que están en términos de las funciones Bessel de segundo orden de primer y segundo tipo, para el caso de un anillo cilíndrico. Para el caso de un cilindro, las ecuaciones de frecuencias están en términos de las funciones Bessel de primer tipo de orden uno y orden cero. En general, las ecuaciones analíticas nos permiten entender cómo las propiedades mecánicas de los materiales poroelásticos afectan la propagación y cómo se puede utilizar esa información para construir estructuras que satisfagan requerimientos deseados, tales como la resistencia, dureza, ligereza y fácil fabricación.

I.2 Justificación

A pesar de que la TB ha sido ampliamente aceptada en la comunidad científica para el estudio de la propagación de ondas en medios poroelásticos, su capacidad para predecir la propagación de ondas en frecuencias ultrasónicas presenta desafíos. En respuesta a esta limitación, surge la TBVE, diseñada específicamente para abordar esta discrepancia entre las predicciones teóricas y las mediciones en los experimentos de laboratorio pensando en el contexto de medios poroelásticos.

En este campo del conocimiento aún existen importantes oportunidades para contribuir mediante investigaciones teóricas. En este sentido, el presente trabajo se enfoca en obtener expresiones analíticas para las velocidades de fase, la atenuación y las frecuencias naturales para las ondas torsionales y radiales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos con condiciones de frontera libre de esfuerzo. Estas expresiones están en términos de las propiedades físicas del medio, como la rigidez de la matriz sólida, la porosidad, la permeabilidad, la viscosidad del fluido, la densidad del sólido, así como la velocidad de las ondas P y S , y el parámetro explícito del modo natural de vibración.

El interés en comprender cómo se propagan las ondas en medios poroelásticos es enorme debido a su potencial de aplicación en diversas áreas del conocimiento. Por ejemplo en la medicina, permite cuantificar las propiedades poroelásticas de los huesos en función de los minerales, la porosidad, el colágeno y otros nutrientes [6]. En la industria del petróleo, al estudiar la física que controla la atenuación sísmica en las rocas sedimentarias, ya que aún no se ha comprendido por completo [23]. Finalmente en la industria automotriz, aeronáutica y de construcción, al estudiar la atenuación de las vibraciones y las ondas de sonido [89], entre otros.

I.3 Preguntas de investigación

Utilizando el marco teórico de la TBVE, ¿cuáles son las expresiones analíticas, en términos de las propiedades del medio, que gobiernan el comportamiento de los modos de vibración torsional y radial en anillos cilíndricos poroelásticos saturados con un fluido y con frontera libre de esfuerzo?

I.3.1 Preguntas secundarias

1. Partiendo de las ecuaciones de la TBVE, ¿se pueden determinar las ecuaciones de frecuencia para las ondas radiales y torsionales?
2. ¿Cuál es la metodología a seguir para obtener las ecuaciones de frecuencias de manera explícita para las ondas radiales y torsionales?
2. ¿Cuál es la metodología a seguir para obtener la solución de las ecuaciones de frecuencias y cuál es su rango de validez en el caso de la propagación de las ondas radiales y torsionales?
3. ¿Cuáles son las expresiones analíticas explícitas de las velocidades de fase y las atenuaciones para el modo radial y el modo torsional de vibración en función de las propiedades del medio?
4. ¿Se pueden determinar cuáles son las propiedades del medio que gobiernan la propagación de las ondas radiales y torsionales?

I.4 Hipótesis de investigación

Con base en la TBVE, se pueden determinar expresiones analíticas que describan el comportamiento de ondas radiales y torsionales, en cilindros y anillos cilíndricos

poroelásticos con condiciones de frontera libre de esfuerzos. Esto se puede realizar mediante la solución de las ecuaciones de frecuencia que surgen de aplicar las condiciones de frontera libre de esfuerzo al sistema. Además, las expresiones analíticas se pueden obtener en términos de la frecuencia, las propiedades del medio y las velocidades de las ondas P y S , rápidas y lentas.

I.5 Objetivos

I.5.1 Objetivo general

Usando la TBVE, en este trabajo presenta una metodología para obtener expresiones analíticas para la velocidad de fase y atenuación de las ondas radiales y torsionales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos completamente saturados con un fluido, homogéneos, isótropos, axial simétricos con condiciones de frontera libre de esfuerzos en ambas superficies (interior y exterior). Dichas fórmulas estarán en términos de las propiedades físicas del medio como la porosidad, la permeabilidad, la densidad del sólido, la viscosidad del fluido, los módulos de corte del sólido y del fluido, entre otros, así como la frecuencia y las velocidades de las ondas rápidas y lentas.

I.5.2 Objetivos específicos

1. Partiendo de las ecuaciones de la TBVE, determinar las ecuaciones que gobiernan los movimientos radiales y torsionales.
2. Determinar la solución de las ecuaciones de la TBVE radial y torsional, y obtener las ecuaciones de frecuencia para las ondas radiales y torsionales utilizando las condiciones de frontera libre de esfuerzos.

3. Determinar la solución analítica de las ecuaciones de frecuencias y calcular su rango de validez en el caso de la propagación de las ondas radiales y torsionales.
4. Obtener las fórmulas explícitas de las velocidades de fase y las atenuaciones para los modos de vibración radial y torsional en función de las propiedades del medio. Determinar cuáles de estas propiedades son las que gobiernan la propagación de las ondas.

I.6 Contenido de la tesis

En el capítulo I, se introduce el tema de la poroelasticidad y se destaca su relevancia en diversas aplicaciones. Además, se examinan trabajos previos que han contribuido a la formulación de la TB y cómo esta teoría conduce a la derivación de la TBVE. Además, se aborda la justificación detrás de la investigación y presenta las hipótesis que guían el estudio.

En el capítulo II se presentan las ecuaciones de poroelasticidad de la TB y de la TBVE y se comparan las ecuaciones de ambas teorías. Las ecuaciones de ambas teorías se presentan en su forma matricial y las ecuaciones de la TBVE se presentan explícitamente en coordenadas cilíndricas.

En el capítulo III se presenta una metodología detallada para obtener expresiones analíticas de la velocidad de fase y la atenuación de las ondas torsionales en anillos cilíndricos poroelásticos infinitos, isótropos, con simetría axial y condiciones de frontera libres de esfuerzos. La metodología parte del enfoque de la TBVE y utiliza las ecuaciones en coordenadas cilíndricas, obtenidas en el capítulo II.

En el capítulo IV se usa la metodología desarrollada en el capítulo III para realizar simulaciones computacionales para el análisis del comportamiento de la propagación de las ondas torsionales, a través de la velocidad de fase y atenuación en anillos cilíndricos

poroelásticos de arenisca completamente saturados con agua o queroseno, usando el marco teórico de la TBVE. Además, se presentan comparaciones entre los resultados obtenidos con la TBVE y la TB.

En el capítulo V se presenta una metodología detallada para obtener expresiones analíticas para las frecuencias naturales de las ondas radiales en cilindros poroelásticos infinitos, isótropos, con simetría axial y condiciones de frontera libre de esfuerzos. La metodología propuesta parte de las ecuaciones de la TBVE en coordenadas cilíndricas mostradas en el capítulo II. Las expresiones analíticas para las frecuencias naturales se presentan en términos de propiedades físicas del medio, como la porosidad, la permeabilidad, la densidad del sólido y el fluido, entre otros.

En el capítulo VI se realiza el análisis y estudio de las frecuencias naturales a través de simulaciones computacionales. Se consideran las propiedades físicas de cilindros poroelásticos de arenisca completamente saturados con agua o queroseno, utilizando las ecuaciones de la TBVE. La caracterización de las frecuencias naturales de las ondas radiales en cilindros poroelásticos representa un avance significativo y abre nuevas oportunidades de investigación y aplicaciones en diversos ámbitos.

En el capítulo VII se plantean las conclusiones generales de este trabajo de tesis y se presentan trabajos potenciales a considerar en un futuro.

Capítulo II

ECUACIONES DE POROELASTICIDAD

En la década de los cincuenta, Maurice Antony Biot propone la teoría de poroelasticidad de Biot con el objetivo de estudiar la propagación de ondas en rocas porosas completamente saturadas con agua [2, 3]. Esta teoría se desarrolló debido a que las ecuaciones de elasticidad no modelaban de manera exacta el comportamiento mecánico de la propagación de ondas en medios sólidos elásticos porosos saturados con fluidos. Por lo que Biot se dió a la tarea de proponer un nuevo marco teórico que utilizara las relaciones constitutivas adecuadas. Entre estas relaciones se encuentra la ley de Darcy (para describir el flujo del fluido), las leyes de Newton y la ley de Hooke (para modelar el desplazamiento de la matriz sólida y su interacción con el fluido). La interacción entre el fluido y el sólido es fundamental en el comportamiento mecánico de los materiales poroelásticos, ya que puede afectar la rigidez, la permeabilidad, la resistencia y la capacidad de deformación del medio [48, 79, 90]. Dado que los elementos que se utilizan en la actualidad no son completamente elásticos, sino poroelásticos, las ecuaciones de poroelasticidad se pueden emplear en una gran diversidad de áreas de la ciencia y la tecnología para ayudar a predecir su comportamiento mecánico de los materiales.

La teoría de poroelasticidad de Biot (TB) predice tres tipos de ondas: dos ondas compresionales u ondas P (la onda P rápida y P lenta) y una onda de cizalla u onda S (la onda S rápida) [2, 3]. Aunque varios experimentos han confirmado la existencia de estas tres ondas [18, 42, 43, 44, 45], la TB tiene problemas al describir la propagación

de ondas en un rango de frecuencias ultrasónico [18], ya que existe una discrepancia entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas [25]. Para corregir esta inconsistencia, de la Cruz y Spanos [91] modificaron en las relaciones constitutivas el término que describe la deformación del fluido. Además, Sahay [25] en lugar de considerar los movimientos del sólido y del fluido, como lo hace normalmente la TB, utiliza como vectores de desplazamiento el centro de masa y el campo interno. Esto da origen a la TBVE.

La TBVE no solo considera los mecanismos de difusión volumétricos de la matriz sólida y el fluido, como también lo hace la TB, sino que además considera los mecanismos de difusión en las fronteras de los poros [24, 25]. En la TBVE se tienen las tres ondas predichas por la TB y contiene una segunda onda de cizalla, la onda S lenta. Esta onda, a pesar de que se disipa en cuánto se crea y no se puede medir fácilmente mediante experimentos de laboratorio, afecta la propagación del resto de las ondas [25], por lo que juega un papel importante en la propagación de ondas en medios poroelásticos. Por lo tanto, en este trabajo de tesis se utilizará el marco teórico de la TBVE en lugar de la TB, ya que permite una descripción más completa de la propagación de ondas en medios poroelásticos en un amplio rango de frecuencias.

A continuación se presenta un resumen y una comparación de las ecuaciones de la teoría de Biot y de la teoría de Biot de viscosidad extendida para un medio poroelástico homogéneo, isótropo y con simetría axial.

II.1 Teoría de Biot

La teoría de Biot asume que el desplazamiento promedio de la matriz sólida, $\mathbf{u}_j^s \equiv \mathbf{u}_j^s(x, y, z, t)$, y del fluido, $\mathbf{u}_j^f \equiv \mathbf{u}_j^f(x, y, z, t)$, se modela en escala macroscópica por las siguientes ecuaciones de movimiento [2, 3]

$$\phi_0 \rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j^s}{\partial t^2} = \boldsymbol{\tau}_{jk,k}^s + \mathbf{I}_j, \quad (1)$$

$$\eta_0 \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j^f}{\partial t^2} = \boldsymbol{\tau}_{jk,k}^f - \mathbf{I}_j, \quad (2)$$

donde ρ_s y ρ_f son la densidad del sólido y del fluido, respectivamente; η_0 es la porosidad sin perturbar; $\phi_0 = 1 - \eta_0$ es la fracción de volumen de la fase sólida sin perturbar; $\boldsymbol{\tau}_{jk}^s$ y $\boldsymbol{\tau}_{jk}^f$ son los tensores de esfuerzo de la matriz sólida y del fluido, los cuales están dados en [14, 15, 16, 25] y descritos por

$$\boldsymbol{\tau}_{jk}^s = K_0 \mathbf{u}_{\parallel}^s \delta_{jk} + 2\mu_0 \check{\mathbf{u}}_{jk}^s - (\alpha_K - \eta_0) p^f \delta_{jk}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{jk}^f = -\eta_0 p^f \delta_{jk}, \quad (4)$$

K_0 , μ_0 son el módulo volumétrico y de cizalla, respectivamente; α_K es el coeficiente volumétrico de Biot; $p^f = -M(\alpha \mathbf{u}_{\parallel}^s - \zeta)$ es la presión promedio del fluido; $M = \left(\frac{\eta_0}{K_f} + \frac{\alpha_K - \eta_0}{K_s}\right)^{-1}$ está relacionado con el módulo de compresibilidad del sólido K_s y del fluido K_f . El tensor de deformación del sólido es $\mathbf{u}_{jk}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{j,k}^s + \mathbf{u}_{k,j}^s)$, mientras que la parte del tensor de deformación sin tomar en cuenta la traza se denota por $\check{\mathbf{u}}_{jk}^s = \mathbf{u}_{jk}^s - \frac{1}{3} \mathbf{u}_{ll}^s \delta_{jk}$. La variable $\zeta = -\eta_0(\mathbf{u}_{\parallel}^f - \mathbf{u}_{\parallel}^s)$ describe el incremento del contenido del fluido. La fuerza de arrastre que las dos fases (sólido y fluido) ejercen entre sí, pero de manera opuesta, está dada por

$$\mathbf{I}_j = -\eta_0 \rho_f \Omega_b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_j^s - \mathbf{u}_j^f) + \rho_{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mathbf{u}_j^s - \mathbf{u}_j^f), \quad (5)$$

donde $\Omega_b = \eta_0 \nu_f / K$ es la frecuencia crítica de Biot, y ν_f es la viscosidad cinemática de cizallamiento del fluido en el poro; K es la permeabilidad; $\rho_{12} = -(S - 1)\eta_0 \rho_0^f$ es el coeficiente de masa inducida, y S es la tortuosidad del medio.

II.2 Teoría de Biot de viscosidad extendida

Además de considerar los efectos de pérdida de energía por medio de la interacción entre los movimientos del fluido con respecto a los movimientos del sólido como lo hace la teoría de Biot, la teoría de Biot de viscosidad extendida también considera los mecanismos de pérdida de viscosidad y de cizalla dentro de los poros.

A diferencia de la teoría de Biot, la TBVE incluye en las relaciones constitutivas el volumen del fluido dentro del poro ξ_f , el módulo de viscosidad de cizallamiento μ_f , y el parámetro $\alpha_\mu = 1 - \frac{\mu_0}{\mu_s}$ [25], por lo que el tensor de esfuerzos del fluido en la TBVE se reescribe como

$$\tau_{jk}^f = \underbrace{-\eta_0 p^f \delta_{jk} - \eta_0 \frac{\xi_f}{K_f} \frac{\partial}{\partial t} (p^f \delta_{jk}) + 2\mu_f \left\{ \eta_0 \frac{\partial \check{\mathbf{u}}_{jk}^f}{\partial t} + (\alpha_\mu - \eta_0) \frac{\partial \check{\mathbf{u}}_{jk}^s}{\partial t} \right\}}_{(6)}$$

En el caso límite, cuando se considera que el volumen del fluido ξ_f y el módulo de viscosidad de cizallamiento μ_f son cero, la TVBE se convierte en la teoría clásica de Biot [24, 25, 91]. Esto es, los términos subrayados en la ecuación (6) son cero. Al incluir los mecanismos de difusión gobernados por ξ_f y μ_f se da lugar a la formación de la onda S lenta, que aunque desaparece rápidamente, ignorarla equivale a omitir los mecanismos que absorben energía de todo el sistema y que afectan al resto de las ondas, las ondas P y S rápidas y la onda P lenta [25]. Para fines dinámicos, la TBVE reescribe el marco teórico de Biot en términos del centro de masa $\mathbf{u}^m = m_s \mathbf{u}^s + m_f \mathbf{u}^f$, y el campo interno, $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^s - \mathbf{u}^f$, que son la suma ponderada por la fracción de masa del sólido y del fluido, y la diferencia de los campos del desplazamiento del sólido, (\mathbf{u}_j^s), y el fluido, (\mathbf{u}_j^f), respectivamente. Los vectores de desplazamiento \mathbf{u}^m y \mathbf{u}^i se consideran debido a que los dispositivos utilizados para las lecturas sísmicas, como los geófonos, no pueden rastrear los campos de desplazamiento del sólido y del fluido por separado.

En cambio, lo que registran es el desplazamiento del movimiento del sólido y el fluido como una entidad conjunta, (\mathbf{u}^m) , y la disipación de la diferencia del movimiento entre la matriz sólida saturada con un fluido, representada como (\mathbf{u}^i) [92].

Al reescribir las ecuaciones de movimiento de la teoría de Biot de viscosidad extendida en términos del centro de masa y el campo interno, $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^i)^T$, las ecuaciones se pueden escribir como

$$\mathbf{I}\partial_t^2\mathbf{u}_j + \Omega_i\mathbf{I}_0\partial_t\mathbf{u}_j = \boldsymbol{\rho}^{-1}\boldsymbol{\tau}_{jk,k}, \quad (7)$$

donde

$$\mathbf{u}_j = (u_j^m, u_j^i)^T, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{jk} = (\mathbf{K} + \boldsymbol{\xi}\partial_t)\mathbf{u}_{ll}\delta_{jk} + 2(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu}\partial_t)\check{\mathbf{u}}_{jk}, \quad (9)$$

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{C}_\alpha - \frac{4}{3}\mathbf{C}_\beta\right), \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{N}_\alpha - \frac{4}{3}\mathbf{N}_\beta\right), \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\rho}\mathbf{C}_\beta, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\rho}\mathbf{N}_\beta, \quad (13)$$

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_0^m & 0 \\ 0 & \rho_0^i \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Las matrices de 2×2 $\mathbf{C}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{C}_\beta$, y \mathbf{N}_β se escriben explícitamente en términos de las

propiedades físicas del medio, esto es,

$$\mathbf{C}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & m_f \left(1 - \frac{\alpha_K \eta_0 M}{m_f H_c}\right) \\ d_f \left(1 - \frac{\alpha_K \eta_0 M}{m_f H_c}\right) & d_f \left(m_f + \left(1 - 2 \frac{\alpha_K m_f}{\eta_0}\right) \frac{\eta_0 \eta_0 M}{m_f H_c}\right) \end{pmatrix} \alpha_c^2, \quad (16)$$

$$\mathbf{N}_\alpha = \begin{pmatrix} \Upsilon & -(\eta_0 - m_f \Upsilon) \\ -d_s \Upsilon & d_s (\eta_0 - m_f \Upsilon) \end{pmatrix} \frac{\alpha_c^2}{\Omega_\alpha}, \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & m_f \\ d_f & d_f m_f \end{pmatrix} \beta_c^2, \quad (18)$$

$$\mathbf{N}_\beta = \begin{pmatrix} \alpha_\mu & -(\eta_0 - m_f \alpha_\mu) \\ -d_s \alpha_\mu & d_s (\eta_0 - m_f \alpha_\mu) \end{pmatrix} \frac{\beta_c^2}{\Omega_\beta}, \quad (19)$$

donde $m_s = \frac{\phi_0 \rho_0^s}{\rho_0^m}$ es la fracción de masa sólida y $m_f = \frac{\eta_0 \rho_0^f}{\rho_0^m}$ es la fracción de masa del fluido. La fracción de volumen de la fase sólida sin perturbar está dada por $\phi_0 = 1 - \eta_0$, donde η_0 es la porosidad sin perturbar. Además, $\rho_0^m = \phi_0 \rho_0^s + \eta_0 \rho_0^f$ es la densidad total, donde ρ_0^s es la densidad del sólido sin perturbar y ρ_0^f es la densidad del fluido. La frecuencia de relajación se define como $\Omega_i = \Omega_b d_f$, la frecuencia crítica de Biot es $\Omega_b = \frac{\eta_0 \nu^f}{K}$, con $d_f = \frac{\eta_0 \rho_0^f}{\rho_0^i}$, y la viscosidad de cizallamiento cinemático del fluido en el poro está dada por $\nu^f = \frac{\mu^f}{\rho_0^i}$; K es la permeabilidad; μ^f representa el módulo de viscosidad de cizallamiento del fluido en el poro; $\rho_0^i = \rho_0^r - \rho^{12} = (S - m^f) \eta_0 \rho_0^f$ es la densidad modificada reducida; S es la tortuosidad; $\rho^{12} = -(S - 1) \eta_0 \rho_0^f$ es el coeficiente de masa inducido; $\rho_0^r = \left(\frac{1}{\phi_0 \rho_0^s} + \frac{1}{\eta_0 \rho_0^f}\right)^{-1}$ es la densidad reducida.

Al reescribir el tensor de esfuerzo $\boldsymbol{\tau}_{jk}$ (9) en términos de \mathbf{C}_α , \mathbf{N}_α , \mathbf{C}_β , y \mathbf{N}_β , se tiene que [14, 15, 16, 25]

$$\boldsymbol{\tau}_{jk} = \boldsymbol{\rho} \left[\left\{ \left(\mathbf{C}_\alpha - \frac{4}{3} \mathbf{C}_\beta \right) + \left(\mathbf{N}_\alpha - \frac{4}{3} \mathbf{N}_\beta \right) \partial_t \right\} \mathbf{u}_{ll} \delta_{jk} + 2 \{ \mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t \} \check{\mathbf{u}}_{jk} \right]. \quad (20)$$

II.3 Las ecuaciones de poroelasticidad en su forma matricial

La forma matricial de las ecuaciones de la TB y de la TBVE son de gran importancia, ya que permiten una representación más concisa de la teoría de poroelasticidad. Al expresar las ecuaciones en su forma matricial, se puede analizar la relación o dependencia entre las propiedades físicas y observar cómo influyen en los distintos procesos de la propagación de las ondas. Además, la forma matricial facilita el estudio de las soluciones y la aplicación de diversas técnicas matemáticas.

II.3.1 Las ecuaciones de la TBVE

Al sustituir (20) en (7), se obtiene que las ecuaciones de movimiento de la TBVE están dadas matricialmente por [14, 16]

$$\mathbf{I}\partial_t^2\mathbf{u} + \Omega_i\mathbf{I}_0\partial_t\mathbf{u} = (\mathbf{C}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha\partial_t)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta\partial_t)\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}). \quad (21)$$

La matriz \mathbf{I} es la matriz identidad de 2×2 , mientras que las matrices \mathbf{I}_0 , \mathbf{C}_α , \mathbf{N}_α , \mathbf{C}_β , y \mathbf{N}_β están escritas en términos de las propiedades físicas del medio y están dadas explícitamente en la sección II.2. Las matrices \mathbf{C}_α y \mathbf{N}_α están relacionadas con los procesos compresionales y la velocidad de las ondas P , mientras que las matrices \mathbf{C}_β , y \mathbf{N}_β se relacionan con los procesos de cizallamiento y la velocidad de las ondas S . El vector de desplazamiento $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^i)^T$ se relaciona con los movimientos del sólido y el fluido por medio de la siguiente ecuación

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^m \\ \mathbf{u}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_s\mathbf{u}^s + m_f\mathbf{u}^f \\ \mathbf{u}^s - \mathbf{u}^f \end{pmatrix}, \quad (22)$$

es decir, el centro de masa \mathbf{u}^m considera los movimientos del sólido y el fluido como uno solo, mientras que el campo interno \mathbf{u}^i considera la diferencia de los movimientos

del sólido y del fluido.

II.3.2 Las ecuaciones de la TB

Las ecuaciones de movimiento de la TB también se pueden reescribir en forma matricial [2, 15] como

$$\boldsymbol{\rho}_B \partial_t^2 \mathbf{u} + \mathbf{B} \partial_t \mathbf{u} = \mathbf{C}_B \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{N}_B \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (23)$$

donde $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^f)$ y las matrices de 2×2 , $\boldsymbol{\rho}_B$, \mathbf{B} , \mathbf{C}_B y \mathbf{N}_B están escritas en términos de las propiedades físicas del medio explícitamente como

$$\boldsymbol{\rho}_B = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{C}_B = \begin{pmatrix} A + 2N & Q \\ Q & R \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\mathbf{N}_B = \begin{pmatrix} -N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

donde $A = (\phi_0 - \delta_s)K_s - \frac{2}{3} \left(\phi_0 - \frac{\delta_\mu}{\phi_0} \right) \mu_s$, $N = (\phi_0 + \delta_\mu) \mu_s$, $Q = \delta_f K_s = \delta_s K_f$, $R = (\eta_0 - \delta_f)K_f$, $b = \frac{\mu_f \eta_0^2}{K}$, $\rho_{11} = \phi_0 \rho_s - \rho_{12}$ y $\rho_{22} = \eta_0 \rho_f - \rho_{12}$ [15].

Al comparar las ecuaciones (21) y (23), se puede observar que la ecuación (21) es la generalización de (23), ya que cuenta con dos términos disipativos adicionales, los cuales están subrayados en (21) y son $\mathbf{N}_\alpha \partial_t$ y $\mathbf{N}_\beta \partial_t$. Además, es importante considerar que el enfoque del vector de desplazamiento es diferente para cada teoría, ya que la TBVE se enfoca en los desplazamientos del centro de masa y el campo interno, mientras que la TB se enfoca en los movimientos directos del sólido y del fluido.

II.4 Ecuaciones de poroelasticidad de TBVE en coordenadas cilíndricas

En este trabajo de tesis se analiza la propagación de ondas torsionales y radiales en cilindros y anillos cilíndricos de medios poroelásticos usando el marco teórico de la TBVE. Los cilindros y anillos cilíndricos son geometrías comunes en aplicaciones de ingeniería como tuberías, columnas de perforación y piezas de maquinaria, lo que hace que el estudio de la propagación de ondas en estas geometrías sea de gran interés práctico. El objetivo de este trabajo es ofrecer una metodología que permita seleccionar el modo de vibración y los parámetros físicos del medio para realizar simulaciones computacionales de la propagación de ondas. La utilización de la TB y la TBVE nos permite la posibilidad de comprender, a través de expresiones analíticas, cómo las propiedades del medio y su geometría afectan la propagación de las ondas. Esto incluye el estudio de la influencia de parámetros como la porosidad, la permeabilidad, la rigidez del sólido y la viscosidad del fluido en el comportamiento de las ondas. También permite una mejor comprensión de los procesos físicos y la optimización de las aplicaciones que involucren la propagación de ondas en medios poroelásticos. Debido a la geometría de los casos de estudio, figura 1, se utilizarán las ecuaciones de poroelasticidad de Biot de Viscosidad Extendida en coordenadas cilíndricas: (r, θ, z) .

Las ecuaciones de movimiento de la TBVE (21), expresadas en coordenadas cilíndricas, se escriben como

$$\mathbf{I}\partial_t^2 \mathbf{u}_r + \Omega_i \mathbf{I}_0 \partial_t \mathbf{u}_r = \boldsymbol{\rho}^{-1} \left[\boldsymbol{\tau}_{rz,z} + \boldsymbol{\tau}_{rr,r} + \frac{1}{r} \boldsymbol{\tau}_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (\boldsymbol{\tau}_{rr} - \boldsymbol{\tau}_{\theta\theta}) \right], \quad (28)$$

$$\mathbf{I}\partial_t^2 \mathbf{u}_\theta + \Omega_i \mathbf{I}_0 \partial_t \mathbf{u}_\theta = \boldsymbol{\rho}^{-1} \left[\boldsymbol{\tau}_{\theta z,z} + \boldsymbol{\tau}_{r\theta,r} + \frac{1}{r} \boldsymbol{\tau}_{\theta\theta,\theta} + \frac{2}{r} \boldsymbol{\tau}_{r\theta} \right], \quad (29)$$

$$\mathbf{I}\partial_t^2 \mathbf{u}_z + \Omega_i \mathbf{I}_0 \partial_t \mathbf{u}_z = \boldsymbol{\rho}^{-1} \left[\boldsymbol{\tau}_{zz,z} + \boldsymbol{\tau}_{rz,r} + \frac{1}{r} \boldsymbol{\tau}_{\theta z,\theta} + \frac{1}{r} \boldsymbol{\tau}_{rz} \right], \quad (30)$$

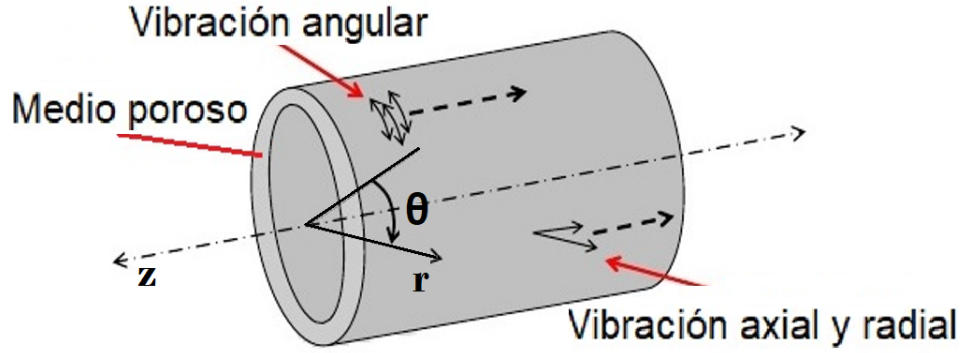


Figura 1: Sistema de coordenadas cilíndricas en un anillo cilíndrico poroelástico.

donde

$$\begin{aligned} \tau_{rr} = & \rho \left[\left\{ (\mathbf{C}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha \partial_t) - 2(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t) \right\} \left\{ \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{u}_\theta + \partial_z \mathbf{u}_z \right\} \right. \\ & \left. + 2 \left(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t \right) \partial_r \mathbf{u}_r \right], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zz} = & \rho \left[\left\{ (\mathbf{C}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha \partial_t) - 2(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t) \right\} \left\{ \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{u}_\theta + \partial_z \mathbf{u}_z \right\} \right. \\ & \left. + 2 \left(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t \right) \partial_z \mathbf{u}_z \right], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta} = & \rho \left[\left\{ (\mathbf{C}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha \partial_t) - 2(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t) \right\} \left\{ \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{u}_\theta + \partial_z \mathbf{u}_z \right\} \right. \\ & \left. + 2 \left(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t \right) \frac{1}{r} \left(\partial_\theta \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_r \right) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

$$\tau_{rz} = \rho \left[\left(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t \right) \left(\partial_z \mathbf{u}_r + \partial_r \mathbf{u}_z \right) \right], \quad (34)$$

$$\tau_{r\theta} = \rho \left[\left(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t \right) \left\{ \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{u}_r \right\} \right], \quad (35)$$

$$\tau_{\theta z} = \rho \left[\left(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t \right) \left(\frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{u}_z + \partial_z \mathbf{u}_\theta \right) \right]. \quad (36)$$

En el capítulo III se presenta una metodología detallada para obtener expresiones analíticas de la velocidad de fase y la atenuación de las ondas torsionales en anillos

cilíndricos poroelásticos infinitos, isótropos, con simetría axial y condiciones de frontera libres de esfuerzos. La metodología parte del enfoque de la TBVE y utiliza las ecuaciones en coordenadas cilíndricas, ecuaciones de la (28) a la (36). Esta metodología no sólo nos brinda una representación analítica extremadamente valiosa que relaciona y nos permite comprender cómo las propiedades del medio afectan directamente la propagación de las ondas, sino que también proporciona la base para el desarrollo de simulaciones computacionales. Dichas simulaciones computacionales tienen el potencial de reducir los tiempos necesarios para el diseño y la manipulación de experimentos de laboratorio. Las expresiones analíticas resultantes se presentan en términos de las propiedades físicas del medio, como la porosidad, la permeabilidad, la densidad del sólido, la viscosidad y el módulo de cizalla del fluido, entre otros. Además, aparece explícitamente el parámetro de frecuencias y con este enfoque también se puede seleccionar el n -ésimo modo de vibración. El objetivo final es que estos modelos teóricos reproduzcan cada vez mejor los fenómenos naturales y los procesos físicos.

Capítulo III

MODO TORSIONAL DE VIBRACIÓN

III.1 Planteamiento del problema

Considere un anillo cilíndrico poroelástico infinito con simetría axial que está completamente saturados con un fluido, donde r_1 y r_2 son el radio interior y exterior, por lo que $r_1 < r_2$ como se muestra en la figura 2. El modo de vibración torsional no presenta desplazamientos radiales ni axiales, $\mathbf{u}_r(r, \theta, z, t) = 0$ y $\mathbf{u}_z(r, \theta, z, t) = 0$, y como se tiene simetría axial el desplazamiento angular sólo depende de r , z y t , es decir $\mathbf{u}_\theta \equiv \mathbf{u}_\theta(r, z, t)$. Entonces, las ecuaciones de movimiento de la TBVE, ecuaciones (28) a (30) se simplifican como

$$\mathbf{I}\partial_t^2 \mathbf{u}_\theta + \Omega_i \mathbf{I}_0 \partial_t \mathbf{u}_\theta = \boldsymbol{\rho}^{-1} \left[\boldsymbol{\tau}_{\theta z, z} + \boldsymbol{\tau}_{r\theta, r} + \frac{2}{r} \boldsymbol{\tau}_{r\theta} \right], \quad (37)$$

y los tensores de esfuerzo (35) y (36) quedan como

$$\boldsymbol{\tau}_{r\theta} = \boldsymbol{\rho} \left(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t \right) \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) \mathbf{u}_\theta, \quad (38)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\theta z} = \boldsymbol{\rho} \left(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta \partial_t \right) \partial_z \mathbf{u}_\theta. \quad (39)$$

En el dominio de frecuencias, la ecuación (37) para el modo de vibración torsional es [15]

$$0 = \left[\boldsymbol{\beta} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) + \omega^2 \mathbf{I} \right] \mathbf{U}_\theta(r, z, \omega), \quad (40)$$

donde $\mathbf{U}_\theta \equiv \mathbf{U}_\theta(r, z, \omega) = \left(\mathbf{U}_\theta^m(r, z, \omega), \mathbf{U}_\theta^i(r, z, \omega) \right)$ es el vector de desplazamiento angular en el dominio de frecuencias, y

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \left(\mathbf{C}_\beta - i\omega \mathbf{N}_\beta \right), \quad (41)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I} + i \frac{\Omega_i}{\omega} \mathbf{I}_0, \quad (42)$$

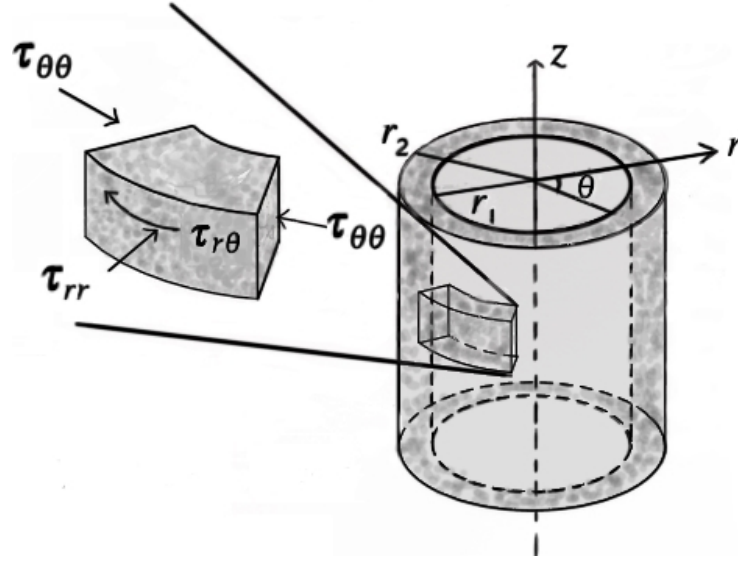


Figura 2: Sistema de coordenadas cilíndricas y esfuerzos en un anillo cilíndrico poroelástico.

con $i = \sqrt{-1}$ y Ω_i es la frecuencia de relajación de Biot. Las matrices de parámetros \mathbf{C}_β , \mathbf{N}_β , \mathbf{I} e \mathbf{I}_0 están dadas explícitamente en la sección II.2. El anillo cilíndrico está sujeto a condiciones libre de esfuerzo en ambas fronteras, esto es

$$\tau_{r\theta}|_{r=r_1} = 0, \quad (43)$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=r_2} = 0, \quad (44)$$

donde

$$\tau_{r\theta} \equiv \tau_{r\theta}(r, z, \omega) = \left(\tau_{r\theta}^m(r, z, \omega), \tau_{r\theta}^i(r, z, \omega) \right) = \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\beta} \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) \mathbf{U}_\theta, \quad (45)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 \\ 0 & \rho_i \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Para poder obtener las ecuaciones de frecuencias asociadas a los modos torsionales de vibración del anillo cilíndrico primero requerimos encontrar la solución de la ecuación (40).

III.2 La solución general

Para obtener la solución general, se propone el siguiente cambio de coordenadas para desacoplar el sistema de la ecuación (40),

$$\mathbf{U}_\theta(r, z, \omega) = \mathbf{R}_\beta \mathbf{U}(r, z, \omega) \equiv \mathbf{R}_\beta \mathbf{U}, \quad (47)$$

que cuando se reemplaza en (40) y se multiplica por \mathbf{L}_β^T por el lado izquierdo, se obtiene

$$0 = \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{\Lambda}_\beta \mathbf{U} + \omega^2 \mathbf{I} \mathbf{U}, \quad (48)$$

debido a que

$$\mathbf{L}_\beta^T \mathbf{\beta} \mathbf{R}_\beta = \mathbf{\Lambda}_\beta = \begin{bmatrix} \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_2^2 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

$$\mathbf{L}_\beta^T \mathbf{R}_\beta = \mathbf{I}. \quad (50)$$

Las expresiones explícitas de las matrices del cambio de base, \mathbf{R}_β y \mathbf{L}_β^T , están dadas por

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{\beta_1}}, & \frac{1}{N_{\beta_2}} \left(\frac{\beta^{\text{mi}}}{\beta_2^2 - \beta^{\text{mm}}} \right) \\ \frac{1}{N_{\beta_1}} \left(\frac{\beta_1^2 - \beta^{\text{mm}}}{\beta^{\text{mi}}} \right) & \frac{1}{N_{\beta_2}} \end{pmatrix}, \quad (51)$$

$$\mathbf{L}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{\beta_1}} & \frac{1}{N_{\beta_2}} \left(\frac{\beta_2^2 - \beta^{\text{ii}}}{\beta^{\text{mi}}} \right) \\ \frac{1}{N_{\beta_1}} \left(\frac{\beta^{\text{mi}}}{\beta_1^2 - \beta^{\text{ii}}} \right) & \frac{1}{N_{\beta_2}} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

con

$$N_{\beta_1} = \sqrt{\frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{\beta_1^2 - \beta^{\text{ii}}}}, \quad (53)$$

$$N_{\beta_2} = \sqrt{\frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{\beta^{\text{mm}} - \beta_2^2}}. \quad (54)$$

La solución general [93] de la ecuación (48) es

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 J_1(q_{\beta_1} r) + A_2 Y_1(q_{\beta_1} r) \\ A_3 J_1(q_{\beta_2} r) + A_4 Y_1(q_{\beta_2} r) \end{bmatrix} e^{ikz}, \quad (55)$$

donde A_1, A_2, A_3 y A_4 son constantes, k es el número de onda axial, y

$$q_{\beta_1}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_1^2} - k^2 \neq 0, \quad (56)$$

$$q_{\beta_2}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_2^2} - k^2 \neq 0, \quad (57)$$

donde β_1^2 y β_2^2 son los eigenvalores de la matriz $\boldsymbol{\beta}$ [14] de la ecuación (41), y representan la velocidad de la onda S rápida y lenta, respectivamente. Entonces

$$0 = \det \begin{pmatrix} \beta^{mm} - \beta^2 & \beta^{mi} \\ \beta^{im} & \beta^{ii} - \beta^2 \end{pmatrix} = (\beta^2)^2 - \text{traza}(\boldsymbol{\beta}) \cdot \beta^2 + \det(\boldsymbol{\beta}), \quad (58)$$

cuyas soluciones son

$$\beta_{1,2}^2 = \frac{\text{traza}(\boldsymbol{\beta}) \pm \sqrt{\text{traza}^2(\boldsymbol{\beta}) - 4\det(\boldsymbol{\beta})}}{2}, \quad (59)$$

donde

$$\text{traza}(\boldsymbol{\beta}) = T_{Re} \cdot \beta_c^2 - iT_{Im} \cdot \beta_c^2, \quad (60)$$

$$T_{Re} = 1 + \left(d_f m_f - \Omega_i \frac{d_s}{\Omega_\beta} (\eta_0 - m_f \alpha_\mu) \right) \frac{\omega^2}{\omega^2 + \Omega_i^2}, \quad (61)$$

$$T_{Im} = \frac{\alpha_\mu \omega + \Omega_i d_f m_f \frac{\omega}{\omega^2 + \Omega_i^2} + \frac{d_s}{\Omega_\beta} (\eta_0 - m_f \alpha_\mu) \frac{\omega^3}{\omega^2 + \Omega_i^2}}, \quad (62)$$

y

$$\det(\boldsymbol{\beta}) = D_{Re} \beta_c^4 + iD_{Im} \beta_c^4 \quad (63)$$

$$D_{Re} = -\Omega_i (d_s + d_f) \frac{\eta_0}{\Omega_\beta} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \Omega_i^2}, \quad (64)$$

$$D_{Im} = -(d_s + d_f) \frac{\eta_0}{\Omega_\beta} \frac{\omega^3}{\omega^2 + \Omega_i^2}. \quad (65)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \beta_{1,2}^2 &= \frac{\beta_c^2}{2} (T_{Re} - iT_{Im}) \pm \frac{\beta_c^2}{2} \left[T_{Re}^2 - T_{Im}^2 - 4D_{Re} - i2(T_{Re}T_{Im} + D_{Im}) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\beta_c^2}{2} (T_{Re} - iT_{Im}) \pm \frac{\beta_c^2}{2} \sqrt{\Delta}. \end{aligned} \quad (66)$$

Al usar el teorema de Moivre [94], se obtiene

$$\beta_{1,2}^2 = \frac{\beta_c^2}{2} (T_{Re} - iT_{Im}) \pm \frac{\beta_c^2}{2} |\Delta|^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (67)$$

donde

$$|\Delta|^2 = (T_{Re}^2 - T_{Im}^2 - 4D_{Re})^2 + 4(T_{Re}T_{Im} + 2D_{Im})^2, \quad (68)$$

$$\tan \theta = \frac{-2(T_{Re}T_{Im} + 2D_{Im})}{T_{Re}^2 - T_{Im}^2 - 4D_{Re}}, \quad (69)$$

por lo que

$$\beta_{1,2}^2 = \beta_{1,2}^{Re} \cdot \beta_c^2 - i\beta_{1,2}^{Im} \cdot \beta_c^2, \quad (70)$$

donde

$$\beta_{1,2}^{Re} = \frac{1}{2} \left(T_{Re} \pm |\Delta|^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \quad (71)$$

$$\beta_{1,2}^{Im} = \frac{1}{2} \left(T_{Im} \mp |\Delta|^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right). \quad (72)$$

Hasta este punto, se ha logrado obtener explícitamente la solución general para la propagación de las ondas torsionales (55). Sin embargo, para determinar con precisión la velocidad de fase y la atenuación de estas ondas, es necesario aplicar las condiciones de frontera libre de esfuerzos. Estas condiciones son necesarias para obtener las ecuaciones de frecuencias que a su vez, son fundamentales para relacionar las ondas torsionales y el entorno en el que se propagan, permitiendo una caracterización más completa de su comportamiento. Es decir, al imponer las condiciones de frontera libre de esfuerzos, podemos obtener información crucial sobre cómo se propagan y se disipan las ondas en el medio poroelástico.

III.2.1 Las ecuaciones de frecuencias

Las ecuaciones de frecuencias son esenciales para entender cómo se propagan las ondas en diferentes medios, ya que nos permiten establecer una relación entre la frecuencia

de las ondas y las propiedades físicas del medio en el que se propagan. No siempre es posible contar con las expresiones analíticas de las ecuaciones de frecuencias y en esos casos el problema se resuelve numéricamente, por lo que el modo torsional de vibración no es un parámetro explícito. En esta sección se desarrolla la metodología para obtener las expresiones analíticas de las ecuaciones de frecuencias. A partir de dichas ecuaciones se obtendrá la velocidad de fase y la atenuación de las ondas torsionales en términos del n -ésimo modo de vibración, la frecuencia y las propiedades físicas del medio.

Para obtener las ecuaciones de frecuencias, se aplicarán las condiciones de frontera libre de esfuerzo, ecuaciones (43) y (44), a la solución (55). Para aplicar las condiciones de frontera de manera directa, realizamos el cambio de coordenadas dado por (51) en el tensor de esfuerzos. Entonces, al sustituir (47) en (45), se obtiene que

$$\tau_{r\theta} = \rho\Omega\beta \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) \mathbf{R}_\beta \mathbf{U} = \mathbf{B} \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) \mathbf{U}, \quad (73)$$

donde

$$\mathbf{B} = \rho\Omega\beta \mathbf{R}_\beta \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Sustituyendo (55) en (73) se obtiene que

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^m = & - \left\{ A_1 b_{11} q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r) + A_2 b_{11} q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r) \right. \\ & \left. + A_3 b_{12} q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r) + A_4 b_{12} q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r) \right\} e^{ikz}, \\ \tau_{r\theta}^i = & - \left\{ A_1 b_{21} q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r) + A_2 b_{21} q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r) \right. \\ & \left. + A_3 b_{22} q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r) + A_4 b_{22} q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r) \right\} e^{ikz}. \end{aligned} \quad (75)$$

Cuando las condiciones de frontera, ecuaciones (43) y (44), se aplican a (75), se genera

el siguiente sistema de ecuaciones

$$0 = \begin{bmatrix} b_{11}q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r_1) & b_{11}q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r_1) & b_{12}q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r_1) & b_{12}q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r_1) \\ b_{11}q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r_2) & b_{11}q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r_2) & b_{12}q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r_2) & b_{12}q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r_2) \\ b_{21}q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r_1) & b_{21}q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r_1) & b_{22}q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r_1) & b_{22}q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r_1) \\ b_{21}q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r_2) & b_{21}q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r_2) & b_{22}q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r_2) & b_{22}q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}. \quad (76)$$

El sistema (76) tiene solución no trivial si el determinante de la matriz asociada es cero. Al usar el desarrollo por cofactores para calcular el determinante, se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} 0 = & b_{11}q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r_1) \left[b_{11}q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r_2) \mathbf{D}_1 - b_{12}q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r_2) \mathbf{D}_2 + b_{12}q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r_2) \mathbf{D}_3 \right] \\ & - b_{11}q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r_1) \left[b_{11}q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r_2) \mathbf{D}_1 + b_{12}q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r_2) \mathbf{D}_3 + b_{12}q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r_2) \mathbf{D}_4 \right] \\ & + b_{12}q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r_1) \left[b_{11}q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r_2) \mathbf{D}_2 + b_{11}q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r_2) \mathbf{D}_3 + b_{12}q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r_2) \mathbf{D}_5 \right] \\ & - b_{12}q_{\beta_2} Y_2(q_{\beta_2} r_1) \left[b_{11}q_{\beta_1} J_2(q_{\beta_1} r_2) \mathbf{D}_3 - b_{11}q_{\beta_1} Y_2(q_{\beta_1} r_2) \mathbf{D}_4 + b_{12}q_{\beta_2} J_2(q_{\beta_2} r_2) \mathbf{D}_5 \right], \end{aligned} \quad (77)$$

donde

$$\mathbf{D}_1 = b_{22}^2 q_{\beta_2}^2 \begin{vmatrix} J_2(q_{\beta_2} r_1) & Y_2(q_{\beta_2} r_1) \\ J_2(q_{\beta_2} r_2) & Y_2(q_{\beta_2} r_2) \end{vmatrix}, \quad (78)$$

$$\mathbf{D}_2 = b_{21} b_{22} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \begin{vmatrix} Y_2(q_{\beta_1} r_1) & Y_2(q_{\beta_2} r_1) \\ Y_2(q_{\beta_1} r_2) & Y_2(q_{\beta_2} r_2) \end{vmatrix}, \quad (79)$$

$$\mathbf{D}_3 = b_{21} b_{22} q_{\beta_1} q_{\beta_2} \begin{vmatrix} Y_2(q_{\beta_1} r_1) & J_2(q_{\beta_2} r_1) \\ Y_2(q_{\beta_1} r_2) & J_2(q_{\beta_2} r_2) \end{vmatrix}, \quad (80)$$

$$\mathbf{D}_4 = b_{21}b_{22}q_{\beta_1}q_{\beta_2} \begin{vmatrix} J_2(q_{\beta_1}r_1) & J_2(q_{\beta_2}r_1) \\ J_2(q_{\beta_1}r_2) & J_2(q_{\beta_2}r_2) \end{vmatrix}, \quad (81)$$

$$\mathbf{D}_5 = b_{21}^2q_{\beta_1}^2 \begin{vmatrix} J_2(q_{\beta_1}r_1) & Y_2(q_{\beta_1}r_1) \\ J_2(q_{\beta_1}r_2) & Y_2(q_{\beta_1}r_2) \end{vmatrix}. \quad (82)$$

Después de desarrollar los determinantes de 2×2 y reordenar términos, la ecuación (77) se puede reescribir de la forma

$$0 = \left(b_{11}^2 b_{22}^2 + b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{11}b_{12}b_{21}b_{22} \right) q_{\beta_1}^2 q_{\beta_2}^2 \begin{bmatrix} J_2(q_{\beta_2}r_1)Y_2(q_{\beta_2}r_2) - J_2(q_{\beta_2}r_2)Y_2(q_{\beta_2}r_1) \\ J_2(q_{\beta_1}r_1)Y_2(q_{\beta_1}r_2) - J_2(q_{\beta_1}r_2)Y_2(q_{\beta_1}r_1) \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Como b_{11} , b_{12} , b_{21} y b_{22} definidos en (74) están en función de las propiedades del medio, en general se tiene que

$$\det^2(\mathbf{B}) = \left(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \right)^2 = b_{11}^2 b_{22}^2 + b_{12}^2 b_{21}^2 - 2b_{11}b_{12}b_{21}b_{22} \neq 0, \quad (84)$$

y además $q_{\beta_1}^2 \neq 0$ y $q_{\beta_2}^2 \neq 0$, entonces la ecuación (83) se satisface si

$$0 = J_2(q_{\beta_1}r_1)Y_2(q_{\beta_1}r_2) - J_2(q_{\beta_1}r_2)Y_2(q_{\beta_1}r_1), \quad (85)$$

$$0 = J_2(q_{\beta_2}r_1)Y_2(q_{\beta_2}r_2) - J_2(q_{\beta_2}r_2)Y_2(q_{\beta_2}r_1). \quad (86)$$

Las ecuaciones (85) y (86) se conocen como las ecuaciones de frecuencias asociadas a las velocidades de las ondas de cizallamiento u ondas S . La ecuación (85) es la ecuación de frecuencias asociada a la velocidad de la onda S rápida (β_1), mientras que la ecuación (86) es la ecuación de frecuencias asociada a la velocidad de la onda S lenta (β_2). Uno de los objetivos de este trabajo de tesis es obtener las soluciones analíticas de las ecuaciones de frecuencias, ya que a partir de ellas podemos realizar simulaciones computacionales o numéricas más rápidas y con menos errores de redondeo (intrínsecos

a la aritmética computacional) y comprender cómo las propiedades físicas del medio afectan la propagación de las ondas. Estas soluciones analíticas nos permiten hacer predicciones cuantitativas y modelar el comportamiento de los sistemas en diferentes condiciones, lo que a su vez puede ser utilizado para la toma de decisiones y el diseño de sistemas en diferentes campos de la ciencia e ingeniería.

III.2.2 Expresiones analíticas para calcular las raíces de la ecuación de frecuencias

Las raíces de la ecuación de frecuencias ayudan a determinar los valores del número de onda axial, k , que gobiernan la velocidad de fase y la atenuación. La velocidad de fase y la atenuación son propiedades fundamentales para describir la propagación de las ondas, ya que proporcionan información sobre las propiedades físicas y estructurales del medio. Estas propiedades también influyen en el comportamiento general de las ondas, determinando cómo se reflejan, refractan e interactúan entre sí. El estudio de la velocidad de fase y la atenuación proporciona una base sólida para comprender y predecir el comportamiento de las ondas en diferentes contextos. Por ejemplo, se pueden utilizar para determinar la composición de un material o identificar posibles defectos en diversas estructuras. Para encontrar la velocidad de fase y la atenuación de las ondas torsionales, primero es necesario encontrar las soluciones de las ecuaciones de frecuencias (85) y (86). Para esto, en este trabajo de tesis se propone realizar un cambio de variable para reescribir las ecuaciones como un problema de búsqueda de raíces. Como dichas ecuaciones son análogas y lo único que las diferencia es su argumento, tomaremos la ecuación (85) para ejemplificar el proceso. Sean

$$z = q_{\beta_1} r_1, \quad y \quad \lambda = \frac{r_2}{r_1} > 1. \quad (87)$$

Entonces, (85) se puede reescribir como

$$f_\nu(z) = J_\nu(\lambda z)Y_\nu(z) - J_\nu(z)Y_\nu(\lambda z) = 0, \quad (88)$$

donde $\nu = 2$. Si $z > 0$ y $\lambda > 1$, las raíces de la función (88) son todas reales y simples (raíces de multiplicidad uno) [95, 96]. Para el caso de las ecuaciones de frecuencias (85) y (86), al realizar el cambio de variable pertinente para cada caso, se tiene que $\nu = 2$ y $\lambda = \frac{r_2}{r_1} > 1$. Por esto, se concluye que todas las raíces de las ecuaciones de frecuencias para las ondas S rápidas y S lentas, son reales y simples.

La p -ésima raíz de la ecuación de frecuencias (88) está dada por [97]

$$\zeta_p = B + \frac{P}{B} + \frac{Q - P^2}{B^3} + \frac{R - 4PQ + 2P^3}{B^5} + \dots, \quad (89)$$

donde

$$\mu = 4\nu^2, \quad (90)$$

$$B = \frac{p\pi}{\lambda - 1}, \quad (91)$$

$$P = \frac{\mu - 1}{8\lambda}, \quad (92)$$

$$Q = \frac{(\mu - 1)(\mu - 25)(\lambda^3 - 1)}{6(4\lambda)^3(\lambda - 1)}, \quad (93)$$

$$R = \frac{(\mu - 1)(\mu^2 - 114\mu + 1073)(\lambda^5 - 1)}{5(4\lambda)^5(\lambda - 1)}. \quad (94)$$

Las raíces están asociadas a los modos naturales de vibración. Un modo natural de vibración se refiere a una forma específica o patrón de vibración característico en el cual un sistema vibrante puede oscilar a una frecuencia específica sin la influencia de fuerzas externas. Las ecuaciones de frecuencias describen las condiciones bajo las cuales se generan los modos naturales de vibración y son fundamentales para comprender y analizar la propagación de ondas en diferentes sistemas. En el caso de la ecuación (89) cuando $p = 1, 2$ ó 3 se obtiene la primera, la segunda o la tercera raíz de la

ecuación de frecuencias, y así sucesivamente. Estas raíces están relacionadas con el primer, el segundo y el tercer modo natural de vibración torsional de un anillo cilíndrico poroelástico. Cada raíz representa un modo de vibración específico con su correspondiente frecuencia y forma característica de oscilación. Por lo que, mediante la ecuación (89) se ha podido introducir en la metodología desarrollada en esta tesis al modo de vibración como parámetro explícito. El desarrollo de cómo se obtienen las raíces de la ecuación (88) se encuentra en el anexo C.

Con el objetivo de obtener más dígitos significativos en las raíces de las ecuaciones de frecuencias, en este trabajo de tesis se desarrolló e implementó en lenguaje de programación MatLab el siguiente algoritmo que obtiene las primeras p raíces de la ecuación (85), usando como punto de partida las raíces obtenidas por medio de la expansión asintótica dada por (89).

Paso 1: Se define $\lambda = \frac{r_2}{r_1}$, donde r_1 y r_2 son el radio interior y exterior del anillo cilíndrico poroelástico.

Paso 2: Sea $f_\nu(z) = J_\nu(\lambda z)Y_\nu(z) - J_\nu(z)Y_\nu(\lambda z)$, con ν representando el orden de las funciones de Bessel, J y Y , en el producto cruzado.

Paso 3: Para κ de 1 hasta p , hacer los pasos 4-5.

Paso 4: Calcula la condición inicial $\zeta_{0,\kappa} = \frac{\kappa\pi}{\lambda-1} + \frac{(4\nu^2-1)(\lambda-1)}{8\kappa\pi\lambda}$ para usarla como punto inicial en el algoritmo de búsqueda de raíces.

Paso 5: Usa f_ν y $\zeta_{0,\kappa}$ en un algoritmo de búsqueda de raíces para encontrar la raíz ζ_κ que satisfaga $||f(\zeta_\kappa)|| < TOL$, donde TOL se refiere al valor máximo permitido como aproximación del número cero. En esta tesis se usó la función de búsqueda *fzero*, función de MatLab, para encontrar dicha raíz. La función *fzero* combina

los métodos de la bisección, la secante, y la interpolación cuadrática inversa para realizar la búsqueda de raíces.

III.3 La velocidad de fase y atenuación de la onda torsional rápida

La velocidad de fase y atenuación son propiedades clave en la propagación de las ondas que pueden variar según la frecuencia, los modos que se excitan y las características físicas del medio. Comprender las propiedades que gobiernan la velocidad de fase y la atenuación ha sido objeto de estudio desde finales del siglo XIX con los trabajos de Pochhammer [98] y Chree [99]. En la actualidad, el interés por comprender la propagación de las ondas en función de las propiedades físicas del medio y cómo estas propiedades afectan la velocidad y la atenuación de las ondas sigue en aumento en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Disciplinas como la geofísica, la acústica, la medicina y la ingeniería civil han experimentado este aumento de interés, ya que comprender las propiedades mecánicas de las ondas es fundamental para entender los fenómenos físicos involucrados.

Las expresiones para la velocidad de fase y la atenuación para la onda torsional rápida se obtienen a partir de las raíces de la ecuación de frecuencias (85). Sea ζ_p la p -ésima raíz no nula de la ecuación de frecuencias asociada a la velocidad de la onda S rápida (β_1), entonces

$$\zeta_p^2 = q_{\beta_1}^2 r_1^2 = r_1^2 \left(\frac{\omega^2}{\beta_1^2} - k^2 \right). \quad (95)$$

La ecuación (95) se puede escribir como

$$\frac{\zeta_p^2 + r_1^2 k_{fast,p}^2}{\omega^2 r_1^2} = \frac{1}{\beta_1^2} = \frac{1}{\beta_c^2 (\beta_1^{Re} - i\beta_1^{Im})} = \frac{1}{\beta_c^2} \left(E_{Re}^{fast} - iE_{Im}^{fast} \right), \quad (96)$$

donde

$$E_{Re}^{fast} = \frac{\beta_1^{Re}}{(\beta_1^{Re})^2 + (\beta_1^{Im})^2}, \quad (97)$$

$$E_{Im}^{fast} = -\frac{\beta_1^{Im}}{(\beta_1^{Re})^2 + (\beta_1^{Im})^2}. \quad (98)$$

El superíndice *fast* indica que se tratan de parámetros relacionados con la velocidad de la onda *S* rápida (β_1). Esta notación se introduce en 2021 en el trabajo de Solorza-Calderón [15] y continúa su uso en 2022 en el trabajo de Verdugo-Olachea, *et al.* [16]. Las expresiones de β_1^{Re} y β_1^{Im} están dadas explícitamente en las ecuaciones (71) y (72).

Al definir $k_{fast,p}$ como

$$k_{fast,p} = k_{Re,p}^{fast} + ik_{Im,p}^{fast}, \quad (99)$$

y sustituirlo en (95), se obtiene

$$\left(k_{Re,p}^{fast} + ik_{Im,p}^{fast}\right)^2 = \frac{(E_{Re}^{fast} - iE_{Im}^{fast})r_1^2\omega^2 - \beta_c^2\zeta_p^2}{r_1^2\beta_c^2}. \quad (100)$$

Entonces de la ecuación (100) se generan las siguientes relaciones

$$\left(k_{Re,p}^{fast}\right)^2 - \left(k_{Im,p}^{fast}\right)^2 = \frac{E_{Re}^{fast}r_1^2\omega^2 - \beta_c^2\zeta_p^2}{r_1^2\beta_c^2}, \quad (101)$$

$$2k_{Re,p}^{fast}k_{Im,p}^{fast} = -\frac{E_{Im}^{fast}}{\beta_c^2}\omega^2. \quad (102)$$

De la ecuación (102), se tiene que

$$k_{Im,p}^{fast} = -\frac{E_{Im}^{fast}}{2k_{Re,p}^{fast}\beta_c^2}\omega^2, \quad (103)$$

que al sustituirlo en (101) se llega a la ecuación polinomial de segundo grado para

$$\left(k_{Re,p}^{fast}\right)^2,$$

$$0 = 4r_1^4\left(k_{Re,p}^{fast}\right)^4 - 4r_1^2\left(E_{Re}^{fast}\frac{r_1^2}{\beta_c^2}\omega^2 - \zeta_p^2\right)\left(k_{Re,p}^{fast}\right)^2 - \left(E_{Im}^{fast}\right)^2\frac{r_1^4}{\beta_c^4}\omega^4, \quad (104)$$

cuya solución es

$$(k_{Re,p}^{fast})^2 = \frac{B_{1,p}^{fast} + B_{2,p}^{fast}}{2r_1^2}, \quad (105)$$

donde

$$B_{1,p}^{fast} = \left(\left[(E_{Re}^{fast})^2 + (E_{Im}^{fast})^2 \right] \frac{r_1^4}{\beta_c^4} \omega^4 - 2E_{Re}^{fast} \zeta_p^2 \frac{r_1^2}{\beta_c^2} \omega^2 + \zeta_p^4 \right)^{1/2}, \quad (106)$$

$$B_{2,p}^{fast} = E_{Re}^{fast} \frac{r_1^2}{\beta_c^2} \omega^2 - \zeta_p^2. \quad (107)$$

De la solución (104) se obtiene la expresión analítica para la velocidad de fase torsional mediante

$$V_{\omega,p}^{fast} = \frac{\omega}{|k_{Re}^{fast}|} = \frac{\sqrt{2}r_1}{\sqrt{B_{1,p}^{fast} + B_{2,p}^{fast}}} \omega. \quad (108)$$

Observamos que la velocidad de fase torsional asociada a la velocidad de la onda S rápida (β_1), además de estar gobernada por las propiedades físicas del medio y la frecuencia (ω), tiene como parámetro explícito el modo torsional de vibración (ζ_p), ecuaciones (106) y (107).

Por otro lado de (102), se obtiene que

$$k_{Re,p}^{fast} = -\frac{E_{Im}^{fast}}{2k_{Im}^{fast} \beta_c^2} \omega^2, \quad (109)$$

que al sustituir en (101) se tiene la siguiente ecuación polinomial de segundo grado para $(k_{Im,p}^{fast})^2$,

$$0 = 4r_1^4 (k_{Im,p}^{fast})^4 - 4r_1^2 \left(E_{Re}^{fast} \frac{r_1^2}{\beta_c^2} \omega^2 - \zeta_p^2 \right) (k_{Im,p}^{fast})^2 - (E_{Im}^{fast})^2 \frac{r_1^4}{\beta_c^4} \omega^4. \quad (110)$$

La solución de la ecuación (110) es

$$(k_{Im,p}^{fast})^2 = \frac{B_{1,p}^{fast} - B_{2,p}^{fast}}{2r_1^2}, \quad (111)$$

por lo que la atenuación torsional está dada como

$$A_{\omega,p}^{fast} = \frac{1}{|k_{Im,p}^{fast}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{B_{1,p}^{fast} - B_{2,p}^{fast}}}. \quad (112)$$

Observamos que la atenuación torsional asociada a la velocidad de la onda S rápida (β_1), además de estar gobernada por las propiedades físicas del medio y la frecuencia (ω), tiene como parámetro explícito el modo torsional de vibración (ζ_p), ecuaciones (106) y (107).

III.4 La velocidad de fase y atenuación de la onda torsional lenta

Análogo al caso de la sección III.3, las expresiones analíticas para la velocidad de fase y atenuación para los modos naturales de vibración de la onda torsional lenta, están dadas por

$$V_{\omega,p}^{slow} = \frac{\omega}{|k_{Re,p}^{slow}|} = \frac{\sqrt{2}r_1}{\sqrt{B_{1,p}^{slow} + B_{2,p}^{slow}}} \omega, \quad (113)$$

$$A_{\omega,p}^{slow} = \frac{1}{|k_{Im,p}^{slow}|} = \frac{\sqrt{2}r_1}{\sqrt{B_{1,p}^{slow} - B_{2,p}^{slow}}}, \quad (114)$$

donde

$$B_{1,p}^{slow} = \left([(E_{Re}^{slow})^2 + (E_{Im}^{slow})^2] \frac{r_1^4}{\beta_c^4} \omega^4 - 2E_{Re}^{slow} \zeta_p^2 \frac{r_1^2}{\beta_c^2} \omega^2 + \zeta_p^4 \right)^{1/2}, \quad (115)$$

$$B_{2,p}^{slow} = E_{Re}^{slow} \frac{r_1^2}{\beta_c^2} \omega^2 - \zeta_p^2, \quad (116)$$

$$E_{Re}^{slow} = \frac{\beta_2^{Re}}{(\beta_2^{Re})^2 + (\beta_2^{Im})^2}, \quad (117)$$

$$E_{Im}^{slow} = -\frac{\beta_2^{Im}}{(\beta_2^{Re})^2 + (\beta_2^{Im})^2}. \quad (118)$$

El superíndice *slow* indica que se tratan de parámetros relacionados con la velocidad de la onda S lenta (β_2). Esta notación se introduce en 2021 en el trabajo de Solorza-Calderón [15] y continúa su uso en 2022 en el trabajo de Verdugo-Olachea,

et al. [16]. Análogamente al caso rápido, la velocidad de fase y la atenuación torsional asociadas a las ondas S lentas, además de estar gobernadas por las propiedades físicas del medio y la frecuencia (ω), tiene como parámetro explícito el modo torsional de vibración (ζ_p), ecuaciones (115) y (116).

En el capítulo IV se usará la metodología desarrollada en este capítulo para realizar simulaciones computacionales para el análisis del comportamiento de la propagación de las ondas torsionales, a través de la velocidad de fase y atenuación, en anillos cilíndricos poroelásticos.

Capítulo IV

SIMULACIONES COMPUTACIONALES: ONDAS TORSIONALES

Las simulaciones computacionales y los modelos matemáticos desempeñan un papel fundamental para la comprensión y reproducción de fenómenos naturales, ya que esto nos permite explorar un amplio rango de condiciones y variables, generando resultados que se apegan cada vez más a la realidad. Al tener modelos más sofisticados, podemos reproducir con mayor precisión los fenómenos naturales y obtener predicciones más realistas. La capacidad de visualizar estos modelos por medio de simulaciones computacionales nos brinda una comprensión intuitiva del fenómeno de estudio, lo cual puede ayudarnos a identificar patrones, tendencias o anomalías, que no serían evidentes de otra manera. Por lo que, las simulaciones computacionales y los modelos matemáticos son herramientas indispensables para el avance de la investigación científica y el desarrollo tecnológico, ya que nos permiten explorar, resolver y comprender fenómenos naturales de manera más precisa y efectiva, en la mayoría de los casos a bajo costo.

IV.1 Simulaciones computacionales

En este trabajo de tesis se desarrolló el marco teórico para obtener la solución analítica de las ecuaciones de movimiento de la TBVE para el modo torsional de vibración de anillos cilíndricos poroelásticos infinitos con simetría axial. Para realizar un análisis del comportamiento de la propagación de las ondas torsionales en un anillo cilíndrico, se utilizarán muestras de arenisca como material de la matriz sólida y estará

completamente saturada con agua o con queroseno. Los parámetros físicos de la matriz sólida están dados en la tabla I, mientras que los parámetros del fluido están dados en la tabla II. Los parámetros fueron tomados de [13, 14, 15, 100].

Tabla I: Parámetros de la matriz sólida usados en las simulaciones computacionales, conforme al sistema internacional de unidades (SI).

Parámetros de la matriz sólida	Arenisca
Densidad del sólido ρ_s (kg/m ³)	2.65×10^3
Módulo de cizallamiento del marco sólido μ_0 (Pa)	6.70×10^9
Módulo de cizallamiento del mineral sólido μ_s (Pa)	4.51×10^{10}
Módulo de volumen del marco sólido K_0 (Pa)	5.20×10^9
Módulo de volumen del mineral sólido K_s (Pa)	35×10^9
Porosidad η_0	0.25
Tortuosidad S	4/3
Permeabilidad K (m ²)	1.00×10^{-14}

Tabla II: Parámetros del fluido usados en las simulaciones computacionales, conforme al sistema internacional de unidades (SI).

Parámetros del fluido	Agua	Queroseno
Densidad ρ_f (kg/m ³)	1.00×10^3	820.1
Viscosidad de cizallamiento μ_f (Pa · s)	1.00×10^{-3}	1.64×10^{-3}
Viscosidad volumétrica ξ_f (Pa · s)	2.80×10^{-3}	2.71×10^{-3}
Módulo de elasticidad volumétrico K_f (Pa)	2.20×10^9	1.30×10^9

Existen dos enfoques principales para estudiar los fenómenos de vibración en sistemas mecánicos: el análisis de la vibración total del sistema o el estudio de la solución

en términos de los modos naturales de vibración [1]. En general, la vibración total del sistema siempre se puede modelar como una superposición de todos los modos naturales de vibración. Por ejemplo, en la figura 3 se presentan los primeros cuarenta modos naturales de vibración para una cuerda cuyos extremos están fijos. Al sumar estos cuarenta modos, se combinan las distintas amplitudes de cada uno, lo que genera una superposición de ondas que interactúan entre sí. Como resultado de esta superposición se crea una onda viajera, indicada como Suma en la parte inferior de la figura 3.

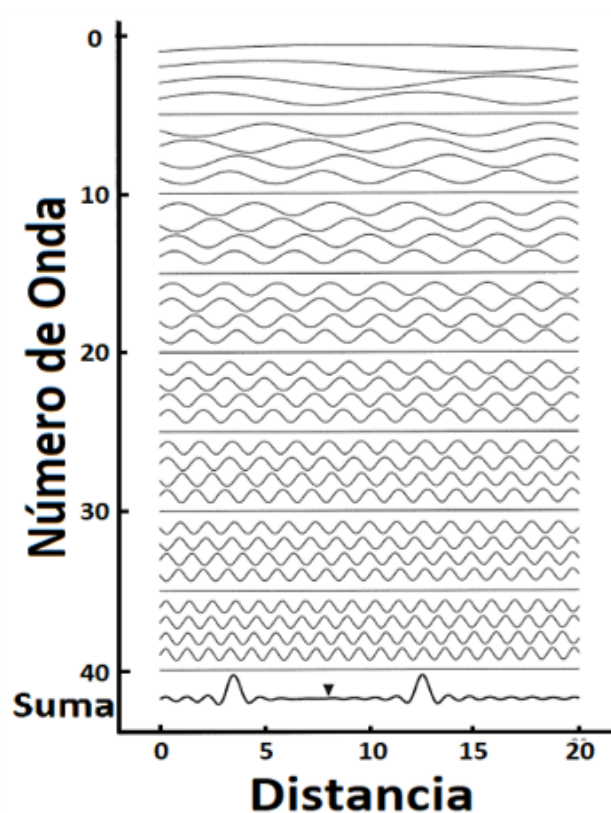


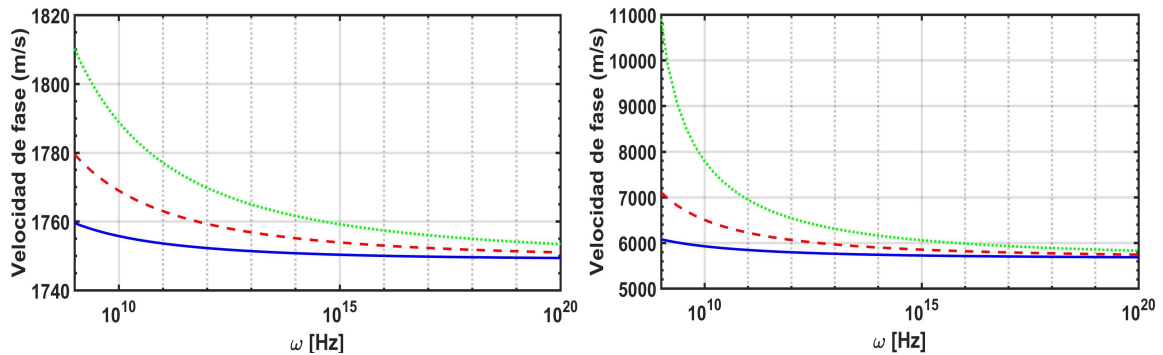
Figura 3: Bosquejo de la superposición de los modos naturales de vibración. Recuperado de [1].

En las figuras 4 y 5, se muestran las velocidades de fase y la atenuación para los primeros tres modos de vibración de las ondas torsionales que se propagan en un anillo cilíndrico poroelástico, ecuaciones (108) y (119), respectivamente. El análisis

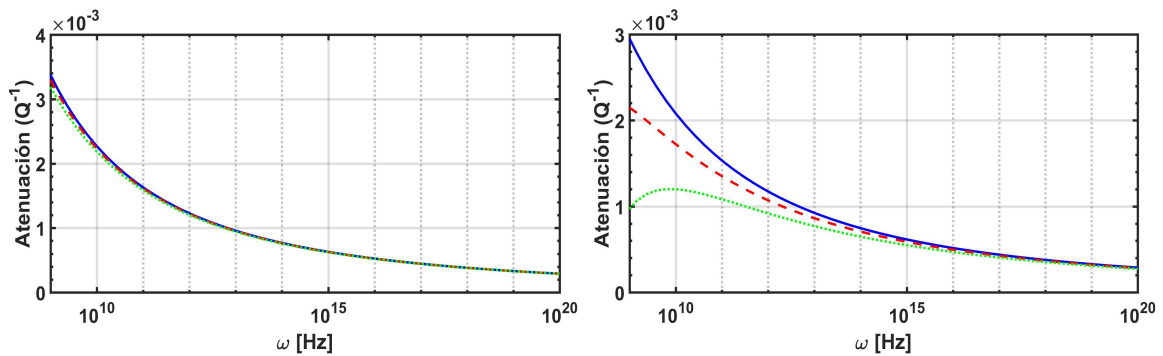
de los modos naturales de vibración nos permite comprender de manera más completa el comportamiento total del sistema, ya que se puede estudiar cada modo de forma individual. Cabe destacar que cada modo de vibración es distinto, debido a que cada modo corresponde a un cero distinto de la ecuación de frecuencias (83). Esta característica marca las diferencias observadas en los distintos modos. Por lo tanto, la capacidad de comprender cómo se comporta cada uno de los modos, nos ayuda a comprender de manera más sencilla el comportamiento total del sistema, ya que se puede estudiar parte por parte. Al final, la vibración total del sistema es una superposición de todos los modos naturales de vibración. Por otra parte, la atenuación torsional se representa por medio del inverso del factor de calidad, Q^{-1} [15, 23], que mide la absorción del medio mediante la estimación de la atenuación por ciclo. El factor de calidad se utiliza ampliamente en la teoría de poroelasticidad [13, 14, 15, 16, 101], y se define como

$$\frac{1}{Q_{\omega,p}^j} = 2 \frac{A_{\omega,p}^j}{V_{\omega,p}^j}, \quad j = fast, slow. \quad (119)$$

En la figura 4 se muestra la velocidad de fase ($V_{\omega,p}^{fast}$) y la atenuación ($\frac{1}{Q_{\omega,p}^{fast}}$) para los primeros tres modos naturales de vibración torsional de un anillo cilíndrico de arenisca grueso, $r_1 = 0.01\text{m}$ y $r_2 = 0.1\text{m}$, saturado con queroseno. Las curvas azules continuas, las curvas rojas a trazos y las curvas verdes a puntos muestran el primer, el segundo y el tercer modo de vibración, respectivamente. Las curvas de la izquierda en la figura 4a se obtienen usando la TBVE, mientras que las curvas de la derecha en la figura 4b se obtienen mediante la TB. Como se puede observar en la figura 4, al utilizar la TBVE la onda torsional rápida se atenúan más y se propagan más lento que al usar la TB en todos los modos. Además, los tres modos torsionales se propagan prácticamente de la misma manera, con una atenuación ligeramente mayor para el primer modo. Se repitieron las simulaciones computacionales utilizando un anillo cilíndrico delgado,



(a) Velocidad de fase usando la TBVE (izquierda) y la TB (derecha).



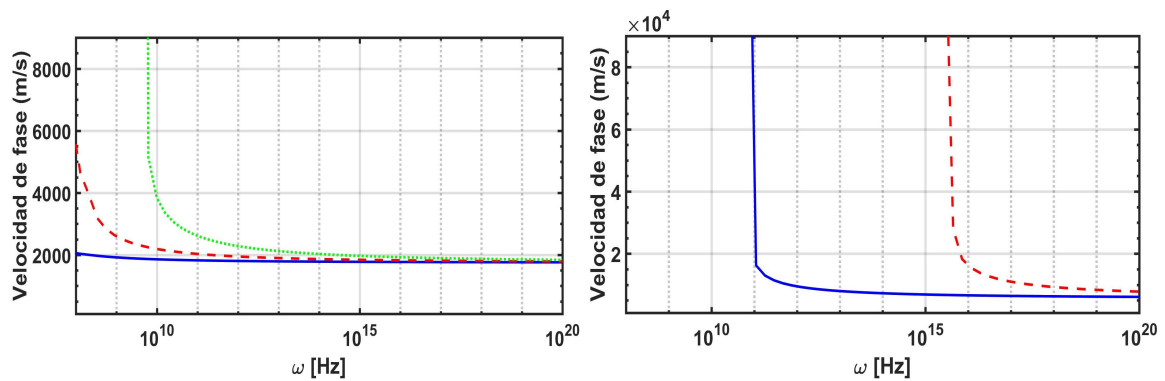
(b) Atenuación usando la TBVE (izquierda) y la TB (derecha).

Figura 4: Velocidad de fase y atenuación de las ondas torsionales rápidas en anillos cilíndricos poroelásticos de arena completamente saturado con queroseno. El radio interior y exterior del anillo cilíndrico se toman como $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.1$ m. Las curvas azules continuas, las curvas rojas a trazos y las curvas verdes a puntos muestran el primer, segundo y tercer modo de vibración, respectivamente.

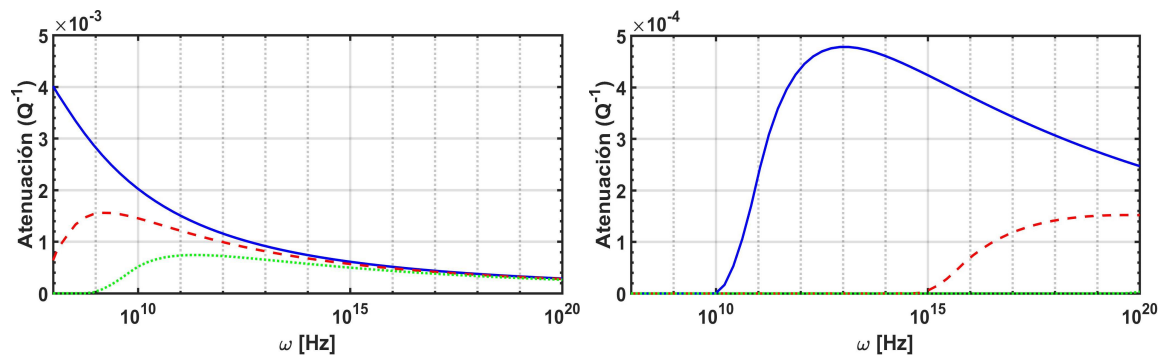
$r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.03$ m, como se muestra en la figura 5. En el caso del anillo cilíndrico delgado, la diferencia entre la TBVE y la TB es aún más pronunciada, puesto que la TBVE predice las velocidades entre 1740 y 1820 m/s , mientras que la TB predice velocidades entre 6000 y 12000 m/s . Aunque en 2015, Perati y Gurijala [4] estudiaron el mismo problema para anillos cilíndricos delgados huecos, su enfoque difiere de este trabajo. Ellos resolvieron la ecuación de frecuencias sin desacoplar previamente las ecuaciones de la onda S rápida y lenta, por lo que igualaron a cero el determinante de

la matriz asociada a la ecuación (76), y lo resolvieron mediante el método numérico de la bisección, lo cual les impidió obtener expresiones analíticas y conocer los modos naturales de vibración obtenidos en el presente trabajo. Además, al utilizar el método de la bisección, Perati y Gurijala [4] limitaron sus resultados a un estrecho rango de frecuencia, específicamente de 1×10^{-4} Hz a 9×10^{-4} Hz. En contraste, en este trabajo se desacopló la información de la onda S rápida y lenta, y se desarrolló una metodología para determinar la solución analítica de la ecuación de frecuencias (77). Esto nos permitió obtener una descripción más detallada de la velocidad de fase torsional y la atenuación torsional de los modos naturales de vibración y explorar un rango de frecuencias más completo, 1×10^8 Hz a 1×10^{20} Hz, como se muestra en las figuras 4 a 7. Esto proporciona una mayor comprensión del comportamiento de las ondas torsionales en el sistema estudiado.

Para comparar los resultados entre los enfoques de la TB y la TBVE, los parámetros de Biot se reescriben en términos de los parámetros físicos del medio poroso (apéndice B). Se realizan simulaciones computacionales utilizando anillos cilíndricos de arenisca homogéneos, isótropos, con simetría axial completamente saturados con queroseno o con agua. La figura 6 muestra cómo se propaga la velocidad de fase torsional rápida ($V_{\omega,p}^{fast}$) en un cilindro sólido de radio $r = 0.01$ m (curva roja a puntos), un cilindro sólido de radio $r = 0.1$ m (curva cian a trazos), un anillo cilíndrico delgado de radio interior y exterior de $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.03$ m (curva negra continua) y un anillo cilíndrico grueso de radio interior y exterior de $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.1$ m (curva azul a trazos). En las curvas de la izquierda de la figura 6 se utilizó una muestra de arenisca completamente saturada con queroseno y las curvas de la derecha corresponden a la muestra completamente saturada con agua. Las curvas para los casos de cilindros sólidos se obtuvieron utilizando la metodología propuesta en 2021 por Solorza-Calderón en [15]. La figura 6a muestran el primer modo torsional de vibración, la figura 6b muestra



(a) Velocidad de fase usando la TBVE (izquierda) y la TB (derecha).

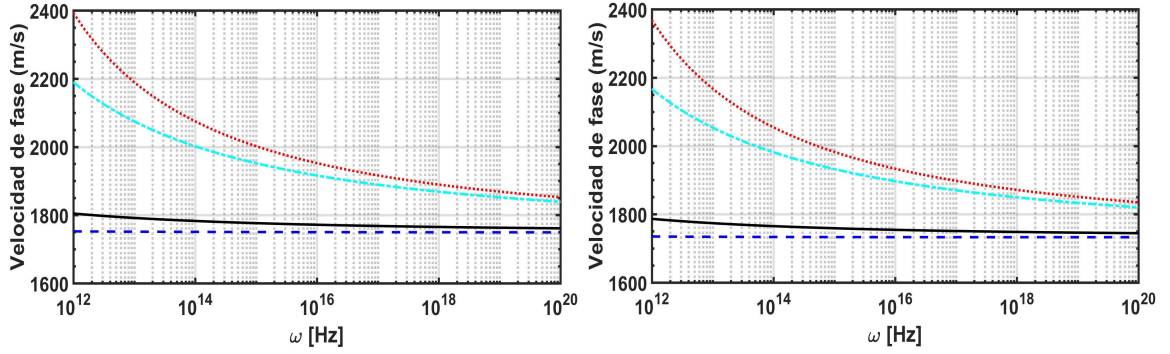


(b) Atenuación usando la TBVE (izquierda) y la TB (derecha).

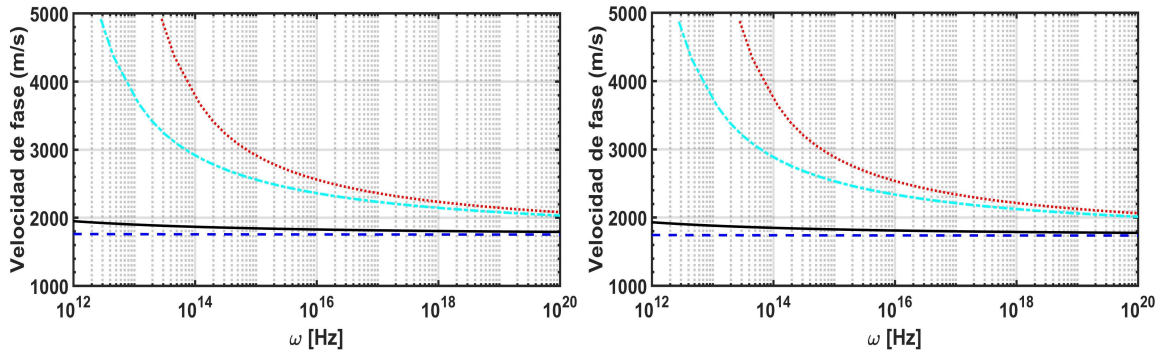
Figura 5: Velocidad de fase y atenuación de las ondas torsionales rápidas en anillos cilíndricos poroelásticos de arena completamente saturado con queroseno. El radio interior y exterior del anillo cilíndrico se toman como $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.1$ m. Las curvas azules continuas, las curvas rojas a trazos y las curvas verdes a puntos muestran el primer, segundo y tercer modo de vibración, respectivamente.

el segundo modo torsional de vibración. Como en las simulaciones computacionales realizadas en [15], la figura 6 muestra que a pesar de que las ondas torsionales lentas no se propagan a bajas frecuencias (figura 7), no podemos negar su efecto en la propagación de la onda torsional rápida.

En la figura 7 se presenta la velocidad de fase las ondas torsionales lentas. Se observa que la amplitud de estas ondas, para los primeros tres modos naturales de vibración,



(a) Primer modo de vibración.

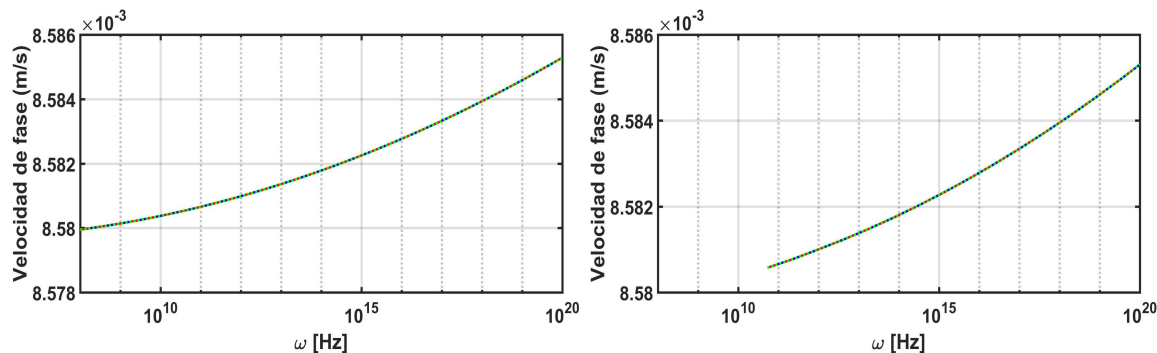


(b) Segundo modo de vibración.

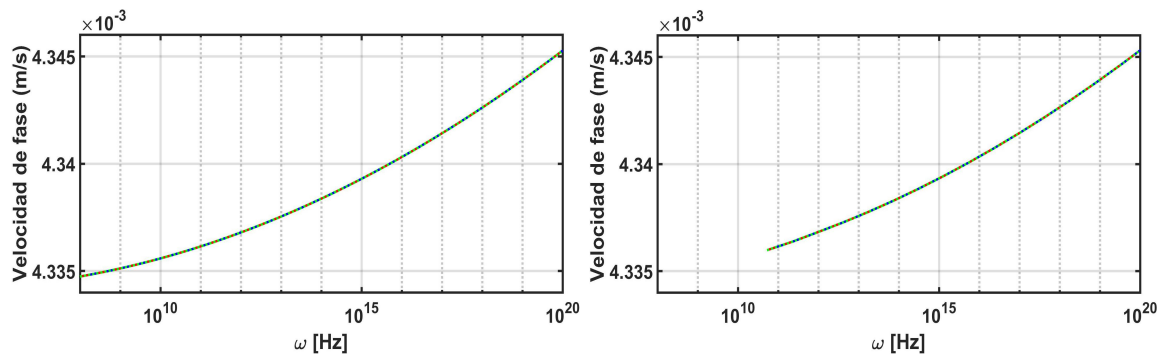
Figura 6: Velocidad de fase de las ondas torsionales rápidas en anillos cilíndricos poroelásticos de arenisca. (a) muestras saturadas con queroseno; (b) muestras saturadas con agua. Las curvas negras continuas representan un anillo cilíndrico delgado, $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.03$ m; las curvas azules a trazos representan un anillo cilíndrico grueso, $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.1$ m; las curvas rojas a puntos representan un cilindro de radio $R = 0.01$; las curvas cian a trazos representan un cilindro de radio $R = 0.1$ m.

son prácticamente iguales y son seis órdenes de magnitud menor que la amplitud de las ondas torsionales rápidas en todo el rango de frecuencias. Esto indica que las ondas torsionales rápidas prácticamente no se propagan en el caso de anillos cilíndricos. Sin embargo, estas afectan la propagación de las ondas rápidas, como se muestra al comparar las curvas obtenidas por la TB y la TBVE. Más aún, se puede observar que las ondas torsionales lentas que se propagan en la muestra saturada con queroseno (curvas de la

izquierda en la figura 7) tienen el doble de amplitud que las muestras saturada con agua (curvas de la derecha en la figura 7). Esto se debe a que la densidad del agua, ρ_f , es mayor que la densidad del queroseno (tabla II). Esta diferencia de densidades afecta la velocidad de las ondas, ya que a una menor densidad del fluido le corresponde a una menor atenuación en las velocidades de las ondas.



(a) $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.1$ m.



(b) $r_1 = 0.01$ m y $r_2 = 0.03$ m.

Figura 7: Velocidad de fase de las ondas torsionales lentas para anillos cilíndricos de arenisca. (a) corresponden a las muestras completamente saturadas con queroseno. (b) corresponden a las muestras saturadas con agua. Las curvas azules a puntos, las curvas rojas a puntos y las curvas verdes a puntos (curvas sobrepuestas) muestran el primer, el segundo y el tercer modo de vibración, respectivamente.

IV.2 Discusión de los resultados

En este trabajo se creó una metodología para analizar la propagación de ondas torsionales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos homogéneos, isótropos y con simetría axial, totalmente saturados con un fluido, utilizando la TBVE. Dicha metodología se presenta en el capítulo III. Los resultados de este trabajo se utilizan para predecir el comportamiento de los modos naturales de vibración. Por ejemplo, se obtiene que el primer modo de vibración torsional asociado con la onda S rápida se propaga entre 1734 m/s y 2600 m/s para un anillo cilíndrico poroelástico de arenisca completamente saturado con agua o queroseno, y para el segundo modo vibracional, la propagación de torsión está entre 1780 m/s y 6000 m/s . Los resultados obtenidos con la TBVE están estrechamente relacionados con los diferentes experimentos de laboratorio reportados en la literatura, a diferencia de los resultados obtenidos utilizando la TB, que predice que las velocidades de los modos naturales de vibración están entre 6000 m/s y $80,000 \text{ m/s}$, velocidades imposibles de obtener en la naturaleza. Por ejemplo, para vibraciones acústicas en pozos, las velocidades reportadas están entre 1729 m/s y 3500 m/s dependiendo de la profundidad en la que se toma la medición [102, 103]; para ondas sísmicas que se propagan en la superficie las velocidades reportadas son entre 2200 m/s y 3000 m/s [104, 105, 106]; y para tuberías de acero son de entre 2200 m/s y 4000 m/s [61, 107]. Al comparar las velocidades de fase de las ondas torsionales utilizando la TB y la TBVE (curvas punteadas y continuas en las figuras 4 y 5, respectivamente), se puede observar que la velocidad de fase torsional al usar la TBVE reduce las discrepancias entre los datos reportados y lo obtenido por el modelo teórico. Esto es, la TBVE presenta mejores resultados en comparación con la TB.

Aunque en 2015 Perati y Gurijala [4] realizaron un estudio similar sobre anillos cilíndricos poroelásticos delgados, al resolver el determinante por medio del método

numérico de la bisección renuncian a obtener expresiones analíticas para la velocidad de fase y la atenuación de las ondas torsionales, ya que al resolver directamente el determinante sin un desacoplamiento previo de las ecuaciones de frecuencias, no es posible obtener de manera explícita los modos naturales de vibración de la onda rápida o lenta, ya que toda la información se encuentra acoplada. Además, presentan resultados solo en un rango de frecuencias muy reducido, que va desde 1×10^{-4} Hz hasta 9×10^{-4} Hz, lo cual es significativamente pequeño y carece de sentido con lo reportado en literatura, que pueden ir hasta los 10^{20} Hz. Por otro lado, Tajuddin y Shah abordan el mismo problema pero empleando la TB, por lo que solo obtienen la ecuación de frecuencias asociada a la velocidad de la onda S rápida, ecuación (12) en [87]. Ellos toman la aproximación asintótica de las funciones Bessel para aproximar la ecuación de frecuencias por medio de funciones senos y cosenos, y obtienen la velocidad de fase y la atenuación de las ondas torsionales para los dos primeros modos de vibración de un anillo cilíndrico delgado, un anillo cilíndrico grueso y un cilindro poroelástico sólido. Al proponer distintos valores del número de onda axial, no pueden relacionar de manera directa la propagación de las ondas con las propiedades físicas del medio. En cambio, en este trabajo de tesis se han obtenido expresiones analíticas para la velocidad de fase y la atenuación de las ondas torsionales en anillos cilíndricos poroelásticos sin restricciones. Estas expresiones se dan en términos de las propiedades físicas del medio, como la porosidad, la permeabilidad, la densidad del sólido y del fluido, entre otras propiedades clave. Además, aparecen de manera explícita como parámetro la frecuencia, la velocidad de las ondas S rápida y S lenta y el n -ésimo modo natural de vibración, lo que facilita significativamente el análisis de la propagación de las ondas torsionales al expresarlas como una superposición de los modos naturales de vibración.

En el capítulo V se presenta una metodología detallada para obtener expresiones analíticas para las frecuencias naturales de las ondas radiales en cilindros poroelásticos infinitos, isotropos, con simetría axial y condiciones de frontera libre de esfuerzos.

Capítulo V

MODO RADIAL DE VIBRACIÓN

Considere un cilindro poroelástico infinito de radio R con simetría axial que está completamente saturado con un fluido. El modo radial de vibración no presenta desplazamientos torsionales, $\mathbf{u}_\theta(r, \theta, z, t) = 0$, ni desplazamientos axiales, $\mathbf{u}_z(r, \theta, z, t) = 0$. Además, como se tiene simetría axial, el desplazamiento radial sólo depende de r , z y t , es decir $\mathbf{u}_r \equiv \mathbf{u}_r(r, z, t)$. Entonces, las ecuaciones de la TBVE, dadas por las ecuaciones (28) a la (30), se simplifican como

$$\mathbf{I}\partial_t^2\mathbf{u}_r + \Omega_i\mathbf{I}_0\partial_t\mathbf{u}_r = \left(\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta\partial_t\right)\partial_z^2\mathbf{u}_r + (\mathbf{C}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha\partial_t)\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\right)\mathbf{u}_r, \quad (120)$$

$$0 = \partial_z \left[\left((\mathbf{C}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha\partial_t) - (\mathbf{C}_\beta + \mathbf{N}_\beta\partial_t) \right) \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \right) \mathbf{u}_r \right]. \quad (121)$$

De la ecuación (121) se obtiene que $\partial_z\mathbf{u}_r = 0$, por lo que se infiere que \mathbf{u}_r no depende explícitamente de z ($\mathbf{u}_r \equiv \mathbf{u}_r(r, t)$). De no ser así, al aplicar las condiciones de frontera libre de esfuerzos se obtiene la solución trivial, $\mathbf{u}_r = 0$. Como el objetivo es analizar las propiedades de las ondas radiales, se necesitan analizar las soluciones no triviales. Entonces, para obtener una solución no trivial, el desplazamiento radial sólo depende de r y t , así que la ecuación (120) se reescribe como

$$\mathbf{I}\partial_t^2\mathbf{u}_r + \Omega_i\mathbf{I}_0\partial_t\mathbf{u}_r = (\mathbf{C}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha\partial_t)\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\right)\mathbf{u}_r, \quad (122)$$

por lo que el modo radial de vibración en el dominio de frecuencias [13, 15] es

$$0 = \left[\boldsymbol{\alpha} \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) + \omega^2 \mathbf{I} \right] \mathbf{U}_r, \quad (123)$$

donde

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{C}_\alpha - i\omega \mathbf{N}_\alpha), \quad (124)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I} + i \frac{\Omega_i}{\omega} \mathbf{I}_0, \quad (125)$$

y

$$\mathbf{U}_r \equiv \mathbf{U}_r(r, \omega) = \begin{pmatrix} U_r^m(r, \omega) \\ U_r^i(r, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_s & m_f \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_r^s(r, \omega) \\ U_r^f(r, \omega) \end{pmatrix}, \quad (126)$$

donde los superíndices m e i representan los movimientos del centro de masa y el campo interno, respectivamente, mientras que los superíndices f y s representan el movimiento del sólido y del fluido, respectivamente. Los parámetros m_s , m_f , Ω_i y los elementos de las matrices de 2×2 , $\boldsymbol{\Omega}$, \mathbf{C}_α , \mathbf{N}_α , \mathbf{I} , e \mathbf{I}_0 , están dados en el apéndice A. En la figura 8 se muestran las tres componentes del tensor de esfuerzos en el plano $z = \text{constante}$.

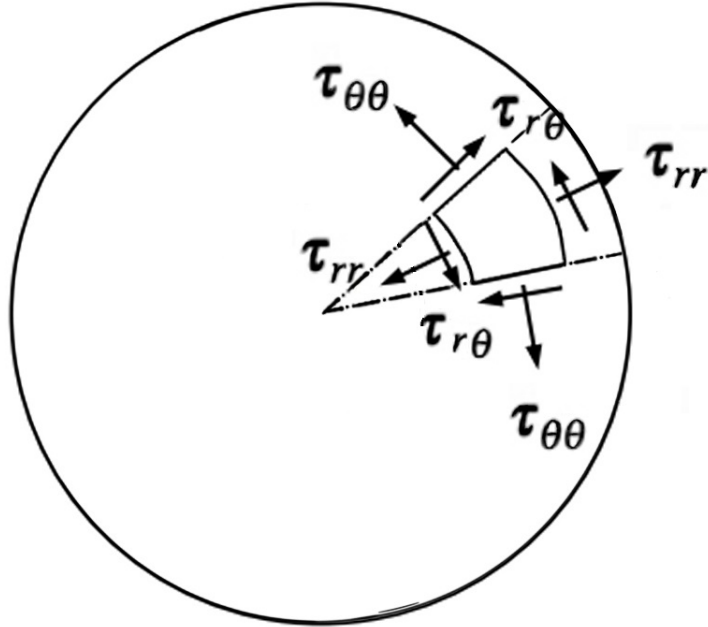


Figura 8: Sistema de referencia de coordenadas y los tensores de esfuerzos en un cilindro con simetría axial en el corte $z = \text{constante}$.

En el caso particular cuando $r = R$, se tienen condiciones de frontera libre de esfuerzos en el cilindro poroelástico,

$$\boldsymbol{\tau}_{rr} \Big|_{r=R} = 0, \quad (127)$$

donde

$$\boldsymbol{\tau}_{rr} \equiv \boldsymbol{\tau}_{rr}(r, \omega) = \left(\boldsymbol{\tau}_{rr}^m(r, \omega), \boldsymbol{\tau}_{rr}^i(r, \omega) \right) = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\rho} \left\{ \left(\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta} \right) \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \mathbf{U}_r + 2\boldsymbol{\beta} \partial_r \mathbf{U}_r \right\}. \quad (128)$$

Los elementos de las matrices $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\beta}$ están dados explícitamente en el apéndice A. Para poder obtener las ecuaciones de frecuencias asociadas al modo radial de vibración del cilindro poroelástico, primero requerimos encontrar la solución de la ecuación (123).

V.1 La solución general

Para obtener la solución general de (123), se propone el siguiente cambio de coordenadas dado por

$$\mathbf{U}_r = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{U}, \quad (129)$$

que al reemplazar en (123) y multiplicar por la matriz \mathbf{L}_α^T por el lado izquierdo, se obtiene

$$0 = \boldsymbol{\Lambda}_\alpha \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{U}(r, \omega) + \omega^2 \mathbf{I} \mathbf{U}(r, \omega), \quad (130)$$

donde

$$\boldsymbol{\Lambda}_\alpha \equiv \mathbf{L}_\alpha^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 \end{bmatrix}, \quad (131)$$

$$\mathbf{L}_\alpha^T \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{I}. \quad (132)$$

Las expresiones de las matrices \mathbf{R}_α y \mathbf{L}_α^T están dadas por

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{\alpha_1}}, & \frac{1}{N_{\alpha_2}} \left(\frac{\alpha^{\text{mi}}}{\alpha_2^2 - \alpha^{\text{mm}}} \right) \\ \frac{1}{N_{\alpha_1}} \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha^{\text{mm}}}{\alpha^{\text{mi}}} \right) & \frac{1}{N_{\alpha_2}} \end{pmatrix}, \quad (133)$$

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{\alpha_1}} & \frac{1}{N_{\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha^{\text{ii}}}{\alpha^{\text{mi}}} \right) \\ \frac{1}{N_{\alpha_1}} \left(\frac{\alpha^{\text{mi}}}{\alpha_1^2 - \alpha^{\text{ii}}} \right) & \frac{1}{N_{\alpha_2}} \end{pmatrix}, \quad (134)$$

con

$$N_{\alpha_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha^{\text{ii}}}}, \quad (135)$$

$$N_{\alpha_2} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha^{\text{mm}} - \alpha_2^2}}. \quad (136)$$

Entonces, la solución general [93] de la ecuación (130) es

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 J_1(\kappa_{\alpha_1} r) \\ A_2 J_1(\kappa_{\alpha_2} r) \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \quad (137)$$

donde A_1 y A_2 son constantes, ω la frecuencia, y

$$\kappa_{\alpha_1}^2 = \frac{\omega^2}{\alpha_1^2} \neq 0, \quad (138)$$

$$\kappa_{\alpha_2}^2 = \frac{\omega^2}{\alpha_2^2} \neq 0. \quad (139)$$

κ_{α_1} representa el número de onda radial [65, 88, 108, 109], que se define como el cociente entre la frecuencia y la velocidad de la onda, y representa la variación de la onda que se propaga en dirección radial desde el centro del cilindro hasta su frontera. α_1^2 y α_2^2 representan las velocidades de la onda P rápida y P lenta, respectivamente, y se definen como los eigenvalores de la matriz $\boldsymbol{\alpha}$ [15] de la ecuación (124). Entonces

$$0 = \det \begin{pmatrix} \alpha^{\text{mm}} - \alpha^2 & \alpha^{\text{mi}} \\ \alpha^{\text{im}} & \alpha^{\text{ii}} - \alpha^2 \end{pmatrix} = (\alpha^2)^2 - \text{traza}(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \alpha^2 + \det(\boldsymbol{\alpha}), \quad (140)$$

cuyas soluciones son

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{\text{traza}(\boldsymbol{\alpha}) \pm \sqrt{\text{traza}^2(\boldsymbol{\alpha}) - 4\det(\boldsymbol{\alpha})}}{2}, \quad (141)$$

donde

$$\text{traza}(\boldsymbol{\alpha}) = T_{Re} \cdot \alpha_c^2 - iT_{Im} \cdot \alpha_c^2, \quad (142)$$

$$T_{Re} = 1 + \left\{ d_f \left[m_f + (1 - 2\alpha_k \frac{m_f}{\eta_0}) \frac{\eta_0}{m_f} \frac{\eta_0 M}{H_c} \right] + d_s (\eta_0 - m_f \Upsilon) \frac{\Omega_i}{\Omega_\alpha} \right\} \frac{\omega^2}{\omega^2 + (\Omega_i)^2}, \quad (143)$$

$$T_{Im} = \Upsilon \frac{\omega}{\Omega_\alpha} + \left\{ d_f \left[m_f + (1 - 2\alpha_k \frac{m_f}{\eta_0}) \frac{\eta_0}{m_f} \frac{\eta_0 M}{H_c} \right] \Omega_i - d_s (\eta_0 - m_f \Upsilon) \frac{\omega^2}{\Omega_\alpha} \right\} \frac{\omega}{\omega^2 + (\Omega_i)^2}, \quad (144)$$

y

$$\det(\boldsymbol{\alpha}) = D_{Re} \alpha_c^4 + i D_{Im} \alpha_c^4, \quad (145)$$

$$D_{Re} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + (\Omega_i)^2} [D_1 - D_2 - \Omega_i (D_3 + D_4)], \quad (146)$$

$$D_{Im} = \frac{\omega}{\omega^2 + (\Omega_i)^2} [\omega^2 (D_3 + D_4) - \Omega_i (D_1 - D_2)], \quad (147)$$

donde

$$D_1 = d_f \left[m_f + (1 - 2\frac{\alpha_k m_f}{\eta_0}) \frac{\eta_0}{m_f} \frac{\eta_0 M}{H_c} \right], \quad (148)$$

$$D_2 = m_f d_f \left(1 - \frac{\alpha_k}{m_f} \frac{\eta_0 M}{H_c} \right)^2, \quad (149)$$

$$D_3 = \frac{\eta_0 - m_f \Upsilon}{\Omega_\alpha} \left[d_s + d_f \left(1 - \frac{\alpha_k}{m_f} \frac{\eta_0 M}{H_c} \right) \right], \quad (150)$$

$$D_4 = \frac{\Upsilon}{\Omega_\alpha} \left[d_f m_f + d_f \left(1 - 2\frac{\alpha_k m_f}{\eta_0} \right) \frac{\eta_0}{m_f} \frac{\eta_0 M}{H_c} + m_f d_s \left(1 - \frac{\alpha_k}{m_f} \frac{\eta_0 M}{H_c} \right) \right]. \quad (151)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2}^2 &= \frac{\alpha_c^2}{2} (T_{Re} - iT_{Im}) \pm \frac{\alpha_c^2}{2} [T_{Re}^2 - T_{Im}^2 - 4D_{Re} - i2(T_{Re}T_{Im} + D_{Im})]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\alpha_c^2}{2} (T_{Re} - iT_{Im}) \pm \frac{\alpha_c^2}{2} \sqrt{\Delta}. \end{aligned} \quad (152)$$

Al usar el teorema de Moivre [94], se obtiene

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{\alpha_c^2}{2} (T_{Re} - iT_{Im}) \pm \frac{\alpha_c^2}{2} |\Delta|^{\frac{1}{2}} \left[\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right], \quad (153)$$

donde

$$|\Delta|^2 = \left(T_{Re}^2 - T_{Im}^2 - 4D_{Re}\right)^2 + 4(T_{Re}T_{Im} + 2D_{Im})^2, \quad (154)$$

$$\tan \phi = \frac{-2(T_{Re}T_{Im} + 2D_{Im})}{T_{Re}^2 - T_{Im}^2 - 4D_{Re}}, \quad (155)$$

por lo que

$$\alpha_{1,2}^2 = \alpha_{1,2}^{Re} \cdot \alpha_c^2 - i\alpha_{1,2}^{Im} \cdot \alpha_c^2, \quad (156)$$

donde

$$\alpha_{1,2}^{Re} = \frac{1}{2} \left(T_{Re} \pm |\Delta|^{1/2} \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \right), \quad (157)$$

$$\alpha_{1,2}^{Im} = \frac{1}{2} \left(T_{Im} \mp |\Delta|^{1/2} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right). \quad (158)$$

En esta sección se obtiene la solución general de la ecuación que gobierna la propagación de las ondas radiales. La solución general permite comprender los aspectos fundamentales de la propagación de estas ondas y su comportamiento a grandes rasgos. No obstante, para obtener información más relevante sobre las propiedades de la propagación de las ondas radiales, es necesario aplicar las condiciones de frontera libre de esfuerzo. Al implementar estas condiciones, se pueden obtener de manera explícita las ecuaciones de frecuencias. Por medio de las ecuaciones de frecuencias se puede establecer una relación entre la velocidad de fase y la atenuación de los modos naturales de vibración de las ondas radiales con las propiedades físicas del medio y la frecuencia. Esto permite una comprensión más detallada de las propiedades y el comportamiento de las ondas radiales en general.

V.2 Las ecuaciones de frecuencias

Para poder aplicar las condiciones de frontera libre de esfuerzos (127), primero se debe realizar el cambio de coordenadas al tensor de esfuerzos. Entonces, al sustituir (129)

en (128), se obtiene

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= \rho\Omega \left\{ (\alpha - 2\beta) \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) + 2\beta\partial_r \right\} \mathbf{R}_\alpha \mathbf{U} \\
&= \rho\Omega \left\{ \alpha \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) - 2\beta\frac{1}{r} \right\} \mathbf{R}_\alpha \mathbf{U} \\
&= \mathbf{A} \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \mathbf{U}(r, \omega) - \frac{2}{r} \mathbf{B} \mathbf{U},
\end{aligned} \tag{159}$$

donde

$$\mathbf{A} = \rho\Omega\alpha\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \rho\Omega\beta\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{160}$$

Cuando las condiciones de frontera (127), se aplican a (137), se genera la siguiente ecuación

$$\mathbf{0} = \left[\mathbf{A} \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \mathbf{U}(r, \omega) - \frac{2}{r} \mathbf{B} \mathbf{U}(R, \omega) \right]_{r=R}, \tag{161}$$

que al multiplicar por la izquierda por $\mathbf{L}_\alpha^T(\rho\Omega)^{-1}$, se puede reescribir como

$$\mathbf{0} = \left[\mathbf{\Lambda}_\alpha \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \mathbf{U}(r, \omega) - \frac{2}{r} \widehat{\mathbf{B}} \mathbf{U}(R, \omega) \right]_{r=R}, \tag{162}$$

donde $\mathbf{\Lambda}_\alpha$ está dada en la ecuación (131) y $\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{L}_\alpha^T \beta \mathbf{R}_\alpha$. Al usar la siguiente propiedad de las funciones Bessel,

$$\frac{d}{dr} J_1(xr) = -xJ_2(xr) + \frac{1}{r} J_1(xr), \tag{163}$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo de 2×2 ,

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 x_1 J_2(x_1) - 2(\alpha_1^2 - \widehat{b}_{11}) J_1(x_1) & 2\widehat{b}_{12} J_1(x_2) \\ 2\widehat{b}_{21} J_1(x_1) & \alpha_2^2 x_2 J_2(x_2) - 2(\alpha_2^2 - \widehat{b}_{22}) J_1(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \tag{164}$$

donde $x_1 = \kappa_{\alpha_1} R$, $x_2 = \kappa_{\alpha_2} R$ y \widehat{b}_{ij} son los componentes de la matriz $\widehat{\mathbf{B}}$. Al calcular el determinante de la matriz asociada a la ecuación (164) se tiene la siguiente ecuación de frecuencias

$$0 = \left[\alpha_1^2 x_1 J_2(x_1) - 2(\alpha_1^2 - \widehat{b}_{11}) J_1(x_1) \right] \left[\alpha_2^2 x_2 J_2(x_2) - 2(\alpha_2^2 - \widehat{b}_{22}) J_1(x_2) \right] - 4\widehat{b}_{12}\widehat{b}_{21} J_1(x_1) J_1(x_2). \quad (165)$$

El término independiente $-4\widehat{b}_{12}\widehat{b}_{21} J_1(x_1) J_1(x_2)$ de (165) es el responsable de acoplar los movimientos de las ondas P rápida y P lenta. Los coeficientes del término independiente \widehat{b}_{12} y \widehat{b}_{21} son elementos de la matriz $\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{L}_\alpha^T \boldsymbol{\beta} \mathbf{R}_\alpha$, los cuales están dados explícitamente por

$$\widehat{b}_{11} = l_{11} r_{11} \beta^{\text{mm}} + l_{21} r_{11} \beta^{\text{im}} + l_{11} r_{21} \beta^{\text{mi}} + l_{21} r_{21} \beta^{\text{ii}}, \quad (166)$$

$$\widehat{b}_{12} = l_{11} r_{12} \beta^{\text{mm}} + l_{21} r_{12} \beta^{\text{im}} + l_{11} r_{22} \beta^{\text{mi}} + l_{21} r_{22} \beta^{\text{ii}}, \quad (167)$$

$$\widehat{b}_{21} = l_{12} r_{11} \beta^{\text{mm}} + l_{22} r_{11} \beta^{\text{im}} + l_{12} r_{21} \beta^{\text{mi}} + l_{22} r_{21} \beta^{\text{ii}}, \quad (168)$$

$$\widehat{b}_{22} = l_{11} r_{12} \beta^{\text{mm}} + l_{22} r_{12} \beta^{\text{im}} + l_{12} r_{22} \beta^{\text{mi}} + l_{22} r_{22} \beta^{\text{ii}}, \quad (169)$$

donde

$$\beta^{\text{mm}} = \left(1 - i\alpha_\mu \frac{\omega}{\Omega_\beta} \right) \beta_c^2, \quad (170)$$

$$\beta^{\text{mi}} = \left[m_f + i \frac{\omega}{\Omega_\beta} (\eta_0 - m_f \alpha_\mu) \right] \beta_c^2, \quad (171)$$

$$\beta^{\text{im}} = \left[d_f + i \frac{\omega}{\Omega_\beta} d_s \alpha_\mu \right] \frac{\omega}{\omega + i\Omega_i} \beta_c^2, \quad (172)$$

$$\beta^{\text{ii}} = \left[d_f m_f - i \frac{\omega}{\Omega_\beta} d_s (\eta_0 - m_f \alpha_\mu) \right] \frac{\omega}{\omega + i\Omega_i} \beta_c^2, \quad (173)$$

son los elementos de la matriz $\boldsymbol{\beta} = \Omega^{-1} (\mathbf{C}_\beta - i\omega \mathbf{N}_\beta)$. En este caso $\beta_c^2 = \frac{\mu_0}{\rho_m}$, donde μ_0 es el módulo de cizallamiento de la matriz sólida y ρ_m es la densidad total. En el caso de las ondas radiales, el módulo de cizallamiento es la propiedad que predomina en el término independiente. Si el sólido es flexible, el valor del módulo de cizallamiento μ_0

es menor a uno ($\mu_0 \ll 1$), lo que permite despreciar el término independiente, puesto que $\widehat{b}_{12}\widehat{b}_{21}$ estaría en términos de $\beta_c^4 \approx 0$. Como resultado, las ecuaciones de frecuencias asociadas a las ondas P rápida y P lenta se desacoplan de forma directa. Sin embargo, en el caso de un marco sólido rígido ($\mu_0 > 1$), se requiere analizar un enfoque distinto. Al dividir la ecuación (165) por el producto $\alpha_1^2\alpha_2^2$, se reescribe como

$$0 = \left[x_1 J_2(x_1) - 2 \frac{(\alpha_1^2 - \widehat{b}_{11})}{\alpha_1^2} J_1(x_1) \right] \left[x_2 J_2(x_2) - 2 \frac{(\alpha_2^2 - \widehat{b}_{22})}{\alpha_2^2} J_1(x_2) \right] - \frac{2\widehat{b}_{21}}{\alpha_1^2} \frac{2\widehat{b}_{12}}{\alpha_2^2} J_1(x_1) J_1(x_2). \quad (174)$$

Para desacoplar las ecuaciones de frecuencias, se definen los siguientes parámetros

$$2 \frac{(\alpha_1^2 - \widehat{b}_{11})}{\alpha_1^2} \equiv E_{11}^{Re} + iE_{11}^{Im}, \quad 2 \frac{(\alpha_2^2 - \widehat{b}_{22})}{\alpha_2^2} \equiv E_{22}^{Re} + iE_{22}^{Im}, \quad (175)$$

$$\frac{2\widehat{b}_{21}}{\alpha_1^2} \equiv E_{21}^{Re} + iE_{21}^{Im}, \quad \frac{2\widehat{b}_{12}}{\alpha_2^2} \equiv E_{12}^{Re} + iE_{12}^{Im}, \quad (176)$$

donde

$$E_{11}^{Re} = \frac{2}{\alpha_c^2} \cdot \frac{(\alpha_1^{Re} \alpha_c^2 - \widehat{b}_{11}^{Re}) \alpha_1^{Re} + (\alpha_1^{Im} \alpha_c^2 - \widehat{b}_{11}^{Im}) \alpha_1^{Im}}{(\alpha_1^{Re})^2 + (\alpha_1^{Im})^2}, \quad (177)$$

$$E_{11}^{Im} = \frac{2}{\alpha_c^2} \cdot \frac{(\alpha_1^{Re} \alpha_c^2 - \widehat{b}_{11}^{Re}) \alpha_1^{Im} - (\alpha_1^{Im} \alpha_c^2 - \widehat{b}_{11}^{Im}) \alpha_1^{Re}}{(\alpha_1^{Re})^2 + (\alpha_1^{Im})^2}, \quad (178)$$

$$E_{22}^{Re} = \frac{2}{\alpha_c^2} \cdot \frac{(\alpha_2^{Re} \alpha_c^2 - \widehat{b}_{22}^{Re}) \alpha_2^{Re} + (\alpha_2^{Im} \alpha_c^2 - \widehat{b}_{22}^{Im}) \alpha_2^{Im}}{(\alpha_2^{Re})^2 + (\alpha_2^{Im})^2}, \quad (179)$$

$$E_{22}^{Im} = \frac{2}{\alpha_c^2} \cdot \frac{(\alpha_2^{Re} \alpha_c^2 - \widehat{b}_{22}^{Re}) \alpha_2^{Im} - (\alpha_2^{Im} \alpha_c^2 - \widehat{b}_{22}^{Im}) \alpha_2^{Re}}{(\alpha_2^{Re})^2 + (\alpha_2^{Im})^2}, \quad (180)$$

$$E_{21}^{Re} = \frac{2}{\alpha_c^2} \cdot \frac{(\alpha_1^{Re} \widehat{b}_{21}^{Re}) + \alpha_1^{Im} \widehat{b}_{21}^{Im}}{(\alpha_1^{Re})^2 + (\alpha_1^{Im})^2}, \quad (181)$$

$$E_{21}^{Im} = \frac{2}{\alpha_c^2} \cdot \frac{(\alpha_1^{Im} \widehat{b}_{21}^{Re}) - \alpha_1^{Re} \widehat{b}_{21}^{Im}}{(\alpha_1^{Re})^2 + (\alpha_1^{Im})^2}, \quad (182)$$

$$E_{12}^{Re} = \frac{2}{\alpha_c^2} \cdot \frac{(\alpha_2^{Re} \widehat{b}_{12}^{Re}) + \alpha_2^{Im} \widehat{b}_{12}^{Im}}{(\alpha_2^{Re})^2 + (\alpha_2^{Im})^2}, \quad (183)$$

$$E_{12}^{Im} = \frac{2}{\alpha_c^2} \cdot \frac{(\alpha_2^{Im} \widehat{b}_{12}^{Re}) - \alpha_2^{Re} \widehat{b}_{12}^{Im}}{(\alpha_2^{Re})^2 + (\alpha_2^{Im})^2}. \quad (184)$$

Al reescribir (174) en términos de (175) y (176) y separar en su parte real y parte imaginaria, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$0 = [x_1 J_2(x_1) - E_{11}^{Re} J_1(x_1)] [x_2 J_2(x_2) - E_{22}^{Re} J_1(x_2)] - (E_{11}^{Im} E_{22}^{Im} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Re} - E_{21}^{Im} E_{12}^{Im}) J_1(x_1) J_1(x_2), \quad (185)$$

$$0 = E_{11}^{Re} [x_2 J_2(x_2) - E_{22}^{Re} J_1(x_2)] J_1(x_1) + E_{22}^{Im} [x_1 J_2(x_1) - E_{11}^{Re} J_1(x_1)] J_1(x_2) + (E_{21}^{Im} E_{12}^{Re} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Im}) J_1(x_1) J_1(x_2). \quad (186)$$

De (185) se llega a la igualdad

$$\frac{x_2 J_2(x_2) - E_{22}^{Re} J_1(x_2)}{J_1(x_2)} = \frac{(E_{11}^{Im} E_{22}^{Im} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Re} - E_{21}^{Im} E_{12}^{Im}) J_1(x_1)}{x_1 J_2(x_1) - E_{11}^{Re} J_1(x_1)}, \quad (187)$$

que al sustituirla en (186) y después de dividir por $J_1(x_2)$, se reescribe como

$$0 = E_{22}^{Im} [x_1 J_2(x_1) - E_{11}^{Re} J_1(x_1)] + E_{11}^{Im} \frac{(E_{11}^{Im} E_{22}^{Im} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Re} - E_{21}^{Im} E_{12}^{Im}) J_1(x_2)}{x_1 J_2(x_1) - E_{11}^{Re} J_1(x_1)} J_1(x_1) + (E_{21}^{Im} E_{12}^{Re} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Im}) J_1(x_2), \quad (188)$$

que al multiplicarla por la expresión $[x_1 J_2(x_1) - E_{11}^{Re} J_1(x_1)]$, la ecuación a resolver es

$$0 = E_{22}^{Re} [x_1 J_2(x_1) - E_{11}^{Re} J_1(x_1)]^2 + (E_{21}^{Im} E_{12}^{Re} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Im}) [x_1 J_2(x_1) - E_{11}^{Re} J_1(x_1)] J_1(x_1) + E_{11}^{Im} (E_{11}^{Im} E_{22}^{Im} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Re} - E_{21}^{Im} E_{12}^{Im}) J_1^2(x_1). \quad (189)$$

La ecuación (189) en términos de $x_1 = \kappa_{\alpha_1} R$ se conoce como la ecuación de frecuencias asociada a la onda P rápida (α_1). Dicha ecuación nos permite comprender cómo las características físicas del medio afectan a la amplitud y velocidad de la onda P rápida relacionadas con las diferentes frecuencias presentes en su propagación.

Análogamente, de (185), se obtiene la igualdad

$$\frac{x_1 J_2(x_1) - E_{11}^{Re} J_1(x_1)}{J_1(x_1)} = \frac{(E_{11}^{Im} E_{22}^{Im} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Re} - E_{21}^{Im} E_{12}^{Im}) J_1(x_2)}{x_2 J_2(x_2) - E_{22}^{Re} J_1(x_2)}, \quad (190)$$

que al sustituirla en (186) después de dividir por $J_1(x_1)$, se obtiene la siguientes ecuación

$$0 = E_{11}^{Re} [x_2 J_2(x_2) - E_{22}^{Re} J_1(x_2)] + E_{22}^{Im} \frac{(E_{11}^{Im} E_{22}^{Im} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Re} - E_{21}^{Im} E_{12}^{Im}) J_1(x_2)}{x_2 J_2(x_2) - E_{22}^{Re} J_1(x_2)} J_1(x_2) + (E_{21}^{Im} E_{12}^{Re} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Im}) J_1(x_2), \quad (191)$$

que al multiplicarla por la expresión $[x_2 J_2(x_2) - E_{22}^{Re} J_1(x_2)]$, se llega a

$$0 = E_{11}^{Re} [x_2 J_2(x_2) - E_{22}^{Re} J_1(x_2)]^2 + (E_{21}^{Im} E_{12}^{Re} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Im}) [x_2 J_2(x_2) - E_{22}^{Re} J_1(x_2)] J_1(x_2) + E_{22}^{Im} (E_{11}^{Im} E_{22}^{Im} + E_{21}^{Re} E_{12}^{Re} - E_{21}^{Im} E_{12}^{Im}) J_1^2(x_2). \quad (192)$$

La ecuación (192) está en términos de $x_2 = \kappa_{\alpha_2} R$ se conoce como la ecuación de frecuencias asociada a la onda P lenta (α_2). Dicha ecuación nos permite comprender cómo las características físicas del medio afectan a la amplitud y velocidad de las ondas P lentas relacionadas con las diferentes frecuencias presentes en su propagación.

Uno de los objetivos de este trabajo de tesis es obtener las soluciones de las ecuaciones de frecuencias [ecuaciones (189) y (192)]. Es importante destacar que buscamos solamente las raíces reales puesto que se buscan las soluciones a las que las ecuaciones de frecuencia correspondan a frecuencias físicamente posibles. En el contexto de sistemas físicos en vibración, las frecuencias reales representan las frecuencias naturales a las cuales el sistema puede vibrar de manera estable y armónica. Las ecuaciones de frecuencia con raíces reales y simples proporcionan información valiosa sobre las características vibracionales de un sistema. Estas propiedades aseguran que las soluciones sean físicamente factibles y únicas.

V.3 La velocidad de fase y atenuación de la onda radial rápida

Al obtener las soluciones de las ecuaciones de frecuencias (189) y (192), se puede determinar con precisión el valor del número de onda radial correspondiente a cada modo natural de vibración. Estas soluciones nos proporcionan información esencial sobre la interacción de las ondas P rápida y P lenta, las propiedades del medio y el efecto que tiene en la velocidad de fase y la atenuación de las ondas.

Las raíces (ζ_p) para la velocidad de fase y la atenuación de la onda P rápida se obtienen a partir la solución de la ecuación de frecuencias (189). Sea ζ_p la p -ésima raíz no nula de la ecuación de frecuencias asociada a la velocidad de la onda P rápida (α_1), entonces por la ecuación (138) y al ser la raíz real, se obtiene que

$$\zeta_p = \kappa_{\alpha_1,p} R. \quad (193)$$

El número de onda radial se define en términos de la frecuencia de la onda (ω) y la velocidad de propagación de la onda (α_1) [88, 108, 110]. Para las ondas radiales, el número de onda radial se calcula como $k_{fast,p} = \frac{\omega}{\alpha_1}$. Entonces al definir $k_{fast,p} \equiv \kappa_{\alpha_1,p}$ y al considerar que es un número complejo de la forma

$$k_{fast,p} = k_{Re,p}^{fast} + ik_{Im,p}^{fast}, \quad (194)$$

y al comparar con la parte real y parte imaginaria de (193), se obtiene que

$$k_{Re,p}^{fast} = \zeta_p, \quad (195)$$

$$k_{Im,p}^{fast} = 0. \quad (196)$$

El superíndice $fast$, como en la sección III.3, indica que se trata de parámetros relacionados con la velocidad de la onda P rápida (α_1). De (195), se obtiene la expresión

analítica para la velocidad de fase de las ondas radiales, que está dada por

$$V_{\omega,p}^{fast} = \frac{\omega}{|k_{re,p}^{fast}|}. \quad (197)$$

La velocidad de fase para la onda P rápida está determinada por las propiedades físicas del medio, la velocidad de la onda P rápida (α_1), la frecuencia (ω) y el p -ésimo modo de vibración radial, como se describe en la ecuación (189).

En el caso de las ondas radiales, la parte imaginaria del número de onda radial es cero [ecuación (196)] por lo que no se puede aplicar directamente la fórmula de la atenuación que se utilizó para el caso de las ondas torsionales, (sección III.3). Es decir, no se puede emplear directamente la fórmula

$$A_{\omega,p}^{fast} = \frac{1}{|k_{Im,p}^{fast}|}. \quad (198)$$

El presente modelo para la propagación de las ondas radiales plantea un desafío en cuanto a su aplicabilidad en la práctica, debido a las limitaciones de las ecuaciones existentes en proporcionar una expresión adecuada para la atenuación de las ondas. Aunque los modelos teóricos han desempeñado un papel fundamental en la comprensión y predicción del comportamiento de las ondas en diversos campos científicos y de ingeniería, en este caso, la falta de una expresión precisa para los fenómenos de atenuación representa un obstáculo significativo para su implementación en situaciones reales.

V.4 La velocidad de fase y atenuación de la onda radial lenta

Análogo al caso de la sección V.3, las expresiones analíticas para la velocidad de fase de la onda P lenta está dada por

$$V_{\omega,p}^{slow} = \frac{\omega}{|k_{re,p}^{slow}|}. \quad (199)$$

El superíndice *slow*, como en la sección III.4, indica que se trata de parámetros relacionados con la velocidad de la onda P lenta (α_2). Análogamente al caso de la ondas P rápida, la velocidad de fase está determinada por las propiedades físicas del medio, la velocidad de la onda P lenta (α_2), la frecuencia (ω) y el p -ésimo modo de vibración radial, como se describe en (199).

Al igual que en el caso de la onda P rápida, el número de onda radial es un número real. Entonces, la fórmula de la atenuación que se utilizó para el caso de las ondas torsionales (sección III.4) no es aplicable de manera directa. En otras palabras, la fórmula para la atenuación de las ondas radiales lentas

$$A_{\omega,p}^{slow} = \frac{1}{|k_{Im,p}^{slow}|}, \quad (200)$$

se indetermina cuando la atenuación es igual a cero. Por este motivo, el modelo no se puede implementar en situaciones realistas.

V.5 Frecuencias naturales de las ondas radiales

En el marco de esta investigación, se ha logrado un avance significativo al obtener una expresión analítica y precisa para las ecuaciones de frecuencias de la onda P rápida y P lenta, un logro que hasta el momento no ha sido documentado en trabajos de la

literatura, como lo son [4, 65, 66, 67, 87, 88]. En dichos estudios, no se logra encontrar una expresión analítica para las ecuaciones de frecuencias de la onda P rápida y P lenta desacopladas, lo que conduce a la aplicación de métodos numéricos de una ecuación que combina la información de las ondas P rápidas y lentas. Esto arroja como resultado una manera imprecisa de relacionar los modos naturales de vibración asociados con las ondas P , con las raíces de las ecuaciones de frecuencias. En esta investigación, la obtención de las ecuaciones de frecuencia explícitas para las ondas P rápidas y P lentas, permite establecer una asociación directa y clara entre cada solución y los modos naturales de vibración. Este logro proporciona un sólido fundamento teórico y una herramienta invaluable para el estudio de las ondas radiales en diversos contextos, abriendo nuevas perspectivas para la investigación y aplicaciones de las ondas radiales en distintas disciplinas del conocimiento. A pesar de obtener expresiones explícitas para las ecuaciones de frecuencias de las ondas P rápidas y P lentas, la definición de velocidad de fase y atenuación impide obtener una expresión analítica para la atenuación de las ondas radiales en cilindros poroelásticos, como se hizo con las ondas torsionales. No obstante, es importante destacar que la solución de las ecuaciones de frecuencias proporciona información valiosa sobre las frecuencias naturales. Estas frecuencias juegan un papel fundamental en una amplia variedad de aplicaciones en diversos campos científicos y de la ingeniería, ya que las vibraciones pueden causar desgaste y generar fracturas en los materiales en los que se propagan, y las frecuencias naturales están ligadas a muchas de las fallas conocidas [111]. Su estudio puede ser utilizado en el análisis de fenómenos sísmicos, la evaluación de la estabilidad de infraestructuras, y en la mejora del rendimiento y respuesta vibracional de componentes aeroespaciales. Por tanto, el estudio de las frecuencias naturales es fundamental y tiene aplicaciones muy diversas. Para obtener las frecuencias naturales de las ondas radiales en cilindros poroelásticos, en este trabajo se aplicaron las condiciones de frontera libre de esfuerzos a la solución

de la ecuación del modo radial de vibración, dada por (159). Así, se obtuvieron las ecuaciones de frecuencias para la onda P rápida y P lenta, que posibilitan determinar las frecuencias naturales y realizar un análisis de su comportamiento en relación con las propiedades físicas del medio.

El capítulo VI se enfoca en el análisis y estudio de las frecuencias naturales a través de simulaciones computacionales. Se consideran las propiedades físicas de cilindros poroelásticos de arenisca completamente saturados con agua o queroseno, utilizando el marco de la TBVE. La caracterización de las frecuencias naturales de las ondas radiales en cilindros poroelásticos representa un avance significativo y abre nuevas oportunidades de investigación y aplicaciones en diversos ámbitos.

Capítulo VI

SIMULACIONES COMPUTACIONALES: ONDAS RADIALES

En este capítulo se realiza un análisis de las frecuencias naturales asociadas a las ondas radiales en cilindros poroelásticos usando la TBVE. Estas frecuencias son esenciales para caracterizar propiedades físicas y el comportamiento dinámico de los materiales. El enfoque de este capítulo se centra en presentar las frecuencias naturales de los modos de vibración y cómo estas se ven afectadas por cambios en las propiedades de los cilindros poroelásticos. Este análisis ofrece una comprensión completa del comportamiento dinámico de los cilindros poroelásticos, identificando sus modos de vibración característicos, lo cual es crucial para comprender fenómenos sísmicos, evaluar la estabilidad de estructuras y mejorar el rendimiento de componentes aeroespaciales en respuesta vibracional.

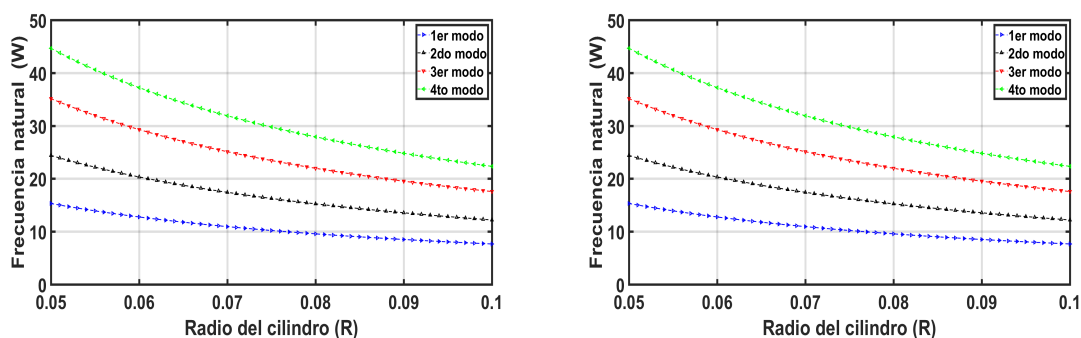
VI.1 Simulaciones computacionales

En el capítulo V se desarrolló el marco teórico para obtener la solución analítica de las ecuaciones de movimiento de la TBVE para el modo radial de vibración en cilindros poroelásticos infinitos homogéneos con simetría axial completamente saturados con un fluido. Para realizar un análisis del comportamiento de las frecuencias naturales de las ondas radiales en un cilindro poroelástico, se utilizarán muestras de cilindros de arenisca como material de la matriz sólida que está completamente saturada con agua o queroseno. Los parámetros de la matriz sólida están dados en la tabla I, mientras que los parámetros del fluido están dados en la tabla II.

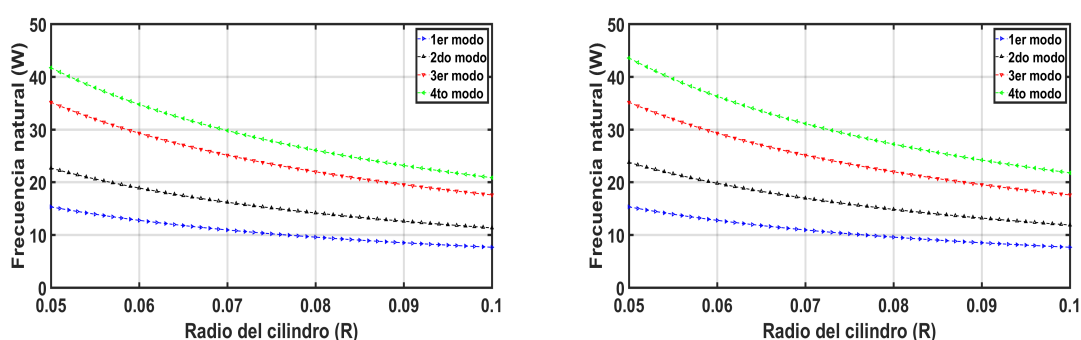
Las frecuencias naturales de la onda P rápida y P lenta están relacionadas con las ecuaciones de frecuencias (189) y (192), respectivamente. Entonces, el parámetro de la frecuencia adimensional se define como [88]

$$W_{i,p} = \frac{\omega}{\pi\alpha_{i,p}}R, \quad i = 1, 2, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (201)$$

El subíndice $i = 1$ corresponde a las frecuencias asociadas a la onda P rápida mientras que el subíndice $i = 2$ corresponde a las frecuencias asociadas a la onda P lenta. Para calcular la frecuencia natural del p -ésimo modo natural de vibración asociado a la onda P rápida, se debe encontrar la p -ésima raíz de (189). Análogamente, para encontrar la frecuencia natural asociada al p -ésimo modo natural de vibración asociado a la onda P lenta, se debe encontrar la p -ésima raíz de (192). Para determinar las raíces de las ecuaciones de frecuencias, se puede utilizar el algoritmo de la sección III.2.2, tomando la aproximación de las raíces por medio de un método numérico. En la figura 9, se presentan las frecuencias naturales de la onda P rápida (figura 9a) y las frecuencias naturales de la onda P lenta (figura 9b) correspondientes a los cuatro primeros modos naturales de vibración. Estas gráficas muestran la variación de las frecuencias naturales en función del radio del cilindro, que varía desde 5 *cm* hasta 10 *cm*. En las figuras del lado izquierdo, se presentan los resultados para un cilindro de arenisca completamente saturado con queroseno, mientras que en el lado derecho se muestran los resultados para un cilindro de arenisca completamente saturado con agua. Cada color representa un modo natural específico de vibración: las curvas azules corresponden al primer modo, las curvas negras al segundo, las curvas rojas al tercer modo y las curvas verdes al cuarto modo. Podemos analizar el comportamiento de cada modo de vibración porque aparece explícitamente como parámetro en la ecuación de la frecuencia natural. Es importante destacar que se observa un aumento en el valor de la frecuencia natural a medida que el modo natural de vibración es mayor y la frecuencia



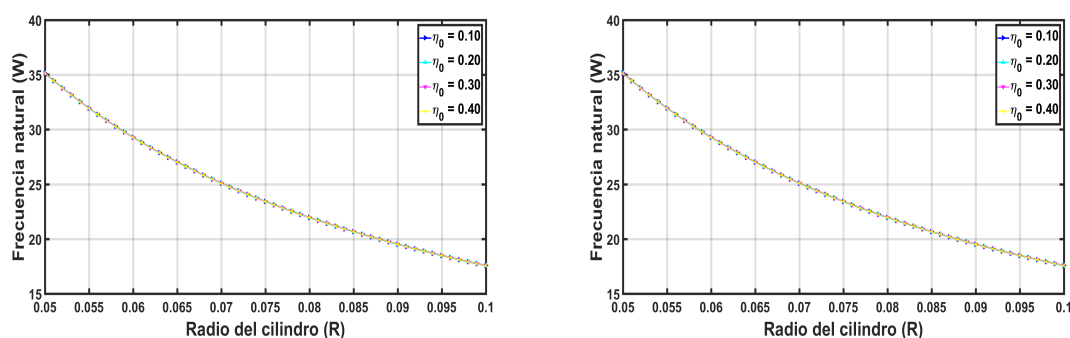
(a) Frecuencias naturales para la onda P rápida para diferentes valores del radio R .



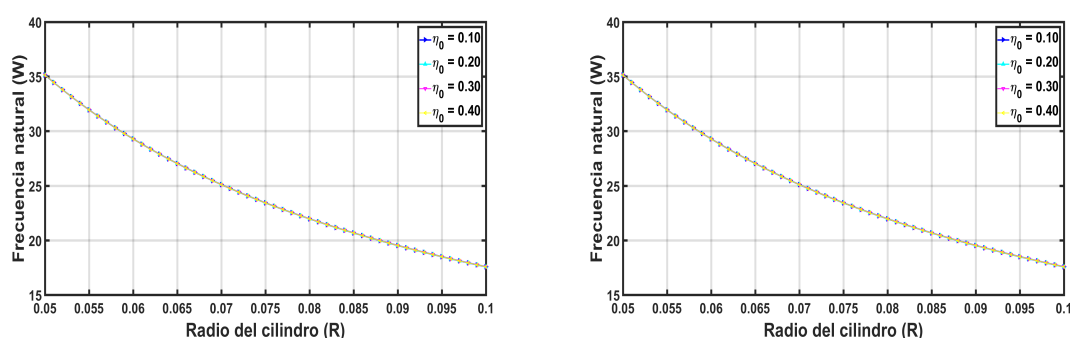
(b) Frecuencias naturales para las ondas P lentas para diferentes valores del radio R .

Figura 9: Frecuencias naturales para la onda P rápida y P lenta sobre un cilindro poroelástico de arenisca completamente saturado con queroseno (figuras de la izquierda) y con agua (figuras de la derecha). Las curvas azules, negras, rojas y verdes muestran el primer, segundo, tercer y cuarto modo natural de vibración, respectivamente.

natural disminuye ligeramente cuando el radio del cilindro disminuye, lo que indica una relación aparente entre la frecuencia, el p -ésimo modo natural de vibración y el radio del cilindro. En la figura 10, se presentan las frecuencias naturales de la onda P rápida (figura 10a) y las frecuencias naturales de la onda P lenta (figura 10b) correspondiente al primer modo natural de vibración variando el parámetro de porosidad del cilindro. Estas gráficas muestran la variación del primer modo natural de vibración variando la porosidad del cilindro de un 10 % hasta un 40 %, tomando un tamaño de paso del 10 %. En las figuras del lado izquierdo, se presentan los resultados para un cilindro de arenisca



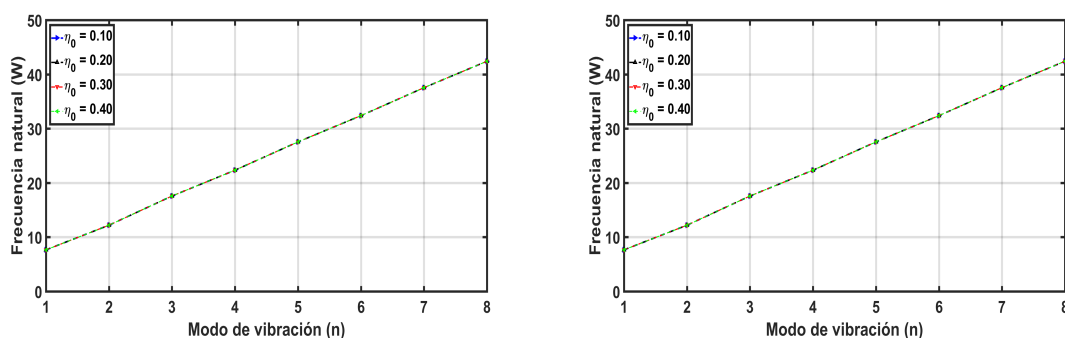
(a) Frecuencias naturales para la onda P rápida para diferentes valores del radio R .



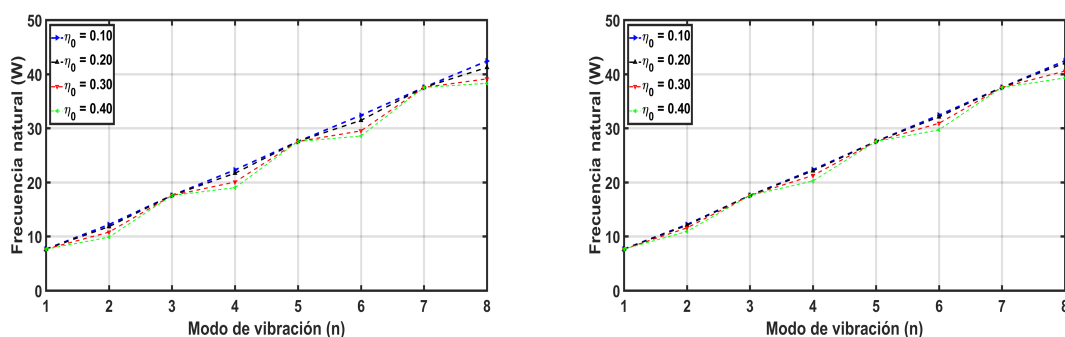
(b) Frecuencias naturales para las ondas P lentas para diferentes valores del radio R .

Figura 10: Frecuencias naturales para la ondas P rápida y P lenta sobre un cilindro poroelástico de arenisca completamente saturado con queroseno (figuras de la izquierda) y con agua (figuras de la derecha). Las curvas azules, cyan, magenta y amarillas muestran el 10 %, 20 %, 30 % y 40 % de porosidad, respectivamente.

completamente saturado con queroseno, mientras que en el lado derecho se muestran los resultados para un cilindro de arenisca completamente saturado con agua. En las gráficas no se destaca un cambio importante entre los distintos tipos de porosidad para el primer modo natural de vibración pero se puede apreciar un cambio en el valor de la frecuencia natural a medida que el radio del cilindro aumenta, lo que indica una relación aparente entre la frecuencia y el radio del cilindro pero no entre el cambio de porosidad. En la figura 11, se presentan las frecuencias naturales de la onda P rápida (figura 11a) y las frecuencias naturales de la onda P lenta (figura 11b) correspondientes a los ocho



(a) Frecuencias naturales para el n -ésimo modo natural de vibración de la onda P rápida para diferente modo natural de vibración.



(b) Frecuencias naturales para el n -ésimo modo natural de vibración de las ondas P lentas para diferente modo natural de vibración.

Figura 11: Frecuencias naturales para la onda P rápida y P lenta sobre un cilindro poroelástico de arenisca completamente saturado con queroseno (figuras de la izquierda) y con agua (figuras de la derecha). Las curvas azules, cyan, magenta y amarillas muestran el 10 %, 20 %, 30 % y 40 % de porosidad, respectivamente.

primeros modos naturales de vibración. Estas gráficas muestran el comportamiento de los primeros ocho modos naturales de vibración variando la porosidad del cilindro de un 10 % hasta un 40 %. En las figuras del lado izquierdo, se presentan los resultados para un cilindro de arenisca completamente saturado con queroseno, mientras que en el lado derecho se muestran los resultados para un cilindro de arenisca completamente saturado con agua. El eje horizontal corresponde a los distintos modos naturales de vibración.

Como se puede observar, el valor de la frecuencia natural aumenta conforme aumenta el modo natural de vibración y la frecuencia se mantiene para los modos impares y varía ligeramente para los modos pares, lo que indica una relación aparente entre la frecuencia, el p -ésimo modo natural de vibración y la porosidad.

VI.2 Discusión de los resultados

En este capítulo se llevó a cabo un estudio sobre la variación de las frecuencias naturales de los modos naturales de vibración de la onda P rápida y P lenta en cilindros poroelásticos homogéneos con simetría axial, utilizando la TBVE. Una frecuencia natural se define como una frecuencia de oscilación en la que un sistema vibra sin que se le aplique ninguna fuerza externa. En el caso de los cilindros poroelásticos, las frecuencias naturales están relacionadas con la estructura porosa del material y con los parámetros físicos del material, como la densidad, porosidad, permeabilidad, densidad del sólido o el fluido, el radio del cilindro, y el p -ésimo modo natural de vibración. Para encontrar dichas frecuencias, se aplicaron las condiciones de frontera libre de esfuerzos a la solución general de las ecuaciones que gobiernan el modo radial de vibración. Esto genera un sistema de ecuaciones homogéneo de 2×2 , [ecuación (164)], que involucra las funciones de Bessel de primer tipo, de orden cero y orden uno. El sistema tiene solución no trivial si el determinante de la matriz asociada al sistema es cero. En este caso, la matriz asociada es compleja, por lo que al calcular el determinante se obtiene un sistema de ecuaciones de 2×2 , una ecuación correspondiente a la parte real y la otra correspondiente a la parte imaginaria. Al tratar algebraicamente las ecuaciones, se puede determinar dos ecuaciones de frecuencias independientes, una relacionada con la velocidad de la onda P rápida (188) y la otra con la velocidad de la onda P lenta (192). Para determinar las raíces de las ecuaciones de frecuencias, se puede utilizar

el algoritmo de la sección III.2.2, tomando la aproximación de las raíces por medio de un método numérico. Al resolver las ecuaciones de frecuencias de forma explícita, se pueden calcular los modos naturales de vibración por medio de (201). Las frecuencias naturales son consideradas como una propiedad de suma importancia para estudiar cualquier sistema, ya que la mayoría de las fallas en sistemas mecánicos y estructuras se asocian con estas frecuencias [111].

Aunque en la literatura existen trabajos previos que analizan las frecuencias naturales de vibraciones radiales utilizando la teoría de elasticidad [109, 108, 112] o la teoría de poroelasticidad [65, 66, 67, 88] en cilindros y anillos cilíndricos, es relevante mencionar que estos autores no logran obtener de manera explícita las ecuaciones de frecuencias relacionadas con la onda P rápida y P lenta. En estos trabajos, se calcula directamente las raíces utilizando la expresión del determinante de la matriz asociada al sistema generado al aplicar las condiciones de frontera, ecuación (18) en [65], ecuaciones (17) y (18) en [66], ecuación (13) en [67], ecuación (17) en [88] o ecuación (17) en [109], por mencionar algunos; sin realizar un proceso algebraico para desacoplar las ecuaciones de frecuencia, como se hace en este trabajo. Además, cuando se resuelve numéricamente la ecuación de frecuencias, no se puede obtener fórmulas explícitas para los modos naturales de vibración, para la velocidad de fase o la atenuación donde se vinculen explícitamente la velocidad de fase y las atenuaciones radiales con la velocidad de la onda P rápida y P lenta, las propiedades del medio y la frecuencia. Así mismo, resulta complejo identificar con precisión los modos naturales que contribuyen de manera significativa al comportamiento de las ondas.

En este trabajo, las expresiones analíticas para las frecuencias naturales se presentan en términos de la frecuencia, la velocidad de la onda P , que están en términos de las propiedades físicas del medio, como la porosidad, la permeabilidad, la densidad del sólido y el fluido, entre otros. Además, el parámetro de frecuencias y el p -ésimo modo

de vibración aparecen explícitamente. Se analizaron las frecuencias naturales de la onda P rápida y P lenta correspondientes a los primeros cuatro modos naturales de vibración para un cilindro de arenisca completamente saturado con agua o queroseno. Se llevaron a cabo simulaciones variando el radio del cilindro y el porcentaje de porosidad para evaluar su influencia en el comportamiento de las frecuencias naturales de vibración de cada uno de los modos. Por ejemplo, en la figura 9 se presentaron las frecuencias naturales para los primeros cuatro modos de vibración, mostrando un aumento en el valor de la frecuencia natural conforme aumentan los modos naturales de vibración. También se observó que el fluido que satura al cilindro poroelástico (agua o queroseno) influye en las frecuencias naturales. En la figura 10, se estudió el primer modo natural de vibración al variar el porcentaje de porosidad del cilindro. Los resultados revelaron que, aunque hubo cambios en el valor de la frecuencia natural a medida que aumentó el radio del cilindro, no se destacó un cambio significativo para el primer modo de vibración en las frecuencias al variar la porosidad. En la figura 11 se presentan las frecuencias naturales de la onda P rápida y P lenta correspondiente a los primeros ocho modos naturales de vibración variando la porosidad desde un 10% hasta un 40% con un tamaño de paso del 10%. En estas gráficas se observa que los modos naturales pares no presentan variación significativa para los modos asociados a la ondas P rápida pero sí afectan a los modos pares de la onda P lenta. En general, estos hallazgos indican una clara relación entre la frecuencia natural y el radio del cilindro, mientras que la porosidad no parece tener una influencia significativa en el primer modo de vibración. Estos resultados proporcionan información relevante para comprender el comportamiento dinámico del cilindro en diferentes condiciones de saturación y tamaños, lo cual es esencial para el diseño y análisis de estructuras en general. Sin embargo, es importante tener en cuenta que estos hallazgos se basan en simulaciones y que pueden existir otras variables no consideradas que podrían afectar la respuesta

vibracional del cilindro. En futuras investigaciones, sería valioso profundizar en la exploración de otros modos naturales de vibración y considerar factores adicionales que puedan influir en las frecuencias naturales del cilindro, como la presencia de grietas o la variación en las propiedades mecánicas del material. Estos enfoques podrían proporcionar una visión más completa del comportamiento dinámico del cilindro y enriquecer la comprensión de su respuesta ante diferentes condiciones y escenarios. En conclusión, los resultados obtenidos en este trabajo han proporcionado información valiosa sobre las frecuencias naturales de la onda P rápida y P lenta en cilindros poroelásticos. Se ha observado que la frecuencia radial aumenta con el número del modo natural de vibración y disminuye conforme el radio del cilindro aumenta. Además, se ha demostrado que la porosidad tiene un efecto leve en los modos pares de las ondas P lentas, mientras que no afecta significativamente las frecuencias naturales de la ondas P rápida. Estos resultados son fundamentales para avanzar en el campo de los cilindros poroelásticos y pueden tener aplicaciones en el diseño de materiales acústicos y estructuras sónicas. No obstante, este estudio abre la puerta a futuras investigaciones y refinamientos en el análisis de las ondas radiales en cilindros poroelásticos, con el objetivo de profundizar en su comprensión y mejorar la precisión de los resultados obtenidos.

Capítulo VII

CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis se realizó una investigación sobre la propagación de ondas torsionales y radiales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos utilizando la TBVE. El objetivo inicial de este trabajo de tesis fue obtener expresiones analíticas de la velocidad de fase y la atenuación de las ondas torsionales y radiales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos completamente saturados con un fluido, isótropos, homogéneos, con simetría axial y con condiciones de frontera libre de esfuerzos en ambas superficies, utilizando el marco teórico de la TBVE. Para abordar de manera efectiva el objetivo planteado, se empleó un enfoque que dividió el desarrollo y análisis de la propagación de ondas en dos partes: ondas torsionales y ondas radiales. En el caso de las ondas torsionales, el objetivo se alcanzó de manera satisfactoria. En el caso de las ondas radiales, dada la definición de velocidad de fase y atenuación, el estudio realizado derivó en el cálculo de frecuencias naturales en cilindros poroelásticos. A continuación se presentan las conclusiones alcanzadas en cada una de estas áreas de estudio.

VII.1 Ondas torsionales

Utilizando el marco teórico de la TBVE, en este trabajo de tesis se presentó una metodología para obtener expresiones analíticas para la velocidad de fase y atenuación de las ondas torsionales en anillos cilíndricos poroelásticos homogéneos, isótropos, con simetría axial completamente saturados con un fluido y sujeto a condiciones de frontera libre de esfuerzo en ambas fronteras. Estas expresiones se presentan en términos de las propiedades físicas del medio, como la porosidad, la permeabilidad, la densidad

del sólido y del fluido, entre otras. Además, también aparece de manera explícita el parámetro de la frecuencia (ω), la velocidad de las ondas S rápida y S lenta, β_1 y β_2 , respectivamente, y el p -ésimo modo natural de vibración torsional (p), lo que facilita significativamente el análisis de la propagación de las ondas torsionales al explorar cada modo de vibración por separado teniendo en cuenta que la vibración total de un sistema se puede expresar como una superposición de todos los modos naturales de vibración.

Se realizaron simulaciones computacionales para comparar los resultados de la propagación de las ondas torsionales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos utilizando tanto la TBVE como la TB. Para llevar a cabo dichas simulaciones computacionales, se seleccionaron los parámetros poroelásticos de arenisca para la matriz sólida, y para el fluido, se consideraron los parámetros de agua y queroseno, siendo estos mayormente utilizados en el estudio de la propagación de ondas en medios poroelásticos por la mayoría de los trabajos encontrados en la literatura. Esta selección estratégica se realizó con el propósito de comparar los resultados de trabajos previos y para mostrar las ventajas de obtener fórmulas explícitas utilizando los marcos teóricos la TBVE y la TB convencional. En todos los resultados obtenidos, se observó una mayor atenuación al utilizar la TBVE, lo que resultó en velocidades de fase significativamente menores, ajustándose de una manera más precisa a las observaciones que se obtienen de los experimentos de laboratorio y a las predicciones teóricas de ambas teorías. Las simulaciones computacionales que se realizaron con esta metodología, no sólo contribuyen al entendimiento de la propagación de ondas torsionales en medios poroelásticos, sino que también abre la puerta a futuras investigaciones y aplicaciones científicas y tecnológicas al comprender mejor cómo se comporta la propagación de ondas torsionales en cilindros y anillos cilíndricos. Se pueden diseñar experimentos más informados para manipular las propiedades de los materiales o dispositivos, lo que a su vez, podría conducir al desarrollo de nuevos materiales o dispositivos con una mayor

resistencia y eficiencia en una amplia variedad de aplicaciones, desde la ingeniería, la geofísica, la tecnología médica y la exploración de recursos naturales. Por lo tanto, las expresiones analíticas obtenidas en este trabajo de tesis, proporcionan una base sólida para el diseño de dispositivos y sistemas que dependen de la propagación de ondas torsionales y ofrecen una herramienta valiosa para la comunidad científica y de ingeniería que se dedica a la investigación de medios poroelásticos.

Es importante resaltar que este estudio representa un avance significativo en el campo de la propagación de ondas torsionales en anillos cilíndricos poroelásticos. En particular, se distingue por ser el primer trabajo que incorpora explícitamente el p -ésimo modo torsional de vibración como un parámetro en las ecuaciones que describen la propagación de ondas en anillos cilíndricos poroelásticos utilizando la TBVE. Este logro es de suma importancia, ya que brinda una comprensión más profunda y precisa de cómo las propiedades del medio, la frecuencia y el modo natural de vibración influyen en la propagación de las ondas torsionales.

VII.2 Ondas radiales

Este trabajo de tesis presenta una metodología, basada en la TBVE, para obtener expresiones analíticas de las frecuencias naturales de ondas radiales en cilindros poroelásticos homogéneos, isotrópicos, con simetría axial y que están completamente saturados con un fluido sujetos a condiciones de frontera libre de esfuerzo. Estas expresiones se presentan en términos de las propiedades físicas del medio, como la porosidad, la permeabilidad, la densidad del sólido y del fluido, entre otras. Además, también aparece de manera explícita las velocidades de las ondas P rápida y P lenta, α_1 y α_2 , respectivamente.

Una de las principales contribuciones del presente trabajo de tesis, es la obtención

de ecuaciones de frecuencias desacopladas para la onda P rápida y P lenta, resultado que hasta el momento no ha sido documentado en trabajos previos encontrados en la literatura. Investigaciones previas han presentado dificultades para desacoplar estas ecuaciones, lo que ha obligado a trabajar con una expresión imprecisa que fusiona la información de las ondas P rápida y P lenta. Lo anterior ha requerido el uso de métodos numéricos para obtener aproximaciones de las raíces de dichas ecuaciones. Debido a que la información de las ondas está mezclada, es difícil asociarle un sentido físico a las aproximaciones obtenidas. Proporcionar expresiones analíticas desacopladas abre la posibilidad de derivar expresiones más exactas para las frecuencias naturales de las ondas radiales en cilindros poroelásticos.

Además, en este trabajo se presenta un análisis de las frecuencias naturales mediante simulaciones computacionales considerando las propiedades físicas de cilindros poroelásticos de arenisca completamente saturados con agua o queroseno. En este análisis, se observó un aumento en la frecuencia radial con respecto al número del modo natural de vibración y una disminución al incrementar el radio del cilindro. La porosidad tuvo un impacto leve en los modos naturales pares de las ondas P lentas, y no tuvo un afecto significativo en las frecuencias naturales de las ondas P rápidas.

Este estudio representa un avance significativo y abre nuevas vías de investigación en diversos campos del conocimiento, al ofrecer un marco teórico para predecir el comportamiento de las frecuencias naturales en cilindros poroelásticos, con aplicaciones amplias y variadas. Además, sienta las bases para futuras investigaciones en esta área del conocimiento, promoviendo un análisis más detallado de la velocidad de fase y atenuación de las ondas radiales.

VII.3 Trabajo a futuro

Este trabajo de tesis abre un amplio abanico de oportunidades para futuros trabajos que aborden tanto aspectos fundamentales como aplicaciones prácticas en el estudio de las ondas torsionales y radiales en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos. A continuación, se presentan diversas líneas de investigación que podrían contribuir significativamente al desarrollo de esta área y encontrar aplicaciones en campos que van desde la ingeniería y la geofísica hasta la medicina y la industria energética.

1. Encontrar una expresión analítica para la velocidad de fase y la atenuación de las ondas radiales en términos de las propiedades físicas del medio, la velocidad de las ondas P , el parámetro de frecuencia y el p -ésimo modo radial de vibración, utilizando el marco teórico de la TBVE.
2. Explorar los modos longitudinales de vibración en cilindros poroelásticos y encontrar las ecuaciones de frecuencia y expresiones para la velocidad y la atenuación en estos modos.
3. Investigar cómo las ondas radiales se comportan en cilindros finitos sujetos a diversas condiciones de frontera en los extremos, como cilindros abiertos o cerrados. También se podría explorar cómo las ondas se propagan en placas, esferas finitas o infinitas, lo que ampliaría la comprensión de la propagación de ondas en geometrías más complejas.
4. Investigar cómo la presencia de múltiples fases en el medio, como aire, agua y sólidos, o estructuras con grietas afectan la propagación de las ondas torsionales, radiales y longitudinales. Esto podría ser relevante en aplicaciones en ingeniería geotécnica y en la industria del petróleo, donde se encuentran múltiples tipos de materiales.

5. Utilizar los resultados obtenidos para aplicaciones en la evaluación de estructuras subterráneas o para evaluar la integridad de cimientos y estructuras en ingeniería civil y geotécnica. Esto podría contribuir a la seguridad y estabilidad de proyectos de construcción.
6. Explorar más a fondo, cómo las propiedades de los medios poroelásticos pueden aplicarse en tecnología médica para la detección de enfermedades de manera no invasiva por medio de dispositivos de diagnóstico por ultrasonido.
7. Analizar con más detalle cómo las propiedades de los medios poroelásticos contribuyen a la optimización del diseño de materiales en diversas áreas, incluyendo la acústica arquitectónica y el diseño de materiales atenuantes de sonido y vibraciones.

En resumen, los posibles trabajos futuros en este campo ayudarán al entendimiento de las ondas torsionales, radiales y longitudinales en medios poroelásticos. Además se tendrá un impacto significativo en una variedad de aplicaciones, desde la geociencia o ingeniería, hasta la medicina por mencionar algunos campos. Estas investigaciones continuarán impulsando la innovación, mejorando así nuestra capacidad para abordar desafíos más complejos en diversos campos de la ciencia y la tecnología. Esperamos que estos esfuerzos inspiren a futuros investigadores a explorar nuevas direcciones y aportar valiosas contribuciones a esta emocionante área de estudio.

Apéndice A

Parámetros de las ecuaciones de Biot de viscosidad extendida

Las matrices de 2×2 , \mathbf{C}_α , \mathbf{N}_α , \mathbf{C}_β y \mathbf{N}_β de las ecuaciones de la TBVE (21), están dadas explícitamente por [14]

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\alpha &= \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{\text{mm}} & \mathcal{C}^{\text{mi}} \\ \mathcal{C}^{\text{im}} & \mathcal{C}^{\text{ii}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{m}_f \left(1 - \frac{\alpha_K \eta_0 M}{\mathbf{m}_f H_c}\right) \\ \mathbf{d}_f \left(1 - \frac{\alpha_K \eta_0 M}{\mathbf{m}_f H_c}\right) & \mathbf{d}_f \left(\mathbf{m}_f + \left(1 - 2 \frac{\alpha_K \mathbf{m}_f}{\eta_0}\right) \frac{\eta_0 \eta_0 M}{\mathbf{m}_f H_c}\right) \end{pmatrix} \alpha_c^2, \end{aligned} \quad (202)$$

$$\mathbf{N}_\alpha = \begin{pmatrix} \mathcal{N}^{\text{mm}} & \mathcal{N}^{\text{mi}} \\ \mathcal{N}^{\text{im}} & \mathcal{N}^{\text{ii}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon & -(\eta_0 - \mathbf{m}_f \Upsilon) \\ -\mathbf{d}_s \Upsilon & \mathbf{d}_s (\eta_0 - \mathbf{m}_f \Upsilon) \end{pmatrix} \frac{\alpha_c^2}{\Omega_\alpha}, \quad (203)$$

$$\mathbf{C}_\beta = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{\text{mm}} & \mathcal{C}^{\text{mi}} \\ \mathcal{C}^{\text{im}} & \mathcal{C}^{\text{ii}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{m}_f \\ \mathbf{d}_f & \mathbf{d}_f \mathbf{m}_f \end{pmatrix} \beta_c^2, \quad (204)$$

$$\mathbf{N}_\beta = \begin{pmatrix} \mathcal{N}^{\text{mm}} & \mathcal{N}^{\text{mi}} \\ \mathcal{N}^{\text{im}} & \mathcal{N}^{\text{ii}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_\mu & -(\eta_0 - \mathbf{m}_f \alpha_\mu) \\ -\mathbf{d}_s \alpha_\mu & \mathbf{d}_s (\eta_0 - \mathbf{m}_f \alpha_\mu) \end{pmatrix} \frac{\beta_c^2}{\Omega_\beta}, \quad (205)$$

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 \\ 0 & \rho_i \end{pmatrix}, \quad (206)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (207)$$

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (208)$$

donde

$m_s = \frac{\phi_0 \rho_s}{\rho_m}$	fracción de masa del sólido
$m_f = \frac{\eta_0 \rho_f}{\rho_m}$	fracción de masa del fluido
η_0	porosidad sin perturbar
$\phi_0 = 1 - \eta_0$	densidad del sólido sin perturbar
$\rho_m = \phi_0 \rho_s + \eta_0 \rho_f$	densidad total
ρ_s	densidad del sólido
ρ_f	densidad del fluido
$\Omega_i = \Omega_b d_f$	frecuencia de relajación de Biot
$\Omega_b = \frac{\eta_0 \nu_f}{K}$	frecuencia crítica de Biot
$d_f = \frac{\eta_0 \rho_f}{\rho_i}$	—
$d_s = \frac{\phi_0 \rho_s}{\rho_i}$	—
$\Upsilon = \alpha_K + (\alpha_\mu - \alpha_K) \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \frac{\eta_0 \xi_f}{K_f \mu_f}}$	—
$\nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_f}$	viscosidad cinemática de cizallamiento del fluido en el poro
K	permeabilidad
K_s	módulo de compresibilidad del sólido
K_f	módulo de compresibilidad del fluido
μ_f	módulo de viscosidad de cizallamiento
$M = \left(\frac{\eta_0}{K_f} + \frac{\alpha_K - \eta_0}{K_s} \right)^{-1}$	coeficiente de almacenamiento del fluido
$\rho_i = \rho_r - \rho_{12} = (S - m_f) \eta_0 \rho_f$	densidad modificada reducida
S	tortuosidad
$\rho_{12} = -(S - 1) \eta_0 \rho_f$	coeficiente de masa inducido
$\rho_r = \left(\frac{1}{\phi_0 \rho_s} + \frac{1}{\eta_0 \rho_f} \right)^{-1}$	densidad reducida
$H_c = K_0 + \frac{4}{3} \mu_0 + \alpha_K^2 M$	módulo de la onda P de Gassman

$\beta_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_m}}$	velocidad de la onda S de Gassmann
$\alpha_c = \sqrt{\frac{H_c}{\rho_m}}$	velocidad de la onda P de Gassman
$\Omega_\beta = \frac{\mu_0}{\mu_f}$	frecuencia de relajación de cizallamiento de la matriz sólida
$\Omega_\alpha = \frac{H_c}{\frac{\eta_0 M}{K_f} \xi_f + \frac{4}{3} \mu_f}$	frecuencia de relajación compresional de la matriz sólida
μ_0	módulo de cizallamiento de la matriz sólida
$\alpha_\mu = 1 - \frac{\mu_0}{\mu_s}$	coeficiente de cizallamiento de Biot
$\alpha_K = 1 - \frac{K_0}{K_s}$	coeficiente volumétrico de Biot
μ_s	módulo de cizallamiento del mineral sólido

En la ecuación (40), las matrices de cambio de coordenadas para desacoplar las ecuaciones de proelasticidad para el modo torsional de vibración están dadas por

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{\beta_1}}, & \frac{1}{N_{\beta_2}} \left(\frac{\beta^{mi}}{\beta_2^2 - \beta^{mm}} \right) \\ \frac{1}{N_{\beta_1}} \left(\frac{\beta_1^2 - \beta^{mm}}{\beta^{mi}} \right) & \frac{1}{N_{\beta_2}} \end{pmatrix}, \quad (209)$$

$$\mathbf{L}_\beta = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{\beta_1}} & \frac{1}{N_{\beta_2}} \left(\frac{\beta_2^2 - \beta^{ii}}{\beta^{mi}} \right) \\ \frac{1}{N_{\beta_1}} \left(\frac{\beta^{mi}}{\beta_1^2 - \beta^{ii}} \right) & \frac{1}{N_{\beta_2}} \end{pmatrix}, \quad (210)$$

$$N_{\beta_1} = \sqrt{\frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{\beta_1^2 - \beta^{ii}}}, \quad N_{\beta_2} = \sqrt{\frac{\beta_1^2 - \beta_2^2}{\beta^{mm} - \beta_2^2}}. \quad (211)$$

Para la ecuación (123), las matrices de cambio de coordenadas para desacoplar las ecuaciones de proelasticidad para el modo radial de vibración están dadas por

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{\alpha_1}}, & \frac{1}{N_{\alpha_2}} \left(\frac{\alpha^{mi}}{\alpha_2^2 - \alpha^{mm}} \right) \\ \frac{1}{N_{\alpha_1}} \left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha^{mm}}{\alpha^{mi}} \right) & \frac{1}{N_{\alpha_2}} \end{pmatrix}, \quad (212)$$

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{N_{\alpha_1}} & \frac{1}{N_{\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha^{ii}}{\alpha^{mi}} \right) \\ \frac{1}{N_{\alpha_1}} \left(\frac{\alpha^{mi}}{\alpha_1^2 - \alpha^{ii}} \right) & \frac{1}{N_{\alpha_2}} \end{pmatrix}, \quad (213)$$

$$N_{\alpha_1} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1^2 - \alpha^{ii}}}, \quad N_{\alpha_2} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha^{mm} - \alpha_2^2}}. \quad (214)$$

Apéndice B

Velocidad de fase y atenuación torsional utilizando la teoría de Biot

Las ecuaciones de movimiento de la TB [14, 15] están dadas por

$$\boldsymbol{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{C} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{N} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}. \quad (215)$$

El vector de desplazamiento $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(r, z, t)$ está en términos del desplazamiento del sólido y el fluido, $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^s, \mathbf{u}^f)^T$. Las matrices de 2×2 , $\boldsymbol{\rho}$, \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{N} se escriben explícitamente como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} &= \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix}, & \mathbf{B} &= b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} A + 2N & Q \\ Q & R \end{pmatrix}, & \mathbf{N} &= \begin{pmatrix} -N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (216)$$

Las ecuaciones de la TB están relacionadas con las ecuaciones de la TBVE [15] por medio de las siguientes igualdades

$$A = (\phi_0 - \delta_s) K_s - \frac{2}{3} \left(\phi_0 - \frac{\delta_\mu}{\phi_0} \right) \mu_s, \quad (217)$$

$$N = (\phi_0 + \delta_\mu) \mu_s, \quad (218)$$

$$Q = \delta_f K_s = \delta_s K_f, \quad (219)$$

$$R = (\eta_0 - \delta_f) K_f, \quad (220)$$

$$b = \frac{\mu_f \eta_0^2}{K}, \quad (221)$$

$$\rho_{11} = \phi_0 \rho_s - \rho_{12}, \quad (222)$$

$$\rho_{22} = \eta_0 \rho_f - \rho_{12}. \quad (223)$$

Para el modo torsional de vibración, las ecuaciones de la teoría de Biot en el dominio de frecuencias [15] se escriben como

$$\beta_{\text{Biot}}^2 \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{U}^s + \omega^2 \mathbf{U}^s = 0, \quad (224)$$

donde $\mathbf{U}^s \equiv \mathbf{U}^s(r, z, \omega)$ y

$$\mathbf{U}^f = - \frac{\rho_{12} - i \frac{1}{\omega} \frac{\mu_f \eta_0^2}{K}}{(\eta_0 \rho_f - \rho_{12}) + i \frac{1}{\omega} \frac{\mu_f \eta_0^2}{K}} \mathbf{U}^s, \quad (225)$$

$$\beta_{\text{Biot}}^2 = \beta_{\text{Biot}}^{\text{Re}} + i \beta_{\text{Biot}}^{\text{Im}}, \quad (226)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\text{Biot}}^{\text{Re}} &= \frac{(\phi_0 \rho_s \eta_0 \rho_f - \rho_m \rho_{12})(\eta_0 \rho_f - \rho_{12})(\delta_\mu + \phi_0) \mu_s}{(\phi_0 \rho_s \eta_0 \rho_f - \rho_m \rho_{12})^2 + \left(\rho_m \frac{\mu_f \eta_0^2}{K \omega} \right)^2} \\ &+ \frac{\left(\frac{\mu_f \eta_0^2}{K \omega} \right)^2 (\delta_\mu + \phi_0) \mu_s \rho_m}{(\phi_0 \rho_s \eta_0 \rho_f - \rho_m \rho_{12})^2 + \left(\rho_m \frac{\mu_f \eta_0^2}{K \omega} \right)^2}, \end{aligned} \quad (227)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\text{Biot}}^{\text{Im}} &= \frac{(\phi_0 \rho_s \eta_0 \rho_f - \rho_m \rho_{12}) \frac{\mu_f \eta_0^2}{K \omega} (\delta_\mu + \phi_0) \mu_s}{(\phi_0 \rho_s \eta_0 \rho_f - \rho_m \rho_{12})^2 + \left(\rho_m \frac{\mu_f \eta_0^2}{K \omega} \right)^2} \\ &- \frac{\rho_m \frac{\mu_f \eta_0^2}{K \omega} (\eta_0 \rho_f - \rho_{12})(\delta_\mu + \phi_0) \mu_s}{(\phi_0 \rho_s \eta_0 \rho_f - \rho_m \rho_{12})^2 + \left(\rho_m \frac{\mu_f \eta_0^2}{K \omega} \right)^2}. \end{aligned} \quad (228)$$

Sea \mathbf{U}^s la solución de (224), entonces

$$\mathbf{U}^s = \left[A_1 J_1(q_{\text{Biot}} r) + A_2 Y_1(q_{\text{Biot}} r) \right] e^{ik_{\text{Biot}} z}, \quad (229)$$

donde A_1, A_2 son constantes, y

$$q_{\text{Biot}}^2 = \frac{\omega^2}{\beta_{\text{Biot}}^2} - k_{\text{Biot}}^2. \quad (230)$$

Al aplicar las condiciones de frontera libre de esfuerzos,

$$\tau_{r\theta}(r, z)|_{r=r_1} = 0, \quad \tau_{r\theta}(r, z)|_{r=r_2} = 0, \quad (231)$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de 2×2 homogéneo

$$q_{\text{Biot}} \beta_{\text{Biot}}^2 \begin{bmatrix} J_2(q_{\text{Biot}} r_1) & Y_2(q_{\text{Biot}} r_1) \\ J_2(q_{\text{Biot}} r_2) & Y_2(q_{\text{Biot}} r_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (232)$$

El sistema (232) tiene solución no trivial si el determinante de la matriz asociada es cero. El determinante es igual a cero si se satisface que

$$0 = J_2(q_{\text{Biot}} r_1) Y_2(q_{\text{Biot}} r_2) - J_2(q_{\text{Biot}} r_2) Y_2(q_{\text{Biot}} r_1). \quad (233)$$

La ecuación (233) es análoga a la ecuación (12) del trabajo de Tajuddin y Shah [87]. El haber obtenido la misma ecuación que se encuentra en el trabajo de Tajuddin y Shah, quienes se basaron exclusivamente en la TB en su investigación, resalta la importancia dentro del marco teórico de esta tesis. Este resultado, más allá de confirmar la solidez de la metodología desarrollada en este trabajo de tesis, respalda con firmeza la precisión y coherencia de nuestros hallazgos al replicar resultados previamente documentados en la literatura científica. Además, esta contribución ayuda a mostrar cómo la TBVE puede ser aplicada de manera efectiva en escenarios similares a la teoría de Biot, ampliando así la comprensión y aplicabilidad en circunstancias específicas, como el análisis de la propagación de ondas en cilindros y anillos cilíndricos poroelásticos. La ecuación (233) se puede reescribir de la siguiente forma

$$0 = J_2(z) Y_2(\lambda z) - J_2(\lambda z) Y_2(z), \quad (234)$$

con $z = q_{\text{Biot}} r_1$, y $\lambda = \frac{r_2}{r_1} > 1$. Si $\xi_p \neq 0 \in \mathbb{R}$ es el p -ésimo cero de la ecuación de frecuencias (233), entonces

$$\xi_p^2 = q_{\text{Biot}}^2 r_1^2 = r_1^2 \left(\frac{\omega^2}{\beta_{\text{Biot}}^2} - k_{\text{Biot},p}^2 \right). \quad (235)$$

Siguiendo la metodología propuesta en la sección III.3, la velocidad de fase torsional ($V_{\omega,p}^{\text{Biot}}$) y la atenuación torsional ($A_{\omega,p}^{\text{Biot}}$) están dadas por

$$V_{\omega,p}^{\text{Biot}} = \frac{\omega}{|k_{\text{Re},p}^{\text{Biot}}|} = \frac{\sqrt{2} r_1}{\sqrt{B_{1,p}^{\text{Biot}} + B_{2,p}^{\text{Biot}}}} \omega, \quad (236)$$

$$A_{\omega,p}^{\text{Biot}} = \frac{1}{|k_{\text{Im},p}^{\text{Biot}}|} = \frac{\sqrt{2} r_1}{\sqrt{B_{1,p}^{\text{Biot}} - B_{2,p}^{\text{Biot}}}}, \quad (237)$$

donde

$$B_{1,p}^{\text{Biot}} = \left(\left[(E_{Re}^{\text{Biot}})^2 + (E_{Im}^{\text{Biot}})^2 \right] \frac{r_1^4}{\beta_c^4} \omega^4 - 2E_{Re}^{\text{Biot}} \xi_p^2 \frac{r_1^2}{\beta_c^2} \omega^2 + \xi_p^4 \right)^{1/2}, \quad (238)$$

$$B_{2,p}^{\text{Biot}} = E_{Re}^{\text{Biot}} \frac{r_1^2}{\beta_c^2} \omega^2 - \xi_p^2, \quad (239)$$

$$E_{Re}^{\text{Biot}} = \frac{\beta_c^2 \beta_{\text{Biot}}^{\text{Re}}}{(\beta_{\text{Biot}}^{\text{Re}})^2 + (\beta_{\text{Biot}}^{\text{Im}})^2}, \quad (240)$$

$$E_{Im}^{\text{Biot}} = \frac{\beta_c^2 \beta_{\text{Biot}}^{\text{Im}}}{(\beta_{\text{Biot}}^{\text{Re}})^2 + (\beta_{\text{Biot}}^{\text{Im}})^2}. \quad (241)$$

Los resultados obtenidos en esta sección, se presentan gráficamente en las figuras 3 y 4, donde se realiza una comparación entre la TB y la TBVE.

Apéndice C

Raíces de las funciones Bessel J_n y Y_n

Las funciones de Bessel son funciones oscilatorias de gran relevancia en una amplia gama de campos científicos y tecnológicos, especialmente en aquellos relacionados con la propagación de ondas y fenómenos oscilatorios. En este contexto, en el presente trabajo, las funciones de Bessel desempeñan un papel fundamental en la solución general y en las ecuaciones de frecuencia de las ondas torsionales y radiales. En particular, se utilizan para determinar las frecuencias naturales de las ondas radiales y para calcular la velocidad y la atenuación de las ondas torsionales de los modos naturales de vibración. Para obtener estas frecuencias y realizar los cálculos necesarios, es esencial encontrar los ceros de ciertas ecuaciones que involucran las funciones Bessel J_n y Y_n . Con el propósito de encontrar estas raíces, se emplea la representación de las funciones de Bessel en series de potencias descendentes, es decir, en su forma asintótica. Además, se introduce un ángulo auxiliar θ , tal como se ilustra en la ecuación (242). Este enfoque se detalla más exhaustivamente en el trabajo de McMahon [97], que proporciona las bases necesarias para abordar los problemas específicos que se tratan en esta tesis.

C.1 Raíces de $J_n(x)$

La representación de la función Bessel de primer tipo de orden n en series descendentes, está dada por [97]

$$\sqrt{\frac{1}{2}\pi x} J_n(x) = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) \phi_n(x) + \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) \psi_n(x), \quad (242)$$

donde

$$\phi_n(x) = 1 - \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)}{2!(8x)^2} + \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)(5^2 - 4n^2)(7^2 - 4n^2)}{4!(8x)^4} - \dots, \quad (243)$$

$$\psi_n(x) = \frac{1^2 - 4n^2}{8x} - \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)(5^2 - 4n^2)}{3!(8x)^3} + \dots \quad (244)$$

Sean

$$\phi_n(x) = R_n(x) \cos \theta_n, \quad (245)$$

$$\psi_n(x) = R_n(x) \sin \theta_n, \quad (246)$$

donde θ_n es un ángulo auxiliar que ayuda a representar las oscilaciones de las funciones ϕ_n y ψ_n y R_n su amplitud. Entonces al usar las identidades $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$, se obtiene que

$$\sqrt{\frac{1}{2}\pi x J_n(x)} = R_n(x) \cos \left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi - \theta_n \right), \quad (247)$$

y la ecuación $J_n(x) = 0$ se satisface cuando

$$\cos \left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi - \theta_n \right) = 0. \quad (248)$$

Las raíces (248) están dadas por

$$x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi - \theta_n = \frac{1}{2}(2s - 1)\pi, \quad (249)$$

con $s \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, al despejar se obtiene que

$$x = \beta + \theta_n, \quad (250)$$

donde $\beta = \frac{1}{4}\pi(2n + 4s - 1)$.

Para calcular explícitamente el valor de θ_n de la ecuación (250), se hace el cambio de variable $\frac{1}{8}x^{-1} = y$ en las ecuaciones (243) y (244). Entonces

$$\phi_n(x) = 1 - \frac{(1^2 - m)(3^2 - m)}{2!}y^2 + \frac{(1^2 - m)(3^2 - m)(5^2 - m)(7^2 - m)}{4!}y^4 - \dots, \quad (251)$$

$$\psi_n(x) = (1^2 - m)y - \frac{(1^2 - m)(3^2 - m)(5^2 - m)}{3!}y^3 + \dots, \quad (252)$$

donde $m = 4n^2$. Como $\phi_n(x) = R_n(x) \cos \theta_n$ y $\psi_n(x) = R_n(x) \sin \theta_n$, se llega a que

$$\begin{aligned} \tan \theta_n &= \frac{\psi_n(x)}{\phi_n(x)} = \frac{(1 - m)y - \frac{(1-m)(9-m)(25-m)}{6}y^3 + \dots}{1 - \frac{(1-m)(9-m)}{2!}y^2 + \frac{(1-m)(9-m)(25-m)(49-m)}{4!}y^4 + \dots} \\ &= -(m - 1)y \frac{1 - by^2 + dy^4 - \dots}{1 - ay^2 + cy^4 - \dots} \\ &= -(m - 1)y \{1 + (a - b)y^2 + [a(a - b) + d - c]y^4 + \dots\}, \end{aligned} \quad (253)$$

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(m - 1)(m - 9), \\ b &= \frac{1}{6}(m - 9)(m - 25), \\ c &= \frac{1}{24}(m - 1)(m - 9)(m - 25)(m - 49), \\ d &= \frac{1}{120}(m - 9)(m - 25)(m - 49)(m - 81), \end{aligned} \quad (254)$$

que al sustituir en (253), se obtiene que

$$\begin{aligned} \tan \theta_n &= -(m - 1)y - \frac{1}{3}(m - 1)(m^2 + 2m - 99)y^3 \\ &\quad - \frac{2}{15}(m - 1)(m - 9)(m^3 + 15m^2 - 81m - 5695)y^5 - \dots \end{aligned} \quad (255)$$

Por otro lado, al considerar la serie de potencias para $\theta_n = \arctan(\tan \theta_n)$, se llega a que

$$\theta_n = \tan \theta_n - \frac{1}{3} \tan^3 \theta_n + \frac{1}{5} \tan^5 \theta_n - \dots, \quad (256)$$

al utilizar que la serie de potencias de $\tan \theta_n$ se puede expresar como $Ay + By^3 + Cy^5 - \dots$ y al sustituirlo en (256), se obtiene

$$\theta_n = Ay + \left(B - \frac{1}{3}A^3\right)y^3 + \left(C - A^2B + \frac{1}{5}A^5\right)y^5 + \dots \quad (257)$$

Al comparar la serie $Ay + By^3 + Cy^5 - \dots$, con la ecuación (255), se obtienen A, B, C, \dots explícitamente. Sustituyendo estos valores en (255) y reduciendo términos, se llega a que

$$\theta_n = -(m-1)y - \frac{4}{3}(m-1)(m-25)y^3 - \frac{32}{5}(m-1)(m^2 - 114m + 1073)y^5 - \dots \quad (258)$$

De la ecuación (250) se tiene que $\theta_n = x - \beta$, entonces

$$x = \beta - \frac{m-1}{8x} - \frac{4(m-1)(m-25)}{3(8x)^3} - \frac{32(m-1)(m^2 - 114m + 1073)}{5(8x)^5} - \dots \quad (259)$$

La ecuación (259) tiene la siguiente forma

$$x = \beta + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^3} + \frac{r}{x^5} + \dots, \quad (260)$$

donde

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{8}(m-1), \\ q &= -\frac{4}{3(8)^3}(m-1)(m-25), \\ r &= -\frac{32(m-1)(m^2 - 114m + 1073)}{5(8)^5}. \end{aligned} \quad (261)$$

Al aplicar el teorema de inversión de Lagrange [97] en la ecuación (260), se reescribe x en términos de β como

$$x = \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q - p^2}{\beta^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{\beta^5} + \dots \quad (262)$$

Entonces las raíces de la ecuación $J_n(x) = 0$ están dadas por

$$x_n^{(s)} = \beta - \frac{m-1}{8\beta} - \frac{4(m-1)(7m-31)}{3(8\beta)^3} - \frac{32(m-1)(83m^2-982m+3779)}{15(8\beta)^5} - \dots, \quad (263)$$

donde $\beta = \frac{1}{4}\pi(2n-1+4s)$ y $m = 4n^2$. Con esta metodología se pueden obtener más términos para las raíces. Por ejemplo, el siguiente término de la serie de (263) es

$$-\frac{64(m-1)(6949m^3 - 153855m^2 + 1585743m - 6277237)}{105(8\beta)^7}. \quad (264)$$

C.2 Raíces de $Y_n(x)$

La representación de la función Bessel de segundo tipo de orden n en series descendentes, está dada por [97]

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}Y_n(x) = \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right)\phi_n(x) + \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right)\psi_n(x), \quad (265)$$

donde las expresiones explícitas de $\phi_n(x)$ y $\psi_n(x)$ están dadas en (243) y (244), respectivamente. Entonces

$$\sqrt{\frac{2x}{\pi}}Y_n(x) = R \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi - \theta_n\right) = -R \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi - \theta_n\right), \quad (266)$$

la ecuación $Y_n(x) = 0$ se satisface cuando

$$\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi - \theta_n\right) = 0. \quad (267)$$

Las raíces de (267) son

$$x + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi - \theta_n = \frac{1}{2}(2s-1)\pi, \quad (268)$$

con $s \in \mathbb{Z}$. Por lo que

$$x = \beta_2 + \theta_n, \quad (269)$$

donde $\beta_2 = \frac{1}{4}\pi(2n + 4s - 3)$ y θ_n es el mismo ángulo auxiliar de que en las ecuaciones (245) y (246). Entonces las raíces de la ecuación $Y_n(x) = 0$ se escriben de la misma manera que las raíces de la ecuación (263), pero sustituyendo β por $\beta_2 = \beta - \frac{1}{2}\pi$.

C.3 Raíces de la función Bessel completa

La función Bessel completa se define como una combinación lineal de la función de Bessel de primer y segundo tipo. En un gran número de problemas físicos, se necesita resolver la siguiente ecuación

$$AJ_n(kr) + BY_n(kr) = 0, \quad (270)$$

y determinar una expresión para k . En el caso de anillos cilíndricos, estas funciones se pueden desvanecer en las fronteras $r = a$ y $r = b$, como por ejemplo en el caso de la ecuación de frecuencias para el caso torsional, capítulo III, donde al aplicar las condiciones de frontera libre de esfuerzo se obtiene las siguientes ecuaciones a resolver

$$AJ_n(ka) + BY_n(ka) = 0, \quad (271)$$

$$AJ_n(kb) + BY_n(kb) = 0. \quad (272)$$

Las ecuaciones (271) y (272) se pueden combinar para llegar a la siguiente igualdad,

$$\frac{Y_n(ka)}{J_n(ka)} = \frac{Y_n(kb)}{J_n(kb)}. \quad (273)$$

Sea $a = \rho b$, $\rho > 1$, y $kb = x$, entonces

$$\frac{Y_n(x)}{J_n(x)} = \frac{Y_n(\rho x)}{J_n(\rho x)}, \quad (274)$$

pero al utilizar (247) y (266), se obtiene que

$$\frac{Y_n(x)}{J_n(x)} = \frac{\pi}{2} \tan \left(x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}n\pi - \theta_n \right), \quad (275)$$

por lo que

$$\tan\left(x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}n\pi - \theta_n\right) = \tan\left(\rho x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}n\pi - \theta_1\right). \quad (276)$$

La ecuación (276) se satisface para

$$\rho x - \theta_1 = x - \theta_n + s\pi, \quad s \in \mathbb{Z}. \quad (277)$$

Sustituyendo θ_n por las series en (257), y θ_1 por la misma serie pero con ρx en lugar de x , se llega a que

$$x = \frac{s\pi}{\rho - 1} + \frac{m - 1}{8\rho x} + \frac{4(m - 1)(m - 25)(\rho^3 - 1)}{3(8\rho x)^3(\rho - 1)} + \frac{32(m - 1)(m^2 - 114m + 1073)(\rho^5 - 1)}{5(8\rho x)^5(\rho - 1)} + \dots, \quad (278)$$

$$(279)$$

Como en la sección C.1, las raíces de ecuación $J_n(x) + Y_n(x) = 0$, se satisface para

$$x_n^{(s)} = \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q - p^2}{\beta^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{\beta^5} + \dots, \quad (280)$$

donde s es un entero y

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{s\pi}{\rho - 1}, \\ p &= \frac{m - 1}{8\rho}, \\ q &= \frac{4(m - 1)(m - 25)(\rho^3 - 1)}{3(8\rho)^3(\rho - 1)}, \\ r &= \frac{32(m - 1)(m^2 - 114m + 1073)(\rho^5 - 1)}{5(8\rho)^5(\rho - 1)}. \end{aligned} \quad (281)$$

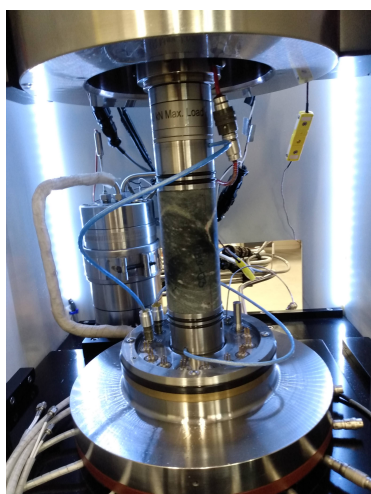
La ecuación (280) se emplea para calcular las raíces de la ecuación de frecuencias asociadas a las ondas torsionales, capítulo III. Estas raíces corresponden a los modos naturales de vibración, donde cada raíz representa un modo específico con su frecuencia característica y patrón único de oscilación. Esto permite introducir de manera explícita el modo de vibración como un parámetro relevante en la metodología desarrollada en esta tesis.

Apéndice D

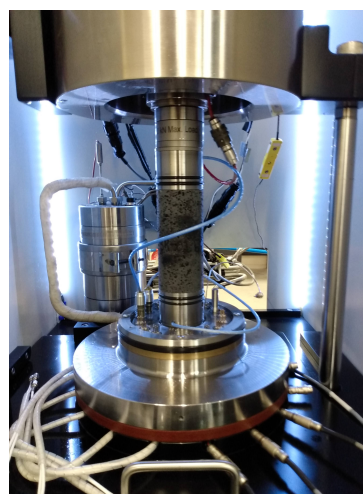
Laboratorio de propiedades físicas de rocas (CICESE)

El laboratorio de propiedades físicas de rocas en el Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) es un laboratorio en donde se realizan estudios físicos de las rocas y materiales de construcción [113].

Este laboratorio, único en el norte de México y uno de los tres laboratorios en toda la República, se dedica a la realización de estudios físicos de las rocas que conforman yacimientos geotérmicos. El objetivo central de la investigación en física de rocas es comprender y cuantificar los fenómenos físicos que ocurren en medios porosos saturados. Esta comprensión se logra mediante la vinculación de las propiedades de las rocas con datos geofísicos, utilizando para ello simulaciones numéricas, experimentos de laboratorio, observaciones in-situ y deducciones basadas en modelos analíticos. Un elemento clave en este proceso es el sistema RTR-2000 de GCTS (figura 12) un equipo de alta precisión totalmente automatizado que permite el cálculo de velocidades de ondas P y S , pruebas de compresión triaxial con presión de poro a diferentes temperaturas y fracturamiento hidráulico [113]. Estas pruebas ofrecen información valiosa para definir las condiciones iniciales de un yacimiento antes de su explotación y anticipar su respuesta a la extracción de fluidos u otros recursos naturales. En mi recorrido por las instalaciones, del 02 al 13 de mayo de 2022, los investigadores proporcionaron una detallada explicación sobre el procedimiento de preparación de las muestras de roca. Este proceso implica darles una forma cilíndrica con mediciones precisas, lo cual requiere una cuidadosa manipulación para controlar la saturación de fluidos y replicar



(a) Muestra de roca tipo Anfibolita.



(b) Muestra de roca tipo Basalto.

Figura 12: Sistema RTR-2000 de GCTS para pruebas triaxiales en rocas de CICESE. Fotografías tomadas en Ensenada, B.C., mayo del 2022.

condiciones representativas del entorno natural. Asistir a la meticulosa medición de la velocidad de las ondas en estas muestras fue esclarecedor, ya que es un elemento fundamental para comprender en profundidad cómo responden los materiales geológicos ante diversas cargas y presiones. Esta visita amplió significativamente mi comprensión de las intrincadas interacciones presentes en las rocas poroelásticas, consolidando aún más mi aprecio por la relevancia de este campo en el ámbito de la investigación geofísica, el estudio de suelos y la extracción de recursos naturales.

Referencias

- [1] Stein, S., y Wysession, M. *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. Blackwell Publishing Ltd, 2002.
- [2] Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28:168–178, 1956.
- [3] Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid II. Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.*, 28:179–191, 1956.
- [4] Perati, M. R., y Gurijala, R. Investigation of torsional vibrations in thick walled hollow poroelastic cylinder using Biot's extension theory. *Sādhanā.*, 40(6):1925–1935, 2015.
- [5] Farshidianfar, A., y Oliazadeh, P. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories. *Int. J. Appl. Mech.*, 2(5):74–80, 2012.
- [6] Cardoso, L., y Cowin, S. C. Role of structural anisotropy of biological tissues in poroelastic wave propagation. *Mech. Mater.*, 44:174–188, 2012.
- [7] Liu, X., Greenhalgh, S., Zhou, B. y Heinson, G. Generalized poroviscoelastic model based on effective biot theory and its application to borehole guided wave analysis. *Geophys. J. Int.*, 207(3):1472–1483, 2016.
- [8] Love, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. University press, 1944.
- [9] Eringen, A. C. *Mechanics of continua*. Huntington, 1980.

- [10] Dullien, F. A. *Porous media: fluid transport and pore structure*. Academic press, 2012.
- [11] Carcione, J. M. *Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media*. Elsevier, 2007.
- [12] Bear, J. *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation, 2013.
- [13] Solorza-Calderón, S., y Sahay, P.N. Standing torsional waves in a fully saturated, porous, circular cylinder. *Geophys. J. Int.*, 157(1):455–473, 2004.
- [14] Solorza-Calderón, S., y Sahay, P.N. On extensional waves in a poroelastic cylinder within the framework of viscosity-extended Biot theory: the case of traction-free open-pore cylindrical surface. *Geophys. J. Int.*, 179(3):1679–1702, 2009.
- [15] Solorza-Calderón, S. Torsional waves of infinite fully saturated poroelastic cylinders within the framework of Biot viscosity-extended theory. *Appl. Math. Comput.*, 391:125636–1–125636–16, 2021.
- [16] Verdugo-Olachea, J., Solorza-Calderón, S., González-Fernández, A., y De Basabe, J. D. On torsional vibrations of axial-symmetric infinite hollow poroelastic cylinders. *Arch. Appl. Mech.*, 92(5):1507–152, 2022.
- [17] Liu, Y. Sound transmission through triple-panel structures lined with poroelastic materials. *J. Sound Vib.*, 339:376–395, 2015.
- [18] Chao, G., y Smeulders, D.M.J. Shock-induced borehole waves in porous formations: theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(2):693–702, 2004.
- [19] Ciz, R., y Gurevich, B. Amplitude of biot's slow wave scattered by a spherical inclusion in a fluid-saturated poroelastic medium. *Geophys. J. Int.*, 160(3):991–1005, 2005.

- [20] Gelinsky, S., Shapiro, S. A., Müller, T., y Gurevich, B. Dynamic poroelasticity of thinly layered structures. *Int. J. Solids Struct.*, 35(34-35):4739–4751, 1998.
- [21] Gerasik, V., y Stastna, M. Energy partition and resonant excitation of poroelastic waves in the absence of dissipation. *Wave Motion*, 49(2):323–332, 2012.
- [22] Müller, T. M., y Sahay, P. N. Generalized poroelasticity framework for micro-inhomogeneous rocks. *Geophys. Prospect.*, 64(4):1122–1134, 2016.
- [23] Pride, S. R., Berryman, J. G., y Harris, J. M. Seismic attenuation due to wave-induced flow. *J. Geophys. Res.*, 109(B1):229–237, 2004.
- [24] Sahay, P. N., Spanos, T. T., y De la Cruz, V. Seismic wave propagation in inhomogeneous and anisotropic porous media. *Geophys. J. Int.*, 145(1):209–222, 2001.
- [25] Sahay, P. N. On the Biot slow S-wave. *Geophys.*, 73:N19–N55, 2008.
- [26] Saxena, N. Exact results for generalized biot-gassmann equations for rocks that change in pore shape and grain geometry. *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, 203(3):1575–1586, 2015.
- [27] Thomsen, L. Biot-consistent elastic moduli of porous rocks: Low-frequency limit. *Geophys.*, 50(12):2797–2807, 1985.
- [28] Zhang, Y., Xu, Y., y Xia, J. Analysis of dispersion and attenuation of surface waves in poroelastic media in the exploration-seismic frequency band. *Geophys. J. Int.*, 187:871–888, 2011.
- [29] Bolton, J. S., Shiau, N. M., y Kang, Y. J. Sound transmission through multi-panel structures lined with elastic porous materials. *J. Sound Vib.*, 191(3):317–347, 1996.

- [30] Daneshjou, K., Talebitooti, R., y Kornokar, M. Vibroacoustic study on a multilayered functionally graded cylindrical shell with poroelastic core and bonded-unbonded configuration. *J. Sound Vib.*, 393:157–175, 2017.
- [31] Kruszewski, E. T., y Kordes, E. E. Torsional vibrations of hollow thin-walled cylindrical beams. 393:157–175, 1954.
- [32] Liu, X., Greenhalgh, S., Zhou, B., y Greenhalgh, M. Effective biot theory and its generalization to poroviscoelastic models. *Geophys. J. Int.*, 212(2):1255–1273, 2017.
- [33] Magniez, J., Hamdi, M. A., Chazot, J. D., y Troclet, B. A mixed biot shell analytical model for the prediction of sound transmission through a sandwich cylinder with a poroelastic core. *J. Sound Vib.*, 360:203–223, 2016.
- [34] Talebitooti, R., Daneshjou, K., y Kornokar, M. Three dimensional sound transmission through poroelastic cylindrical shells in the presence of subsonic flow. *J. Sound Vib.*, 363:380–406, 2016.
- [35] Talebitooti, R., Gohari, H. D., y Zarastvand, M. R. Multi objective optimization of sound transmission across laminated composite cylindrical shell lined with porous core investigating non-dominated sorting genetic algorithm. *Aerosp. Sci. Technol.*, 69:269–280, 2017.
- [36] Zhou, J., Bhaskar, A., y Zhang, X. The effect of external mean flow on sound transmission through double-walled cylindrical shells lined with poroelastic material. *J. Sound Vib.*, 333(7):1972–1990, 2014.
- [37] Cowin, S. C., Gailani, G., y Benalla, M. Hierarchical poroelasticity: movement of interstitial fluid between porosity levels in bones. *Philos. Trans. Royal Soc. A*, 367(1902):3401–3444, 2009.

- [38] Haire, T. J., y Langton, C. M. Biot theory: a review of its application to ultrasound propagation through cancellous bone. *Bone*, 24(4):291–295, 1999.
- [39] Hellmich, C., y Ulm, F. J. Drained and undrained poroelastic properties of healthy and pathological bone: a poro-micromechanical investigation. *Transp. Porous Media*, 58(3:243–268, 2005.
- [40] Hsiu, H., Chao, P. T., Hsu, W. C., Jan, M. Y., Wang, Y. L., y Wang, W. K. The possible role of arterial radial vibration in heart rate and blood pressure matching. *Proc. Inst. Mech. Eng. H. P. I. MECH. ENG. H.*, 222(5):773–779, 2008.
- [41] Yang, T., Li, W. L., y Dai, L. Vibrations of cylindrical shells. *Adv. Struct. Eng.*, pages 205–233, 2012.
- [42] Berryman, J. G. Confirmation of biot’s theory. *Appl. Phys. Lett.*, 37(4):382–384, 1980.
- [43] Kelder, O., y Smeulders, D. M. Observation of the biot slow wave in water-saturated nivelsteiner sandstone. *Geophys.*, 62(6):1794–1796, 1997.
- [44] Plona, T. J. Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies. *Appl. Phys. Lett.*, 36(4):259–261, 1980.
- [45] Smeulders, D. M. Experimental evidence for slow compressional waves. *J. Eng. Mech.*, 131(9):908–917, 2005.
- [46] Khoshravan, M., y Mehrabadi, F. A. Fracture analysis in adhesive composite material/aluminum joints under mode-i loading; experimental and numerical approaches. *Int. J. Adhes.*, ,:8–14, 2012.
- [47] Kim, H. S., Kim, J. W., y Kim, J. K. Design and manufacture of an automotive hybrid aluminum/composite drive shaft. *Compos. Struct.*, 63:87–99, 2004.

- [48] Stedile Filho, P., Almeida Jr, J. H. S., y Amico, S. C. Carbon/epoxy filament wound composite drive shafts under torsion and compression. *J. Compos. Mater.*, 52:1103–1111, 2018.
- [49] Akbarov, S. D., y Kepceler, T. On the torsional wave dispersion in a hollow sandwich circular cylinder made from viscoelastic materials. *Appl. Math. Model.*, 39:3569–3587, 2015.
- [50] Castaings, M., y Bacon, C. Finite element modeling of torsional wave modes along pipes with absorbing materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119:3741–3751, 2006.
- [51] Jia, H., Jing, M., y Joseph, L. R. Guided wave propagation in single and double layer hollow cylinders embedded in infinite media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 129:691–700, 2011.
- [52] Yang, S. K., Lee, P. H., y Cheng, J. W. Evaluation of general corrosion on pipes using the guided wave technique. *J. Chin. Inst. Eng.*, 39:418–428, 2016.
- [53] Alam, P., Kundu, S., y Gupta, S. Dispersion and attenuation of torsional wave in a viscoelastic layer bonded between a layer and a half-space of dry sandy media. *Appl. Math. Mech.*, 38:1313–1328, 2017.
- [54] Ferronato, M., Castelletto, N., y Gambolati, G. A fully coupled 3-D mixed finite element model of Biot consolidation. *J. Comput. Phys.*, 229:4813–4830, 2016.
- [55] Gladwell, G.M.L. *Solid mechanics and its applications*, volume 35. Springer, New York, 1996.
- [56] Gupta, S., Majhi, D. K., Kundu, S., y Vishwakarma, S. K. Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space. *Appl. Math. Model.*, 218:5655–5664, 2012.

- [57] Ishihara, K., y Yasuda, S. Sand liquefaction in hollow cylinder torsion under irregular excitation. *Soils Found.*, 15:45–59, 1975.
- [58] Lo, W. C., Sposito, G., y Majer, E. Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids. *Water Resour. Res.*, 12:1105–1117, 2005.
- [59] Shah, S. A., y Tajuddin, M. Torsional vibrations of infinite composite poroelastic cylinders. *Int. J. Eng. Sci. Technol.*, 2:150–161, 2010.
- [60] Weiskopf, W. H. Stresses in soils under a foundation. *J Franklin Inst.*, 239:445–465, 1945.
- [61] Zhang, X., Tang, Z., Lv, F., y Yang, K. Scattering of torsional flexural guided waves from circular holes and crack-like defects in hollow cylinders. *NDT E Int.*, 89:56–66, 2017.
- [62] Roldo, M., y Fatouros, D. G. Biomedical applications of carbon nanotubes. *Annu. Rep. Prog. Chem., Sect. C: Phys. Chem.*, 109:10–35, 2013.
- [63] Simon, J., Flahaut, E., y Golzio, M. Overview of carbon nanotubes for biomedical applications. *Mater.*, 12:624–644, 2019.
- [64] Sobhani, E., Arbabian, A., Civalek, Ö., y Avcar, M. The free vibration analysis of hybrid porous nanocomposite joined hemispherical-cylindrical-conical shells. *Eng. Comput.*, pages 1–28, 2021.
- [65] Ramesh, M., Shah, S. A., y Murthy, M. R. Analysis of radial vibrations of poroelastic circular cylindrical shells immersed in an acoustic medium. *J. Eng. Sci. Technol.*, 6(5):26–35, 2014.

- [66] Perati, R., M., y Bandari, S. R. Study of radial vibrations in cylindrical bone in the framework of transversely isotropic poroelasticity. *JVC*, 22(5):1276–1287, 2016.
- [67] Gurijala, R., y Perati, M. R. *Multidiscip. Model. Mater.*, pages 970–983.
- [68] Aria, A. I., y Biglari, H. Computational vibration and buckling analysis of microtubule bundles based on nonlocal strain gradient theory. *Appl. Math. Comput.*, 321:313–332, 2018.
- [69] Chelminiak, P., Dixon, J. M., y Tuszyński, J. A. Torsional elastic deformations of microtubules within continuous sheet model. *Eur. Phys. J. E. Soft Matter.*, 31:215–227, 2010.
- [70] Civalek, Ö., y Demir, C. A simple mathematical model of microtubules surrounded by an elastic matrix by nonlocal finite element method. *Appl. Math. Comput.*, 298:335–352, 2016.
- [71] Lazarus, C., Soheilypour, M., y Mofrad, M. R. Torsional behavior of axonal microtubule bundles. *Biophys. J.*, 109:231–239, 2015.
- [72] Lee, J.J., Piersanti, E., Mardal, K.A., y Rognes, M.E. A mixed finite element method for nearly incompressible multiple-network poroelasticity. *SIAM J. Sci. Comput.*, 41:A722–A747, 2019.
- [73] Shen, H. S. Nonlocal shear deformable shell model for torsional buckling and postbuckling of microtubules in thermal environments. *Mech. Res. Commun.*, 54:83–95, 2013.
- [74] Aarsnes, U. J. F., y van de Wouw, N. Axial and torsional self-excited vibrations of a distributed drill-string. *J. Sound Vib.*, 444:127–151, 2019.

- [75] Moallem, M. Modeling and control of torsional beam vibrations: a wave-based approach. *J. Vib. Acoust.*, 130:021014, 2008.
- [76] Pan, T. W., y Wang, Y. B. Fracture analysis for torsion problems of a composite cylinder with curvilinear cracks. *Appl. Math. Mech.*, 29:1005–1012, 2008.
- [77] Sandhya, R. B., Ch, B., y Malla, R. P. Study of torsional vibrations in an initially stressed composite poroelastic cylinders. *J. Phys. Conf. Ser.*, 662:No. 1, p. 012006, 2015.
- [78] Hadji, L., y Avcar, M. Free vibration analysis of FG porous sandwich plates under various boundary conditions. *J. Appl. Comput. Mech.*, 7(2):505–519, 2020.
- [79] Hadji, L., y Avcar, M. Nonlocal free vibration analysis of porous FG nanobeams using hyperbolic shear deformation beam theory. *Adv. Nano Res.*, 10(3):281–293, 2021.
- [80] Armenakas, A. E. Torsional waves in composite rods. *J. Acoust. Soc. Am.*, 38:439–446, 1965.
- [81] Barsoum, I., Khan, F., y Barsoum, Z. Analysis of the torsional strength of hardened splined shafts. *Mater. Des.*, 54:130–136, 2014.
- [82] Bert, C. W., y Kim, C. D. Analysis of buckling of hollow laminated composite drive shafts. *Compos. Sci. Technol.*, 53:343–351, 1995.
- [83] Gao, W., Cui, Z., y Wang, K. Wave propagation in poroelastic hollow cylinder immersed in fluid with seismoelectric effect. *J. Sound Vib.*, 332:5014–5028, 2013.
- [84] Tang, L. G., y Xu, X. M. Transient torsional vibration responses of finite, semi-infinite and infinite hollow cylinders. *J. Sound Vib.*, 329:1089–1100, 2010.

- [85] Wu, B., Su, Y., Liu, D., Chen, W., y Zhang, C. On propagation of axisymmetric waves in pressurized functionally graded elastomeric hollow cylinders. *J. Sound Vib.*, 421:17–47, 2018.
- [86] Tajuddin, M., y Sarma, S. Torsional vibrations of poroelastic cylinders. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 47:214–216, 1980.
- [87] Tajuddin, M., y Shah, S.A. On torsional vibrations of infinite hollow poroelastic cylinders. *J. Mech. Mater. Struct.*, 2(1):189–200, 2007.
- [88] Abbas, I. Natural frequencies of a poroelastic hollow cylinder. *Acta Mech.*, 186(1-4):229–237, 2006.
- [89] Fellah, Z. E. A., Depollier, C., Fellah, M., Lauriks, W., y Chapelon, J. Y. Influence of dynamic tortuosity and compressibility on the propagation of transient waves in porous media. *Wave motion*, 41(2):145–161, 2005.
- [90] Hickey, C. J., Spanos, T. J. T., y De la Cruz, V. Deformation parameters of permeable media. *Geophys. J. Int.*, 121(2):359–370, 1995.
- [91] De la Cruz, V. y Spanos, T. J. T. Seismic wave propagation in a porous medium. *Geophys.*, 50(10):1556–1565, 1985.
- [92] Sahay, P. N. Elastodynamics of deformable porous media. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci. P Roy Soc A-Msth Phy*, 452(1950):1517–1529, 1996.
- [93] Arfken, G. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Inc, San Diego, California, third edition, 1985.
- [94] Churchill, R. V., Brown, J. W., y Rapun, L. A. *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw-Hill, 1986.

- [95] Cochran, J. A. Remarks on the zeros of cross-product Bessel functions. *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 12:580–587, 1964.
- [96] Abramowitz, M., y Stegun, I.A. *Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover Publications, New York, 1972.
- [97] McMahon, J. On the roots of the bessel and certain related functions. the annals of mathematics. *Ann. Math.*, 9(1/6):23–30, 1894.
- [98] Pochhammer, L. Uber die fortpflanzung segeschwindigkeiten schwingungen in einem unbergrawzten isotropen kreiscylinder. *J. Reine Angew. Math.*, 31:324–336, 1876.
- [99] Chree, C. Longitudinal vibrations of a circular bar. *Quart. J. Pure Appl. Math*, 21:287–298, 1886.
- [100] Hart, D. J., y Wang, H. F. Laboratory measurements of a complete set of poroelastic moduli for Berea sandstone and indiana limestone. *J. Geophys. Res. Solid Earth.*, 100:17741–17751, 1995.
- [101] Berryman, J. G. Elastic wave propagation in fluid-saturated porous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 69(2):416–424, 1981.
- [102] Su, Y. D., Li, Z., Xu, S., Zhuang, C. X., y Tang, X. M. Elastic-wave evaluation of downhole hydraulic fracturing: Modeling and field applications. *Geophys.*, 83(1)(1):D1–D8, 2018.
- [103] Zhuang, C., Xu, S., Li, H., Su, Y., y Tang, X. Azimuthal shear-wave anisotropy measurement in a borehole: Physical modeling and dipole acoustic verification. *J. Acoust. Soc.*, 146(2):EL129–EL134, 2019.

- [104] Fäh, D., Kind, F., y Giardini, D. Inversion of local S-wave velocity structures from average H/V ratios, and their use for the estimation of site-effects. *J. Seismol.*, 7(4):449–467, 2003.
- [105] Wang, Y. y Li, C. H. Investigation of the P-and S-wave velocity anisotropy of a longmaxi formation shale by real-time ultrasonic and mechanical experiments under uniaxial deformation. *J. Pet. Sci. Eng.*, 158:253–267, 2017.
- [106] Xu, S., Tang, X., Torres-Verdín, C. y Su, Y. Seismic shear wave anisotropy in cracked rocks and an application to hydraulic fracturing. *Geophys. Res. Lett.*, 45(11):5390–5397, 2018.
- [107] Djili, S., y Boubenider, F. Propagation of guided waves in a hollow circular cylinder application to non destructive testing. *EPJ Web Conf.*, 6:15004. EDP Sciences, 2017.
- [108] Yahya, G. A., y Abd-Alla, A. M. Radial vibrations in an isotropic elastic hollow cylinder with rotation. *J. Sound Vib.*, 22(13):3123–3131, 2016.
- [109] Abd-Alla, A. M., Yahya, G. A., y Mahmoud, S. R. Effect of magnetic field and non-homogeneity on the radial vibrations in hollow rotating elastic cylinder. *Meccanica*, 48:555–566, 2013.
- [110] Tipler, P. A., y Mosca, G. *Física para la ciencia y la tecnología*, volume 1A. Mecánica. Reverté, 2021.
- [111] Olokuntoye, B. A., Akinola, A. P., Layeni, O. P., y Fadodun, O. O. Natural frequencies of vibration of a magnetoelastic hollow cylinder in a magnetic field under large deformation. *Int. J. Eng. Res. Technol.*, 9:328–335, 2020.

- [112] Khalmuradov, R. I., y Yalgashev, B. F. Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell. *IOP Publishing*, 614 (1):p. 012087, 2020.
- [113] CeMIEGeo. <https://cemiegeo.cicese.mx/index.php/laboratorios/laboratorio-de-propiedades-fisicas-de-rocas>, agosto de 2023.