

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA**

**FACULTAD DE CIENCIAS**



**RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN IMÁGENES  
DIGITALES USANDO LA TRANSFORMADA DE  
RADON**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

**PRESENTA:**

**JONATHAN VERDUGO OLACHEA**

Ensenada, Baja California, México. Agosto 2015

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
FACULTAD DE CIENCIAS

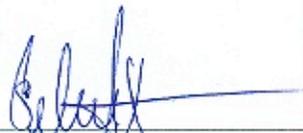
RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN IMÁGENES  
DIGITALES USANDO LA TRANSFORMADA DE  
RADON

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

JONATHAN VERDUGO OLACHEA

APROBADO POR:



---

DRA. SELENE SOLORZA  
CALDERÓN

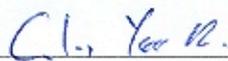
DIRECTOR DE TESIS



---

M.C. ADINA JORDAN  
ARAMBURO

SINODAL



---

DR. CARLOS YEE  
ROMERO

SINODAL



---

M.C. GLORIA ELENA  
RUBÍ VÁZQUEZ

SINODAL

## DEDICATORIA

Para:

Laura Olachea León, no existe cariño más grande que el de una madre.

## Agradecimientos

Primero que nada quiero agradecer a mi asesora de tesis, Dra. Selene Solorza Calderón, por su esfuerzo, determinación, dedicación, paciencia y entusiasmo con el que me asesoró para realizar este trabajo. Su manera de trabajar es admirable.

A mis sinodales M.C. Adina Jordan Aramburo, M.C. Gloria Elena Rubí Vázquez y Dr. Carlos Yee Romero por su tiempo, sugerencias, correcciones y aportaciones para mejorar este trabajo de tesis.

Al CONACYT por la beca otorgada para la realización de esta tesis bajo el proyecto de Ciencia Básica SEP-CONACYT 2011 con número 169174 y titulado reconocimiento de patrones en imágenes digitales mediante máscaras binarias de anillos concéntricos y firmas unidimensionales invariantes a posición, rotación y escalamiento.

Quiero agradecer a mi madre Laura Olachea León y mi padre Humberto Verdugo González. Gracias por todos los años y todo el esfuerzo que han realizado para educarme y hacer de mí una persona de bien. Ustedes me han inculcado que el estudio es una de las cosas más importantes, me han enseñado a nunca rendirme y siempre han estado apoyandome en todo momento.

A mi hermano Humberto Verdugo Olachea, sus consejos me guiaron a estudiar la más bonita de las carreras.

A mi hermana Thania Verdugo Olachea, siempre me ha consentido y apoyado en todo momento.

A Alexandra Reyes Jaime, por estar a mi lado en las buenas y en las malas, por su comprensión, paciencia y por darme ánimos para seguir adelante.

A mis compañeros de tesis, por compartir sus conocimientos y por su apoyo.

A mis compañeros de la Universidad y ahora mis amigos.

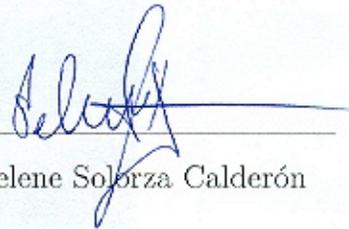
RESUMEN de la Tesis de Jonathan Verdugo Olachea presentada como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Ensenada, Baja California, México, Junio 2015.

## RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN IMÁGENES DIGITALES USANDO LA TRANSFORMADA DE RADON

Gracias al avance de la tecnología, el reconocimiento de patrones en imágenes digitales esta cada vez más presente en nuestra vida diaria, ejemplo de ello es la reconstrucción de imágenes de tomografía asistida por computadora; el reconocimiento de patrones en imágenes digitales de estructuras óseas y huellas dactilares; el estudio y estimación de recursos naturales y biodiversidad; la inspección automatizada en fábricas; entre otros. En este trabajo de tesis se presenta un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante a traslación, escala y rotación desarrollado a partir de las transformadas: Fourier, Fourier-Mellin y Radon, al cual se le llamará sistema de reconocimiento de patrones Radon-Fourier-Mellin. Además, se propone una nueva técnica de clasificación que posiciona el atributo asignado a la imagen en una zona del espacio, de esa manera se reduce el tiempo de cómputo.

**Palabras clave:** Reconocimiento de patrones, transformada de Fourier, transformada de Fourier-Mellin, transformada de Radon.

Resumen aprobado por:



Dra. Selene Solórzano Calderón

# Índice general

<b>1..</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2..</b>	<b>Objetivo</b>	<b>3</b>
<b>3..</b>	<b>Antecedentes</b>	<b>4</b>
3.1.	Imágenes digitales . . . . .	4
3.2.	La función delta de Dirac . . . . .	5
3.2.1.	La función delta de Dirac bidimensional . . . . .	6
3.3.	Transformada Integral . . . . .	7
3.4.	Transformada de Fourier . . . . .	8
3.4.1.	Serie de Fourier . . . . .	8
3.4.2.	Condiciones de Dirichlet . . . . .	8
3.4.3.	Funciones ortogonales . . . . .	9
3.4.4.	Coeficientes de la Serie de Fourier . . . . .	9
3.4.5.	Serie Compleja de Fourier . . . . .	10
3.4.6.	Par de Transformadas de Fourier . . . . .	11
3.4.7.	La transformada de Fourier para funciones de dos variables	12
3.4.8.	La propiedad de desplazamiento de la transformada de Fourier para funciones de dos variables . . . . .	13
3.4.9.	Transformada discreta de Fourier en dimensión uno . . . . .	13
3.4.10.	Transformada discreta de Fourier en dimensión dos . . . . .	15
3.5.	Transformada analítica de Fourier-Mellin . . . . .	15
3.5.1.	Transformada de Mellin . . . . .	15
3.5.2.	La invariancia a escala de la transformada de Mellin . . . . .	16
3.5.3.	Transformada de Fourier-Mellin . . . . .	17
3.5.4.	Problemas con el cálculo de la transformada de Fourier-Mellin en imágenes digitales . . . . .	18
3.5.5.	Transformada analítica de Fourier-Mellin . . . . .	18
3.5.6.	La transformada analítica de Fourier-Mellin normalizada . . . . .	20

3.5.7.	Transformada analítica de Fourier-Mellin vía la transformada de Fourier . . . . .	21
3.6.	Transformada de Radon . . . . .	21
3.6.1.	Transformada de Radon en coordenadas polares . . . . .	23
3.6.2.	Propiedad de rotación . . . . .	24
3.6.3.	Relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier . . . . .	25
3.6.4.	Transformada discreta de Radon . . . . .	26
<b>4..</b>	<b>Sistema de reconocimiento de patrones RFM</b>	<b>28</b>
4.1.	Sistema de reconocimiento de patrones invariante a traslación . . .	28
4.2.	Sistema de reconocimiento de patrones invariante a traslación y escala	29
4.3.	Sistema de reconocimiento de patrones RFM invariante a traslación, escala y rotación . . . . .	31
<b>5..</b>	<b>Sistema RFM para imágenes a color</b>	<b>36</b>
5.1.	Intervalos de confianza para una imagen a color . . . . .	36
5.2.	El sistema de reconocimiento de patrones RFM para imágenes a color	39
<b>6..</b>	<b>Sistema RFM para imágenes en escala de grises</b>	<b>45</b>
<b>7..</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>48</b>

# Índice de figuras

1.	Representación gráfica de una imagen a color [8]. . . . .	5
2.	Representación esquemática de la aproximación de los coeficientes complejos de Fourier mediante la suma de Riemann [16]. . . . .	14
3.	Recta $L$ en el plano [13]. . . . .	22
4.	Ejes $p$ y $s$ . . . . .	23
5.	Transformada discreta de Radon, técnica tipo TAC [27]. . . . .	27
6.	Ejemplo de la respuesta del sistema de reconocimiento de patrones invariante a traslación. (a) Imagen $I_1$ . (b) Imagen $I_2$ . (c) Imagen $I_3$ . (d) $A_1 =  \mathcal{F}\{I_1\} $ . (e) $A_2 =  \mathcal{F}\{I_2\} $ . (f) $A_3 =  \mathcal{F}\{I_3\} $ . Para una mejor visualización, el módulo de la transformada de Fourier de las imágenes se muestra en escala logarítmica. . . . .	29
7.	Ejemplo del módulo de la transformada de Fourier de imágenes con objetos desplazados y escalados. (a) $G_1$ . (b) $G_2$ . (c) $G_3$ . (d) $D_1 =  \mathcal{F}\{G_1\} $ . (e) $D_2 =  \mathcal{F}\{G_2\} $ . (f) $D_3 =  \mathcal{F}\{G_3\} $ . Para una mejor visualización, el módulo de la transformada de Fourier de las imágenes se muestra en escala logarítmica. . . . .	30
8.	Ejemplo de la respuesta del sistema digital invariante a traslación y escala. (a) $G_1$ . (b) $G_2$ . (c) $G_3$ . (d) $A_{G_1} =  \mathcal{F}\{G_1\} $ . (e) $A_{G_2} =  \mathcal{F}\{G_2\} $ . (f) $A_{G_3} =  \mathcal{F}\{G_3\} $ . (g) $Q_1 = A_{G_1}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (h) $Q_2 = A_{G_2}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (i) $Q_3 = A_{G_3}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (j) $B_{Q_1}$ . (k) $B_{Q_2}$ . (l) $B_{Q_3}$ . Por cuestiones de visualización, el módulo de la transformada de Fourier y el de la transformada analítica de Fourier-Mellin de las imágenes se muestra en escala logarítmica. . . . .	33

9.	Ejemplo del módulo de la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizado. (a) $H_1$ . (b) $H_2$ . (c) $H_3$ . (d) $A_{H_1} = \left  \mathcal{F}\{H_1\} \right $ . (e) $A_{H_2} = \left  \mathcal{F}\{H_2\} \right $ . (f) $A_{H_3} = \left  \mathcal{F}\{H_3\} \right $ . (g) $K_1 = A_{H_1}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (h) $K_2 = A_{H_2}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (i) $K_3 = A_{H_3}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (j) $B_{K_1}$ . (k) $B_{K_2}$ . (l) $B_{K_3}$ . Por cuestiones de visualización, el módulo de la transformada de Fourier y el de la transformada analítica de Fourier-Mellin de las imágenes se muestra en escala logarítmica. . . . .	34
10.	Ejemplos de la respuesta del sistema de reconocimiento de patrones RFM. (a) $R_{K_1}$ . (b) $R_{K_2}$ . (c) $R_{K_3}$ . . . . .	35
11.	Firmas invariantes a traslación, escala y rotación. . . . .	35
12.	Imagen $I$ : Cymatogramma arginussa eubaena. . . . .	36
13.	Intervalos de confianza del 95.4% de la mariposa $I$ : cymatogramma arginussa eubaena. (a) Intervalo de confianza del 95.4% asociado al canal rojo. (b) Intervalo de confianza del 95.4% asociado al canal verde. (c) Intervalo de confianza del 95.4% asociado al canal azul. . .	38
14.	Ortoedro de confianza del 95.4% de la Figura 12. . . . .	39
15.	Imágenes de mariposas a color. (a) A: <i>Cymatogramma arginussa eubaena</i> . (b) B: <i>Danaus eresimus montezuma</i> . (c) C: <i>Danaus plexippus plexippus</i> . (d) D: <i>Dione juno huascuma</i> . (e) E: <i>Doxocopa laure acca h</i> . (f) F: <i>Doxocopa laure laure m</i> . (g) G: <i>Doxocopa pavon m</i> . (h) H: <i>Dryadula phaetusa</i> . (i) I: <i>Dryas julia moderata</i> . (j) J: <i>Dynamine mylitta m</i> . (k) K: <i>Eryphanis aesacus</i> . (l) L: <i>Eueides procula asidia</i> . (m) M: <i>Eumaeus debora</i> . (n) N: <i>Eunica alcmena h</i> . (ñ) Ñ: <i>Eunica alcmena m</i> . (o) O: <i>Eunica caresa h</i> . (p) P: <i>Eunica caresa m</i> . (q) Q: <i>Evenus regalis</i> . . . . .	40
16.	Intervalos de confianza. (a) Intervalos de confianza del 95.4% generados a partir del conjunto $P_R$ . (b) Amplificación en la zona de A y Ñ de la Figura 16(a). . . . .	41
17.	Intervalos de confianza. (a) Intervalos de confianza del 95.4% generados a partir del conjunto $P_G$ . (b) Amplificación en la zona de A y Ñ de la Figura 17(a). . . . .	42

18.	Intervalos de confianza. (a) Intervalos de confianza del 95.4% generados a partir del conjunto $P_B$ . (b) Amplificación en la zona de A y $\tilde{N}$ de la Figura 18(a). . . . .	43
19.	Espacio de clasificación. (a) Ortoedros de confianza del 95.4% para la base de datos de la Figura 15. (b) Amplificación de la zona más concurrida de la Figura 19(a). . . . .	44
20.	Imágenes de mariposas en escala de grises. (a) A: <i>Cymatogramma arginussa eubaena</i> . (b) B: <i>Danaus eresimus montezuma</i> . (c) C: <i>Danaus plexippus plexippus</i> . (d) D: <i>Dione juno huascuma</i> . (e) E: <i>Doxocopa laure acca h.</i> (f) F: <i>Doxocopa laure laure m.</i> (g) G: <i>Doxocopa pavon m.</i> (h) H: <i>Dryadula phaetusa</i> . (i) I: <i>Dryas julia moderata</i> . (j) J: <i>Dynamine mylitta m.</i> (k) K: <i>Eryphanis aesacus</i> . (l) L: <i>Eueides procula asidia</i> . (m) M: <i>Eumaeus debora</i> . (n) N: <i>Eunica alcmena h.</i> ( $\tilde{n}$ ) $\tilde{N}$ : <i>Eunica alcmena m.</i> (o) O: <i>Eunica caresa h.</i> (p) P: <i>Eunica caresa m.</i> (q) Q: <i>Evenus regalis</i> . . . . .	46
21.	Espacio de clasificación. (a) Ortoedros de confianza del 95.4% para la base de datos de la Figura 20. (b) Amplificación de la zona más concurrida de la Figura 21(a). . . . .	47

# Capítulo 1

## Introducción

Desde sus primeros pasos, el ser humano se ha dedicado al reconocimiento de objetos, ya sea por necesidad o solo por la curiosidad de clasificar objetos [24]. Se ha estimado que aproximadamente el 70% de la información percibida por el hombre proviene de su sistema visual. Los seres humanos cuentan con capacidades impresionantes para analizar imágenes de escenas de su alrededor, esto les permite tomar decisiones importantes respecto a lo que está sucediendo en su entorno [19].

Por medio de la ciencia y la tecnología, se ha tratado de imitar el proceso cognitivo que realiza el cerebro en la toma de decisiones. Un ejemplo de ello, es el campo denominado reconocimiento de patrones, que es un área del procesamiento de imágenes digitales en donde se desarrollan técnicas para: detección, segmentación, localización y reconocimiento de objetos en imágenes digitales; identificación de un objeto en diversas escenas; seguimiento de un objeto en un vídeo (secuencia de imágenes) y clasificación de imágenes digitales por su contenido [8]. Una de las metas en este campo es reconocer objetos de forma automática con un alto nivel de confianza y bajo costo computacional, sin importar si los objetos están rotados, escalados o desplazados, con diferentes tipos de ruido, iluminación o incluso si solo se cuenta con un fragmento del objeto [23].

Los sistemas digitales de reconocimiento de patrones basados en funciones de correlación han sido objeto de interés por muchos años, estos suponen que las imágenes son invariantes bajo un conjunto de transformaciones (traslación, escala y rotación), por lo que son una herramienta muy útil en la identificación de objetos, ya que lo reconocerán independientemente de la posición, orientación y tamaño en el que se presente [22]. Dichas técnicas son muy efectivas, sin embargo, por lo regular son muy costosas operacionalmente en tiempo de cómputo.

En este trabajo de tesis se presenta un sistema digital de reconocimiento de patrones invariante a posición, escala y rotación, basado en la transformada de Fourier, la transformada analítica de Fourier-Mellin y la transformada de Radon. Además en el proceso de clasificación, se propone una nueva técnica que reduce el tiempo de cómputo al posicionar el atributo asignado al objeto en una zona particular en el espacio, por ende se tendrá un solo espacio de clasificación, en lugar de los múltiples planos generados en las técnicas de correlación.

La tesis comprende siete capítulos: en el primero se realiza una introducción general al reconocimiento de patrones en imágenes digitales. En el capítulo 2 se establece el objetivo. En el capítulo 3 se presenta la base teórica bajo la cual se sustenta el sistema de reconocimiento de patrones Radon-Fourier-Mellin: los antecedentes de la transformada de Fourier, la transformada de Fourier-Mellin y la transformada de Radon, algunas de sus propiedades básicas y la relación entre ellas. En el capítulo 4 se explica la metodología para construir el sistema de reconocimiento de patrones Radon-Fourier-Mellin. El capítulo 5 muestra cómo se genera el espacio de clasificación de ortoedros de confianza para imágenes a color y en el capítulo 6 la correspondiente metodología para imágenes en escala de grises. Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones.

# Capítulo 2

## Objetivo

Elaborar un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales que sea invariante a posición, escala y rotación usando la transformada de Fourier, la transformada de Fourier-Mellin y la transformada de Radon.

# Capítulo 3

## Antecedentes

### 3.1. Imágenes digitales

Una imagen se define como una función de dos variables  $f(x, y)$ , donde  $x$  e  $y$  son coordenadas espaciales y a los valores de  $f$  en cualquier par de coordenadas se les llama intensidad de la imagen en ese punto [8]. Otro concepto que aparece frecuentemente en el área de procesamiento de imágenes es el de imagen monocromática, que es aquella que está formada solamente por un color y el término nivel de gris se usa para referirse a la intensidad en las imágenes monocromáticas.

Una imagen digital se representa por medio de una matriz de  $N \times M$ , como

$$I = \begin{bmatrix} I(0,0) & I(0,1) & I(0,2) & \dots & I(0,M-1) \\ I(1,0) & I(1,1) & I(1,2) & \dots & I(1,M-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I(N-1,0) & I(N-1,1) & I(N-1,2) & \dots & I(N-1,M-1) \end{bmatrix}$$

donde a la posición  $(i, j)$  se le llama elemento de la imagen o píxel (del inglés *picture element*) y a  $I(i, j) = 0, \dots, 255$  se le conoce como el nivel de intensidad para una imagen clase *uint8*. Cuando se manejan imágenes del tipo *uint16*, entonces  $I(i, j) = 0, \dots, 65535$  [19].

Una imagen a color se forma mediante una combinación de imágenes monocromáticas. Por ejemplo, el sistema de color RGB consiste en la combinación de tres imágenes monocromáticas, que representan la intensidad del color rojo, verde y azul ( $R, G, B$ ), respectivamente y a las cuales se les denomina canales o componentes

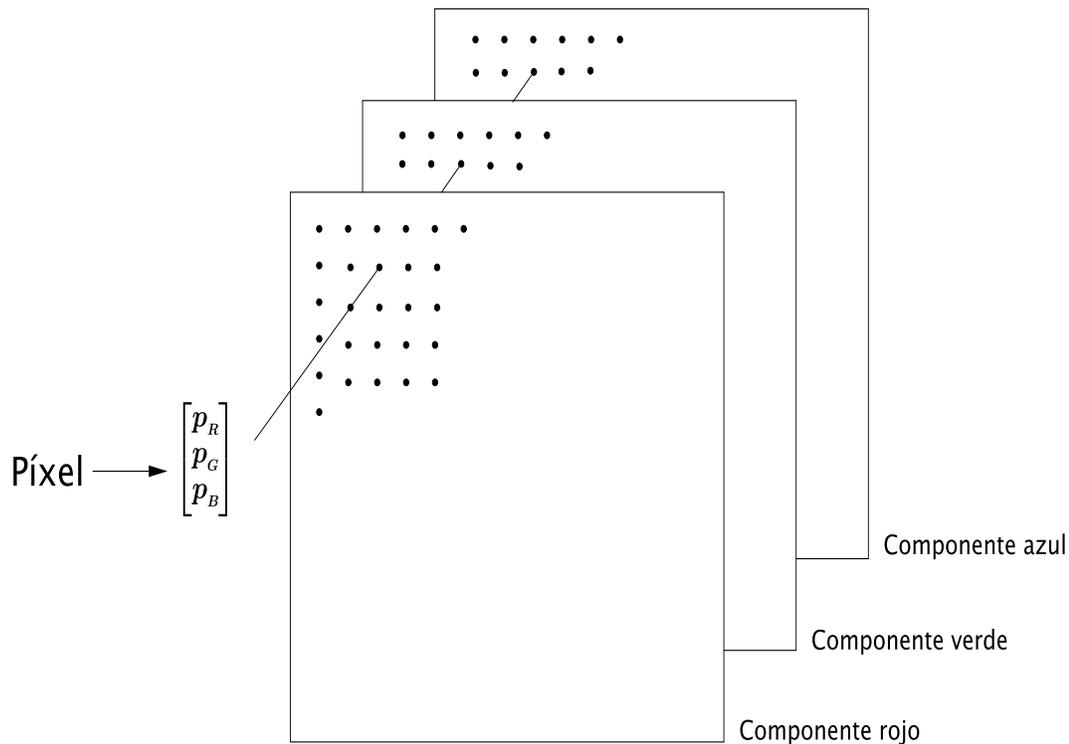


Figura 1. Representación gráfica de una imagen a color [8].

de la imagen (Figura 1). Por esta razón, muchas técnicas desarrolladas para imágenes monocromáticas se pueden extender a imágenes a color al procesar cada canal como una imagen monocromática [8].

### 3.2. La función delta de Dirac

La función impulso unitario  $\delta$ , también conocida como función delta de Dirac, generalmente se expresa mediante la relación

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ \infty, & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

para la cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = 1, \quad \epsilon > 0. \quad (2)$$

La ec(1) indica que  $\delta(x)$  es cero excepto en  $x = 0$ , donde se hace infinito; y de la ec(2) se infiere que el pulso tiene área uno [11].

La función delta también se puede definir en términos de sus propiedades [11]. Sea  $\{\phi\}$  el conjunto de funciones continuas e infinitamente diferenciables que se anulan fuera de un intervalo finito. A dicho conjunto se le conoce como el conjunto de funciones prueba. Se define a la función  $\delta$  como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\delta(x) dx = \phi(x)|_{x=0} = \phi(0). \quad (3)$$

La expresión (3) no tiene el significado común de una integral definida, sino que la integral, así como la función  $\delta$ , están definidas por el número  $\phi(0)$  asignado a la función de prueba  $\phi$ .

### 3.2.1. La función delta de Dirac bidimensional

La función delta de Dirac en dimensión dos se generaliza a partir de su definición en dimensión uno, mediante

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0, \\ \infty, & \text{si } x^2 + y^2 = 0, \end{cases} \quad (4)$$

para la cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x, y) dx dy = 1, \quad \epsilon > 0. \quad (5)$$

En el caso bidimensional, la función delta también se puede definir en términos de sus propiedades [1; 16]. Sea  $\{\phi\}$  el conjunto de funciones prueba. La función  $\delta$  se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y)\delta(x, y) dx dy = \phi(x, y)|_{(x,y)=(0,0)} = \phi(0, 0). \quad (6)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) \delta(x) \delta(y) \, dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) \delta(x) \, dx \right\} \delta(y) \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(0, y) \delta(y) \, dy = \phi(0, 0).
\end{aligned} \tag{7}$$

Entonces,  $\delta(x, y)$  y  $\delta(x)\delta(y)$  tienen el mismo efecto para las funciones prueba.

### 3.3. Transformada Integral

Las transformaciones integrales han sido utilizadas con éxito, durante casi dos siglos, en la solución de diversos problemas en matemáticas aplicadas, física matemática, ingeniería, entre otros [13]. Históricamente, el concepto de transformada integral se originó a partir de la transformada de Fourier.

La transformada integral de una función  $f$  definida en  $a \leq x \leq b$ , se denota por  $\mathcal{I}\{f(x)\} = F(k)$  y está definida mediante

$$F(k) = \mathcal{I}\{f(x)\} = \int_a^b f(x) K(x, k) \, dx, \tag{8}$$

donde al operador  $\mathcal{I}$  usualmente se le llama transformada integral y a  $K(x, k)$  se le conoce como el kernel de la transformada [13].

$\mathcal{I}$  es un operador lineal ya que para  $\alpha$  y  $\beta$  constantes arbitrarias, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} &= \int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} K(x, k) \, dx \\
&= \int_a^b \{\alpha f(x)\} K(x, k) \, dx + \int_a^b \{\beta g(x)\} K(x, k) \, dx \\
&= \alpha \mathcal{I}\{f(x)\} + \beta \mathcal{I}\{g(x)\}.
\end{aligned}$$

## 3.4. Transformada de Fourier

Sin prestar atención al análisis matemático riguroso, Joseph Fourier fue el primero en introducir la idea de expandir una función en términos de series trigonométricas. Aún así Fourier dijo: “Por lo tanto no hay ninguna función, ... que no puede ser expresada por una serie trigonométrica ... [o] integral definida”. Esto llevó a una gran controversia entre muchos matemáticos del siglo XVII. Primeramente, el famoso problema de la cuerda vibrante descrita por la ecuación de onda y después la investigación del flujo de calor modelada a través de la ecuación de calor, llevaron a Fourier al desarrollo de las series e integrales de Fourier [14].

### 3.4.1. Series de Fourier

Se define a una función periódica, como una función para la cual

$$f(x) = f(x + T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

a la constante  $T$  se le conoce como el período de la función [11]. Mediante la repetición de la ec(9) se obtiene que

$$f(x) = f(x + nT), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

La serie trigonométrica de Fourier o simplemente serie de Fourier de una función periódica  $f(x)$  de periodo  $T$ , es la representación de  $f(x)$  por la serie trigonométrica

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos(nw_0x) + b_n \sin(nw_0x) \right], \quad (11)$$

donde  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$  [11].

### 3.4.2. Condiciones de Dirichlet

Para que una función  $f$  de periodo  $T$  se pueda representar mediante una serie de Fourier, debe de cumplir las condiciones de Dirichlet:

- 1) la función  $f$  tiene un número finito de discontinuidades en un período;
- 2) la función  $f$  tiene un número finito de máximos y mínimos en un período;
- 3) la función  $f$  es absolutamente integrable en un período, es decir

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)| dx < \infty. \quad (12)$$

La función  $f$  es continua por tramos en el intervalo finito  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ , si satisface las condiciones 1) y 2). Si  $f$  no es periódica, su representación por series de Fourier solo es válida para el intervalo  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  [11].

### 3.4.3. Funciones ortogonales

Un conjunto de funciones  $\Phi = \{\phi_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  es ortogonal en el intervalo  $a < x < b$  si, para dos funciones cualesquiera  $\phi_m$  y  $\phi_n$  pertenecientes al conjunto  $\Phi$ , se cumple que

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ r_n \neq 0, & \text{si } m = n. \end{cases} \quad (13)$$

Por ejemplo, el conjunto

$$\left\{1, \cos(nw_0x), \sin(mw_0x) \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad (14)$$

es ortogonal en el intervalo  $-\frac{T}{2} < x < \frac{T}{2}$ , donde  $T$  representa un periodo y  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$  [11].

### 3.4.4. Coeficientes de la Serie de Fourier

Utilizando las propiedades de ortogonalidad del conjunto (14), se pueden obtener los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  de la serie de Fourier (11).

Primeramente, integrando la ec(11) sobre el intervalo  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , se obtiene que

$$a_0 = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx. \quad (15)$$

Multiplicando ambos lados de la ec(11) por  $\cos(mw_0x)$  e integrando sobre el intervalo  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , se llega a

$$a_m = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(mw_0x) dx. \quad (16)$$

Por último, multiplicando ambos lados de la ec(11) por  $\sin(mw_0x)$  e integrando sobre el intervalo  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ ,

$$b_m = \frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(mw_0x) dx. \quad (17)$$

### 3.4.5. Serie Compleja de Fourier

Considerando que

$$\cos(nw_0x) = \frac{1}{2} \left[ e^{inw_0x} + e^{-inw_0x} \right], \quad (18)$$

$$\sin(nw_0x) = \frac{1}{2i} \left[ e^{inw_0x} - e^{-inw_0x} \right], \quad (19)$$

en la ec(11), y después de agrupar apropiadamente los términos, esta se reescribe como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inw_0x} + (a_n + ib_n)e^{-inw_0x} \right\}. \quad (20)$$

Al definir a  $c_0 = \frac{1}{2}a_0$ ,  $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$  y  $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ , la ec(20) se expresa

en forma polar,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_n e^{nw_0 x} + c_{-n} e^{-inw_0 x} \right] \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{nw_0 x} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{nw_0 x} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 x}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

De la ec(15) a la ec(17), los coeficientes complejos de Fourier se reescriben como

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-inw_0 x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{22}$$

donde

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{23}$$

### 3.4.6. Par de Transformadas de Fourier

La función  $F$  definida por

$$F(w) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iw x} dx, \tag{24}$$

se conoce como la integral de Fourier, transformada de Fourier o transformada compleja de Fourier y a  $\mathcal{F}$  se le llama operador de la transformada de Fourier.

La función inversa de la transformada de Fourier, conocida como transformada inversa de Fourier, se denota por

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(w)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iw x} dw. \tag{25}$$

A las ecuaciones (24) y (25) se les llama par de transformadas de Fourier [11].

La transformada de Fourier nace cuando se intenta encontrar una representación de las series de Fourier para una función no periódica en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  [14]. Entonces, al sustituir la ec(22) en la ec(21) se obtiene que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-inw_0 t} dx \right] e^{inw_0 x}. \quad (26)$$

Puesto que  $\frac{1}{T} = \frac{w_0}{2\pi}$ , la ec(26) es

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-inw_0 t} dt \right] w_0 e^{inw_0 x}. \quad (27)$$

De la ec(23) se tiene que si  $T \rightarrow \infty$ , entonces  $\omega_0 \rightarrow 0$ . Sea  $\omega_0 = \Delta\omega$ , por lo que si  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\omega \rightarrow d\omega$  y  $n\Delta\omega \rightarrow w$ . Así que para  $T \rightarrow \infty$ , la ec(27) se reescribe como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \right] e^{iwx} dw. \quad (28)$$

Si se define a

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx, \quad (29)$$

la ec(28) queda de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dw. \quad (30)$$

La transformada de Fourier de una función  $f$  existe si satisface las condiciones de Dirichlet en  $(-\infty, \infty)$ . En particular, si  $x$  es un punto de discontinuidad de  $f$  se cumple la siguiente igualdad

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(x + \epsilon) + f(x - \epsilon)] = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ f(x) \} \}. \quad (31)$$

### 3.4.7. La transformada de Fourier para funciones de dos variables

La generalización de la transformada de Fourier y su inversa en dos variables está dada por

$$F(u, v) = \mathcal{F} \{ f(x, y) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy. \quad (32)$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u, v)\} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv. \quad (33)$$

### 3.4.8. La propiedad de desplazamiento de la transformada de Fourier para funciones de dos variables

Por la definición, ec(32), la transformada de Fourier de  $f(x + x_0, y + y_0)$  es

$$\mathcal{F}\{f(x + x_0, y + y_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + x_0, y + y_0) e^{-i(ux+vy)} dx dy. \quad (34)$$

Al hacer los cambios de variable  $\zeta = x + x_0$ ,  $\eta = y + y_0$  en ec(34) se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x + x_0, y + y_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta, \eta) e^{-i[u(\zeta-x_0)+v(\eta-y_0)]} d\zeta d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta, \eta) e^{-i(u\zeta+v\eta)} e^{i(ux_0+vy_0)} d\zeta d\eta \\ &= e^{i(ux_0+vy_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta, \eta) e^{-i(u\zeta+v\eta)} d\zeta d\eta \\ &= e^{i(ux_0+vy_0)} \mathcal{F}\{f(x, y)\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Entonces,

$$\left| \mathcal{F}\{f(x + x_0, y + y_0)\} \right| = \left| \mathcal{F}\{f(x, y)\} \right|, \quad (36)$$

es decir, el módulo de la transformada de Fourier de una función de dos variables es invariante a traslación [11].

### 3.4.9. Transformada discreta de Fourier en dimensión uno

Si  $f$  es una función periódica con periodo  $2L$ , entonces los coeficientes de Fourier de la ec(22), son

$$c_k = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x) e^{-ik\frac{\pi}{L}x} dx. \quad (37)$$

Si se considera que solamente se conocen  $N$  valores equiespaciados de  $x$ , de forma que cubran todo el periodo, es decir,  $0 \leq x_k < 2L$  con  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ , donde

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{2L}{N}, \quad x_2 = 2\frac{2L}{N}, \dots, \quad x_{N-1} = (N-1)\frac{2L}{N}, \quad (38)$$

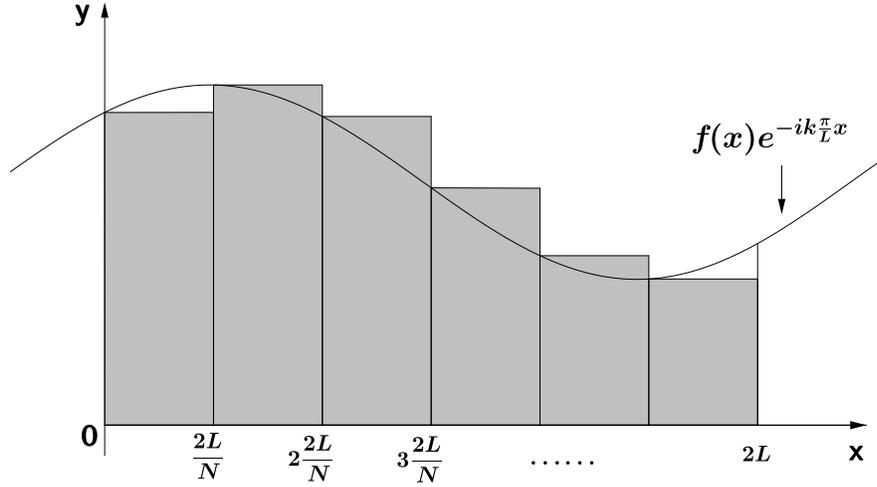


Figura 2. Representación esquemática de la aproximación de los coeficientes complejos de Fourier mediante la suma de Riemann [16].

no se puede calcular exactamente la integral de la ec(37). Lo que sí se puede hacer, es realizar una aproximación a los valores de  $c_k$  mediante la suma de Riemann. Entonces, la aproximación de la integral (37) en el intervalo  $k\frac{2L}{N} \leq x < (k+1)\frac{2L}{N}$  (Figura 2), está dada por el área del rectángulo de altura  $f\left(k\frac{2L}{N}\right)e^{-2\pi i\frac{kn}{N}}$  y base  $\frac{2L}{N}$ , es decir

$$c_k \approx c_k^{(N)} = \frac{1}{2L} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(k\frac{2L}{N}\right) e^{-2\pi i\frac{kn}{N}} \frac{2L}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(k\frac{2L}{N}\right) e^{-2\pi i\frac{kn}{N}}. \quad (39)$$

Reescribiendo  $f\left(k\frac{2L}{N}\right) = f[k]$  y  $c_k^{(N)} = \hat{f}[k]$  se llega a la serie discreta de Fourier

$$\hat{f}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-2\pi i\frac{kn}{N}}, \quad (40)$$

también conocida como transformada discreta de Fourier [7].

### 3.4.10. Transformada discreta de Fourier en dimensión dos

La generalización de la transformada discreta de Fourier de una función de dos variables,  $f(x, y)$ , está dada por

$$F(u, v) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} = \sum_{x=0}^{m-1} \sum_{y=0}^{n-1} f(x, y) e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{m} + \frac{vy}{n}\right)}, \quad (41)$$

para  $u = 1, 2, \dots, m$  y  $v = 1, 2, \dots, n$  [24].

## 3.5. Transformada analítica de Fourier-Mellin

Históricamente Riemann (1876) fue el primero en dar a conocer la transformada de Mellin en su famosa memoria sobre números primos. La formulación explícita fue desarrollada por Cahen (1894) y simultáneamente Mellin (1896, 1902) elaboró una disertación sobre la misma y la correspondiente transformada inversa.

### 3.5.1. Transformada de Mellin

A la función  $M$ , definida como

$$M(s) = \mathcal{M}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} dx, \quad (42)$$

se le conoce como la transformada de Mellin de la función real  $f$  definida, en  $(0, \infty)$ ,  $s = -ic + \beta$ , con  $\beta \in \mathbb{R}$  fijo y  $c \in \mathbb{R}$ .

La transformada inversa Mellin, se define como

$$f(x) = \mathcal{M}^{-1}\{M(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} M(s)x^{-s} ds. \quad (43)$$

A dicha familia de transformadas se les conoce como transformadas  $\beta$ -Mellin [13; 18]. La transformada de Mellin y su inversa están relacionadas con la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier a través de  $G(k)$ , la transformada de

Fourier de  $g(\xi)$ , es decir

$$G(k) = \mathcal{F}\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-ik\xi} d\xi, \quad (44)$$

$$g(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\{G(k)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k)e^{ik\xi} dk, \quad (45)$$

que al realizar el cambio de variable  $e^{\xi} = x$  e  $ik = \beta - s$ , genera

$$G(is - i\beta) = \int_0^{\infty} g(\ln x)x^{s-\beta-1} dx, \quad (46)$$

$$g(\ln x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} G(is - i\beta)x^{\beta-s} ds. \quad (47)$$

Al reescribir  $x^{-\beta}g(\ln x) = f(x)$  y  $G(is - i\beta) = M(s)$ , se obtiene

$$M(s) = \int_0^{\infty} f(x)x^{s-1} dx, \quad (48)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} M(s)x^{-s} ds. \quad (49)$$

A la ec(48) se le llama la transformada de Mellin de  $f(x)$  y a la ec(49) la transformada inversa de Mellin de  $M(s)$ .

### 3.5.2. La invariancia a escala de la transformada de Mellin

Cuando  $\beta = 0$ ,  $s = -ic + \beta = -ic$  y la transformada de Mellin de  $f(x)$  es

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)x^{ic-1} dx. \quad (50)$$

Si  $f(x) = g(\alpha x)$ , con  $\alpha \neq 0$ , entonces

$$\mathcal{M}\{g(\alpha x)\} = \int_0^{\infty} g(\alpha x)x^{ic-1} dx, \quad (51)$$

y al hacer el cambio de variable  $\zeta = \alpha x$ , se llega a

$$\mathcal{M}\{g(\alpha x)\} = \int_0^{\infty} g(\zeta) \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^{ic-1} \frac{d\zeta}{\alpha}, \quad (52)$$

después de agrupar apropiadamente los términos en la ec(52) se tiene que

$$\mathcal{M}\{g(\alpha x)\} = \int_0^\infty g(\zeta)\zeta^{ic-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{ic} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right) d\zeta, \quad (53)$$

y al usar la ec(50), la ec(53) es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{g(\alpha x)\} &= \alpha^{-ic} \int_0^\infty g(\zeta)\zeta^{ic-1} d\zeta \\ &= \alpha^{-ic} \mathcal{M}\{g(x)\} \\ &= e^{-ic\ln(\alpha)} \mathcal{M}\{g(x)\}, \end{aligned} \quad (54)$$

lo que significa que para el caso particular en el que  $\beta = 0$ , el módulo de la transformada de Mellin es invariante a escala [18], es decir

$$\left| \mathcal{M}\{g(\alpha x)\} \right| = \left| \mathcal{M}\{g(x)\} \right|. \quad (55)$$

### 3.5.3. Transformada de Fourier-Mellin

Sea  $f(r, \theta)$  una función en coordenadas polares, entonces su expansión en serie compleja de Fourier alrededor de  $\theta$ , ec(21), es

$$f(r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k(r) e^{ik\theta}, \quad (56)$$

donde  $f_k(r)$  es el coeficiente complejo de Fourier, ec(22), dado por

$$f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-ik\theta} d\theta. \quad (57)$$

Al sustituir la ec(57) en la ec(50), se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{f_k(r)\} &= \int_0^\infty f_k(r) r^{ic-1} dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) r^{ic-1} e^{-ik\theta} d\theta dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) r^{-ic} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r}. \end{aligned} \quad (58)$$

A la ecuación

$$\mathcal{M}_f(k, c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) r^{-ic} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r}, \quad (59)$$

con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $c \in \mathbb{R}$ , se le conoce como la transformada de Fourier-Mellin (TFM) [26].

### 3.5.4. Problemas con el cálculo de la transformada de Fourier-Mellin en imágenes digitales

La transformada de Fourier-Mellin de una función positiva  $f$ , existe si es absolutamente integrable [4], es decir, si se satisface

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left| f(r, \theta) r^{-ic} e^{-ik\theta} \right| d\theta \frac{dr}{r} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} f(r, \theta) d\theta dr < \infty. \quad (60)$$

Tomando en cuenta que  $r$  es la distancia del origen a un punto en el plano cartesiano, y haciendo coincidir el centro de una imagen digital con el origen, el factor  $1/r$  genera un problema al momento de calcular la transformada discreta de Fourier-Mellin de una imagen [4]. Algunos autores calculan la transformada discreta de Fourier-Mellin del módulo de la transformada discreta de Fourier de la imagen, para tener el invariante a traslación y escala, respectivamente. Para resolver la problemática generada por el factor  $1/r$  remueven un disco de radio pequeño centrado en el origen, en este caso del espectro de amplitud de Fourier [28]. Hacer eso, es eliminar datos del contenido de bajas frecuencias, además de que los valores de intensidad alrededor del origen tienen un efecto mayor, por lo que se perdería información significativa. Más aún, al no tener conocimiento de la escala de la imagen, cancelar un disco de radio constante implicaría eliminar una cantidad diferente de datos en imágenes de escalas diferentes [3].

### 3.5.5. Transformada analítica de Fourier-Mellin

En el reconocimiento de patrones en imágenes digitales, se sugiere el cálculo de la transformada de Fourier-Mellin de  $f_\sigma(r, \theta) = r^\sigma f(r, \theta)$  en lugar de  $f(r, \theta)$ , donde  $\sigma > 0$  es un número real fijo que asegura la convergencia de la TFM. Entonces

la transformada de Fourier-Mellin de funciones de la forma  $r^\sigma f(r, \theta) = f_\sigma(r, \theta)$ , está dada por

$$M_{f_\sigma}(k, c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \theta) r^{\sigma-ic} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r}, \quad (61)$$

donde  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ . A  $M_{f_\sigma}(k, c)$  se le conoce como la transformada analítica de Fourier-Mellin (TAFM) [3; 18].

La transformada analítica de Fourier-Mellin de la función  $f(r, \theta)$  escalada el factor  $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$  y rotada el ángulo  $\phi \in \mathbb{R}$ ,  $f(\alpha r, \theta + \phi)$ , es

$$M_{f_\sigma}(k, c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(\alpha r, \theta + \phi) r^{\sigma-ic} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r}. \quad (62)$$

Al hacer  $g(r, \theta) = f(\alpha r, \theta + \phi)$ , la transformada analítica de Fourier-Mellin de la función escalada y rotada  $g$  se denotará por

$$M_{g_\sigma}(k, c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(r, \theta) r^{\sigma-ic} e^{-ik\theta} d\theta \frac{dr}{r}, \quad (63)$$

y al seleccionar el cambio de variables

$$R = \alpha r, \quad dR = \alpha dr, \quad (64)$$

$$\phi = \theta + \beta, \quad d\phi = d\theta, \quad (65)$$

la ec(63) se reescribe como

$$\begin{aligned} M_{g_\sigma}(k, c) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(R, \phi) \left(\frac{R}{\alpha}\right)^{\sigma-ic} e^{-ik(\phi-\beta)} d\phi \frac{\frac{dR}{\alpha}}{\frac{R}{\alpha}} \\ &= \alpha^{-\sigma+ic} e^{ik\beta} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(R, \phi) R^{\sigma-ic} e^{-ik\phi} d\phi \frac{dR}{R}. \end{aligned} \quad (66)$$

Entonces

$$M_{g_\sigma}(k, c) = \alpha^{-\sigma+ic} e^{ik\beta} M_{f_\sigma}(k, c), \quad (67)$$

la cual indica que cambios en la escala y rotación generan cambios de escala y de rotación en el dominio de Mellin. Identificar el factor de escala, es útil para generar un descriptor de imágenes que sea invariante a escala.

### 3.5.6. La transformada analítica de Fourier-Mellin normalizada

De la relación obtenida en la ec(67), se observa que el invariante a escala se puede obtener mediante  $\alpha^\sigma$ , que es el factor de normalización que cancela el efecto de escalamiento [18], esto es

$$\tilde{M}_{g_\sigma} = \frac{M_{g_\sigma}(k, c)}{M_{g_\sigma}(0, 0)}, \quad (68)$$

ya que

$$\begin{aligned} \frac{M_{g_\sigma}(k, c)}{M_{g_\sigma}(0, 0)} &= \frac{\alpha^{-\sigma} \alpha^{ic} e^{ik\beta} M_{f_\sigma}(k, c)}{\alpha^{-\sigma} \alpha^{i0} e^{i0\beta} M_{f_\sigma}(0, 0)} \\ &= \alpha^{ic} e^{ik\beta} \frac{M_{f_\sigma}(k, c)}{M_{f_\sigma}(0, 0)} \\ &= e^{ic \ln(\alpha)} e^{ik\beta} \frac{M_{f_\sigma}(k, c)}{M_{f_\sigma}(0, 0)} \\ &= e^{ic \ln(\alpha) + ik\beta} \frac{M_{f_\sigma}(k, c)}{M_{f_\sigma}(0, 0)}. \end{aligned} \quad (69)$$

Entonces

$$\left| \frac{M_{g_\sigma}(k, c)}{M_{g_\sigma}(0, 0)} \right| = \left| \frac{M_{f_\sigma}(k, c)}{M_{f_\sigma}(0, 0)} \right|, \quad (70)$$

es decir, el módulo de la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizado por su centro de coordenadas es invariante a escala. Este hecho se utiliza para construir la invariancia a escala en imágenes digitales.

A pesar de que en la ec(70) se observa la invariancia a escala, la ec(69) muestra que aún se tiene el factor de rotación.

### 3.5.7. Transformada analítica de Fourier-Mellin vía la transformada de Fourier

Es posible calcular la transformada analítica de Fourier-Mellin vía la transformada de Fourier. Al hacer el cambio de variable  $\rho = \ln(r)$  en la ecuación (61) se obtiene la transformada de Fourier de  $e^{\rho\sigma} f(e^\rho, \theta)$ , es decir

$$\begin{aligned} M_{f_\sigma}(k, c) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(e^\rho, \theta) (e^\rho)^{\sigma-ic} e^{-ik\theta} d\theta \frac{e^\rho d\rho}{e^\rho} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} [f(e^\rho, \theta) e^{\rho\sigma}] e^{-i(\rho c + k\theta)} d\theta d\rho \\ &= \mathcal{F}\{e^{\rho\sigma} f(e^\rho, \theta)\}. \end{aligned} \tag{71}$$

De esta forma se puede calcular la TAFM vía la transformada de Fourier [3].

## 3.6. Transformada de Radon

El origen de la transformada de Radon se remonta a 1917, cuando Johann Radon en el trabajo titulado *On the determination of functions from integrals along certain manifolds*, demostró como construir una función de dos variables a partir de las integrales sobre todas las líneas rectas en el plano [14]. La transformada de Radon es muy útil en diversos campos de la ciencia y la ingeniería; por mencionar un ejemplo, se utiliza en la reconstrucción de imágenes de tomografía asistida por computadora (TAC).

La transformada de Radon (TR) es una función cuyo dominio consta de todas las líneas rectas en el plano  $\mathbb{R}^2$  y su contradominio es  $\mathbb{R}$ . Si  $L$  es cualquier línea recta en el plano  $\mathbb{R}^2$  y  $ds$  la longitud de arco a lo largo de  $L$ , entonces la transformada de Radon de una función de dos variables  $f$ , está definida por la integral a lo largo de  $L$  como

$$\mathcal{R}\{f(x, y)\} = \int_L f(x, y) ds. \tag{72}$$

En otras palabras, la totalidad de estas integrales constituyen la transformada de Radon de  $f$  y cada integral a lo largo de una línea recta específica se le conoce como

una muestra de la transformada de Radon [13].

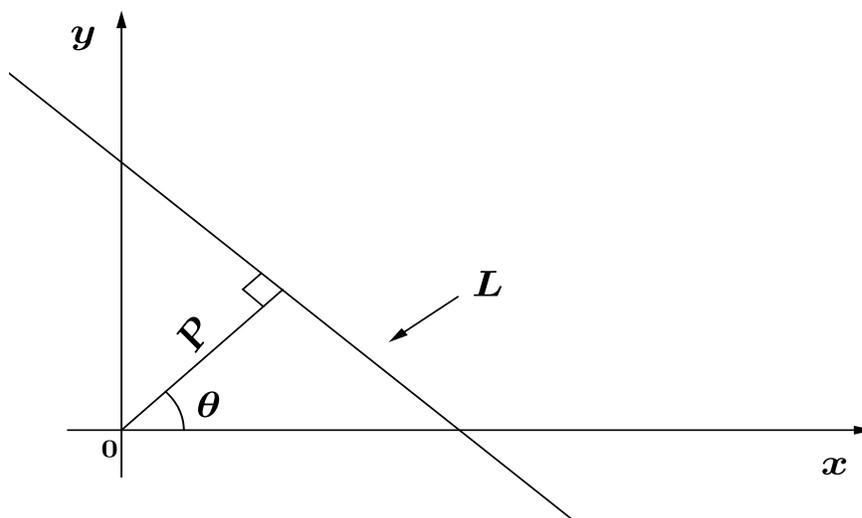


Figura 3. Recta  $L$  en el plano [13].

Sea  $P$  una recta que pasa por el origen y es perpendicular a  $L$ , y sea  $\theta$  el ángulo que forma la recta  $P$  con el eje horizontal, Figura 3. Al rotar los ejes de coordenadas, de manera que el eje horizontal concuerde con la recta  $P$  y el eje vertical sea paralelo a la recta  $L$ , como se muestra en la Figura 4, se generan las relaciones

$$x = p \cos \theta - s \sin \theta, \quad (73)$$

$$y = p \sin \theta + s \cos \theta, \quad (74)$$

que al usarlas en la ec(72), se tiene la transformada de Radon en términos de las variables  $p$  y  $\theta$ , como

$$R(p, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \theta - s \sin \theta, p \sin \theta + s \cos \theta) ds, \quad (75)$$

donde  $-\infty < p < \infty$ ,  $0 \leq \theta < \pi$  [12; 13]. La definición (75) es muy práctica en dimensión dos, sin embargo su generalización a funciones de más variables no es tan

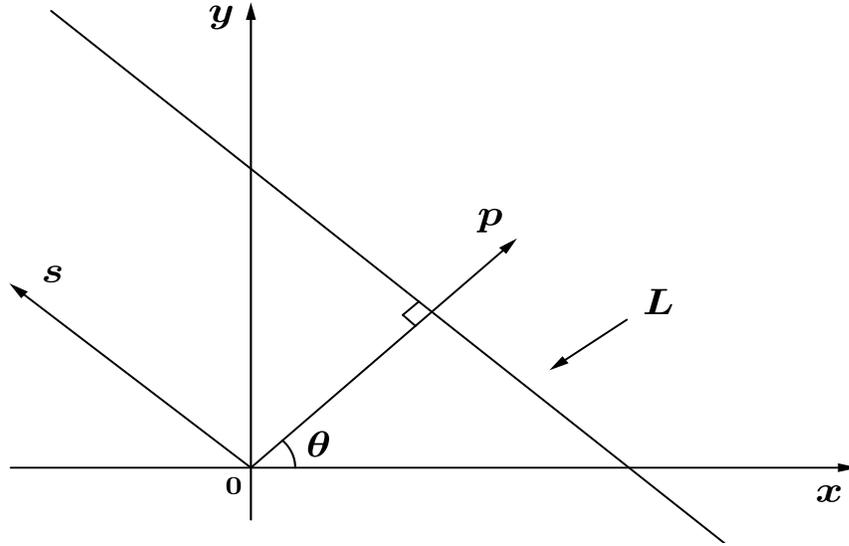


Figura 4. Ejes  $p$  y  $s$ .

directa, pero mediante la función delta de Dirac, la transformada de Radon, ec(75), se reescribe como

$$R(p, \theta) = \mathcal{R}\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy, \quad (76)$$

para un  $\theta$  fijo, se dice que  $R(p, \theta)$  es una muestra de la transformada de Radon. De esa forma, la definición (76) es práctica para demostrar algunas propiedades.

La propiedad más importante de la transformada de Radon para este trabajo es la propiedad de rotación. Antes de mostrar dicha propiedad, conviene primero representar a la transformada de Radon en coordenadas polares.

### 3.6.1. Transformada de Radon en coordenadas polares

Al realizar el cambio de variables

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (77)$$

en la ec(76), la transformada de Radon se reescribe como

$$R(p, \theta) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \delta(p - r \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \sin \theta) |r| dr d\varphi, \quad (78)$$

al usar la identidad trigonométrica

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi, \quad (79)$$

en la ec(78), se llega a la transformada de Radon en coordenadas polares

$$R(p, \theta) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \delta(p - r \cos(\theta - \varphi)) |r| dr d\varphi. \quad (80)$$

### 3.6.2. Propiedad de rotación

Sea  $f(r, \varphi)$  una función en coordenadas polares y  $h(r, \varphi) = f(r, \varphi + \varphi_0)$  la función  $f(r, \varphi)$  rotada un ángulo  $\varphi_0$ , entonces

$$\mathcal{R}\{f(r, \varphi + \varphi_0)\} = R(p, \theta + \varphi_0). \quad (81)$$

*Demostración.* De la ec(80), se tiene que la transformada de Radon de  $h(r, \varphi)$ , es

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{h(r, \varphi)\} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} h(r, \varphi) \delta(p - r \cos(\theta - \varphi)) |r| dr d\varphi \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi + \varphi_0) \delta(p - r \cos(\theta - \varphi)) |r| dr d\varphi. \end{aligned} \quad (82)$$

Al hacer el cambio de variable  $\varphi' = \varphi + \varphi_0$ , se llega a que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{f(r, \varphi + \varphi_0)\} &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi') \delta(p - r \cos(\theta - \varphi' + \varphi_0)) |r| dr d\varphi' \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi') \delta(p - r \cos((\theta + \varphi_0) - \varphi')) |r| dr d\varphi' \\ &= R(p, \theta + \varphi_0). \end{aligned} \quad (83)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{R}\{f(r, \varphi + \varphi_0)\} = R(p, \theta + \varphi_0).$$

■

### 3.6.3. Relación entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier

Para una función de dos variables  $f$ , la transformada de Fourier y la transformada de Radon cumplen

$$\mathcal{F}_{1D}\{\mathcal{R}\{f(x, y)\}\} = \mathcal{F}_{2D}\{f(x, y)\}, \quad (84)$$

es decir, la transformada de Fourier de dimensión uno de la transformada de Radon de la función  $f$ , es igual a la transformada de Fourier de dimensión dos de  $f$  [13].

*Demostración.*

Al calcular la transformada de Fourier de dimensión uno sobre la variable  $p$  de la transformada de Radon, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1D}\{R(p, \theta)\} &= \mathcal{F}_{1D}\{\mathcal{R}\{f(x, y)\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}\{f(x, y)\} e^{-2\pi i r p} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \right] e^{-2\pi i r p} dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i r p} \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dp \right] dx dy \quad (85) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[ e^{-2\pi i r (x \cos \theta + y \sin \theta)} \right] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (x \cdot r \cos \theta + y \cdot r \sin \theta)} dx dy. \end{aligned}$$

Si se define

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta, \quad (86)$$

la transformada de Fourier de la transformada de Radon de la ec(85), se reescribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1D}\{\mathcal{R}\{f(x, y)\}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (ux + vy)} dx dy \\ &= \mathcal{F}_{2D}\{f(x, y)\}. \end{aligned} \quad (87)$$

Nótese que  $\mathcal{F}_{2D}\{f(x, y)\}$  está en coordenadas cartesianas, mientras que  $\mathcal{F}_{1D}\{\mathcal{R}\{f(x, y)\}\}$  está en coordenadas polares. La relación se da mediante la ec(86).

Por lo tanto

$$\mathcal{F}_{1D}\{\mathcal{R}\{f(x, y)\}\} = \mathcal{F}_{2D}\{f(x, y)\}.$$

■

### 3.6.4. Transformada discreta de Radon

La transformada de Radon está definida por la integral sobre todas las rectas del plano. Pero es imposible trabajar con todas las rectas del plano, ya que existe una cantidad infinita. Una de las propuestas para calcular la transformada de Radon, es usar las proyecciones de una función bidimensional a lo largo de direcciones específicas, ya que esto formará un conjunto de muestras de Radon. Por ejemplo, para  $p = x \cos \theta - y \sin \theta$ , con  $\theta$  y  $p$  fijos, la transformada discreta de Radon sobre esa recta se puede calcular mediante

$$R(p, \theta) = \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M f(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta), \quad (88)$$

es decir, es la suma de la función evaluada en los puntos sobre la recta [5]. En general, para calcular una proyección de  $f$  sobre un conjunto de líneas, como las de la Figura 5, se debe variar  $p$  y  $\theta$ .

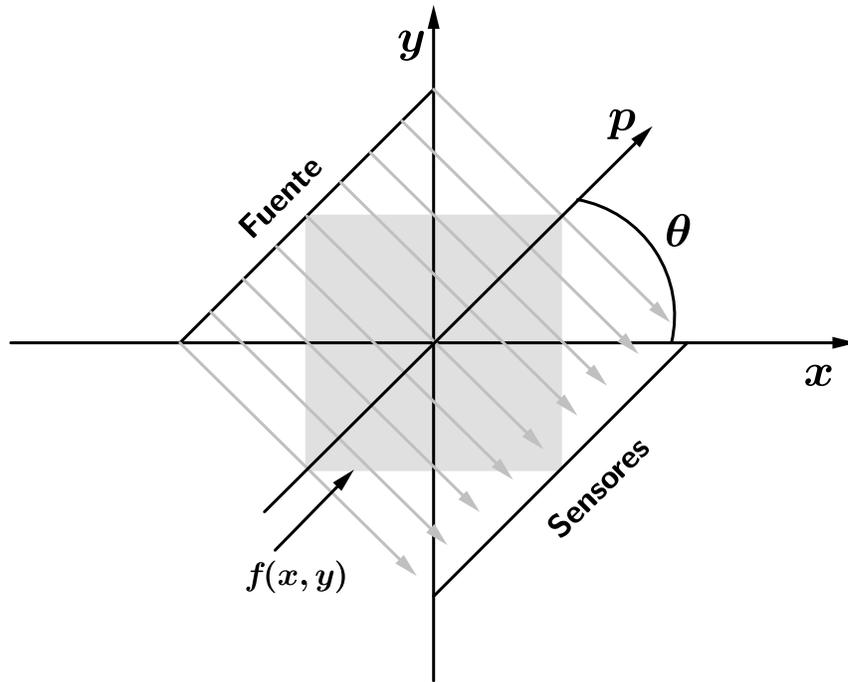


Figura 5. Transformada discreta de Radon, técnica tipo TAC [27].

## Capítulo 4

# Sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales Radon-Fourier-Mellin invariante a traslación, escala y rotación

### 4.1. Sistema de reconocimiento de patrones invariante a traslación

La ec(36) indica que el módulo de la transformada de Fourier de una función bidimensional es invariante a traslación. Por lo que, de esa propiedad se construye de manera sencilla, rápida y eficiente un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales que es invariante a traslación.

En la Figura 6 se muestran tres imágenes en blanco y negro, cada una conteniendo un cuadrado con diferente factor de desplazamiento con respecto al centro de la imagen y a dichas imágenes se les llamó  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ ; también, en esa figura se exhibe el módulo de la transformada de Fourier de las imágenes, denotadas por

$$A_k = \left| \mathcal{F}\{I_k\} \right|, \quad k = 1, 2, 3. \quad (89)$$

En las Figuras 6 (d), (e), (f) se observa que el módulo de la transformada de Fourier de las imágenes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  son iguales, obteniendo así el sistema de reconocimiento de patrones invariante a traslación.

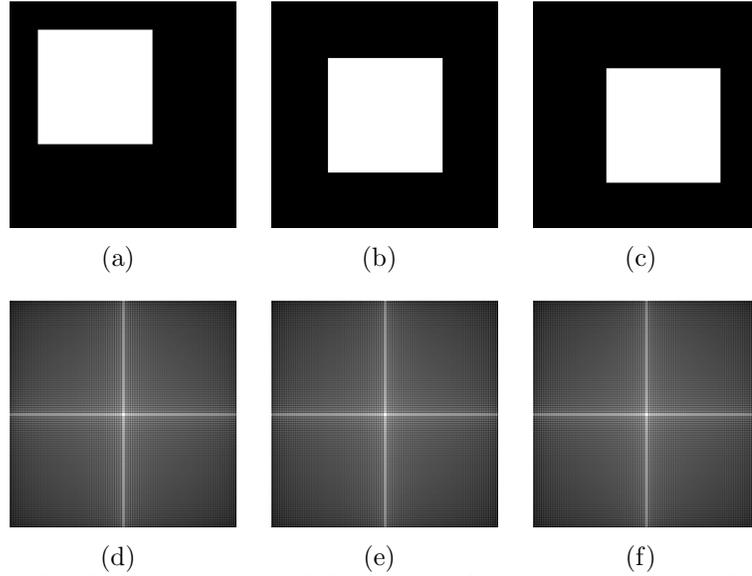


Figura 6. Ejemplo de la respuesta del sistema de reconocimiento de patrones invariante a traslación. (a) Imagen  $I_1$ . (b) Imagen  $I_2$ . (c) Imagen  $I_3$ . (d)  $A_1 = |\mathcal{F}\{I_1\}|$ . (e)  $A_2 = |\mathcal{F}\{I_2\}|$ . (f)  $A_3 = |\mathcal{F}\{I_3\}|$ . Para una mejor visualización, el módulo de la transformada de Fourier de las imágenes se muestra en escala logarítmica.

## 4.2. Sistema de reconocimiento de patrones invariante a traslación y escala

El siguiente paso es incorporar al sistema de reconocimiento de patrones la invariancia a escala mediante la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizada, ec(70).

En la Figura 7 se muestran tres imágenes en blanco y negro cada una conteniendo un cuadrado que presenta diferente factor de traslación y escalamiento. A dichas imágenes se les nombrarán:  $G_1$ , que es la imagen cuyo objeto presenta además de un desplazamiento con respecto al centro de la imagen, un escalamiento del 10% con respecto al objeto de la imagen  $G_2$ ;  $G_2$ , cuyo objeto no presenta traslación ni escalamiento; y  $G_3$ , donde el objeto está desplazado y escalado un  $-10\%$  con respecto al de la imagen  $G_2$ .

Para obtener la invarianza a traslación, como se mostró en la sección 4.1, se utiliza el módulo de la transformada de Fourier de la imagen. Sin embargo, en la Figura 7 se observa que la respuesta del sistema de reconocimiento de patrones ante variaciones en la escala del objeto ya no es la misma.

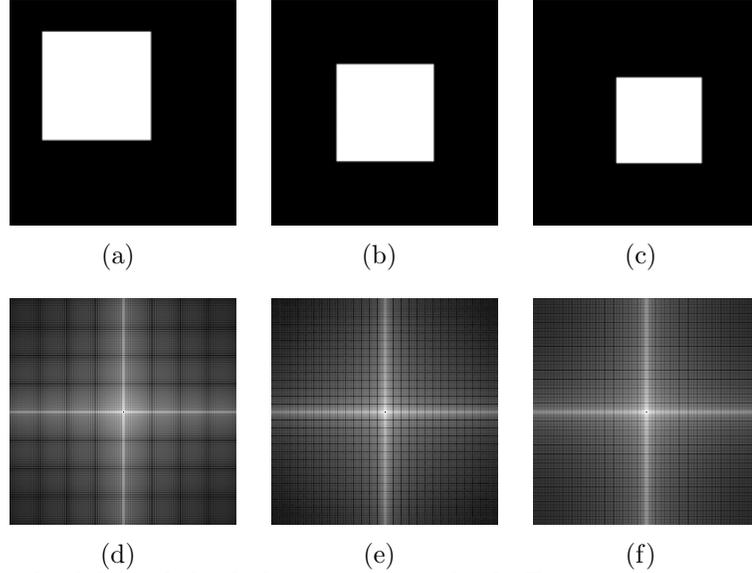


Figura 7. Ejemplo del módulo de la transformada de Fourier de imágenes con objetos desplazados y escalados. (a)  $G_1$ . (b)  $G_2$ . (c)  $G_3$ . (d)  $D_1 = |\mathcal{F}\{G_1\}|$ . (e)  $D_2 = |\mathcal{F}\{G_2\}|$ . (f)  $D_3 = |\mathcal{F}\{G_3\}|$ . Para una mejor visualización, el módulo de la transformada de Fourier de las imágenes se muestra en escala logarítmica.

Para que el sistema también sea invariante a escala, el módulo de la transformada de Fourier de la imagen, denotado por  $A_\sigma$ , se introduce en la transformada analítica de Fourier-Mellin, esto es

$$M_{A_\sigma}(k, c) = \mathcal{M}\{A(e^\rho, \theta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} A(e^\rho, \theta) e^{\rho\sigma} e^{-i(\rho c + k\theta)} d\theta d\rho, \quad (90)$$

donde  $\rho = \ln(r)$ ,  $\sigma > 0$ . En este ejemplo se empleó  $\sigma = 1$ , ya que al variar  $\sigma$  en  $[0.1, 2]$ , el sistema de reconocimiento de patrones presentó los mejores resultados. Luego se calcula el invariante a escala, que es el módulo de la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizado, como

$$B_A(k, c) = \left| \frac{M_{A_\sigma}(k, c)}{M_{A_\sigma}(c_x, c_y)} \right|, \quad (91)$$

donde  $(c_x, c_y)$  es el píxel central de la imagen.

En la Figura 8 se presentan tres ejemplos de la respuesta del sistema ante imágenes cuyos objetos están desplazados y escalados. En las Figuras 8 (a), (b) y (c) se muestran las imágenes de entrada. En las Figuras 8 (d), (e) y (f) se presenta el correspondiente espectro de amplitud de las imágenes. En las Figuras 8 (g), (h) e (i), los espectros de amplitud se exhiben en coordenadas log-polares como se requiere en la ec(90) y donde se observa el efecto de la escala. Finalmente, en las Figuras 8 (j), (k) y (l) se expone el módulo de la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizado de las imágenes Figuras 8 (a), (b), (c), respectivamente, donde se muestra que la respuesta del sistema de reconocimiento de patrones invariante a traslación y escala es la misma.

### 4.3. Sistema de reconocimiento de patrones RFM invariante a traslación, escala y rotación

En la Figura 9 se muestran tres imágenes en blanco y negro con cuadrados que presentan diferente factor de traslación, escala y rotación. Estas imágenes se llamarán:  $H_1$ , donde el cuadrado está trasladado con respecto al centro de la imagen, escalado 10% con respecto a la imagen  $H_2$  y sin rotación;  $H_2$ , donde el cuadrado no presenta traslación ni escalamiento y está rotado  $22^\circ$ ; y  $H_3$ , que es el cuadrado que está trasladado con respecto al centro de la imagen, escalado  $-10\%$  con respecto a la imagen  $H_2$  y rotado  $45^\circ$ .

En el sistema de reconocimiento de patrones Radon-Fourier-Mellin (RFM), el primer paso es obtener la invariancia a traslación y posteriormente la de escala, tal como se describió en la sección 4.2. Sin embargo, si el objeto de la imagen presenta además una rotación, la respuesta del sistema ya no es la misma, como se observa en las Figuras 9 (j), (k) y (l).

Para que el sistema de reconocimiento de patrones también sea invariante a rotación, se utiliza la transformada de Radon, ec(76). La imagen de entrada es el módulo normalizado obtenido de la transformada de Fourier-Mellin mediante la ec(91), es decir

$$R_A(p, \theta) = \mathcal{R}\{B_A(k, c)\}. \quad (92)$$

En la Figura 10 se muestra la gráfica de la ec(92) para las imágenes de las Figuras 9 (j), (k), (l). Para reducir el número de operaciones y por ende el tiempo de cómputo del sistema de reconocimiento de patrones en la etapa de la clasificación, se construyó la firma 1D invariante a traslación, escala y rotación, mediante

$$S_A(p) = \sum_{\theta=0}^{179} R_A(p, \theta). \quad (93)$$

En la Figura 11 se presentan las gráficas de las firmas de las Figuras 9 (a), (b), (c). Ahí se puede ver claramente que las firmas prácticamente son iguales, las pequeñas diferencias provienen del ruido diente de sierra que se introdujo en las imágenes al momento de rotarlas mediante un paquete de cómputo, las interpolaciones requeridas al escalarlas y los errores de redondeo de las operaciones aritméticas.

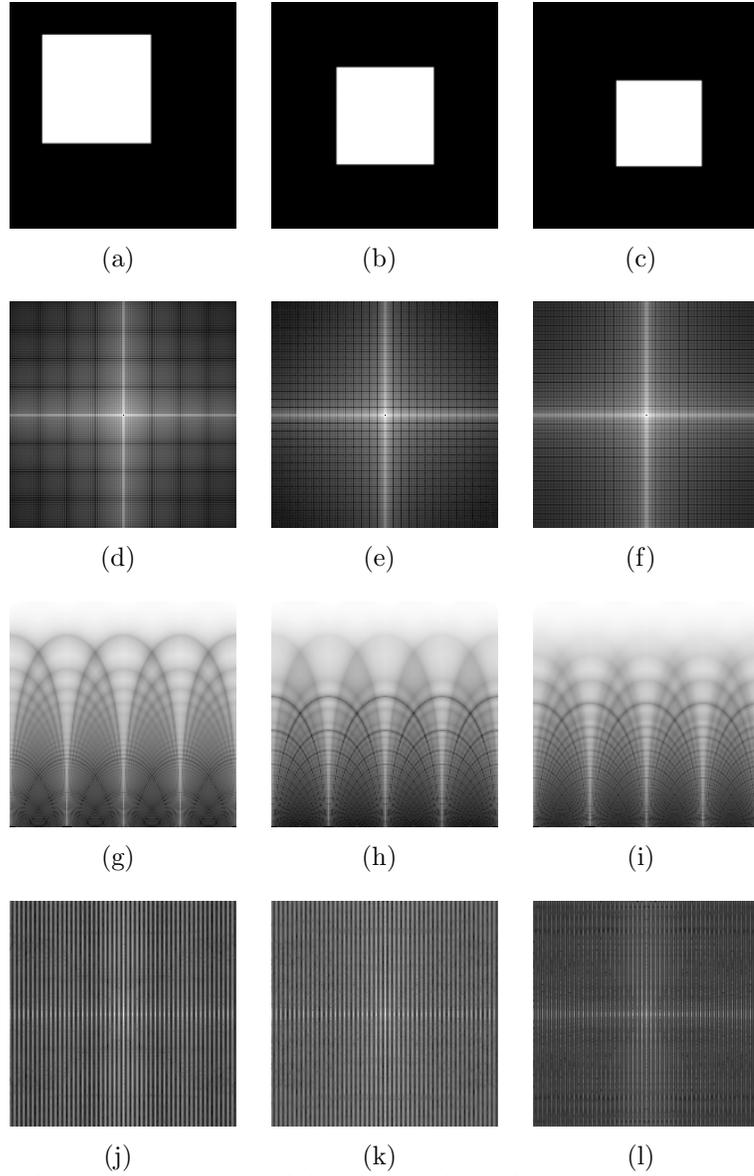


Figura 8. Ejemplo de la respuesta del sistema digital invariante a traslación y escala. (a)  $G_1$ . (b)  $G_2$ . (c)  $G_3$ . (d)  $A_{G_1} = |\mathcal{F}\{G_1\}|$ . (e)  $A_{G_2} = |\mathcal{F}\{G_2\}|$ . (f)  $A_{G_3} = |\mathcal{F}\{G_3\}|$ . (g)  $Q_1 = A_{G_1}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (h)  $Q_2 = A_{G_2}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (i)  $Q_3 = A_{G_3}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (j)  $B_{Q_1}$ . (k)  $B_{Q_2}$ . (l)  $B_{Q_3}$ . Por cuestiones de visualización, el módulo de la transformada de Fourier y el de la transformada analítica de Fourier-Mellin de las imágenes se muestra en escala logarítmica.

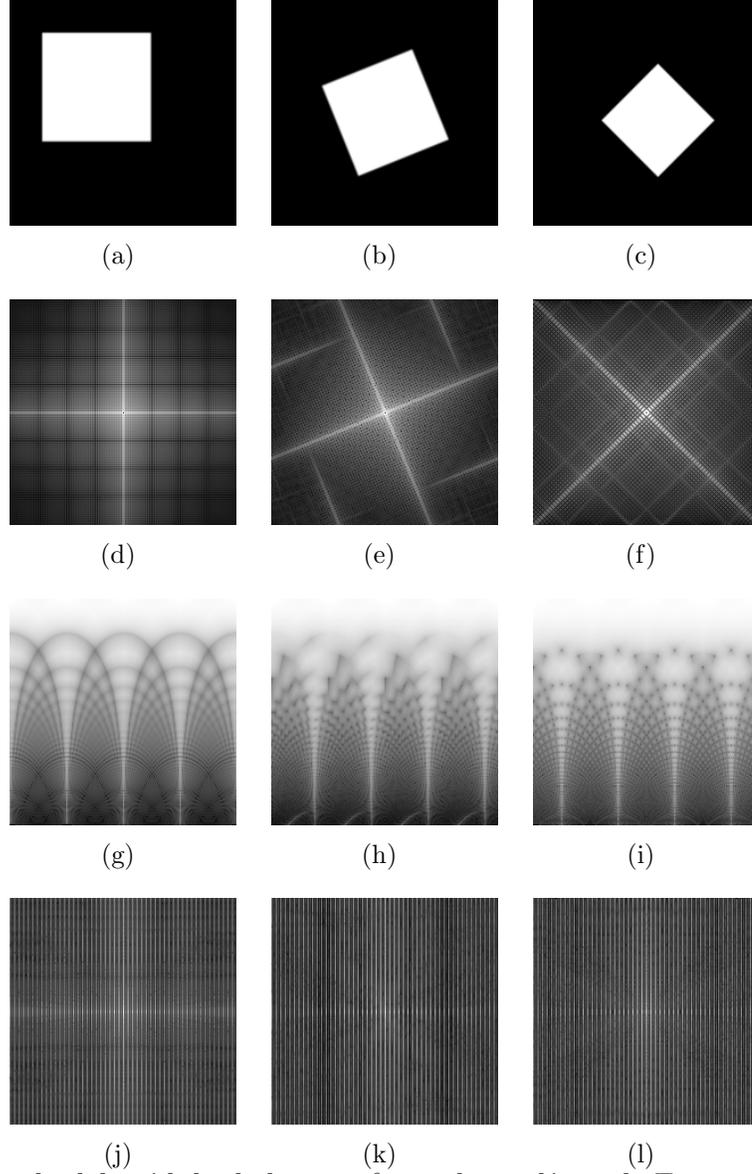


Figura 9. Ejemplo del módulo de la transformada analítica de Fourier-Mellin normalizado. (a)  $H_1$ . (b)  $H_2$ . (c)  $H_3$ . (d)  $A_{H_1} = |\mathcal{F}\{H_1\}|$ . (e)  $A_{H_2} = |\mathcal{F}\{H_2\}|$ . (f)  $A_{H_3} = |\mathcal{F}\{H_3\}|$ . (g)  $K_1 = A_{H_1}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (h)  $K_2 = A_{H_2}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (i)  $K_3 = A_{H_3}(e^\rho, \theta)e^{\rho\sigma}$ . (j)  $B_{K_1}$ . (k)  $B_{K_2}$ . (l)  $B_{K_3}$ . Por cuestiones de visualización, el módulo de la transformada de Fourier y el de la transformada analítica de Fourier-Mellin de las imágenes se muestra en escala logarítmica.

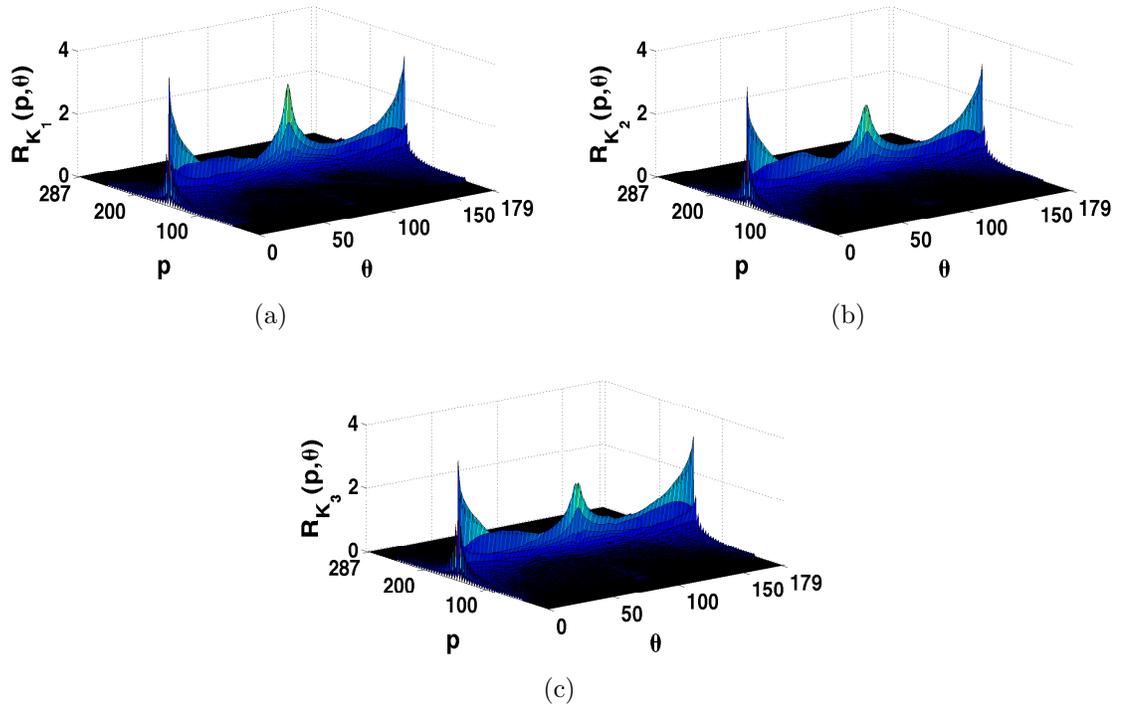


Figura 10. Ejemplos de la respuesta del sistema de reconocimiento de patrones RFM.  
 (a)  $R_{K_1}$ . (b)  $R_{K_2}$ . (c)  $R_{K_3}$ .

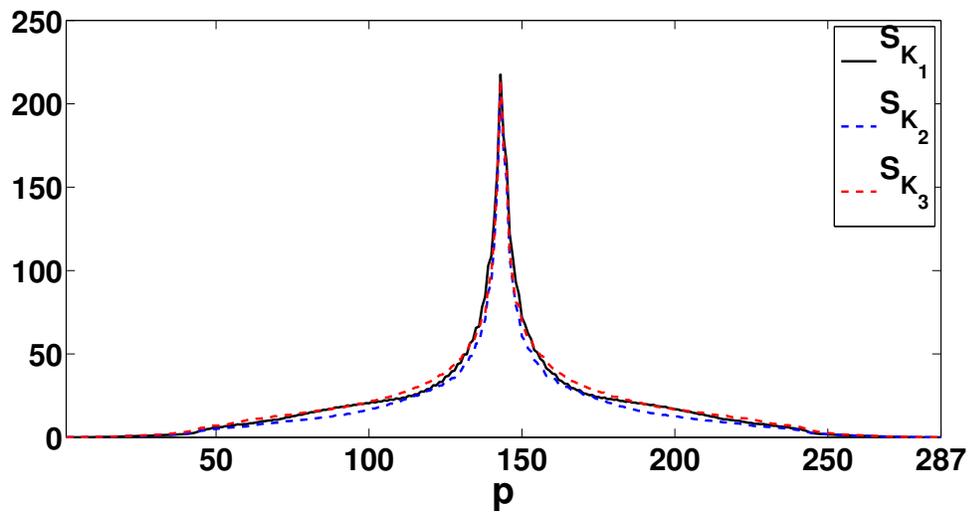


Figura 11. Firmas invariantes a traslación, escala y rotación.

## Capítulo 5

# El sistema de reconocimiento de patrones RFM invariante a traslación, escala y rotación para imágenes a color

En este trabajo de tesis se genera un único espacio de clasificación, en lugar de tener múltiples planos de salida como se hace en los sistemas de reconocimiento de patrones que utilizan funciones de correlación [22; 23] o métricas [3; 4; 18; 26]. Con la imagen de la Figura 12, se ejemplificará como se entrena al sistema y el proceso para realizar la construcción del espacio de clasificación.

### 5.1. Intervalos de confianza para una imagen a color

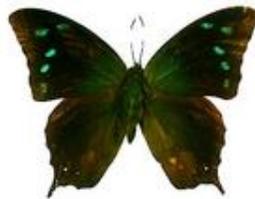


Figura 12. Imagen  $I$ : *Cymatogramma arginussa eubaena*.

La imagen de la Figura 12 fue rotada  $360^\circ$  con  $\Delta\theta = 1^\circ$  como tamaño de paso, cada una de esas 360 imágenes se escalaron  $\pm 15\%$  variando la escala con un tamaño de paso  $\Delta k = 1\%$ . En total se obtuvieron 11,160 diferentes imágenes a color del mismo objeto. Al trabajar en el espacio de color RGB, las imágenes se representan a

través de tres imágenes monocromáticas, las cuales corresponden a los canales rojo, verde y azul, respectivamente. De esa manera, se tendrá un total de 33,480 imágenes monocromáticas para la imagen  $I$ .

Sea

$$\Omega = \{I_{\theta,k}^C \mid C = R, G, B; \theta = 0, 1, \dots, 359; k = -15, -14, \dots, 15\}, \quad (94)$$

el conjunto de dichas imágenes y

$$\Gamma^R = \{S_{\theta,k}^R \mid \theta = 0, 1, \dots, 359; k = -15, -14, \dots, 15\}, \quad (95)$$

$$\Gamma^G = \{S_{\theta,k}^G \mid \theta = 0, 1, \dots, 359; k = -15, -14, \dots, 15\}, \quad (96)$$

$$\Gamma^B = \{S_{\theta,k}^B \mid \theta = 0, 1, \dots, 359; k = -15, -14, \dots, 15\}. \quad (97)$$

el conjunto de las firmas invariantes a traslación, escala y rotación de las imágenes en los canales rojo, verde y azul, respectivamente. Las firmas se obtienen mediante el procedimiento descrito en el capítulo 4.

Para construir un espacio de clasificación, se trabajará con el valor de las potencias de las firmas, el cual se define como

$$P_{\theta,k}^C = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N \left( S_{\theta,k}^C(p) \right)^2, \quad (98)$$

donde  $C = R, G$  o  $B$  (el canal de color) y  $N$  es el tamaño de la firma.

Como para cada canal se generaron 11,160 imágenes monocromáticas de la imagen  $I$ , entonces cada uno de los conjuntos

$$P_R = \{P_{\theta,k}^R \mid \theta = 0, 1, \dots, 359; k = -15, -14, \dots, 15\}, \quad (99)$$

$$P_G = \{P_{\theta,k}^G \mid \theta = 0, 1, \dots, 359; k = -15, -14, \dots, 15\}, \quad (100)$$

$$P_B = \{P_{\theta,k}^B \mid \theta = 0, 1, \dots, 359; k = -15, -14, \dots, 15\}, \quad (101)$$

contiene 11,160 elementos escalares. Por el teorema del límite central podemos suponer que los datos del conjunto  $P_C$  ( $C = R, G, B$ ) tienen un comportamiento aproximado al de una distribución normal con media muestral  $\mu_{P_C} \sim \mu$  y con un error estándar  $\frac{\sigma_{P_C}}{\sqrt{n}}$  ( $1EE$ ), donde  $n$  es el tamaño de la muestra, para este ejemplo  $n = 11,160$ . Por medio de esto se generaron intervalos de confianza del 95.4% de la forma  $[\mu_{P_C} - 2EE, \mu_{P_C} + 2EE]$ .

En la Figura 13 se muestra el diagrama de cajas de los intervalos de confianza del 95.4% contruidos a partir de los conjuntos  $P_R$ ,  $P_G$  y  $P_B$ , ec(99) a la ec(101). En el eje horizontal se indica la imagen monocromática de referencia,  $I_C$ , y en el eje vertical el valor de la media de los datos  $P_C$  con  $\pm 2EE$ . Aquí, el punto central en color negro representa el valor de la media muestral  $\mu_{P_C}$ , el rectángulo en negro corresponde a los valores de la media  $\mu_{P_C} \pm 1EE$  y los bigotes en rojo a los valores de la media  $\mu_{P_C} \pm 2EE$ .

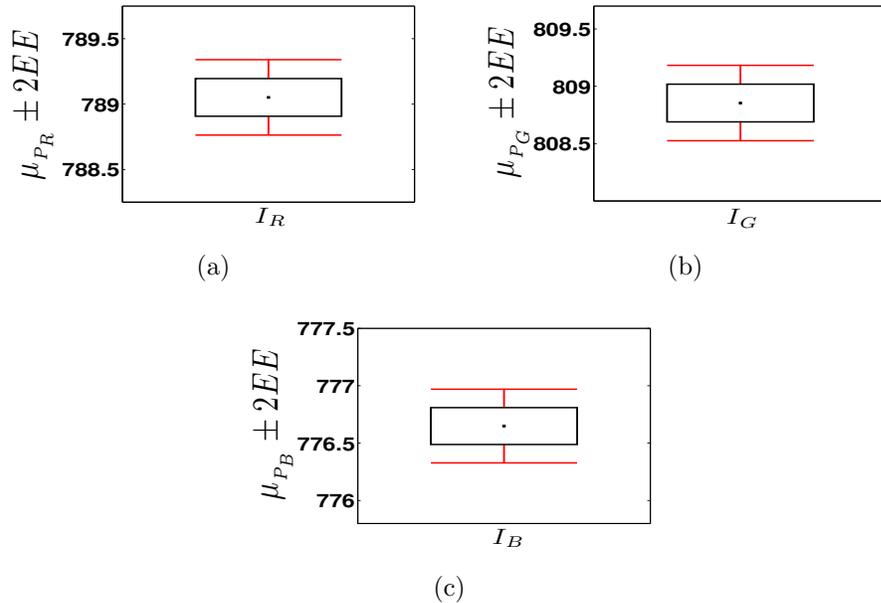


Figura 13. Intervalos de confianza del 95.4% de la mariposa  $I$ : cymatogramma arginussa eubaena. (a) Intervalo de confianza del 95.4% asociado al canal rojo. (b) Intervalo de confianza del 95.4% asociado al canal verde. (c) Intervalo de confianza del 95.4% asociado al canal azul.

Mediante los intervalos mostrados en la Figura 13, se genera un ortoedro cuyas aristas corresponden a los intervalos de confianza del 95.4% de los canales  $R$ ,  $G$  y  $B$ , como el de la Figura 14. Así, se crea el espacio de clasificación en donde al menos el 95.4% de los valores de las potencias obtenidas trasladando, escalando y rotando una imagen, están contenidas dentro del ortoedro.

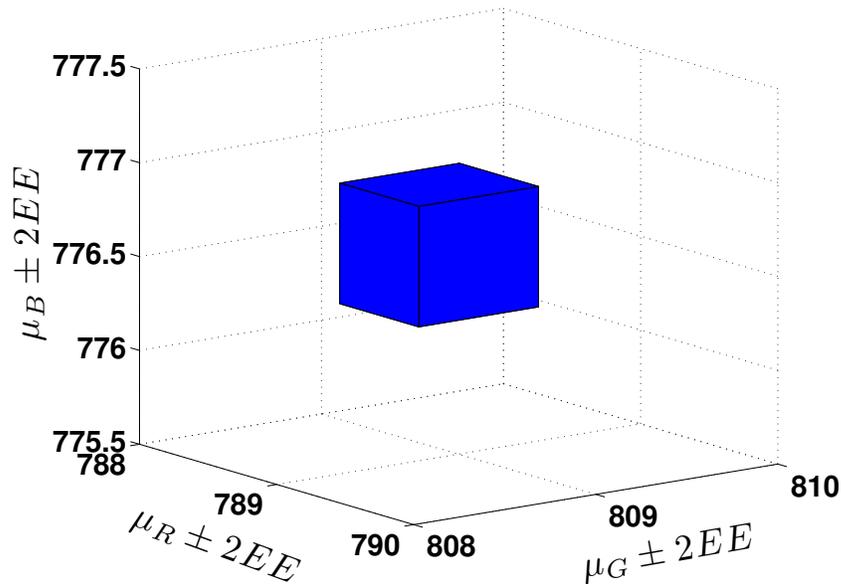


Figura 14. Ortoedro de confianza del 95.4% de la Figura 12.

## 5.2. El sistema de reconocimiento de patrones RFM para imágenes a color

La base de datos de imágenes de referencia utilizada para realizar las pruebas del sistema de reconocimiento de patrones RFM consta de 18 imágenes digitales de mariposas, Figura 15. Los ortoedros de confianza del 95.4% de cada una de esas imágenes se construyeron mediante la técnica descrita en la sección 5.1.

En la Figura 16(a) se presenta el plano de clasificación mediante diagrama de

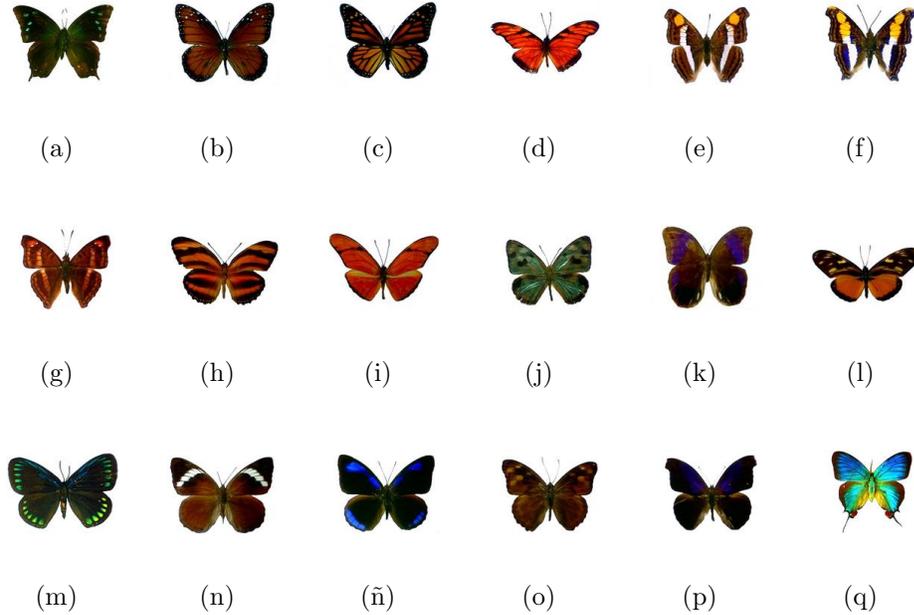


Figura 15. Imágenes de mariposas a color. (a) A: *Cymatogramma arginussa eubaena*. (b) B: *Danaus eresimus montezuma*. (c) C: *Danaus plexippus plexippus*. (d) D: *Dione juno huascuma*. (e) E: *Doxocopa laure acca h.* (f) F: *Doxocopa laure laure m.* (g) G: *Doxocopa pavon m.* (h) H: *Dryadula phaetusa*. (i) I: *Dryas julia moderata*. (j) J: *Dynamine mylitta m.* (k) K: *Eryphanis aesacus*. (l) L: *Eueides procula asidia*. (m) M: *Eumaeus debora*. (n) N: *Eunica alcmena h.* (ñ) Ñ: *Eunica alcmena m.* (o) O: *Eunica caresa h.* (p) P: *Eunica caresa m.* (q) Q: *Evenus regalis*.

cajas del 95.4% para las imágenes monocromáticas correspondientes al canal rojo. En el eje horizontal se indica la imagen de la mariposa y en el eje vertical se grafica el correspondiente intervalo de confianza. Como se observa en la Figura 16(b), en dicho plano, las cajas de  $\mu_{PR} \pm 1EE$  correspondientes a la mariposa A y los de la mariposa Ñ se traslapan, esto indica que el sistema no puede clasificar las imágenes de esos dos tipos de mariposas. Pero en el plano de clasificación de las imágenes en el canal verde (Figura 17) y en el plano de clasificación de las imágenes en el canal azul (Figura 18) el sistema de reconocimiento de patrones para esos dos tipos de mariposas funciona eficientemente. Entonces, partiendo de la hipótesis de que los intervalos de confianza de dos imágenes se podrían traslapar cuando mucho en dos canales, se construyó un ortoedro de confianza del 95.4% como el que se muestra en la Figura 14.

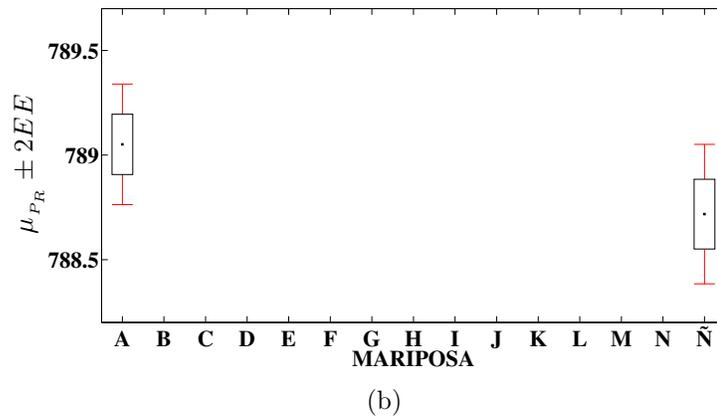
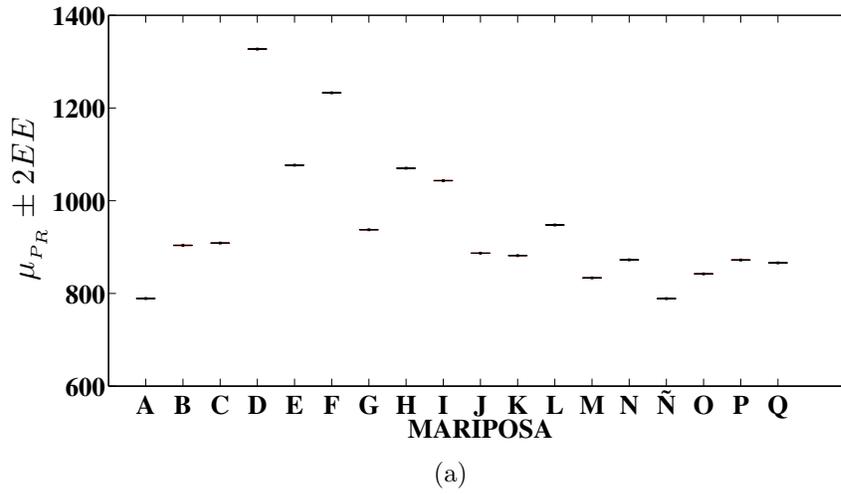
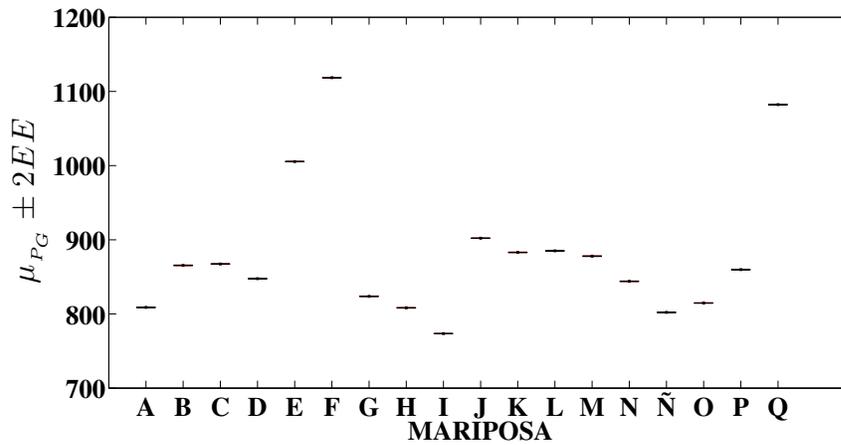
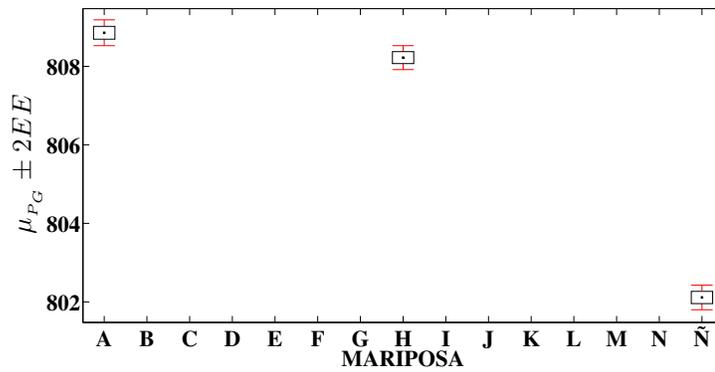


Figura 16. Intervalos de confianza. (a) Intervalos de confianza del 95.4 % generados a partir del conjunto  $P_R$ . (b) Amplificación en la zona de A y Ñ de la Figura 16(a).

Para las imágenes de referencia de la Figura 15, el espacio de clasificación construido por ortoedros de confianza del 95.4 % se muestran en la Figura 19(a). El espacio de ortoedros ayuda a que el proceso de clasificación sea de forma rápida comparado con técnicas que utilizan correlación en la etapa de la clasificación [10]. En este caso para clasificar una imagen problema se calcula la firma para cada canal de la imagen, después la potencia de cada firma y se coloca la terna de potencias en el espacio. Si se encuentra dentro de algún ortoedro, indica que la imagen problema se trata de la imagen de referencia asociada a ese ortoedro con un nivel de confianza del 95.4 %. Para que se observe con claridad que el sistema de reconocimiento de patrones RFM



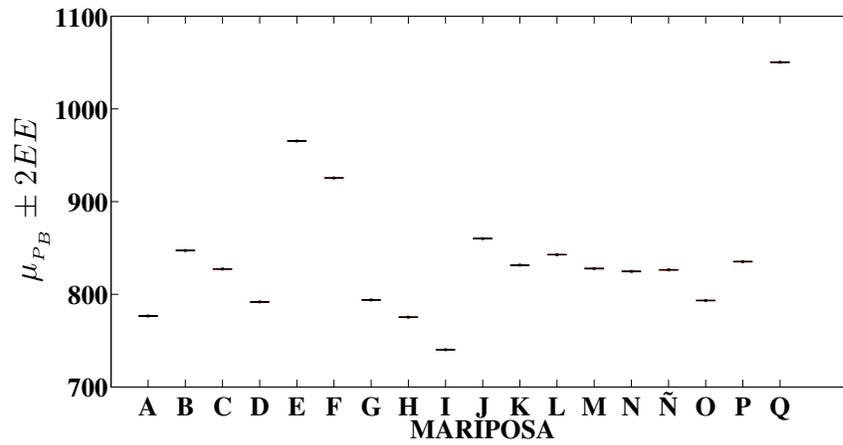
(a)



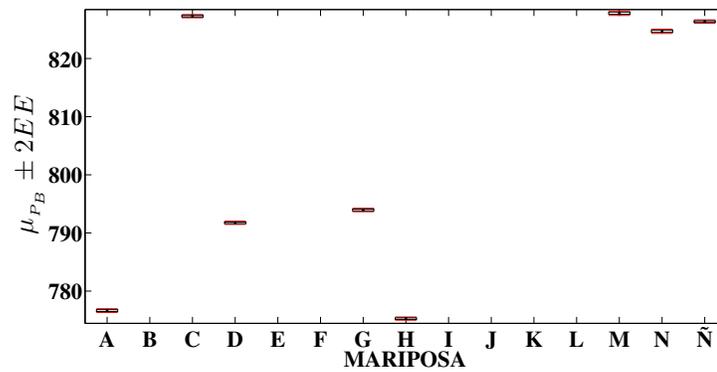
(b)

Figura 17. Intervalos de confianza. (a) Intervalos de confianza del 95.4% generados a partir del conjunto  $P_G$ . (b) Amplificación en la zona de A y Ñ de la Figura 17(a).

clasifica eficientemente cada una de las imágenes, se presenta una amplificación en la Figura 19(b) donde se observa que ninguno de los ortoedros se traslapa. Logrando de esa manera el objetivo de tener un único espacio de clasificación y así reducir el tiempo de cómputo en la etapa de clasificación de las imágenes digitales.

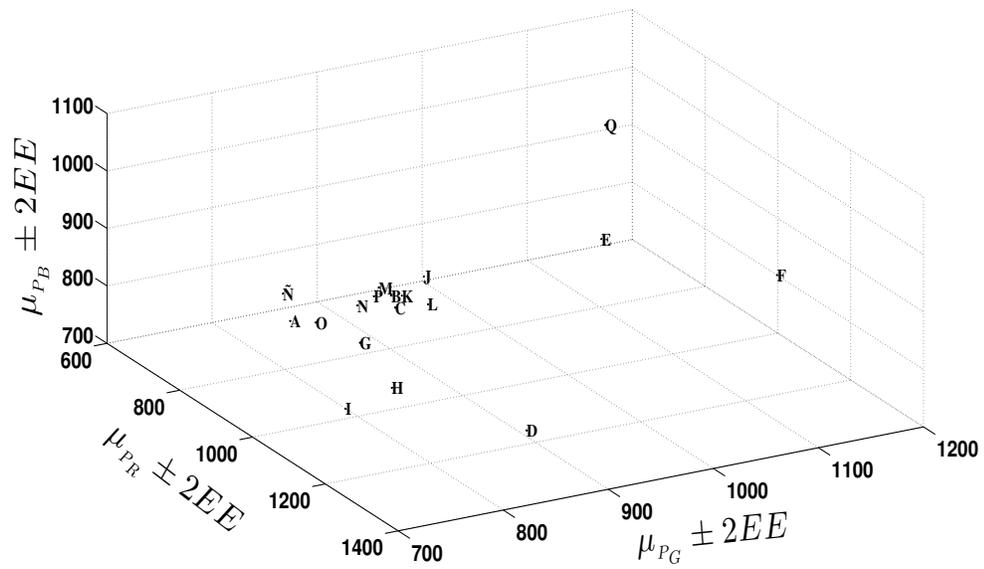


(a)

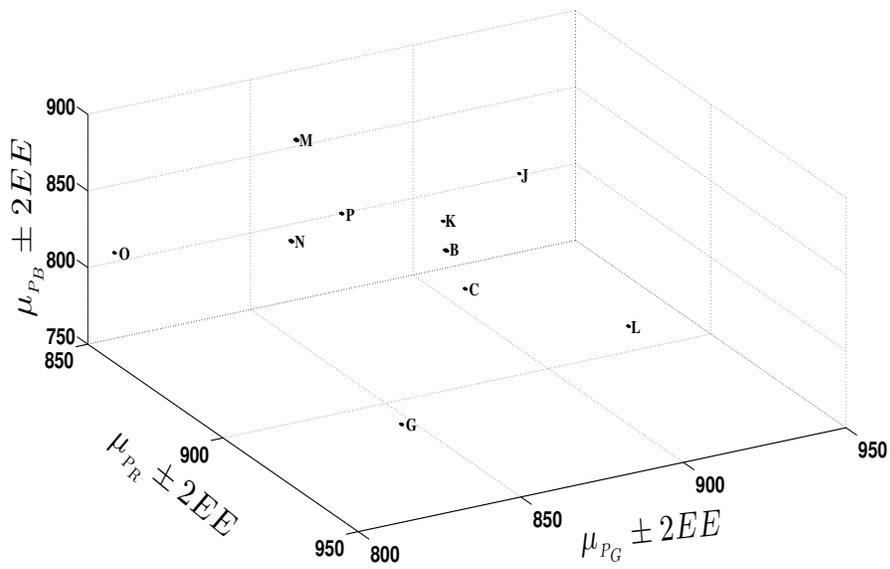


(b)

Figura 18. Intervalos de confianza. (a) Intervalos de confianza del 95.4% generados a partir del conjunto  $P_B$ . (b) Amplificación en la zona de A y Ñ de la Figura 18(a).



(a)



(b)

Figura 19. Espacio de clasificación. (a) Ortoedros de confianza del 95.4% para la base de datos de la Figura 15. (b) Amplificación de la zona más concurrida de la Figura 19(a).

## Capítulo 6

# El sistema de reconocimiento de patrones RFM invariante a traslación, escala y rotación para imágenes en escala de grises

La base de datos de imágenes de referencia utilizada para realizar las pruebas del sistema de reconocimiento de patrones RFM consta de 18 imágenes digitales de mariposas en escala de grises, Figura 20. En este caso no se tiene el atributo del color para trabajar en el sistema RGB como se hizo en la sección 5.2 y en lugar de tener tres imágenes monocromáticas, se tiene solo una. Por esta razón, para poder utilizar la metodología desarrollada en el capítulo 5 y generar los ortoedros de confianza, se procesará la firma de la imagen para de ahí obtener los tres atributos que se requieren.

La firma  $S_I$  de la imagen  $I$ , se construye como se describió en el capítulo 4. Enseguida, se calcula la transformada de Fourier de la firma y se separa en su parte real e imaginaria, es decir

$$F\{S_I\} = S_I^R + iS_I^I, \quad (102)$$

de esa forma se generan las dos firmas adicionales  $S_I^R$  y  $S_I^I$ . En este punto ya se tienen las tres firmas  $S_I$ ,  $S_I^R$ ,  $S_I^I$  que describen a una imagen en escala de grises.

Para la base de datos de imágenes de referencia de la Figura 20, cada imagen se rotó  $359^\circ$ , con  $\Delta\theta = 1^\circ$ . Posteriormente, se escala cada una de esas imágenes  $\pm 15\%$ , con  $\Delta k = 1$ . Enseguida, se obtienen las tres firmas para cada una de las imágenes y se calculan las correspondientes potencias. Finalmente, se genera el espacio de clasificación de ortoedros del  $95.4\%$  de nivel de confianza mediante la metodología descrita en el capítulo 5.

En la Figura 21 se muestra el espacio de ortoedros de confianza para la base de

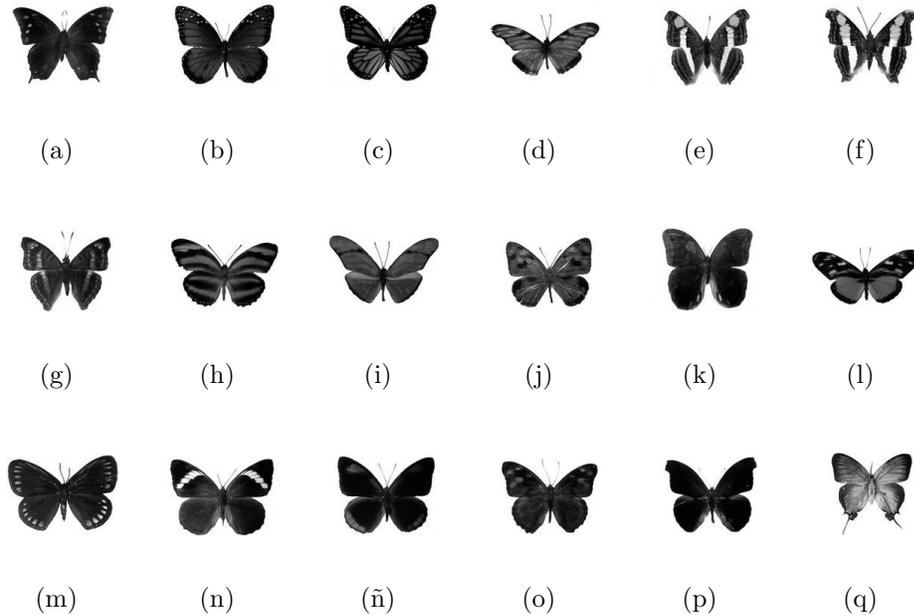
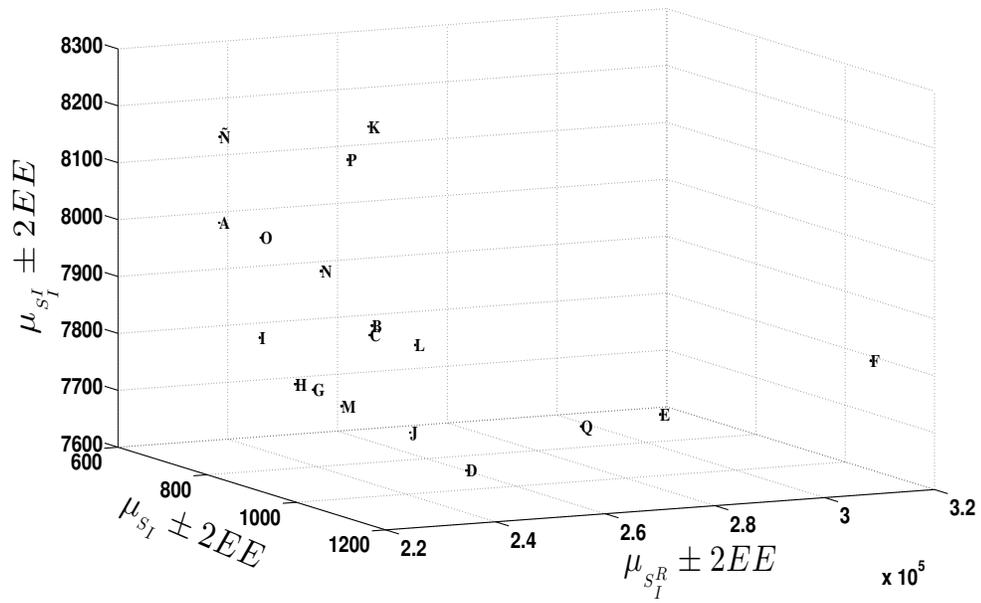
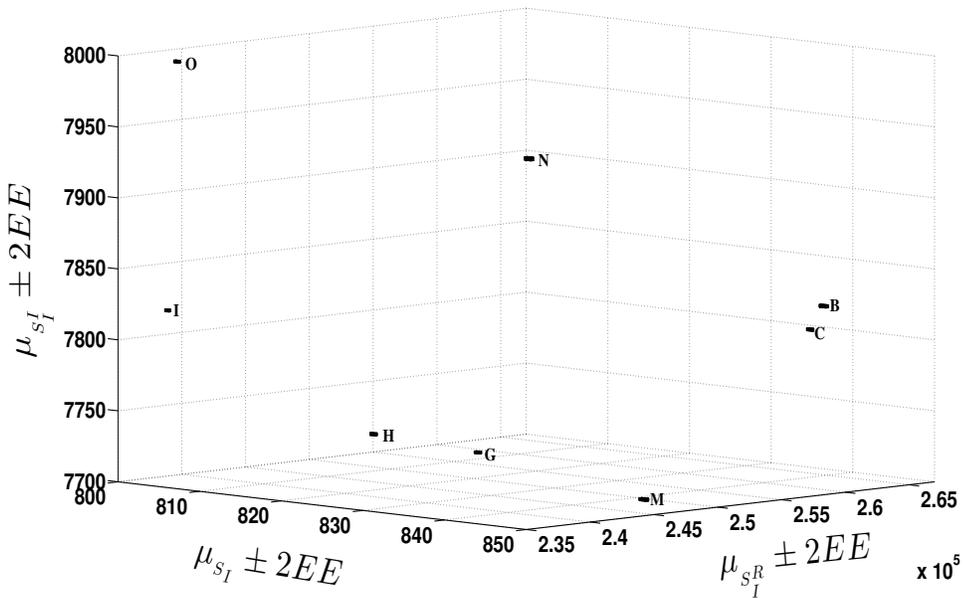


Figura 20. Imágenes de mariposas en escala de grises. (a) A: *Cymatogramma arginusa eubaena*. (b) B: *Danaus eresimus montezuma*. (c) C: *Danaus plexippus plexippus*. (d) D: *Dione juno huascuma*. (e) E: *Doxocopa laure acca h.* (f) F: *Doxocopa laure laure m.* (g) G: *Doxocopa pavon m.* (h) H: *Dryadula phaetusa*. (i) I: *Dryas julia moderata*. (j) J: *Dynamine mylitta m.* (k) K: *Eryphanis aesacus*. (l) L: *Eueides procula asidia*. (m) M: *Eumaeus debora*. (n) N: *Eunica alcmena h.* (ñ) Ñ: *Eunica alcmena m.* (o) O: *Eunica caresa h.* (p) P: *Eunica caresa m.* (q) Q: *Evenus regalis*.

datos de la Figura 20, donde se observa que ningún ortoedro se traslapa, concluyendo que el sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales en escala de grises, esta reconociendo los objetos con un nivel de confianza de al menos un 95.4% y logrando de esa manera el objetivo de tener un único espacio de clasificación y así reducir el tiempo de cómputo al momento de clasificar las imágenes digitales.



(a)



(b)

Figura 21. Espacio de clasificación. (a) Ortoedros de confianza del 95.4% para la base de datos de la Figura 20. (b) Amplificación de la zona más concurrida de la Figura 21(a).

# Capítulo 7

## Conclusiones

Basado en la teoría de la transformada de Fourier, la transformada de Fourier-Mellin y la transformada de Radon, se desarrolló el sistema de reconocimiento de patrones Radon-Fourier-Mellin que es invariante a traslación, escala y rotación. Dicho sistema trabaja tanto para imágenes a color como para imágenes en escala de grises.

Los sistemas de reconocimiento de patrones RFM existentes en la literatura utilizan la función de correlación 2D en la etapa de clasificación, esto significa que trabajan con imágenes (matrices) invariantes a traslación, escala y rotación. Uno de los objetivos de este trabajo de tesis es reducir el tiempo de cómputo, para esto se generaron las firmas 1D invariantes a traslación, escala y rotación, las cuales permiten reducir considerablemente el tiempo de cómputo en la etapa de clasificación, puesto que ahora solo se requiere usar la correlación 1D. Más aún, en lugar de trabajar con múltiples planos de salida, como se hace en los sistemas de reconocimiento de patrones que utilizan funciones de correlación, se generó un único espacio de clasificación utilizando las potencias de las firmas, esto permite reducir el número de operaciones y por ende, el tiempo de cómputo.

El sistema de reconocimiento de patrones Radon-Fourier-Mellin desarrollado en este trabajo de tesis cumplió con el objetivo planteado. El siguiente paso en el desarrollo de un sistema RFM más robusto es considerar la clasificación de imágenes con fragmentos de objetos, ruido e iluminación no homogénea.

# Referencias

- [1] BRACEWELL R. N, *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw-Hill Higher Education (2000).
- [2] CRISTANCHO A. A., ROJAS C. L., *Algoritmo de tomografía local basado en la transformada discreta wavelet*. Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT, Medellín (2011).
- [3] DERRODE S., GHORBEL F., *Robust and efficient Fourier-Mellin transform approximations for gray-level image reconstruction and complete invariant description*. Computer vision and image understanding 83, 57-78 (2010).
- [4] DERRODE S., *Représentation de formes planes à niveaux de gris par différentes approximations de Fourier-Mellin analytique en vue d'indexation de bases d'images*. Tesis Doctoral, Université de Rennes I (1999).
- [5] ELOUEDI I., FOURNIER R., NAIT-ALI A., HAMOUDA A., *The polynomial discrete Radon transform*. Signal, Image and Video Processing, 1-10 (2014)
- [6] ESSAIDANI D., SEDDIK H., BEN B., E., *Asynchronous invariant digital image watermarking in Radon field for resistant encrypted watermark*. International Journal of Network Security (2014).
- [7] FELDMAN J., *Discrete-time Fourier Series and Fourier Transforms*. (2007).
- [8] GONZÁLEZ R. C., WOODS R. E., *Digital Image Processing*, Prentice Hall, New York (2002).
- [9] GONZÁLEZ R. C., WOODS R. E., EDDINS S. L., *Digital Image Processing Using MATLAB*, Tata McGraw Hill Education Private Limited, New York (2010).
- [10] HOANG, T. V., TABBONE, S., *Invariant pattern recognition using the RFM descriptor*. Pattern Recognition 45(1), 271-284 (2012).

- [11] HSU P. H., *Análisis de Fourier*. Prentice Hall, New York (1970).
- [12] KAILEY B., *Mathematic of medical imaging inverting the radon transform*.
- [13] LOKENATH, D., DAMBARU, B., *Integral Transforms and Their Applications*. Chapman & Hall/CRC., EE.UU. (2007).
- [14] LOKENATH, D., DAMBARU, B., *Integral Transforms and Their Applications*. Chapman & Hall/CRC., EE.UU. (2015).
- [15] MICIAK M., *Radon transformation and principal component analysis method applied in postal address recognition task*. IJCSA 7.3, 33-44 (2010).
- [16] OSGOOD B., *The Fourier Transform and its Applications*. Notas de clase, Electrical Engineering Department, Stanford University (2007).
- [17] BUTZAR P. L., JANSCHKE S., *Mellin-Fourier Series and the Classical Mellin Transform*. Computers & Mathematics with Applications 40, 49-62 (2000).
- [18] QUINTERO V. L. C., *Descriptor invariante a posición y escala para imágenes digitales usando la transformada analítica de Fourier-Mellin*. Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua UNAN-LEÓN (2015).
- [19] RODRÍGUEZ M. R., SOSSA A. J. H., *Procesamiento y Análisis Digital de imágenes*. Alfaomega, México (2012).
- [20] ROSS M. S., *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*. Elsevier Academic Press., EE.UU. (2004).
- [21] SHIH F. Y., *Image processing and pattern recognition*. Wiley, New Jersey (2010).
- [22] SOLÍS V. A., ÁLVAREZ B. J., SOLORZA S., *Adaptive nonlinear correlation with a binary mask invariant to rotation and scale*. Optics Communications 339, 185-193 (2015).
- [23] SOLORZA S., ÁLVAREZ B. J., *Position and rotation-invariant pattern recognition system by binary rings masks*. Journal of Modern Optics 62, 851-864 (2015).

- [24] SOLORZA S., ÁLVAREZ B. J., *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales de fósiles de diatomeas*. Notas de clase.
- [25] ARODZ, T, *Invariant object recognition using Radon-Based transform*. Computing and Informatics 24, 183-199 (2012).
- [26] VILLEGAS S. M., *Determinacion de la posición de objetos en imágenes usando la Transformada de Fourier-Mellin Analítica*. Proyecto Final de Carrera, Universidad Politécnica de Valencia (2004).
- [27] ZHANG, Y., WU, L., *A rotation invariant image descriptor based on Radon transform*. International Journal of Digital Content Technology and its Applications 5, 209-217 (2011).
- [28] ZWICKE P. E., KISS JR, I., *A new implementation of the Mellin transform and its application to radar classification of ships*. Pattern Analysis and Machine Intelligence 2, 191-199 (1983).
- [29] *Introduction to the mathematic of medical imaging*, <http://oftankonyv.reak.bme.hu>