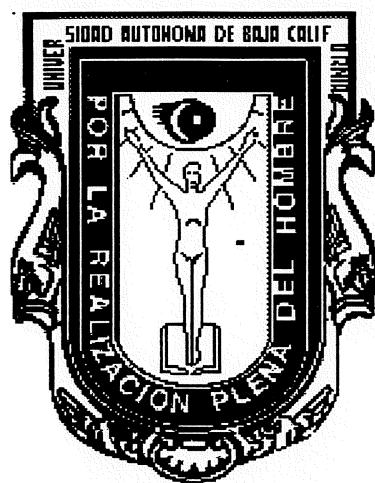




UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS



ANALISIS NUMERICO DE OSCILACIONES INDUCIDAS EN LA BAHIA DE TODOS SANTOS

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
OCEANOLOGO
PRESENTA:
CARELIA RODRIGUEZ PEREZ.

RESUMEN

En este trabajo, mediante un modelo numérico, se estudia la respuesta de la Bahía de Todos Santos, B.C. a ondas incidentes. Con este propósito se utilizó el modelo para cuencas de forma arbitraria desarrollado por Lee (1971). En este modelo la solución de la ecuación de Helmholtz, es planteada como una ecuación integral la cual se aproxima como una ecuación matricial que se resuelve para las regiones interior y exterior de la bahía.

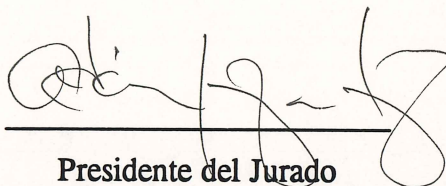
Con objeto de comprobar que el método es correcto se comparan las soluciones para cuencas cerradas de forma sencilla (circular y rectangular) y para una cuenca circular con una apertura pequeña donde se conoce la solución analítica, los resultados concuerdan satisfactoriamente.

Analizando la respuesta de la Bahía de Todos Santos a diferentes oscilaciones incidentes se observan los modos normales de oscilación para longitudes de onda de 13.5 km ($T = 10$ min) y 25.6 km ($T = 19.3$ min).

ANALISIS NUMERICO DE OSCILACIONES INDUCIDAS EN LA BAHIA DE TODOS SANTOS

TESIS
QUE PRESENTA:
CARELIA RODRIGUEZ PEREZ

Aprobada por:



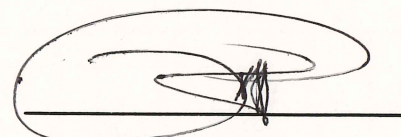
Presidente del Jurado

Dr. Adán Mejía Trejo



Sinodal Propietario

Dr. Reginaldo Durazo Arvizu



Sinodal Propietario

M.C. Rafael Hernández Walls

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Adán Mejía Trejo, por su ayuda, tiempo, paciencia y dedicación que tuvo para la realización de este trabajo “muchísimas gracias Adán”. Al Dr. Reginaldo Durazo Arvizu, por sus comentarios y sugerencias para mejorar esta tesis, así como acordarme que ya se va de crucero y al M.C. Rafael Hernández Walls por las correcciones y aportaciones en el presente trabajo.

También debo agradecer al Instituto de Investigaciones Oceanológicas, por permitirme realizar la tesis en sus instalaciones y por el préstamo de equipo de cómputo.

A la Facultad de Ciencias Marinas por darme las bases para poder desarrollarme y a la Universidad Autónoma de Baja California por su apoyo en la beca-tesis.

Al M.C. Oscar Delgado, a los Oc. Sergio Larios y Eduardo Gil por permitirme trabajar en sus computadoras y hacer uso del lab. de Oceanografía Física. A la P. Oc. Selene Cruz por ayudarme con la realización de las figuras de esta tesis y P.Oc. Mariana Jácome por su ayuda en la corrección del escrito y por que no se como, pero me soportó todo este tiempo en la casa y en la escuela.

A la Asociación de Salvavidas y Rescate de Baja California, por enseñarme durante algunos años a ver de otra forma el mar y apreciar lo bueno de el “charco”. Gracias Víctor (tío Vic.), Octavio de Neira (chapis) y Juan Gabriel (gordito) por motivarme a seguir con los salvavidas.

A mis amigos y compañeros (salmones), que me aguantaron mis buenos y malos momentos en especial a M.C. Margarita Cervantes Trujano por tenderme la mano sin importar el tiempo que requiriera, a la Ph D. Lydia B. Ladah por que en poco tiempo hemos llegado a entendernos en dos idiomas y especialmente por llamarme la atención cuando lo necesitaba (thank you Lyd, you know how I appreciate you, I'll never forget your friendship and advice ☺) . A Kenia Castañeda, por ser mi amiguita y conciencia, a Gabriel Rodríguez por tratar de dar alegría a todos y estar conmigo siempre; Israel López por enseñarme muy a su estilo (100 m. libres) que querer es poder. A Laura Dorantes por que sin esos problemas y buenos momentos no hubiera crecido, Jazmín B. que me ayudó en sus momentos. Al Oc. Carlos Gutiérrez por su ayuda cuando lo necesitaba y por último a Yan por enseñarme a tener paciencia y que no hay que esperar nada de nadie.

DEDICATORIA

A mis padres Orestes F. Rodríguez Tovar (Ra) y Martha E. Pérez Meyer (M. e M.): por apoyarme siempre en todas mis locuras y mis aciertos, sin su apoyo hubiera sido casi imposible llegar a donde estoy, "mas lo que me falta".

A mis hermanas Martha (Mowi) y Edith (chica):
por respetar siempre mis puntos de vista, así como su apoyo para seguir siempre adelante.

INDICE

	Página
Lista de figuras	viii
1. Introducción.	1
2. Objetivo.	3
3. Descripción del área de estudio.	3
4. Oscilaciones en cuencas.	
4.1 Oscilaciones en cuencas de forma sencilla.	5
4.2 Oscilaciones en cuencas de forma compleja.	7
5. Descripción de el modelo de oscilaciones en cuencas de forma arbitraria	
5.1 Análisis teórico para una cuenca de forma arbitraria.	8
5.1.1 Desarrollo de la ecuación de Helmholtz para una cuenca de forma arbitraria.	8
5.1.2 Solución de la ecuación de Helmholtz.	11
5.1.3 Función de Onda dentro de la Bahía (región II).	20
5.1.4 Función de Onda fuera de la Bahía (región I).	26
5.1.5 Igualando la solución de cada región en la entrada de la Bahía.	32
5.2 Análisis numérico.	
5.2.1 Región II: Evaluación de matrices definidas en la ecuación (5.1.18).	34
5.2.2 Región II: Método de solución de la Función de Onda f .	43
5.2.3 Región I: Evaluación de la matriz H definida en la ecuación (5.1.29).	44
5.2.4 Entrada de la Bahía: Procedimiento de igualación.	44
5.3 Discretización de la Bahía de Todos Santos.	45
6. Presentación y discusión de resultados.	

	Página
6.1 Confirmación del análisis numérico.	48
6.1.1 Prueba 1.	49
6.1.1.1 Cuenca Circular.	50
6.1.1.2 Cuenca Rectangular.	56
6.1.2 Prueba 2.	59
6.2 Respuesta de la Bahía a ondas incidentes y discusión de resultados.	63
7. Conclusiones.	79
8. Referencias.	80
Apéndice 1.	
Apéndice 2.	

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 3.1. Localización de la Bahía de Todos de Todos Santos.	4
Figura 5.1. Diagrama de una cuenca de forma arbitraria y sus regiones.	13
Figura 5.2. Diagrama para un domino acotado.	15
Figura 5.3 Diagrama de domino no acotado.	15
Figura 5.4 Diagrama de la frontera de la bahía aproximada por segmentos en línea recta.	23
Figura 5.5 Cambio de derivadas de la normal a dirección tangencial.	36
Figura 5.6 Poligonal usada en el modelo sobrepuesta en la Bahía de Todos Santos y sus segmentos.	46
Figura 6.1 Cuencas cerradas circular y cuadrada.	51
Figura 6.2 Aproximación de una cuenca circular con diferente número de segmentos en la frontera.	54
Figura 6.3 Comparación entre la solución analítica (o) y numérica (*) para diferente número de discretizaciones.	55
Figura 6.4 Aproximación de una cuenca cuadrada con diferente número de segmentos en la frontera.	57
Figura 6.5 Comparación entre la solución analítica (o) y numérica (*) para diferente número de discretizaciones.	58
Figura 6.6 Solución analítica de la función de onda f_2 para una longitud de onda incidente $\lambda = 100$ m, dentro de una cuenca circular con 20° de apertura y un radio = 100 m.	60

- Figura 6.7 Cuenca circular con 20^0 de apertura, usando una longitud de onda incidente $\lambda = 100$ m y utilizando la teoría de cuencas de forma arbitraria con 36 segmentos en la frontera ($n = 36$, $np = 2$). 61
- Figura 6.8 Cuenca circular con 20^0 de apertura, usando una longitud de onda incidente $\lambda = 100$ m y utilizando la teoría de cuencas de forma arbitraria con 18 segmentos en la frontera ($n = 18$, $np = 1$). 62
- Figura 6.9 Solución analítica de la función de onda f_2 para una longitud de onda incidente $\lambda = 75$ m, dentro de una cuenca circular con 20^0 de apertura y radio = 100 m. 64
- Figura 6.10 Solución numérica de la función de onda f_2 para una longitud de onda incidente $\lambda = 75$ m dentro de una cuenca circular con 20^0 de apertura $np=2$ y $n=36$. 65
- Figura 6.11 Solución numérica de la función de onda f_2 para una longitud de onda incidente $\lambda = 75$ m dentro de una cuenca circular con 20^0 de apertura $np=1$ y $n=18$. 66
- Figura 6.12 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la Bahía de Todos Santos (B.T.S.), con una profundidad $h = 50$ m . La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 3$ km y un período $T = 2.7$ min. 68
- Figura 6.13 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 5$ km y un período $T = 3.8$ min. 69
- Figura 6.14 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 7$ km y un período $T = 5.3$ min. 70

- Figura 6.15 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 10$ km y un período $T = 7.5$ min. 71
- Figura 6.16 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 15$ km y un período $T = 11.3$ min. 72
- Figura 6.17 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 30$ km y un período $T = 22.6$ min. 73
- Figura 6.18 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 30$ km, un período $T = 25.6$ min y 6 segmentos en la entrada. 74
- Figura 6.19 Poligonal de la B. T.S. con los puntos seleccionados para obtener las ampliaciones a diferentes longitudes de ondas incidentes. 75
- Figura 6.20 Diagrama de ampliaciones a diferentes longitudes de onda λ (0.1 a 10 km) para 4 puntos seleccionados (a), (b), (c) y (d) 76
- Figura 6.21 Diagrama de ampliaciones a diferentes longitudes de onda λ (0.1 a 10 km) para 4 puntos seleccionados (e), (f), (g) y (h). 77
- Figura A.1.1 Diagrama de un punto interior aproximado a un punto en la frontera sobre una curva suave.
- Figura A.1.2 Diagrama para un punto interior aproximado a una esquina en un punto en la frontera.
- Figura A.2.1 Diagrama de una cuenca circular.

1. INTRODUCCION

Las bahías con comunicación al mar se encuentran expuestas a perturbaciones (variaciones del nivel del mar, presión atmosférica, viento, corrientes) que pueden generar amplificaciones en el nivel medio del mar, ocasionando en algunos casos, daños a las embarcaciones ancladas, estructuras portuarias, y ponen en peligro a las poblaciones costeras. Con objeto de tener una mejor planeación de cualquier obra portuaria, es importante predecir la respuesta de una cuenca, para el caso de este trabajo es la Bahía de Todos Santos. Si uno de los modos normales de oscilación coincide con el período de estas perturbaciones, la amplitud de la variación del nivel del mar y corrientes asociadas pueden ser de riesgo considerable para la seguridad de un puerto.

Las ondas que arriban dentro de una cuenca son reflejadas hacia afuera por los límites de la misma; estas señales de salida, llegan a la entrada de la cuenca otra vez y son parcialmente reflejadas debido a forzamientos incidentes. El resultado es que parte de la energía de la onda que entró no vuelve a salir. Esta energía atrapada dentro de la cuenca hace entrar en resonancia a las ondas a través de la cuenca; en este caso las amplitudes de las oscilaciones pueden crecer dentro de la cuenca, a valores mucho más grandes que las ondas incidentes.

La disipación de la energía incidente es de tres formas principalmente: la onda rompiente dentro de la cuenca que es cuando las oscilaciones exceden el límite de rompimiento, los efectos de fricción en el fondo, y la absorción de la onda en los límites de la costa. Sin embargo, la radiación hacia el mar es generalmente la más importante de todas estas (Hwang y Tuck, 1970).

Todos los cuerpos de agua, ya sea el océano, o los contenidos en bahías, puertos etc. tienen sus modos normales de oscilación característicos, los cuales, dependen de la geometría del cuerpo de agua. Las corrientes fuertes que pasan a través de una bahía con entrada angosta pueden excitar las oscilaciones propias para una bahía (Sánchez-Dévora, 1980).

El conocer la variedad de perturbaciones incidentes a una bahía y cuales son los modos normales de oscilación de esta, nos permitirá planear cualquier modificación en, caso de ser necesario, en obras portuarias; todo esto con objeto de reducir al máximo la posibilidad de tener el fenómeno de resonancia.

Existen modelos numéricos que permiten investigar las oscilaciones de ondas inducidas en cuencas de forma arbitraria en el plano horizontal conectadas al mar abierto. Por ejemplo, los modelos descritos por Hwang y Tuck (1970) y Lee (1971), que suponen una cuenca con profundidad constante y de forma arbitraria, estos modelos serán descritos mas ampliamente en el capítulo 5. Estos modelos presentan grandes ventajas, ya que se pueden simular las condiciones existentes en una bahía y hacer predicciones de variaciones del nivel del mar y corrientes. Por ejemplo, Jialong (1988) hizo un modelo de resonancia en una cuenca debida a la acción de ondas de largo período sin importar el efecto de fricción. Por otro lado se pueden predecir amplitudes en varios puntos dentro de las cuencas así como los efectos posibles de modificaciones en la geometría de las mismas.

Entre los estudios previos relacionados con oscilaciones en la Bahía de Todos Santos, están los trabajos de Rivera y Peña (1982), quienes hacen un análisis de tsunamis incidentes y representa a la Bahía de Todos Santos como una cuenca rectangular. Gavidia-Medina (1988), usó un modelo hidrodinámico integrado

verticalmente y analizó principalmente el comportamiento debido a la onda de marea y a la circulación residual generada por esta.

En este estudio se adaptará el modelo de Lee (1971) a la Bahía de Todos Santos (BTS) y se analizará teóricamente la respuesta de la bahía a los diferentes forzamientos que pudieran corresponder a perturbaciones con períodos similares a los incidentes, por ejemplo: la marea, tsunamis, variación en la presión atmosférica, vientos, etc.

2. OBJETIVO

Aplicar un modelo numérico de dos dimensiones y de profundidad constante a la Bahía de Todos Santos, para obtener los modos normales de oscilación y la respuesta a diferentes forzamientos dentro de la bahía.

3. DESCRIPCION DEL AREA DE ESTUDIO

La Bahía de Todos Santos se encuentra en la parte noroeste de la península de Baja California, entre las latitudes de $31^{\circ} 40'$ y $31^{\circ} 56'$ N y las longitudes de $116^{\circ} 36'$ y $116^{\circ} 50'$ W (Fig. 3.1).

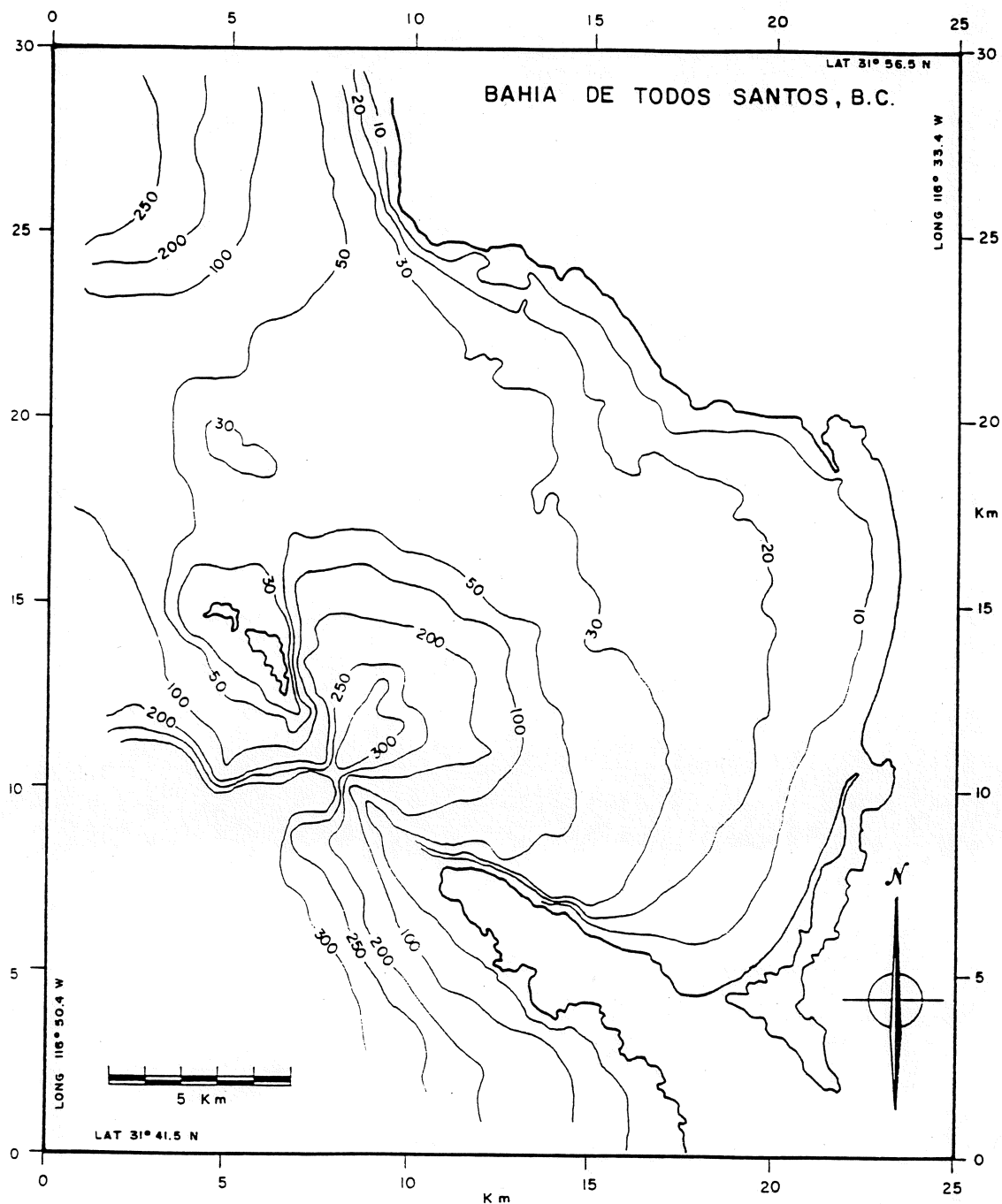


Figura 3.1 Localización de la Bahía de Todos Santos.

BATIMETRIA

La BTS se puede considerar somera o de aguas poco profundas. Cerca del 80% tiene una profundidad menor a los 50 m y el resto forma parte de un cañón submarino con casi 400 m de profundidad. Esta bahía tiene dos entradas que están separadas por dos islas al oeste. La entrada NO es de 12 km de ancho y la otra al SO de 6 km de ancho, donde se encuentra el cañón submarino.

FORZAMIENTOS EN LA BAHIA DE TODOS SANTOS

La bahía presenta fuertes vientos en invierno, que se originan en las latitudes altas y que se desplazan hacia el pacífico occidental. El viento predominante es del NO, con una velocidad promedio de 3 m/s (Gil-Silva y Larios-Castillo, 1992). En otoño se presentan vientos de alta intensidad y poca humedad provenientes del este fenómeno conocido como condición de Santana (Cruz-Colín, 1994). En verano las corrientes litorales son predominantemente en dirección NE con velocidades de 2.89 m/s en promedio, en invierno son de 3.09 m/s en la misma dirección (Galindo-Albrechtsen y Torres-Navarrete, 1995).

4. OSCILACIONES EN CUENCAS

4.1 OSCILACIONES EN CUENCAS DE FORMA SENCILLA

Se tienen problemas importantes en la planeación y operación de obras portuarias debido a la falta de un asesoramiento adecuado de la dinámica de fuerzas que actúan en el atraque sobre los barcos y muelles. En algunos puertos esta acción ha

sido tan seria que impide las labores de carga y descarga en varios días y en casos extremos se puede provocar daños después de que los barcos han partido. Para prevenir este tipo de daños o fallas es necesario predecir la amplitud de onda en diversos lugares dentro del puerto y la cuenca para un período dado.

Se han realizado diversos modelos para obtener los modos normales de oscilación en cuencas, idealizando su forma. En la entrada de la cuenca se establece algún tipo de forzamiento y se resuelve el problema al interior aplicando condiciones de frontera.

El problema de la obtención de estos modos en una cuenca rectangular conectada directamente a mar abierto se han estudiado desde la década de los años cincuenta. Biesel y Le Mehaute (1955,1956), citado por Raichlen (1966) y Le Mehaute (1960, 1961), citado por Raichlen (1966), estudiaron las oscilaciones resonantes en cuencas rectangulares con varios tipos de entradas: totalmente abierta, parcialmente abierta, cambiando la profundidad en la entrada y la combinación de éstas, y cambiando la pendiente en el fondo al interior de la cuenca. El método que utilizaron se basó en el cálculo de números complejos con la aplicación directa de la superposición de varias ondas incidentes, reflejadas y transmitidas y desarrollaron una expresión para obtener el factor de amplificación, definido como la amplitud en la parte posterior de la bahía de la amplitud de la onda incidente (Raichlen, 1966).

Por otra parte Ippen y Goda (1963) han realizado diversos estudios teóricos y experimentales con cuencas conectadas al mar abierto. Evaluaron las ondas radiadas de la entrada de la bahía hacia el mar abierto usando el método de la transformada de Fourier. La solución dentro de la cuenca la obtuvieron mediante el método de separación de variables y lo expresaron en términos de la pendiente en la superficie en

la entrada de la bahía. La solución en el mar abierto la obtuvieron sobreponiendo la onda estacionaria y la onda radiada (también expresada en términos de la pendiente de la inclinación de la superficie del agua). Igualaron la amplitud de onda en la entrada y así obtuvieron la solución final en las 2 regiones, interior y exterior; (Raichlen, 1966).

4.2 OSCILACIONES EN CUENCAS DE FORMA COMPLEJA

Para el caso de oscilaciones en cuencas de forma compleja, Wilson, Hendrickson y Kilmer (1965), citado por Raichlen (1966), estudiaron oscilaciones bidimensionales y tridimensionales. En el análisis asumieron que la longitud de onda es más larga comparada con la profundidad de la cuenca. En esta aproximación suponen una condición de frontera artificial en la entrada de la cuenca, con condición de frontera de una línea nodal en la entrada y amplitudes observadas. Esto arrojó algunas soluciones, pero no la solución completa al problema.

Para obtener una solución ideal de los modos normales de oscilación, es necesario poner especial cuidado en la condición de frontera en la entrada, igualando las amplitudes de onda y las velocidades en la entrada de la cuenca.

Hwang y Tuck (1970) desarrollaron un método analítico para resolver el problema en bahías de forma arbitraria y profundidad constante conectadas al mar abierto. Su método de aproximación es superponer ondas dispersivas, que son causadas por la presencia de la frontera sobre el sistema de ondas estacionarias. Las ondas de dispersión son computadas por medio de una distribución de orígenes, escogidos con la función de Hankel $H_0^{(1)}(kr)$, con una fuerza desconocida que es determinada a lo largo de la línea de costa y la frontera de la bahía. Este método no requiere condición de igualación en la entrada.

5. DESCRIPCION DE EL MODELO DE OSCILACIONES EN CUENCAS DE FORMA ARBITRARIA

5.1 ANALISIS TEORICO PARA UNA CUENCA DE FORMA ARBITRARIA

Los modelos numéricos juegan un papel muy importante en el entendimiento de la dinámica de una bahía, son sin duda una herramienta indispensable para la planeación de obras portuarias. En este estudio se adaptó un modelo numérico descrito por Lee (1969) a la Bahía de Todos Santos.

En este modelo la solución teórica para oscilaciones inducidas en una cuenca de forma arbitraria de profundidad constante es formulada como una ecuación integral. Para resolverla se presenta un método aproximado que convierte esta ecuación en una ecuación matricial, la cual puede resolverse numéricamente en una computadora.

Con objeto de corroborar los resultados numéricos se compararon resultados teóricos, es decir, resultados en donde las soluciones analíticas se conocen (p. ej. cuencas rectangulares y circulares) con los obtenidos numéricamente.

5.1.1 Desarrollo de la ecuación de Helmholtz para una cuenca de forma arbitraria

Se plantea el problema suponiendo un flujo irrotacional e incompresible, de tal forma que podemos tener un potencial de velocidad Φ , entonces el vector velocidad

del fluido puede expresarse como el gradiente del potencial de velocidad ($\nabla \Phi$). De la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ para un fluido incomprensible, y la definición del potencial de velocidad, se puede obtener la ecuación de Laplace:

$$\nabla \cdot \underline{u} = \nabla^2 \Phi = 0.$$

Nuestro problema se concentra en encontrar el potencial de velocidad, el cual satisface ecuación de Laplace y nuestras condiciones de frontera (línea de costa y fondo), es decir, que el fluido no penetra las fronteras rígidas ($v_n = 0$ ó $\partial \Phi / \partial n = 0$).

La forma de la solución del potencial de velocidad es del tipo:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{-i\omega} f(x, y) Z(z) e^{-i\omega t}. \quad (5.1.1)$$

donde

ω = frecuencia angular.

$$i = \sqrt{-1}$$

$f(x, y)$ = es la función de la onda la cual describe la variación de Φ en x y y .

Sustituyendo la ecuación (5.1.1) en la ecuación de Laplace obtenemos:

$$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \quad (5.1.2)$$

donde la parte izquierda de la ecuación anterior no depende de z y la parte derecha es independiente de x y y , cada lado puede ponerse igual a la misma constante escogiendo en este caso $-k^2$ y nos asegura que $Z(z)$ varia exponencialmente. Quedando las siguientes ecuaciones:

$$i) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = k^2 Z \quad \therefore \quad es \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0.$$

$$\text{ii) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0.$$

Ec. de Helmholtz

La condición de frontera en el fondo:

$$\frac{d\Phi}{dz} (x, y, -h; t) = 0, \quad \text{donde se asumió una profundidad constante.}$$

Para el caso de la ecuación (i) la condición de frontera final sugiere una solución del tipo $Z(z) = A_0 \cosh k(h+z)$, donde A_0 es una constante determinada.

La condición dinámica de superficie libre para la teoría de onda de pequeña amplitud, despreciando la tensión superficial, puede ser combinada con esta expresión y la ecuación (5.1.1) dándonos:

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0} = -\frac{1}{g} A_0 \cosh(kh) f(x, y) e^{-i\omega t} \\ &= A_i f(x, y) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Donde

η es la amplitud de la onda (posición de superficie libre) en la posición (x, y) al tiempo t .

A_i es la amplitud de la onda en la cresta de la onda incidente.

g la aceleración de la gravedad.

De la ecuación (5.1.3), la constante A_0 es:

$$A_0 = -\frac{A_i g}{\cosh(kh)}.$$

Se sabe que la relación de dispersión para aguas profundas es:

$$\omega^2 = gk \tanh(kh).$$

donde k es el número de onda y h la profundidad. Cuando se sustituye la relación anterior para aguas someras $\tanh(kh) \sim kh$, la relación queda como:

$$\omega^2 = g k^2 h ,$$

Para completar la expresión del potencial de velocidad Φ , Ec. (5.1.1), el problema principal sigue siendo el determinar la función de onda $f(x,y)$, la cual satisface la ecuación de Helmholtz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + k^2 f = 0$ sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

- i) $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, a lo largo de las fronteras rígidas, como la línea de costa.
- ii) Conforme $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, no hay efecto de la cuenca sobre el sistema de ondas (condición de radiación).

5.1.2 Solución de la ecuación de Helmholtz

Para obtener la solución de la ecuación de Helmholtz dentro de una cuenca, se aplica la identidad de Green y se usa la función de Hankel de primera clase y orden cero, $H_0^{(1)}(kr)$.

Dentro de la cuenca se aplica la identidad de Green y la función de Hankel de primera clase y de orden cero $H_0^{(1)}(kr)$, que es escogida por ser la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz de dos dimensiones, que es resuelta a

continuación. Para el procedimiento en el desarrollo de la teoría de la respuesta de una bahía de forma arbitraria por un sistema de ondas incidentes, es necesario que se dividan en dos regiones. La fig. 5.1 muestra los dos dominios de interés: una región infinita, mar abierto (Región I) y otra para un dominio finito limitado por la bahía (Región II).

5.1.1.1 Solución de Weber para un dominio acotado

Supongamos que ∂D sea una curva cerrada delimitado a un dominio D en el plano x - y , si f y q son dos funciones, cuyas derivadas parciales de primero y segundo orden son continuas dentro del dominio D y sobre la frontera ∂D , la identidad de Green es:

$$\int_{\partial D} \left(f \frac{\partial q}{\partial n} - q \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = \iint_D (f \nabla^2 q - q \nabla^2 f) dx dy.$$

Se sustituye la solución de la Ec. de Helmholtz en dos dimensiones, si f y q son soluciones de esta ecuación, entonces:

$\nabla^2 f = -k^2 f$, al sustituirlo en la identidad de Green

$$\iint_D (f \nabla^2 q - q \nabla^2 f) dx dy = 0 \quad \therefore \quad \int_{\partial D} \left(f \frac{\partial q}{\partial n} - q \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (5.1.4)$$

Si $q = H_0^{(1)}(kr)$, donde r indica la distancia a un punto $\bar{x}(x, y)$ al sustituirla en la ecuación (5.1.4) queda:

$$\int_{\partial D} \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds = 0.$$

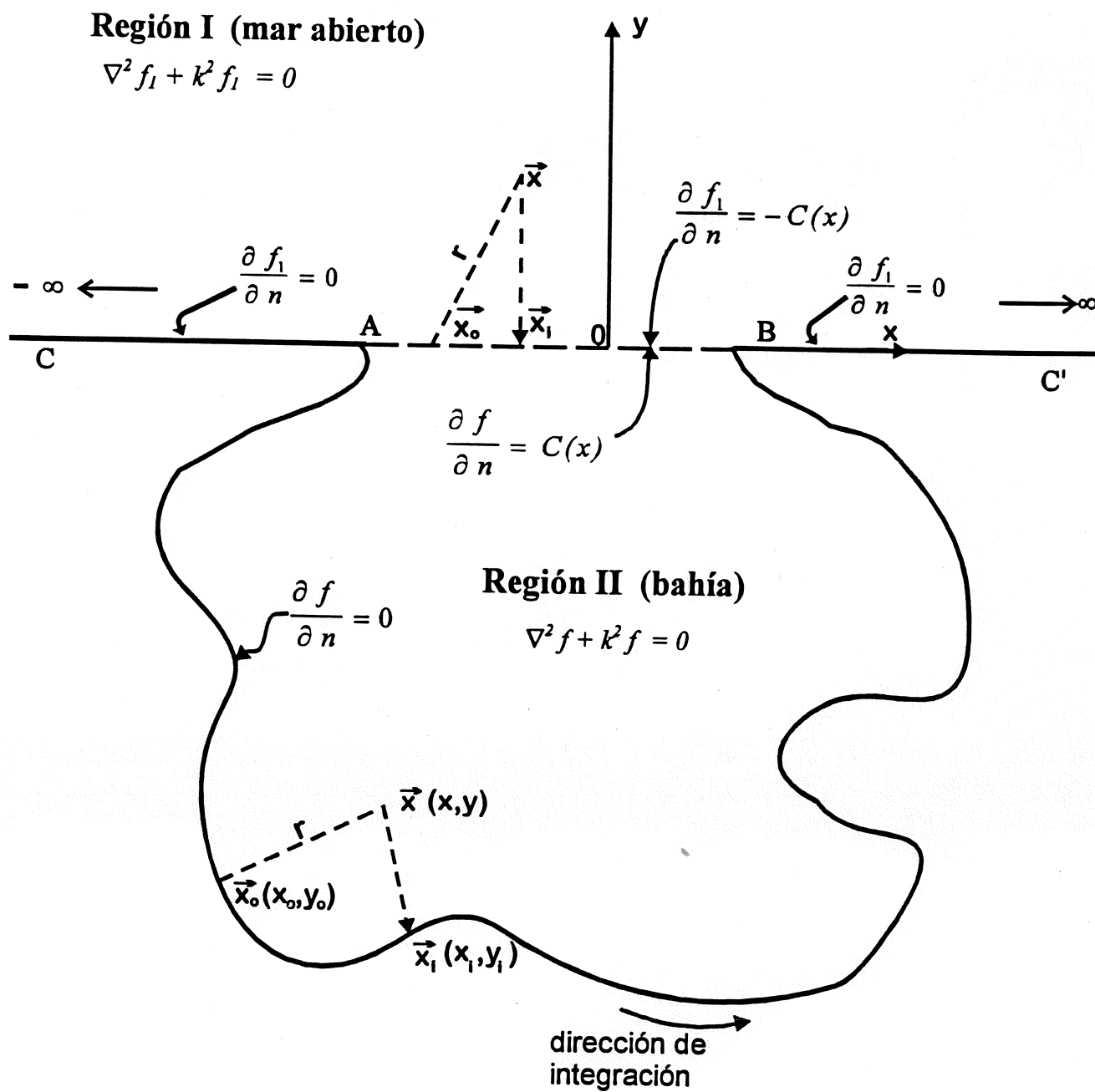


Fig.5.1 Diagrama de una cuenca de forma arbitraria y sus regiones.

Sin embargo, si $\bar{x}(x,y)$ esta dentro del dominio D tendrá problemas de singularidades ya que $H_0^{(1)}(kr)$ tiene una singularidad logarítmica en el punto $\bar{x}(x,y)$.

$H_0^{(1)}(kr) \sim i \frac{2}{\pi} \log kr$, cuando $r \rightarrow 0$, por lo que para evitar esta singularidad

usaremos un nuevo dominio D_1 con su frontera o borde externo será ahora la ∂D y el borde interno será un círculo ρ_0 con su centro en el punto $\bar{x}$ y su radio será ε (ver fig. 5.2). Por lo que la identidad de Green quedaría:

$$\int_{\partial D} \left(f \frac{\partial q}{\partial n} - q \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds + \int_{\rho_0} \left(f \frac{\partial q}{\partial n} - q \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = \iint_{D_1} (f \nabla^2 q - q \nabla^2 f) dx dy. \quad (5.1.5)$$

Donde la parte derecha es igual a cero por ser soluciones de la ecuación de Helmholtz. Retomando $q = H_0^{(1)}(kr)$ y sustituyéndola en la Ec. (5.1.5) da:

$$\int_{\partial D} \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds + \int_{\rho_0} \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds = 0$$

Para obtener el dominio ∂D tenemos que analizar las funciones en el dominio ρ_0 , por lo tanto:

$$\int_{\partial D} \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds = - \int_{\rho_0} \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds$$

La dirección sobre la frontera ρ_0 , como se ve en la parte derecha de la ecuación anterior, del interior hacia el centro $\bar{x}(x,y)$ y en el exterior desde la frontera del dominio D_1 , por conveniencia esta diferenciación es cambiada a la dirección r (dirección negativa n), es decir, cambia el sentido de la integración.

$$\int_{\partial D} \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds = \int_{\rho_0} \left[f \frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial r} \right] ds \quad (5.1.6)$$

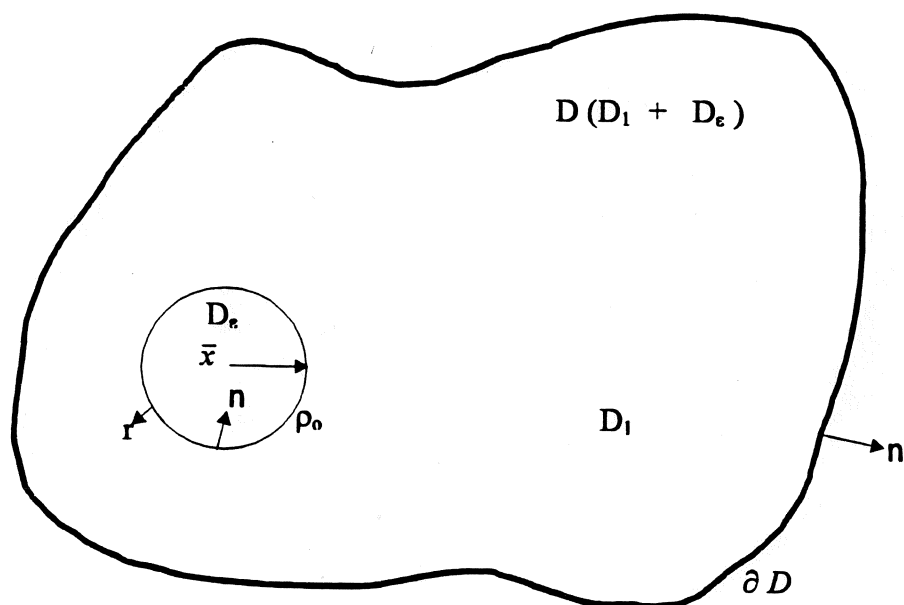


Fig. 5.2 Diagrama para un dominio acotado.

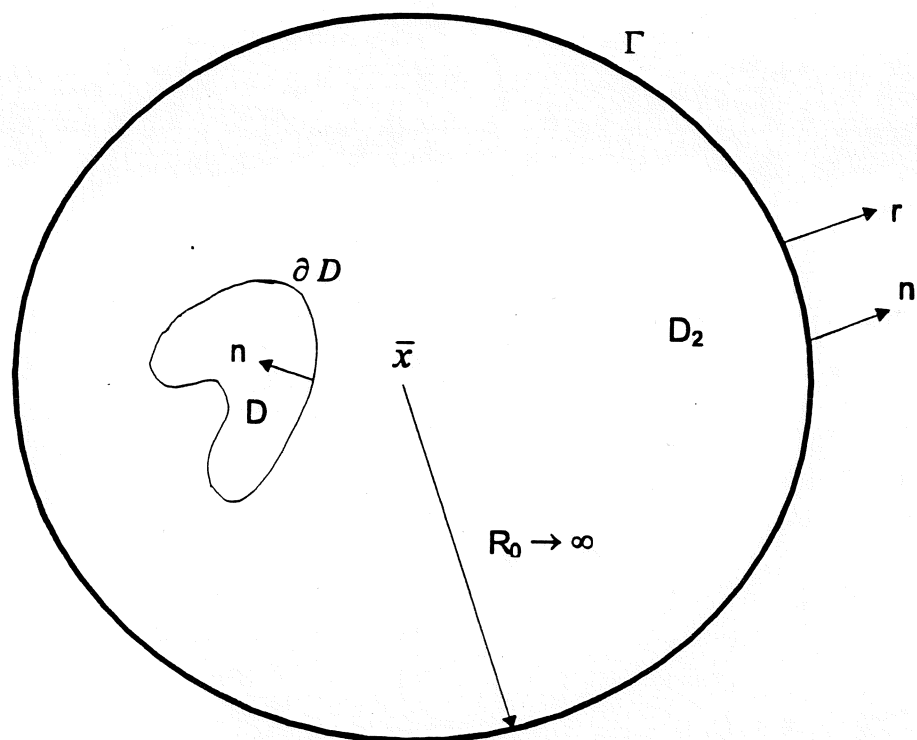


Fig. 5.3 Diagrama de un dominio no acotado.

Como la integral alrededor de la frontera ∂D no depende del radio ε del círculo ρ_0 , la ecuación anterior se puede evaluar en un radio ε tan pequeño como se quiera, por lo tanto, el lado derecho de la ecuación (5.1.6) se puede escribir como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_0} \left[f \frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial r} \right] ds. \quad (5.1.7)$$

Usando el comportamiento asintótico de la función de Hankel para $r \rightarrow 0$

$$H_0^{(1)}(kr) \sim 1 + i \frac{2}{\pi} \log(kr),$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(kr)) \sim i \frac{2}{\pi} \frac{1}{r},$$

el límite de la ecuación (5.1.7) puede ser evaluada. Puesto que las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial r}$ son continuas en el punto $\bar{x}(x,y)$, el primer y segundo término de la ecuación (5.1.7) puede evaluarse como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_0} H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial r} ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left(1 + i \frac{2}{\pi} \log(k\varepsilon) \right) \varepsilon d\theta \left(\frac{\partial f}{\partial r}(\bar{x}) + o(\varepsilon) \right) = 0. \quad (a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_0} f \frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(kr)) ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} i \frac{2\varepsilon}{\pi\varepsilon} d\theta (f(\bar{x}) + o(\varepsilon)) = 4i f(\bar{x}). \quad (b)$$

Sustituyendo (a) y (b) en la ecuación (5.1.6) se obtiene:

$$f(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \int_{\partial D} \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds. \quad (5.1.8)$$

donde r es la distancia desde el punto interior $\bar{x}$ a la frontera, y $\frac{\partial}{\partial n}$ es la diferenciación a lo largo de la normal exterior a la frontera ∂D .

5.1.1.2 Solución de Weber para un dominio no acotado

Suponga que fuera del dominio D la función f es una solución de la Ec. de Helmholtz y el dominio sin fronteras es igual a el dominio D (ver fig. 5.3), cuyas derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas sobre y fuera de la curva cerrada ∂D , por lo tanto la identidad de Green puede aplicarse a la región D_2 limitado internamente por la curva cerrada ∂D y externamente por un círculo Γ con un radio R_0 el cual es seleccionado a el círculo Γ rodeando la curva cerrada ∂D . Entonces obtenemos:

$$f(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \left[\left(\int_{\partial D} + \int_{\Gamma} \right) \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds \right] \quad (5.1.9)$$

si $f(\bar{x})$ esta en el dominio D_2 , en donde n denota el exterior normal a las curvas limitantes, ∂D y Γ .

La normal hacia afuera del círculo Γ está en dirección r , entonces la ecuación anterior se escribe así:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = & -\frac{i}{4} \int_{\partial D} \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds \\ & - \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left[f \frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial r} \right] ds. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

La segunda integral del lado derecho de la ecuación la podemos escribir como $J(\bar{x})$. El radio de círculo Γ , R_0 , puede ser hecho tan grande como se desee para cubrir el dominio infinito, es decir, poder hacer $R_0 \rightarrow \infty$.

Entonces la función $J(\bar{x})$ se puede reescribir como:

$$J(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left[f \frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial r} \right] r d\theta. \quad (5.1.11)$$

El comportamiento asintótico de $H_0^{(1)}(kr)$ y $\frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(kr))$ para $r \rightarrow \infty$ es:

$$H_0^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(kr)}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(kr)) = -k H_1^{(1)}(kr) \approx -k \sqrt{\frac{2}{\pi(kr)}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})}. \quad (5.1.12)$$

Sustituyendo el comportamiento asintótico anterior en la Ec. (5.1.11) y simplificando queda:

$$J(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi(kr)}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \left[-kf e^{-i\frac{\pi}{2}} - \frac{\partial f}{\partial r} \right] r d\theta.$$

$$= \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \sqrt{r} \left[\frac{\partial f}{\partial r} - ikf \right] d\theta$$

Así la función $J(\bar{x})$ tiende a cero, si la función $\sqrt{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - ikf \right) \rightarrow 0$ uniformemente con respecto a θ conforme $r \rightarrow \infty$. Esta condición, se conoce como la condición de radiación de Sommerfeld. Una condición para esto es que la función f

debe comportarse como $H_0^{(1)}(kr)$ para valores grandes de r . Para $f = H_0^{(1)}(kr)$ y $\frac{\partial f}{\partial r} = -k H_1^{(1)}(kr)$, la condición de radiación de Sommerfeld se satisface conforme $r \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned}\sqrt{r} \left[\frac{\partial f}{\partial r} - i k f \right] &= -k \sqrt{r} \left[H_1^{(1)}(kr) + i H_0^{(1)}(kr) \right] \\ &\approx -k \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} \left[e^{-i\frac{\pi}{2}} + i \right] \\ &= -k \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} [-i + i] = 0.\end{aligned}$$

Lo anterior prueba el siguiente teorema de Weber para un dominio no acotado: Sea f una solución de la ecuación de Helmholtz, cuyas derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas fuera y sobre la curva cerrada ∂D y sea:

$$\sqrt{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - i k f \right) \rightarrow 0. \quad (5.1.13)$$

uniformemente con respecto a θ , conforme $r \rightarrow \infty$, entonces la función $f(\bar{x})$ en un punto determinado $\bar{x}$ localizado fuera del dominio acotado por ∂D , es decir dentro del dominio infinito, puede expresarse como:

$$f(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \int_{\partial D} \left[f \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds,$$

donde r es la distancia entre el punto determinado $\bar{x}$ y la frontera, y n denota la normal exterior a la frontera ∂D (en la dirección hacia fuera del dominio no acotado).

5.1.3 Función de Onda dentro de la Bahía (Región II)

La siguiente ecuación fue referenciada por Baker y Copson (1950) como la solución de Weber de la ecuación de Helmholtz:

$$f(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \int_s \left[f(\bar{x}_o) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(k\bar{r}) - H_0^{(1)}(k\bar{r}) \frac{\partial}{\partial n} (f(\bar{x}_o)) \right] ds(\bar{x}_o), \quad (5.1.14)$$

que es la función de onda en la posición $\bar{x}$, y representa la función de onda $f(\bar{x})$ en un punto interior $\bar{x}$ como una función de la función de onda $f(\bar{x}_o)$ y su derivada normal $\frac{\partial}{\partial n} f(\bar{x}_o)$ sobre la frontera, $\bar{r} = |\bar{x} - \bar{x}_o|$ es la distancia entre el punto interior $\bar{x}$ y un punto sobre la frontera $\bar{x}_o$. $i = \sqrt{-1}$ es el número imaginario. La integración indicada se realiza a lo largo de la frontera de la cuenca recorriéndola en la dirección opuesta al sentido de las manecillas del reloj.

De la ecuación (5.1.14) es claro que con objeto de determinar la función de onda, f , en cualquier punto interior de la cuenca (región II), se debe conocer tanto la función f como su derivada $\frac{\partial f}{\partial n}$ sobre la frontera. $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ en una frontera sólida pero en la boca su valor es desconocido. Con el objeto de determinar la función de la onda f en la frontera, modificamos la Ec. (5.1.14), haciendo que el punto interior $\bar{x}$ se aproxime a un punto en la función $\bar{x}_i$. Si la frontera es seccionalmente suave, se tiene la siguiente expresión (ver Apéndice 1):

$$f(\bar{x}_i) = -\frac{i}{4} \int_s \left\{ f(\bar{x}_o) \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(k|\bar{x}_i - \bar{x}_o|) \right] - H_0^{(1)}(k|\bar{x}_i - \bar{x}_o|) \frac{\partial}{\partial n} [f(\bar{x}_o)] \right\} ds(\bar{x}_o) + \frac{1}{2} f(\bar{x}_i). \quad (5.1.15)$$

Reescribiendo la ecuación (5.1.15) queda:

$$f(\bar{x}_i) = -\frac{i}{2} \int_s \left\{ f(\bar{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(k|\bar{x}_i - \bar{x}_0|) \right] - H_0^{(1)}(k|\bar{x}_i - \bar{x}_0|) \frac{\partial}{\partial n} [f(\bar{x}_0)] \right\} ds(\bar{x}_0) \quad (5.1.16)$$

Para resolver la Ec. (5.1.16) para los valores de f en la frontera en una cuenca de forma arbitraria, se propone un método de aproximación, la ecuación integral es convertida a una ecuación matricial. Esto se obtiene dividiendo la frontera en un número suficientemente largo de segmentos donde a lo largo de cada segmento, se usa el valor promedio sobre el segmento de $f(\bar{x}_0)$, $\frac{\partial}{\partial n} f(\bar{x}_0)$, $H_0^{(1)}(kr)$ y $\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr)$. La integral de línea de la ecuación anterior, la cual representa la función de onda f , es aproximada por una sumatoria finita de contribuciones de las singularidades para cada segmento, donde las singularidades son los promedios antes mencionados y son considerados que esta en el centro de cada segmento.

Escribiendo la ecuación integral como sumatoria obtenemos:

$$f(\bar{x}_i) = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \left[f(\bar{x}_j) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr_{ij})) - H_0^{(1)}(kr_{ij}) \frac{\partial}{\partial n} f(\bar{x}_j) \right] \Delta s_j, \quad (5.1.17)$$

donde la frontera es dividida en N segmentos y r_{ij} es la distancia entre los puntos $\bar{x}_j$ y $\bar{x}_i$, es definida como:

$$r_{ij} = |\bar{x}_j - \bar{x}_i| = r_{ji}$$

donde:

$\bar{x}_i$ = es el vector posición para un punto sobre la frontera,

$\bar{x}_j$ = es el vector posición para un punto fuente sobre la frontera, y

Δs_j = es la longitud del j^{esimo} segmento sobre la frontera.

Los segmentos de la frontera serán numerados en sentido opuesto a las manecillas del reloj, empezando del lado derecho de la abertura de la cuenca (ver fig. 5.4); el punto de inicio es el punto B. Lo anterior es necesario harcelo notar ya que esta es una representación aproximada de la frontera; la curvatura original de la frontera es reemplazada por una frontera aproximada y compuesta de segmentos en línea recta.

Ahora se escribirá la Ec. (5.1.17) en forma matricial; de la forma:

$$\underline{X} = b_0 [G_n \underline{X} - G \underline{P}], \quad (5.1.18)$$

que puede escribirse también como:

$$(b_0 G_n - I) \underline{X} = b_0 G \underline{P} \quad (5.1.19)$$

donde: $b_0 = -\frac{i}{2}$ y se tiene la siguiente notación:

$$\underline{X} = f(\bar{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.1.19a)$$

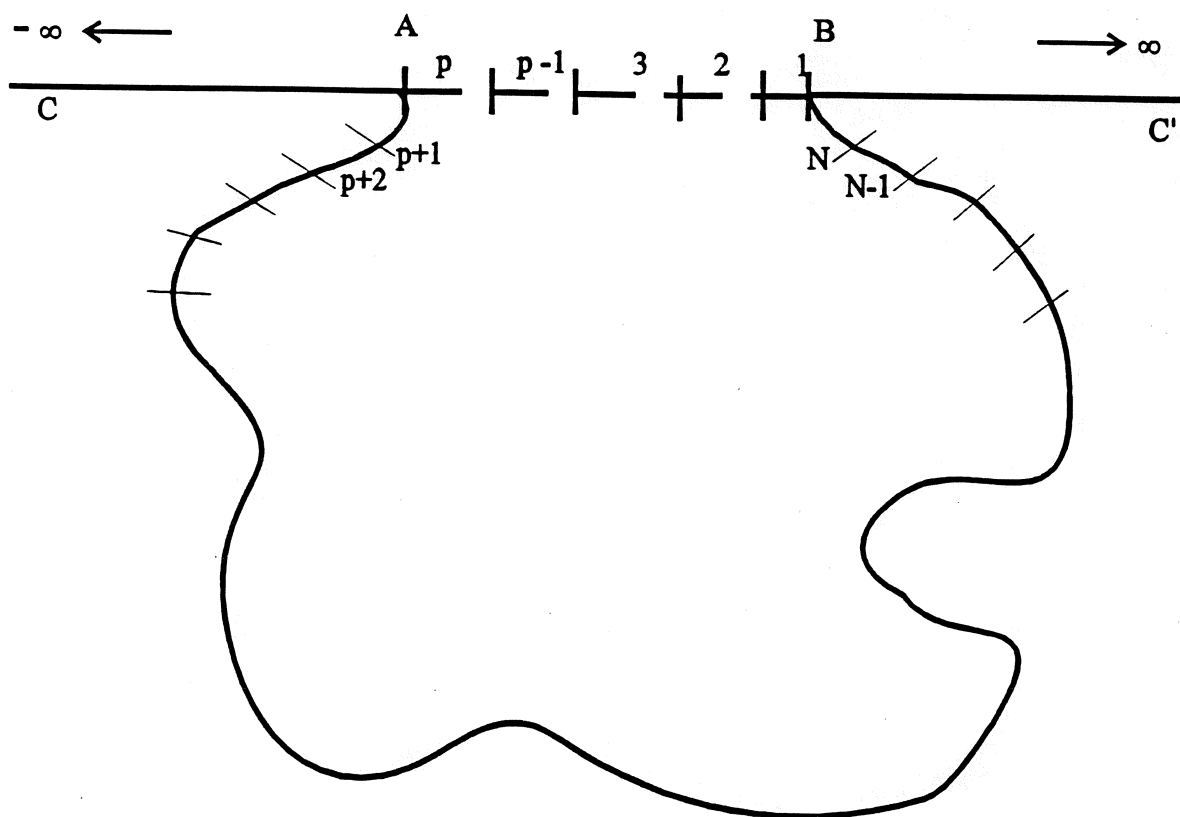
$$(G_n)_{ij} = \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr_{ij})) \Delta s_j, \quad (5.1.19b)$$

$$\underline{P} = \frac{\partial}{\partial n} f(\bar{x}_j), \quad (5.1.19c)$$

$$(G)_{ij} = H_0^{(1)}(kr_{ij}) \Delta s_j \quad (5.1.19d)$$

$$I = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad (5.1.19e)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, N$.



p = Número total de segmentos en la entrada de la bahía.

N = Número total de segmentos en la frontera de la bahía.

Fig. 5.4 Diagrama de la frontera de la bahía aproximada por segmentos en línea recta.

Debe ponerse especial cuidado en la evaluación de las matrices, principalmente en los términos en los que $i = j$.

Si la matriz inversa de $(b_0 G_n - I)$ existe, donde I es la matriz identidad, el vector $\underline{X}$ puede expresarse como:

$$\underline{X} = (b_0 G_n - I)^{-1} (b_0 G \underline{P}), \quad (5.1.20)$$

donde $(b_0 G_n - I)^{-1}$ es la inversa de la matriz $(b_0 G_n - I)$.

El vector $\underline{P}$ en la Ec. (5.1.19) involucra una derivada normal desconocida de la función de onda en la entrada de la cuenca, así como las derivadas normales de la función de onda en la frontera. Estos últimos son igual a cero, es decir, la derivada normal de la función de onda f para los segmentos $i = p + 1, \dots, N$ son cero. El vector $\underline{P}$ puede ser representado de la siguiente forma:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial n}(\bar{x}_1) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial n}(\bar{x}_p) \\ \frac{\partial f}{\partial n}(\bar{x}_p + 1) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial n}(\bar{x}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_p \end{bmatrix} = U_m \underline{C} = \sum_{j=1}^p \delta_{ij} C_j \quad (5.1.21)$$

Donde $U_m = \delta_{ij} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$, donde $i = 1, 2, 3, \dots, N$ y $j = 1, 2, 3, \dots$

.,p. El número total de segmentos en los que se divide la entrada de la cuenca es definido como p , los valores de C_j para $j = 1, 2, \dots, p$ son derivadas normales no conocidas de la función de onda f en la entrada de la cuenca, y lo representamos por el vector desconocido $\underline{C}$.

Sustituyendo la Ec.(5.1.21) dentro de la Ec.(5.1.19) y la Ec. (5.1.20) resulta la siguiente Ec. matricial:

$$(b_0 G_n - I) \underline{X} = (b_0 G U_m) \bullet \underline{C}, \quad (5.1.22)$$

que podemos reorganizar como:

$$\underline{X} = (b_0 G_n - I)^{-1} (b_0 G U_m) \underline{C} = M \underline{C}, \quad (5.1.23)$$

donde $M = (b_0 G_n - I)^{-1} \bullet b_0 G U_m$ es una matriz de $N \times p$ que se puede calcular directamente.

La ecuación (5.1.13) muestra que la función de onda sobre la frontera, $f(\bar{x}_i)$, puede expresarse como una función de la derivada normal desconocida de f en la entrada, i.e.:

$$f(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^p M_{ij} C_j, \quad (5.1.24)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

Si las derivadas normales de la función de onda $C_1, C_2, C_3, \dots, C_p$ en la entrada de la bahía (las cuales hasta el momento se desconocen) se pueden obtener, entonces la función de onda f en la frontera de la bahía puede calcularse directamente de la Ec.(5.1.24). Una vez que se conoce la función de onda sobre la frontera, se puede evaluar la función de onda de la Ec. (5.1.14) en el interior de la frontera expresado en forma discreta como:

$$f(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \sum_{j=1}^N \left[f(\bar{x}_j) \left[\frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) \right] - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} [f(\bar{x}_j)] \right] \Delta s_j, \quad (5.1.25)$$

donde $\bar{x}$ es un punto dentro de la bahía, r es la distancia entre el punto dentro de la cuenca y el punto fuente.

Con objeto de evaluar las derivadas en la entrada de la cuenca $C_1, C_2, \dots, C_p$, de la Ec. (5.1.24), la función de onda f_1 (fuera de la cuenca) en la entrada de la cuenca, debe expresarse como una función de las derivadas normales $C_1, C_2, \dots, C_p$. Igualando estas funciones de onda f_1 y f en la entrada de la cuenca, las derivadas normales $C_1, C_2, \dots, C_p$, pueden ser evaluadas de la expresión resultante y se puede tener la solución completa a el problema de la respuesta.

5.1.4 Función de Onda fuera de la Bahía (Región I)

La amplitud de onda η se expresa como un producto de la onda incidente de amplitud A_i , la función de onda $f(x,y)$ y la función que varía con el tiempo $e^{-i\omega t}$. Debido a que el tratamiento analítico es lineal, la amplitud de onda en la región I puede ser considerada como compuesta de tres partes separadas: una onda incidente, una onda reflejada, (para la línea de costa con la entrada de la cuenca cerrada), y una onda radiada emanando de la entrada de la cuenca. Entonces, la función de onda en la región fuera de la cuenca puede separarse como:

$$f_1 = f_i + f_r + f_3 \quad (5.1.26)$$

donde: f_i = representa a la función de onda incidente,

f_r = representa a la función de onda reflejada, considerando la entrada de la cuenca como cerrada,

f_3 = representa a la función de onda radiada debida a la presencia de la cuenca.

La ecuación (5.1.26) implica que en la región fuera de la cuenca

$\eta_I = A_I f_I e^{-i\alpha x}$ es equivalente a $\eta_I = A_I (f_i + f_r + f_3) e^{-i\alpha x}$. Esto implica que cualquier diferencia entre las amplitudes de onda para las tres partes: η_i , η_r y η_3 , comparadas con la amplitud de η_I son incorporadas en constantes contenidas dentro de las funciones de onda: f_i , f_r y f_3 .

La función de onda incidente f_i puede representarse en forma arbitraria, por ejemplo, una onda incidente periódica con un rayo que forma un ángulo α con respecto a el eje x (línea de costa en la figura 5.1) que puede representarse como:

$f_i(x, y) = \cos(ky \sin \alpha) e^{-ikx \cos \alpha}$. La función de onda reflejada f_r , se puede representar como $f_r(x, y) = f_i(x, -y)$. Para el caso de una onda periódica incidente con una onda de rayo perpendicular a la línea de costa ($\alpha = 90^\circ$), la función que representa la variación de x y y de la onda incidente, $f_i(x, y)$ puede ser representada por $\frac{1}{2} \cos ky$.

La función de onda f_I en la Ec. (5.1.26) debe satisfacer la ecuación de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 f_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_I}{\partial y^2} + k^2 f_I = 0$$

con las condiciones de frontera:

- a) $\frac{\partial f_I}{\partial n} = 0$ sobre la frontera $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ (ver fig. 5.1)
- b) $\frac{\partial f_I}{\partial n} = -\frac{\partial f}{\partial n}$ sobre la frontera $\overline{AB}$ (en la entrada de la cuenca)
- c) $\lim_{r^2 \rightarrow \infty} f_I = f_i + f_r$, y la condición de radiación (donde $r^2 = x^2 + y^2$).

La condición a) establece que la velocidad normal es cero en la línea de costa y la condición b) establece que la pendiente en la superficie del agua es continua en la

entrada de la cuenca y el valor en la región I (fuera de la bahía) es igual en magnitud a aquel obtenido en la entrada en la región II (dentro de la bahía). El signo negativo es adaptado con objeto de seguir con la convención de que la normal hacia afuera de el dominio de interés es considerada como positiva.

La última condición de frontera c) indica que la onda radiada en la región I emanando desde la entrada de la cuenca decaerá de cero en el infinito, entonces en el infinito sólo queda la onda estacionaria resultante de la onda incidente y reflejada.

La onda reflejada f_r se conoce una vez que la onda incidente f_i es especificada. Por lo tanto para completar la evaluación de la función de radiación de onda f_i , el problema principal es evaluar la función de radiación f_3 . ya que el tratamiento analítico es lineal, las funciones de f_i , f_r y f_3 debe satisfacer la ecuación (5.1.26).

En adición, las condiciones de frontera en región I, pueden ser simplificadas ya que la derivada normal de la función de onda es cero si se consideran las fronteras impermeables. En la frontera $\overline{CABC'}$ (ver fig. 5.1), $\frac{\partial}{\partial n}(f_i + f_r) = \frac{\partial}{\partial y}(f_i + f_r) = 0$, y de aquí la condición de frontera b) se puede reemplazar por $\frac{\partial f_3}{\partial n} = -\frac{\partial f}{\partial n}$ en la entrada de la cuenca (frontera $\overline{AB}$). Entonces la función de radiación f_3 en la región I (exterior de la cuenca), satisface la ecuación de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + k^2 f_3 = 0, \quad (5.1.26a)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$a) \quad \frac{\partial f_3}{\partial n} = 0 \quad \text{sobre la frontera } \overline{AC} \text{ y } \overline{BC} \quad (\text{ver fig. 5.1}),$$

- b) $\frac{\partial f_3}{\partial n} = -\frac{\partial f}{\partial n}$ sobre la frontera $\overline{AB}$ (en la entrada de la cuenca),
- c) $\lim_{r \rightarrow \infty} f_3 = 0$ y la condición de radiación (donde $r^2 = x^2 + y^2$).

Para construir una solución para la función de onda radiada f_3 en la ecuación (5.1.26 a) se usan nuevamente la identidad de Green y la solución fundamental $H_0^{(1)}(kr)$. La solución fundamental $H_0^{(1)}(kr)$ también satisface la condición de radiación en el infinito, i.e. la condición c) conforme $kr \rightarrow 0$, esta tiende a cero asintóticamente. Las condiciones de frontera son iguales sólo que ahora:

$$H_0^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(kr)}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})}.$$

Si la solución fundamental es multiplicada por la función que depende del tiempo $e^{-i\omega t}$, la expresión resultante representará una onda radiada hacia afuera satisfaciendo la condición de frontera c) (ver sección 5.1.1).

$$H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi(kr)}} e^{i(kr - \omega t - \frac{\pi}{4})}$$

La función de onda radiada f_3 en el exterior de la cuenca (Región I), puede ser expresada usando la fórmula de Weber de una forma similar como la ecuación (5.1.14) fue usada para la función de onda en la parte interior de la cuenca,

$$f_3(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \int_s \left[f_3(\bar{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} (f_3(\bar{x}_0)) \right] ds(\bar{x}_0),$$

donde $\bar{x}_0$ es el punto fuente $(x_0, 0)$ a lo largo del eje x , $\bar{x}$ es el punto en el campo (x, y) en el exterior de la cuenca y r es la distancia entre el punto en el campo y el punto fuente i.e. $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}$ (ver figura 5.1)

Con objeto de encontrar la función de onda radiada f_3 sobre el eje x , el punto campo (x, y) , se puede aproximar al eje x a el punto $(x_i, 0)$. (Esta aproximación es la misma que dentro de la cuenca, región II), por lo que se obtiene la siguiente ecuación :

$$f_3(x_i, 0) = -\frac{i}{2} \int \left[f_3(x_0, 0) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} (f_3(x_0, 0)) \right] ds(x_0, 0). \quad (5.1.27)$$

El término $\frac{\partial}{\partial n} [H_0^{(1)}(kr)]$ en la integral se puede expandir, para quedar $-k H_1^{(1)}(kr) \cdot \frac{\partial r}{\partial n}$. Sin embargo, debido a que el punto en el campo $\bar{x}_i(x_i, 0)$ y el punto de origen $\bar{x}_0(x_0, 0)$, están sobre el eje x , el término $\frac{\partial r}{\partial n}$ es igual a cero. Por consiguiente, el primer término dentro de la integral de la Ec. (5.1.27) es igual a cero por lo que puede ser eliminado. En el segundo término, $\frac{\partial f_3}{\partial n}(x_0, 0)$, la derivada normal de la función de radiación de onda f_3 , es igual a cero en todos los puntos excepto a través de la entrada de la cuenca. El elemento $ds(x_0, 0)$ se convierte a dx_0 , por que la integración se lleva a cabo a lo largo del eje x . Así que la ecuación (5.1.27) se simplifica como:

$$f_3(x_i, 0) = \frac{i}{2} \int_{AB} H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} [f_3(x_0, 0)] dx_0. \quad (5.1.28)$$

Usando la condición de frontera b) en la ecuación (5.1.26) y la ecuación (5.1.28) puede ser reescrita como:

$$f_3(x_i, 0) = -\frac{i}{2} \int_{AB} H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} [f_2(x_0, 0)] dx_0. \quad (5.1.28 a)$$

La Ec. (5.1.28 a) muestra que la función onda radiada f_3 en la entrada de la cuenca se puede expresar como una función de la derivada normal aún desconocida de la función de onda en la entrada de la cuenca calculada para el interior de la cuenca región II, es decir en términos de $\frac{\partial}{\partial n} f_2(x_0, 0)$.

La ecuación (5.1.28) se puede expresar como una sumatoria similar a la ecuación sección anterior:

$$f_3(x_i, 0) = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^p H_{ij} C_j, \quad (5.1.29)$$

donde la matriz $H_{ij} = H_0^{(1)}(kr_{ij}) \Delta s_j$, es una matriz de $p \times p$, r_{ij} es la distancia $|x_i - x_j|$ en donde x_i, x_j son los puntos medios del $i^{\text{ésimo}}$ y $j^{\text{ésimo}}$ segmentos de la entrada de la cuenca respectivamente. El término C_j en la Ec. (5.1.19) es la derivada normal de la función de onda f en el $j^{\text{ésimo}}$ segmento de la entrada de la cuenca, Δs_j es la longitud del $j^{\text{ésimo}}$ segmento en la entrada de la cuenca, y p es el número total de segmentos en que ha sido dividida la entrada de la cuenca.

Por que la función de onda incidente mas la función de onda reflejada en la entrada de la cuenca, $f_i + f_r$, es una constante; sustituyendo la Ec. (5.1.29) en la Ec. (5.1.26) la función de onda f_i en la entrada de la cuenca puede representarse como :

$$f_1(\bar{x}_i) = 1 + \left(-\frac{i}{2}\right) \sum_{j=1}^p H_{ij} C_j, \quad (5.1.30)$$

donde $i = 1, 2, \dots, p$. El primer término del lado derecho de la Ec. (5.1.30) representa la onda incidente mas la onda reflejada, si la entrada esta cerrada, que por

conveniencia se escoge como la unidad; el segundo término representa las contribuciones de la onda radiada a el total del sistema de onda.

5.1.5 Igualando la solución de cada región en la entrada de la Bahía

La ecuación (5.1.24) muestra que para la solución dentro de la cuenca, la función de onda en la frontera se puede expresar en términos de las derivadas normales de la función de onda f en la entrada de la cuenca C_j . La ecuación correspondiente en la región I, Ec.(5.1.30), muestra que la función de onda en la entrada de la cuenca pueda también ser expresada como una función de C_j . Como la superficie del agua debe ser continua a la entrada, las funciones de onda para las dos regiones (interior y exterior) deben ser iguales en la entrada, es decir, $f_I = f$. Así que igualando las dos soluciones a la entrada de la cuenca, uno es capaz de determinar la función desconocida C_j . Esto se hace de la siguiente forma:

Se toman las primeras np ecuaciones de la Ec. (5.1.24) para la función de onda f en la entrada de la cuenca:

$$f(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^p M_{i,j} C_j = M_p \cdot \underline{C}, \quad (5.1.31)$$

en la cual el índice $i = 1, 2, \dots, p$ (p es el número de segmentos en el que se dividió la entrada de la cuenca). La matriz M_p en la Ec. (5.1.31) es una matriz de $p \times p$ elementos obtenida de las primeras p columnas de la matriz M .

Igualando las ecuaciones (5.1.30) y (5.1.31), es decir, $f_I(\bar{x}_i) = f(\bar{x}_i)$, para $i = 1, 2, \dots, p$ se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$M_p \underline{C} = \underline{1} + b_0 H \underline{C}, \quad (5.1.32 a)$$

$$\underline{C} = (M_p - b_0 H)^{-1} \cdot \underline{1}, \quad (5.1.32 b)$$

donde M_p y H son cada una, matrices de $p \times p$, $(M_p - b_0 H)^{-1}$ es la inversa de la matriz $(M_p - b_0 H)$, el término b_0 es igual a $-\frac{i}{2}$ y $\underline{1}$ es el vector con cada p elemento igual a la unidad. Por lo tanto, el valor de la derivada normal para la función de onda en la entrada de la cuenca para cada uno de los np segmentos, $\underline{C}$ se obtiene de la Ec. (5.1.32 b).

Con las derivadas normales de la función de onda f en la entrada de la cuenca obtenidas por el procedimiento de igualación, la función de onda sobre la frontera se puede ahora calcular de la Ec. (5.1.24) y la función de onda en cualquier posición dentro de la cuenca puede ser determinada por la siguiente ecuación:

$$f(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \sum_{j=1}^N \left[f(\bar{x}_j) \left[\frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) \right] - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} [f(\bar{x}_j)] \right] \Delta s_j \quad (5.1.33)$$

o por una expresión equivalente:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= -\frac{i}{4} \sum_{j=1}^N \left[f(\bar{x}_j) \left[-k H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n} \right] - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} [f(\bar{x}_j)] \right] \Delta s_j \\ &= -\frac{i}{4} \left\{ \sum_{j=1}^N \left[f(\bar{x}_j) \left[-k H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n} \right] \right] \Delta s_j - \sum_{j=1}^P H_0^{(1)}(kr) \cdot C_j \cdot \Delta s_j \right\}, \end{aligned} \quad (5.1.34)$$

donde $\bar{x}_j$ es el punto medio del j^{esimo} segmento de la frontera, $\bar{x}$ es la posición del punto interior y r es la distancia entre $\bar{x}_j$ y $\bar{x}$, es decir $r = |\bar{x}_j - \bar{x}|$. Es necesario hacer notar que la Ec. (5.1.33) es escrita en la forma de la Ec. (5.1.34) por que la derivada normal de la función de onda en la frontera es cero excepto en la entrada.

5.2 ANALISIS NUMERICO

En este análisis se evalúan los elementos de las matrices definidas en las Ecs. (5.1.18) y (5.1.29), así como el método numérico para resolver la función f en la región II y el procedimiento de igualación.

5.2.1 Región II: Evaluación de matrices definidas en la ecuación (5.1.18)

a) Elementos fuera de la diagonal de la matriz G_n

La notación $\bar{x}_i(x_i, y_i)$ es usada para $i = 1, 2, \dots, N$, que se refiere a puntos interiores y la notación $\bar{x}_j(x_j, y_j)$ para $j = 1, 2, \dots, N$, es usada para puntos fuente.

Los elementos de $(G_n)_{ij}$ para $i \neq j$ se evalúan de la siguiente forma:

$$(G_n)_{ij} = \frac{\partial}{\partial n} \left[H_0^{(1)}(k r_{ij}) \right] \Delta s_j = -k H_1^{(1)}(k r_{ij}) \frac{\partial r_{ij}}{\partial n} \Delta s_j \quad (5.2.1)$$

en donde $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ es la distancia entre los puntos medios de los segmentos i^{esimo} y j^{esimo} de la frontera. La función de Hankel de orden uno y grado

uno, $H_1^{(1)}(kr_{ij})$ en la Ec. (5.2.1) puede expresarse en términos de las funciones de Bessel de orden 1:

$$H_1^{(1)}(kr_{ij}) = J_1(kr_{ij}) + i Y_1(kr_{ij}). \quad (5.2.2)$$

El término $\frac{\partial r_{ij}}{\partial n}$ en la Ec. (5.2.1) puede evaluarse como :

$$\left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial n} \right)_j = \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x}{\partial n} \right)_j + \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_j} \left(\frac{\partial y}{\partial n} \right)_j \quad (5.2.3)$$

la diferenciación es con respecto a la dirección normal hacia afuera n , i.e. $\left(\frac{\partial x}{\partial n} \right)_j$ y

$\left(\frac{\partial y}{\partial n} \right)_j$ pueden ser modificadas por diferenciación con respecto a la dirección

tangencial a lo largo de la frontera, $\frac{\partial}{\partial s}$. De acuerdo con la definición de la figura

5.5, la ecuación (5.2.3) puede reescribirse como:

$$\left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial n} \right)_j = \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)_j - \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_j} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)_j. \quad (5.2.4)$$

De la definición de r_{ij} , y calculando las derivadas $\frac{\partial r_{ij}}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial r_{ij}}{\partial y_j}$ podemos reescribir la Ec. (5.2.4) como:

$$\left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial n} \right)_j = -\frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)_j + \frac{y_i - y_j}{r_{ij}} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)_j \quad (5.2.5)$$

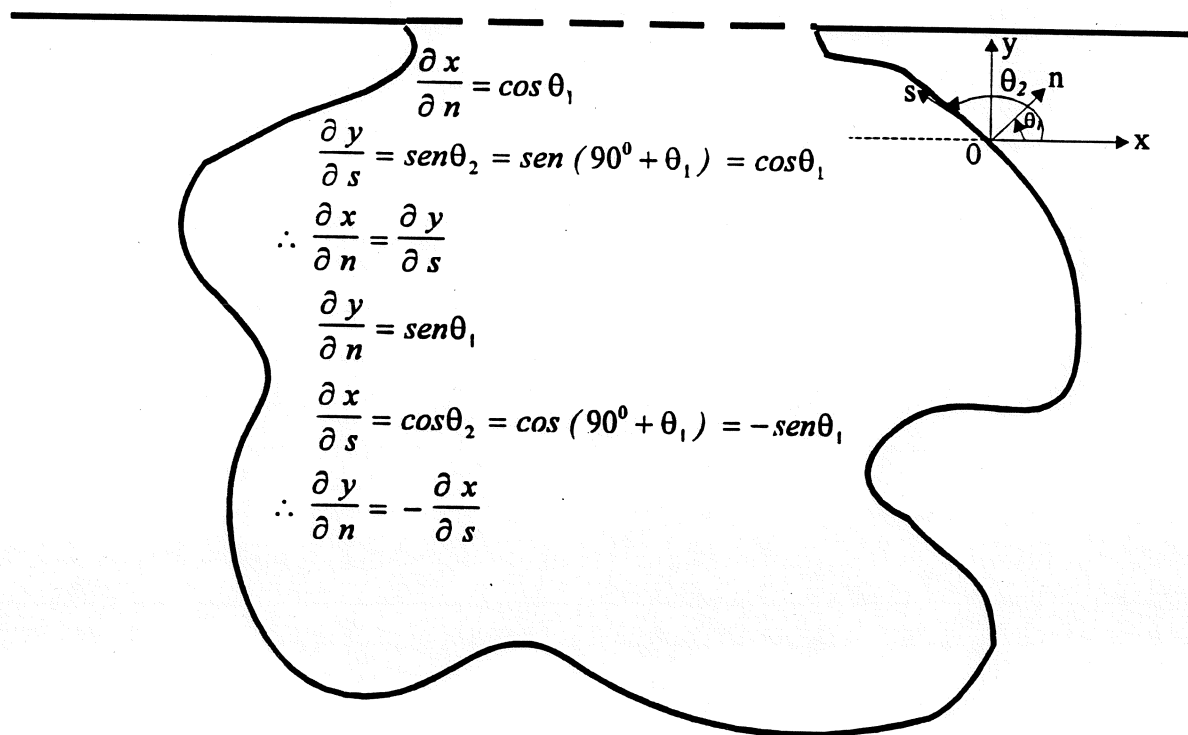


Fig. 5.5 Cambio de derivadas de la normal a dirección tangencial.

Entendiendo los términos $\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)_j$ y $\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)_j$ en forma de diferencias, la Ec.

(5.2.5) se tiene como:

$$\left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial n}\right)_j \approx -\frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)_j + \frac{y_i - y_j}{r_{ij}} \left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)_j .$$

b) Elementos de la diagonal de la matriz G_n

Los elementos de la diagonal de la matriz G_n corresponden a la condición de coincidencia entre un punto particular en la cuenca y un punto fuente.

Debido a la singularidad de la función de Hankel $H_1^{(1)}(kr)$ conforme $kr \rightarrow 0$, se debe poner especial atención al evaluar estos elementos de la diagonal.

La función de Bessel, $Y_1(x)$ en la Ec. (5.2.2) se puede expresar como una serie:

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\log \frac{x}{2} + \gamma \right) J_1(x) - \frac{1}{x} - \frac{x}{4} + \left\{ \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{2} \right\} \frac{x^3}{2^3 2!} - \dots \right] , \quad (5.2.6)$$

donde $\gamma = 0.577216$ (constante de Euler) y $J_1(x)$ es una función de Bessel de orden 1.

La parte real de la función de Hankel es $H_1^{(1)}(kr)$ la cual es $\approx \frac{kr}{2}$ cuando kr empieza a ser muy pequeño $J_1(kr) \rightarrow 0$ cuando $kr \rightarrow 0$. De (5.2.6), cuando $kr \rightarrow 0$, la función $Y_1(kr)$ puede aproximarse como:

$$Y_1(kr) \approx -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{kr} \right) \quad \text{para } kr \rightarrow 0. \quad (5.2.7)$$

Entonces los elementos de la diagonal de la matriz G_n pueden evaluarse en el límite conforme r tienda a cero (Ec. (5.2.1) para $i=j$).

$$\begin{aligned} (G_n)_{ii} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(-k H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n} \right) \Delta s_i = \lim_{r \rightarrow 0} -k [J_1(kr) + i Y_1(kr)] \frac{\partial r}{\partial n} \Delta s_i \\ &= 0 + i \frac{2}{\pi} \Delta s_i \left[\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial r}{\partial n}}{r} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

El paso más importante aquí es evaluar el término $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial r}{\partial n}$ en la Ec. (5.2.8), donde (x_i, y_i) son las coordenadas del punto medio del $j^{\text{ésimo}}$ segmento en la frontera, por lo tanto $\frac{\partial r}{\partial n}$ se puede expresar en forma similar a la Ec. (5.2.4):

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{x - x_i}{r} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right) + \frac{y - y_i}{r} \left(-\frac{\partial x}{\partial s} \right). \quad (5.2.9)$$

Los términos $(x - x_i)$, $(y - y_i)$, $\frac{\partial x}{\partial s}$ y $\frac{\partial y}{\partial s}$ en la Ec. (5.2.9) se pueden

expandir en series de Taylor en la vecindad de (x_i, y_i) :

$$x - x_i \approx (x_s)_i \Delta s + (x_{ss})_i \frac{(\Delta s)^2}{2!} + (x_{sss})_i \frac{(\Delta s)^3}{3!} + \dots \quad (5.2.10)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} \approx (x_s)_i + (x_{ss})_i \Delta s + (x_{sss})_i \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \dots \quad (5.2.11)$$

Donde el subíndice s se refiere a la diferenciación con respecto de s (el índice i significa que los valores de interés son evaluados en el punto medio del $i^{\text{ésimo}}$ segmento). Las expansiones $(y - y_i)$ y $\frac{\partial y}{\partial s}$ pueden ser hechas exactamente de la

misma forma cambiando x por y en las ecuaciones (5.2.10) y (5.2.11).

Así el término $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial r}{\partial n}}{r}$ de la Ec. (5.2.9) se puede evaluar usando la definición

de r . Las Ecs. (5.2.9), (5.2.10) y (5.2.11) quedan como:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial r}{\partial n}}{r} &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial r}{\partial n}}{r} = \frac{1}{r^2} \left((x - x_i) \frac{\partial y}{\partial s} + (y - y_i) \left(-\frac{\partial x}{\partial s} \right) \right) \\ &\approx \frac{\left((y_s)_i + (y_{ss})_i \Delta s + \dots \right) \left((x_s)_i \Delta s + (x_{ss})_i \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \dots \right) - \left((x_s)_i + (x_{ss})_i \Delta s + \dots \right) \left((y_s)_i \Delta s + (y_{ss})_i \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \dots \right)}{\left((x_s)_i \Delta s + (x_{ss})_i \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \dots \right)^2 + \left((y_s)_i \Delta s + (y_{ss})_i \frac{(\Delta s)^2}{2!} + \dots \right)^2} \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

El numerador de la ecuación (5.2.12) puede ser reescrito como:

$(-x_{ss} y_s + x_s y_{ss})_i \frac{(\Delta s)^2}{2!} + o(\Delta s^3)$ donde $o(\Delta s^3)$ son términos de orden $(\Delta s)^3$.

El denominador de la Ec. (5.2.12) puede ser arreglado como:

$(x_s^2 + y_s^2)_i (\Delta s)^2 + o(\Delta s^3)$, esta expresión puede simplificarse mas hasta convertirse como: $(\Delta s)^2 + o(\Delta s^3)$ esto viene de la Fig. 5.5 ya que el término $x_s^2 + y_s^2$ es igual a uno.

Entonces, despreciando los términos de mayor orden en la Ec. (5.2.12), esta expresión puede aproximarse a:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial r}{\partial n}}{r} \approx \frac{(-x_{ss} y_s + x_s y_{ss})_i}{2} \quad (5.2.13)$$

Por lo tanto los elementos de la diagonal de la matriz G_n pueden encontrarse de la Ec. (5.2.8) y la aproximación descrita en (5.2.13):

$$(G_n)_{ii} = \frac{i}{\pi} (x_s y_{ss} - x_{ss} y_s)_i \Delta s_i \quad (5.2.14)$$

En la ecuación anterior la primera y segunda derivada de x_s , y_s , x_{ss} y y_{ss} son evaluados en el punto medio del i^{esimo} segmento de la frontera.

Para una frontera que originalmente se compone de líneas rectas, los valores de $x_s y_{ss}$ y $x_{ss} y_s$ en la Ec. anterior son igual a cero, por que las segundas derivadas x_{ss} y y_{ss} son cero, por lo tanto los elementos de la diagonal de la matriz G_n son iguales a cero. Para una frontera curvada que ha sido aproximada por segmentos

rectos, la expresión de la primera y segunda derivada x_s y x_{ss} puede ser escrita en forma diferencial como:

$$x_s = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta s_i} \quad (5.2.15a)$$

$$x_{ss} = \frac{6}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i} - \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta s_i + \Delta s_{i-1}} \right] \quad (5.2.15b)$$

donde x_i es la coordenada de el punto medio del i^{esimo} segmento de la frontera, $x_{i-\frac{1}{2}}$ es la coordenada x de el principio del i^{esimo} segmento de la frontera y $x_{i+\frac{1}{2}}$ es la coordenada x de el final del i^{esimo} segmento de la frontera; Δs_{i-1} , Δs_i y Δs_{i+1} son las longitudes del $(i-1)^{\text{esimo}}$, i^{esimo} , y $(i+1)^{\text{esimo}}$ segmentos de la frontera. Las derivadas y_s , y_{ss} pueden calcularse de la misma forma únicamente cambiando x por y en la Ecs. 5.2.15 a y b.

c) Elementos fuera de la diagonal de la matriz G

Los elementos de $(G)_{ij}$ para $i \neq j$ se pueden evaluar como:

$$(G)_{ij} = H_0^{(1)}(kr_{ij}) \Delta s_j = \left[J_0(kr_{ij}) + i Y_0(kr_{ij}) \right] \Delta s_j \quad (5.2.16)$$

Para un valor dado de kr_{ij} , en la Ec. (5.2.16), las funciones $J_0(kr_{ij})$ y $Y_0(kr_{ij})$ son funciones conocidas.

d) Elementos de la diagonal de la matriz G

Los elementos de la diagonal de la matriz G , corresponden a los casos en que $i = j$ en la Ec. (5.2.16) de la misma forma, debido al comportamiento singular de la función $Y_0(kr)$, se debe poner especial atención al evaluar los elementos de la diagonal. Usando la fórmula asintótica de $J_0(kr)$ y $Y_0(kr)$ conforme el argumento kr se aproxima a cero, se obtiene la expresión :

$J_0(kr) \approx 1$ y $Y_0(kr) \approx \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{kr}{2} + \gamma \right)$. Por lo tanto, conforme $kr \rightarrow 0$, la función de Hankel $H_0^{(1)}(kr)$ puede expresarse como:

$$H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + i Y_0(kr) \approx 1 + i \left[\frac{2}{\pi} \left(\log \frac{kr}{2} + \gamma \right) \right] \quad \text{Para } kr \rightarrow 0.$$

donde γ es la constante de Euler.

Usando la fórmula asintótica para la función de Hankel $H_0^{(1)}(kr)$, los elementos de la diagonal de la matriz G se pueden evaluar haciendo la siguiente integración para determinar valor promedio de esta función sobre la longitud del segmento de interés:

$$\begin{aligned} (G_n)_{ii} &= \left[\frac{1}{\frac{1}{2} \Delta s_i} \int_0^{\frac{1}{2} \Delta s_i} \left[1 + i \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{kr}{2} + \gamma \right) \right] dr \right] \bullet \Delta s_i \\ &= \left[1 + i \frac{2}{\pi} \left[\log \left(\frac{k \Delta s_i}{4} \right) - 1 + \gamma \right] \right] \Delta s_i \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$.

5.2.2 Región II: Método de solución de la Función de Onda f

En la sección anterior se discutió los métodos para evaluar los elementos de las matrices G y G_n , el siguiente paso es evaluar la matriz M como se definió en la Ec. (5.1.23), con objeto de evaluar la variación de la función de onda f a lo largo de la frontera de la cuenca. Como se muestra en la Ec. (5.1.24) la función de onda f a lo largo de la frontera de la cuenca se puede expresar como una función de la derivada normal de la función de onda f en la entrada de la cuenca, es decir, $C_1, C_2, \dots, C_p$.

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^p M_{ij} C_j$$

donde M_{ij} es una matriz de $N \times p$ la cual es la solución de la siguiente ecuación matricial, que una vez rearrreglada de aquella mostrada en la Ec. (5.1.23) queda como:

$$(b_0 G_n - I) M = b_0 G U_m. \quad (5.2.18)$$

La matriz $(b_0 G_n - I)$ es una matriz de $N \times N$, sus elementos pueden determinarse como se describió en la subsección 5.2.1. El lado derecho de la Ec. (5.2.18), la matriz $b_0 G U_m$, es una matriz de $N \times p$, donde U_m es definida por la Ec. (5.1.21).

5.2.3 Región I: Evaluación de la matriz H definida por la ecuación (5.1.29)

La matriz H definida en la Ec. (5.1.29) se puede evaluar igual que la matriz G . La matriz H será llamada la *matriz de radiación* por que es la parte principal de la función de onda radiada $f_3(\bar{x})$ descrita en la ecuación (5.1.29), esta es una matriz de $p \times p$ y sus elementos fuera de la diagonal pueden ser evaluados en una forma similar a la mostrada en la Ec. (5.2.16):

$$(H)_{ij} = H_0^{(1)}(kr_{ij}) \Delta s_j = \left[J_0(kr_{ij}) + i Y_0(kr_{ij}) \right] \Delta s_j \quad (5.2.19)$$

para $i \neq j$ donde $i, j = 1, 2, \dots, p$.

Los elementos de la diagonal se pueden evaluar de manera similar a la Ec. (5.2.17).

$$(H)_{ii} = \left[1 + i \frac{2}{\pi} \left(\log \left(\frac{k \Delta s_i}{4} \right) - 1 + \gamma \right) \right] \Delta s_i \text{ para } i = 1, \dots, p. \quad (5.2.20)$$

5.2.4 Entrada de la Bahía: Procedimiento de igualación

Después de resolver la Ec. (5.2.18) para la matriz M de $N \times p$ y evaluar los elementos de la matriz H señalado en la sección 5.2.3, el siguiente paso es igualar las dos soluciones de la región I y la región II en la entrada de la cuenca. La Ec. (5.1.32) es el resultado de este procedimiento de igualación. A continuación se describe como se obtiene el vector $\underline{C}$ (derivada normal de la función de onda en la entrada de la cuenca). La Ec. (5.1.32) se puede reescribir como:

$$(M_p - b_0 H) \underline{C} = \underline{1} \quad (5.2.21)$$

donde M_p es una matriz de $p \times p$. Para resolver (5.2.21) para el vector $\underline{C}$, se invierte la matriz compleja, que en este caso es de tamaño $p \times p$ y la solución $\underline{C}$ es un vector de $p \times 1$.

Una vez que se evaluó $\underline{C}$, el procedimiento para determinar las cantidades de interés tales como la respuesta de la cuenca, la distribución de amplitudes, etc. se describen en la sección 6.

5.3 Discretización de la Bahía de Todos Santos

Se digitalizó la Bahía de Todos Santos para realizar su poligonal, haciéndose algunas aproximaciones como son: cerrar la entrada sur de la bahía, la entrada del puerto y la entrada del Estero de Punta Banda. Estas aproximaciones se deben a que los forzamientos son principalmente por esa entrada, por las dimensiones de las otras cuencas (estero de Punta Banda rada portuaria), no juegan un papel importante (ver figura 5.6). Por ser requerimiento del modelo se dividió la bahía en número determinado de segmentos, en algunos casos 43 divisiones, de los cuales 4 segmentos corresponden a la entrada de la bahía (np), otros fueron 45 segmentos de los que 6 son los puntos correspondientes a la misma entrada (np) y otro con 47 segmentos de los cuales 8 divisiones son de la entrada de la bahía (np). Todo lo anterior se realizó con el objetivo de observar el comportamiento de la bahía a diferentes forzamientos.

Se corrió el modelo variando las longitudes de onda λ (de 1 hasta 100 km), así como también se varió la profundidad (50 y 100 m); se usó la poligonal de la Bahía de Todos Santos para obtener numéricamente los valores de la función de onda en dichas longitudes, así como sus amplificaciones para diferentes puntos.

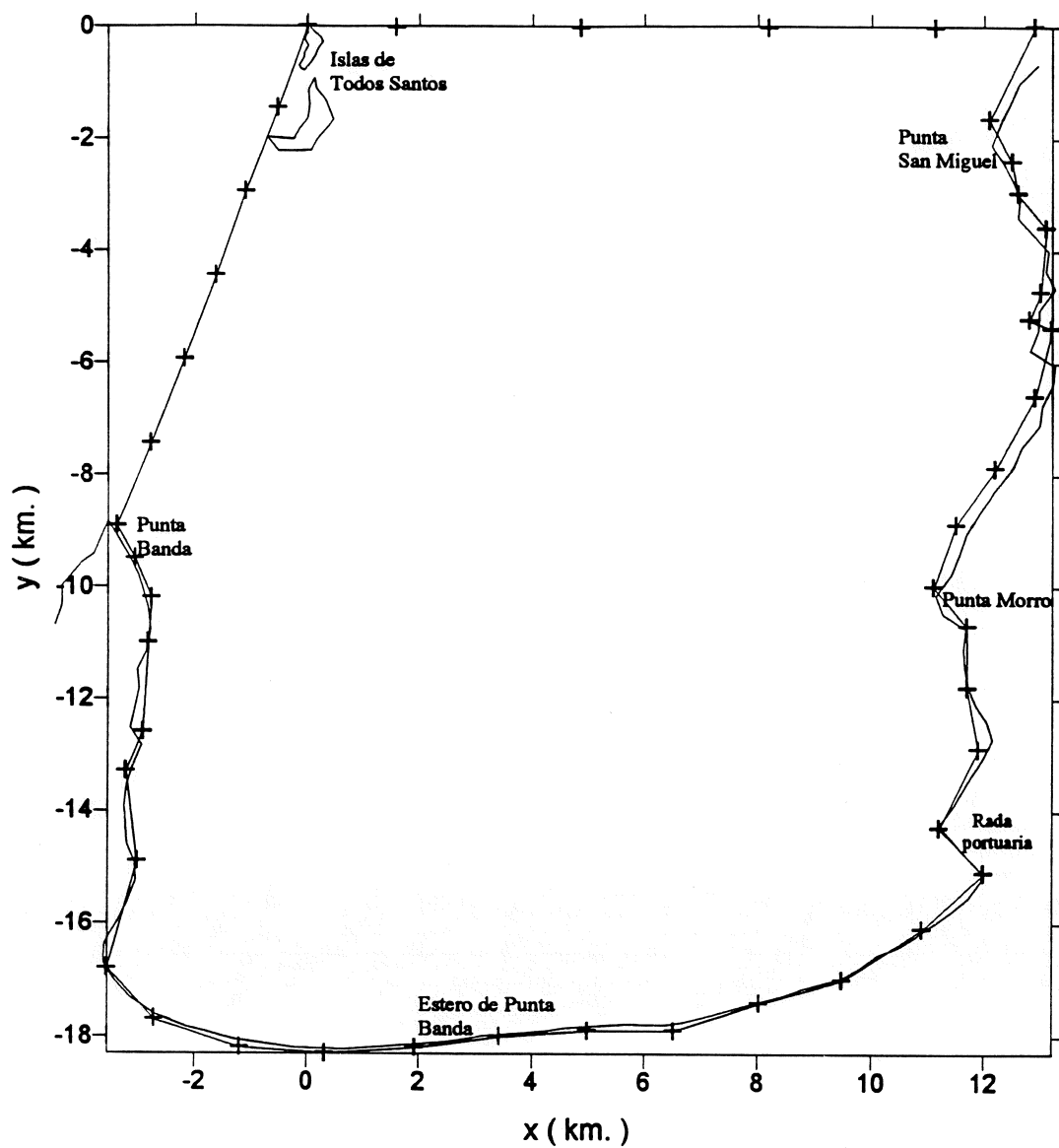


Figura 5.6 Poligonal usada en el modelo sobrepuesta en la Bahía de Todos Santos y sus segmentos.

Como fue mencionado en el Capítulo 5, usando la teoría para una cuenca de forma arbitraria, la frontera de la cuenca debe ser dividida en un número suficientemente grande de segmentos. Suficiente significa que los resultados al usar la teoría aproximada debe ser similar a la solución analítica dentro de cierto límite. Conforme el número de segmentos se incrementa, la precisión de la teoría de la aproximación comparada con la solución exacta mejorará, sin embargo esto implica mayor espacio de almacenamiento y mayor número de cálculos y por tanto de tiempo de cómputo.

Se deben de tener las siguientes consideraciones para determinar la longitud de el segmento, cuando la frontera es dividida y reemplazada por segmentos estos deben ser una buena aproximación de la frontera, y la longitud de cada segmento Δs , debe ser pequeña con la longitud de onda λ , esto nos asegurará una representación adecuada de la onda, un parámetro útil de considera es el producto $k \Delta s$.

Se utilizó el equipo de computo que se tiene en el Departamento de Oceanografía Física del IIO (Computadoras personales), modelos 486 DX y Pentium. El modelo está escrito en lenguaje Fortran, las gráficas se hicieron usando librerías de análisis de datos y graficado de Matlab (MathWorks), Surfer (Golden Software) y Corel Draw (Corel Corporation).

6. PRESENTACION Y DISCUSION DE RESULTADOS

6.1 CONFIRMACION DEL ANALISIS NUMERICO

El análisis teórico para una cuenca de forma arbitraria se presentó en el Capítulo 5. Sin embargo antes de obtener las oscilaciones inducidas por ondas en una cuenca de forma real, es necesario confirmar que el método presentado y la aproximación numérica correspondiente son correctos. Por lo que la solución aproximada obtenida se compara con la solución exacta de la ecuación de Helmholtz para dos cuencas de geometría sencilla (circular y rectangular).

Dos tipos de pruebas se hicieron para confirmar el análisis numérico. En la primera prueba, se compara la solución numérica para dos tipos de cuencas de geometría sencilla con fronteras cerradas. Aunque esta situación no corresponde al problema de oscilaciones inducidas en cuencas, ya que las condiciones de frontera impuestas en esta prueba (ver pasos 2 y 3) no son las condiciones de frontera prescritas para el problema de oscilaciones en cuencas (ver Sec. 5.1). Mas bien, en esta prueba se pretenden como un ejercicio matemático en el sentido de confirmar analíticamente el método aproximado que será usado en resolver el problema de obtener las oscilaciones de onda inducidas en una cuenca de forma arbitraria.

La segunda prueba simula las condiciones usadas en la teoría para cuencas de forma arbitraria pero para una cuenca de forma circular con una pequeña entrada (2θ). Para esta geometría, las coordenadas dentro de la cuenca son separables y se puede usar un método diferente al usado en la región II. El análisis teórico para esta cuenca basado en esta aproximación se presenta en el Apéndice 2.

6.1.1 PRUEBA 1.

El procedimiento para probar el programa se resume en los siguientes pasos:

- 1) Se obtiene la solución teórica de la función de onda que satisface la ecuación de Helmholtz $\nabla^2 f + k^2 f = 0$, en el dominio de interés.
- 2) Basado en la solución teórica, son calculados el valor de la función de onda, f en la frontera de el dominio, su derivada normal $\partial f / \partial n$ en la frontera de el dominio y el valor de f en cualquier posición dentro de el dominio (debe denotarse que las fronteras pudieran no ser sólidas)
- 3) La frontera de el dominio es dividida en N segmentos, el promedio de el valor teórico de f y $\partial f / \partial n$ en cada segmento son calculados.
- 4) Los valores teóricos promediados de la derivada normal $\partial f / \partial n$ para cada segmento en la frontera son usados para calcular el valor de f para cada segmento correspondiente por el método descrito en la Subsección 5.2.2. Una prueba de este método aproximado es la comparación de este valor calculado con el valor teórico de f en la frontera de el dominio. Cualquier diferencia entre los dos resultados puede atribuirse a la aproximación de convertir la ecuación integral (Ec. 5.5.16) a la ecuación matricial Ec. (5.5.18).
- 5) El valor calculado de f (paso 4) y el valor teórico de $\partial f / \partial n$ en la frontera de el dominio son usados para calcular el valor de f en varios puntos dentro de el dominio usando Ec. (5.1.34). Los valores de f así obtenidos, son comparados con los valores teóricos. La diferencia es el error acumulado de el paso 4 mas el error debido a usar

Ec. (5.1.34), la cual ha sido usada como una aproximación a la solución exacta Ec. (5.1.14).

6) Los valores teóricos de f y $\partial f / \partial n$ en la frontera de el dominio son usados para calcular el valor de f dentro de la cuenca y usan la Ec. (5.1.34). Los valores de f así obtenidos son comparados con los valores teóricos. La diferencia es únicamente debida al uso de la Ec. (5.1.34) la cual aproxima la solución exacta, Ec. (5.1.14).

6.1.1.1 Cuenca Circular

La forma de la cuenca es definida en la Fig. 6.1. La ecuación de Helmholtz en coordenadas polares queda como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + k^2 f = 0 \quad (6.1.1)$$

cuya solución particular es:

$$f(r, \theta) = J_1(kr) \cos \theta.$$

Suponiendo que la frontera de el dominio se encuentra en $r = a$, entonces el valor de f y $\partial f / \partial n$ sobre la frontera se expresan como:

$$f(a, \theta) = J_1(ka) \cos \theta \quad (6.1.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}(a, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r}(a, \theta) = \left[k J_0(ka) - \frac{1}{a} J_1(ka) \right] \cos \theta. \quad (6.1.3)$$

La frontera es dividida en varios segmentos, en cada uno de ellos el valor teórico de las funciones $f(a, \theta)$ y $\partial f / \partial n(a, \theta)$ se evalúa de la forma siguiente:

$$(\bar{f})_i = \frac{J_1(ka)}{\theta_{i+\frac{1}{2}} - \theta_{i-\frac{1}{2}}} \int_{\theta_{i-\frac{1}{2}}}^{\theta_{i+\frac{1}{2}}} \cos \theta d\theta = J_1(ka) \frac{\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}}}{\theta_{i+\frac{1}{2}} - \theta_{i-\frac{1}{2}}} \quad (6.1.4)$$

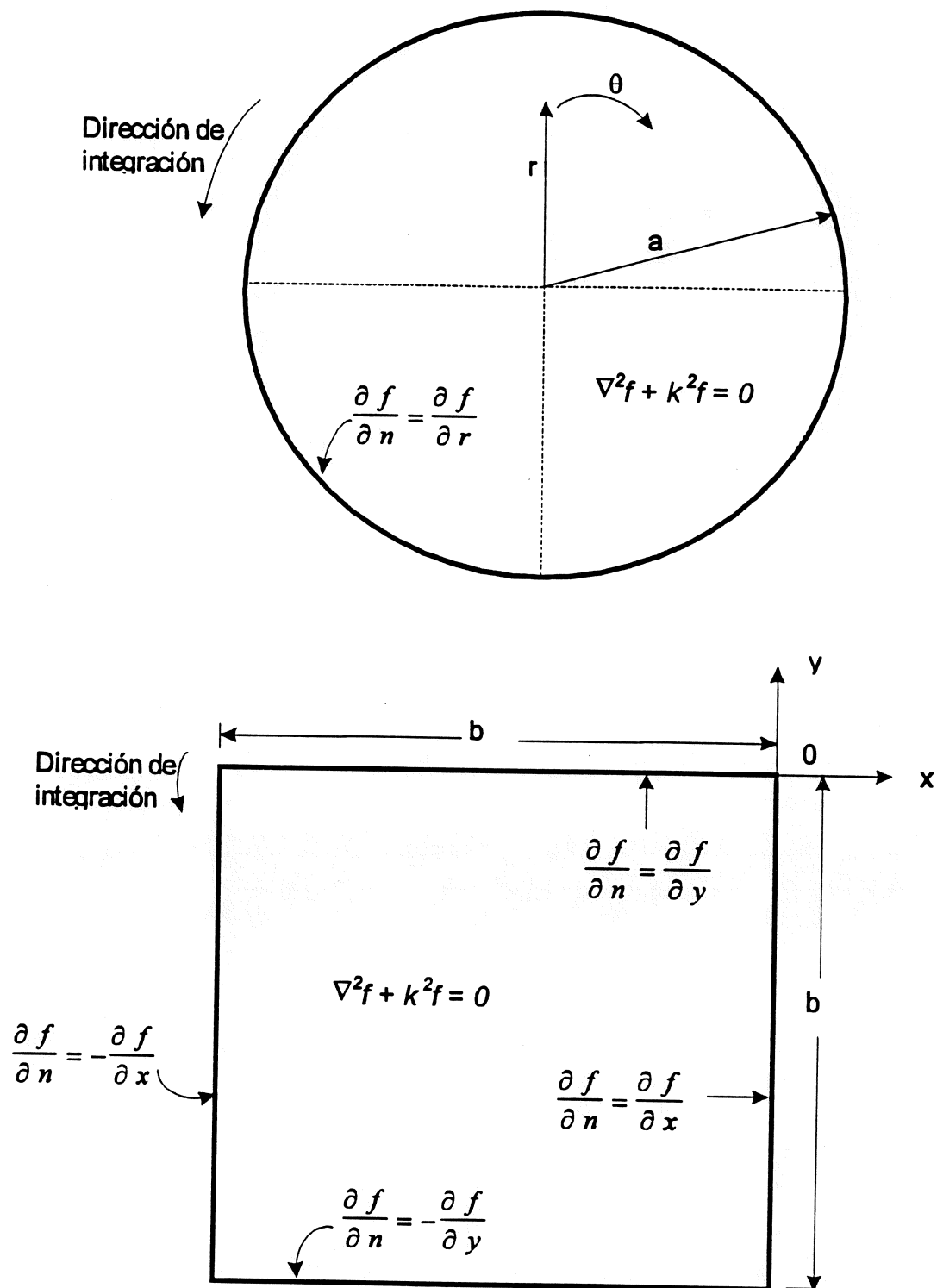


Figura 6.1 Cuencas cerradas circular y cuadrada.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_i = \frac{k J_0(ka) - \frac{1}{a} J_1(ka)}{\theta_{i+\frac{1}{2}} - \theta_{i-\frac{1}{2}}} \int_{\theta_{i-\frac{1}{2}}}^{\theta_{i+\frac{1}{2}}} \cos \theta d\theta$$

$$= \left[k J_0(ka) - \frac{i}{a} J_1(ka) \right] \frac{\sin \theta_{i+\frac{1}{2}} - \sin \theta_{i-\frac{1}{2}}}{\theta_{i+\frac{1}{2}} - \theta_{i-\frac{1}{2}}} \quad (6.1.5)$$

donde $(\bar{f})_i$ y $\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_i$ son los valores teóricos promedio sobre la frontera de el dominio de f y $\partial f / \partial n$ para el $i^{\text{ésimo}}$ segmento, $(a, \theta_{i-\frac{1}{2}})$ son las coordenadas de el principio de el $i^{\text{ésimo}}$ segmento, y $(a, \theta_{i+\frac{1}{2}})$ son las coordenadas de el final de el $i^{\text{ésimo}}$ segmento de la frontera.

En el paso 4, el valor de $\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_i$, presentado en la Ec. (6.1.5) para cada segmento es usado para calcular el valor de f en cada segmento en la frontera por el método aproximado de la Sec. 5.1.2. Estos valores calculados los denotaremos como $(\bar{f})_{\text{aprox.}}$. El valor de $(\bar{f})_{\text{aprox.}}$ y $(\bar{f})$ deberán de ser muy cercanos si el método aproximado es correcto.

Después de que los valores de f en los puntos interiores se calcularon, el valor de f en cualquier punto interior se calculan usando la Ec. (5.1.34) (paso 5).

Los resultados de el paso 6 se obtienen usando el valor teórico de f y $\partial f / \partial n$ en la frontera Ecs. (6.1.4) y (6.1.5) para calcular el valor de f en el punto interior aplicando la Ec. (5.1.34). La diferencia entre los valores teóricos y los aproximados,

es únicamente debido a el uso de la Ec. (5.1.34) la cual aproxima la solución exacta de Ec. (5.1.14).

Debe notarse que el paso 6 aplicado a un dominio dado no corresponde a un problema de valores a la frontera realistico matemáticamente, simplemente porque el valor de f y $\partial f / \partial n$ en la frontera no se dan por adelantado, normalmente uno o el otro son dados. Sin embargo da una indicación de que tan buena es la aproximación de Ec. (5.1.34) si se proveen valores adecuados de f y $\partial f / \partial n$. El paso 5 corresponde a un problema matemático realistico de valores en la frontera y de hecho es básicamente el procedimiento usado para resolver el problema de resonancia, es decir: dado un valor particular de $\partial f / \partial n$ en la frontera, calcular el valor de f en la frontera y finalmente calcular el valor de f en cualquier punto interior (r, θ) .

Es de esperarse que si el número de segmentos en el cual la frontera de el dominio es dividida se incrementa, los resultados de el método aproximado estarán mejor de acuerdo con los resultados teóricos. La aproximación de la cuenca para diferente número de segmentos $N = 9$ y 36 (cada segmento corresponde a 40° y 10° de el ángulo central respectivamente) es presentada en la Fig. 6.2. Comparando los resultados de la aproximación numérica con los teóricos para los diferentes pasos (ver Fig. 6.3), conforme se incrementa el número de segmentos, los resultados de el método aproximado mejoran notablemente.

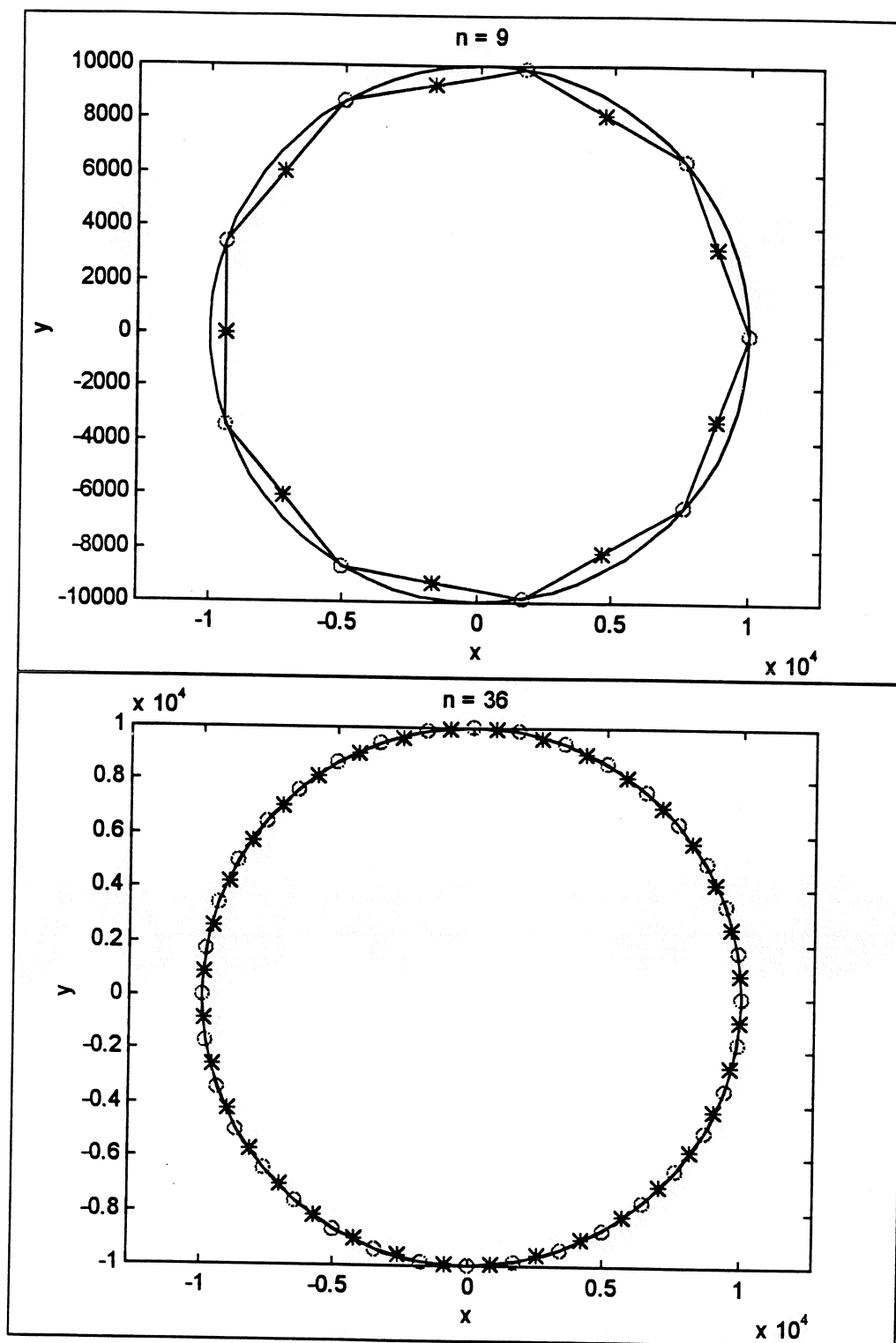


Figura 6.2 Aproximación de una cuenca circular con diferente número de segmentos en la frontera.

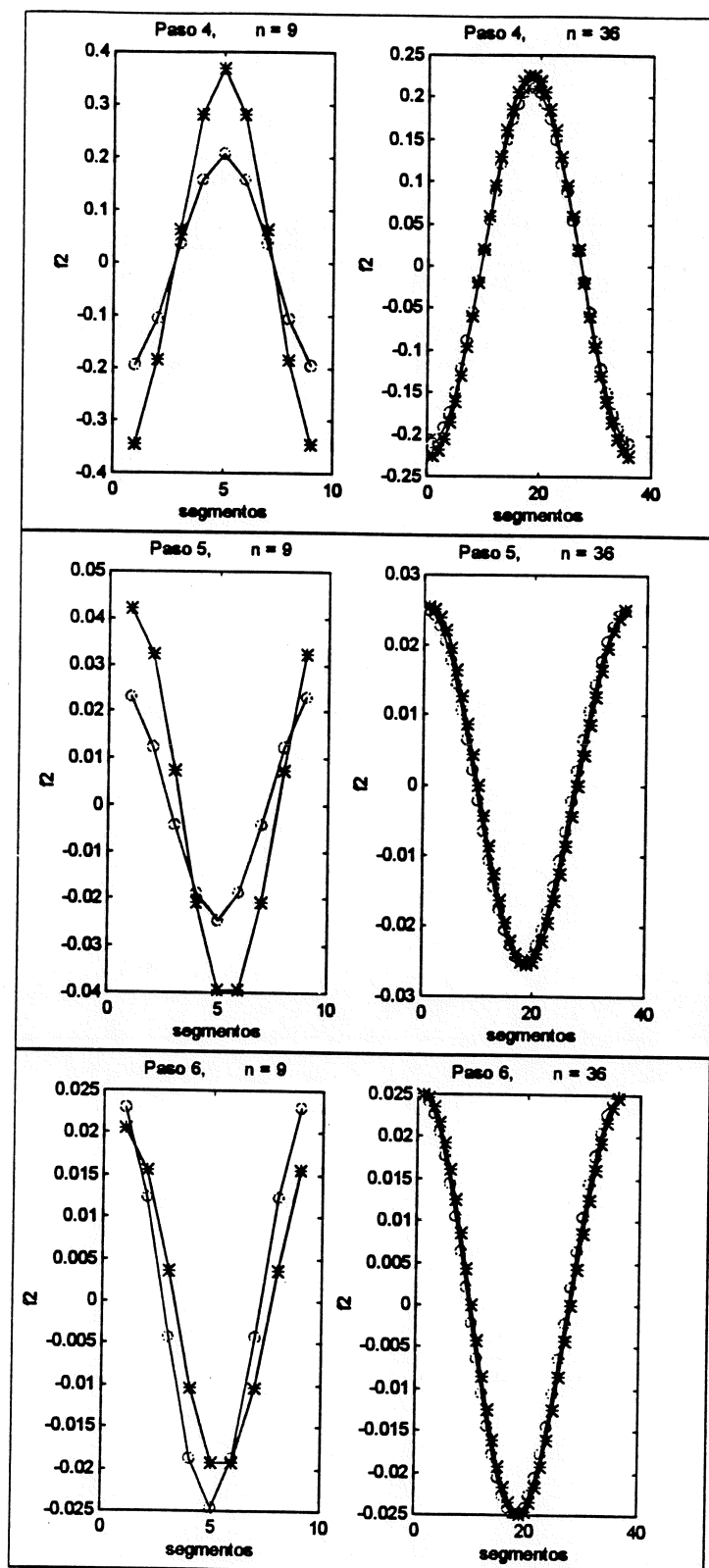


Figura 6.3 Comparación entre la solución analítica (o) y numérica (*) para diferente número de discretizaciones.

6.1.1.2 Cuenca Rectangular

La forma de la cuenca es definida en la Fig. 6.1. Una solución particular simple de la función f que satisface la Ec. de Helmholtz, puede escogerse como:

$$f(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 - k^2}y\right) \quad (\text{para } k < \frac{\pi}{2b}) \quad (6.1.6)$$

$$f(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right) \cos\left(\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{2b}\right)^2}y\right) \quad (\text{para } k > \frac{\pi}{2b}) \quad (6.1.7)$$

La derivada normal hacia afuera de la función f en la frontera de el dominio puede ser evaluada de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{para } y = 0, \quad -b \leq x \leq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{para } y = -b, \quad -b \leq x \leq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{para } x = 0, \quad -b \leq y \leq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{para } x = -b, \quad -b \leq y \leq 0.$$

Se siguen los mismos pasos que para la cuenca circular. La frontera de la cuenca cuadrada es dividida en 20 y 40 segmentos de igual tamaño (ver Fig. 6.4). El valor teórico de f en cualquier punto (x, y) puede evaluarse de la Ec. (6.1.6) o Ec. (6.1.7) una vez que el valor de el número de onda k sea fijado.

De la misma forma que para la cuenca circular, la Fig. 6.5 presenta los resultados de la aproximación numérica con los teóricos para los diferentes pasos. Conforme se incrementa el número de segmentos, los resultados de el método aproximado se aproximan mas a los teóricos.

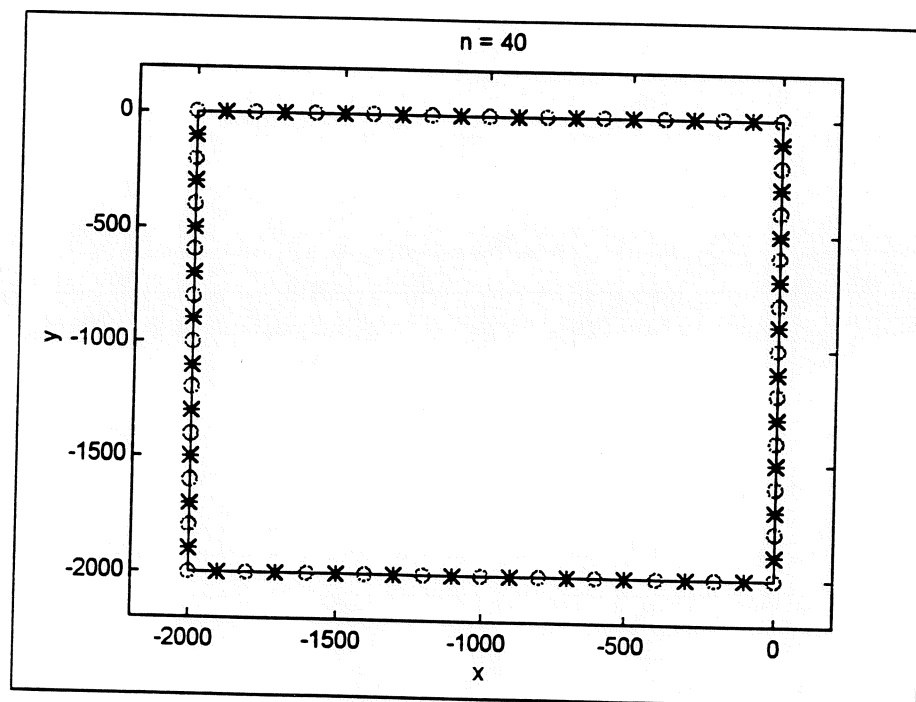
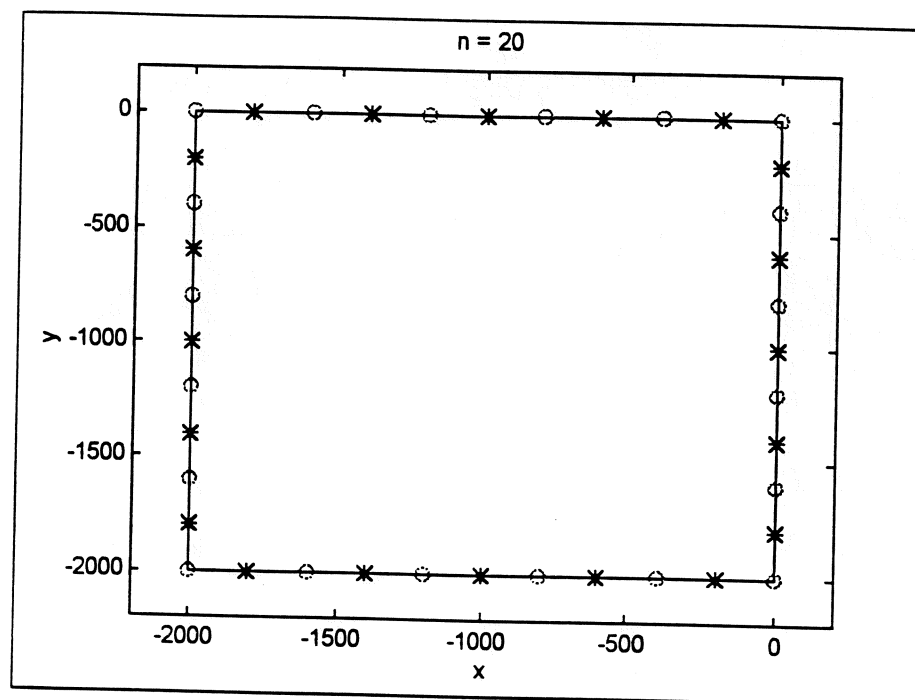


Figura 6.4 Aproximación de una cuenca cuadrada con diferente número de segmentos en la frontera.

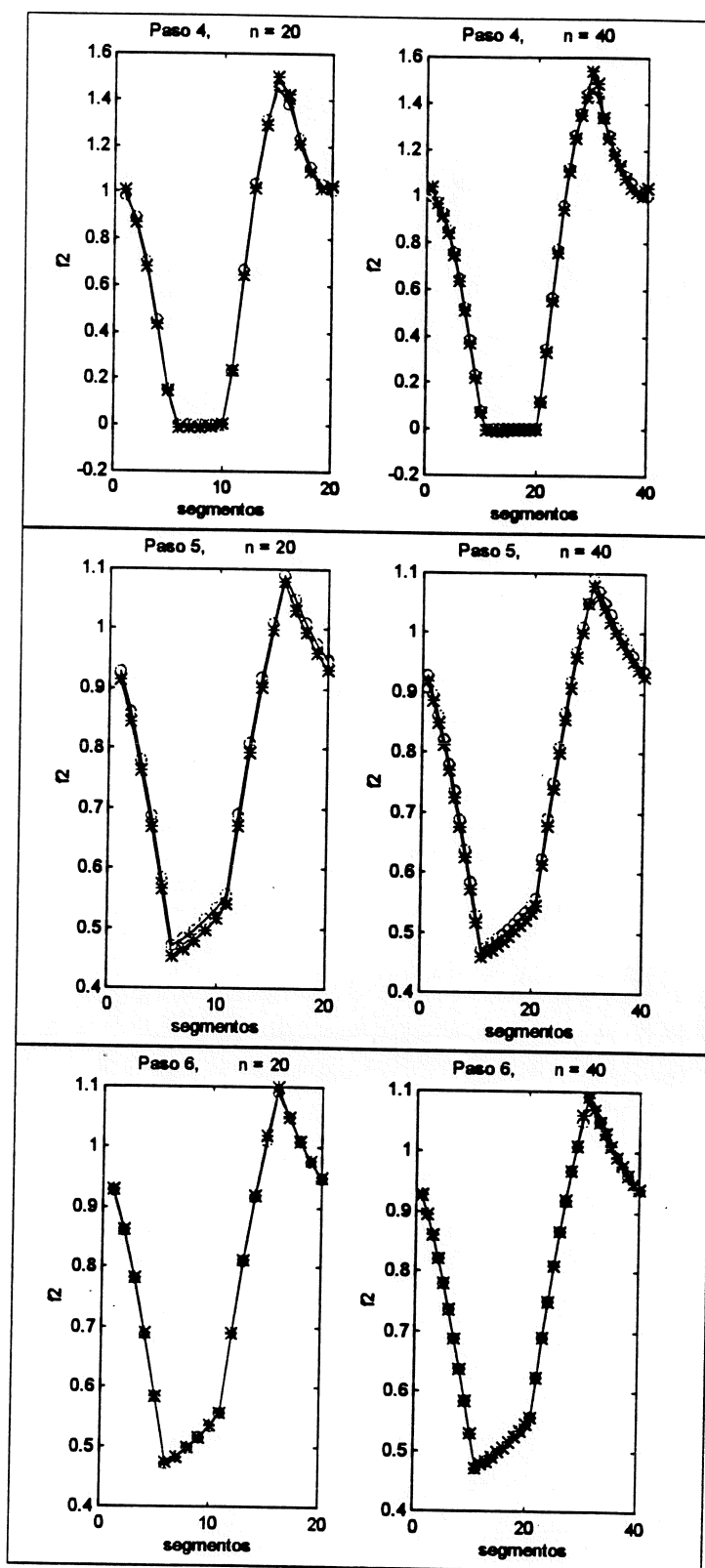


Figura 6.5 Comparación entre la solución analítica (o) y numérica (*) para diferente número de discretizaciones.

6.1.2 PRUEBA 2.

En esta sección se comparan los resultados obtenidos en la teoría para cuencas de forma circular desarrollada en el Apéndice 2 con la teoría desarrollada en el Capítulo 5. Como se mencionó al principio de este Capítulo, en esta prueba se simulan las condiciones usadas en la teoría para cuencas de forma arbitraria pero para una cuenca de forma circular. Se usa esta cuenca en particular ya que las coordenadas dentro de la cuenca son separables y se puede obtener un método diferente para obtener la solución en la región II (ver Apéndice 2).

Con objeto de verificar las dos teorías, se presenta la función de onda f_2 dentro de la cuenca para diferentes valores de la longitud de la onda incidente y aproximaciones de la cuenca circular. Es importante aclarar que conforme se incrementa el ancho de la entrada de la cuenca, la diferencia entre la longitud de arco y el ancho de la entrada se incrementa, por lo que la teoría para la cuenca circular pudiera ser no satisfactoria. Para reducir este problema al mínimo, se escogió un ángulo pequeño ($2\theta_0 = 20^\circ$) de apertura.

La Fig. 6.6 muestra la función de onda f_2 dentro de la cuenca circular de radio $a = 100$ m para una longitud de onda incidente $\lambda = 100$ m. Este resultado se obtuvo usando la teoría expuesta en el Apéndice 2. Las Fig. 6.7 y 6.8 muestran los resultados pero ahora usando la teoría para cuencas de forma arbitraria para diferentes discretizaciones $np = 36$, $np = 2$ y $np = 18$, $np = 1$ respectivamente. Las marcas en la figura indican los puntos interiores donde fue evaluada la función de onda f_2 . Los resultados son muy similares lo cual confirma el análisis numérico, la estructura es prácticamente la misma, hay una mejor comparación, como era de esperarse, cuando se tiene una mejor aproximación de la cuenca.

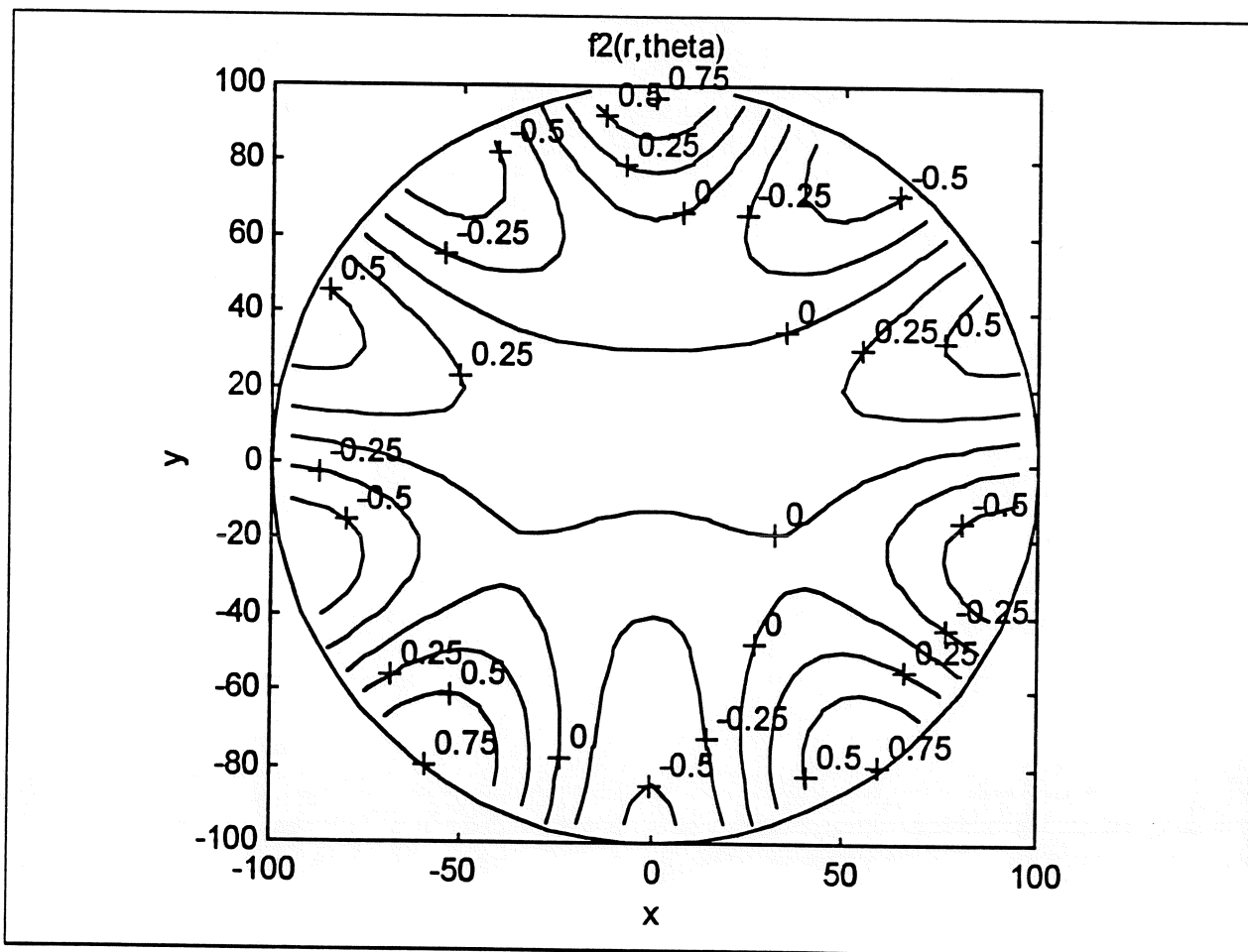


Figura 6.6 Solución analítica de la función de onda f_2 para una longitud de onda incidente $\lambda=100$ m, dentro de una cuenca circular con 20° de apertura y un radio=100 m.

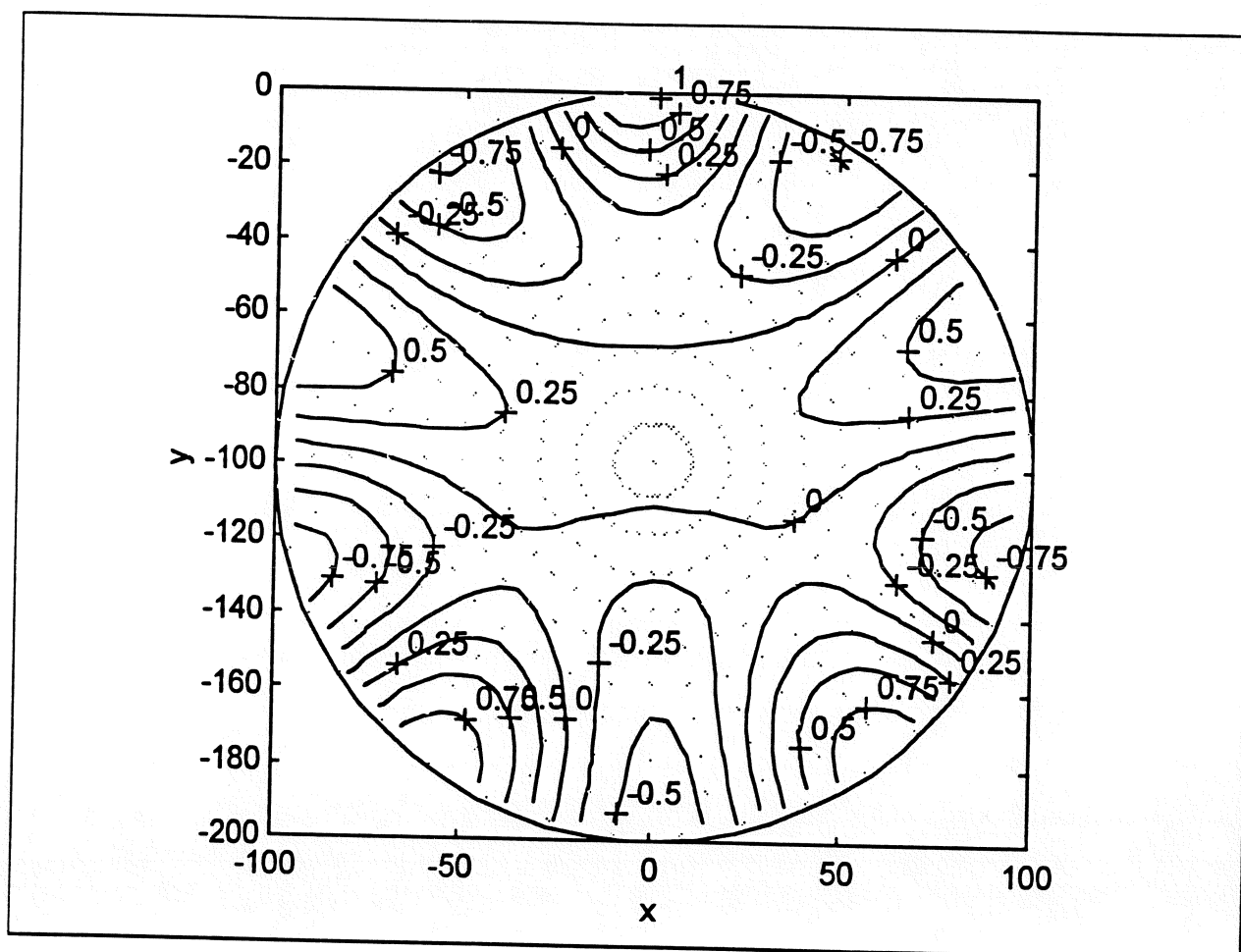


Figura 6.7 Cuenca circular con 20° de apertura y usando una longitud de onda incidente $\lambda = 100$ m usando la teoría de cuencas de forma arbitraria con 36 segmentos en la frontera ($n=36$, $n=2$).

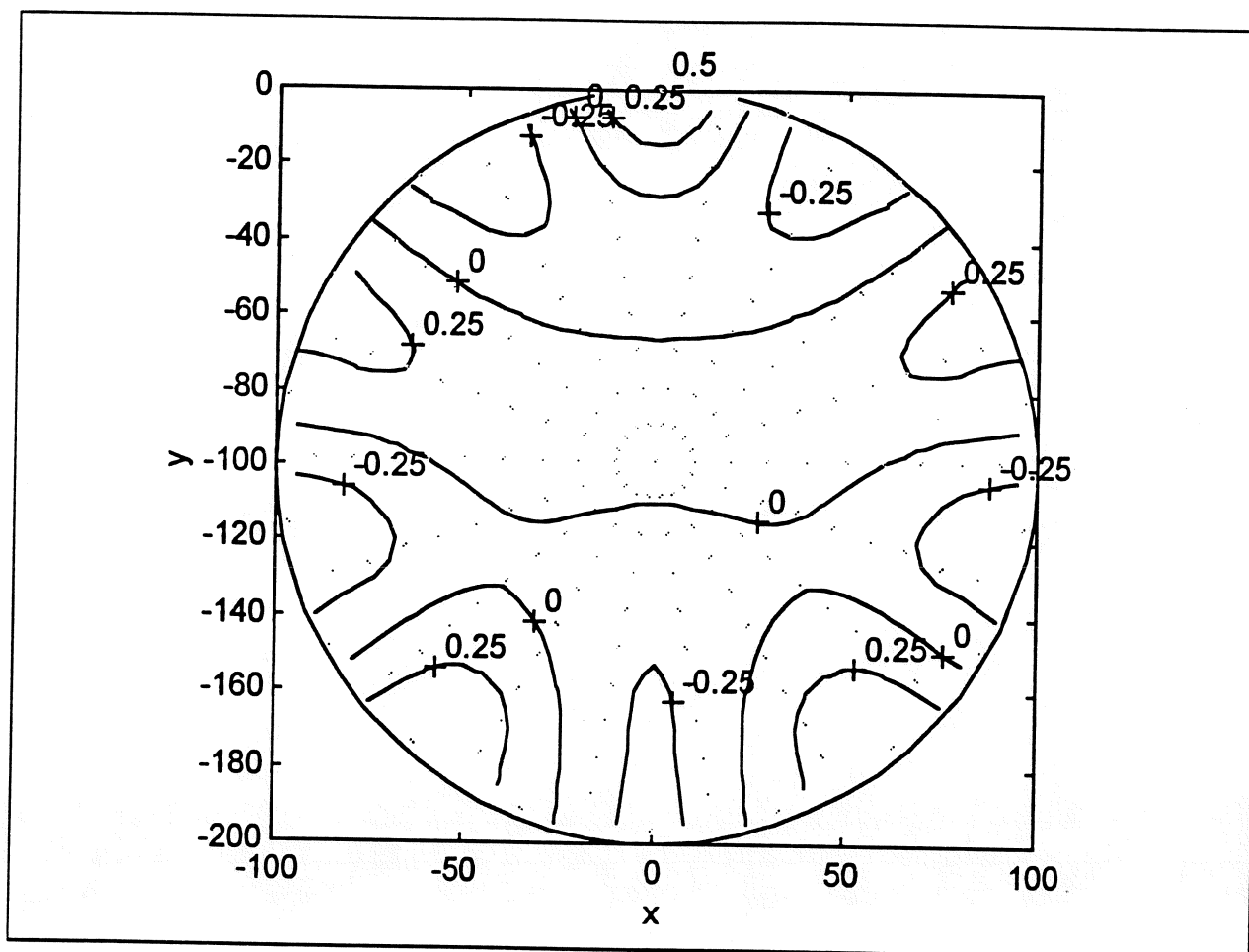


Figura 6.8 Cuenca circular con 20° de apertura, usando una longitud de onda incidente $\lambda = 100$ m y utilizando la teoría de cuencas de forma arbitraria con 18 segmentos en la frontera ($n = 18$, $n = 1$).

Se hizo este mismo ejercicio para otra longitud de onda $\lambda = 75\text{m}$. La Fig. 6.9 muestra los resultados de la teoría expuesta en el Apéndice 2. Las Figs. 6.10 y 6.11 corresponden a la teoría para cuencas de forma arbitraria pero para diferentes discretizaciones. Los resultados son muy similares, hay una buena aproximación aunque se comparan mejor para la longitud de onda mas grande. Lo anterior se debe a las siguientes consideraciones:

1. Cuando la frontera es dividida y reemplazada por segmentos, estos deben de ser una buena aproximación de la frontera.
2. La longitud de cada segmento Δs , debe ser pequeña comparada con la longitud de onda λ , esto asegura una representación adecuada de la onda.

6.2 RESPUESTA DE LA BAHIA A ONDAS INCIDENTES Y DISCUSION DE RESULTADOS

Para confirmar el análisis numérico se realizaron diferentes pruebas en la subsección anterior, con cuencas cerradas de forma sencilla (circular y rectangular) donde se conoce la solución analítica. También se confirmó el análisis con una cuenca circular con una apertura pequeña. En las dos pruebas los resultados son similares lo cual da la seguridad de usar el modelo en cuencas de forma mas realista (ver Figs. 6.1 a 6.11)

Se graficaron los contornos con 4 segmentos en la entrada de la bahía, primero se consideró una profundidad de 100 metros y después con 50 m, se vió que la función de onda en esas profundidades son semejantes para todas las ondas incidentes. El único cambio es en los valores de el periodo de la onda y su velocidad de fase; esto se debe a la relación de dispersión $c = \sqrt{g k \tanh(k h)}$.

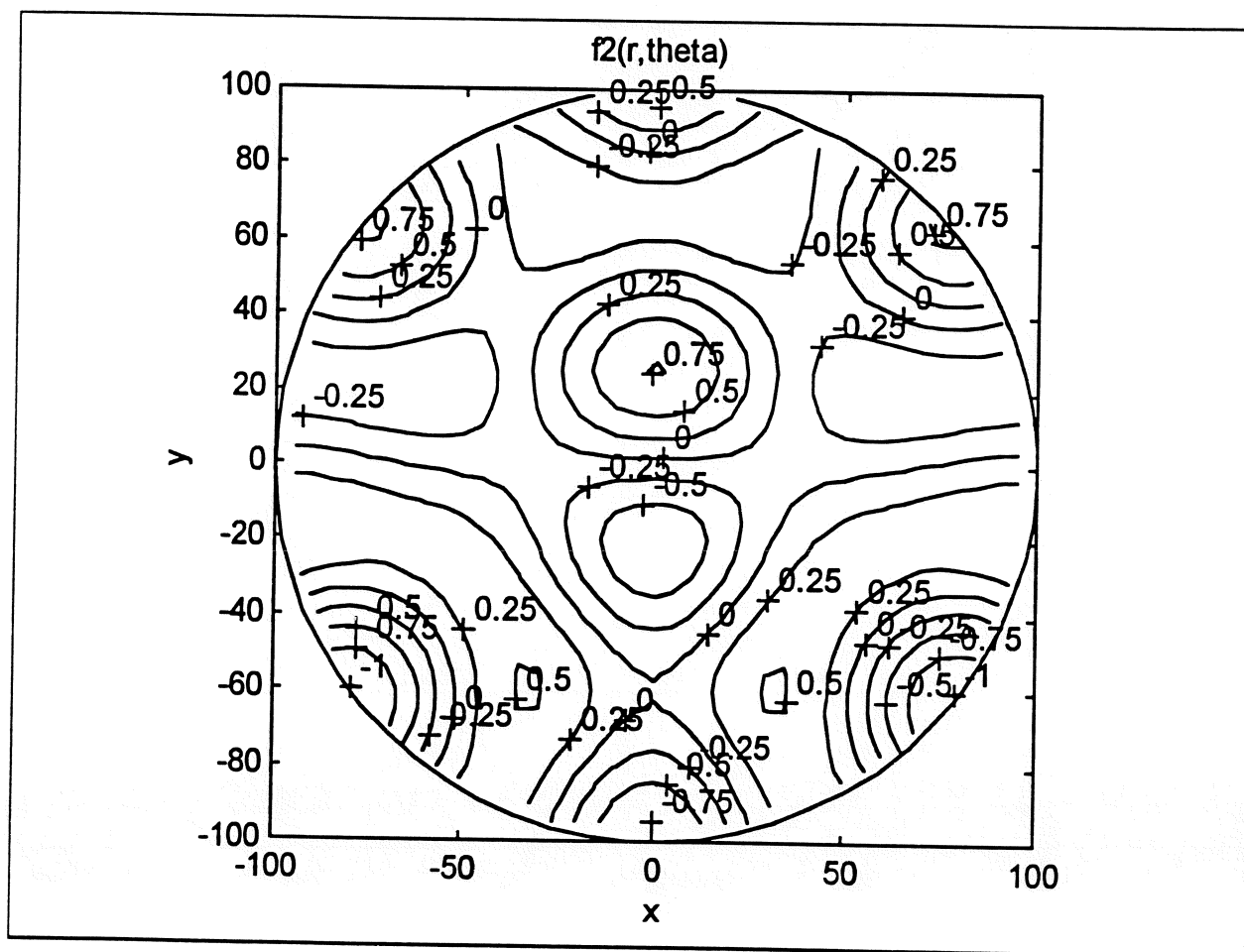


Figura 6.9 Solución analítica de la función de onda f_2 para una longitud de onda incidente $\lambda=75$ m, dentro de una cuenca circular con 20° de apertura y radio=100 m.

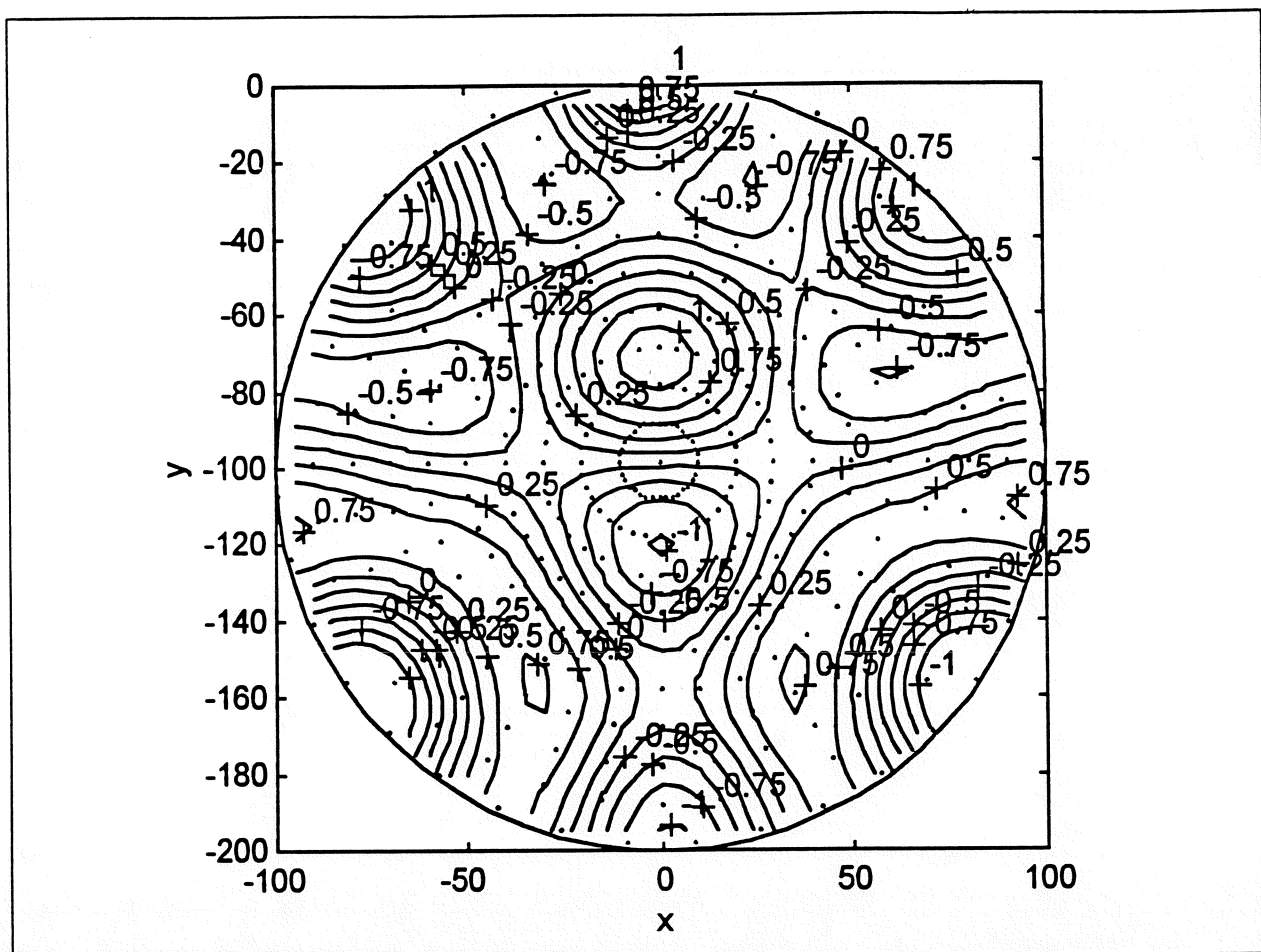


Figura 6.10 Solución numérica de la función de onda f_2 para una longitud de onda incidente $\lambda = 75$ m dentro de una cuenca circular con 20° de apertura $np=2$ y $n=36$.

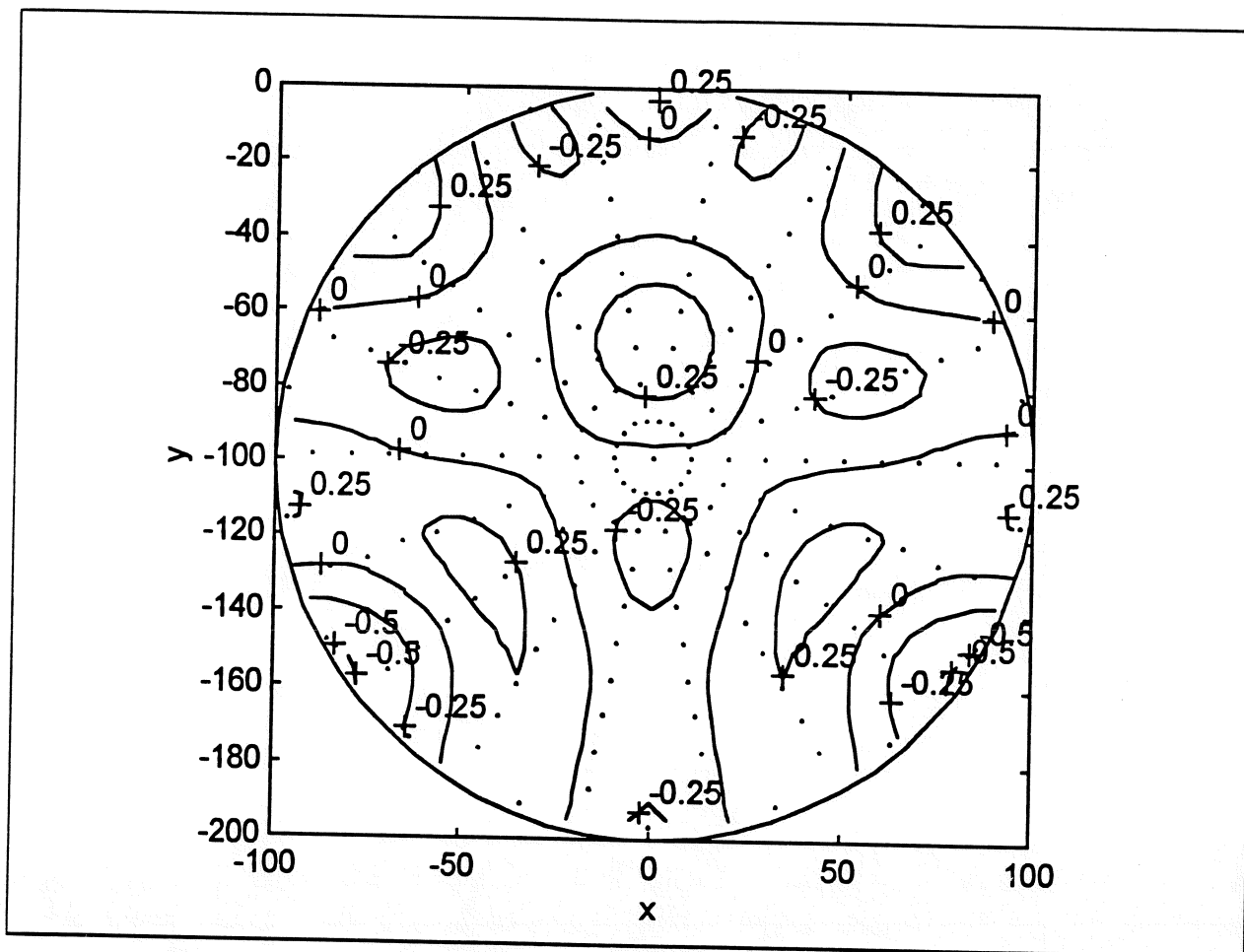


Figura 6.11 Solución numérica de la función de onda f_2 para una longitud de onda incidente $\lambda = 75$ m dentro de una cuenca circular con 20° de apertura $np=1$ y $n=18$.

Debido a que la profundidad promedio de la Bahía de Todos Santos es de 50 m, se describirán los resultados obtenidos cuando se corrió el modelo a esa profundidad; por lo que se presentan las gráficas más representativas (ver figuras 6.12 a 6.18).

Se estudió la respuesta de la B.T.S. para oscilaciones con longitud de onda desde 100m hasta 100 km, con periodos de 4.5 s a 75 min respectivamente. Esto incluye una gran variedad de forzamientos que hay en la bahía.

El comportamiento de la bahía con diferente número de segmentos en la entrada ($n_p=6$ y 8), las mismas longitudes de onda y la misma profundidades (50 y 100 m), se observa una semejanza en la función de onda f , esto nos da confianza en los resultados y en la estabilidad del modelo y su algoritmo numérico.

Como se mencionó anteriormente, se estudió el comportamiento de la B.T.S. analizando la función de onda f en diferentes localidades. Se eligieron ocho puntos (ver figura 6.19) y se estudió la respuesta a diferentes longitudes de que van de 100 m a hasta 100 km. Estos puntos corresponden a algunas localidades de interés por ejemplo el Sauzal de Rodríguez, Punta Morro, 2 cercanos a la rada portuaria, uno cercano a la entrada sur de la bahía (cañón submarino), otro en la costa en Punta Banda, otro punto lejos de la costa aproximadamente frente a la playa denominada Rincón de Ballenas y el último frente al estero de Punta Banda. Se graficó λ vs función de onda $f(x,y)$ y sus períodos correspondientes (ver Figs. 6.20 y 6.21). La respuesta de la B.T.S. muestra en los diferentes puntos amplificaciones para longitudes de onda de 13.3 km ($T= 10$ min) y 25.6 km ($T= 19.3$ min), estos resultados concuerdan con los obtenidos por Rivera y Peña (1982), en su análisis de variación del nivel del mar producida por un Tsunami.

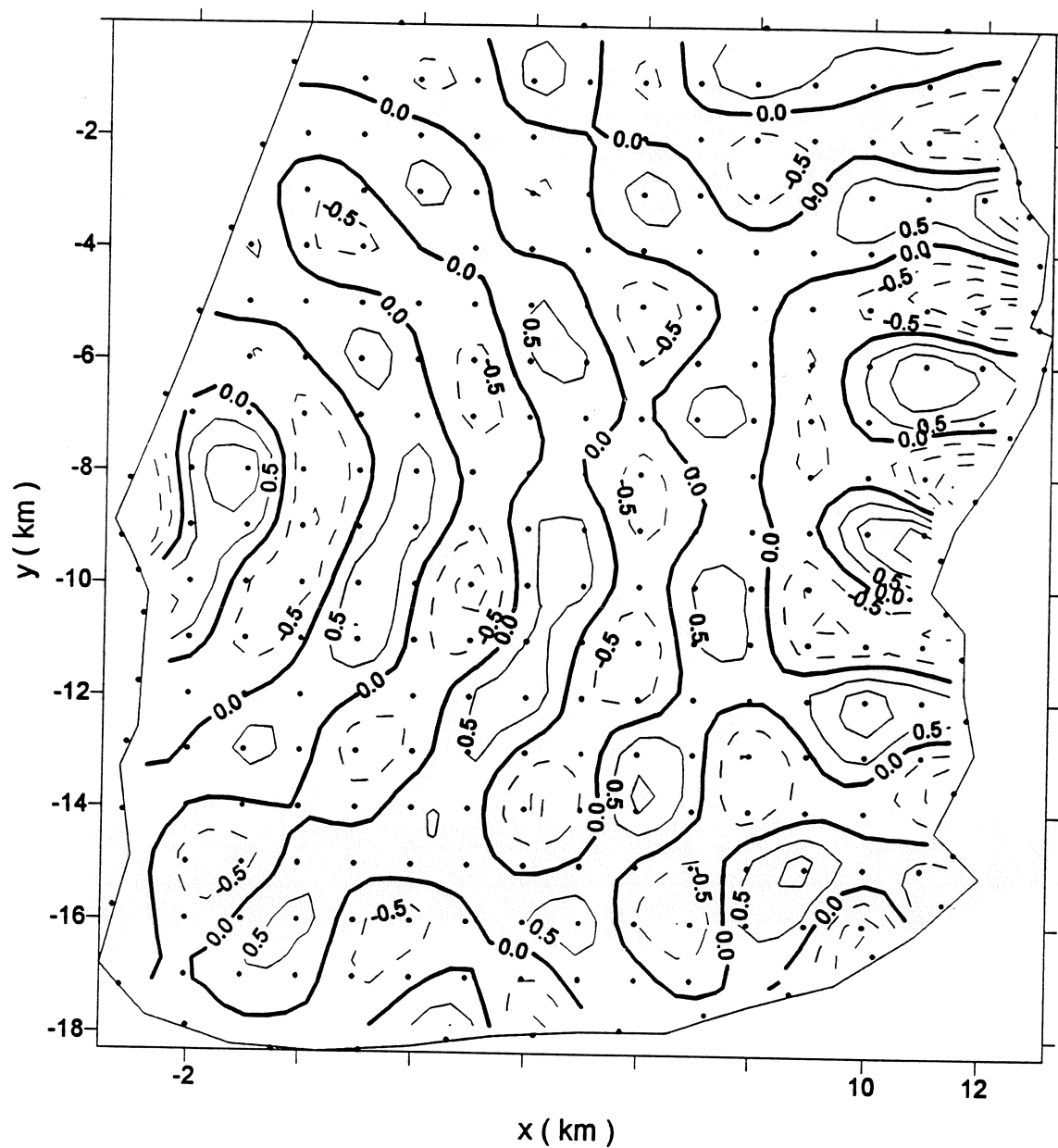


Figura 6.12 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la Bahía de Todos Santos (B.T.S), con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 3$ km, y un período $T = 2.7$ min.

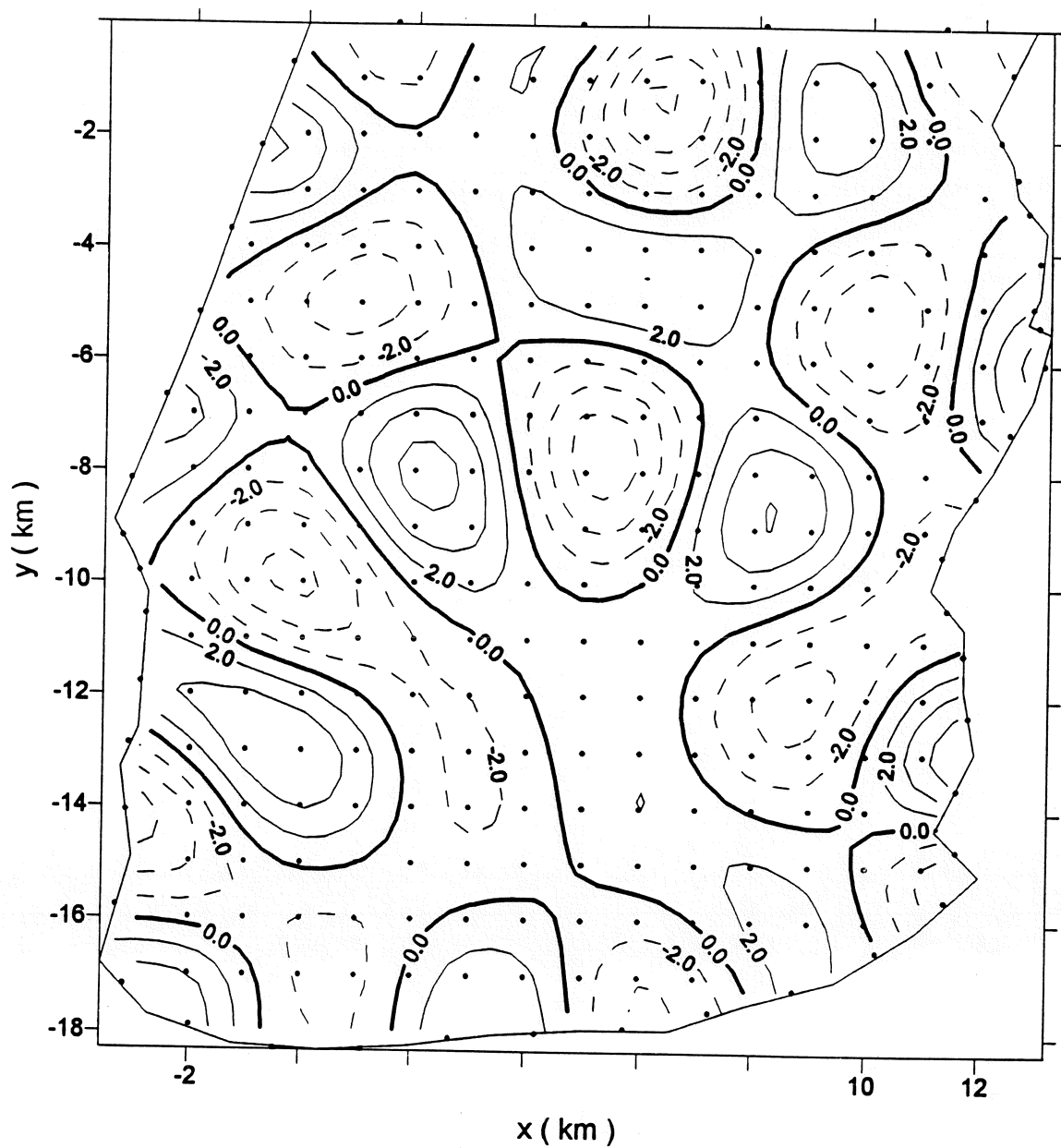


Figura 6.13 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 5$ km, y un período $T = 3.8$ min.

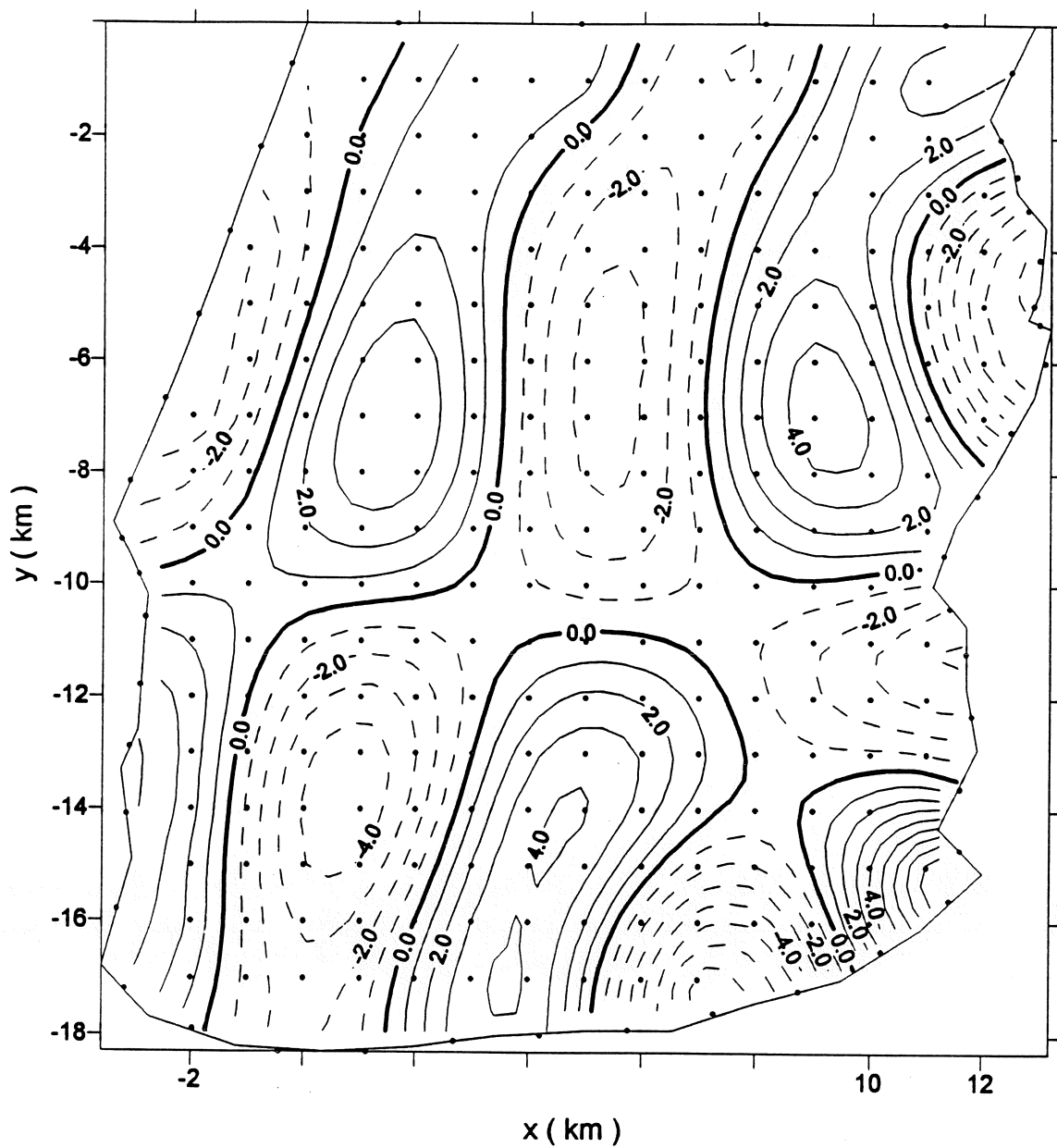


Figura 6.14 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 7$ km y un período $T = 5.3$ min.

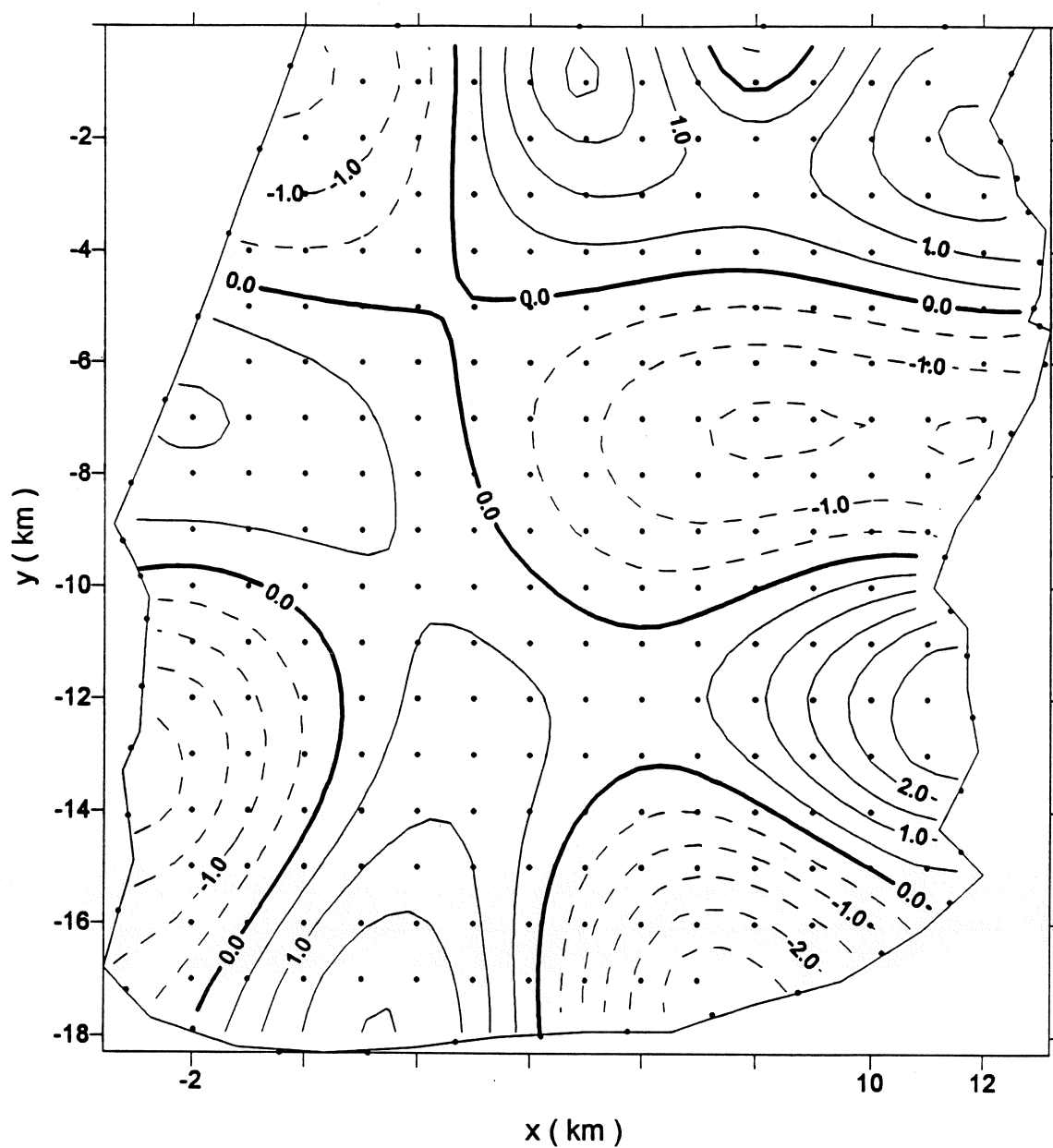


Figura 6.15 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 10$ km y un período $T = 7.5$ min.

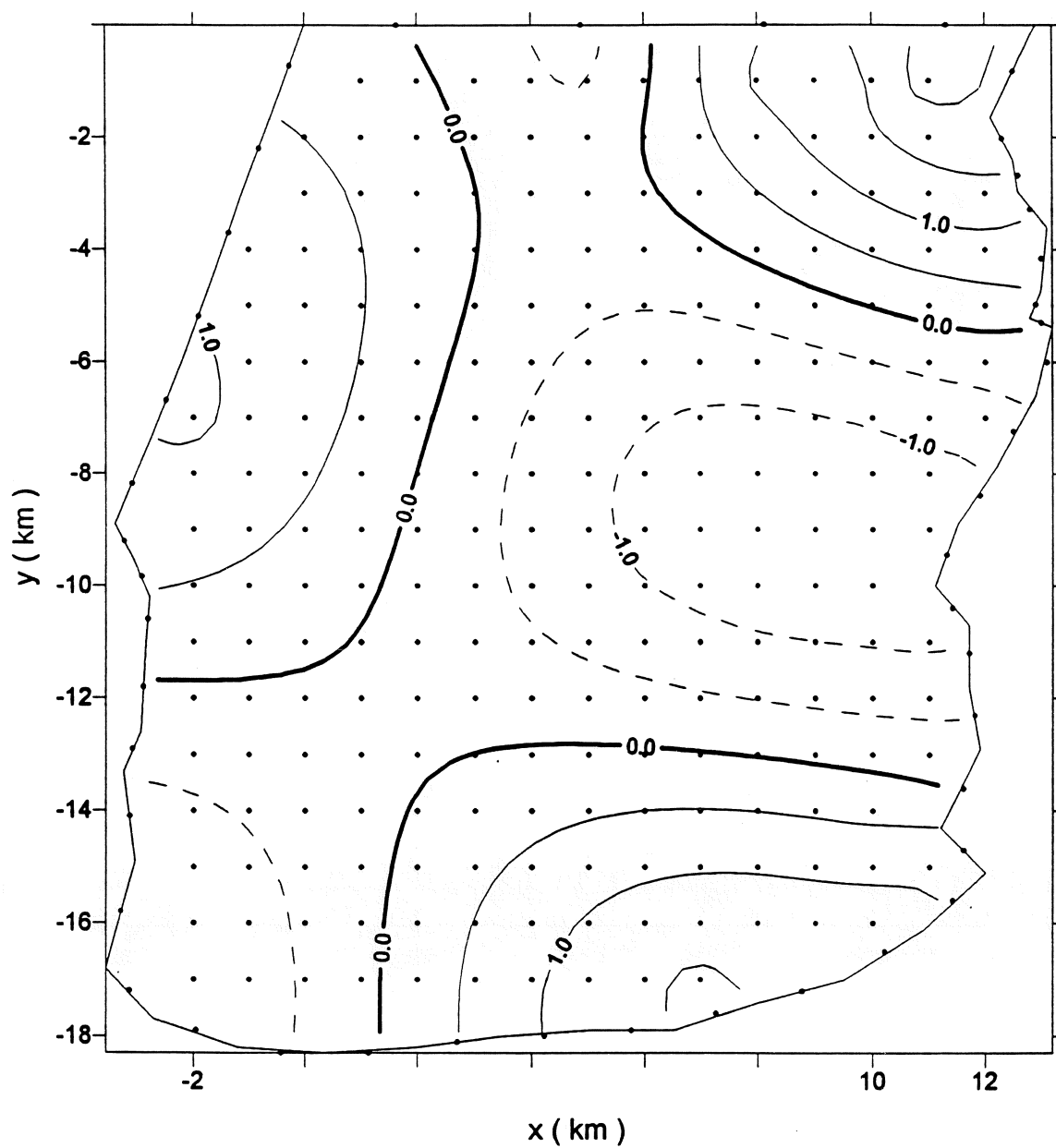


Figura 6.16 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 15$ km y un período $T = 11.3$ min.

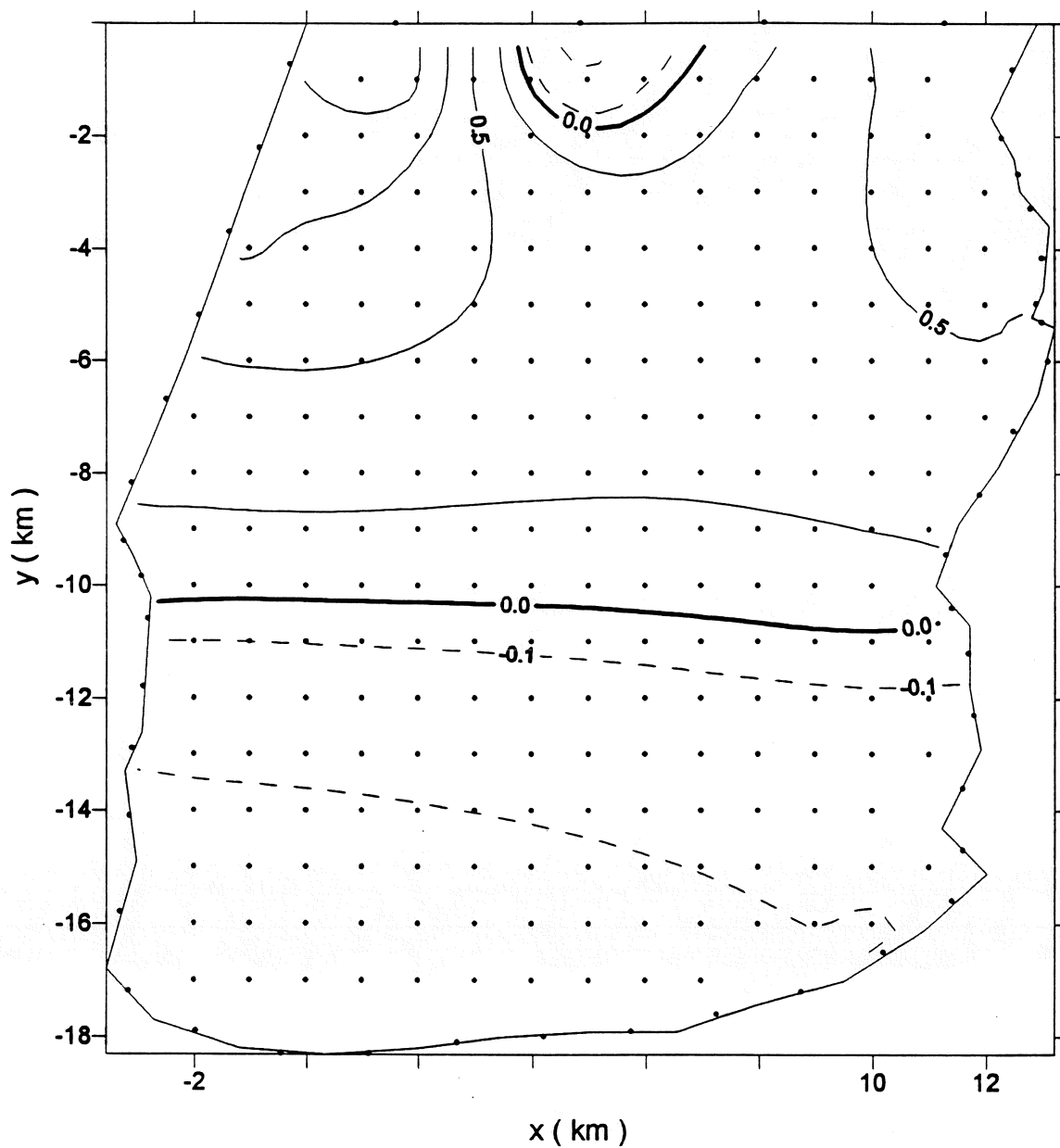


Figura 6.17 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h=50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda=30$ km y un período $T=22.6$ min.

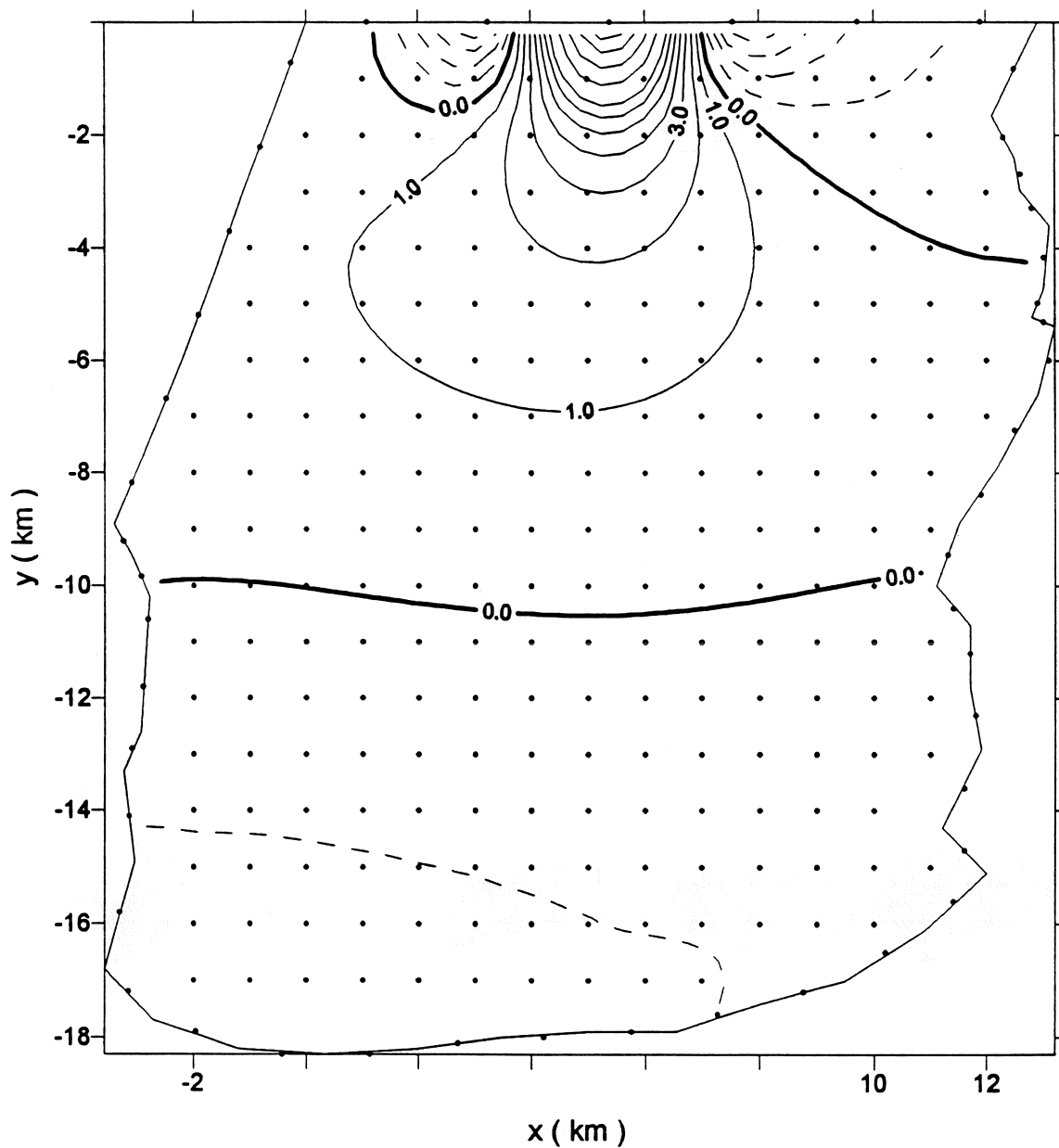


Figura 6.18 Contornos de $f(x,y)$ en metros dentro de la B.T.S., con una profundidad $h = 50$ m. La onda incidente tiene una longitud de onda $\lambda = 30$ km, un período $T = 25.6$ min y 6 segmentos en la entrada.

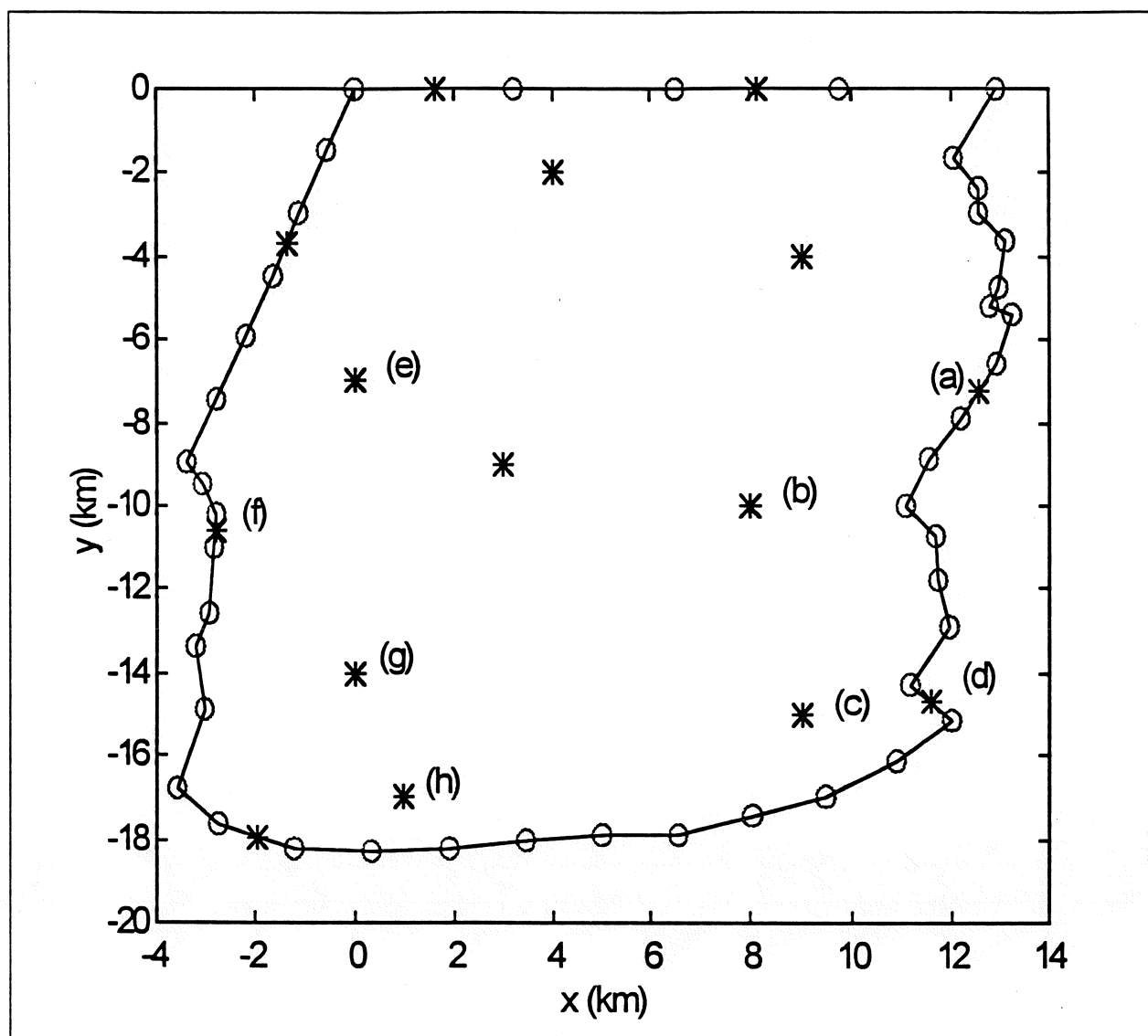


Figura 6.19 Poligonal de la B.T.S. con los puntos seleccionados para obtener las amplitudes a diferentes longitudes de ondas incidentes.

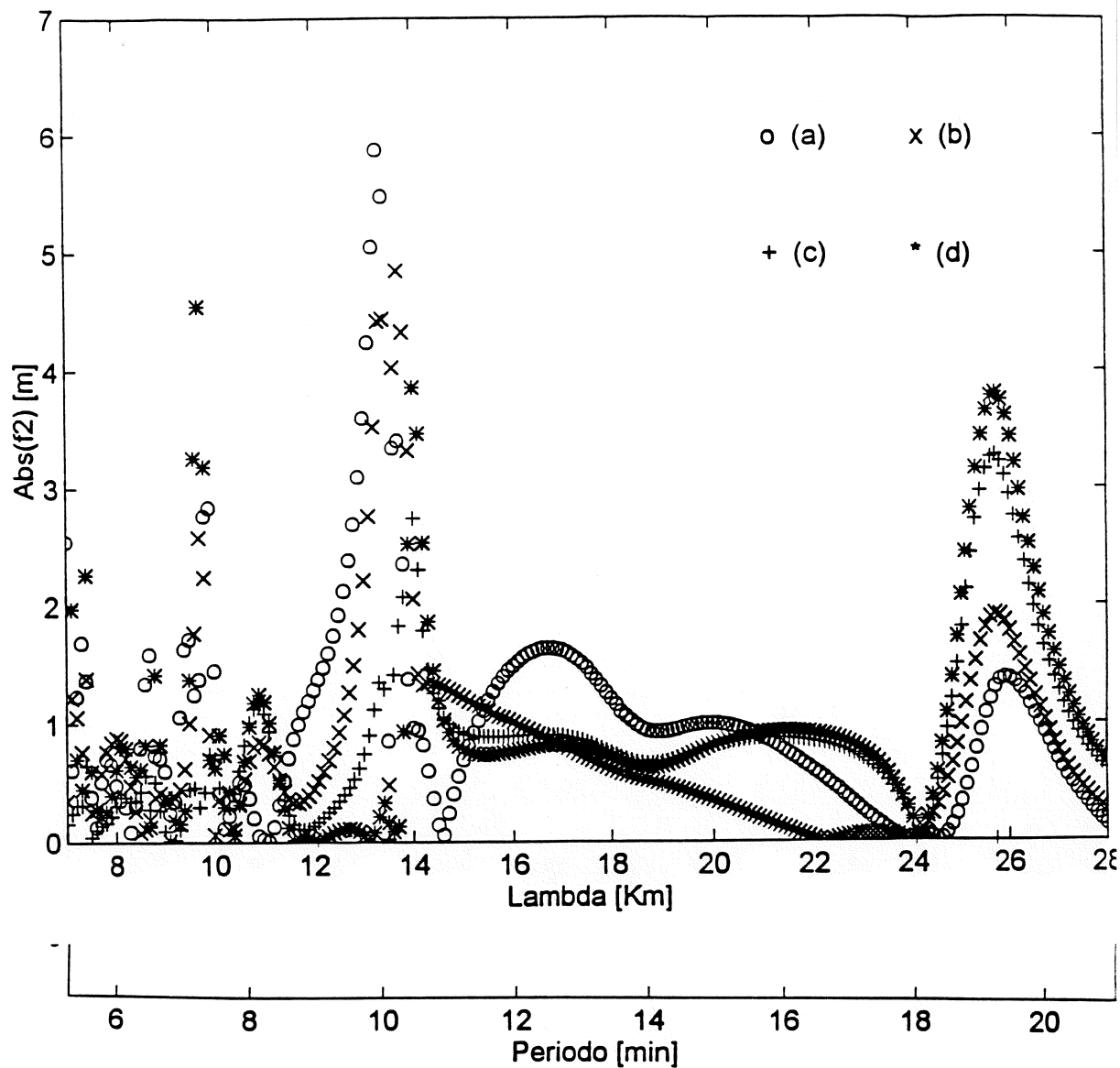


Figura 6.20 Diagrama de amplificaciones a diferentes longitudes de onda λ (7 a 28 km) para 4 puntos seleccionados (a), (b), (c) y (d), dentro de la B.T.S.

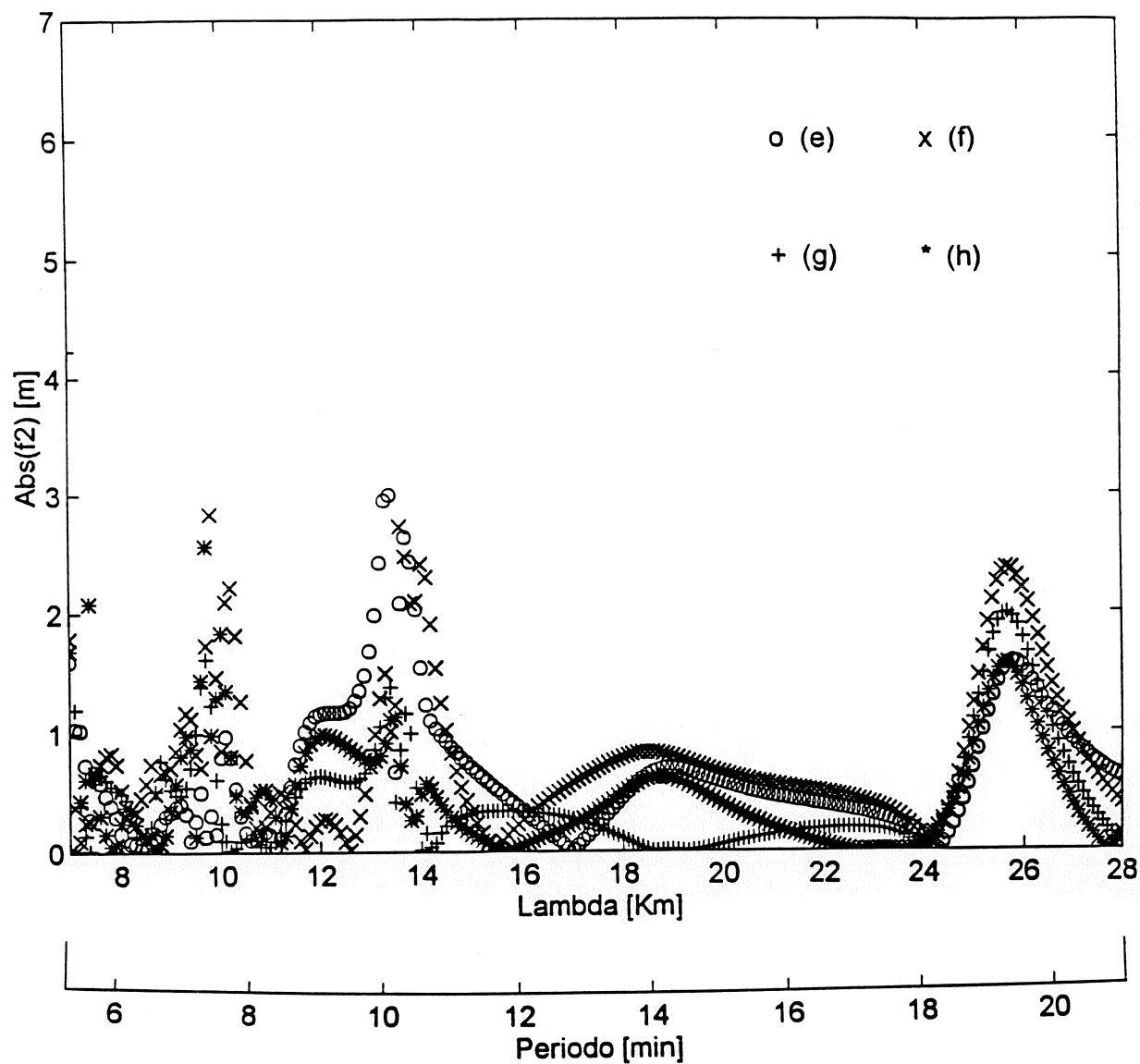


Figura 6.21 Diagrama de amplificaciones a diferentes longitudes de onda λ (7 a 28 km) para 4 puntos seleccionados (e), (f), (g) y (h) dentro de la B.T.S.

Los diagramas de amplitud muestran datos muy irregulares para longitudes de onda menores de 9 km, esto se debe a que no hay una buena representación de la onda con el tamaño de los segmentos (Δs).

En las gráficas de los contornos de f con 4 puntos en la entrada de la bahía, se observan algunos datos con valores de amplitud de onda que van entre -0.61 m y 1.47 m, para caso con 30 km de longitud de la onda incidente (ver figura 6.17). Este tipo de datos también se encuentran en algunas de las gráficas con 6 puntos en la entrada de la bahía (ver figura 6.18), que presenta rangos -6.33 m y 20.10 m de amplitud de onda, estos datos son de la entrada de la bahía, los valores son mas grandes mientras conforme se incrementa la longitud de onda incidente. Este fenómeno es de esperarse debido a una limitante importante de el modelo y es el de no considerar la viscosidad, a este fenómeno se le conoce como la “paradoja de la cuenca”, Miles y Munk (1961).

7. CONCLUSIONES

Con la confirmación del análisis numérico, las oscilaciones debido a ondas en una cuenca conectada a mar abierto se pueden evaluar para geometrías sencillas, ya sea usando la teoría desarrollada para cada una de ellas (ver Apéndice A.2) ó la teoría desarrollada en el Capítulo 5, para una profundidad constante.

Los puntos que presentaron amplificaciones importantes fueron los puntos (d, e y f) a una longitud de onda de 1 km, y el punto (a) para una longitud de onda 4 km. Cabe notar que el punto (d) corresponde a la rada portuaria pero se hizo la aproximación de cerrada.

Una limitación importante en este modelo es trabajar con una profundidad constante. Sin embargo, este estudio es un buen intento para obtener la respuesta de la B.T.S. a oscilaciones incidentes.

La figura 6.12 presenta una variación importante en la f en la zona que corresponde a El Sauzal. Las amplitudes que se presentan no son grandes pero esto denota importantes corrientes asociadas. Esta estructura se puede deber al fenómeno de difracción de ondas debido a irregularidades de la línea de costa.

8. REFERENCIAS

- Alvarez-Sánchez, L. G. (1971). Medición de Corrientes superficiales en la Bahía de Todos Santos, B.C. **Universidad Autónoma de Baja California**, Ensenada, B.C., México, 54 pp.
- Cruz-Colin, E. (1994). Balance sedimentario de la Bahía de Todos Santos, B. C., México. Tesis de Licenciatura. **Universidad Autónoma de Baja California**, Ensenada, B.C., México, 77 pp.
- Galindo-Albrechtsen, K. y Torres-Navarrete C. (1995). Estimación de corrientes y transporte litoral en una zona de la Bahía de Todos Santos, B.C., mediante estadísticas de oleaje. **Memorias de la Unión Geofísica Mexicana**, 17(2):17.
- Gavidia-Medina, J. F. (1988). Simulación numérica de la circulación barotrópica en la Bahía de Todos Santos, B.C., Tesis de Maestría, **CICESE**, Ensenada, B.C., México, 95 pp.
- Gil-Silva, E. y Larios-Castillo, S. (1992). Comportamiento del viento en Punta Morro, B.C., entre los meses de marzo y octubre de 1992. **Informe de Datos, Instituto de Investigaciones Oceanológicas**. Ensenada. 12 pp.
- Hwang, L. y Tuck, E. (1970). On the oscillations of harbours of arbitrary shape. **J. Fluid Mechanics**, 42(3): 447-464.

- Ippen, A. T. y Goda, Y. (1963). "Wave induced oscillations in the harbours: The solution for a rectangular harbour connected to the sea", **Report No. 59**, Hydrodynamics Laboratory, M.I.T.
- Jialong, Gu. (1988). Harbour resonance due to long-period wave action. **China Ocean Engineering**, 2(1):71-81.
- Lee, J.J. (1969). Wave-induced oscillations in harbours of arbitrary shape. **Reporte Técnico No. KH-R-20**. California Institute of Tech., Pasadena, Cal. U.S.A. 266 pp.
- Lee, J.J. (1971). Wave-induced oscillations in harbours of arbitrary geometry. **J. Fluid Mech**, 45(2):375-394.
- Miles, J.W. y Munk, M. (1961). 'Harbour Paradox'. **Proc. Am. Soc. Civil Engineers**, WW3 87, 111-130.
- Raichlen, F. (1966). Harbour Resonance. En Ippen, A. T. (ed.). **Estuary and Coastline Hydrodynamics**, M^c Graw-Hill Book Company. U.S.A., pp.281-340.
- Rivera-Fernández, N. (1981). Obtención de los períodos de resonancia de la Bahía de Todos Santos. Tesis de licenciatura, **Universidad Autónoma de Baja California**, Ensenada, B.C., México, 48 pp.
- Rivera, N. y Peña, G. (1982). Modos resonantes en la Bahía de Todos Santos excitados por el Tsumani del 22 de mayo de 1960. **Ciencias Marinas**, 8(1): 88-96.

Sánchez-Devora, A. (1980). Tsunamis en la costa occidental de México. Tesis de maestría. CICESE, Ensenada, B.C., México, 199 pp.

Weiwen, Z. (1991). Hybrid element method for calculation of harbour resonance. **China Ocean Engineering**, 5(2): 203-212.

APENDICE 1

DERIVACION DE LA ECUACION (5.1.15)

La solución de Weber de la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones, representa a la función de onda f en un punto interior $\bar{x}$ como una función de la función de onda y su derivada normal en la frontera, es decir (ver también Ec. 5.1.14) :

$$f(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \int_s \left[f(\bar{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} (f(\bar{x}_0)) \right] ds(\bar{x}_0). \quad (\text{A.1.1})$$

Con objeto de determinar la función de onda $f(\bar{x}_0)$ a lo largo de la frontera, el punto en el interior $\bar{x}$ se puede aproximar a la frontera en un punto $\bar{x}_i$; la trayectoria de integración es deformado alrededor de un medio círculo pequeño, ρ_0 , con radio ε (ver Fig. A.1.1), entonces la ecuación (5.1.14) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = & -\frac{i}{4} \int_{s-\rho_0} \left[f(\bar{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} (f(\bar{x}_0)) \right] ds(\bar{x}_0) \\ & - \frac{i}{4} \int_{\rho_0} \left[f(\bar{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} (f(\bar{x}_0)) \right] ds(\bar{x}_0) \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

El radio de el medio círculo ρ_0 , ε , puede hacer tender a cero, es decir, $\varepsilon \rightarrow 0$; usando la definición de el valor principal de Cauchy. La ecuación (A.1.2) se puede reescribir como:

$$f(\bar{x}_i) = -\frac{i}{4} \int_s \left[f(\bar{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} f(\bar{x}_0) \right] ds(\bar{x}_0) + Q(\bar{x}_i) \quad (\text{A.1.3})$$

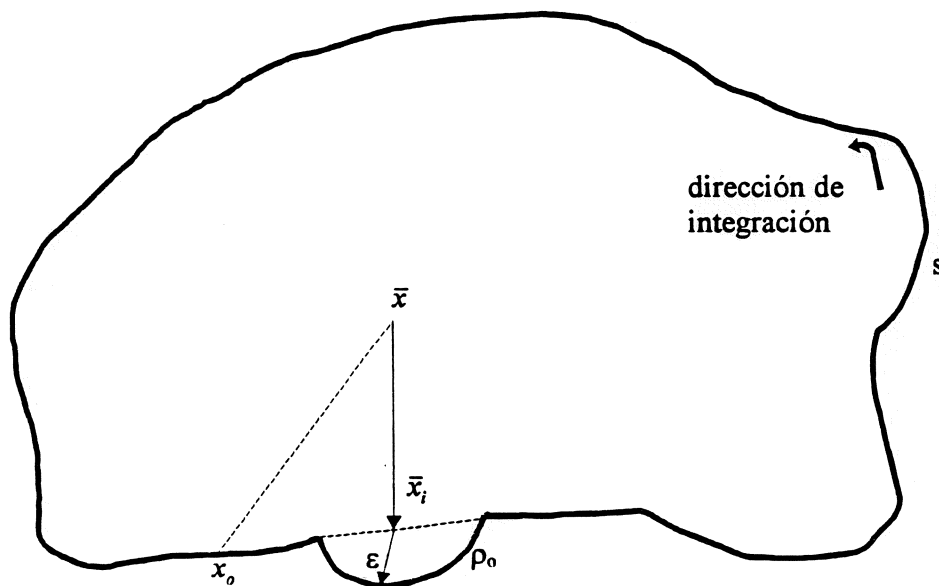


Fig. A.1.1 Diagrama de un punto interior aproximado a un punto en la frontera sobre una curva suave.

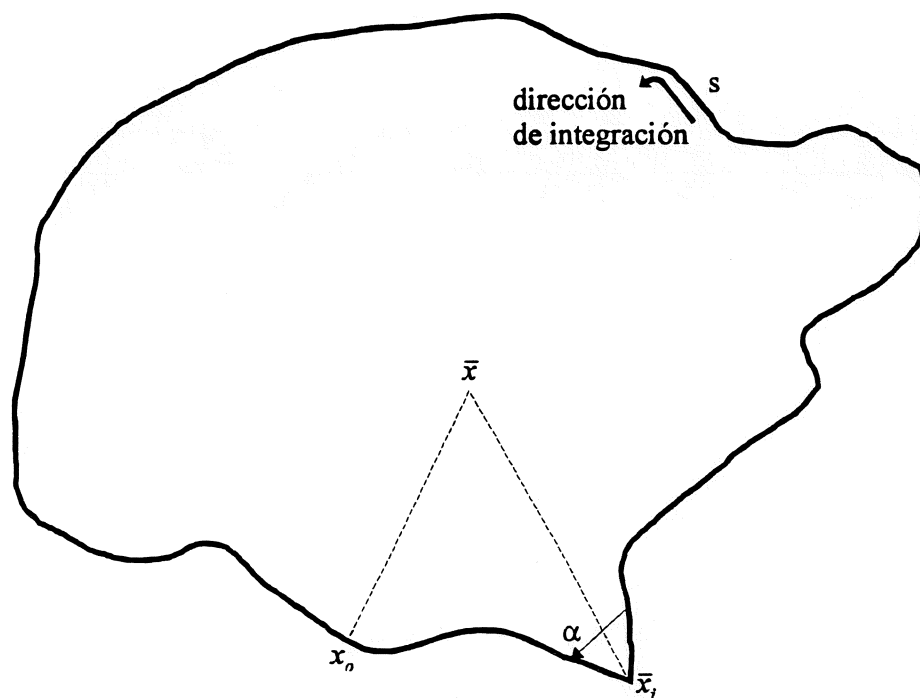


Fig. A.1.2 Diagrama para un punto interior aproximado a una esquina en un punto en la frontera.

donde la primer integral representa el valor principal de Cauchy y el segundo término representa el límite de la integración a lo largo de el pequeño medio círculo ρ_0 conforme $\varepsilon \rightarrow 0$. Este valor límite $Q(\bar{x}_i)$, puede evaluarse por los métodos que serán descritos mas adelante.

Dado que a lo largo de el pequeño medio círculo ρ_0 , la dirección de n esta en la dirección de r , la función $Q(\bar{x}_i)$ puede reescribirse como:

$$Q(\bar{x}_i) = -\frac{i}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_0} \left[f(\bar{x}_0) \frac{\partial}{\partial r} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial r} (f(\bar{x}_0)) \right] ds(\bar{x}_0) \quad (\text{A.1.4})$$

Las fórmulas asintóticas de la funciones de Hankel para un argumento pequeño ($r \rightarrow 0$) son:

$$H_0^{(1)}(kr) \sim 1 + i \frac{2}{\pi} \log(kr),$$

$$\frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(kr) = -k H_1^{(1)}(kr) \sim i \frac{2}{\pi} \frac{1}{r}$$

(A.1.5)

Sustituyendo la ecuación (A.1.5) en (A.1.4) se obtiene:

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}_i) &= -\frac{i}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho_0} \left[f(\bar{x}_0) \left(i \frac{2}{\pi} \frac{1}{r} \right) - \left(1 + i \frac{2}{\pi} \log(kr) \right) \frac{\partial}{\partial r} (f(\bar{x}_0)) \right] ds(\bar{x}_0) \\ &= -\frac{i}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi i \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} d\theta (f(\bar{x}_i) + o(\varepsilon)) \\ &\quad + \frac{i}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \left(1 + i \frac{2}{\pi} \log(k\varepsilon) \right) \varepsilon d\theta \left(\frac{\partial}{\partial r} f(\bar{x}_i) + o(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Como $\varepsilon \rightarrow 0$ el límite de la segunda integral es cero :

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi i \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} d\theta (f(\bar{x}_i) + o(\varepsilon)) = -\frac{i(i)}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{2}{\pi} (f(\bar{x}_i) + o(\varepsilon)) d\theta \\
&= \frac{1}{2} f(\bar{x}_i)
\end{aligned} \tag{A.1.6}$$

Sustituyendo la Ec. (A.1.6) en la Ec. (A.1.3) queda como:

$$f(\bar{x}) = -\frac{i}{4} \int_s \left[f(\bar{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} (f(\bar{x}_0)) \right] ds(\bar{x}_0) + \frac{1}{2} f(\bar{x}_i) \tag{A.1.7}$$

donde $r = |\bar{x}_0 - \bar{x}_i|$.

Si el punto $\bar{x}_i$ es un punto esquinado de la frontera (ver Fig. A.1.2), el resultado de la ecuación (A.1.1), conforme $\bar{x}$ se aproxima a $\bar{x}_i$ puede ser expresada como:

$$f(\bar{x}_i) = -\frac{i}{4} \int_s \left[f(\bar{x}_0) \frac{\partial}{\partial n} (H_0^{(1)}(kr)) - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} (f(\bar{x}_0)) \right] ds(\bar{x}_0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) f(\bar{x}_i) \tag{A.1.8}$$

donde el ángulo interior α es definido en la Fig. A.1.2. Para una curva suave α es igual a π , entonces la ecuación (A.1.8) es igual a (A.1.7).

APENDICE 2

ANALISIS TEORICO PARA CUENCAS DE FORMA SENCILLA

La teoría desarrollada en el Capítulo 5 puede ser usada para cuencas de forma arbitraria. Si la cuenca tiene una forma especial como por ejemplo circular, las coordenadas dentro de la cuenca son separables y se puede usar un método diferente para obtener la solución en la región II.

A.2.1 FUNCION DE ONDA EN UNA CUENCA CIRCULAR.

En esta sección se presenta el análisis teórico para una cuenca circular. La función de onda f_2 la cual satisface la ecuación de Helmholtz en la Región II, es encontrada por el método de separación de variables. La solución para mar abierto, Región I, la cuál es usada para este desarrollo es la misma que la presentada en la sección 5. Igualando las soluciones en ambas regiones en la entrada de la cuenca, se puede obtener la solución completa de las oscilaciones inducidas en una cuenca circular.

A.2.1.1 Función de onda dentro de una cuenca circular.

Para la función de onda f_2 dentro de la cuenca circular, la Ec. de Helmholtz se puede expresar en coordenadas polares como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} + k^2 f_2 = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

Las condiciones de frontera que la función f_2 debe satisfacer son:

$$\frac{\partial f_2}{\partial r}(a, \theta) = \begin{cases} C(\theta) & \text{para } |\theta| \leq \theta_0 \\ 0 & \text{para } |\theta| > \theta_0 \end{cases} \quad (\text{A.2.2})$$

donde a es el radio de la cuenca circular, $2\theta_0$ es el ángulo central de la entrada de la cuenca, y $C(\theta)$ es la derivada normal inicialmente desconocida de la función de onda f_2 en la entrada de la cuenca. Un diagrama de la cuenca circular mostrando ambas regiones: Región I ('mar abierto') y Región II (dentro de la cuenca), es presentado en la Fig. A.2.1.

La solución de la Ec. (A.2.1) será construída usando series de Fourier, esto es, buscando la solución de $f_2(r, \theta)$ en la forma de:

$$f_2(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{im\theta} \quad (\text{A.2.3})$$

Substituyendo la Ec. (A.2.3) en Ec. (A.2.1) se encuentra que la función $f_m(r)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$f_m''(r) + \frac{1}{r} f_m'(r) + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f_m(r) = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

La ecuación es de la forma de la Ec. de Bessel; entonces la solución puede expresarse como:

$$f_m(r) = \alpha_m J_m(kr) + \beta_m Y_m(kr), \quad (\text{A.2.5})$$

donde la función $J_m(kr)$ es la función de Bessel de primera clase, y $Y_m(kr)$ es la función de Bessel de segunda clase; α_m y β_m son constantes arbitrarias a determinar.

La función $Y_m(kr)$ tiene una singularidad en $r = 0$, como la solución de la función de onda $f_2(r, \theta)$ debe ser suave y finita en $r = 0$, la constante β_m debe ser cero. Entonces de la Ec. (A.2.3), la solución de Ec. (A.2.1) puede expresarse como:

$$f_2(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m J_m(kr) e^{im\theta} \quad (\text{A.2.6})$$

Como $J_{-m}(kr)$ es equivalente a $(-1)^m J_m(kr)$, la Ec. (A.2.6) es equivalente a:

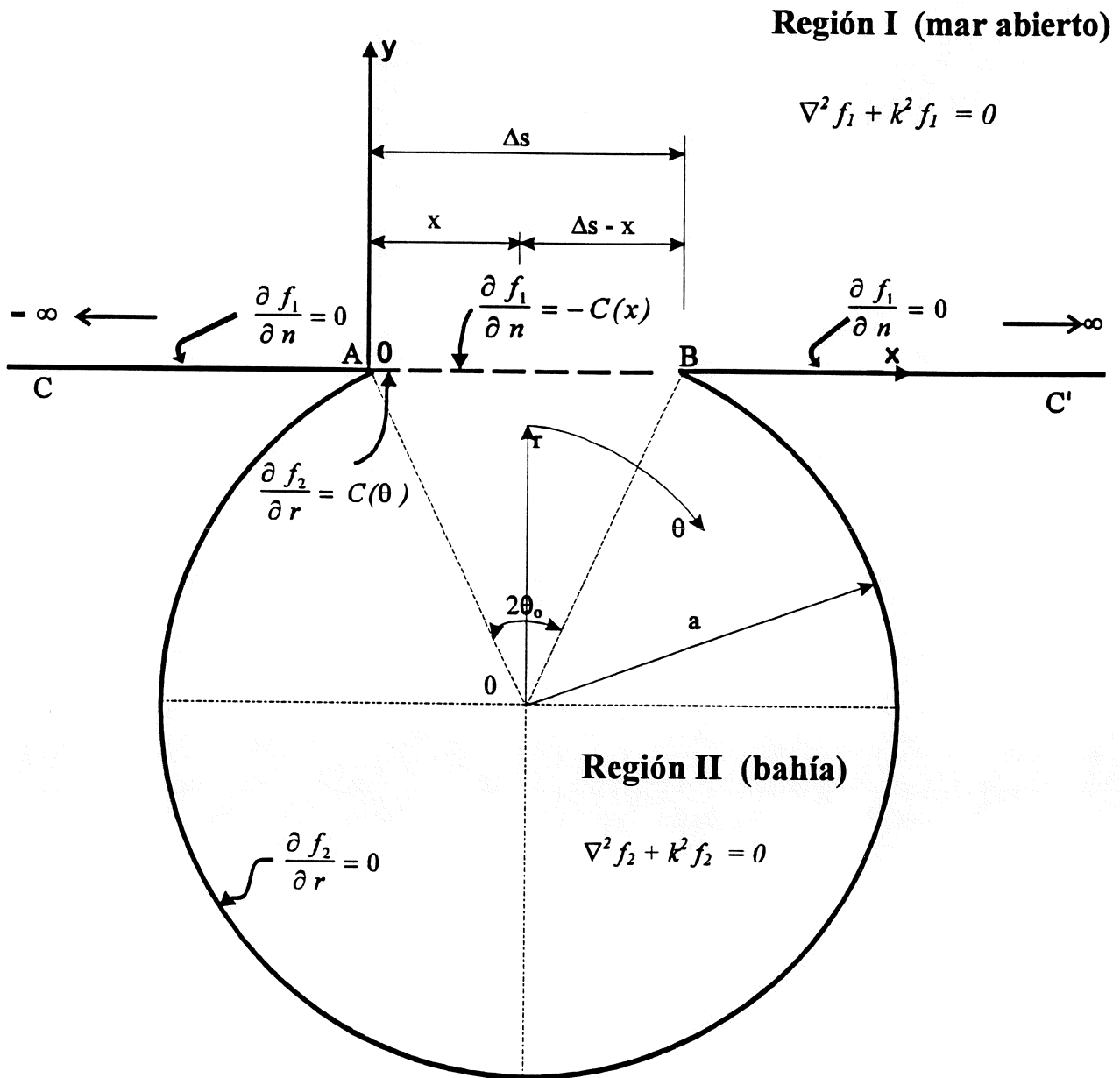


Fig. A.2.1 Diagrama de una cuenca circular.

$$f_2(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \cos(m\theta) + B_m \sin(m\theta)] J_m(kr) \quad (\text{A.2.7})$$

donde A_m y B_m son constantes con partes real e imaginaria a determinar. Para este caso particular donde la onda incidente se propaga en la dirección de $\theta = 0$, la función de onda $f_2(r, \theta)$ es una función par de θ , es decir la amplitud de onda es simétrica con respecto a la línea central $\theta = 0$. Por tanto, las constantes B_m en la Ec. (A.2.7) son igualadas a 0. De aquí, la solución general a Ec. (A.2.1) se reduce a:

$$f_2(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(kr) \cos(m\theta). \quad (\text{A.2.8})$$

Diferenciando la Ec. (A.2.8) con respecto a r , y evaluando la expresión resultante en la frontera, $r = a$, uno obtiene:

$$\frac{\partial f_2}{\partial r}(a, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \cos(m\theta) \cdot k J_m'(ka)], \quad (\text{A.2.9})$$

donde $k J_m'(ka) = k J_{m-1}(ka) - m/a J_m(ka)$. Los coeficientes A_m deben determinarse tal que la Ec. (A.2.9) satisfaga las condiciones de frontera preescritas, Ec. (A.2.2). Para evaluar los coeficientes A_m , se usará el método de transformada de Fourier coseno, primero multiplicando ambos lados de Ec. (A.2.9) por $\cos(n\theta)$ e integrando la expresión resultante con respecto a θ de 0 a 2π :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_2}{\partial r}(a, \theta) \cos(n\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} [A_m \cos m\theta \cdot k J_m'(ka)] \cos n\theta d\theta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} k J_m'(ka) A_m \cos m\theta \cos n\theta d\theta \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} k J_m'(ka) A_m \cdot \frac{1}{2} (\cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.2.10})$$

Si $m \neq n$, la integración en Ec. (A.2.10) es igual a 0, y si $m = n = 0$, la Ec. (A.2.10) es igual a:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f_2}{\partial r}(a, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} k J_0'(ka) A_0 d\theta. \quad (\text{A.2.11})$$

Por tanto, la constante A_0 puede evaluarse como:

$$A_0 = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{\partial f_2}{\partial r}(a, \theta) d\theta}{2\pi k J_0'(ka)}, \quad (\text{A.2.12})$$

por otra parte, si $m = n \neq 0$, Ec. (A.2.10) se convierte a:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f_2}{\partial r}(a, \theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k J_m'(ka) A_m d\theta. \quad (\text{A.2.13})$$

Entonces, la constante A_m puede evaluarse como:

$$A_m = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{\partial f_2}{\partial r}(a, \theta) \cos(m\theta) d\theta}{\pi k J_m'(ka)} \quad (\text{A.2.14})$$

Como la derivada normal de la función de onda en la frontera, $\partial f / \partial r(a, \theta)$, es cero en todas partes excepto en la entrada de la cuenca, como se muestra en la Ec. (A.2.2), las Ecs. (A.2.12) y (A.2.14) pueden simplificarse mas todavía.

Usando las relaciones:

$$J_0'(ka) = -J_1(ka);$$

$$k J_m'(ka) = k J_{m-1}(ka) - \frac{m}{a} J_m(ka)$$

las constantes A_0 , A_m en las ecuaciones (A.2.12) y (A.2.14) pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$A_0 = \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} C(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta}}{2\pi k (-J_1(ka))} \quad (\text{A.2.15a})$$

$$A_m = \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} C(\tilde{\theta}) \cos m\tilde{\theta} d\tilde{\theta}}{\pi [k J_{m-1}(ka) - \frac{m}{a} J_m(ka)]}, \quad (\text{A.2.15b})$$

donde $\tilde{\theta}$ es una variable muda de integración y $C(\tilde{\theta})$ representa la derivada normal de la función de onda evaluada en la entrada.

Por tanto, la solución de la Ec. (A.2.1) y las condiciones de frontera, Ec. (A.2.2) pueden obtenerse por la sustitución de Ecs. (A.2.15) en Ec. (A.2.8):

$$f_2(r, \theta) = \frac{J_0(kr) \int_{-\theta_0}^{\theta_0} C(\tilde{\theta}) d\tilde{\theta}}{2\pi k (-J_1(ka))} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_m(kr) \left[\int_{-\theta_0}^{\theta_0} C(\tilde{\theta}) \cos m\tilde{\theta} d\tilde{\theta} \right] \cos m\theta}{\pi \left[k J_{m-1}(ka) - \frac{m}{a} J_m(ka) \right]}. \quad (\text{A.2.16})$$

Si la entrada de la cuenca es pequeña, se asume que $C(\theta)$ puede aproximarse por una constante $\bar{C}$, entonces, Ec. (A.2.16) puede aproximarse como:

$$f_2(r, \theta) = \frac{J_0(kr) \bar{C} \theta_0}{-\pi k J_1(ka)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 J_m(kr) \bar{C} \sin m\theta_0 \cos m\theta}{\pi m \left[k J_{m-1}(ka) - \frac{m}{a} J_m(ka) \right]}. \quad (\text{A.2.17})$$

Con objeto de determinar el coeficiente $\bar{C}$, i.e., el valor promedio de la derivada normal de la función de onda a través de la entrada de la cuenca, la función de onda f_2 evaluada en la entrada de la cuenca, tiene que ser igual a la función de onda en la Región I evaluada en la entrada. Esto significa que en la entrada el promedio de la amplitud de onda a través de la entrada debe ser la misma cuando es determinada, ya sea en la Región I o en la Región II. Para este propósito, el promedio de la función de onda f_2 a través de la entrada de la cuenca $\bar{f}_2$ es determinado como:

$$\begin{aligned} \bar{f}_2 &= \frac{1}{2\theta_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} f_2(a, \theta) d\theta \\ &= \bar{C} \left[\frac{J_0(ka) \theta_0}{-\pi k J_1(ka)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 J_m(ka) [\sin m\theta_0]^2}{\pi \theta_0 m^2 \left[k J_{m-1}(ka) - \frac{m}{a} J_m(ka) \right]} \right]. \quad (\text{A.2.18}) \end{aligned}$$

La Ec. (A.2.18) es escrita en forma abreviada como:

$$\bar{f}_2 = \bar{C} \cdot M_c. \quad (\text{A.2.19})$$

La series M_c pueden ser calculadas una vez que el radio a , el ángulo central de la entrada $2\theta_0$, y el número de onda k son dados. Debe notarse que la Ec. (A.2.19) es similar a la Ec. (5.1.24); en ambas ecuaciones la función de onda en la entrada de la cuenca es expresada en términos de la derivada normal en la entrada de la cuenca (debe notarse que la derivada normal de la función de onda es proporcional a la velocidad horizontal). El próximo paso en la solución es expresar el valor promedio de f_I (para la Región I) en la entrada de la cuenca también como una función de la derivada normal promedio de la función de onda, $\bar{C}$, así que igualando las soluciones en la entrada de la cuenca en ambas regiones el valor de $\bar{C}$ puede determinarse.

A.2.1.2 Función de Onda fuera de la cuenca.

Como se mencionó en la sección anterior, la entrada de la cuenca se considera pequeña. Entonces, aún considerando que la entrada es un arco en la Región II y un segmento en la Región I, la diferencia en longitudes se asume despreciable. Como se desarrolló en la sección 5.1.3, la solución de onda en la entrada de la cuenca obtenida de la solución en la Región I puede expresarse como:

$$\begin{aligned} f_I(x,0) &= 1 + \frac{i}{2} \int_{\bar{AB}} \frac{\partial f_3}{\partial n}(x_0,0) H_0^{(1)}(k|x-x_0|) dx_0 \\ &= 1 + \left(-\frac{i}{2}\right) \int_{\bar{AB}} C(x_0,0) H_0^{(1)}(k|x-x_0|) dx_0, \end{aligned} \quad (\text{A.2.20})$$

donde $\bar{AB}$ representa la entrada de la cuenca, la función $C(x_0,0)$ es la derivada normal especificada por el signo de la convención de que la derivada normal hacia fuera se considera como positiva. (Ec. (A.2.20) es una forma integral de la Ec. (5.1.30) que fue desarrollada anteriormente). El primer término de el lado derecho de Ec. (A.2.20) representa la onda incidente y la reflejada en la entrada si esta se encontrara cerrada; el segundo término representa la onda radiada desde la entrada.

Con objeto de facilitar la integración en Ec. (A.2.20), el origen de el sistema coordenado es recorrido a la esquina izquierda de la entrada de la cuenca (punto a en referencia a la Fig. A.2.1). Para mantener la misma aproximación como se mencionó en la Secc. A.2.1.1, la función $C(x_0, 0)$ es aproximada por la constante $\bar{C}$. Entonces, Ec. (A.2.20) puede simplificarse tomando la constante $\bar{C}$ fuera de la integral.

$$f_1(x, 0) = 1 - \frac{i}{2} \bar{C} \int_{AB} H_0^{(1)}(k|x-x_0|) dx_0 \quad (A.2.21)$$

La función de Hankel $H_0^{(1)}(k|x-x_0|)$ en Ec. (A.2.21) puede ser separado en su parte real e imaginaria:

$$H_0^{(1)}(k|x-x_0|) = H_0^{(1)}(kr) = J_0(kr) + iY_0(kr) \quad (A.2.22)$$

donde $r = |x-x_0|$ es la distancia entre el punto $(x, 0)$ y el punto fuente $(x_0, 0)$. Sustituyendo la Ec. (A.2.22) en la Ec. (A.2.21) y realizando la integración a través de la entrada de la cuenca, queda como:

$$f_1(x, 0) = 1 - \frac{i}{2} \bar{C} \left[f_{j0}(x, 0) + i \frac{2}{\pi} f_{y0}(x, 0) \right] \quad (A.2.23)$$

donde los términos $f_{j0}(x, 0)$ y $2/\pi f_{y0}(x, 0)$ son los resultados de la integración de la parte real e imaginaria de la función de Hankel $H_0^{(1)}(kr)$ en la Ec. (A.2.21).

Con objeto de determinar el valor de $\bar{C}$ por el procedimiento de igualación, el promedio de la función de onda, $\bar{f}_1$ a través de la entrada de la cuenca puede encontrarse como:

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\Delta s} \int_0^{\Delta s} f_1(x, 0) dx, \quad (A.2.24)$$

donde Δs es la longitud de el segmento en la entrada de la cuenca. Substituyendo la Ec. (A.2.23) en la Ec. (A.2.24) se obtiene

$$\bar{f}_1 = 1 - \frac{i}{2} \bar{C} \left(J_c + i \frac{2}{\pi} Y_c \right) \Delta s \quad (A.2.25)$$

donde:

$$J_c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k \Delta s}{2} \right)^{2n}}{(n!)^2 (n+1)(2n+1)}$$

(A.2.26a)

$$Y_c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{k \Delta s}{2} \right)^{2n}}{(n!)^2 (2n+1)(n+1)} \left[\log \left(\frac{k \Delta s}{2} \right) + \gamma - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n+1} \right]$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \rho(n) \left(\frac{k \Delta s}{2} \right)^{2n}}{(n!)^2 (2n+1)(n+1)}$$

(A.2.26b)

$$y \quad \rho(n) \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

A.2.1.3 Igualación de las soluciones para cada Región en la entrada de la cuenca.

Con la función de onda promedio f_2 en la entrada de la cuenca para la región II obtenida de la Ec. (A.2.19) y la función de onda promedio f_1 en la entrada de la cuenca para la región I obtenida de la Ec. (A.2.25), las dos soluciones pueden igualarse para resolver la derivada normal promedio de la función de onda $\bar{C}$. La Ec. (A.2.25) es simplificada como:

$$\bar{f}_1 = 1 + B_0 \bar{C} \quad (A.2.27)$$

donde $B_0 = -i/2 (J_c + i 2/\pi Y_c) \Delta s$, en la cual J_c y Y_c se definen por Ec. (A.2.26a) y (A.2.26b).

Igualando Ec. (A.2.19) a Ec. (A.2.27), se obtiene:

$$\bar{C} M_c = 1 + B_0 \bar{C} \quad (A.2.28)$$

entonces el valor promedio de la derivada normal de la función de onda en la entrada de la cuenca $\bar{C}$ puede determinarse de la Ec. (A.2.28) como:

$$\bar{C} = \frac{1}{M_c - B_0}, \quad (\text{A.2.29})$$

donde M_c y B_0 serán definidos en Ec. (A.2.19) y (A.2.27) respectivamente.

Después de que el valor promedio de la derivada normal de la función de onda en la entrada de la cuenca $\bar{C}$, ha sido determinada de Ec. (A.2.29), la función de onda f_2 en cualquier posición (r, θ) dentro de la cuenca puede ser calculado de la Ec. (A.2.17).