



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería



TESIS

**Control periódico de vibraciones
basado en la técnica de rigidez conmutada**

Que presenta para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

TESISTA:

Rafael Ivan Ayala Figueroa

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Luis Omar Moreno Ahedo

Febrero/2022

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Planteamiento del problema	5
2. Teoría preeliminar	8
2.1. Sistemas Lineales	8
2.1.1. Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo	10
2.1.2. Sistemas Lineales Variantes en el tiempo	10
2.2. Teoría de Floquet	13
2.2.1. Estabilidad sistemas lineales periódicos	15
2.2.2. Ecuación de Hill	17
2.2.3. Excitación paramétrica	18
2.3. Ecuación de Reid	18
2.4. Decremento Logarítmico	20
3. Resultados principales	23
3.1. Periodicidad	24
3.1.1. Solución del PVI y PPI	24
3.2. Análisis de estabilidad	28
3.3. Ajuste del controlador	30
3.4. Análisis de sensibilidad de los parámetros	31

3.5. Resultados numéricos	32
3.5.1. Simulación	32
3.5.2. Análisis de robustez	34
3.6. Verificación experimental	35
3.6.1. Modelo experimental	35
3.6.2. Resultados experimentales	38
4. Conclusiones	40
A. Ecuación de Mathieu	41
B. Ecuación de Meissner	44

Índice de tablas

3.1. Parámetros del modelo experimental	33
3.2. Porcentaje de variación $\left[\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right]$ de los exponentes característicos $\rho_0 = 0.2155$ mientras los parámetros varían desde valores nominales $(\xi_0, \varepsilon_0) = (0.0932, 0.4000)$	34

Índice de figuras

1.1. Diagrama del péndulo de Kapitza	3
1.2. Sistema actuado masa-resorte con fricción	5
1.3. Solución numérica de la ecuación (1.12) con condición inicial $(x_0, \dot{x}_0) = (1.25, 0.25)$: (a) con $\xi = 0.15$ y $\varepsilon = 0.1$, y (b) con $\xi = 0.15$ y $\varepsilon = 0.45$	7
2.1. Diagrama de estabilidad de la ecuación de a) Mathieu, b) Meissner.	19
2.2. Respuesta libre subamortiguada de un sistema de segundo orden	21
2.3. Respuesta libre de sistema de segundo orden	22
3.1. Solución numérica de la ecuación (1.12) cuando $\xi = 0.25$ y $\varepsilon = 0.15$. (a) Solución de PVI y su espacio fase en (b). (c) Solución del PPI y su espacio fase (d).	24
3.2. Gráfica de contorno de los exponentes característicos $\rho(\varepsilon, \xi)$	30
3.3. Sistema masa-resorte: ① Actuador. ② Encoder óptico. ③ Móvil masa-resorte. ④ Arreglo engrane-cremallera-piñon ⑤ Escala ± 3.0 cm	32
3.4. Solución numérica del sistema de control (1.10) donde $m = 1.2$ [kg], $b = 4.5$ [N/m], $k = 487.8$ [Ns/m] y $k_c = 195$: (a) Posición $\hat{x}_p$. (b) Ley de control u . (c) Función de conmutación	33
3.5. Modelo experimental: ① Fuente de poder. ② dSPACE™computadora. ③ PC con Matlab/Simulink™. ④ ECP™Modelo de planta rectilínea 201. ⑤ dSPACE panel conector.	35
3.6. Diagrama de bloques para calcular la función de conmutación $\text{sgn}(\dot{x})$ sin la medición de velocidad	37
3.7. Bloque amarillo. Relación entrada-salida de la configuración de dSPACE	37
3.8. Historial temporal de las señales utilizadas para calcular la función de conmutación.	38

3.9. Diagrama de bloques para la implementación del controlador	39
3.10. Resultados experimentales del sistema de control con $k_c = 195$	39
A.1. a) Péndulo de Kapitza b) Partícula en el plano	42
A.2. Diagrama de estabilidad de la ecuación de Mathieu. U-zona de inestabilidad. S-zona de estabilidad.	43

Capítulo 1

Introducción

1.1. Generalidades

En general, los sistemas dinámicos pueden ser descritos usando el siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, \alpha) \\ y &= g(x, u, \beta)\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector de estados, y es la salida, $u \in \mathbb{R}^n$ la entrada, f y $g \in C(0, t)$ son funciones suficientemente suaves, α y β son vectores de parámetros reales. En la práctica, el sistema (1.1) puede ser reducido a un sistema lineal invariante en el tiempo [15], si y solo si las funciones f y g satisfacen las condiciones de linealidad, invariabilidad y causalidad. Esto es, el sistema (1.1) se reduce a:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$, son matrices constantes de dimensiones $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ y $q \times p$ respectivamente. El sistema (1.2) representa un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI). Estos sistemas han sido estudiados ampliamente en las últimas décadas, por lo que existe una teoría consolidada al respecto [15, 35].

Sin embargo, existen sistemas que por su naturaleza no pueden ser representados como un sistema invariante en el tiempo. Es decir, la condición de invariabilidad no se satisface, debido a que los parámetros del sistema varían en el tiempo. Esta clase de sistemas se denominan sistemas lineales variantes en el tiempo (LTV).

Dentro de los sistemas LTV distinguiremos sistemas cuya entrada de control es una función variante en el tiempo de la forma $u = K(t)Cx$. De aquí se plantea el problema de estabilización de Brockett [8] el cual es considerado un problema abierto en teoría de control moderno.

Problema 1.1.1 (Brockett) *Dada la tripleta de matrices constantes $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, ¿bajo que*

condiciones existe una matriz dependiente del tiempo $K(t)$ tal que el sistema

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}K(t)\mathbf{C}x$$

es asintóticamente estable?

En [38] se presentan condiciones suficientes para la existencia de la matriz variante en el tiempo $K(t)$, mientras que en [9] se deducen condiciones necesarias y suficientes para la existencia de $K(t)$, además de un método general para construir la matriz $K(t)$ cuando la tripleta es variante en el tiempo, esto es $(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t))$. Sin embargo, hasta ahora no se tiene un método práctico para la construcción de $K(t)$.

Una condición impuesta comúnmente y con aplicaciones prácticas es que $K(t)$ debe ser periódica y con promedio zero sobre el intervalo $[0, T]$,

$$\int_0^T K(t) dt = 0.$$

Por ejemplo, considere el sistema

$$\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + (K(t) - \omega_0^2)\theta = 0, \quad (1.3)$$

donde α y ω_0 son constantes. Este sistema se puede estabilizar eligiendo [38]

$$K(t) = \begin{cases} \beta & t \in [0, T/2] \\ -\beta & t \in [T/2, T]. \end{cases}$$

El sistema (1.3) es la aproximación lineal del bien conocido péndulo Kapitza. El péndulo de Kapitza es un péndulo invertido que tiene la peculiaridad de que su pivote vibra en dirección vertical de forma periódica (ver figura 1.1). La vibración del pivote tiene una frecuencia angular ω y una amplitud a [34].

La ecuación de movimiento del péndulo de Kapitza para ángulos θ pequeños es

$$\ddot{\theta} = \left[\frac{g}{L} - \frac{a\omega^2}{L} \sin(\omega t) \right] \theta, \quad (1.4)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo de deflexión respecto a la vertical del péndulo.

En 1951 Kapitza encuentra condiciones para que el punto de equilibrio superior del péndulo linealizado sea estable, mientras que el punto de equilibrio inferior es inestable.

La ecuación (1.4) se obtiene de la linealización, esta linealización corresponde con las celebres ecuaciones de Hill [28] y Mathieu [44] (para más detalles de la ecuación de Mathieu ver apéndice). Estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales lineales periódicas que se pueden analizar mediante diferentes técnicas. En general, el análisis de estabilidad de los sistemas lineales periódicos se lleva acabo mediante métodos que se pueden clasificar en alguno de los

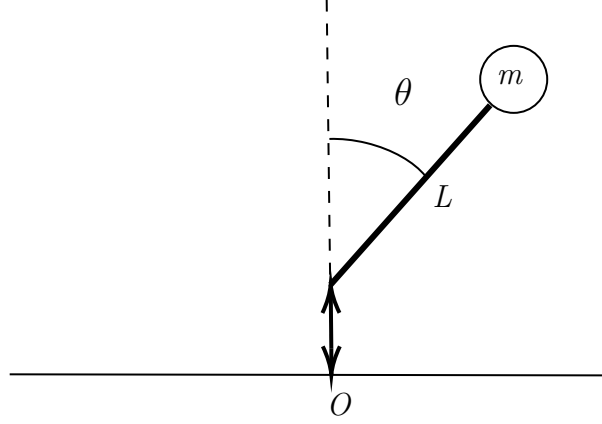


Figura 1.1: Diagrama del péndulo de Kapitza

siguientes tres tipos, 1) Métodos de determinante infinito, 2) Métodos de perturbación, 3) Métodos de Floquet. En nuestro trabajo aplicaremos extensamente la teoría de Floquet.

La teoría de Floquet propone una forma canónica para las soluciones de sistemas lineales periódicos [21, 32]. Esta forma canónica depende de un arreglo matricial al que llamamos *matriz de monodromía*. Esta matriz es muy importante ya que la estabilidad del sistema queda determinada por sus valores propios. Sin embargo, es bien conocido que en general es muy complicado de obtener analíticamente la matriz de monodromía salvo casos especiales como es la ecuación de Meissner [45, 67]. La ecuación de Meissner es un caso particular de la ecuación de Hill donde la función periódica está dada como una onda cuadrada, esto permite analizar la ecuación por intervalos donde se calcula la solución exacta y de ahí se determina la matriz de monodromía.

La teoría de Floquet es una herramienta fundamental del control periódico, esta subclasificación de la teoría de control consiste en una serie de métodos que han sido ideados para la operación de sistemas de control de forma cíclica [4, 7, 18, 58, 64].

Por otro lado, los sistemas cuyos coeficientes son dependientes del tiempo pueden caer en el fenómeno conocido como *resonancia paramétrica*. Este fenómeno puede producir respuestas que crecen exponencialmente y demeritan el funcionamiento del sistema. La resonancia paramétrica se puede presentar en los sistemas paramétricamente excitados, sin embargo también se ha mostrado que la excitación paramétrica se puede utilizar para estabilizar. Este enfoque es conocido como estabilización dinámica [33].

Un ejemplo de sistema paramétricamente excitado es el oscilador de Reid. En 1956 Reid propone un modelo que permite establecer un problema matemático bien planteado para el fenómeno de histéresis [56]. La histéresis es un fenómeno de disipación que muestran algunos materiales en donde la disipación de energía por ciclo depende de la frecuencia.

El modelo está descrito por la ecuación diferencial no lineal de segundo orden:

$$m\ddot{x} + k\left(x + \frac{|x|}{|\dot{x}|}\dot{x}\right) = 0, \quad (1.5)$$

notemos que

$$\left[\frac{|x|}{|\dot{x}|} \right] \dot{x} = x \operatorname{sgn}(x\dot{x}),$$

donde $\operatorname{sgn}(\cdot)$ es la función signo definida como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Así el oscilador de Reid se puede escribir como

$$m\ddot{x} + k(1 + \varepsilon \operatorname{sgn}[x\dot{x}])x = 0 \quad (1.7)$$

para un $\varepsilon > 0$ pequeño.

En la ecuación (1.7), la rigidez varía según el signo de la velocidad y de la posición, lo que produce el fenómeno de histéresis. Esta variación se produce de manera conmutada y de la misma forma la disipación de energía. Lo anterior conduce al concepto de modificación de rigidez para la supresión de vibraciones introducido en [26]. Más aún, posiblemente es factible utilizar el fenómeno de histéresis para el control de vibraciones introduciendo un controlador semi-activo que modifique artificialmente la rigidez.

La ecuación de Reid claramente no presenta a primera vista ningún coeficiente periódico, sin embargo, recientemente en [46] se ha mostrado que bajo las condiciones adecuadas el término dependiente del tiempo $\operatorname{sgn}[x\dot{x}]$ presenta un comportamiento periódico, de aquí que la teoría de Floquet se ha podido aplicar a la ecuación (1.7) mostrando condiciones de estabilidad asintótica.

Lo anterior apunta a una relación directa entre el oscilador de Reid y el problema de Brockett de la siguiente forma. Sea $x = [y, \dot{y}]^T$, suponga el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} x + u, \quad (1.8)$$

donde k es constante. En el sentido del problema de Brockett, el controlador $u = K(t)Cx$ que estabiliza asintóticamente el sistema se puede proponer como

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k\varepsilon \operatorname{sgn}[y\dot{y}] & 0 \end{bmatrix} x, \quad (1.9)$$

así, es claro que para el sistema (1.8) se tienen las condiciones que cuestiona Brockett en el problema (1.1.1). Más aún, se propone una clase de controlador que nos sitúa en el campo del control periódico.

Enseguida planteamos el problema principal de esta tesis el cual consiste en el análisis de un sistema ligeramente amortiguado para el que se propone un ley de control dependiente del tiempo. Se analiza el desempeño del sistema como función de sus parámetros y finalmente se implementa un controlador semi-activo basado en la modificación de la rigidez. El sistema controlado se encuentra íntimamente relacionado con el oscilador de Reid, presenta un comportamiento periódico por lo que la teoría de Floquet es aplicable directamente.

1.2. Planteamiento del problema

Considere el sistema ligeramente amortiguado masa-resorte que se muestra en la figura (1.2). La masa se desliza sobre una superficie con fricción, vamos a asumir que la fuerza de fricción f_s se puede aproximar mediante el modelo de fricción viscosa $f_s = b\dot{x}$, donde b es el coeficiente de fricción. La elección de esta suposición provee simplicidad y tratabilidad matemática, asimismo el coeficiente de fricción se puede estimar mediante la bien conocida técnica de decremento exponencial [1, 40].

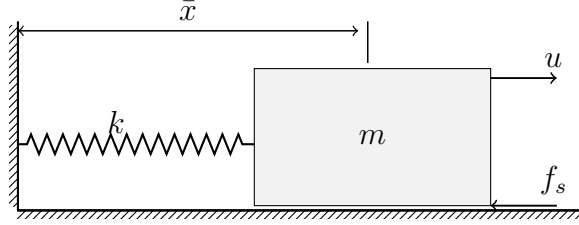


Figura 1.2: Sistema actuado masa-resorte con fricción

El modelo matemático del sistema está dado por

$$m\ddot{\bar{x}} + b\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = u, \quad (1.10)$$

donde m es la masa, k es la rigidez del resorte, u es la entrada (ley de control), las primas denotan la diferenciación respecto al tiempo τ y $(\bar{x}(0), \dot{\bar{x}}(0)) = (\bar{x}_0, \dot{\bar{x}}_0)$ son condiciones iniciales no nulas ambas.

La ley de control la definimos como

$$u = -k_c \text{sgn}(\dot{\bar{x}})\bar{x} \quad (1.11)$$

donde k_c es la ganancia del controlador y $\text{sgn}(\cdot)$ denota la función signo definida como en la ecuación 1.6.

A continuación definimos algunos parámetros adimensionales:

- Razón de amortiguamiento: $\xi = b/2\sqrt{km}$.
- Frecuencia natural: $\omega_0^2 = k/m$.
- Frecuencia auxiliar: $\omega_c^2 = k_c/m$.

Reescalando el tiempo como $t = \omega_0\tau$ y mediante el cambio de variable $\bar{x} = Lx$, donde L es una constante, el modelo (1.10) se transforma en

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + (1 + \varepsilon \text{sgn}(\dot{x}))x = 0, \quad (1.12)$$

donde los puntos denotan derivada respecto al tiempo t , las condiciones iniciales ahora son

$$(x_0, \dot{x}_0) = \left(\frac{\bar{x}_0}{L}, \frac{\dot{\bar{x}}_0}{\omega_0 L} \right),$$

y el parámetro de ajuste ε queda definido como

$$\varepsilon = \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = \frac{k_c}{k},$$

por tanto la ganancia del controlador es $k_c = \varepsilon k$.

De esta forma, la rigidez k^* del sistema (1.12) conmuta entre un valor máximo y un mínimo, $k_M > k_m > 0$ como

$$k^* = \begin{cases} k_M = 1 + \varepsilon & \text{si } x\dot{x} \geq 0 \\ k_m = 1 - \varepsilon & \text{si } x\dot{x} < 0, \end{cases}$$

además se cumple la relación

$$\varepsilon = \frac{k_M - k_m}{k_M + k_m},$$

asegurando así que $0 < \varepsilon < 1$ y por tanto $k_c < k$. Este clase de ley de control fue propuesta por Chen en [17] y verificada por Onoda et al. en [51, 52].

Cuando la fricción viscosa no está presente, la ecuación (1.12) es conocida como ecuación de Reid. Este modelo de Reid ha sido utilizada para describir amortiguamiento con histéresis [5, 55]. Se dice que la técnica de conmutación de la rigidez induce un fenómeno no lineal disipativo relacionado al amortiguamiento con histéresis [11, 70].

Para el análisis de esta ecuación, varias técnicas de análisis no lineales se han aplicado ampliamente. Por ejemplo, en [11] la solución se aproxima por la técnica del balance armónico y su estabilidad está determinada por la ecuación variacional, en [13] se realiza un análisis extenso utilizando técnicas de perturbación y se estudian casos de múltiples grados de libertad en [14], mientras que en [30, 70] se le da un enfoque analítico por partes, en [42] se desarrolla y aplica un método en el plano fase y en [68] se aplica una técnica de aproximación basado en variación de parámetros.

Una primera pregunta que nos interesa responder es: ¿bajo que condiciones la solución de la ecuación (1.12) es estable?

La figura 1.3 muestra dos soluciones numéricas de la ecuación (1.12). Asimismo se presenta el comportamiento de la conmutación de la función signo. Las soluciones se calcularon a partir de la condición inicial $(x_0, \dot{x}_0) = (1.25, 0.25)$, con parámetros $\xi = 0.15$ y $\varepsilon = 0.1$ en (a), mientras que en (b) se eligió $\xi = 0.15$ y $\varepsilon = 0.15$. En este par de soluciones podemos observar dos hechos relevantes:

1. Ambas soluciones convergen a cero;
2. El tiempo de asentamiento es menor en (b).

De lo anterior surge la siguiente pregunta: ¿cual es el ajuste de ε que produce una solución óptima?. La respuesta depende del criterio de desempeño que nos interese optimizar. Para el oscilador de Reid se han propuesto varios criterios de desempeño como lo muestra Goh

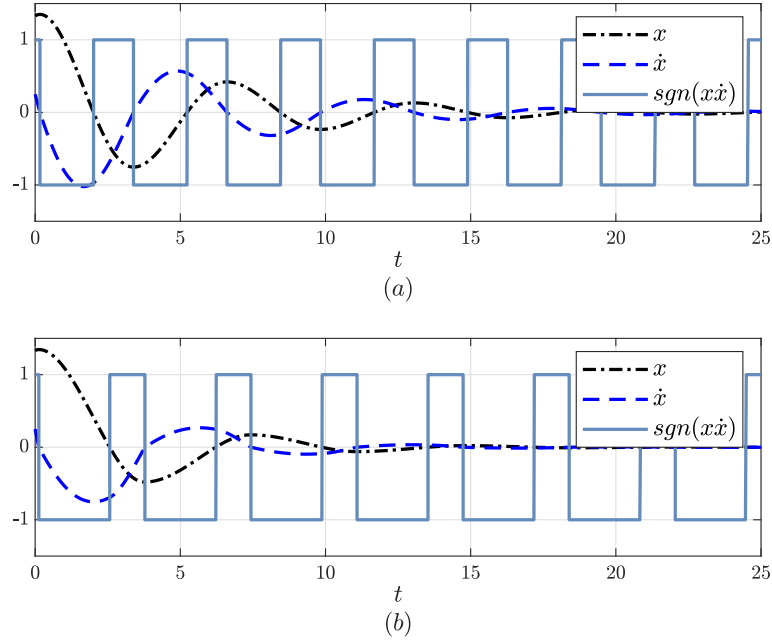


Figura 1.3: Solución numérica de la ecuación (1.12) con condición inicial $(x_0, \dot{x}_0) = (1.25, 0.25)$: (a) con $\xi = 0.15$ y $\varepsilon = 0.1$, y (b) con $\xi = 0.15$ y $\varepsilon = 0.45$

en [25]. Sin embargo, en relación a la estabilidad, el criterio de desempeño que se utilizará es la razón de decaimiento de la solución. Para el oscilador de Reid en [46] se determina un parámetro óptimo $\varepsilon_{op} \approx 0.87677$. Este valor óptimo concuerda con las aproximaciones de Chen [17], Onoda et al. [52] y Winthrop et al. [68].

Un tercer hecho importante que se puede observar en la figura 1.3 es que la función signo parece presentar un comportamiento periódico. Este hecho permitiría analizar la ecuación (1.12) como una ecuación lineal periódica. La ventaja de esto es que se pueden utilizar herramientas bien conocidas, propias del análisis de sistemas lineales en lugar de técnicas de aproximación no lineales. La principal herramienta para estudiar sistemas periódicos lineales es la teoría de Floquet la cual será presentada posteriormente.

Capítulo 2

Teoría preeliminar

2.1. Sistemas Lineales

Un sistema es un conjunto de elementos que interactúan entre sí para lograr una función u objetivo [50]. Todo sistema tiene una entrada que denotaremos como $u(t) \in \mathbb{R}^p$ y una salida que denotaremos como $y(t) \in \mathbb{R}^q$. Para definir un sistema lineal requerimos previamente el concepto de *estado del sistema*.

Definición 2.1.1 *El estado $x(t_0)$ de un sistema en el instante t_0 es la información en t_0 que junto a la entrada $u(t)$, para $t \geq t_0$, determina de manera única la salida $y(t)$ para todo $t \geq t_0$.*

Habiendo definido el concepto de estado ahora podemos expresar el par entrada-salida de un sistema como

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y(t), t \geq t_0.$$

Así, podemos definir un *sistema lineal* de la siguiente forma.

Definición 2.1.2 *Decimos que un sistema es lineal si para todo t_0 y cualquiera dos pares entrada-salida*

$$\left. \begin{array}{l} x_i(t_0) \\ u_i(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y(t), t \geq t_0,$$

para $i = 1, 2$, se cumplen las siguientes propiedades

■ *Aditividad*

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t_0) + x_2(t_0) \\ u_1(t) + u_2(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y_1(t) + y_2(t), t \geq t_0.$$

■ *Homogeneidad*

$$\left. \begin{array}{l} \alpha x_1(t_0) \\ \alpha u_1(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha y_1(t), t \geq t_0,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Otra forma equivalente de expresar el mismo concepto es mediante el *principio de superposición* el cual establece que para cualquier sistema lineal tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 x_1(t_0) + \alpha_2 x_2(t_0) \\ \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), t \geq t_0,$$

para todo par de constantes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Un sistema que no cumple el principio de superposición es llamada sistema no lineal.

Por otro lado, es conocido que todo sistema lineal se puede describir como un conjunto de ecuaciones diferenciales como sigue

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\dot{x}$ indica derivada respecto al tiempo. Asumiendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ entonces A , B , C y D son matrices de dimensiones $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ y $q \times p$ respectivamente. A las ecuaciones (2.1) se les conoce como representación en variables de estado.

Muchos sistemas físicos son no lineales y se representan mediante sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, bajo ciertas condiciones se pueden aproximar localmente mediante ecuaciones lineales y ser analizados de esta forma por lo cual estudiar sistemas lineales es de mucha importancia.

Otro elemento importante en el estudio de sistemas es la estabilidad de la salida del sistema o simplemente *estabilidad del sistema*. La estabilidad es una característica muy importante en el diseño de sistemas ya que se encuentra íntimamente relacionada con su funcionamiento. Para nuestros fines, la estabilidad la definiremos como sigue.

Definición 2.1.3 Decimos que el sistema (2.1) es estable si para toda entrada acotada $|u(t)| < \infty$ la salida $y(t)$ es acotada.

Esta definición de estabilidad también es conocida como *estabilidad de entrada acotada-salida acotada* o BIBO por sus siglas en ingles [47].

En los sistemas lineales es de interés la estabilidad de la respuesta *homogénea* del sistema es decir, cuando la entrada es nula, en tal caso el sistema se simplifica como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t), \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Para el sistema (2.2) definimos la estabilidad y la estabilidad asintótica como sigue.

Definición 2.1.4 *El sistema (2.2) es estable si todo estado inicial x_0 produce una salida acotada. Es asintóticamente estable si para todo estado inicial x_0 la salida converge a cero cuando $t \rightarrow +\infty$. Si la salida no es acotada decimos que es inestable.*

2.1.1. Sistemas Lineales Invariantes en el tiempo

Un sistema lineal se dice que es invariante en el tiempo (LTI por sus siglas en ingles), si para cada par entrada-salida

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t), \quad t \geq t_0 \end{array} \right\} \rightarrow y(t), t \geq t_0,$$

y cualquier $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\left. \begin{array}{l} x(t_0 + \tau) \\ u(t - \tau), \quad t \geq t_0 + \tau \end{array} \right\} \rightarrow y(t - \tau), t \geq t_0 + \tau.$$

Lo anterior nos indica que si una entrada u se aplica en t_0 o se aplica en $t_0 + \tau$ la salida será la misma y excepto que una inicia en t_0 o en $t_0 + \tau$ según corresponda. De esta manera para los sistemas LTI podemos asumir $t_0 = 0$.

Si las características físicas de un sistema lineal no cambian considerablemente en periodos relativamente largos de tiempo se puede modelar como LTI. La representación en variables de estado de una sistema LTI es como en el sistema de ecuaciones (2.1) excepto que las matrices ahora son constantes.

La estabilidad de los sistemas LTI homogéneo se encuentra caracterizada en el siguiente teorema.

Teorema 2.1.1 *Considere el sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Sea $\{\lambda_n\}_1^n$ el conjunto valores propios de la matriz A . Entonces el sistema es*

- estable si y solo si $Re(\lambda_i) \leq 0$ y aquellos con parte real nula son raíces simples del polinomio característico mínimo de A .
- asintóticamente estable si y solo si $Re(\lambda_i) < 0$.

2.1.2. Sistemas Lineales Variantes en el tiempo

Considere el sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.3)$$

si $A(t)$ es una matriz de dimensiones $n \times n$ cuyos elementos dependen del tiempo, entonces decimos que (2.3) es un sistema lineal variante en el tiempo (LTV por sus siglas en inglés).

Si $[A(t)]_{i,j}$ son funciones continuas a trozos, por el teorema de existencia y unicidad podemos asegurar que (2.3) tiene una solución única $x_i(t)$ para cada condición inicial $x_i(t_0)$ con $i = 1, 2, \dots, n$. Suponga que arreglamos las n soluciones $x_i(t)$ como las columnas de la matriz $X(t) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, si las condiciones iniciales $x_i(t_0)$ son linealmente independientes entonces la matriz $X(t)$ es una *matriz fundamental* de (2.3). Notemos que bajo las condiciones previamente descritas, la matriz fundamental no es única. Además, cada $X(t)$ es no singular.

Definición 2.1.5 Sea $X(t)$ una matriz fundamental de (2.3), entonces la matriz $\Phi(t, t_0) := X(t)X^{-1}(t_0)$ es llamada *matrix de transición* de (2.3).

La matriz de transición cumple las siguientes propiedades.

1. $\Phi(t, t_0)$ es no singular
2. $\Phi(t, t) = I$
3. $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$
4. $\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0)$ para todo t, t_0 y t_1 .

La solución del sistema (2.3) se puede expresar como $x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$. Por tanto, el sistema es estable si

$$|\Phi(t, t_0)| \leq M, \quad (2.4)$$

para algún M finito y todo $t \geq t_0$. De forma similar, la solución es asintóticamente estable si $|\Phi(t, t_0)| \rightarrow 0$ mientras $t \rightarrow +\infty$.

En general es complicado calcular la matriz de transición por lo que verificar la condición (2.4) puede ser muy complicado.

Es natural preguntarse si la estabilidad de (2.3) también se puede caracterizar mediante los valores propios de $A(t)$, tal como en los sistemas LTI. Desafortunadamente la respuesta es negativa, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.1 Considere el sistema LTV

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

el polinomio característico de $A(t)$ es

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2,$$

claramente la parte real de los valores propios es negativa. Se puede verificar que la matriz de transición es

$$\Phi(t, 0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Sin embargo, esta matriz no es acotada, es decir, no existe M tal que $|\Phi(t, 0)| \leq M$. Por tanto, la respuesta no es estable ni asintóticamente estable.

El ejemplo anterior muestra que los valores propios de $A(t)$ no son útiles para determinar la estabilidad de los sistemas LTV. Algunos criterios de estabilidad para sistemas LTV pueden ser revisado en [2, 16, 20, 29, 43, 71].

Los *Sistemas Lineales Periódicos* son un subconjunto de los sistemas LTV ampliamente estudiado [7, 19, 39, 61]. Decimos que el sistema (2.1) es periódico si existe $T > 0$ tal que $A(t+T) = A(t)$, $B(t+T) = B(t)$, $C(t+T) = C(t)$, $D(t+T) = D(t)$. La periodicidad puede ser una característica intrínseca del fenómeno estudiado pero también puede ser inducida. Dos formas de inducir la periodicidad es la linealización y el muestreo.

1. **Periodicidad inducida por linealización.** Para analizar un fenómeno en una vecindad de un movimiento periódico, una técnica muy utilizada es la linealización. Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= g(x(t), u(t)),\end{aligned}$$

y sean $\bar{x}(t)$ una solución periódica de periodo T asociada con la entrada $\bar{u}(t)$ y salida $\bar{y}(t)$, ambas con periodo T . La linealización viene dada por las ecuaciones

$$\nu(t) = u(t) - \bar{u}(t), \quad \xi(t) = x(t) - \bar{x}(t), \quad \eta(t) = y(t) - \bar{y}(t),$$

y las matrices

$$\begin{aligned}A(t) &= \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} & B(t) &= \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \\ C(t) &= \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} & D(t) &= \left. \frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}}\end{aligned}$$

Estas cuatro matrices son periódicas de periodo T . De esta forma obtenemos el sistema lineal periódico

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A(t)\xi(t) + B(t)\nu(t), \\ \dot{\eta}(t) &= C(t)\xi(t) + D(t)\nu(t).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Para consultar algunos ejemplos ver [27, 49].

2. **Periodicidad inducida por muestreo multifrecuencia.** La idea general del muestreo multifrecuencia es modelar un muestreador mediante una combinación de p muestreadores de la entrada $u(t) \in \mathbb{R}^p$, así como q muestreadores de la salidas $y(t) \in \mathbb{R}^q$, cada uno con su propia frecuencia de muestreo.

En el esquema multifrecuencia se define la cantidad T_0 como el mínimo común múltiplo de todos los periodos de muestreo. El modelo multifrecuencia resultante es un sistema periódico con periodo T_0 . Para más detalles ver [7].

En los sistemas lineales periódicos también es importante determinar la estabilidad de la respuesta. La teoría de Floquet presenta una respuesta relativamente satisfactoria para esta tarea.

2.2. Teoría de Floquet

Una de las más importantes contribuciones en el estudio de sistemas periódicos es la teoría de Floquet. Esta estudia sistemas periódicos sin excitación exógena. Es decir, estudia el sistema homogéneo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.8)$$

donde se cumple que $A(t+T) = A(t)$ para algún $T > 0$. La solución del sistema es

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0,$$

donde $\Phi(t, t_0)$ es la matriz de transición de (2.8). La matriz de transición evaluada en el primer periodo $\Phi(t_0 + T, t_0) = \Phi(T)$ es conocida como *matriz de monodromía*. Además, de la construcción de $\Phi(t, t_0)$ tenemos que $\Phi(t+T, t_0) = \Phi(t, t_0)$, luego se cumple

$$x(t+kT) = \Phi^k(T)x(t). \quad (2.9)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

En general no existe una expresión analítica para la matriz de transición. Sin embargo, el determinante de $\Phi(t, t_0)$ se puede obtener mediante la fórmula de Liouville-Jacobi

$$\det[\Phi(t, t_0)] = e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(\tau))d\tau}$$

Definición 2.2.1 *Los valores propios λ_i de la matriz de monodromía $\Phi(T)$ se conocen como multiplicadores característicos.*

De la fórmula de Liouville-Jacobi se tiene que

$$\det[\Phi(T)] = \det[\Phi(t_0 + T, t_0)] = e^{\int_{t_0}^{t_0+T} \text{tr}(A(\tau))d\tau} = e^{\int_0^T \text{tr}(A(\tau))d\tau}$$

además, $\det[\Phi(T)] = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.

Una pregunta de interés en el estudio de sistemas lineales periódicos es si existe un cambio de coordenadas $L(t)$ tal que transforme el sistema periódico en un sistema LTI. Esto implicaría que el comportamiento del sistema periódico quedaría determinado por los valores propios del sistema transformado, salvo la consideración del cambio de coordenadas. A finales del siglo XIX los matemáticos Gaston Floquet y Aleksandr Mikhailovich Lyapunov trabajaron en este problema de manera independiente. Hoy en día se sabe que la transformación existe y es conocida como transformación de Floquet-Lyapunov. La transformación de Floquet-Lyapunov es la base de la teoría de Floquet y se puede esbozar de la siguiente forma.

Sea $L(t)$ la transformación de Floquet-Lyapunov

$$y(t) = L(t)x(t)$$

supondremos que $L(t)$ es T -periódica, es clase $C^1[0, +\infty)$ y que $L(t)$, $L^{-1}(t)$ y $\dot{L}(t)$ son acotadas. Aplicando la transformación al (2.8) se obtiene

$$\dot{y}(t) = [L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t)] y(t).$$

El problema entonces es encontrar $L(t)$ tal que $B := L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t)$ sea constante. Por otra parte, $L(t)$ debe cumplir la ecuación diferencial

$$\dot{L}(t) = BL(t) - L(t)A(t),$$

dada la condición inicial $L(t_0)$, la solución es

$$L(t) = e^{B(t-t_0)} L(t_0) \Phi(t_0, t),$$

luego, haciendo $t = t_0 + T$ y utilizando la condición de periodicidad $L(t) = L(t+T)$ obtenemos

$$L(t_0) = L(t_0 + T) = e^{BT} L(t_0) \Phi(t_0, t_0 + T),$$

de las propiedades de la matriz de transición vemos que $\Phi(t_0, t_0 + T) = \Phi^{-1}(t_0 + T, t_0)$, por tanto

$$L(t_0) = e^{BT} L(t_0) \Phi^{-1}(t_0 + T, t_0),$$

suponiendo $L(t_0) = I$, entonces

$$e^{BT} = \Phi(t_0 + T, t_0) = \Phi(T), \quad (2.10)$$

así $L(t)$ toma la forma

$$L(t) = e^{B(t-t_0)} \Phi(t_0, t), \quad (2.11)$$

y es igual a la identidad en $t = t_0 + kT$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De lo anterior podemos escribir el teorema de Floquet-Lyapunov.

Teorema 2.2.1 (Floquet-Lyapunov) *La matriz fundamental $X(t)$ del sistema (2.8) con $X(0) = I$ tiene la forma*

$$X(t) = Q(t)e^{Bt}$$

donde $Q(t) \in C^1(\mathbb{R})$ es T -periódica y la matriz $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ satisface $C = X(T) = e^{BT}$. Además se cumple que $Q(0) = I$ y $Q(t)$ es invertible para todo t .

Demostración. Elegimos $Q(t) = L^{-1}(t)$ donde $L(t)$ es la transformación de Floquet-Lyapunov y tomamos $t_0 = 0$. De los supuestos sobre $L(t)$ sabemos que $L(0) = I$, por tanto $Q(0) = L^{-1}(0) = I$. Por hipótesis $X(0) = I$, entonces $\Phi(t, 0) = X(t)$. Así de la ecuación (2.11) tenemos

$$L(t) = Q^{-1}(t) = e^{Bt} X^{-1}(t),$$

por tanto $X(t) = Q(t)e^{Bt}$. Asimismo de la ecuación (2.10) vemos que $e^{BT} = \Phi(T, 0) = X(T)$.

■

En la ecuación (2.10) hemos visto que la matriz de monodromía se encuentra relacionada con la matriz constante B . A los valores propios de B se les conocen como *exponentes característicos*. Si λ_i es un multiplicador característico, entonces existe un exponente característico ρ_i tal que se cumple la relación

$$\lambda_i = e^{\rho_i T}.$$

Un hecho importante sobre los multiplicadores característicos es que son independientes del tiempo así como su multiplicidad. En otras palabras, son una característica inherente del sistema y es invariante en el tiempo.

2.2.1. Estabilidad sistemas lineales periódicos

La estabilidad en sistemas lineales periódicos se puede estudiar a través de la matriz de monodromía. Los multiplicadores característicos determinan la estabilidad de la respuesta de los sistemas periódicos. Esto se establece con el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2 *El sistema periódico homogéneo $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ es*

- estable si y solo si $|\lambda_i| \leq 1$,
- asintóticamente estable si y solo si $|\lambda_i| < 1$ y que la multiplicidad algebraica de los que cumplen $|\lambda_i| = 1$ sea igual a uno

para todo i .

Además de estabilidad y estabilidad asintótica, tenemos la *estabilidad exponencial*, otra definición de estabilidad ampliamente citada en la literatura.

Definición 2.2.2 *Se dice que la solución trivial del sistema (2.8) es exponencialmente estable si existen γ y λ constantes positivas tal que $|\Phi(t, t_0)| \leq \gamma e^{\lambda t}$ para $t > t_0$.*

El teorema de Lyapunov-Floquet nos asegura que existe un cambio de coordenadas que transforma el sistema (2.8) en un sistema LTI, entonces la estabilidad exponencial se puede introducir de la siguiente forma.

Lemma 2.2.1 *Sea $y(t) = F(t)x(t)$ el cambio de coordenadas que transforma el sistema (2.8) en el sistema lineal con coeficientes constantes $\dot{y}(t) = Ky(t)$ con $K = 1/T \Phi(T)$. El sistema (2.8) es exponencialmente estable si y solo si $\dot{y}(t) = Ky(t)$ es exponencialmente estable.*

Ejemplo 2.2.1 *Considere el sistema*

$$\ddot{x} + a(t)x = 0,$$

donde $a(t)$ es T -periódica. El sistema se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A(t)\mathbf{x}.$$

Supongamos que de la condición inicial $(x_1(0), x_2(0))^T = (1, 0)^T$ se obtiene la solución $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})^T$ y de la condición inicial $(x_1(0), x_2(0))^T = (0, 1)^T$ se obtiene la solución $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})^T$. Por tanto la matriz de transición es

$$\Phi(t, 0) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{pmatrix},$$

y la matriz de monodromía es $\Phi(T) = \Phi(T, 0)$. Ahora bien,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det[\Phi(T)] = e^{\int_0^T \text{tr}(A(\tau)) d\tau} = e^{\int_0^T 0 d\tau} = 1,$$

por otro lado,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(\Phi(T)) = x_1^{(1)}(T) + x_2^{(2)}(T).$$

Definiendo $\phi = \text{tr}(\Phi(T))/2$ tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 2\phi, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$\lambda_{1,2} = \phi \pm \sqrt{\phi^2 - 1}.$$

Podemos escribir $\lambda_i = e^{\rho_i T}$, de donde vemos que

$$\rho_1 + \rho_2 = 0,$$

así que

$$\begin{aligned} e^{\rho_1 T} + e^{\rho_2 T} &= 2\phi, \\ e^{\rho_1 T} + e^{-\rho_1 T} &= 2\phi, \\ \frac{e^{\rho_1 T} + e^{-\rho_1 T}}{2} &= \phi, \\ \cosh(\rho_1 T) &= \phi. \end{aligned}$$

De aquí se identifican los siguientes casos

- Si $\phi > 1$, las soluciones no son estables y tienen la forma

$$x(t) = c_1 e^{\rho_1 t} p_1(t) + c_2 e^{\rho_2 t} p_2(t),$$

donde $p_i(t)$ son funciones T -periódicas.

- Si $\phi = 1$, los exponentes característicos se repiten $\rho = \rho_1 = \rho_2$, las soluciones no son estables y tienen la forma

$$x(t) = (c_1 + tc_2)e^{\rho t}p_1(t) + c_2e^{\rho t}p_2(t),$$

donde $p_i(t)$ son funciones T -periódicas.

- Si $-1 < \phi < 1$, las soluciones son estables y tienen la forma

$$x(t) = c_1\text{Re}[e^{\sigma it}]p_1(t) + c_2\text{Im}[e^{\sigma it}]p_2(t),$$

con $\sigma = \frac{2\pi}{nT}$ y $p_i(t)$ T -periódicas.

- Si $\phi = -1$, los exponentes característicos se repiten $\rho = \rho_1 = \rho_2$, las soluciones no son estables y tienen la forma

$$x(t) = (c_1 + tc_2)e^{\rho t}q_1(t) + c_2e^{\rho t}q_2(t),$$

donde $q_i(t)$ son funciones $2T$ -periódicas.

- $\phi < -1$, las soluciones son no estables de la forma

$$x(t) = c_1e^{\gamma t}q_1(t) + c_2e^{\gamma t}q_2(t),$$

donde $q_i(t)$ son funciones $2T$ -periódicas y $\gamma = \rho_1 - \frac{\pi i}{T}$.

2.2.2. Ecuación de Hill

En 1886 George William Hill, mientras estudiaba el perigeo lunar, introdujo la hoy célebre ecuación de Hill [28].

$$\ddot{x}(t) + (\delta + \epsilon p(t))x(t) = 0.$$

Es una ecuación diferencial de segundo orden donde δ y ϵ son constantes y $p(t)$ es una función periódica. La teoría de Floquet describe detalladamente las soluciones de la ecuación de Hill. Esta ecuación modela una amplia variedad de fenómenos en física y de ingeniería [10, 28, 57, 66].

Un caso particular es cuando $\epsilon p(t) = -2q \cos(2t)$. A esta ecuación se le conoce como *ecuación de Mathieu* y fue introducida por Émile Léonard Mathieu mientras estudiaba las vibraciones de una membrana elíptica [44]. De igual forma la ecuación de Meissner es un caso particular de la ecuación de Hill con $\delta = \alpha^2$ y $\epsilon p(t) = \omega^2 \text{sgn}[\cos(t)]$ donde $\text{sgn}[\cdot]$ es la función signo [45]. Debido a que la ecuación de Meissner es invariante por intervalos, los cálculos se pueden realizar de manera exacta.

Claramente la ecuación de Hill es un caso especial del ejemplo (2.2.1) con $a(t) = \delta + \epsilon p(t)$. Tomando condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, \dot{x}_1(0) = 0, \\ x_2(0) &= 0, \dot{x}_2(0) = 1, \end{aligned}$$

tenemos la matriz de monodromía

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ \dot{x}_1(T) & \dot{x}_2(T) \end{pmatrix},$$

por tanto

$$\phi = \frac{x_1(T) + \dot{x}_2(T)}{2}.$$

Como hemos visto, tenemos cinco casos posibles de los cuales solo $\phi \in (-1, 1)$ presenta soluciones estables. No es el objetivo del presente trabajo ahondar en mayores detalles de ecuación de Hill, más allá de señalar el importante rol que juega la matriz de monodromía. El lector interesado en un análisis más profundo puede consultar [28, 31, 63].

2.2.3. Excitación paramétrica

La *excitación paramétrica* sucede cuando alguno de los parámetros de un sistema varía en función del tiempo. Dependiendo de las características del sistema, esta excitación puede producir un fenómeno conocido como *resonancia paramétrica*. Este fenómeno produce un crecimiento no acotado del sistema es decir, inestabilidad.

La *resonancia* es un efecto que podemos observar en los sistemas forzados. Bajo ciertas condiciones en la frecuencia de la señal forzante, la respuesta de un sistema es inestable y a esto se le conoce como resonancia. Sin embargo, la resonancia se puede eliminar agregando elementos disipativos. Por otro lado, la resonancia paramétrica no depende de señales externas sino de la modificación temporal de los parámetros. Además, generalmente la resonancia paramétrica no se elimina mediante elementos disipativos [53].

Un ejemplo recurrente en la literatura para ejemplificar la resonancia paramétrica es la ecuación de Hill. En particular, la ecuación de Mathieu a sido ampliamente estudiada en este sentido. Aplicando los criterios de estabilidad de la teoría de Floquet se pueden obtener diagramas de estabilidad en el espacio de parámetros para la ecuación de Meissner y la ecuación de Mathieu. En estos diagramas se pueden identificar zonas de inestabilidad conocidas como lenguas de Arnold nombradas en honor al matemático Vladimir Arnold [3].

2.3. Ecuación de Reid

Una característica que muestran algunos materiales es un tipo de amortiguamiento interno donde la disipación de energía por ciclo es proporcional al cuadrado de la amplitud de la señal que incide en el material e independiente de la frecuencia. Este hecho fue descubierto en 1927 por Kimball y Lovell [36]. Un importante número de trabajos fueron publicados en los años siguientes utilizando el concepto de *amortiguamiento histerético lineal* como en [6, 12, 37, 48, 62] entre otros. Uno de ellos y el que nos ocupa ahora es el modelo de Reid [56].

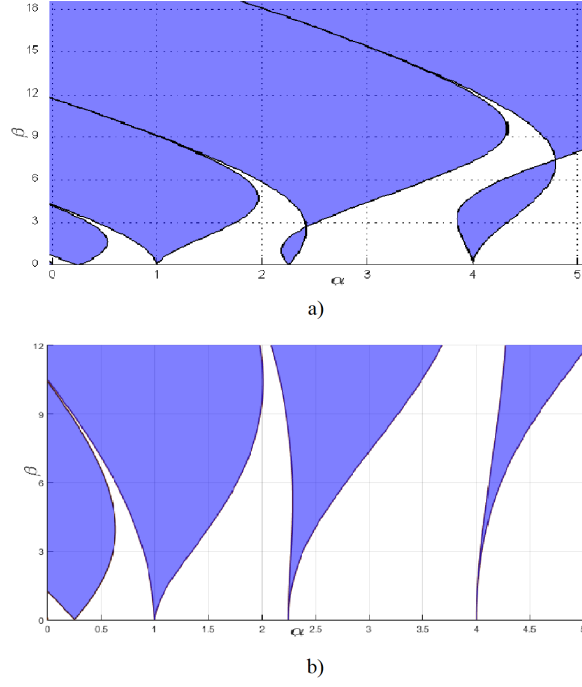


Figura 2.1: Diagrama de estabilidad de la ecuación de a) Mathieu, b) Meissner.

Este modelo no lineal también conocido como *resorte de Reid* pretende describir la fuerza de restauración con histéresis de un resorte de la siguiente forma

$$F(x) = k(x + \varepsilon|x|\operatorname{sgn}(\dot{x})) = kx(1 + \varepsilon\operatorname{sgn}(x\dot{x})),$$

donde k y ε son constantes y $\operatorname{sgn}(\cdot)$ es la función signo estandar. Considere ahora las oscilaciones libres de una masa m unida a un resorte de Reid. El modelo queda como

$$m\ddot{x} + k(1 + \varepsilon\operatorname{sgn}(x\dot{x}))x = 0, (x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, 0). \quad (2.12)$$

Asumiendo $\varepsilon \in (0, 1)$ y con escalamiento de tiempo $\omega t = \tau$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$, el modelo (2.12) se transforma en

$$x'' + (1 + \varepsilon\operatorname{sgn}(xx'))x = 0, (x(0), x'(0)) = (x_0, 0), \quad (2.13)$$

donde $x' = \frac{dx}{d\tau}$. A (2.13) se le conoce como ecuación de Reid.

Notemos que la ecuación de Reid admite una cantidad finita de discontinuidades, la condición del teorema de Cauchy-Lipschitz se cumple y por tanto (2.13) tiene solución $x(\tau)$ y es única. Se puede calcular que el periodo de oscilación de $x(\tau)$ es

$$T(\varepsilon) = \pi \frac{\sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

además

$$x(T(\varepsilon)) = x_0 \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

por tanto

$$\frac{x(T(\varepsilon))}{x(0)} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Para más detalles ver [11].

Por otro lado, la energía de (2.13) es

$$E(\tau) = \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}x^2,$$

y esta decae a una tasa de

$$E'(\tau) = -\varepsilon|x'x| < 0,$$

por tanto las soluciones $x(\tau)$ son estables [24].

La ecuación de Reid motiva el concepto de *modificación de la rigidez*. Es un ejemplo de un sistema donde se puede aplicar exitosamente esta técnica para el control de vibraciones [46].

2.4. Decremento Logarítmico

El decremento logarítmico es un método para determinar experimentalmente el coeficiente de amortiguamiento (ξ) del sistema de segundo orden

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (2.14)$$

El método depende de obtener una respuesta subamortiguada del sistema (2.14). Esta respuesta se caracteriza por presentar oscilaciones en una envolvente que decae (ver figura 2.2). Mientras mayor es el subamortiguamiento, más oscilaciones se presentan y el tiempo de acentamiento es también mayor. Para obtener una respuesta subamortiguada el coeficiente de amortiguamiento debe ser menor que la unidad ($\xi < 1$).

La solución subamortiguada se expresa como

$$x(t) = Ce^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega t + \phi), \quad (2.15)$$

donde C es una constante y $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$.

La idea del decremento logarítmico es comparar la amplitud de las vibraciones libres entre dos instantes de tiempo distintos, por ejemplo $t_1 = t$ y $t_2 = t + nT$ donde $T = 2\pi/\omega$ es el periodo de oscilación de las vibraciones libres.

Utilizando la solución (2.15), el cociente entre las amplitudes $x_1 = x(t_1)$ y $x_2 = x(t_2)$ es

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x(t)}{x(t + nT)} = \frac{Ce^{-\xi\omega_0 t}}{Ce^{-\xi\omega_0(t+nT)}} = e^{\xi\omega_0 nT}, \quad (2.16)$$

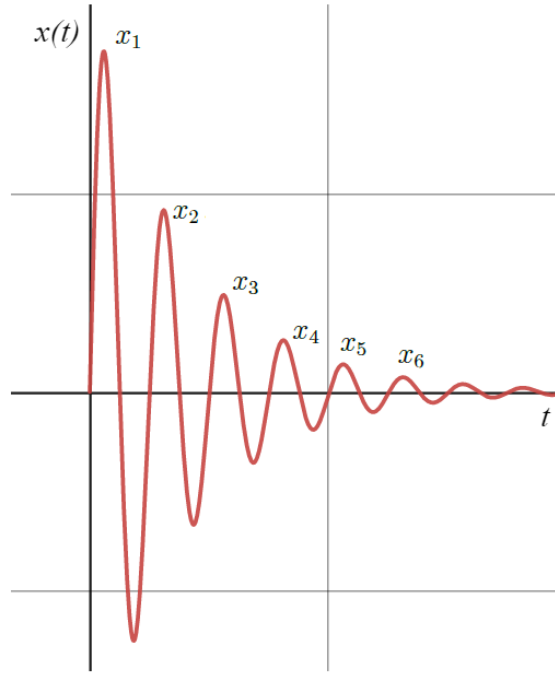


Figura 2.2: Respuesta libre subamortiguada de un sistema de segundo orden

aplicando logarítmo a ambos lados de la ecuación queda

$$\ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \xi \omega_0 n T,$$

de donde se sigue

$$\ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \xi \omega_0 n \frac{2\pi}{\omega},$$

considerando la frecuencia

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2},$$

sustituyendo tenemos

$$\ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = 2\pi n \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Ahora bien para $n = 1$ es decir, la relación entre dos picos consecutivos quedaría como

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}},$$

de esta forma obtenemos que

$$\xi = \frac{\ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \right]^2}}, \quad (2.17)$$

además, si el coeficiente de amortiguamiento es muy pequeño ($\xi \ll 1$) entonces

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \approx \xi. \quad (2.18)$$

Experimentalmente se pueden medir dos picos consecutivos x_1 y x_2 de las vibraciones libres del sistema para después aplicar la ecuación (2.17) y determinar el coeficiente de amortiguamiento ξ .

Es importante señalar que el decremento logarítmico es una aproximación. Mientras mayor es el valor del coeficiente de amortiguamiento el método es menos preciso y ya que hemos asumido una respuesta subamortiguada, para amortiguamientos mayores a la unidad no se puede aplicar el método ya que en tal caso la respuesta sería sobreamortiguada.

Ejemplo 2.4.1 *La respuesta libre de un sistema de segundo orden se observa en la gráfica 2.3. ¿Cual es el coeficiente de amortiguamiento? Solución: Como se puede observar en la*

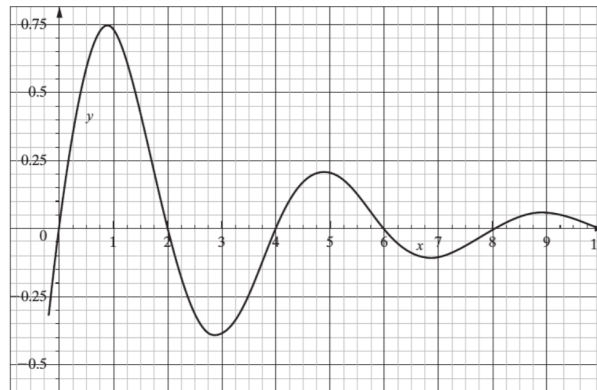


Figura 2.3: Respuesta libre de sistema de segundo orden

gráfica, el primer pico tiene un valor aproximadamente de $x_1 = 0.74$, mientras que el segundo pico es aproximadamente $x_2 = 0.21$. Estos valores los sustituimos en (2.17) para calcular el coeficiente de amortiguamiento, quedando

$$\xi = \frac{\ln \left(\frac{0.74}{0.21} \right)}{\sqrt{4\pi^2 + \left[\ln \left(\frac{0.74}{0.21} \right) \right]^2}} = 0.196.$$

Observamos que al sustituir en (2.18) el resultado es

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{0.74}{0.21} \right) = 0.200,$$

obteniendose un resultado bastante cercano con diferencia menor al 2%.

Capítulo 3

Resultados principales

Recordemos la ecuación amortiguada de Reid presentada anteriormente expresada como

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + (1 + \varepsilon \operatorname{sgn}(x\dot{x}))x = 0, \quad (3.1)$$

sujeta a la condición inicial

$$(x_0, \dot{x}_0) = \left(\frac{\bar{x}_0}{L}, \frac{\bar{x}'_0}{\omega_0 L} \right). \quad (3.2)$$

Este planteamiento toma en consideración las fuerzas disipativas presentes en los sistemas del mundo real. Estas fuerzas están caracterizadas y cuantificadas por el coeficiente viscoso de amortiguamiento, este supuesto es factible en una vecindad del origen [41].

Utilizaremos la teoría de Floquet para el análisis de la ecuación de Reid amortiguada. Este enfoque es bastante simple y permite obtener resultados analíticos sin utilizar aproximaciones. Para emplear la teoría de Floquet debemos reescribir la ecuación no lineal (1.12) como una ecuación diferencial lineal periódica, es decir, tenemos que mostrar que la función $\operatorname{sgn}(x\dot{x})$ presenta un comportamiento periódico y además que su periodo es independiente de la condición inicial.

Para verificar la periodicidad de la ecuación (1.12) formulamos dos conjuntos de condiciones iniciales linealmente independientes como sigue:

1. Si $L = \bar{x}$ y $\bar{x}'_0 = 0$, la condición inicial (3.2) adimensionalizada queda como $(x_0, \dot{x}_0) = (1, 0)$. De aquí definimos el *problema de posición inicial (PPI)* como :

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + (1 + \varepsilon \operatorname{sgn}(x\dot{x}))x = 0, \quad (x_0, \dot{x}_0) = (1, 0). \quad (3.3)$$

2. Si $L = \omega_0/\bar{x}'_0$ y $\bar{x}_0 = 0$, la condición inicial (3.2) adimensionalizada queda como $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 1)$. De igual forma definimos el *problema de velocidad inicial (PVI)* como:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + (1 + \varepsilon \operatorname{sgn}(x\dot{x}))x = 0, \quad (x_0, \dot{x}_0) = (0, 1). \quad (3.4)$$

Denotemos como x_p a la solución del problema de posición inicial y como x_v la solución del problema de velocidad inicial. En la figura (3.1) podemos observar soluciones numéricas del PPI y PVI junto a la conmutación de la función signo. Para mostrar que la función signo es periódica calcularemos de manera exacta x_p y x_v en la siguiente sección. Esto lo podremos hacer ya que en cada cuadrante del espacio fase la función queda bien definida y por tanto la ecuación de Reid amortiguada se puede resolver de forma analítica.

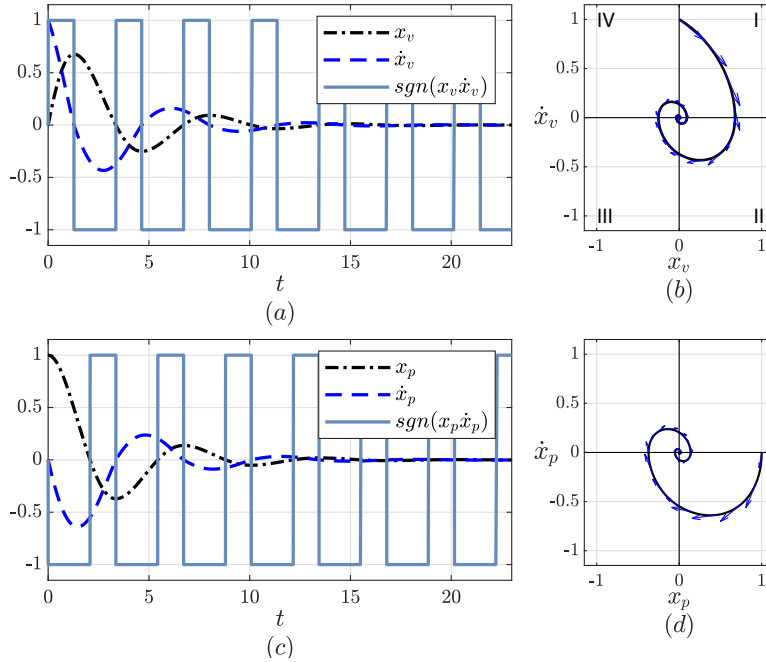


Figura 3.1: Solución numérica de la ecuación (1.12) cuando $\xi = 0.25$ y $\varepsilon = 0.15$. (a) Solución de PVI y su espacio fase en (b). (c) Solución del PPI y su espacio fase (d).

3.1. Periodicidad

El espacio fase correspondiente a x_p y x_v se pueden observar en 3.1b y 3.1d respectivamente. Para determinar la periodicidad de la función signo calcularemos los instante de conmutación t_i . A continuación analizaremos la solución en cada cuadrante de su espacio fase donde la función $\text{sgn}(x\dot{x})$ está bien definida y por tanto la ecuación de Reid amortiguada se puede resolver analíticamente.

3.1.1. Solución del PVI y PPI

Para el problema de velocidad inicial, considere la nomenclatura de los cuadrantes como en la figura 3.1b. Obtendremos la solución en cada cuadrante del espacio fase de la siguiente forma.

1. En el primer cuadrante tenemos $\text{sgn}(x\dot{x}) = 1$, entonces la ecuación (1.12) se simplifica como

$$\ddot{x}_1 + 2\xi\dot{x}_1 + (1 + \varepsilon)x_1 = 0,$$

bajo la condición inicial $(x_0, \dot{x}_0) = (0, 1)$. El polinomio característico es

$$s^2 + 2\xi s + 1 + \varepsilon = 0,$$

cuyas raíces son $s = -\xi \pm \sqrt{-(1 - \xi^2 + \varepsilon)}$.

Para una respuesta oscilatoria se debe cumplir $1 - \xi^2 + \varepsilon > 0$, entonces, $s = -\xi \pm i\omega_h$, donde $\omega_h = \sqrt{1 - \xi^2 + \varepsilon}$. Así, la solución está dada por

$$x_1(t) = c_1 e^{(-\xi + i\omega_h)t} + c_2 e^{(-\xi - i\omega_h)t},$$

donde c_1 y c_2 se calculan utilizando la condición inicial. De esta forma se tiene la solución

$$x_1(t) = \frac{1}{\omega_h} e^{-\xi t} \sin \omega_h t,$$

y su derivada

$$\dot{x}_1(t) = e^{-\xi t} \left(\cos \omega_h t - \frac{\xi}{\omega_h} \sin \omega_h t \right).$$

En el primer instante de conmutación $t = t_1$ tenemos $\dot{x}_1(t_1) = 0$, es decir,

$$\cos \omega_h t_1 - \frac{\xi}{\omega_h} \sin \omega_h t_1 = 0,$$

de donde vemos que

$$t_1 = \frac{1}{\omega_h} \arctan \frac{\omega_h}{\xi},$$

por tanto

$$x_1^0 := x_1(t_1) = e^{-\xi t_1} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \omega_h^2}}.$$

2. En el segundo cuadrante la función signo conmuta a $\text{sgn}(x\dot{x}) = -1$. La ecuación (1.12) queda como

$$\ddot{x}_2 + 2\xi\dot{x}_2 + (1 - \varepsilon)x_2 = 0,$$

donde la condición inicial es $(x_1^0, \dot{x}_1^0 = 0)$. Las raíces del polinomio característico son $s = -\xi\omega_0 \pm \sqrt{-(1 - \xi^2 - \varepsilon)}$, si $(1 - \xi^2) - \varepsilon > 0$ entonces $s = -\xi\omega_0 \pm i\omega_l$ donde $\omega_l = \sqrt{1 - \xi^2 - \varepsilon}$. La solución esta dada por

$$x_2(t) = c_1 e^{(-\xi + i\omega_l)t} + c_2 e^{(-\xi - i\omega_l)t},$$

donde c_1 and c_2 son constantes. Aplicando la condición inicial tenemos

$$x_2(t) = \frac{x_1^0 e^{-\xi t}}{\omega_l} (\omega_l \cos \omega_l t + \xi \sin \omega_l t),$$

y su derivada es

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{x_1^0 e^{-\xi t} (\xi^2 + \omega_l^2)}{\omega_l} \sin \omega_l t.$$

En el instante de conmutación $t = t_2$ se cumple $x_2(t_2) = 0$ es decir,

$$\omega_l \cos \omega_l t_2 + \xi \sin \omega_l t_2 = 0,$$

entonces

$$t_2 = \frac{1}{\omega_l} (\arctan(-\frac{\omega_l}{\xi}) + \pi),$$

y así

$$\dot{x}_2^0 := \dot{x}_2(t_2) = -\frac{x_1^0 e^{-\xi t_2}}{\omega_l} (\xi^2 + \omega_l^2) \sin \omega_l t_2 = e^{-\xi(t_1+t_2)} \frac{\sqrt{\xi^2 + \omega_l^2}}{\sqrt{\xi^2 + \omega_h^2}}.$$

3. En el tercer cuadrante $\text{sgn}(x\dot{x}) = 1$, entonces la ecuación (1.12) se reduce a

$$\ddot{x}_3 + 2\xi\dot{x}_3 + (1 + \varepsilon)x_3 = 0,$$

con condición inicial $(x_2^0 = 0, \dot{x}_2^0)$. Siguiendo la misma estrategia que en los cuadrantes anteriores la solución x_3 y su derivada son

$$x_3(t) = \frac{\dot{x}_2^0}{\omega_h} e^{-\xi t} \sin \omega_h t,$$

y

$$\dot{x}_3(t) = \dot{x}_2^0 e^{-\xi t} (\cos \omega_h t - \frac{\xi}{\omega_h} \sin \omega_h t),$$

respectivamente. En $t = t_3$ tenemos la conmutación de la función signo, entonces $\dot{x}_3(t_3) = 0$, de donde se sigue que

$$t_3 = \frac{1}{\omega_h} \arctan \frac{\omega_h}{\xi},$$

y obtenemos

$$x_3^0 := x_3(t_3) = e^{-\xi(t_1+t_2+t_3)} \frac{\sqrt{\xi^2 + \omega_l^2}}{\xi^2 + \omega_h^2}.$$

4. Finalmente en el último cuadrante $\text{sgn}(x\dot{x}) = -1$, entonces

$$\ddot{x}_4 + 2\xi\dot{x}_4 + (1 - \varepsilon)x_4 = 0,$$

con condición inicial $(x_3^0, \dot{x}_3^0 = 0)$. La solución es

$$x_4(t) = \frac{x_3^0}{\omega_l} e^{-\xi t} (\omega_l \cos \omega_l t + \xi \sin \omega_l t),$$

y su derivada

$$\dot{x}_4(t) = -x_3^0 \frac{e^{-\xi t}}{\omega_l} (\xi^2 + \omega_l^2) \sin t \omega_l.$$

En el tiempo de conmutación $t = t_4$ la solución cumple $x_4(t_4) = 0$, por tanto

$$t_4 = \frac{1}{\omega_l}(\arctan(-\frac{\omega_l}{\xi}) + \pi),$$

y tenemos

$$\dot{x}_4^0 = \dot{x}_4(t_4) = -\frac{x_3^0 e^{-t_4 \xi}}{\omega_l}(\xi + \omega_l^2) \sin t_4 \omega_l = e^{-\xi(t_1+t_2+t_3+t_4)} \frac{\xi^2 + \omega_l^2}{\xi^2 + \omega_h^2}.$$

Del análisis anterior la función signo $\text{sgn}(x\dot{x})$ se puede escribir como la función periódica

$$q_v(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, t_1] \\ -1 & t \in (t_1, t_1 + t_2] \\ 1 & t \in (t_1 + t_2, t_1 + t_2 + t_3] \\ -1 & t \in (t_1 + t_2 + t_3, T] \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $T = \sum_{i=1}^4 t_i$. Así mismo podemos ver que el periodo es una función de los parámetros

$$T(\varepsilon, \xi) = \frac{2}{\omega_h} \arctan\left(\frac{\omega_h}{\xi}\right) + \frac{2}{\omega_l} \left(\arctan\left(-\frac{\omega_l}{\xi}\right) + \pi \right), \quad (3.6)$$

donde $\omega_l = \sqrt{1 - \xi^2 - \varepsilon}$ y $\omega_h = \sqrt{1 - \xi^2 + \varepsilon}$. Notemos que la trayectoria $(x_v, \dot{x}_v)$ en el instante $t = T$ toma el valor de

$$\begin{bmatrix} x_v(T) & \dot{x}_v(T) \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & \dot{x}_4^0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) e^{-\xi T} \end{bmatrix}^\top, \quad (3.7)$$

adicionalmente, las condiciones $1 + \varepsilon - \xi^2 > 0$ y $1 - \varepsilon - \xi^2 > 0$ son impuestas para garantizar la periodicidad de la función signo.

Para resolver el PPI se sigue el mismo procedimiento que se utilizó para el PVI. Se puede mostrar que la función signo permanece periódica y su periodo es igual a $T = T(\varepsilon, \xi)$ es decir, el mismo que en el PVI. Sin embargo, como se puede observar en la figura 3.1c, los instantes de conmutación de $\text{sgn}(x\dot{x})$ son diferentes en el PVI y en el PPI.

De esta forma podemos escribir la función signo como una función periódica $q_p(t) = q_p(t + T)$, y el valor de la trayectoria en el espacio fase en el instante $t = T$ es

$$\begin{bmatrix} x_p(T) & \dot{x}_p(T) \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\right) e^{-\xi T} & 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (3.8)$$

Del análisis anterior deducimos que para el problema de velocidad inicial y el problema de posición inicial, la función de conmutación correspondiente se puede escribir como la función T -periódica $q_v(t)$ o $q_p(t)$ respectivamente, donde el período es igual a la expresión (3.6). Este resultado se formaliza como sigue.

Teorema 3.1.1 *El sistema (1.12) se puede escribir como un sistema lineal periódico de la forma*

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + (1 + \varepsilon q(t))x = 0,$$

donde $q(t)$ es una función periódica con periodo

$$T(\varepsilon, \xi) = \frac{2 \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2 + \varepsilon}}{\xi}\right)}{\sqrt{1 - \xi^2 + \varepsilon}} + \frac{2 \left(\arctan\left(-\frac{\sqrt{1 - \xi^2 - \varepsilon}}{\xi}\right) + \pi \right)}{\sqrt{1 - \xi^2 - \varepsilon}}. \quad (3.9)$$

3.2. Análisis de estabilidad

La ecuación de Reid amortiguada se puede escribir en variables de estado como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1 + \varepsilon \operatorname{sgn}(x\dot{x})) & -2\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{x}, \quad (3.10)$$

de aquí deducimos que el origen es un punto de equilibrio aislado. La existencia y unicidad de la solución de (3.10) se garantiza ya que $\mathbf{f}$ es Lipschitz, es acotada, es continua a trozos en x y admite un número finito de discontinuidades [35].

Por otro lado, la técnica de control semi-activo posee una estabilidad inherente como lo señala [23]. La estabilidad del origen se puede establecer mediante el teorema de Lyapunov como vemos a continuación.

Considere como candidata la función de Lyapunov $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2$, entonces su derivada a lo largo de las trayectorias solución de la ecuación (3.10) es

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -(2\xi\dot{x}^2 + \varepsilon |x\dot{x}|) \leq 0, \quad (3.11)$$

la cual es negativa semidefinida. Del teorema de Lyapunov concluimos que la solución trivial de (3.10) es estable. Sin embargo, aplicando la desigualdad de Young¹ a (3.11) se obtiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < -\left(\varepsilon\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2\right) + 2\xi\dot{x}^2\right), \quad (3.12)$$

de donde observamos que para $\varepsilon > 0$ y $\xi \geq 0$ tenemos $\dot{V} < 0$, por tanto el origen resulta ser asintóticamente estable. Del análisis anterior podemos delimitar un rango de parámetros para los cuales se asegura estabilidad asintótica. Ahora bien, podemos utilizar el hecho de que la ecuación de Reid amortiguada se puede escribir como un sistema lineal periódico y hacer un análisis más detallado sobre los parámetros.

La estabilidad del sistema (3.1.1) se determina mediante la matriz de monodromía $\Phi(T) = X(T)X^{-1}(0)$. La matriz $X(t)$ se encuentra definida por las soluciones linealmente independientes x_p y x_v . Por tanto tenemos

$$\Phi(T) = X(T)X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} x_p(T) & x_v(T) \\ \dot{x}_p(T) & \dot{x}_v(T) \end{bmatrix} = e^{-\xi T} \begin{bmatrix} \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

¹ $xy \leq \frac{\varepsilon^p}{p}x^p + \frac{1}{\varepsilon^q q}y^q, \quad \forall \varepsilon > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Los vectores columna de la matriz de monodromía se encuentran dadas por (3.7) y (3.8).

Los valores propios λ de la matriz $\Phi(T)$ es decir, los multiplicadores característicos son

$$\lambda(\varepsilon, \xi) = e^{-\xi T} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right), \quad (3.14)$$

mientras que los exponentes característicos son

$$\rho(\varepsilon, \xi) = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) - \xi. \quad (3.15)$$

Con los resultados anteriores podemos establecer los siguientes criterios de estabilidad.

Corolario 3.2.1 *El origen del sistema (1.12) es asintóticamente estable si $\varepsilon < 1$.*

Demostración. Si $\varepsilon < 1$, el multiplicador característico definido como en (3.14) satisface $\lambda(\varepsilon, \xi) < 1$. Por tanto, de la teoría de Floquet podemos asegurar que el origen es asintóticamente estable. ■

El teorema de Floquet asegura estabilidad asintótica pero además podemos probar estabilidad exponencial. Para tal propósito reducimos el sistema (1.12) a un sistema lineal con coeficientes constantes.

Corolario 3.2.2 *EL sistema (1.12) es reducible a un sistema lineal con coeficientes constantes de la forma*

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t), \quad (3.16)$$

donde la solución está dada por $\mathbf{y}(t) = e^{\rho t} \mathbf{y}_0$, por tanto el origen es exponencialmente estable.

Demostración. Sea $y = F(t)x$ la transformación del Lyapunov que transforma el sistema (1.12) en el sistema de coeficientes constantes $\dot{y} = Ky$, donde $K = 1/T \Phi(T)$ y la matriz $\Phi(T)$ se expresa como en (3.13). Aplicando el lema 2.2.1 el sistema (1.12) es exponencialmente estable. ■

Ahora reescribiendo el sistema (3.10) de la forma $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}(t)\mathbf{C})x$ podemos identificar las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\xi \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{I}_{2 \times 2}.$$

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon \operatorname{sgn}(x\dot{x}) & 0 \end{bmatrix},$$

así identificamos a la matriz de Brockett $K(t)$ que estabiliza asintóticamente el sistema. Como se ha visto en análisis previos, $K(t)$ es periódica y claramente tiene un valor promedio de cero sobre el periodo T expresado como en (3.9).

3.3. Ajuste del controlador

Es de resaltar que el análisis de Floquet para el sistema (1.12) proporciona expresiones cerradas para los multiplicadores y exponentes característicos en función de los parámetros del sistema. Esto nos permite encontrar valores óptimos sobre los parámetros del controlador basándonos en un índice de desempeño que enseguida exponemos.

Los exponentes característicos proporcionan un criterio de estabilidad en los sistemas lineales periódicos cumpliéndose $|\rho_i| < 1$. En nuestro caso, este criterio se satisface cuando $0 < \xi < 1$ y $0 < \varepsilon < 1$. Considere el espacio de parámetros (ε, ξ) restringido al cuadrado $(0, 1) \times (0, 1)$. Hemos calculado los exponentes característicos numéricamente y los presentamos en la gráfica de contorno de la figura 3.2. Notemos que para algunos valores del par (ε, ξ) el periodo $T(\varepsilon, \xi)$ es complejo lo cual no tiene sentido físico.

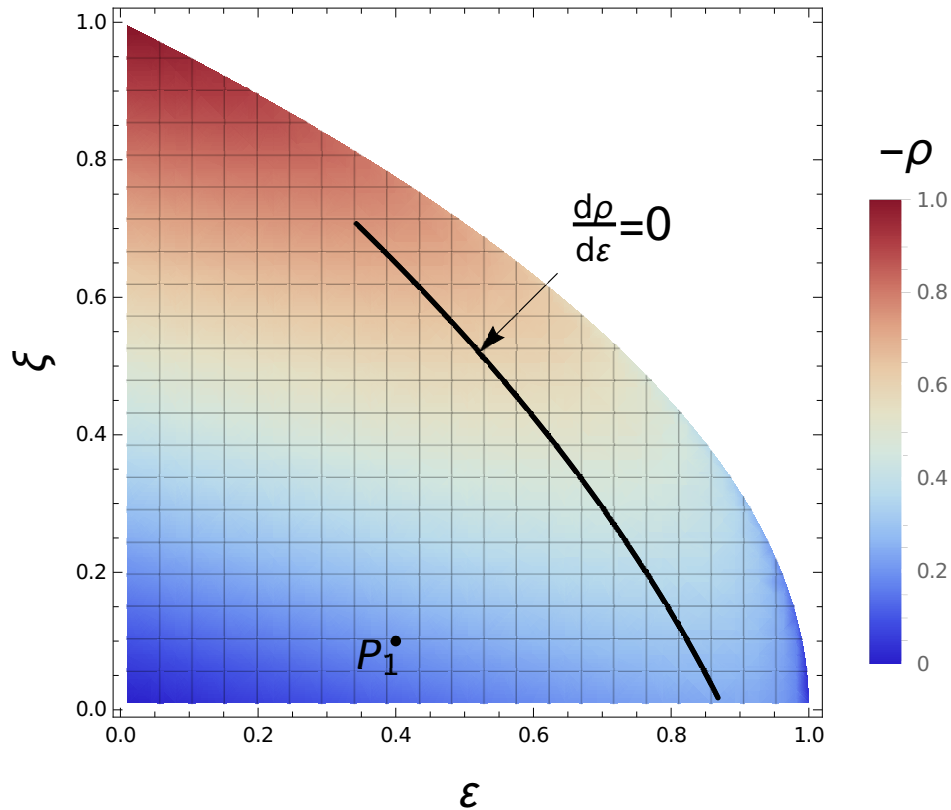


Figura 3.2: Gráfica de contorno de los exponentes característicos $\rho(\varepsilon, \xi)$

La figura 3.2 representa el diagrama de estabilidad en el espacio de parámetros para los cuales $|\rho_i| < 1$. La región en blanco representa los pares (ε, ξ) para los cuales el periodo $T(\varepsilon, \xi)$ expresado como en (3.9) es complejo, mientras que en la región de color vemos los parámetros para los cuales la solución trivial es exponencialmente estable.

La ganancia $k_c = \varepsilon k$ del controlador se determina utilizando el diagrama de estabilidad, eligiendo un valor apropiado para ε habiendo estimado el valor de la razón de amortiguamiento ξ . Por ejemplo, consideremos la estimación de la razón de amortiguamiento

$\xi \approx 0.0932$, entonces se puede elegir $\varepsilon = 0.4$. En la figura 3.2 se ha marcado como el punto $P_1 = (0.4, 0.0932)$.

Referente a la optimización, se puede plantear el siguiente problema. Considere el lugar geométrico de los polos $\rho(\varepsilon, \xi)$ del sistema (3.16).

Problema 3.3.1 *Dada una razón de amortiguamiento ξ , ¿cuál es el valor de ε para el cual se maximiza la distancia de los polos $\rho(\varepsilon, \xi)$ al eje imaginario?*

La máxima distancia se logra cuando la derivada de los polos se anula, es decir cuando $d\rho/d\varepsilon|_{\xi} = 0$. Para una razón de amortiguamiento $\xi \in [0, 1]$, $d\rho/d\varepsilon|_{\xi} = 0$ es una ecuación trascendente que podemos resolver para un valor óptimo ε_{op} utilizando el método de Newton-Rapson. El resultado se muestra en la figura 3.2 como el conjunto de puntos que cumplen $d\rho/d\varepsilon = 0$. Es decir, la curva de pares (ε_{op}, ξ) es el conjunto de puntos que maximizan la distancia de los polos a el eje imaginario.

3.4. Análisis de sensibilidad de los parámetros

El proceso para ajustar los parámetros depende del diagrama de estabilidad para la elección del parámetro ε para un ξ dado. Este proceso naturalmente presenta fuentes de incertidumbre particularmente de la identificación de la razón de amortiguamiento. Es natural preguntarse por las incertidumbres en los parámetros, por ello podemos realizar un análisis de sensibilidad para estudiar el efecto que tiene la variación de los parámetros en los exponentes $\rho(\varepsilon, \xi)$.

Considere ξ_0 y ε_0 valores nominales de los parámetros, entonces el exponente característico nominal es $\rho_0 = \rho(\xi_0, \varepsilon_0)$, nosotros pretendemos medir el cambio de ρ_0 mientras los parámetros ξ y ε cambian partiendo de su valor nominal. Para esto, sea $\Delta\varepsilon = \varepsilon \frac{[c]}{100}$ % denota el cambio en ε , donde $[c]$ representa el porcentaje de cambio, por ejemplo, $[c] = 1, 5, 10$ %, etc. Para un cambio en ε el exponente característico es $\rho_{\Delta\varepsilon} = \rho(\xi_0, \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)$, entonces, $\Delta\rho = \rho_0 - \rho_{\Delta\varepsilon}$ mide la variación con respecto a ε y sea $\left[\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right] = 100 \frac{\Delta\rho}{\rho_0}$ el porcentaje de cambio.

Considere $d\rho = \frac{d\rho}{d\varepsilon}d\varepsilon = S_{\varepsilon}^{\rho}d\varepsilon$, donde $S_{\varepsilon}^{\rho} = \frac{d\rho}{d\varepsilon}$ es conocida como función de sensibilidad de ρ respecto a ε , ver [22]. Entonces, $\Delta\rho \approx S_{\varepsilon}^{\rho}\Delta\varepsilon$ y la relación $\left[\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right]$ produce

$$\left[\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right]_{\varepsilon} = S_{\varepsilon}^{\rho} \frac{\varepsilon}{\rho_0} [c] \%. \quad (3.17)$$

La relación (3.17) mide el cambio en ρ mientras ε varía. Sin embargo, el parámetro ξ también podría variar, entonces

$$\left[\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right]_{\xi} = S_{\xi}^{\rho} \frac{\xi}{\rho_0} [c] \%, \quad (3.18)$$

donde $S_\xi^\rho = \frac{d\rho}{d\xi}$. Esta última expresión mide el cambio en ρ mientras ξ varía. Además, ρ puede variar también cuando ambos parámetros ε y ξ varían, entonces

$$\left[\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \right]_{\varepsilon, \xi} = S_\varepsilon^\rho \frac{\varepsilon}{\rho_0} [c_1] \% + S_\xi^\rho \frac{\xi}{\rho_0} [c_2] \%. \quad (3.19)$$

Note que la función de sensibilidad S_ε^ρ y S_ξ^ρ están bien definidas debido a que los exponentes característicos son semisimples, y por tanto sus derivadas correspondientes corresponden con la derivada de Frechet [65].

Cuando los parámetros de ajuste corresponden a valores óptimos ε_{op} la función de sensibilidad S_ε^ρ es aproximadamente igual a cero debido a que $d\rho/d\varepsilon|_{\varepsilon_{op}} \approx 0$. Entonces, podemos deducir que el controlador es robusto contra pequeños cambios en los parámetros.

3.5. Resultados numéricos

En este apartado veremos los resultados de la simulación del sistema así como el análisis robustez del controlador. Los cálculos están basados en los parámetros del modelo masa-resorte experimental que se presenta en la figura 3.3.

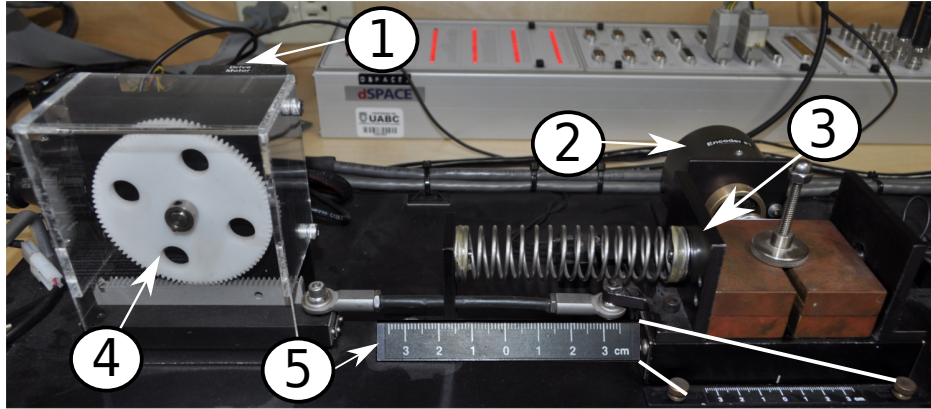


Figura 3.3: Sistema masa-resorte: ① Actuador. ② Encoder óptico. ③ Móvil masa-resorte. ④ Arreglo engrane-cremallera-piñon ⑤ Escala ± 3.0 cm

La dinámica del modelo experimental masa-resorte se describe por la ecuación (1.10). Los parámetros del sistema se muestran en la tabla 3.5. La metodología para estimar la razón de amortiguamiento se muestra posteriormente.

3.5.1. Simulación

La ganancia del controlador es $k_c = k\varepsilon = 487.8\varepsilon$. El ajuste del parámetro ε se eligen de manera arbitraria como en el ejemplo mostrado en el diagrama de estabilidad de la figura

Parámetro	Valor
Masa (m)	1.2 kg.
Coefficiente de fricción viscosa (b)	4.5 N/m.
Coefficiente de rigidez (k)	487.8 Ns/m.
Razón de amortiguamiento (ξ)	0.0932

Tabla 3.1: Parámetros del modelo experimental

3.2 es decir, como ejemplo ilustrativo tomamos $P_1(\xi, \varepsilon) = (0.0932, 0.4)$, así la ganancia del controlador es $k_c \approx 195$.

La solución numérica $\hat{x}_p$ del sistema controlado (1.10) para la condición inicial $\hat{x}_p(0) = 2.0$ [cm] se encuentra graficada en la figura 3.4, en la misma figura podemos observar la gráfica de la ley de control (1.11) y la función de conmutación.

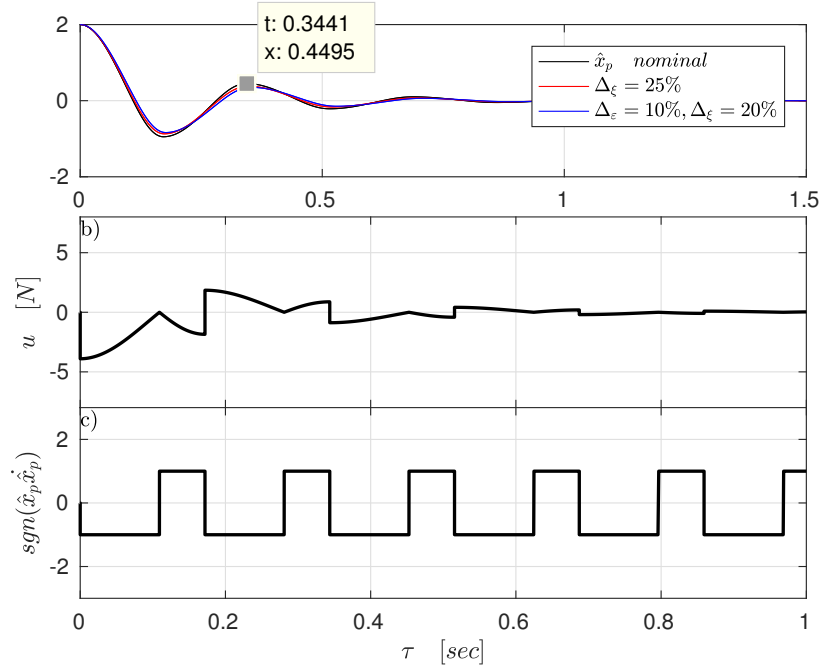


Figura 3.4: Solución numérica del sistema de control (1.10) donde $m = 1.2$ [kg], $b = 4.5$ [N/m], $k = 487.8$ [Ns/m] y $k_c = 195$: (a) Posición $\hat{x}_p$. (b) Ley de control u . (c) Función de conmutación

Mediante la acción del controlador, el sistema masa-resorte ahora es un sistema lineal periódico cuyos multiplicadores y exponentes característicos se pueden calcular de acuerdo a las ecuaciones (3.14) y (3.15) respectivamente. Bajo los parámetros del sistema tenemos $\lambda = 0.2247$ y $\rho = -0.2155$.

Para validar la predicción que tenemos del exponente característico, se puede estimar a partir de la solución numérica utilizando la técnica de decremento logarítmico. De la figura 3.4a tenemos la aproximación del exponente como $\tilde{\rho} \approx \frac{1}{2\pi} \log \frac{2}{0.4474} = 0.2383$. La discrepancia de la aproximación se puede explicar del hecho de que la respuesta del sistema real no se puede aproximar idealmente por una respuesta oscilatoria de un sistema lineal de segundo orden como la técnica de decremento logarítmico intenta hacer. Notemos que la rigidez introducida al sistema controlado es $u = 195 \operatorname{sgn}(\bar{x}\bar{x}')$.

3.5.2. Análisis de robustez

El ajuste del controlador implica algunas fuentes de incertidumbre principalmente por la identificación de la razón de amortiguamiento. Para superar esta desventaja realizamos un análisis de sensibilidad para mostrar la robustez del controlador sobre la incertidumbre de los parámetros.

Sean los valores nominales de los parámetros $(\xi_0, \varepsilon_0) = (0.0932, 0.4)$. Los exponentes característicos son $\rho_0 = 0.2155$. Supondremos que ambos parámetros varían. La ecuación (3.17) la utilizamos para tabular las variaciones. En la tabla 3.2 se muestran los resultados del análisis de sensibilidad. La tabla relaciona el porcentaje de variación de los exponentes característicos ρ_0 debido a las variaciones de los parámetros (ξ_0, ε_0) .

Los valores en la tabla 3.2 se interpretan como sigue. Considere una variación de 25 % del parámetro ξ con ninguna variación de ε , en la tabla 3.2 se muestra que el porcentaje de variación es $[\Delta\rho/\rho_0]_\varepsilon = 14\%$. Ahora consideremos que ambos parámetros varían, digamos que ξ varía 20 % y ε varía 10 %. En estas condiciones de variación de los parámetros el cambio en los exponentes característicos es de $[\Delta\rho/\rho_0]_{\varepsilon, \xi} = 15\%$. Los resultados de ambos ejemplos están coloreados en la tabla 3.2.

$\Delta\varepsilon\%$ \ $\Delta\xi\%$	0	5	10	25	30
0	0	3	6	14	17
10	5	8	11	19	22
20	9	12	15	23	26
30	13	16	19	27	30
50	21	24	27	35	38

Tabla 3.2: Porcentaje de variación $\left[\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right]$ de los exponentes característicos $\rho_0 = 0.2155$ mientras los parámetros varían desde valores nominales $(\xi_0, \varepsilon_0) = (0.0932, 0.4000)$

Para una mejor perspectiva del efecto en la respuesta del sistema cuando los parámetros varían, graficamos dos ejemplos en la figura 3.4a. El ejemplo en rojo muestra la respuesta del sistema (1.10) cuando $\Delta\xi = 25\%$, mientras que el ejemplo en azul muestra la respuesta cuando ambos parámetros varían como $\Delta\varepsilon = 10\%$, $\Delta\xi = 20\%$.

Por otro lado, la norma Euclídeana de la solución puede ser usada como medida cuanti-

tativa para validar la robustez del controlador, es decir, para la solución nominal tenemos $\|\hat{x}_p\|_2 = 0.1823$, y para los ejemplos tenemos $\|[\hat{x}_p]_{\Delta\xi=25\%}\|_2 = 0.1725$ y $\|[\hat{x}_p]_{\Delta\varepsilon=10\%,\Delta\xi=20\%}\|_2 = 0.1721$ respectivamente.

3.6. Verificación experimental

En esta sección presentamos el modelo experimental con detalle así como los resultados obtenidos para compararlos con los resultados numéricos.

3.6.1. Modelo experimental

El modelo experimental se compone de un móvil que consiste de una masa sujeta a un resorte el cual se mueve horizontalmente sobre un riel, un encoder óptico mide el movimiento de la masa, un servo motor de DC con un arreglo engrane-cremallera-piñon proporciona la acción de control. La distancia que puede recorrer el móvil es de ± 3 cm. La figura 3.5 muestra el arreglo completo del experimento. La plataforma de adquisición de datos dSPACE se utiliza para registrar los datos del experimento y para implementar la ley de control en tiempo real utilizando una formulación en diagrama de bloque a través de Matlab/Simulink, donde el tiempo de muestreo es de $T_s = 1.0$ ms.

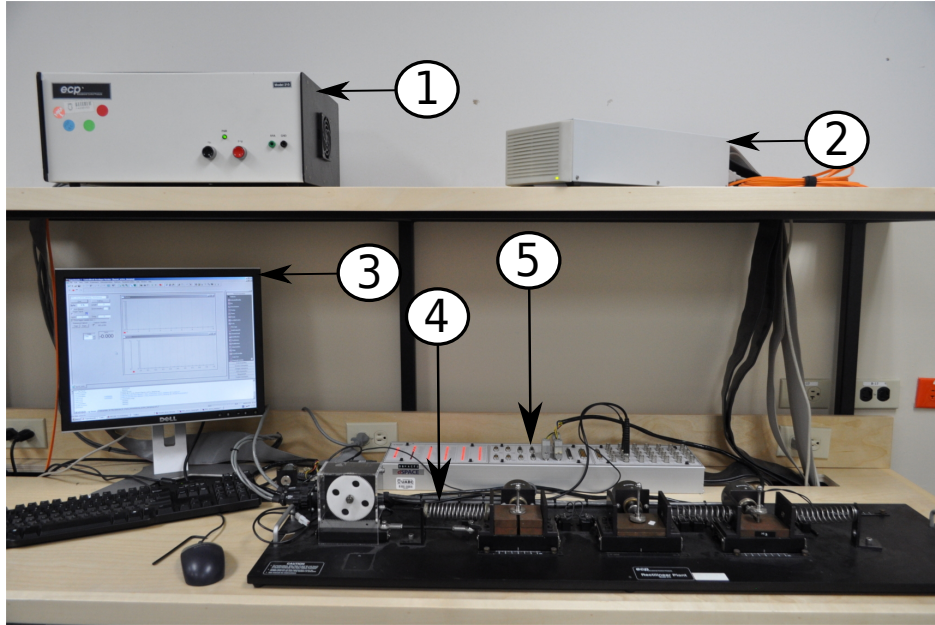


Figura 3.5: Modelo experimental: ① Fuente de poder. ② dSPACE™computadora. ③ PC con Matlab/Simulink™. ④ ECP™Modelo de planta rectilinea 201. ⑤ dSPACE panel conector.

El móvil experimenta una fuerza de fricción durante el movimiento. Para términos prácticos asumimos que esta fuerza se puede cuantificar como una fuerza de amortiguamiento

viscosa lineal. La técnica de decremento logarítmico se utiliza para estimar el coeficiente de amortiguamiento.

Para aplicar el decremento logarítmico se determina experimentalmente la respuesta vibratoria libre $\tilde{x}_p$ considerando la posición inicial $\tilde{x}_p(0) = 2.0$ cm y velocidad inicial nula.

El periodo de la vibración de la respuesta libre se puede calcular como $T \approx 0.3130$ [sec] y el segundo pico de amplitud es $A \approx 1.0500$ [cm]. Del decremento logarítmico tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{2}{1.05} \right] = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}},$$

entonces resolviendo para razón de amortiguamiento se tiene $\xi \approx 0.0932$.

Los parámetros de rigidez y amortiguamiento son calculados con las ecuaciones

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1 - \xi^2}}; k = \omega_0^2 m; b = 2\xi\sqrt{mk},$$

donde $m = 1.2$ [kg]. De esta forma los parámetros se aproximan como $k = 487.80$ [N/m] y $b = 4.51$ [Ns/m].

Un aspecto importante y complejo en la implementación del controlador es determinar la función de conmutación $z = \text{sgn}(x\dot{x})$ debido a que depende de la velocidad $\dot{x}$. Por esta razón el funcionamiento adecuado del controlador se basa en la forma en que se pueda calcular la velocidad. Una forma común para determinar la velocidad es mediante la derivación numérica de la posición, sin embargo, este enfoque puede producir ruido contaminante en la velocidad. Una forma alternativa de hacerlo es utilizando observadores, pero este enfoque depende de una elección apropiada del observador y el ajuste de sus ganancias.

Para nuestro trabajo se desarrolló una técnica heurística para calcular la función de conmutación en la que se puede omitir la medición de la velocidad, donde se toma en consideración la dinámica de la masa durante el movimiento. Hemos comparado la derivación numérica de la posición con la técnica heurística.

La figura 3.6 muestra el diagrama de bloques en Matlab/Simulink para la implementación experimental de la derivación numérica y el enfoque heurístico. El bloque naranja calcula la función de conmutación por derivación de la posición mientras que el bloque cian ejecuta el algoritmo para calcular la función de conmutación sin medición de velocidad.

El bloque amarillo corresponde a la adquisición de los datos de la relación entrada-salida de la configuración de dSPACE. El bloque se convierte a código y se carga en la plataforma en tiempo real dSPACE que corre con un tiempo de muestreo de $T_s = 1.0$ ms. La figura 3.7 explica el bloque amarillo.

Los resultados experimentales de ambas técnicas se muestran en la figura 3.8. La figura 3.8a muestra la posición $\tilde{x}_p$ de la masa y su velocidad, la cual ha sido calculada numéricamente, para fines ilustrativos, la velocidad se escala por la frecuencia natural, esto es, $\dot{\tilde{x}}_p/\omega_0$. La función de conmutación correspondiente se grafica en la figura 3.8b.

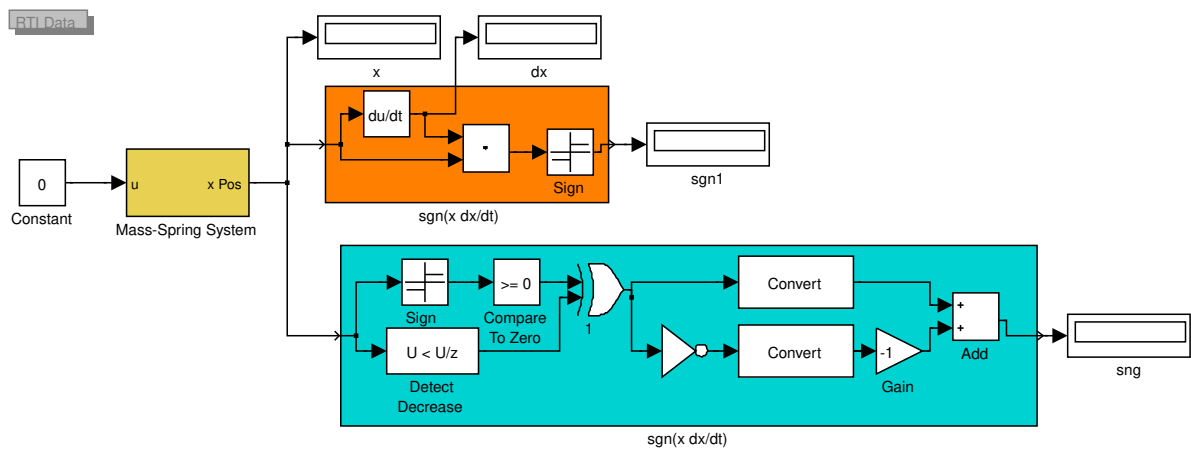


Figura 3.6: Diagrama de bloques para calcular la función de conmutación $\text{sgn}(x\dot{x})$ sin la medición de velocidad

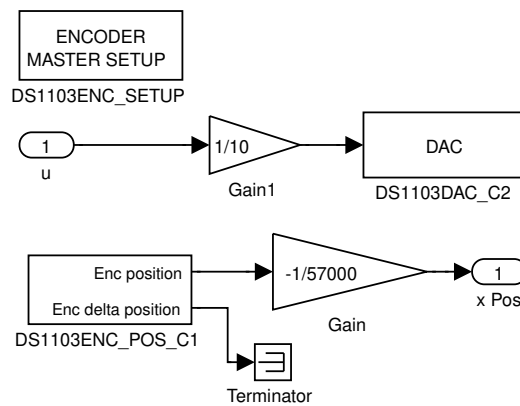


Figura 3.7: Bloque amarillo. Relación entrada-salida de la configuración de dSPACE

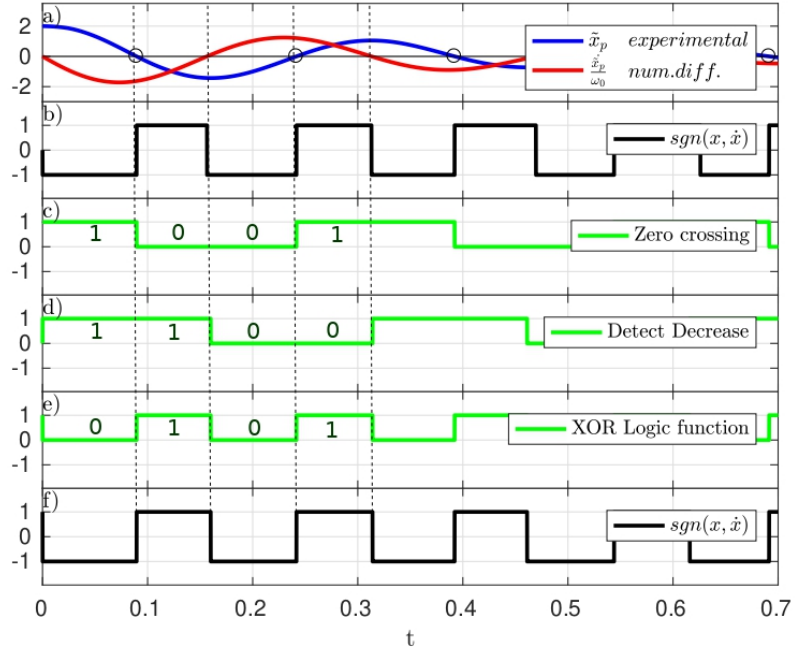


Figura 3.8: Historial temporal de las señales utilizadas para calcular la función de conmutación.

El enfoque heurístico está basado en el movimiento de la masa. Este enfoque determina cuando la posición $\tilde{x}_p$ cruza el cero y cuando esta es decreciente, las señales de estas operaciones lógicas están graficadas en 3.8c y 3.8d respectivamente. La operación OR exclusivo entre estas señales se grafica en 3.8e, finalmente el acondicionamiento de la señal produce la función de conmutación $\text{sgn}(x\dot{x})$ la cual se grafica en 3.8f. Como se puede observar esta señal es idéntica a la función de conmutación numérica en 3.8b. Utilizando este enfoque la ley de control es implementada.

3.6.2. Resultados experimentales

La figura (3.9) muestra el diagrama de bloques para la implementación del controlador, el bloque azul calcula la función de conmutación. Los resultados experimentales de la ley de control 1.11 se muestra en la figura 3.10, para la ganancia del controlador utilizamos $k_c = 195$ empleada en la simulación numérica. Para propósitos comparativos se grafica la respuesta experimental $\tilde{x}_p$ y la simulación numérica $\hat{x}_p$ en la misma figura.

Notemos que existe discrepancia entre el resultado experimental y la solución numérica. Esto se puede explicar por el hecho de que tenemos variables dinámicas que no fueron consideradas para el modelo como la fricción seca, la reacción del arreglo de engrane-cremallera-piñón y los efectos inducidos por el servomotor. Sin embargo, el controlador es robusto y puede manejar estos inconvenientes.

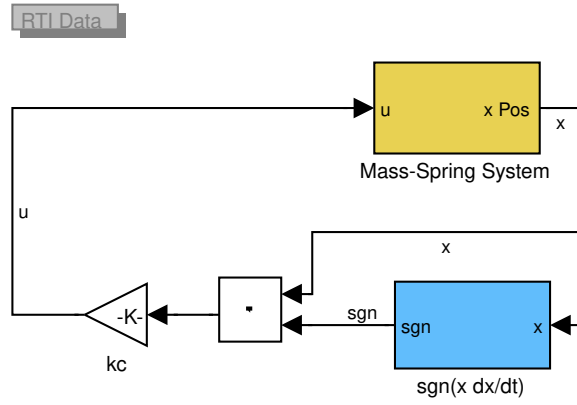


Figura 3.9: Diagrama de bloques para la implementación del controlador

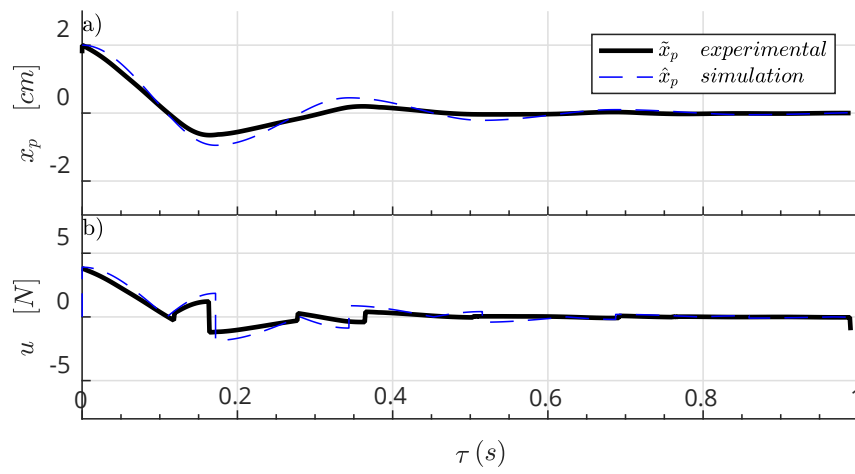


Figura 3.10: Resultados experimentales del sistema de control con $k_c = 195$

Capítulo 4

Conclusiones

La conmutación de la rigidez es una técnica de control de vibraciones, se logra mediante dispositivos semi-activos con la capacidad para cambiar la rigidez total del sistema y así mitigar la vibración de las estructuras. La respuesta del sistema depende de los parámetros del dispositivo semi-activo. Sin embargo, en situaciones del mundo real, los dispositivos semi-activos no pueden llevarse a un punto de operación en valores óptimos que mejoran la respuesta del sistema. En consecuencia, las limitaciones de la técnica de rigidez conmutada son evidentes.

Hemos abordado el problema desarrollando un controlador factible para mitigar vibraciones en un sistema de un grado de libertad donde se considera un fenómeno disipativo, mostramos que el control de vibraciones presenta un comportamiento periódico. Este remarkable hecho nos permite analizar el sistema como una ecuación diferencial periódica, donde la teoría de Floquet se puede aplicar para establecer en forma cerrada expresiones analíticas para identificar condiciones de estabilidad en términos de los parámetros del sistema en vez de aplicar aproximaciones lineales. Lo anterior permite demostrar que el sistema es exponencialmente estable, permite desarrollar un esquema de ajuste para la ganancia del controlador, realizar un proceso de optimización y mostrar la robustez del controlador mediante un análisis de sensibilidad. Además, la verificación experimental realizada muestra una buena concordancia con el análisis teórico, esto apoya y valida nuestro enfoque.

Finalmente, en relación al problema de Brockett, se muestra que para cualquier sistema de un grado de libertad de la forma (1.10) existe una matriz $K(t)$ conmutada que estabiliza asintóticamente el sistema. Dicha matriz es periódica y claramente su valor promedio es cero sobre el periodo.

Apéndice A

Ecuación de Mathieu

La ecuación de Mathieu es una ecuación diferencial lineal de segundo orden que ha servido de arquetipo en el estudio de vibraciones mecánicas así como diversas aplicaciones en ingeniería. La forma de la ecuación presenta una rigidez periódica como sigue

$$\ddot{x} + (\delta + \epsilon \cos t)x = 0,$$

donde δ y ϵ son parámetros constantes. Cuando $\epsilon = 0$, se obtiene el oscilador armónico simple con frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{\delta}$. Si el término de rigidez contiene excitación paramétrica (es decir, $\epsilon \neq 0$) las soluciones pueden ser estables o no estables. El comportamiento estable o no de las soluciones depende de la combinación de parámetros δ y ϵ .

La ecuación de Mathieu se puede derivar de dos formas. La primera vía es del análisis de sistemas periódicamente forzados. Un ejemplo es el modelo del péndulo con pivote movable en dirección vertical, también conocido como péndulo de Kapitza (ver figura A.1a). La ecuación que gobierna el sistema es

$$\ddot{x} + \left(\frac{g}{L} - \frac{A\Omega^2}{L} \cos \Omega t \right) x = 0,$$

para pequeños ángulos de deflexión x . Donde L es la longitud del péndulo, g es la gravedad y el movimiento del soporte es $A \cos \Omega t$.

Algunos otros ejemplos donde se puede encontrar la ecuación de Mathieu son las vibraciones de una membrana elíptica, frecuencia de un quadripolo, estabilidad de cuerpos flotantes, la trampa de partículas cargadas de Paul entre otras [59].

La segunda manera en que se puede obtener la ecuación de Mathieu es del movimiento periódico de sistemas no lineales autónomos. Como ejemplo tenemos el sistema llamado *partícula en el plano* (ver figura A.1b). Este consiste de una partícula de masa unitaria que se encuentra restringida al plano $x - y$ y frenada por dos resortes lineales, cada uno con una constante de rigidez $k = 1/2$. Cada resorte tiene una longitud L y se encuentran anclados en el eje x en $x = 1$ y $x = -1$ [69]. El sistema autónomo tiene ecuaciones

$$\ddot{x} + (x + 1)f_1(x, y) + f_2(x, y) = 0, \quad \ddot{y} + yf_1(x, y) + yf_2(x, y) = 0,$$

donde

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}} \right),$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \right).$$

Este sistema tiene una solución exacta que corresponde con un modo de vibración de la forma $x = A \cos t$ y $y = 0$. Para determinar la estabilidad de esta vibración se consideran pequeñas variaciones del movimiento u y v , sustituyendo $x = A \cos t + u$ y $y = 0 + v$. Linealizando en u y v resultan dos ecuaciones diferenciales, una para u y otra para v . La ecuación de u es el oscilador armónico simple que no produce inestabilidades. La ecuación de v es [54]

$$\ddot{v} + \left(\frac{1 - L - A^2 \cos^2 t}{1 - A^2 \cos^2 t} \right) v = 0.$$

Expandiendo para valor A pequeños y tomando $\tau = 2t$ se obtiene

$$\ddot{v} + \left(\frac{2 - 2L - A^2 L}{8} - \frac{A^2 L}{8} \cos \tau + O(A^4) \right) v = 0,$$

claramente esta última ecuación tiene la forma de Mathieu.

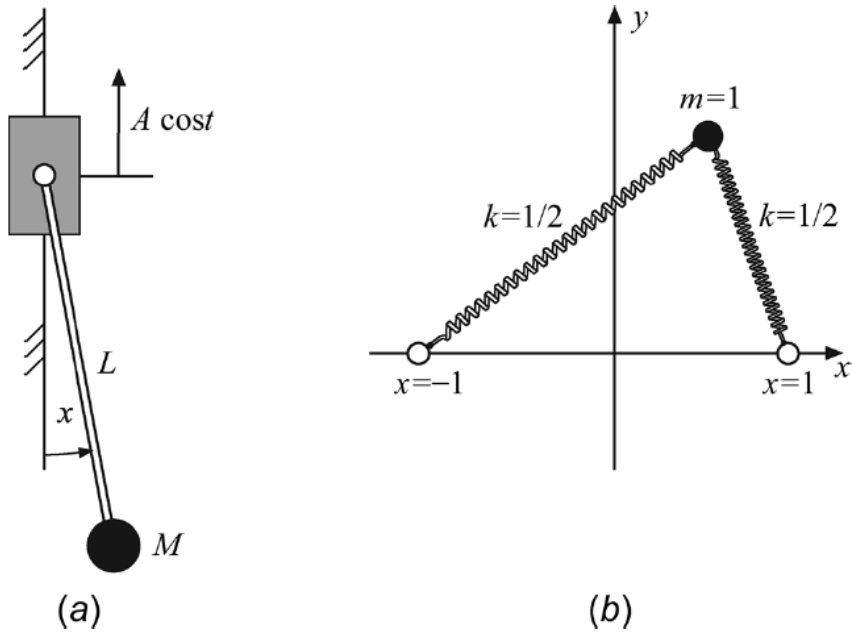


Figura A.1: a) Péndulo de Kapitza b) Partícula en el plano

Para analizar la estabilidad de las soluciones de la ecuación de Mathieu se tienen diversas herramientas como métodos de perturbación, balance armónico y teoría de Floquet. El objetivo es identificar las combinaciones de parámetros $\delta - \epsilon$ que producen respuestas acotadas

(*estables*). Como resultado del análisis de estabilidad se obtiene el diagrama de estabilidad de la figura A.2.

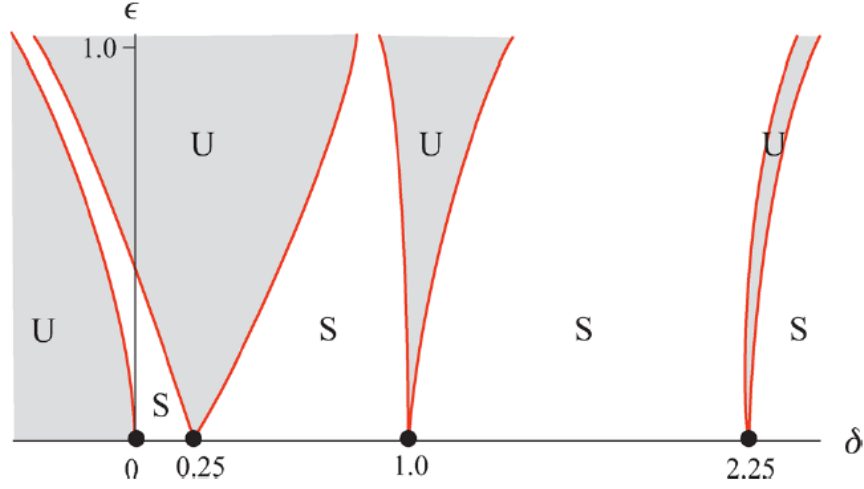


Figura A.2: Diagrama de estabilidad de la ecuación de Mathieu. U-zona de inestabilidad. S-zona de estabilidad.

Las curvas que separan las zonas inestable de las estables son llamadas *curvas de transición*. Las expresiones de las curvas de transición se pueden obtener mediante balance armónico. A continuación las primeras cinco curvas de transición [54].

Primera curva

$$\delta = -\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{7\epsilon^4}{32} - \frac{29\epsilon^6}{144} + O(\epsilon^8).$$

Segunda curva

$$\delta = \frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \frac{\epsilon^3}{32} - \frac{\epsilon^4}{384} + O(\epsilon^5).$$

Tercera curva

$$\delta = \frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{\epsilon^3}{32} - \frac{\epsilon^4}{384} + O(\epsilon^5).$$

Cuarta curva

$$\delta = 1 - \frac{\epsilon^2}{12} + \frac{5\epsilon^4}{3456} - \frac{289\epsilon^6}{4976640} + O(\epsilon^8).$$

Quinta curva

$$\delta = 1 + \frac{5\epsilon^2}{12} - \frac{763\epsilon^4}{3456} + \frac{1002401\epsilon^6}{4976640} + O(\epsilon^8).$$

Apéndice B

Ecuación de Meissner

La ecuación de Meissner tiene la forma

$$\ddot{x} + (\delta^2 + \omega_0^2 p(t))x = 0, \quad (\text{B.1})$$

donde $p(t)$ es una función T-periódica que se define como

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \tau] \\ -1 & \text{si } t \in [\tau, T] \end{cases}.$$

Dado que $p(t)$ es periódica, la teoría de Floquet es aplicable. Luego determinar la estabilidad de la ecuación de Meissner se construye la matriz de monodromía de la siguiente forma.

Considerando la ecuación de Meissner (B.1) en el intervalo $[0, T]$ se obtienen las siguientes ecuaciones.

$$\ddot{x} + (\delta^2 + \omega_0^2)x = 0, \quad t \in [0, \tau]$$

y

$$\ddot{x} + (\delta^2 - \omega_0^2)x = 0, \quad t \in [\tau, T].$$

Supongamos que $X_H(t)$ es la matriz fundamental de (B) que satisface la condición inicial $X_H(0) = I_{2 \times 2}$. De inmediato se concluye que

$$X_H(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

donde $\omega_1 = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$. De manera análoga, la matriz fundamental $X_L(t)$ de (B) es

$$X_L(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) & \frac{1}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \\ -\omega_2 \sin(\omega_2 t) & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

donde $\omega_2 = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Tomando la condición inicial $X_L(\tau) = X_H(\tau)$, la solución de (B) es $Z(t) = X_L(t - \tau)X_H(\tau)$. Así la matriz de monodromía es $\Phi(T) = Z(T)$, es decir,

$$\Phi(T) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_2(T - \tau)) & \frac{1}{\omega_2} \sin(\omega_2(T - \tau)) \\ -\omega_2 \sin(\omega_2(T - \tau)) & \cos(\omega_2(T - \tau)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 \tau) & \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) \\ -\omega_1 \sin(\omega_1 \tau) & \cos(\omega_1 \tau) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Es fácil ver que $\det \Phi(T) = 1$, de vemos que las raíces de

$$\lambda^2 - \text{tr}(\Phi(T))\lambda + 1 = 0,$$

determinan la estabilidad. En el espacio de parámetros (δ^2, ω_0^2) la region de estabilidad quede definida por la condición

$$|\Phi(T)| < 2,$$

es decir,

$$|2 \cos(\tau \omega_1) \cos((T - \tau) \omega_2) - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin(\tau \omega_1) \sin((T - \tau) \omega_2)| < 2$$

con lo que vemos que la región de estabilidad queda determinada por el periodo, el instante de conmutación τ y los parámetros de la ecuación [60].

Bibliografía

- [1] S. Adhikari and J. Woodhouse. Identification of damping. Part I: Viscous damping. *Journal of Sound and Vibration*, 251(3):477–490, 2002.
- [2] Francesco Amato, Giovanni Celentano, and Franco Garofalo. New sufficient conditions for the stability of slowly varying linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(9):1409–1411, 1993.
- [3] Vladimir I Arnold. Remarks on the perturbation theory for problems of mathieu type. *Russian Math. Surveys*, 38(4):215–233, 1983.
- [4] J Baillieul and B Lehman. Open-loop control using oscillatory inputs. *CRC Control Handbook*, pages 967–980, 1996.
- [5] C.W. Bert. Material damping. *Journal of Sound and Vibration*, 29(2):129–153, 1973.
- [6] Richard Evelyn Donohue Bishop. The treatment of damping forces in vibration theory. *The Aeronautical Journal*, 59(539):738–742, 1955.
- [7] Sergio Bittanti and Patrizio Colaneri. *Periodic systems: filtering and control*, volume 5108985. Springer Science & Business Media, 2009.
- [8] Vincent D Blondel, Eduardo D Sontag, Mathukumalli Vidyasagar, and Jan C Willems. *Open problems in mathematical systems and control theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] I Boikov. The brockett stabilization problem. *Automation & Remote Control*, 66(5), 2005.
- [10] Lee W Casperson. Solvable hill equation. *Physical Review A*, 30(5):2749, 1984.
- [11] T. K. Caughey and A. Vijayaraghavan. Free and forced oscillations of a dynamic system with "linear hysteretic damping"(non-linear theory). *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 5(3):533–555, 1970.
- [12] TK Caughey. Vibration of dynamic system with linear hysteretic damping (linear theory). In *Proc. of 4th US National Congress of Applied Mechanics, 1962*, volume 1, pages 87–97. ASCE, 1962.

- [13] T.K. Caughey and A. Vijayaraghavan. Stability analysis of the periodic solution of a piecewise-linear non-linear dynamic system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 11(2):127–134, 1976.
- [14] T.K. Caughey and A. Vijayaraghavan. Forced oscillations of a piecewise-linear non-linear dynamic system with several degrees of freedom. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 12(6):339–353, 1977.
- [15] Chi-Tsong Chen and Bahram Shafai. *Linear system theory and design*, volume 3. Oxford university press New York, 1999.
- [16] Guopei Chen and Ying Yang. New stability conditions for a class of linear time-varying systems. *Automatica*, 71:342–347, 2016.
- [17] Jay-Chung Chen. Response of large space structures with stiffness control. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 21(5):463–467, 1984.
- [18] Henry d’Angelo. Linear time-varying systems: analysis and synthesis. 1970.
- [19] Gennadii Vladimirovich Demidenko and Inessa Izotovna Matveeva. On stability of solutions to linear systems with periodic coefficients. *Sibirskij Matematicheskij Zhurnal*, 42(2):332–348, 2001.
- [20] Charles Desoer. Slowly varying system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(6):780–781, 1969.
- [21] Gaston Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. In *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, volume 1, pages 181–238, 1884.
- [22] Paul M. Frank. *Introduction to system sensitivity theory*. Academic Press, New York, 1978.
- [23] Hernán Garrido, Oscar Curadelli, and Daniel Ambrosini. On the assumed inherent stability of semi-active control systems. *Engineering Structures*, 159:286–298, Mar 2018.
- [24] C. J. Goh and T. K. Caughey. A quasi-linear vibration suppression technique for large space structures via stiffness modification. *International Journal of Control*, 41(3):803–812, 1985.
- [25] Chuen Jin Goh. *Analysis and control of quasi distributed parameter systems*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1983.
- [26] CJ Goh and TK Caughey. A quasi-linear vibration suppression technique for large space structures via stiffness modification. *International Journal of Control*, 41(3):803–812, 1985.
- [27] Chihiro Hayashi. *Nonlinear oscillations in physical systems*. Princeton University Press, 2014.

- [28] George William Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta mathematica*, 8(1):1–36, 1886.
- [29] Achim Ilchmann, Dieter H Owens, and Dieter Prätzel-Wolters. Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems. *Systems & control letters*, 9(2):157–163, 1987.
- [30] J. A. Inaudi. Modulated homogeneous friction: a semi-active damping strategy. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26(3):361–376, 1997.
- [31] Edward Lindsay Ince. On a general solution of hills equation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 75:436–448, 1915.
- [32] Dominic Jordan, Peter Smith, and Peter Smith. *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction for scientists and engineers*, volume 10. Oxford University Press on Demand, 2007.
- [33] Peter Leonidovich Kapitza. A pendulum with oscillating suspension. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 44:7–20, 1951.
- [34] Pyotr Leonidovich Kapitza. Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates, and pendulum with a vibrating suspension. *Collected papers of PL Kapitza*, 2:714–737, 1965.
- [35] Hassan K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, New York, 2nd edition, 1996.
- [36] AL Kimball and DE Lovell. Internal friction in solids. *Physical Review*, 30(6):948, 1927.
- [37] P Lancaster. Free vibration and hysteretic damping. *The Aeronautical Journal*, 64(592):229–229, 1960.
- [38] GA Leonov. Brockett’s problem in the theory of stability of linear differential equations. *St. Petersburg Math. J*, 13(4):613–628, 2002.
- [39] Panshuo Li, James Lam, Ka-Wai Kwok, and Renquan Lu. Stability and stabilization of periodic piecewise linear systems: A matrix polynomial approach. *Automatica*, 94:1–8, 2018.
- [40] J. W. Liang and B. F. Feeny. Identifying coulomb and viscous friction from free-vibration decrements. *Nonlinear Dynamics*, 16(4):337–347, Aug 1998.
- [41] Jin-Wei Liang. Damping estimation via energy-dissipation method. *Journal of Sound and Vibration*, 307(1):349–364, 2007.
- [42] Chein Shan Liu. Reid’s passive and semi-active hysteretic oscillators with friction force dependence on displacement. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(6-7):775–786, 2006.
- [43] Antonio Loria and Elena Panteley. Uniform exponential stability of linear time-varying systems: revisited. *Systems & Control Letters*, 47(1):13–24, 2002.

- [44] Émile Mathieu. Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 13:137–203, 1868.
- [45] E Meissner. Ueber schüttelerscheinungen in systemen mit periodisch veränderlicher elastizität. *Schweizerische Bauzeitung*, 72(11):95–98, 1918.
- [46] L. Moreno-Ahedo and S. Diarte-Acosta. Stability analysis of linear systems with switchable stiffness using the Floquet theory. *Journal of Vibration and Control*, 25(5):963–976, 2019.
- [47] Peter C Müller and Werner O Schiehlen. *Forced linear vibrations*, volume 172. Springer, 1977.
- [48] NO Myklestad. The concept of complex damping. 1952.
- [49] Ali H. Nayfeh and Dean T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York, 1995.
- [50] Katsuhiko Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [51] Junjiro Onoda, Takao Endot, Hidehiko Tamaoki, and Naoyuki Watanabe. Vibration suppression by variable-stiffness members. *AIAA Journal*, 29(6):977–983, 1991.
- [52] Junjiro Onoda, Tetsuji Sanot, and Kohichi Kamiyama. Active, passive, and semiactive vibration suppression by stiffness variation. *AIAA Journal*, 30(12):2922–2929, 1992.
- [53] M Ramirez and J Collado. Atenuación de vibraciones mediante excitación paramétrica. 2014.
- [54] Richard H Rand. Lecture notes on nonlinear vibrations. 2012.
- [55] T. J. Reid. Free vibration and hysteretic damping. *The Journal of the Royal Aeronautical Society*, 60(544):283, 1956.
- [56] TJ Reid. Free vibration and hysteretic damping. *The Aeronautical Journal*, 60(544):283–283, 1956.
- [57] JA Richards, RM Huey, and J Hiller. The truncated hill determinant as a tool in quadrupole mass filter studies. *International Journal of Mass Spectrometry and Ion Physics*, 13(4):443–451, 1974.
- [58] John A Richards. *Analysis of periodically time-varying systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [59] Lawrence Ruby. Applications of the mathieu equation. *American Journal of Physics*, 64(1):39–44, 1996.
- [60] Chikara Sato. Correction of stability curves in hill-meissner’s equation. *Mathematics of Computation*, 20(93):98–106, 1966.
- [61] Subhash C Sinha and D-H Wu. An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 151(1):91–117, 1991.

- [62] Walter W Soroka. Note on the relations between viscous and structural damping coefficients. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 16(7):409–410, 1949.
- [63] JF Steffensen. On the differential equations of hill in the theory of the motion of the moon (ii). *Acta mathematica*, 95(1):25–37, 1956.
- [64] James Johnston Stoker. *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*, volume 2. Interscience Publishers New York, 1950.
- [65] J.-G. Sun. Sensitivity analysis of multiple eigenvalues (I). *Journal of Computational Mathematics*, 1(1):28–38, 1988.
- [66] A Ugulava, Z Toklikishvili, S Chkhaidze, R Abramishvili, and L Chotorlishvili. Quantum theory of rotational isomerism and hill equation. *Journal of mathematical physics*, 53(6):062101, 2012.
- [67] Balth van der Pol and MJO Strutt. Ii. on the stability of the solutions of mathieu’s equation. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 5(27):18–38, 1928.
- [68] MF Winthrop, WP Baker, and RG Cobb. A variable stiffness device selection and design tool for lightly damped structures. *Journal of Sound and Vibration*, 287(4-5):667–682, 2005.
- [69] Ta-Lun Yang and RM Rosenberg. On the vibrations of a particle in the plane. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2(1):1–25, 1967.
- [70] Yunfeng Zhang and Wilfred D. Iwan. Some observations on two piecewise-linear dynamic systems with induced hysteretic damping. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(5):753–765, 2003.
- [71] J Jim Zhu. A necessary and sufficient stability criterion for linear time-varying systems. In *Proceedings of 28th Southeastern Symposium on System Theory*, pages 115–119. IEEE, 1996.