UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Desarrollo de una herramienta de cómputo para la obtención de los parámetros de ruido de transistores de efecto de campo para radiofrecuencia, utilizando el modelo de pequeña señal

T E S I S

que para cubrir parcialmente los requisitos para obtener el grado de MAESTRO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA presenta:

PATRICIA LUZ AURORA ROSAS MÉNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M.C. ÁNGEL GABRIEL ANDRADE REÁTIGA

MEXICALI, B. C. **JUNIO DE 2005**

Hago un gran reconocimiento a todos aquellos que también colaboraron con esta sinfonía:

A Don Víctor Manuel Rosas Siliceo: por el carácter.

A Doña María Luisa Méndez Lozano Vda. de Rosas: por la perseverancia.

A ambos: por el amor, el ejemplo y el consejo.

A Daniel Hernández Balbuena, "mi cómplice en todo": por haber aceptado vivir conmigo ésta y más aventuras…

A mis alumnos: por la convivencia en el salón de clases.

Para Mary Rosas M.

… además "se debe recalcar la importante tarea de los perseguidores de cualquier nacimiento": porque con sus embates me hicieron más persistente y más fuerte.

RESUMEN de la Tesis de Patricia Luz Aurora Rosas Méndez, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN INGENIERÍA EN ELECTRONICA. Mexicali, Baja California, México. Abril de 2005.

Desarrollo de una herramienta de cómputo para la obtención de los parámetros de ruido de transistores de efecto de campo para radiofrecuencia, utilizando el modelo de pequeña señal.

Resumen aprobado por:

M.C. Ángel Gabriel Andrade Reátiga
Director de tesis

En este trabajo de tesis se presenta una herramienta de cómputo para la obtención de los parámetros de ruido de transistores de efecto de campo la cual cuenta con tres opciones de solución para el cálculo de los mismos.

En la primera opción, se permite la propuesta del valor de una de las dos temperaturas equivalentes de ruido del transistor intrínseco y se considera la no correlación entre las fuentes a las que éstas representan.

En la segunda opción se calculan ambas temperaturas y nuevamente se considera la no correlación entre las fuentes del transistor intrínseco.

La tercera opción se basa en una técnica ya desarrollada en la que se calculan ambas temperaturas de ruido y se considera la correlación entre las fuentes intrínsecas de ruido del transistor.

Para las tres soluciones se toma en cuenta la utilización de un coeficiente de reflexión de fuente acoplado para la obtención del factor de ruido del transistor, en todo el ancho de banda.

Adicionalmente se presentan el desarrollo analítico de conceptos básicos de la teoría de ruido para dispositivos de microondas, la deducción de las expresiones matemáticas necesarias para el análisis de ruido de dispositivos de dos puertos en parámetros Z, Y, H y ABCD y de la técnica en que se basa la tercera solución de la herramienta.

Finalmente, se presentan los valores de los parámetros de ruido obtenidos con la herramienta para dos casos de evaluación, así como la validación de los mismos por medio de su comparación con los que sirvieron de referencia.

Palabras clave: Ruido térmico, parámetros de ruido, matrices de correlación.

ABSTRACT of the thesis, presented by Patricia Luz Aurora Rosas Méndez, in order to obtain the MASTER of ENGINEERING DEGREE in ELECTRONICS ENGINEERING. Mexicali, Baja California, México. April, 2005.

Desarrollo de una herramienta de cómputo para la obtención de los parámetros de ruido de transistores de efecto de campo para radiofrecuencia, utilizando el modelo de pequeña señal.

Approved by:

Dr. Ángel Gabriel Andrade Reátiga
Thesis Advisor

In this thesis work a software tool for obtaining the noise parameters of field effect transistors is presented. This counts with three options of solution for the calculation of such.

In the first option, the proposal of the value of one of the two equivalent noise temperatures of the intrinsic transistor is allowed and the non correlation between the intrinsic noise sources is considered.

In the second option both temperatures are calculated and again the non correlation between the sources of the intrinsic transistor is considered.

The third option is based on a technique already developed in which both temperatures of noise are calculated and the correlation between the intrinsic sources of noise is considered.

For the three solutions the use of a coupled source coefficient of reflection is taken in account for the obtaining the noise factor of the transistor, in all the bandwidth.

Additionally, the analytical expressions of basic concepts of the noise theory for microwaves devices, the deduction of the mathematical expressions for the noise analysis of two ports in their Z, Y, H and ABCD parameters and the technique on which the third solution of the tool is based are developed.

Finally, the values of the obtained noise parameters with the tool for two cases of evaluation, as well as the validation of such appear by means of their comparison with which they served as reference.

Keywords: Thermal noise, noise parameters, correlation matrix.

ÍNDICE

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Introducción

La capacidad de detección de un receptor de señales de radio frecuencia depende de su sensitividad, la cual está en función de la cantidad de señales inherentes a los componentes eléctricos que lo conforman que se presentan en él y las cuales se agregan a las señales recibidas por este. Dichas señales inherentes son conocidas con el nombre de *ruido térmico*.

Definición 1. *El ruido térmico es el resultado del movimiento caótico de electrones libres, excitados de manera térmica, en un medio conductor* [1].

De hecho, la sensitividad de un sistema de recepción se determina usualmente por la cantidad de ruido térmico que este mismo agrega a la señal recibida.

En consecuencia, el hecho de lograr la disminución del ruido total que se genera en el propio receptor producirá un incremento en la relación entre las magnitudes de la señal recibida y del ruido del receptor, haciendo al receptor más sensitivo.

En otras palabras, en la medida que el receptor sea capaz de mantener o por lo menos no deteriorar la razón entre la potencia de la señal y la potencia del ruido a su salida $P_{S_{sal}} / P_{R_{sal}}$, con respecto a la razón entre la potencia de la señal y la potencia del ruido a su entrada $P_{S_{ent}} / P_{R_{ent}}$, será la medida de su sensitividad. A la razón entre estas razones de potencia se le conoce con el nombre de razón señal a ruido.

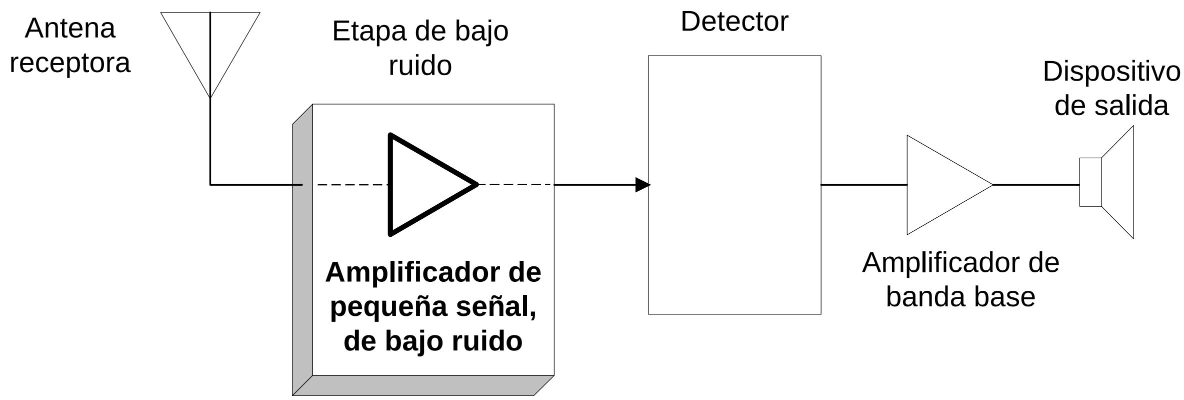


Figura 1.1. Diagrama simplificado del receptor de un enlace de radiocomunicación

Una forma de incrementar la sensitividad en un receptor es colocando una etapa de bajo ruido, cuyo elemento fundamental es un amplificador de pequeña señal de bajo ruido, inmediatamente después de la antena receptora, tal y como se muestra en el diagrama a bloques simplificado de la figura 1.1.

Un amplificador de bajo ruido es un dispositivo electrónico cuya principal característica es la de amplificar la señal a su entrada, degradando lo menos posible la razón entre las magnitudes de la señal de información que se le aplica y el ruido total que el sistema genera, o en otras palabras, degradar lo menos posible la razón señal a ruido del sistema.

Para diseñar un sistema de este tipo es necesaria la determinación de los parámetros de dispersión y de ruido de los dispositivos activos que lo conforman, tales como los transistores.

Los parámetros de dispersión se caracterizan con un analizador de redes vectorial para sistemas de RF y microondas.

Por otro lado, las formas más comunes de determinación de los parámetros de ruido son o por medio de su caracterización experimental utilizando bancos de medición de dispositivos activos o por medio de técnicas para el modelado de su efecto.

Sin embargo, es común que las técnicas de caracterización experimental requieran de la presentación de varias impedancias de fuente a la entrada del dispositivo bajo prueba para un ancho de banda de interés y por lo tanto de la repetición de los procedimientos de medición tantas veces como cantidad de impedancias de fuente sea necesario presentar y como puntos de frecuencia se deseen caracterizar. Esto se traduce en la inversión de cantidades de tiempo relativamente grandes para cada caracterización, además de la factibilidad de cometer errores y/o omisiones en la repetición de cada procedimiento de caracterización.

La herramienta de cómputo desarrollada en el presente trabajo de tesis, esta basada en una técnica para el modelado del efecto de ruido de transistores para microondas y RF, desarrollada por Lázaro en 1999 [2], conocida como la técnica de F50, en la cual se requiere únicamente del modelo de pequeña señal del transistor y de una sola medición por cada punto de frecuencia de interés, del factor de ruido del transistor, utilizando un único coeficiente de reflexión de fuente el cual es igual a cero, es decir, es necesario presentar al dispositivo una única impedancia de fuente la cual es igual a 50Ω.

Por sus características, la herramienta desarrollada realiza automáticamente todos los cálculos necesarios indicados por la técnica de F50 para la obtención de los parámetros de ruido del transistor, obteniéndose con esto una gran simplificación en tiempo de trabajo y generación precisa de los resultados requeridos.

1.1 Antecedentes

Desde la década de los años cincuentas se ha estudiado el comportamiento de dispositivos electrónicos que contienen fuentes de ruido, así en 1956, H. Rothe y W. Dahlke completaron la teoría de cuadripolos que contienen fuentes de ruido, modelándolos como un equivalente libre de ruido en cascada con otro formado por fuentes equivalentes de todas sus fuentes internas [3]. Llegan a mostrar que el factor de ruido de un dispositivo tiene un comportamiento dependiente de la impedancia que se presenta en el puerto de entrada del cuadripolo y definen un grupo de parámetros de ruido asociados a las características del dispositivo, además de discutir los métodos experimentales para su determinación.

En la década de los setentas, Hillbrand y Russer presentaron un método para el análisis asistido por computadora del ruido en bipuertos basado en matrices de correlación, las cuales representan una descripción sistemática del ruido en bipuertos lineales los cuales pueden o no estar parcialmente correlacionados [4]. Este análisis de ruido es una aplicación de la teoría de circuitos de bipuertos lineales con ruido. Con este método consiguieron calcular la figura de ruido, la figura de ruido mínima y la admitancia óptima de fuente.

En 1988 Dambrine, Cappy y Heliodore [5], establecieron un método para la determinación del circuito equivalente de pequeña señal del transistor de efecto de campo, el cual consiste en una determinación directa de todos los elementos parásitos intrínsecos y extrínsecos del transistor a partir de una sencilla manipulación de matrices, además de permitir la obtención de valores muy aproximados de los parámetros de dispersión del circuito.

A finales de los ochentas, M. Pospieszalski [6], presenta un modelo de ruido para un transistor de altas frecuencia basado en el modelo de pequeña señal del transistor y define la correlación existente entre las fuentes de ruido que lo integra. Presenta además expresiones cerradas en función de los elementos del circuito equivalente de pequeña señal del transistor para la temperatura mínima de ruido, la impedancia de fuente óptima y la conductancia de ruido y para la temperatura de compuerta y la temperatura de drenador. Establece que estas dos últimas son independientes de la frecuencia y además asume la no correlación entre las fuentes de ruido que las representan, con lo que establece un modelo equivalente del transistor intrínseco.

En 1992 Pucel, Struble, Hallaren y Rohde, describen un procedimiento general para extraer los elementos del modelo intrínseco de dispositivos activos lineales, el cual esta basado en la técnica de correlación y sus aplicaciones [7].

En 1993 Lázaro, Maya y Pradell presentan un método para calibrar los cuatro parámetros de ruido de un receptor para lo cual no requiere de un sintonizador, como lo plantea el método de impedancias múltiples. El método permite el uso general de fuentes de ruido las cuales pueden presentar muy diferentes coeficientes de reflexión de fuente entre sus estados de caliente y frío. El método es aplicado a la calibración de un arreglo experimental para medición de ruido usando fuentes de ruido en oblea [8].

A finales de los noventas, García propone un modelo de ruido algebraico del transistor de efecto de campo basado en análisis nodal de sus redes [9] y [10].

En 1999 Heymann, Rudolph, Prinzler, Doerner, Klapproth y Böck, generaron la evaluación experimental de modelos de ruido del transistor de efecto de campo, basada en la medición del ruido y sus parámetros de dispersión [11].

En [12], Hernández presenta el diseño y construcción un preamplificador de bajo ruido para la banda de 36 a 40 GHz, determinando los parámetros de ruido de los elementos activos a través de la caracterización experimental utilizando bancos de medición. Además de realizar una investigación relacionada con los problemas existentes tanto en los procesos de diseño y construcción del amplificador, como en la caracterización de los parámetros de ruido de sus dispositivos activos.

En [13], Maya presenta la medición de los parámetros de ruido de dispositivos activos, basándose en la técnica de F50 o también llamada de fuente adaptada.

El objetivo del presente trabajo de tesis consiste en desarrollar una herramienta de cómputo que permita la determinación de los parámetros de ruido de transistores de radiofrecuencia utilizando el modelo de pequeña señal, con la finalidad de llegar a ser integrada, en un futuro, como parte de la automatización de un banco de medición de los parámetros de ruido.

Además pretende ser una evidencia documentada del análisis de ruido en bipuertos para microondas, del factor de ruido, de los parámetros de ruido y de la técnica de F50, con la finalidad de que sirva como referencia bibliográfica para el estudio de estos temas.

1.2 Organización del trabajo

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma:

En el capítulo 2, se presentan las definiciones básicas relacionadas con el ruido en bipuertos, tales como el factor de ruido, la temperatura de ruido y las definiciones de los parámetros de ruido y la relación que presentan con el factor de ruido. Además se presenta el modelo de pequeña señal del transistor de efecto de campo y la representación en diferentes tipos de parámetros de bipuertos con ruido. Se presentan también las definiciones de las matrices de correlación de ruido para diferentes parámetros y las matrices de conversión entre ellas. Finalmente, se presenta la relación entre los parámetros de ruido y las matrices de correlación.

Para la determinación de los parámetros de ruido del transistor de efecto de campo se requiere de la determinación de la matriz de correlación de ruido total del mismo, por lo que en el capítulo 3 se presentan las expresiones de las matrices de correlación del transistor intrínseco y del transistor extrínseco en parámetros ABCD ya que con la suma de estas se define la matriz de correlación total. Posteriormente se describe la técnica de Lázaro [2] para determinar los parámetros de ruido y en la que se utilizará esta matriz de correlación total.

En el capítulo 4 se describe el desarrollo de la herramienta de cómputo, comenzando por diversas soluciones propuestas e implantadas para determinar la ecuación que define las temperaturas equivalentes de ruido del transistor intrínseco y su matriz de correlación de ruido. Además se presentan distintas formas de solución para determinar los parámetros de ruido.

En el capítulo 5 se presentan los parámetros de ruido obtenidos de la evaluación de la herramienta con un modelo del transistor para dos valores diferentes de polarización, así como la comparación gráfica de estos con los presentados en los artículos utilizados como referencia para la obtención de los parámetros de entrada a la herramienta.

En el capítulo 6 de presentan gráficas comparativas entre los diferentes resultados obtenidos, así como la interpretación de dichas comparaciones.

Capítulo 2

Conceptos básicos

El ruido térmico es causa de las señales eléctricas no deseadas resultantes del movimiento caótico de los electrones libres en un conductor excitados térmicamente. En el año de 1927, J. B. Johnson, quien trabajaba para la Bell Telephone, fue el primero en observar este fenómeno en el puerto de salida de un amplificador y en 1928, H. Nyquist completó su tratamiento teórico.

Con base en el principio de equipartición de la energía, Nyquist demostró que el valor *rms* (raíz medio cuadrático) del voltaje del ruido térmico que aparece entre las terminales de un elemento resistivo está expresado, para un ancho de banda B en Hz, como $V_r rms = \sqrt{4kTRB}$ *Volts*, donde k es la constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} joules/^{o}K), *T* es la temperatura absoluta del resistor en grados Kelvin y *R* es el valor de la resistencia en ohms [1].

Por otro lado, la expresión para la potencia de ruido máxima proporcionada por una impedancia dada está definida como $P_r = kTB$ *Watts*, la cual es independiente del valor de la impedancia y está definida bajo condiciones de perfecto acoplamiento.

En este capítulo se presentan conceptos basados en estas nociones fundamentales del ruido térmico, además de las expresiones de los parámetros de ruido para el modelo de pequeña señal de transistores de efecto de campo.

2.1 El factor de ruido

El factor de ruido de un transductor, a una frecuencia de entrada específica se define como la razón de:

a) la *potencia disponible de ruido* total por unidad de ancho de banda en el puerto de salida, a una correspondiente frecuencia de salida, cuando la temperatura de ruido de su terminación o carga de entrada es el valor estándar (290°K) para todas las frecuencias y

b) la porción de a) generada por la terminación o carga de entrada a la temperatura de ruido estándar (290°K) para la frecuencia de entrada [1].

Una definición equivalente indica que el factor de ruido es la relación de la razón señal a ruido de entrada y la razón señal a ruido de salida [14]. Así

$$F = \frac{S/R_{ent}}{S/R_{sal}} = \frac{P_{S_{ent}} / P_{R_{ent}}}{P_{S_{sal}} / P_{R_{sal}}} = \frac{P_{S_{ent}} P_{R_{sal}}}{P_{S_{sal}} P_{R_{ent}}} = \frac{P_{R_{sal}}}{GP_{R_{ent}}} \qquad 2.1$$

donde:

$(S/R)_{ent}$ es la razón señal a ruido a la entrada del bipuerto

$(S/R)_{sal}$ es la razón señal a ruido a la salida del bipuerto

$P_{S_{ent}} / P_{R_{ent}}$ es la razón entre las potencias disponibles de la señal y del ruido a la entrada del bipuerto

$P_{S_{sal}} / P_{R_{sal}}$ es la razón entre las potencias disponibles de la señal y del ruido a la salida del bipuerto

$P_{R_{ent}}$ es la potencia disponible de ruido de entrada por unidad de ancho de banda a 290°K,

$P_{R_{sal}}$ es la potencia disponible de ruido de salida por unidad de ancho de banda e incluye el efecto del ruido agregado por el bipuerto ruidoso

G es la ganancia disponible del bipuerto.

$GP_{R_{ent}}$ es la potencia de ruido de salida sin el efecto del ruido del bipuerto.

Considerando que el bipuerto ruidoso proporciona una ganancia G_S, la ecuación 2.1 puede expresarse por

$$F = \frac{P_{S_{ent}} / P_{R_{ent}}}{P_{S_{sal}} / P_{R_{sal}}} = \frac{P_{S_{ent}} / P_{R_{ent}}}{GP_{S_{ent}} / \left(GP_{R_{ent}} + GP_{R_D}\right)} = 1 + \frac{P_{R_D}}{P_{R_{ent}}} \qquad 2.1.1$$

donde

P_{R_D} es la potencia disponible de ruido agregada por el dispositivo bajo prueba, referida a una fuente de ruido en la entrada, es decir, es la potencia que proporcionaría el puerto de salida de un bipuerto equivalente al dispositivo pero libre de ruido cuando a su puerto de entrada se le conecta una resistencia R a una temperatura T_E. En la figura 2.1 se muestra gráficamente el significado de los términos de la ecuación 2.1.

Obsérvese que a la entrada del dispositivo bajo prueba que proporciona una ganancia disponible de valor G, se presenta una señal de potencia disponible igual a $P_{S_{ent}}$, y una señal de ruido de potencia disponible igual a $P_{R_{ent}}$, por las que se establece una razón señal a ruido de entrada igual a $(S/R)_{ENT}$.

Por el hecho de que el dispositivo se encuentra a una temperatura equivalente de ruido T_E diferente de cero contribuye por si mismo al ruido térmico que se presenta a su salida y por lo tanto el valor de la potencia de ruido a la salida del dispositivo es igual a $P_{R_{sal}} = GP_{R_{ent}} + GP_{R_D}$ donde $GP_{R_{ent}}$ es la potencia de ruido que se esperaría si el dispositivo no contribuyera al ruido y GP_{R_D} es la potencia del ruido agregado por el dispositivo.

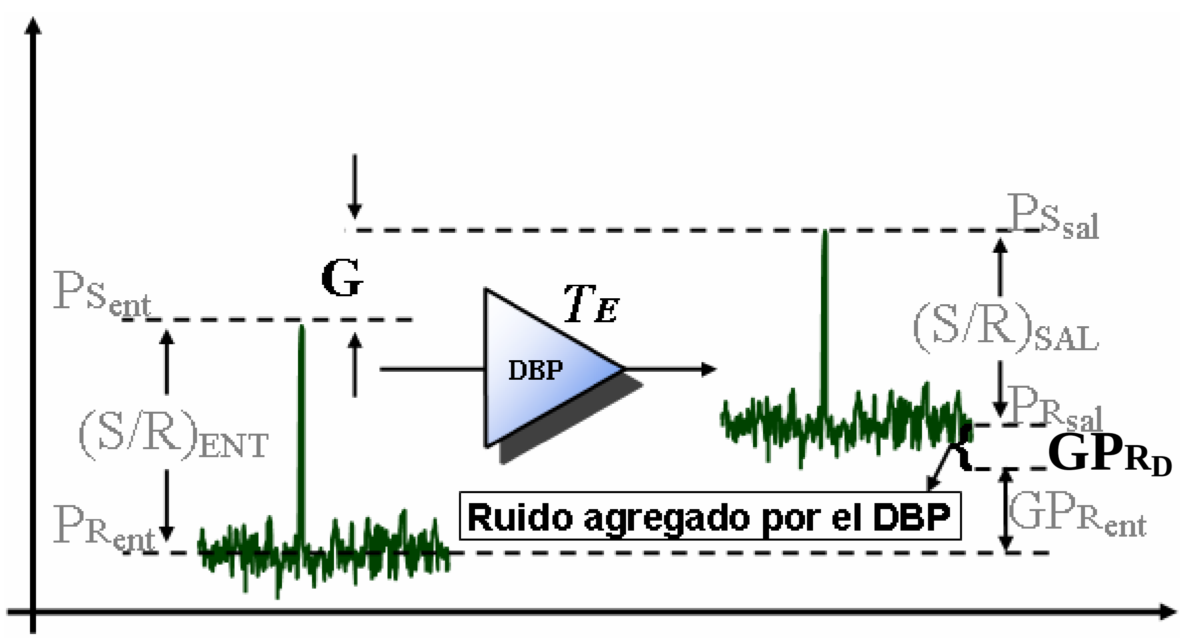


Figura 2.1. Efecto del ruido térmico inherente a un amplificador sobre la razón señal a ruido de una señal recibida.

A causa de esto, la razón señal a ruido a la salida del dispositivo $(S/R)_{SAL}$ se ha degradado con respecto a la de la entrada.

Sin embargo, si se considera el caso de un dispositivo ideal que no contribuyera al ruido, la potencia de ruido a la salida debería ser igual a $P_{R_{sal}} = GP_{R_{ent}}$ y la razón señal a ruido a la salida no sufriría degradación alguna con respecto a la de entrada.

Obsérvese en la representación de este efecto hecha en la figura 2.1, como la potencia de ruido de salida es mayor a la esperada y como la razón señal a ruido de salida $(S/R)_{SAL}$, es menor que la razón señal a ruido de entrada $(S/R)_{ENT}$.

2.2 La temperatura de ruido

La temperatura de ruido (T_a) es la temperatura que produce la densidad espectral de potencia disponible de una fuente. Se obtiene cuando los coeficientes de reflexión correspondientes a la fuente y a la carga de un circuito de microondas son complejos conjugados [15].

De forma equivalente, la temperatura de ruido puede definirse como la temperatura de una fuente pasiva resistiva que tiene la misma densidad espectral de potencia disponible que la fuente de ruido en cuestión [15].

Esta definición muestra a T_a como una propiedad de un monopuerto, como puede ser una fuente de ruido térmico.

Definición 2. Temperatura de ruido efectiva

La temperatura de ruido efectiva (T_{ne}) es una propiedad de los monopuertos, por ejemplo una fuente de ruido térmico, y se define como la temperatura que provoca la potencia que emerge de una fuente de ruido cuando esta se conecta a una carga no emisora y no reflectiva.

La relación entre la temperatura de ruido T_a y la temperatura de ruido efectiva T_{ne} está dada por

$$T_{ne} = T_a\left(1-|\Gamma|^2\right) \qquad 2.2$$

donde Γ es el coeficiente de reflexión de la fuente de ruido.

Definición 3. Temperatura de ruido efectiva de entrada

La Temperatura de ruido efectiva de entrada (T_E) es una figura de mérito que expresa el valor de temperatura de ruido asignada a una impedancia conectada al puerto de entrada de un bipuerto ruidoso, que al conectarse a un equivalente no ruidoso (bipuerto ideal, en el que sus elementos constitutivos no contribuyen al ruido térmico), provoca la misma potencia de ruido de salida del bipuerto ruidoso, cuando este se conecta a una impedancia de una fuente libre de ruido.

El mismo valor de temperatura se aplica simultáneamente a todo el conjunto de componentes de frecuencia que contribuyen a la potencia de ruido de salida, que se relaciona con la frecuencia de medición [15].

T_E depende también de la impedancia en el puerto de salida y de la temperatura de ésta a frecuencias distintas a la frecuencia de salida, aunque el efecto es muy pequeño [15].

La definición de T_E expresa a una propiedad de un bipuerto en función de una propiedad de un monopuerto.

El factor de ruido está asociado a la temperatura de ruido efectiva de entrada a través de la expresión

$$F = \frac{T_E}{T_o} + 1 \qquad 2.3$$

donde T_E la temperatura de ruido efectiva de entrada bajo un acoplamiento perfecto y T_0 es la temperatura de ruido estándar para las mediciones de figura de ruido y tiene un valor de 290 °K.

2.3 El factor de ruido en cascada

Cuando se conectan *n* bipuertos en cascada, el factor de ruido total está expresado según la ecuación del factor promedio de ruido F_T de N etapas en cascada mediante [1]

$$F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{d1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{d1}G_{d2}} + \cdots + \frac{F_n - 1}{G_{d1}G_{d2}\cdots G_{d(n-1)}} \qquad 2.4$$

donde F_i y G_{di} son respectivamente, el factor de ruido y la ganancia disponible del *i*-ésimo bipuerto y con $i = 1,2,3,\ldots,n$.

De las ecuaciones 2.3 y 2.4 se puede deducir una expresión similar para la temperatura de ruido efectiva de entrada. Esta expresión es

$$T_T = T_1 + \frac{T_2}{G_{d1}} + \frac{T_3}{G_{d2}} + \ldots + \frac{T_n}{G_{d(n-1)}} . \qquad 2.5$$

2.4 Los parámetros de ruido

En 1956, Rothe and Dahlke [3] demostraron que el factor de ruido de los dispositivos activos tales como los transistores de efecto de campo para altas frecuencias dependen de la impedancia presentada a su entrada. Esta dependencia se expresa en términos de un conjunto de parámetros denominados parámetros de ruido, los cuales son cantidades escalares dependiente del punto de polarización del dispositivo activo, de la frecuencia a la que se opere el dispositivo y de su temperatura absoluta.

Los parámetros de ruido son: el factor de ruido mínimo ($F_{\min}$), la resistencia equivalente de ruido (R_n) y el coeficiente de reflexión óptimo (Γ_{opt}). Este último puede representarse de forma equivalente por la impedancia óptima (Z_{opt}), ó por la admitancia óptima (Y_{opt}).

Algunas de las expresiones que aproximan el comportamiento del factor de ruido en función de los parámetros de ruido son [14]:

$$F = F_{\min} + \frac{R_{R_T}}{G_F}\left|Y_F - Y_{opt}\right|^2 , \qquad 2.6$$

$$F = F_{\min} + \frac{4R_{R_T}\left|\Gamma_F - \Gamma_{opt}\right|^2}{Z_o\left|1+\Gamma_{opt}\right|^2\left(1-\left|\Gamma_F\right|^2\right)}, \qquad 2.7$$

$$F = F_{\min} + \frac{N\left|Y_F - Y_{opt}\right|^2}{G_F G_{opt}} , \qquad 2.8$$

$$F = F_{\min} + \frac{4N\left|\Gamma_F - \Gamma_{opt}\right|^2}{\left(1-\left|\Gamma_{opt}\right|^2\right)\left(1-\left|\Gamma_F\right|^2\right)}, \qquad 2.9$$

donde F es el factor de ruido del dispositivo en función de un coeficiente de reflexión de fuente Γ_F ó una admitancia de fuente Y_F presentados a su entrada. El parámetro N se define como el producto de la resistencia equivalente de ruido R_{R_T} y la parte real de la admitancia óptima, es decir G_{opt}. La deducción de la ecuación 2.6 se muestra en el Apéndice B.

El valor de $F_{\min}$, es decir, el mínimo valor que tomaría el factor de ruido, ocurre cuando el coeficiente de reflexión de la fuente (Γ_F), conectada a la entrada del dispositivo activo es igual al valor del coeficiente de reflexión óptimo Γ_{opt}. El valor de R_{R_T} será el valor de la resistencia equivalente de ruido que representa el dispositivo activo para una admitancia de fuente determinada.

Cada conjunto de parámetros de ruido, a una frecuencia determinada y en un punto de polarización dado, define una superficie paraboloidal cuasi-elíptica sobre la carta de Smith, la cual representa la forma gráfica del comportamiento del factor de ruido o figura de ruido del dispositivo. Un ejemplo de esta superficie se muestra en la figura 2.2.

Como se puede observar en esta figura, de la consideración de que este paraboloide toma a la Carta de Smith como su plano de proyección se deriva el hecho de la existencia de una correspondencia biunívoca entre cada uno de los puntos que conforman a la sábana del paraboloide con un valor de impedancia sobre la carta y por lo tanto con su coeficiente de reflexión asociado.

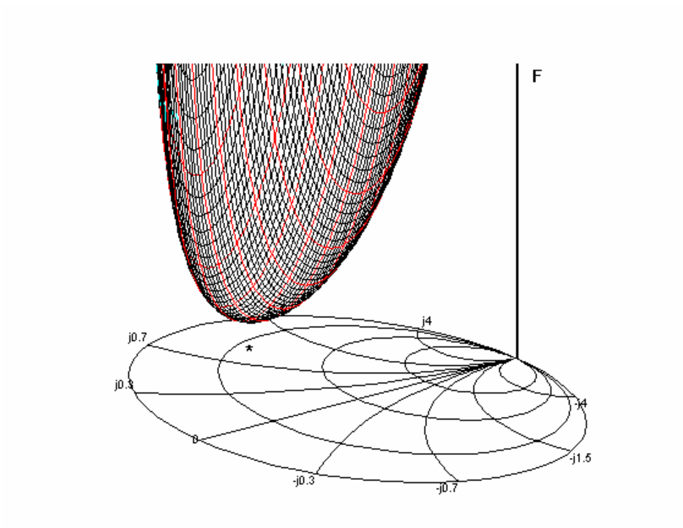


Figura 2.2. Comportamiento del Factor de Ruido en función al coeficiente de reflexión de fuente Γ_F.

2.5 El modelo de pequeña señal del transistor de efecto de campo para microondas

En la literatura relacionada es posible encontrar diversos circuitos equivalentes que modelan el comportamiento en ruido a altas frecuencias del transistor de efecto de campo (TEC) o también llamados modelos de pequeña señal del transistor, ver por ejemplo [2], [5], [9], [10], [16], [17], [18], [19], [20]. Uno de estos circuitos eléctricos equivalentes se muestra en la figura 2.3.

En todos ellos, para su análisis, se plantea la división del modelo en dos partes, el transistor extrínseco y el intrínseco. El transistor extrínseco esta formado por los elementos de las redes de acceso de fuente, drenador y compuerta que modelan los efectos pasivos del encapsulado del transistor. El transistor intrínseco esta formado por los elementos que modelan el comportamiento del transistor sin incluir los efectos pasivos del encapsulado.

Como se muestra en la figura 2.4, el modelo de pequeña señal del TEC puede ser subdividido en cinco subredes o bipuertos conectados entre si en distintas configuraciones, lo que permite su análisis mediante técnicas de reducción de redes eléctricas.

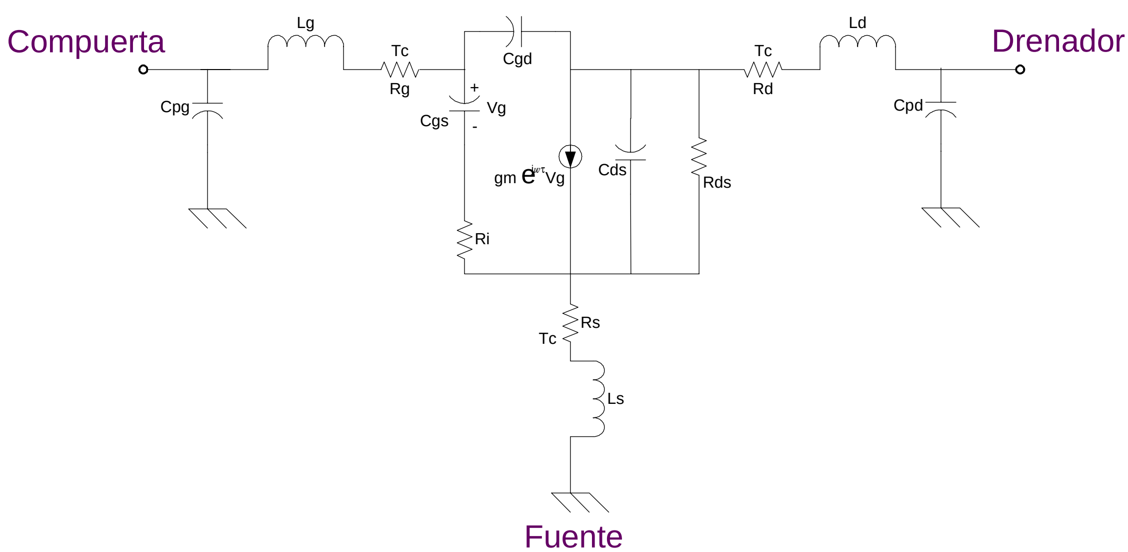


Figura 2.3. Circuito equivalente de pequeña señal de un transistor de efecto de campo para altas frecuencias.

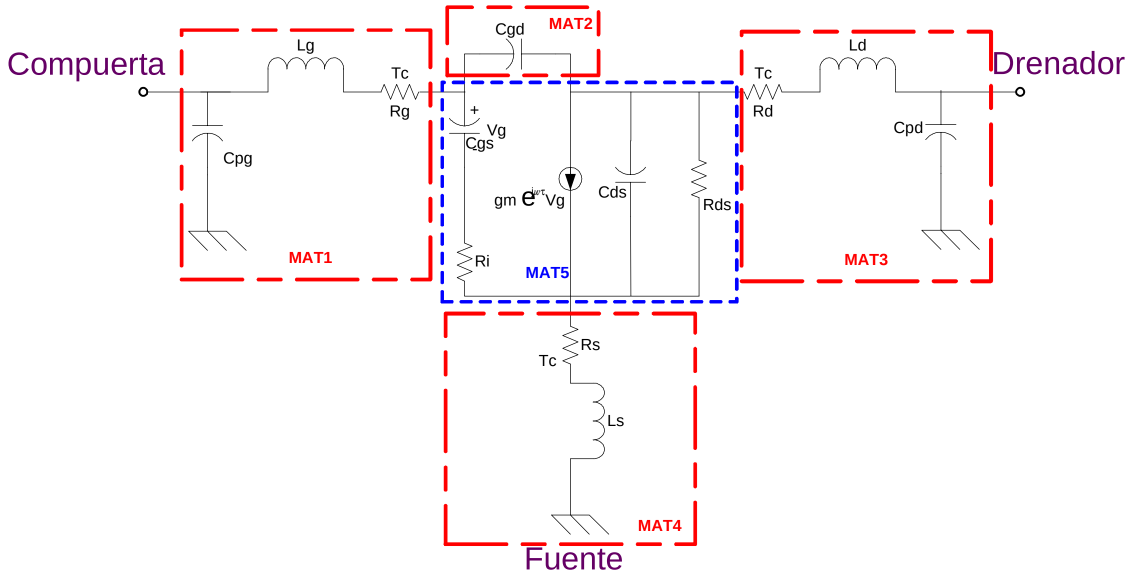


Figura 2.4. Modelo de pequeña señal de un TEC subdividido en cinco bipuertos.

Así, se puede observar que el transistor intrínseco, (bipuerto MAT5), está conectado en paralelo con la red de compuerta-drenador, (bipuerto MAT2) y estas a su vez están conectadas en serie con la red de fuente, (bipuerto MAT4).

Por último, las redes de compuerta (bipuerto MAT1) y drenaje (bipuerto MAT3), están conectadas en cascada con la interconexión de redes anteriormente mencionada.

2.6 El modelo de ruido del transistor de efecto de campo para microondas

En complemento al circuito mencionado en la sección anterior, el modelo de ruido del TEC incluye cinco fuentes de ruido térmico, cuatro de voltaje y una de corriente, asociadas a los elementos resistivos involucrados en el modelo. Esto se muestra en la figura 2.5.

La temperatura de ruido asociada a las fuentes de voltaje y corriente de ruido, de los elementos extrínsecos del TEC, se asume como la temperatura ambiente, (T_C) y las temperaturas de ruido asociadas a las fuentes de ruido del transistor intrínseco, T_D y T_G, son de valores mayores a esta. [2], [9] y [10].

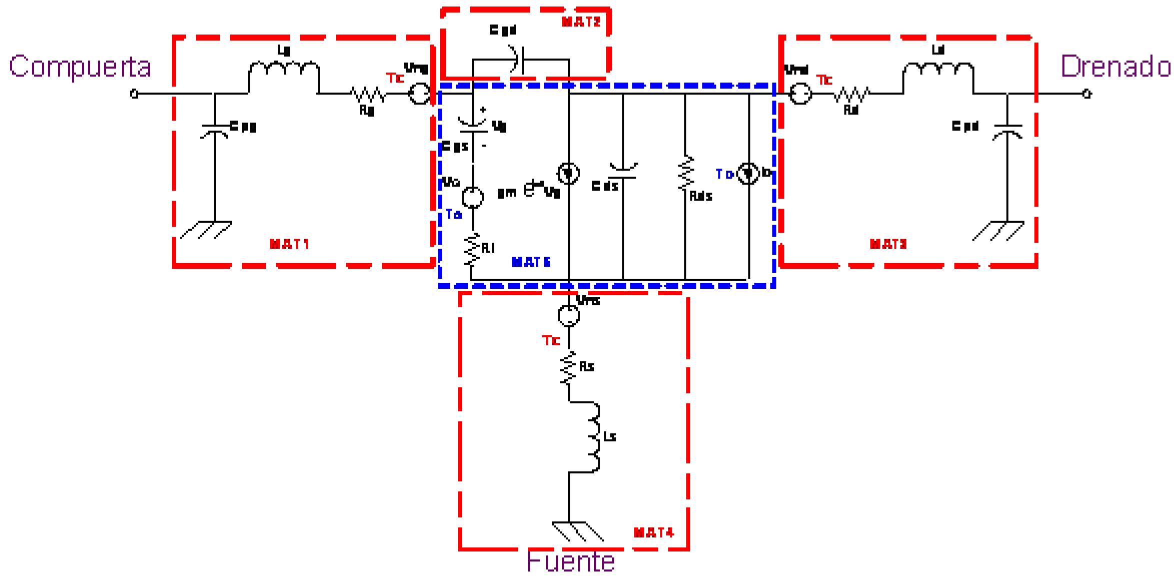


Figura 2.5. Modelo de ruido del transistor de efecto de campo.

2.7 Representación del ruido en bipuertos expresados en parámetros Z, Y, ABCD y H

Una forma de modelar el ruido de los elementos constituyentes de un bipuerto es mediante fuentes de voltaje y corriente térmicos conectados a la entrada y salida de un equivalente del bipuerto sin ruido.

2.7.1 Modelo de un bipuerto ruidoso usando los parámetros Z

El bipuerto ruidoso se puede modelar mediante dos fuentes de voltaje térmico $V_{R_{T1}}$ y $V_{R_{T2}}$, las cuales están parcialmente correlacionadas entre si y conectadas en serie con el bipuerto sin ruido, tal y como se muestra en la figura 2.6 [3], [21].

La ecuación matricial que modela a este bipuerto es:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

donde V_1 e I_1 son el voltaje y la corriente en el puerto de entrada y V_2 e I_2 son el voltaje y la corriente en el puerto de salida del bipuerto. Z_{11}, Z_{12}, Z_{21} y Z_{22} son los parámetros de impedancia del bipuerto sin ruido.

Rescribiendo la ecuación matricial 2.10 con variables matriciales se obtiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{ZI} + V_{R_T} \tag{2.10.1}$$

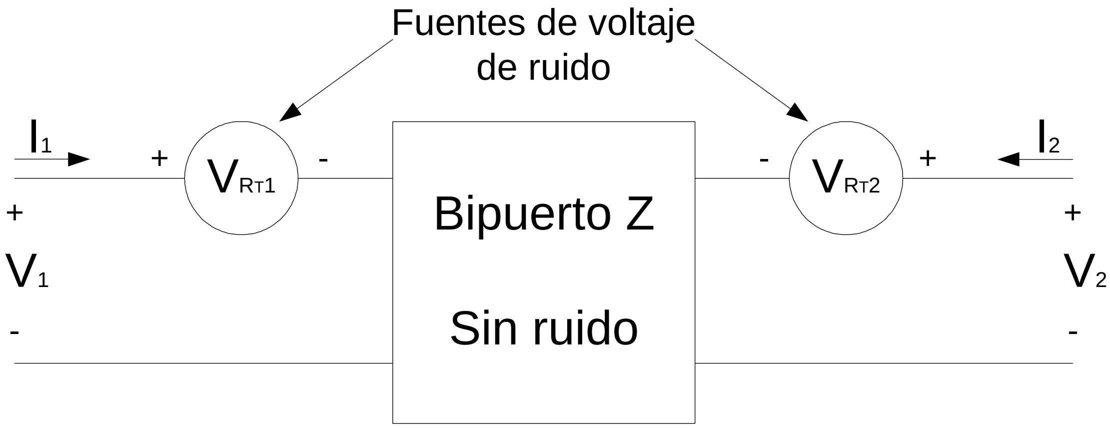


Figura 2.6. Equivalente de ruido en parámetros Z de un dispositivo de dos puertos.

donde

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ZI} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$V_{R_T} = \begin{bmatrix} V_{R_T 1} \\ V_{R_T 2} \end{bmatrix}$$

2.7.2 Modelo de un bipuerto ruidoso usando los parámetros Y

En parámetros Y, el bipuerto ruidoso está modelado como un bipuerto sin ruido conectado en paralelo con dos fuentes de corriente de ruido como se muestra en el circuito de la figura 2.7 y matricialmente por [3], [21]

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix}. \qquad 2.11$$

donde I_1 y V_1 son la corriente y el voltaje en el puerto de entrada, I_2 y V_2 son la corriente y el voltaje en el puerto de salida del bipuerto y Y_{11}, Y_{12}, Y_{21} y Y_{22} son los parámetros de admitancia del bipuerto sin ruido.

Rescribiendo la ecuación matricial 2.11 con variables matriciales se obtiene:

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV} + I_{R_T} \qquad 2.11.1$$

donde

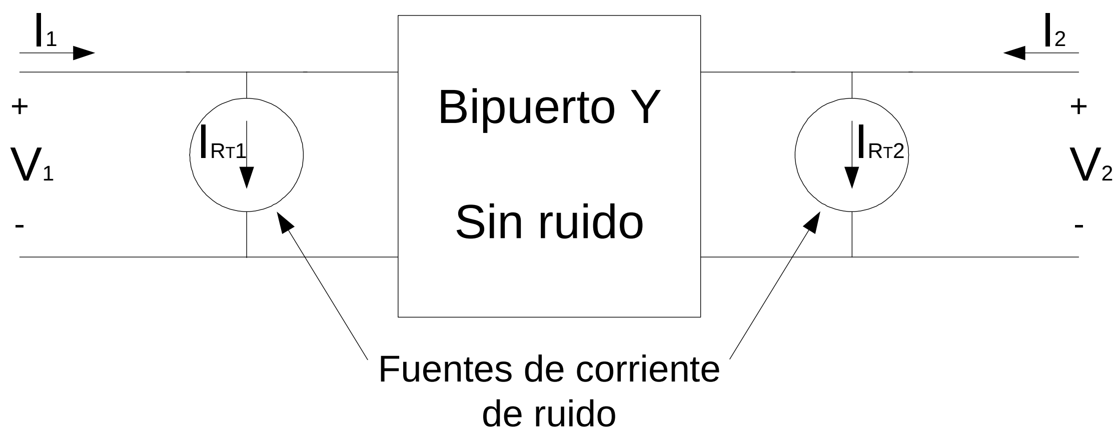


Figura 2.7. Representación en parámetros Y de un bipuerto con ruido.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{YV} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$I_{R_T} = \begin{bmatrix} I_{R_T 1} \\ I_{R_T 2} \end{bmatrix}$$

2.7.3 Modelo de un bipuerto ruidoso usando los parámetros ABCD

En términos de parámetros ABCD el bipuerto ruidoso está representado por un bipuerto sin ruido ABCD conectado a fuentes de voltaje de ruido y corriente de ruido tal y como se muestra en la figura 2.8. Su ecuación matricial es [3]

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix}. \qquad 2.12$$

Desarrollando la ecuación 2.12 se obtiene

$$V_1 = AV_2 - BI_2 + V_{R_T} \,,$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 + I_{R_T} \,.$$

2.7.4 Modelo de un bipuerto ruidoso usando los parámetros H

Por último, en parámetros H el bipuerto está modelado como un bipuerto sin ruido conectado en paralelo con una fuente de corriente de ruido y este circuito a su vez

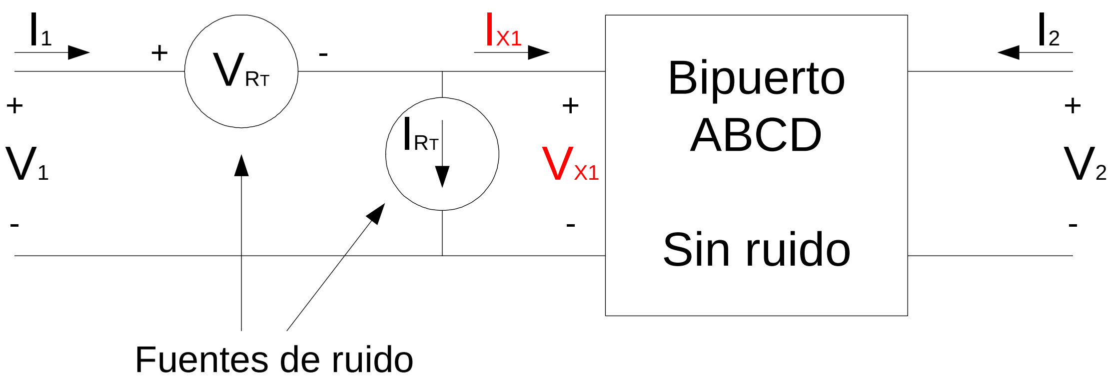


Figura 2.8. Representación en parámetros ABCD de un bipuerto con ruido.

conectado en serie con una fuente de voltaje de ruido, tal y como se muestra en la figura 2.9.

La ecuación matricial de este circuito está dada por

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix}. \qquad 2.13$$

2.8 Matrices de correlación

Las matrices de correlación se conocen desde hace años pero fue hasta 1975 cuando se demostró su importancia para el análisis de ruido de circuitos lineales [21].

Una descripción física significativa de las fuentes de ruido incluidas en los circuitos equivalentes de bipuertos de microondas con ruido, está dada en sus densidades espectrales de potencia propias y cruzadas, (self- and cross-power spectral densities), las cuales se definen como la transformada de Fourier de sus funciones de auto correlación y

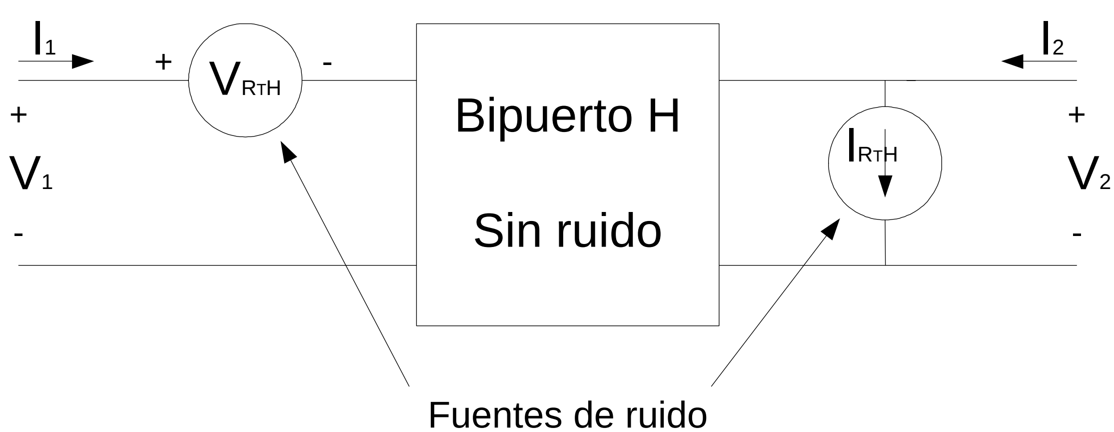


Figura 2.9. Representación en parámetros H de un bipuerto con ruido.

correlación cruzada [21]. El arreglo de estas densidades espectrales en forma matricial da paso a las llamadas matrices de correlación.

La matriz de correlación C_N normalizada al valor de κ se expresa como[1]

$$\overline{C}_N = \frac{C_N}{\kappa} = NN^+ \qquad 2.14$$

donde la matriz de correlación C_N están definidas en forma general mediante la ecuación:

$$C_N = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} N_1 N_1^* & N_1 N_2^* \\ N_2 N_1^* & N_2 N_2^* \end{bmatrix} \qquad 2.14.1$$

y que expresada en forma matricial queda representada por

$$C_N = \kappa NN^+ \qquad 2.14.2$$

donde

κ: es una constante de proporcionalidad

+ : indica la matriz transpuesta conjugada de la matriz original

es decir, si

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \qquad 2.14.3$$

entonces

$$N^+ = [N_1^* \quad N_2^*] \qquad 2.14.4$$

* : indica complejo conjugado

Por otro lado

$$N^+ = (PG)^+ = G^+ P^+ . \qquad 2.15$$

donde

$$G^+ P^+ = [G_1^* \quad G_2^*] \begin{bmatrix} P_{11}^* & P_{21}^* \\ P_{12}^* & P_{22}^* \end{bmatrix}, \qquad 2.15.1$$

y

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = PG = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}G_1 + P_{12}G_2 \\ P_{21}G_1 + P_{22}G_2 \end{bmatrix} \qquad 2.15.2$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \qquad 2.15.3$$

y

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \qquad 2.15.4$$

[1] De aquí en adelante, la normalización de una matriz A se indicará como Ā

De las ecuaciones 2.14 y 2.15 se tiene que

$$\overline{C}_N = NN^+ = PGG^+P^+ = P\overline{C}_G P^+ \qquad 2.16$$

lo que indica que es posible convertir de una matriz de correlación $\overline{C}_G$ a otra matriz de correlación $\overline{C}_N$, cualesquiera, mediante la ecuación matricial 2.16 en la cual, según sea la configuración de estas matrices de correlación, estará definida "la matriz de conversión" P.

2.8.1 Propiedades de la matriz de correlación de ruido

Cuando una matriz de correlación es utilizada para modelar el comportamiento del ruido térmico de un bipuerto, se dice que esta es una matriz Hermitiana porque cumple con las propiedades de que $\mathrm{Im}\{C_{11}\} = \mathrm{Im}\{C_{22}\} = 0$ y $C_{21} = C_{12}^*$ [21].

Con esto, el comportamiento en ruido de un bipuerto lineal puede describirse completamente por medio de cuatro valores reales: $C_{11}, C_{22}, \mathrm{Re}\{C_{12}\} y \, \mathrm{Im}\{C_{12}\}$ [21], el mismo número que los parámetros de ruido definidos con anterioridad.

Una propiedad importante de estas matrices es que son semidefinidas positivas, esto es que $C_{11} \geq 0$, $(C_{22} \geq 0)$ y $\det C_N = C_{11}C_{22} - |C_{12}|^2 \geq 0$ [21].

2.9 Matrices de correlación de ruido para bipuertos con ruido en sus diferentes representaciones

2.9.1 Matriz de correlación de parámetros Y

La ecuación matricial de las corrientes para un bipuerto con ruido está dada por la ecuación 2.11 de la que se toma el segundo término del elemento del lado derecho de la igualdad para obtener la matriz de correlación de parámetros Y del bipuerto, de modo que esta quedará dada por

$$\overline{C}_Y = \overline{\begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix}^+} = \begin{bmatrix} \overline{I_{R_{T1}} I_{R_{T1}}^*} & \overline{I_{R_{T1}} I_{R_{T2}}^*} \\ \overline{I_{R_{T2}} I_{R_{T1}}^*} & \overline{I_{R_{T2}} I_{R_{T2}}^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Y_{11}} & C_{Y_{12}} \\ C_{Y_{21}} & C_{Y_{22}} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{I}_{R_T} \mathbf{I}_{R_T}^{\,+}} \qquad 2.17$$

donde $\mathbf{I}_{R_T}{}^{+}$ es la matriz conjugada transpuesta de la matriz $\mathbf{I}_{R_T}$ y $I_{R_{Tn}}{}^{*}$ es el complejo conjugado de $I_{R_{Tn}}$, para n=1,2.

De la ecuación 2.17 se puede observar que la matriz de correlación en parámetros Y para un bipuerto con ruido es igual a

$$\overline{C}_Y = \begin{bmatrix} \overline{\left|I_{R_{T1}}\right|^2} & \overline{I_{R_{T1}} I_{R_{T2}}{}^{*}} \\ \overline{I_{R_{T2}} I_{R_{T1}}{}^{*}} & \overline{\left|I_{R_{T2}}\right|^2} \end{bmatrix}. \qquad 2.18$$

2.9.2 Matriz de correlación de parámetros Z

La ecuación matricial de voltaje de un bipuerto ruidoso está dada por la ecuación 2.10. Tomado el segundo sumando del elemento del lado derecho de la igualdad para utilizarlo en la obtención de la matriz de correlación de parámetros Z del bipuerto $\overline{C}_Z$, se obtiene

$$\overline{C}_Z = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix}^{+}} = \begin{bmatrix} \overline{V_{R_{T1}} V_{R_{T1}}{}^{*}} & \overline{V_{R_{T1}} V_{R_{T2}}{}^{*}} \\ \overline{V_{R_{T2}} V_{R_{T1}}{}^{*}} & \overline{V_{R_{T2}} V_{R_{T2}}{}^{*}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Z\,11} & C_{Z\,12} \\ C_{Z\,21} & C_{Z\,22} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{V}_{R_T} \mathbf{V}_{R_T}{}^{+}} \qquad 2.19$$

donde

$$\mathbf{V}_{R_T} = \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{V}_{R_T}{}^{+}$ es la matriz conjugada transpuesta de la matriz $\mathbf{V}_{R_T}$ y $V_{R_{Tn}}{}^{*}$ es el complejo conjugado de $V_{R_{Tn}}$, para n=1,2.

Así, de la ecuación 2.19 se obtiene la matriz de correlación en parámetros Z como

$$\overline{C}_Z = \begin{bmatrix} \overline{\left|V_{R_{T1}}\right|^2} & \overline{V_{R_{T1}} V_{R_{T2}}{}^{*}} \\ \overline{V_{R_{T2}} V_{R_{T1}}{}^{*}} & \overline{\left|V_{R_{T2}}\right|^2} \end{bmatrix}. \qquad 2.20$$

2.9.3 Matriz de correlación de parámetros ABCD

De la ecuación matricial 2.12 es posible obtener la ecuación de la matriz de correlación de parámetros ABCD de un bipuerto ruidoso por medio de la igualdad que a continuación se presenta

$$\overline{C}_A = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix}^+} = \begin{bmatrix} \overline{\left|V_{R_T}\right|^2} & \overline{V_{R_T} I_{R_T}^*} \\ \overline{I_{R_T} V_{R_T}^*} & \overline{\left|I_{R_T}\right|^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{A_{11}} & C_{A_{12}} \\ C_{A_{21}} & C_{A_{22}} \end{bmatrix} = \overline{\mathsf{A}_{\mathsf{R}_\mathsf{T}} \mathsf{A}_{\mathsf{R}_\mathsf{T}}^+} \qquad 2.21$$

con

$$\mathsf{A}_{\mathsf{R}_\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix}$$

y $\mathsf{A}_{\mathsf{R}_\mathsf{T}}^+$ es la matriz conjugada transpuesta de la matriz $\mathsf{A}_{\mathsf{R}_\mathsf{T}}$, $V_{R_T}^*$ es el complejo conjugado de V_{R_T} e $I_{R_T}^*$ es el complejo conjugado de I_{R_T}.

De la ecuación 2.21 es posible expresar a la matriz de correlación de parámetros ABCD como

$$\overline{C}_A = \begin{bmatrix} \overline{\left|V_{R_T}\right|^2} & \overline{V_{R_T} I_{R_T}^*} \\ \overline{I_{R_T} V_{R_T}^*} & \overline{\left|I_{R_T}\right|^2} \end{bmatrix}. \qquad 2.22$$

2.9.4 Matriz de correlación de parámetros H

Utilizando el término que modela el ruido de un bipuerto en parámetros H, el cual está incluido en la ecuación matricial 2.13, para obtener la ecuación que define a su matriz de correlación se tiene que:

$$\overline{C}_H = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix}^+} = \begin{bmatrix} \overline{\left|V_{R_T H}\right|^2} & \overline{V_{R_T H} I_{R_T H}^*} \\ \overline{I_{R_T H} V_{R_T H}^*} & \overline{\left|I_{R_T H}\right|^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{H_{11}} & C_{H_{12}} \\ C_{H_{21}} & C_{H_{22}} \end{bmatrix} = \overline{\mathsf{H}_{\mathsf{R}_\mathsf{T}} \mathsf{H}_{\mathsf{R}_\mathsf{T}}^+} \qquad 2.23$$

con

$\begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix}^+$: la matriz conjugada transpuesta de la matriz $\begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix}$,

$V_{R_T H}^*$ es el complejo conjugado de $V_{R_T H}$,

$I_{R_T H}^*$ es el complejo conjugado de $I_{R_T H}$.

De la ecuación 2.21 es posible expresar a la matriz de correlación de parámetros ABCD como

$$\overline{C}_H = \begin{bmatrix} \dfrac{\overline{\left|V_{R_T H}\right|^2}}{\overline{I_{R_T H} V_{R_T H}^{*}}} & \dfrac{\overline{V_{R_T H} I_{R_T H}^{*}}}{\overline{\left|I_{R_T H}\right|^2}} \end{bmatrix} \qquad 2.23.1$$

2.10 Relación entre las matrices de correlación de diferentes parámetros, de bipuertos con ruido

Cuando para un bipuerto con ruido existen para su representación dos o más matrices de correlación de ruido, es posible realizar la transformación de una a otra por medio de una forma particular de la ecuación 2.16, siendo entonces la matriz P la "matriz de transformación" la cual se define de diversas formas según sea el caso. A continuación se presentan diversas matrices de transformación entre matrices de correlación.

2.10.1 Conversión de la matriz de correlación $\overline{C}_Z$ a la matriz de correlación $\overline{C}_Y$

Retomando la ecuación matricial 2.10.1 y solucionándola para $\mathbf{I}$ se obtiene que

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V} - \mathbf{Z}^{-1}V_{R_T} \qquad 2.24$$

Comparando la ecuación 2.24 con la ecuación matricial 2.11 es posible deducir que el término matricial correspondiente al efecto del ruido térmico es igual a

$$\begin{bmatrix} I_{R_T 1} \\ I_{R_T 2} \end{bmatrix} = I_{R_T} = -\mathbf{Z}^{-1}V_{R_T} = -\mathbf{Y}V_{R_T} \qquad 2.25$$

Tomando en cuenta lo anterior y a la ecuación 2.17, la ecuación de la matriz de correlación normalizada de parámetros Y, queda como

$$\begin{aligned} \overline{C}_Y &= \overline{I_{R_T} I_{R_T}^{+}} = \overline{\left(-\mathbf{Y}V_{R_T}\right)\left(-\mathbf{Y}V_{R_T}\right)^{+}} = \left(-\mathbf{Y}\right)\overline{V_{R_T} V_{R_T}^{+}}\left(-\mathbf{Y}^{+}\right) = \left(\mathbf{Y}\right)\overline{V_{R_T} V_{R_T}^{+}}\left(\mathbf{Y}^{+}\right) \\ &= \left(-\mathbf{Z}^{-1}\right)\overline{V_{R_T} V_{R_T}^{+}}\left(-\mathbf{Z}^{-1+}\right) = \left(\mathbf{Z}^{-1}\right)\overline{V_{R_T} V_{R_T}^{+}}\left(\mathbf{Z}^{-1+}\right) \end{aligned} \qquad 2.26$$

Una forma alterna de la ecuación 2.19 está dada por la ecuación

$$\overline{C}_Z = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix}^{+}} = \overline{V_{R_T} V_{R_T}^{+}} \qquad 2.27$$

que relacionada con la ecuación 2.26 da como resultado la ecuación de transformación

$$\overline{C}_Y = \mathbf{Y}\overline{C}_Z\mathbf{Y}^{+} = P_{ZY}\overline{C}_Z P_{ZY}^{+} \qquad 2.28$$

de la cual se establece que la matriz de transformación de la matriz de correlación $\overline{C}_Z$ a la matriz de correlación $\overline{C}_Y$ es P_{ZY} y es igual a

$$P_{ZY} = \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_{22}}{\Delta Z} & \dfrac{Z_{12}}{\Delta Z} \\ \dfrac{Z_{21}}{\Delta Z} & \dfrac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{bmatrix} \quad 2.29$$

donde

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} \quad 2.30$$

2.10.2 Conversión de la matriz de correlación $\overline{C}_Y$ a la matriz de correlación $\overline{C}_Z$

Retomando la ecuación 2.11.1 y solucionando para $\mathbf{V}$ se obtiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{Y}^{-1} I_{R_T} \quad 2.31$$

De la comparación de las ecuaciones 2.31 y 2.10 es posible deducir que el término matricial del voltaje de ruido térmico es igual a

$$\begin{bmatrix} V_{R_T1} \\ V_{R_T2} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{\mathbf{R_T}} = -\mathbf{Y}^{-1} I_{R_T} = -\mathbf{Z} I_{R_T} \quad 2.32$$

Sustituyendo la ecuación 2.32 en la ecuación 2.27

$$\overline{C}_Z = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix}^+} = (-\mathbf{Z})\overline{I_{R_T} I_{R_T}{}^+}(-\mathbf{Z}^+) = \mathbf{Z}\overline{C}_Y\mathbf{Z}^+ = P_{YZ}\overline{C}_Y P_{YZ}{}^+ =$$
$$= (-\mathbf{Y}^{-1})\overline{I_{R_T} I_{R_T}{}^+}(-\mathbf{Y}^{-1+}) = (\mathbf{Y}^{-1})\overline{I_{R_T} I_{R_T}{}^+}(\mathbf{Y}^{-1+}) \quad 2.33$$

donde la matriz de transformación de la matriz de correlación $\overline{C}_Y$ a la matriz de correlación $\overline{C}_Z$ es P_{YZ} y es igual a

$$P_{YZ} = \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_{22}}{\Delta Y} & \dfrac{-Y_{12}}{\Delta Y} \\ \dfrac{-Y_{21}}{\Delta Y} & \dfrac{Y_{11}}{\Delta Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad 2.34$$

donde

$$\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21} \quad 2.34.1$$

2.10.3 Conversión de la matriz de correlación $\overline{C}_A$ a la matriz de correlación $\overline{C}_Z$

Como se presenta en el apéndice C, la representación en parámetros ABCD de la ecuación matricial 2.10 está dada por

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T} - I_{R_T} \frac{A}{C} \\ -\frac{1}{C} I_{R_T} \end{bmatrix} \qquad 2.35$$

de donde

$$\mathbf{V}_{\mathrm{R_T}} = \begin{bmatrix} V_{R_T} - I_{R_T} \frac{A}{C} \\ -\frac{1}{C} I_{R_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{A}{C} \\ 0 & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} \qquad 2.36$$

que en su forma equivalente en parámetros Z es igual a

$$\mathbf{V}_{\mathrm{R_T}} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_{11} \\ 0 & -Z_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} \qquad 2.37$$

Reescribiendo en variables matriciales la ecuación 2.37

$$\mathbf{V}_{\mathrm{R_T}} = \mathbf{W}\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}} \qquad 2.38$$

donde

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{A}{C} \\ 0 & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_{11} \\ 0 & -Z_{21} \end{bmatrix} \qquad 2.38.1$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}} = \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} \qquad 2.38.2$$

De las ecuaciones 2.19 y 2.38

$$\overline{C}_Z = \overline{\mathbf{V}_{\mathrm{R_T}}\mathbf{V}_{\mathrm{R_T}}^{+}} = \overline{\mathbf{W}\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}\left(\mathbf{W}\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}\right)^{+}} = \mathbf{W}\overline{\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}^{+}}\mathbf{W}^{+} = \mathbf{W}\overline{C}_A\mathbf{W}^{+} \qquad 2.39$$

donde $\overline{C}_A$ es la matriz de correlación de ruido para los parámetros ABCD y es igual a

$$\overline{C}_A = \overline{\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}^{+}} \qquad 2.40$$

De las ecuaciones 2.39 y 2.40 se establece a la matriz de transformación de las matrices de correlación de ruido $\overline{C}_A$ a $\overline{C}_Z$ como P_{AZ} donde

$$P_{AZ} = \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_{11} \\ 0 & -Z_{21} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

2.10.4 Conversión de la matriz de correlación $\overline{C}_Z$ a la matriz de correlación $\overline{C}_A$

En el apéndice C se muestra la representación en parámetros Z de la ecuación matricial 2.12 la cual es igual a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_{11}}{Z_{21}} & \dfrac{|Z|}{Z_{21}} \\ \dfrac{1}{Z_{21}} & \dfrac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} - V_{R_{T2}} \dfrac{Z_{11}}{Z_{21}} \\ -\dfrac{1}{Z_{21}} V_{R_{T2}} \end{bmatrix}$$

y de la que el término que modela al ruido térmico, así como su equivalente en parámetros ABCD es igual a

$$\begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{Z_{11}}{Z_{21}} \\ 0 & -\dfrac{1}{Z_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -A \\ 0 & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Reescribiendo la ecuación 2.42 con variables matriciales queda como

$$\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}} = \mathbf{M}\mathbf{V}_{\mathrm{R_T}} \tag{2.43}$$

donde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{Z_{11}}{Z_{21}} \\ 0 & -\dfrac{1}{Z_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -A \\ 0 & -C \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

De las ecuaciones 2.21, 2.43 y 2.44 la matriz de correlación de ruido de parámetros ABCD será igual a

$$\overline{C}_A = \mathbf{A}_{\mathrm{R_T}} \mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}^{+} = \mathbf{M}\mathbf{V}_{\mathrm{R_T}} \left(\mathbf{M}\mathbf{V}_{\mathrm{R_T}}\right)^{+} = \mathbf{M}\overline{\mathbf{V}_{\mathrm{R_T}} \mathbf{V}_{\mathrm{R_T}}^{+}}\mathbf{M}^{+} \tag{2.45}$$

por lo tanto

$$\overline{C}_A = \mathbf{M}\overline{C}_Z \mathbf{M}^{+} = P_{ZA} \overline{C}_Z P_{ZA}^{+} \tag{2.46}$$

con la matriz de transformación P_{ZA} de las matrices de correlación de ruido $\overline{C}_Z$ a $\overline{C}_A$ como

$$P_{ZA} = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{Z_{11}}{Z_{21}} \\ 0 & -\dfrac{1}{Z_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -A \\ 0 & -C \end{bmatrix} \qquad 2.47$$

2.10.5 Conversión de la matriz de correlación $\overline{C}_Y$ a la matriz de correlación $\overline{C}_A$

Tomando del apéndice C la representación en parámetros Y de la ecuación 2.12 la cual está dada por

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\dfrac{1}{Y_{21}} \\ -\dfrac{|Y|}{Y_{21}} & -\dfrac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{I_{R_{T2}}}{Y_{21}} \\ I_{R_{T1}} - \dfrac{Y_{11}}{Y_{21}} I_{R_{T2}} \end{bmatrix}$$

y de la que el término que modela el efecto del ruido térmico en parámetros Y y ABCD es igual a

$$\begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{Y_{21}} \\ 1 & -\dfrac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad 2.48$$

Reescribiendo la ecuación 2.48 con variables matriciales para representarla de la forma

$$\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}} = \mathbf{J}\mathbf{I}_{\mathrm{R_T}} \qquad 2.49$$

donde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{Y_{21}} \\ 1 & -\dfrac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 1 & D \end{bmatrix} \qquad 2.49.1$$

Sustituyendo la ecuación 2.48 en la ecuación 2.21 de modo que

$$\overline{C}_A = \overline{\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}} \mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}{}^{+}} = \mathbf{J}\overline{\mathbf{I}_{\mathrm{R_T}} \left(\mathbf{J}\mathbf{I}_{\mathrm{R_T}}\right)^{+}} = \mathbf{J}\overline{\mathbf{I}_{\mathrm{R_T}} \mathbf{I}_{\mathrm{R_T}}{}^{+}}\mathbf{J}^{+}$$

y de la ecuación 2.26

$$\overline{C}_A = \mathbf{J}\overline{C}_Y \mathbf{J}^{+} = P_{YA} \overline{C}_Y P_{YA}{}^{+} \qquad 2.50$$

donde la matriz de transformación de las matrices de correlación de ruido $\overline{C}_Y$ a $\overline{C}_A$ es igual a

$$P_{YA} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 1 & D \end{bmatrix} \quad 2.51$$

2.10.6. Conversión de la matriz de correlación $\overline{C}_A$ a la matriz de correlación $\overline{C}_Y$

En el apéndice C se demuestra que la ecuación matricial de las corrientes de un bipuerto con ruido está dada por

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_T} - \frac{D}{B} V_{R_t} \\ \frac{1}{B} V_{R_T} \end{bmatrix}$$

Comparando esta con la ecuación 2.11 se observa que el término que modela el efecto del ruido térmico es igual a

$$\begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{D}{B} \\ 0 & \frac{1}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_R \\ V_R \end{bmatrix} \quad 2.52$$

y que en variables matriciales queda como

$$\mathbf{I}_{\mathrm{R_T}} = \mathbf{K}\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}} \quad 2.53$$

De las ecuaciones 2.17 y 2.53 la matriz de correlación de ruido de parámetros Y queda como

$$\overline{C}_Y = \overline{\begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix}^+} = \overline{\mathbf{I}_{\mathrm{R_T}} \mathbf{I}_{\mathrm{R_T}}{}^+} \quad 2.54$$

Desarrollando la ecuación 2.54 la expresión para la matriz de correlación de ruido en parámetros Y queda como

$$\overline{C}_Y = \overline{\mathbf{K}\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}} (\overline{\mathbf{K}\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}})^+ = \mathbf{K} \overline{\mathbf{A}_{\mathrm{R_T}} \mathbf{A}_{\mathrm{R_T}}{}^+} \mathbf{K}^+ = \mathbf{K} \overline{C}_A \mathbf{K}^+ = P_{AY} \overline{C}_A P_{AY}{}^+$$

donde la matriz de transformación de las matrices de correlación de ruido $\overline{C}_A$ a $\overline{C}_Y$ en parámetros ABCD y Y respectivamente es igual a

$$P_{AY} = \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{D}{B} \\ 0 & \frac{1}{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Y_{11} \\ 0 & -Y_{21} \end{bmatrix} \quad 2.55$$

2.10.7 Conversión de la matriz de correlación $\overline{C}_Y$ a la matriz de correlación $\overline{C}_H$

En el apéndice C se estableció que

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{Y_{11}} I_{R_{T1}} \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{11}} I_{R_{T1}} + I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad 2.56$$

Deduciendo de las ecuaciones 2.13 y 2.56 el valor del término que modela el efecto del ruido térmico se obtiene que

$$\begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Y_{11}} I_{R_{T1}} \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{11}} I_{R_{T1}} + I_{R_{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Y_{11}} & 0 \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{11}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad 2.57$$

ecuación que expresada en variables matriciales queda como

$$\mathbf{H}_{\mathbf{R_T}} = \mathbf{L}\mathbf{I}_{\mathbf{R_T}} \qquad 2.58$$

Definiendo a la matriz de correlación de ruido de parámetros H será igual a

$$\overline{C}_H = \overline{\mathbf{H}_{\mathbf{R_T}}\mathbf{H}_{\mathbf{R_T}}{}^{+}} = \left(\mathbf{L}\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{R_T}}}\right)\left(\mathbf{L}\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{R_T}}}\right)^{+} = \mathbf{L}\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{R_T}}\mathbf{I}_{\mathbf{R_T}}{}^{+}}\mathbf{L}^{+} \qquad 2.59$$

y de la ecuación 2.26 la expresión para 2.59 queda como

$$\overline{C}_H = \mathbf{L}\overline{C}_Y\mathbf{L}^{+} \qquad 2.60$$

donde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -H_{11} & 0 \\ -H_{21} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Y_{11}} & 0 \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{11}} & 1 \end{bmatrix} \qquad 2.61$$

La matriz de transformación de la matriz de correlación $\overline{C}_Y$ a la matriz de correlación $\overline{C}_H$ se definirá como

$$P_{YH} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -H_{11} & 0 \\ -H_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad 2.62$$

2.10.8 Conversión de la matriz de correlación $\overline{C}_H$ a la matriz de correlación $\overline{C}_Y$

Del apéndice C se tiene que

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_{11}} & -\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta H}{H_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_{11}} V_{R_T H} \\ -\frac{H_{21}}{H_{11}} V_{R_T H} + I_{R_T H} \end{bmatrix} \qquad 2.63$$

De las ecuaciones 2.11 y 2.63, el ruido térmico queda como

$$\begin{bmatrix} I_{R_T 1} \\ I_{R_T 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_{11}} V_{R_T H} \\ -\frac{H_{21}}{H_{11}} V_{R_T H} + I_{R_T H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_{11}} & 0 \\ -\frac{H_{21}}{H_{11}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix} \qquad 2.64$$

Rescribiendo la ecuación 2.64

$$\mathbf{I}_{\mathrm{R_T}} = \mathbf{\tilde{N}}\mathbf{H}_{\mathrm{R_T}} \qquad 2.65$$

donde

$$\mathbf{I}_{\mathrm{R_T}} = \begin{bmatrix} I_{R_T 1} \\ I_{R_T 2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\tilde{N}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_{11}} V_{R_T H} \\ -\frac{H_{21}}{H_{11}} V_{R_T H} + I_{R_T H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_{11}} & 0 \\ -\frac{H_{21}}{H_{11}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{R_T}} = \begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix}$$

De las ecuaciones 2.17 y 2.65 la matriz de correlación de ruido de parámetros Y queda como

$$\overline{C}_Y = \overline{\mathbf{I}_{\mathrm{R_T}} \mathbf{I}_{\mathrm{R_T}}{}^{+}} = \left(\mathbf{\tilde{N}}\overline{\mathbf{H}_{\mathrm{R_T}}}\right)\left(\mathbf{\tilde{N}}\overline{\mathbf{H}_{\mathrm{R_T}}}\right)^{+} = \mathbf{\tilde{N}}\overline{\mathbf{H}_{\mathrm{R_T}} \mathbf{H}_{\mathrm{R_T}}{}^{+}}\mathbf{\tilde{N}}^{+} = \mathbf{\tilde{N}}\overline{C}_H\mathbf{\tilde{N}}^{+} = P_{HY}\overline{C}_H P_{HY}{}^{+} \qquad 2.66$$

donde la matriz de transformación de la matriz de correlación $\overline{C}_H$ a la matriz de correlación $\overline{C}_Y$ es igual a

Tabla 2.1 Matrices de transformación para las diferentes matrices de correlación de ruido.

MATRIZ NUEVA / MATRIZ ORIGINAL	$\overline{C}_Y$	$\overline{C}_Z$	$\overline{C}_A$	$\overline{C}_H$
$\overline{C}_Y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$P_{YZ} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$P_{YA} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 1 & D \end{bmatrix}$	$P_{YH} = \begin{bmatrix} -H_{11} & 0 \\ -H_{21} & 1 \end{bmatrix}$
$\overline{C}_Z$	$P_{ZY} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$P_{ZA} = \begin{bmatrix} 1 & -A \\ 0 & -C \end{bmatrix}$	
$\overline{C}_A$	$P_{AY} = \begin{bmatrix} 1 & -Y_{11} \\ 0 & -Y_{21} \end{bmatrix}$	$P_{AZ} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_{11} \\ 0 & -Z_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
$\overline{C}_H$	$P_{HY} = \begin{bmatrix} -Y_{11} & 0 \\ -Y_{21} & 1 \end{bmatrix}$			$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P_{HY} = \tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{H_{11}} & 0 \\ -\dfrac{H_{21}}{H_{11}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{11} & 0 \\ -Y_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad 2.67$$

2.10.9 Matrices de conversión entre diferentes matrices de correlación para bipuertos con ruido.

En resumen, las matrices de transformación entre matrices de correlación de ruido expuestas en este capítulo se presentan en la tabla 2.1.

2.11 Relación entre los parámetros de ruido y la matriz de correlación $\overline{C}_A$

Para caracterizar el ruido de transistores de microondas es necesario conocer sus parámetros de ruido, tal y como se establece en la ecuación 2.6. Sin embargo cuando no se cuenta con estos pero se conocen los valores de los elementos del modelo de pequeña señal del transistor, es posible determinar su matriz de correlación de ruido y posteriormente obtener los parámetros de ruido.

En el apéndice D, se deduce la ecuación del factor de ruido en términos de los elementos de la matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD, de un bipuerto ruidoso, la cual está dada por:

$$F = 1 + \frac{\begin{bmatrix} Y_F & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{A_{11}} & C_{A_{12}} \\ C_{A_{21}} & C_{A_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_F{}^* \\ 1 \end{bmatrix}}{4KT_0 G_F B} \qquad 2.68$$

donde $C_{A_{11}}$, $C_{A_{12}}$, $C_{A_{21}}$, y $C_{A_{22}}$ son los elementos de la matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD del dispositivo bajo prueba.

Por otro lado y de un análisis similar al desarrollado en el apéndice D, se puede obtiene una expresión alternativa para el factor de ruido dada por [2]

$$F_T(Zs_i) = 1 + \frac{\begin{bmatrix} 1 & Zs_i{}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Zs_i \end{bmatrix}}{4KBT_0 \ \mathrm{Re}(Zs_i)} \qquad 2.69$$

donde C_A^T es la matriz de correlación de ruido, total, en parámetros ABCD del transistor de efecto de campo, (TEC).

Obsérvese que ambas expresiones, el factor de ruido del TEC no solo depende de C_A^T, sino también de la admitancia de fuente acoplada o la impedancia de fuente acoplada al transistor, respectivamente.

A continuación se presentan las expresiones de los parámetros de ruido del TEC en términos de los elementos de la matriz de correlación total de ruido en parámetros ABCD, para la verificación de su deducción favor de remitirse a la sección D.2 del apéndice D.

$$F_{\min} = 1 + 2\left[\mathrm{Re}\{C_{A_{12}}\} + \sqrt{C_{A_{22}} C_{A_{11}} - \left(\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}\right)^2} \right] \qquad 2.70$$

$$R_{R_T} = C_{A_{11}} \qquad 2.71$$

$$G_{opt} = \sqrt{\frac{C_{A_{22}}}{C_{A_{11}}} - \left[\frac{\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}}{C_{A_{11}}} \right]^2} \qquad 2.72$$

$$B_{opt} = \frac{\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}}{C_{A_{11}}} = \frac{-\,\mathrm{Im}\{C_{A_{21}}\}}{C_{A_{11}}} \qquad 2.73$$

donde

$$C_A^T = \begin{bmatrix} C_{A_{11}} & C_{A_{12}} \\ C_{A_{21}} & C_{A_{22}} \end{bmatrix} \qquad 2.73.1$$

Por otro lado, los elementos de la matriz de correlación total de ruido en parámetros ABCD en términos de los parámetros de ruido del TEC están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$C_{A_{11}} = R_{R_T} \qquad 2.74$$

$$C_{A_{12}} = \left[\frac{1}{2}\left(F_{\min} - 1\right) - R_{R_T} Y_{opt}^{\ *} \right] \qquad 2.75$$

$$C_{A_{21}} = \left[\frac{1}{2}\left(F_{\min} - 1\right) - R_{R_T} Y_{opt} \right] \qquad 2.76$$

$$C_{A_{22}} = R_{R_T} \left| Y_{opt} \right|^2 \qquad 2.77$$

La deducción de las ecuaciones 2.70 a 2.77 se presenta en el apéndice D.

En este capítulo se han presentado los conceptos básicos que se utilizaron en el presente trabajo.

En el capítulo posterior se presenta el desarrollo de la técnica de extracción de los parámetros de ruido.

Capítulo 3

Técnica de extracción de los parámetros de ruido

En este capítulo se desarrolla el procedimiento que analiza la técnica propuesta por Lázaro en 1999 [2], para la extracción de los parámetros de ruido de transistores de efecto de campo para microondas. Esto tiene como objetivo generar una evidencia documental para el estudio del factor de ruido y los parámetros de ruido en transistores de microondas, con la cual no se cuenta hasta el momento. Además servirá como referencia para la justificación del siguiente capítulo en el cual se describe el desarrollo de la herramienta de cómputo, objeto de esta tesis.

3.1 Matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD del transistor de efecto de campo para microondas

Para calcular los parámetros de ruido del transistor de efecto de campo (TEC) para altas frecuencias se requiere, como lo indican las ecuaciones 2.69 a 2.73, determinar la matriz de correlación de ruido total del transistor C_A^T definida por:

$$\overline{C}_A^{T} = \overline{C}_A^{EXT} + \overline{C}_A^{INT} \qquad 3.1$$

donde $\overline{C}_A^{EXT}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD del transistor extrínseco dada por:

$$\overline{C}_A^{EXT} = \overline{C}_A^{g} + \left(A_g P_{ZA}^{gdis}\right)\overline{C}_Z^{s}\left(A_g P_{ZA}^{gdis}\right)^{+} + \left(A_g A_{gdis}\right)\overline{C}_A^{d}\left(A_g A_{gdis}\right)^{+} \qquad 3.2$$

y $\overline{C}_A^{INT}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD del transistor intrínseco definida como:

$$\overline{C}_A^{INT} = \left(A_g P_{ZA}^{gdis} P_{YZ}^{gdi} P_{HY}^{i}\right)\overline{C}_H^{\,i}\left(A_g P_{ZA}^{gdis} P_{YZ}^{gdi} P_{HY}^{i}\right)^{+} \qquad 3.3$$

Aunque la deducción de la ecuaciones 3.1 a 3.3 es parte importante del análisis del transistor, la relevancia de este capítulo radica en mostrar la técnica desarrollada por Lázaro [2], para la solución del problema de la obtención de los parámetros de ruido a partir de la relación del factor de ruido con las matrices de correlación y la forma de obtención de los valores de las temperaturas equivalentes de ruido del transistor intrínseco, por lo que dicha deducción se presenta en el apéndice H.

3.2 Matriz de correlación de ruido en parámetros H del transistor intrínseco

La matriz de correlación de ruido en parámetros H del transistor intrínseco, normalizada a la constante $\kappa = 4KB$ denominada $\overline{C}_H^{\,i}$, (bipuerto MAT6, figura 2.5), se define con base en lo especificado en la sección 2.9.4 del capítulo 2, por la ecuación:

$$\overline{C}_H^{\,i} = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ \\ I_{R_T H} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ \\ I_{R_T H} \end{bmatrix}^{+}} \qquad 3.4$$

donde las fuentes de voltaje $V_{R_T H}$ y corriente $I_{R_T H}$ de ruido térmico, están definidas según el modelo de pequeña señal del transistor intrínseco, (ver figura 2.5), como

$$V_{R_T H} = V_G = \sqrt{4KBT_G Ri} \qquad 3.4.1$$

$$I_{R_T H} = I_D = \sqrt{\frac{4KBT_D}{Rds}}\,, \qquad 3.4.2$$

y donde T_G y T_D, son las temperaturas equivalentes de ruido, de los elementos resistivos Ri y Rds del transistor intrínseco, respectivamente.

Entonces la matriz de correlación $\overline{C}_H^{\,i}$, está dada por

$$\overline{C}_H{}^i = \overline{\begin{bmatrix} V_G \\ \\ I_D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_G \\ \\ I_D \end{bmatrix}^+} = \begin{bmatrix} \overline{|V_G|^2} & \overline{V_G I_D{}^*} \\ \\ \overline{V_G{}^* I_D} & \overline{|I_D|^2} \end{bmatrix} \qquad 3.5$$

Como propone Pospieszalski [6], en el modelo del transistor intrínseco se asume la no correlación entre las fuentes de ruido térmico representadas por estas temperaturas equivalentes de ruido. En otras palabras, la correlación cruzada entre las fuentes de ruido del transistor intrínseco es igual a cero.

Por otro lado, las autocorrelaciones son iguales a $T_G Ri$ y $\frac{T_D}{Rds}$ para V_G e I_D respectivamente.

Por lo tanto, la matriz de correlación en parámetros H del transistor intrínseco queda como:

$$\overline{C}_H{}^i = \begin{bmatrix} T_G Ri & 0 \\ 0 & \frac{T_D}{Rds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}^i_{11} & \overline{C}^i_{12} \\ \overline{C}^i_{21} & \overline{C}^i_{22} \end{bmatrix} \qquad 3.6$$

correspondiendo $\overline{C}^i_{11}$ y $\overline{C}^i_{22}$ a los términos de autocorrelación y $\overline{C}^i_{21}$ y $\overline{C}^i_{12}$ a los términos de correlación cruzada.

3.3 Expresión del factor de ruido del transistor de microondas en función de las matrices de correlación de ruido en parámetros ABCD del transistor intrínseco, $\overline{C}_A^{INT}$ y del transistor extrínseco $\overline{C}_A^{EXT}$

Como se menciona en el capítulo 2, la definición general del factor de ruido está dada por la ecuación 2.69.

En términos de la matriz de correlación total de ruido en parámetros ABCD del TEC normalizada al valor de $4KB$, normalización que se hace con la finalidad de simplificar cálculos algebraicos ya que se considera que todas las mediciones están en el mismo ancho de banda, queda de la forma

$$F_T(Zs_i) = 1 + \frac{\begin{bmatrix} 1 & Zs_i{}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{C}^T_A\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ Zs_i \end{bmatrix}}{T_0 \operatorname{Re}(Zs_i)} \qquad 3.7$$

De lo establecido en la ecuación 3.1, la ecuación 3.7 se puede escribir como

$$F_T\left(Zs_i\right)=1+\frac{\left[1 \quad Zs_i^{\,*}\right]\left[\overline{C}_A^{ExT}+\overline{C}_A^{INT}\right]\begin{bmatrix}1\\ Zs_i\end{bmatrix}}{T_0\ \mathrm{Re}(Zs_i)}$$

$$=1+\frac{\left[1 \quad Zs_i^{\,*}\right]\left[\overline{C}_A^{EXT}\right]\begin{bmatrix}1\\ Zs_i\end{bmatrix}+\left[1 \quad Zs_i^{\,*}\right]\left[\overline{C}_A^{INT}\right]\begin{bmatrix}1\\ Zs_i\end{bmatrix}}{T_0\ \mathrm{Re}(Zs_i)} \tag{3.8}$$

De esta forma, el factor de ruido está en función de las matrices de correlación de ruido del transistor las cuales dependen de los valores de los elementos de su modelo de pequeña señal y de las temperaturas $T_0 = 290°K$ o temperatura ambiente que representa a las fuentes de ruido térmico del transistor extrínseco, T_G y T_D, temperaturas que representan a las fuentes de ruido térmico V_G e I_D, de compuerta y drenador, respectivamente, del transistor intrínseco.

3.4 Descripción de la técnica de Lázaro para determinar los parámetros de ruido del transistor de efecto de campo

El circuito equivalente del TEC con fuente de ruido híbrida en el transistor intrínseco, que se reporta en [2] y que es utilizado para el desarrollo de esta técnica, se muestra en la figura 3.1.

Para esta técnica se asume que se cuenta con la medición de los parámetros de dispersión o parámetros S del transistor, o que se conoce el total de los valores de los elementos de su modelo de pequeña señal además de la medición del factor de ruido para una impedancia de fuente de Z_S=50Ω, (es decir para un coeficiente de reflexión de fuente igual a cero), para N puntos de frecuencia en un ancho de banda específico.

Con esta información se debe determinar la matriz de correlación intrínseca de ruido del transistor $\overline{C}_A^{INT}$ y de ahí derivar los valores de sus temperaturas T_D y T_G.

Como se muestra en la ecuación 3.8, el factor de ruido del transistor para la impedancia de fuente medida Zs_i, correspondiente a la *i*-ésima frecuencia, puede ser expresada como una función de las matrices de correlación de ruido intrínseca y extrínseca del transistor.

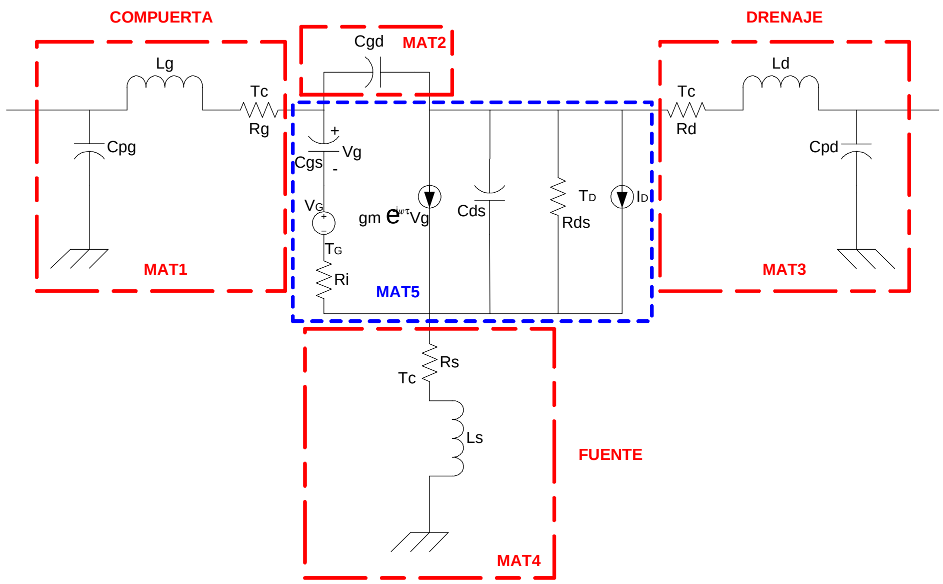


Figura 3.1. Circuito equivalente del transistor de efecto de campo utilizado por Lázaro, Pradell y O'Callaghan para el desarrollo de su técnica de extracción de los parámetros de ruido, 1999 [2].

Al despejar de la ecuación 3.8 el término que contiene a la matriz de correlación intrínseca $\overline{C}_A^{INT}$, se obtiene que,

$$[F_T(Zs_i)-1]T_0\,\mathrm{Re}(Zs_i)-[1 \quad Zs_i^{\,*}]\,[\overline{C}_A^{EXT}]\begin{bmatrix}1\\ Zs_i\end{bmatrix} = [1 \quad Zs_i^{\,*}]\,[\overline{C}_A^{INT}]\begin{bmatrix}1\\ Zs_i\end{bmatrix} \qquad 3.9$$

donde el término del lado izquierdo de la igualdad depende de la temperatura ambiente $T_0 = 290°K$ y de los valores de los elementos del transistor extrínseco del modelo de pequeña señal del TEC; mientras que el lado derecho depende de los valores de los elementos de la red de compuerta del transistor extrínseco, de los elementos del transistor intrínseco y de los valores de las temperaturas T_G y T_D, cuyos valores no dependen de la frecuencia.

Considerando al lado izquierdo de la ecuación 3.9 como la variable y_i que corresponde a la evaluación de la ecuación para la *i-ésima* frecuencia del ancho de banda de interés se tiene que,

$$y_i = [F_T(Zs_i)-1]T_0\,\mathrm{Re}(Zs_i)-[1 \quad Zs_i^{\,*}]\,[\overline{C}_A^{EXT}]\begin{bmatrix}1\\ Zs_i\end{bmatrix} \qquad 3.10$$

Entonces, también se cumple que

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & Zs_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}_A^{INT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Zs_i \end{bmatrix} \qquad 3.11$$

donde $F_T(Zs_i)$ es el valor del factor de ruido medido con una impedancia de fuente de 50Ω, Zs_i es la impedancia de fuente, $\overline{C}_A^{EXT}$ es la matriz de correlación de ruido extrínseca y $\overline{C}_A^{INT}$ es la matriz de correlación de ruido intrínseca, evaluados todos para el *i-ésimo* punto de frecuencia del ancho de banda de interés.

Reescribiendo la ecuación 3.3 de la forma

$$\overline{C}_A^{INT} = P\overline{C}_H^{\,i} P^+ \qquad 3.12$$

donde

$$P = A_g P_{ZA}^{gdis} P_{YZ}^{gdi} P_{HY}^{i} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \qquad 3.13$$

P es la matriz de transformación de parámetros H a ABCD del la red del transistor intrínseco, evaluada para el *i-ésimo* punto de frecuencia del ancho de banda de interés.

Donde:

A_g es la matriz de parámetros ABCD de la red de acceso a compuerta, (su deducción se puede verificar en el apéndice F).

P_{HY}^{i} es la matriz de transformación de la matriz de correlación de ruido de parámetros H a parámetros Y del bipuerto del transistor intrínseco.

P_{YZ}^{gdi} es la matriz de transformación de la matriz de correlación de ruido de parámetros Y a parámetros Z del bipuerto resultante de la conexión en paralelo del capacitor Cgd y el transistor intrínseco.

P_{ZA}^{gdis} es la matriz de transformación de la matriz de correlación de ruido de parámetros Z a parámetros ABCD del bipuerto resultante de la conexión en serie del paralelo del capacitor Cgd, y el transistor intrínseco con la red de fuente.

Sustituyendo la ecuación 3.12 en la ecuación 3.11 se tiene la siguiente expresión para y_i

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & Zs_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P\overline{C}_H^{\,i} P^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Zs_i^* \end{bmatrix}^+ \qquad 3.14$$

De la sustitución de la ecuación 3.13 en la ecuación 3.12 la expresión para $\overline{C}_A^{INT}$ queda como

$$\begin{bmatrix} \overline{C}_{A_{11}}^{INT} & \overline{C}_{A_{12}}^{INT} \\ \overline{C}_{A_{21}}^{INT} & \overline{C}_{A_{22}}^{INT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}_{11}^{i} & \overline{C}_{12}^{i} \\ \overline{C}_{21}^{i} & \overline{C}_{22}^{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^{*} & P_{21}^{*} \\ P_{12}^{*} & P_{22}^{*} \end{bmatrix} \qquad 3.15$$

con

y

$$\overline{C}_A^{INT} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{A_{11}}^{INT} & \overline{C}_{A_{12}}^{INT} \\ \overline{C}_{A_{21}}^{INT} & \overline{C}_{A_{22}}^{INT} \end{bmatrix} \qquad 3.15.1$$

$$\overline{C}_H^{\,i} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11}^{i} & \overline{C}_{12}^{i} \\ \overline{C}_{21}^{i} & \overline{C}_{22}^{i} \end{bmatrix} \qquad 3.15.2$$

Realizando las operaciones indicadas en la ecuación 3.15 se obtiene que

$$\begin{aligned} \overline{C}_{A_{11}}^{INT} &= P_{11}^{*}(P_{11}\overline{C}_{11}^{i} + P_{12}\overline{C}_{21}^{i}) + P_{12}^{*}(P_{11}\overline{C}_{12}^{i} + P_{12}\overline{C}_{22}^{i}) \\ &= \left|P_{11}\right|^{2}\overline{C}_{11}^{i} + P_{12}P_{11}^{*}\overline{C}_{21}^{i} + P_{11}P_{12}^{*}\overline{C}_{12}^{i} + \left|P_{12}\right|^{2}\overline{C}_{22}^{i} \end{aligned} \qquad 3.16$$

$$\begin{aligned} \overline{C}_{A_{12}}^{INT} &= P_{21}^{*}(P_{11}\overline{C}_{11}^{i} + P_{12}\overline{C}_{21}^{i}) + P_{22}^{*}(P_{11}\overline{C}_{12}^{i} + P_{12}\overline{C}_{22}^{i}) \\ &= P_{11}P_{21}^{*}\overline{C}_{11}^{i} + P_{12}P_{21}^{*}\overline{C}_{21}^{i} + P_{11}P_{22}^{*}\overline{C}_{12}^{i} + P_{12}P_{22}^{*}\overline{C}_{22}^{i} \end{aligned} \qquad 3.17$$

$$\begin{aligned} \overline{C}_{A_{21}}^{INT} &= P_{11}^{*}(P_{21}\overline{C}_{11}^{i} + P_{22}\overline{C}_{21}^{i}) + P_{12}^{*}(P_{21}\overline{C}_{12}^{i} + P_{22}\overline{C}_{22}^{i}) \\ &= P_{21}P_{11}^{*}\overline{C}_{11}^{i} + P_{22}P_{11}^{*}\overline{C}_{21}^{i} + P_{21}P_{12}^{*}\overline{C}_{12}^{i} + P_{22}P_{12}^{*}\overline{C}_{22}^{i} \end{aligned} \qquad 3.18$$

$$\begin{aligned} \overline{C}_{A_{22}}^{INT} &= P_{21}^{*}(P_{21}\overline{C}_{11}^{i} + P_{22}\overline{C}_{21}^{i}) + P_{22}^{*}(P_{21}\overline{C}_{12}^{i} + P_{22}\overline{C}_{22}^{i}) \\ &= \left|P_{21}\right|^{2}\overline{C}_{11}^{i} + P_{22}P_{21}^{*}\overline{C}_{21}^{i} + P_{21}P_{22}^{*}\overline{C}_{12}^{i} + \left|P_{22}\right|^{2}\overline{C}_{22}^{i} \end{aligned} \qquad 3.19$$

Por otro lado, desarrollando la ecuación 3.11 se tiene

$$\begin{aligned} y_i &= \begin{bmatrix} 1 & Zs_i^{\,*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}_{A_{11}}^{INT} & \overline{C}_{A_{12}}^{INT} \\ \overline{C}_{A_{21}}^{INT} & \overline{C}_{A_{22}}^{INT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ Zs_i \end{bmatrix} = \\ &= \overline{C}_{A_{11}}^{INT} + Zs_i\,\overline{C}_{A_{12}}^{INT} + Zs_i^{\,*}\,\overline{C}_{A_{21}}^{INT} + \left|Zs_i\right|^{2}\overline{C}_{A_{22}}^{INT} \end{aligned} \qquad 3.20$$

De sustituir las ecuaciones 3.16, 3.17, 3.18 y 3.19 en la ecuación 3.20, resulta la siguiente expresión para y_i

$$y_i = |P_{11}|^2 \overline{C}^i_{11} + P_{12}P_{11}^* \overline{C}^i_{21} + P_{11}P_{12}^* \overline{C}^i_{12} + |P_{12}|^2 \overline{C}^i_{22} +$$
$$Zs_i \left(P_{11}P_{21}^* \overline{C}^i_{11} + P_{12}P_{21}^* \overline{C}^i_{21} + P_{11}P_{22}^* \overline{C}^i_{12} + P_{12}P_{22}^* \overline{C}^i_{22}\right) +$$
$$Zs_i^* \left(P_{21}P_{11}^* \overline{C}^i_{11} + P_{22}P_{11}^* \overline{C}^i_{21} + P_{21}P_{12}^* \overline{C}^i_{12} + P_{22}P_{12}^* \overline{C}^i_{22}\right) +$$
$$|Zs_i|^2 \left(|P_{21}|^2 \overline{C}^i_{11} + P_{22}P_{21}^* \overline{C}^i_{21} + P_{21}P_{22}^* \overline{C}^i_{12} + |P_{22}|^2 \overline{C}^i_{22}\right)$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} y_i = {} & \overline{C}^i_{11}\left(|P_{11}|^2 + Zs_i P_{11}P_{21}^* + Zs_i^* P_{21}P_{11}^* + |Zs_i|^2 |P_{21}|^2\right) + \\ & \overline{C}^i_{12}\left(P_{11}P_{12}^* + Zs_i P_{11}P_{22}^* + Zs_i^* P_{21}P_{12}^* + |Zs_i|^2 P_{21}P_{22}^*\right) + \\ & \overline{C}^i_{21}\left(P_{12}P_{11}^* + Zs_i P_{12}P_{21}^* + Zs_i^* P_{22}P_{11}^* + |Zs_i|^2 P_{22}P_{21}^*\right) + \\ & \overline{C}^i_{22}\left(|P_{12}|^2 + Zs_i P_{12}P_{22}^* + Zs_i^* P_{22}P_{12}^* + |Zs_i|^2 |P_{22}|^2\right) \end{aligned} \qquad 3.21$$

Reescribiendo la ecuación 3.21 en forma matricial se tiene

$$y_i = \begin{bmatrix} M_{1i} & M_{2i} & M_{3i} & M_{4i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}^i_{11} \\ \overline{C}^i_{12} \\ \overline{C}^i_{21} \\ \overline{C}^i_{22} \end{bmatrix} \qquad 3.22$$

donde

$$M_{1i} = |P_{11}|^2 + Zs_i P_{11}P_{21}^* + Zs_i^* P_{21}P_{11}^* + |Zs_i|^2 |P_{21}|^2 \qquad 3.23$$

$$M_{2i} = P_{11}P_{12}^* + Zs_i P_{11}P_{22}^* + Zs_i^* P_{21}P_{12}^* + |Zs_i|^2 P_{21}P_{22}^* \qquad 3.24$$

$$M_{3i} = P_{12}P_{11}^* + Zs_i P_{12}P_{21}^* + Zs_i^* P_{22}P_{11}^* + |Zs_i|^2 P_{22}P_{21}^* \qquad 3.25$$

$$M_{4i} = |P_{12}|^2 + Zs_i P_{12}P_{22}^* + Zs_i^* P_{22}P_{12}^* + |Zs_i|^2 |P_{22}|^2 \qquad 3.26$$

Como la matriz de correlación de ruido $\overline{C}^i_H$ es una matriz Hermitiana [21], debe cumplir con las condiciones de que $\operatorname{Im}\{\overline{C}^i_{11}\} = \operatorname{Im}\{\overline{C}^i_{22}\} = 0$ y que $\overline{C}^i_{12} = \overline{C}^{i\,*}_{21}$. Entonces la ecuación 3.22 puede escribirse como

$$y_i = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_{1i} & \mathrm{X}_{2i} & \mathrm{X}_{3i} & \mathrm{X}_{4i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}^i_{11} \\ \operatorname{Re}\{\overline{C}^i_{12}\} \\ j\operatorname{Im}\{\overline{C}^i_{12}\} \\ \overline{C}^i_{22} \end{bmatrix} \qquad 3.27$$

donde

$$\mathrm{X}_{1i} = M_{1i}$$

$$\mathrm{X}_{2i} = M_{2i} + M_{3i}$$

$$\mathrm{X}_{3i} = M_{2i} - M_{3i}$$

$$\mathrm{X}_{4i} = M_{4i}$$

Para determinar los valores de la matriz de la ecuación 3.27, será necesario comenzar por desarrollar la ecuación 3.23:

$$M_{1i} = |P_{11}|^2 + |Zs_i|^2 |P_{21}|^2 + Rs_i\left(P_{11}P_{21}^* + P_{11}^*P_{21}\right) + jXs_i\left(P_{11}P_{21}^* - P_{11}^*P_{21}\right) \qquad 3.28$$

donde

$$P_{11}P_{21}^* + P_{11}^*P_{21} = |P_{11}|e^{j\theta_{11}}|P_{21}|e^{-j\theta_{21}} + |P_{11}|e^{-j\theta_{11}}|P_{21}|e^{j\theta_{21}} = 2\,\mathrm{Re}\{P_{11}P_{21}^*\} \qquad 3.28a)$$

$$P_{11}P_{21}^* - P_{11}^*P_{21} = |P_{11}|e^{j\theta_{11}}|P_{21}|e^{-j\theta_{21}} - |P_{11}|e^{-j\theta_{11}}|P_{21}|e^{j\theta_{21}} = j2\,\mathrm{Im}\{P_{11}P_{21}^*\} \qquad 3.28b)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.28a) y 3.28b) en la ecuación 3.28 se obtiene que

$$\mathrm{X}_{1i} = M_{1i} = |P_{11}|^2 + |Zs_i|^2|P_{21}|^2 + 2Rs_i\,\mathrm{Re}\{P_{11}P_{21}^*\} - 2Xs_i\,\mathrm{Im}\{P_{11}P_{21}^*\} \qquad 3.28.1$$

Desarrollando la ecuación 3.26 se tiene

$$M_{4i} = |P_{12}|^2 + |Zs_i|^2 |P_{22}|^2 + Rs_i\left(P_{12}P_{22}^* + P_{12}^*P_{22}\right) + jXs_i\left(P_{12}P_{22}^* - P_{12}^*P_{22}\right) \qquad 3.29$$

donde

$$P_{12}P_{22}^* + P_{12}^*P_{22} = |P_{12}|e^{j\theta_{12}}|P_{22}|e^{-j\theta_{22}} + |P_{12}|e^{-j\theta_{12}}|P_{22}|e^{j\theta_{22}} = 2\,\mathrm{Re}\{P_{12}P_{22}^*\} \qquad 3.29a)$$

$$P_{12}P_{22}^* - P_{12}^*P_{22} = |P_{12}|e^{j\theta_{12}}|P_{22}|e^{-j\theta_{22}} - |P_{12}|e^{-j\theta_{12}}|P_{22}|e^{j\theta_{22}} = j2\,\mathrm{Im}\{P_{12}P_{22}^*\} \qquad 3.29b)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.29a) y 3.29b) en 3.29

$$\mathrm{X}_{4i} = M_{4i} = |P_{12}|^2 + |Zs_i|^2|P_{22}|^2 + 2Rs_i\,\mathrm{Re}\{P_{12}P_{22}^*\} - 2Xs_i\,\mathrm{Im}\{P_{12}P_{22}^*\} \qquad 3.29.1$$

donde $\mathrm{Re}\{A\}$ significa la parte real de A e $\mathrm{Im}\{A\}$ significa la parte imaginaria de A.

De las ecuaciones 3.24, 3.25 y 3.27 para la parte real de $\left\{\overline{C}_{12}^{\,i}\right\}$

$$\begin{aligned} M_{2i} + M_{3i} = {} & P_{11}P_{12}^* + P_{11}^*P_{12} + |Zs_i|^2\left(P_{21}P_{22}^* + P_{21}^*P_{22}\right) + \\ & + Rs_i\left(P_{11}P_{22}^* + P_{11}^*P_{22} + P_{12}P_{21}^* + P_{12}^*P_{21}\right) + \\ & + jXs_i\left(P_{11}P_{22}^* - P_{11}^*P_{22} + P_{12}P_{21}^* - P_{12}^*P_{21}\right) \end{aligned} \qquad 3.30$$

donde

$$P_{11}P_{12}^* + P_{11}^*P_{12} = |P_{11}|e^{j\theta_{11}}|P_{12}|e^{-j\theta_{12}} + |P_{11}|e^{-j\theta_{11}}|P_{12}|e^{j\theta_{12}} = 2\,\mathrm{Re}\{P_{11}P_{12}^*\} \qquad 3.30a)$$

$$P_{21}P_{22}^{*}+P_{21}^{*}P_{22}=|P_{21}|e^{j\theta_{21}}|P_{22}|e^{-j\theta_{22}}+|P_{21}|e^{-j\theta_{21}}|P_{22}|e^{j\theta_{22}}=2\,\mathrm{Re}\{P_{21}P_{22}^{*}\} \quad 3.30b)$$

$$\begin{aligned}&P_{11}P_{22}^{*}+P_{11}^{*}P_{22}+P_{12}P_{21}^{*}+P_{12}^{*}P_{21}=|P_{11}|e^{j\theta_{11}}|P_{22}|e^{-j\theta_{22}}+|P_{11}|e^{-j\theta_{11}}|P_{22}|e^{j\theta_{22}}+\\&+|P_{12}|e^{j\theta_{12}}|P_{21}|e^{-j\theta_{21}}+|P_{12}|e^{-j\theta_{12}}|P_{21}|e^{j\theta_{21}}=2\,\mathrm{Re}\{P_{11}P_{22}^{*}\}+2\,\mathrm{Re}\{P_{12}P_{21}^{*}\}\end{aligned} \quad 3.30c)$$

$$\begin{aligned}&P_{11}P_{22}^{*}-P_{11}^{*}P_{22}+P_{12}P_{21}^{*}-P_{12}^{*}P_{21}=|P_{11}|e^{j\theta_{11}}|P_{22}|e^{-j\theta_{22}}-|P_{11}|e^{-j\theta_{11}}|P_{22}|e^{j\theta_{22}}+\\&+|P_{12}|e^{j\theta_{12}}|P_{21}|e^{-j\theta_{21}}-|P_{12}|e^{-j\theta_{12}}|P_{21}|e^{j\theta_{21}}=j2\,\mathrm{Im}\{P_{11}P_{22}^{*}\}+j2\,\mathrm{Im}\{P_{12}P_{21}^{*}\}\end{aligned} \quad 3.30d)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.30a) a la 3.30d) en la ecuación 3.30 se obtiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{X}_{2i}=M_{2i}+M_{3i}&=2\,\mathrm{Re}\{P_{11}P_{12}^{*}\}+2|Zs_i|^2\,\mathrm{Re}\{P_{21}P_{22}^{*}\}+\\&+2Rs_i\,\mathrm{Re}\left(P_{11}P_{22}^{*}+P_{12}P_{21}^{*}\right)-2Xs_i\,\mathrm{Im}\left(P_{11}P_{22}^{*}+P_{12}P_{21}^{*}\right)\end{aligned} \quad 3.30.1$$

Por otro lado también de las ecuaciones 3.24, 3.25 y 3.27 pero para la parte imaginaria de $\left\{\overline{C}_{12}^{\,i}\right\}$

$$\begin{aligned}M_{2i}-M_{3i}=&P_{11}P_{12}^{*}-P_{11}^{*}P_{12}+|Zs_i|^2\left(P_{21}P_{22}^{*}-P_{21}^{*}P_{22}\right)+\\&+Rs_i\left(P_{11}P_{22}^{*}-P_{11}^{*}P_{22}+P_{21}P_{12}^{*}-P_{21}^{*}P_{12}\right)+\\&+jXs_i\left(P_{11}P_{22}^{*}+P_{11}^{*}P_{22}-P_{12}P_{21}^{*}-P_{12}^{*}P_{21}\right)\end{aligned} \quad 3.31$$

donde

$$P_{11}P_{12}^{*}-P_{11}^{*}P_{12}=|P_{11}|e^{j\theta_{11}}|P_{12}|e^{-j\theta_{12}}-|P_{11}|e^{-j\theta_{11}}|P_{12}|e^{j\theta_{12}}=j2\,\mathrm{Im}\{P_{11}P_{12}^{*}\} \quad 3.31a)$$

$$P_{21}P_{22}^{*}-P_{21}^{*}P_{22}=|P_{21}|e^{j\theta_{21}}|P_{22}|e^{-j\theta_{22}}-|P_{21}|e^{-j\theta_{21}}|P_{22}|e^{j\theta_{22}}=j2\,\mathrm{Im}\{P_{21}P_{22}^{*}\} \quad 3.31b)$$

$$\begin{aligned}&P_{11}P_{22}^{*}-P_{11}^{*}P_{22}+P_{21}P_{12}^{*}-P_{21}^{*}P_{12}=|P_{11}|e^{j\theta_{11}}|P_{22}|e^{-j\theta_{22}}-|P_{11}|e^{-j\theta_{11}}|P_{22}|e^{j\theta_{22}}+\\&+|P_{21}|e^{j\theta_{21}}|P_{12}|e^{-j\theta_{12}}-|P_{21}|e^{-j\theta_{21}}|P_{12}|e^{j\theta_{12}}=j2\,\mathrm{Im}\{P_{11}P_{22}^{*}\}+j2\,\mathrm{Im}\{P_{21}P_{12}^{*}\}\end{aligned} \quad 3.31c)$$

$$\begin{aligned}&P_{11}P_{22}^{*}+P_{11}^{*}P_{22}-P_{12}P_{21}^{*}-P_{12}^{*}P_{21}=|P_{11}|e^{j\theta_{11}}|P_{22}|e^{-j\theta_{22}}+|P_{11}|e^{-j\theta_{11}}|P_{22}|e^{j\theta_{22}}\\&-|P_{12}|e^{j\theta_{12}}|P_{21}|e^{-j\theta_{21}}-|P_{12}|e^{-j\theta_{12}}|P_{21}|e^{j\theta_{21}}=2\,\mathrm{Re}\{P_{11}P_{22}^{*}\}-2\,\mathrm{Re}\{P_{12}P_{21}^{*}\}\end{aligned} \quad 3.31d)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.31a) a 3.31d) en la ecuación 3.31 resulta que

$$\begin{aligned}\mathrm{X}_{3i}=M_{2i}-M_{3i}=&j2\,\mathrm{Im}\{P_{11}P_{12}^{*}\}+j2|Zs_i|^2\,\mathrm{Im}\{P_{21}P_{22}^{*}\}+\\&+j2Rs_i\,\mathrm{Im}\left(P_{11}P_{22}^{*}+P_{21}P_{12}^{*}\right)+\\&+j2Xs_i\,\mathrm{Re}\left(P_{11}P_{22}^{*}-P_{12}P_{21}^{*}\right)\end{aligned} \quad 3.31.1$$

Sustituyendo los valores de 3.28.1, 3.29.1, 3.30.1 y 3.31.1 en la ecuación 3.27 se obtiene que

$$\begin{aligned} y_i = {} & \overline{C}_{11}^{\,i}\left[\left|P_{11}\right|^2 + \left|Zs_i\right|^2\left|P_{21}\right|^2 + 2Rs_i \operatorname{Re}\{P_{11}P_{21}^*\} - 2Xs_i \operatorname{Im}\{P_{11}P_{21}^*\}\right] + \\ & + \operatorname{Re}\{\overline{C}_{12}^{\,i}\}\left[\begin{array}{l} 2\operatorname{Re}\{P_{11}P_{12}^*\} + 2\left|Zs_i\right|^2 \operatorname{Re}\{P_{21}P_{22}^*\} + \\ + 2Rs_i \operatorname{Re}\left(P_{11}P_{22}^* + P_{12}P_{21}^*\right) - 2Xs_i \operatorname{Im}\left(P_{11}P_{22}^* - P_{12}P_{21}^*\right) \end{array}\right] + \\ & + j\operatorname{Im}\{\overline{C}_{12}^{\,i}\}\left[\begin{array}{l} j2\operatorname{Im}\{P_{11}P_{12}^*\} + j2\left|Zs_i\right|^2 \operatorname{Im}\{P_{21}P_{22}^*\} + \\ + j2Rs_i \operatorname{Im}\left(P_{11}P_{22}^* + P_{21}P_{12}^*\right) + j2Xs_i \operatorname{Re}\left(P_{11}P_{22}^* - P_{12}P_{21}^*\right) \end{array}\right] + \\ & + \overline{C}_{22}^{\,i}\left[\left|P_{12}\right|^2 + \left|Zs_i\right|^2\left|P_{22}\right|^2 + 2Rs_i \operatorname{Re}\{P_{12}P_{22}^*\} - 2Xs_i \operatorname{Im}\{P_{12}^*P_{22}\}\right] \end{aligned} \qquad 3.32$$

Como se observa en las ecuaciones 3.11, 3.14 y 3.32 y_i es una matriz de 1×1 y como ya se dijo, corresponde a la *i-ésima* frecuencia de un ancho de banda determinado, de modo que tomando en cuenta la evaluación de y_i para los n puntos de frecuencia de interés, se contará con una matriz Y de $n\times 1$ valores de y_i de la forma

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad 3.33$$

Ahora el problema se resume a encontrar la solución para la ecuación 3.33 para cada punto de frecuencia de interés.

Para este propósito es necesario determinar los valores de los elementos de la matriz de correlación de ruido en parámetros H del transistor intrínseco, $\overline{C}_H^{\,i}$, los cuales, como se observa en la ecuación 3.6, dependen de los valores del modelo del transistor intrínseco Ri y Rds y de sus correspondientes temperaturas equivalentes de ruido T_G y T_D. Por esta razón, es necesario encontrar una expresión para determinarlas.

En el capítulo posterior se plantea esta expresión, así como varias formas de solucionarlas.

Hasta este punto se ha mostrado el desarrollo matemático de la técnica de F50 de Lázaro en la cual se basa la herramienta de software que genera los parámetros de ruido a partir de la medición del factor de ruido y los valores de los elementos del modelo de pequeña señal del TEC, desarrollada en el capítulo siguiente.

Capítulo 4

Herramienta de cómputo para la extracción de los parámetros de ruido de un transistor de efecto de campo para altas frecuencias

La herramienta de cómputo que se desarrolló en este trabajo de tesis se basa en la técnica para la extracción de los parámetros de ruido del TEC, descrita en el capítulo anterior.

En esta técnica se asume la no correlación entre las fuentes intrínsecas de ruido térmico presentes en el modelo del transistor [2], lo cual se traduce en una gran simplificación del análisis. Sin embargo, se hace necesaria la determinación de las temperaturas intrínsecas equivalentes de ruido de compuerta T_G y drenador T_D del transistor, las cuales no pueden medirse o determinarse directamente y son indispensables para determinar la matriz de correlación de ruido del transistor y sus parámetros de ruido.

En este capítulo se describe la forma en la que la técnica de Lázaro se desarrolla para obtener las temperaturas equivalentes de ruido de las fuentes intrínsecas del transistor con la finalidad de presentar un documento que sirva para su estudio. Se describen también dos algoritmos adicionales propuestos para su obtención y los cuales se plantean como alternativas de solución.

Además se describe por medio de diagramas de flujo la forma en que está estructurada la herramienta de cómputo objeto de esta tesis y cada una de sus opciones de solución para la obtención de las temperaturas intrínsecas equivalentes, así como la etapa final para la obtención de los parámetros de ruido.

4.1 Cálculo de las temperaturas equivalentes de ruido T_D y T_G

Es posible encontrar la solución de la matriz *Y* presentada en la ecuación 3.33 a partir de la solución de la ecuación 3.10 para lo cual solo se necesitan conocer los valores de los elementos del modelo de pequeña señal y de la temperatura ambiente.

Retomando la ecuación 3.14 la cual puede escribirse de la forma

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & Zs_i^* \end{bmatrix} [P] \left[\overline{C}_H{}^i \right] [P^+] \begin{bmatrix} 1 & Zs_i^* \end{bmatrix}^+ \qquad 4.1$$

y sustituyendo la ecuación 4.5 se obtiene,

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & Zs_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \left[\overline{C}_H{}^i \right] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 1 & Zs_i^* \end{bmatrix}^+ \qquad 4.2$$

De la multiplicación de las dos primeras matrices del lado derecho de la igualdad se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & Zs_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} + Zs_i^* P_{21} & P_{12} + Zs_i^* P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_{11} & \mathrm{E}_{12} \end{bmatrix} \qquad 4.3$$

Sustituyendo la ecuación 4.3 en la ecuación 4.2 se obtiene para y_i la siguiente expresión

$$y_i = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_{11} & \mathrm{E}_{12} \end{bmatrix} \left[\overline{C}_H{}^i \right] \begin{bmatrix} \mathrm{E}_{11}{}^* \\ \mathrm{E}_{12}{}^* \end{bmatrix} \qquad 4.4$$

Desarrollando la ecuación 4.4, se obtiene,

$$y_i = \left| \mathrm{E}_{11} \right|^2 \overline{C}_{11}^i + \mathrm{E}_{11}{}^* \mathrm{E}_{12} \overline{C}_{21}^i + \mathrm{E}_{11} \mathrm{E}_{12}{}^* \overline{C}_{12}^i + \left| \mathrm{E}_{12} \right|^2 \overline{C}_{22}^i \qquad 4.5$$

Como ya se comentó en el capítulo 3, y con base en la ecuación 3.6, se considera que los términos $\overline{C}_{12}^i$ y $\overline{C}_{21}^i$ son iguales a cero y por lo tanto la ecuación 4.5 queda de la forma

$$y_i = \left| \mathrm{E}_{11} \right|^2 \overline{C}_{11}^i + \left| \mathrm{E}_{12} \right|^2 \overline{C}_{22}^i = \left| \mathrm{E}_{11} \right|^2 T_G Ri + \left| \mathrm{E}_{12} \right|^2 \frac{T_D}{Rds} = \begin{bmatrix} \left| \mathrm{E}_{11} \right|^2 Ri & \dfrac{\left| \mathrm{E}_{12} \right|^2}{Rds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_G \\ T_D \end{bmatrix} \qquad 4.6$$

ya que de la ecuación 3.6 se tiene que

$$\overline{C}_{11}^i = T_G Ri \qquad 4.7\ a)$$

$$\overline{C}_{22}^{i} = \frac{T_D}{Rds} \qquad 4.7\ b)$$

Como se puede observar, la ecuación 4.7 es la solución para el *i-ésimo* valor de la matriz Y, de modo que si esta matriz cuenta con *n* elementos, existirán *n* soluciones, cada una correspondiente a un punto de frecuencia en particular del ancho de banda determinado y en todas las soluciones está involucrada la misma matriz de las temperaturas T_D y T_G, por lo que es posible establecer la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left|\mathrm{E}_{11}\right|_1^2 Ri & \dfrac{\left|\mathrm{E}_{12}\right|_1^2}{Rds} \\ \vdots & \vdots \\ \left|\mathrm{E}_{11}\right|_n^2 Ri & \dfrac{\left|\mathrm{E}_{12}\right|_n^2}{Rds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_G \\ T_D \end{bmatrix} \qquad 4.8$$

Ahora, es necesario determinar los valores de las temperaturas T_D y T_G solucionando la ecuación 4.8 para la matriz de 2×1 dimensiones del término del lado derecho de la igualdad.

En la siguiente sección se presentan las soluciones propuestas para determinar los valores de las temperaturas T_D y T_G, así como la solución propuesta por Lázaro.

4.2 Soluciones para la determinación de las temperaturas T_D y T_G

4.2.1 Considerando una temperatura propuesta

En este método se considera, al igual que en [9], que la temperatura T_G tiene el mismo valor que la temperatura ambiente, (290 $^\circ$K). De modo que solo se tiene que determinar el valor de T_D.

Considerando la primera parte de la ecuación 4.7 y solucionándola para T_D se tiene que,

$$T_D = \frac{Rds}{\left|\mathrm{E}_{12}\right|^2}\left(y_i - \left|\mathrm{E}_{11}\right|^2 T_G Ri\right) \qquad 4.9$$

donde y_i, E_{11} y E_{12} corresponden al *i-ésimo* punto de frecuencia de interés. Por lo que para obtener la evaluación de T_D para los *n* valores de frecuencia requeridos será necesario evaluar la ecuación 4.9 para los restantes (*n*-1) valores de sus variables independientes generadas en función de los restantes (n-1) valores de frecuencia. Los valores que se obtengan para T_D deberán ser aproximadamente iguales ya que, como se ha mencionado con anterioridad, este valor no depende de la frecuencia.

4.2.2 Considerando la matriz pseudo inversa

Para esta solución se considera la ecuación matricial 4.8, que en forma matricial se indica de la siguiente forma

$$Y_{n\times 1} = \mathrm{E}_{n\times 2} T_{2\times 1} \qquad 4.10$$

donde

$$\mathrm{E}_{n\times 2} = \begin{bmatrix} \left|\mathrm{E}_{11}\right|_1^2 Ri & \dfrac{\left|\mathrm{E}_{12}\right|_1^2}{Rds} \\ \vdots & \vdots \\ \left|\mathrm{E}_{11}\right|_n^2 Ri & \dfrac{\left|\mathrm{E}_{12}\right|_n^2}{Rds} \end{bmatrix} \qquad 4.10.1$$

$$T_{2\times 1} = \begin{bmatrix} T_G \\ T_D \end{bmatrix} \qquad 4.10.2$$

Para solucionar $T_{2\times 1}$ de la ecuación 4.10 se tiene que

$$\mathrm{E}_{2\times n}^T Y_{n\times 1} = \mathrm{E}_{2\times n}^T \mathrm{E}_{n\times 2} T_{2\times 1}$$

entonces

$$\left(\mathrm{E}_{2\times n}^T \mathrm{E}_{n\times 2}\right)^{-1} \mathrm{E}_{2\times n}^T Y_{n\times 1} = T_{2\times 1} \qquad 4.11$$

Como se puede observar, en la ecuación 4.11 se toma en cuenta, para determinar los valores de T_D y T_G, a los n valores de la matriz Y y a los $n\times 2$ valores de la matriz E, es decir, se considera la evaluación de estas dos variables matriciales para todos los puntos de frecuencia de interés.

Por otro lado, se observa también que el término ubicado en la posición (1,1) de la matriz del lado izquierdo de la ecuación 4.11 será igual al valor de la temperatura T_G y el término ubicado en la posición (2,1) será igual al valor de la temperatura T_D.

4.2.3 Método de Lázaro

Retomando la ecuación 4.5 la cual es la solución para el *i-ésimo* valor de y_i, que corresponde a la *i-ésima* frecuencia del ancho de banda de interés y además tomando en cuenta las características de la matriz Hermitiana de correlación de ruido en parámetros H C_H^i , se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} y_i &= \left|\mathrm{E}_{11}\right|^2 \overline{C}_{11}^i + \mathrm{E}_{11}^* \mathrm{E}_{12} \overline{C}_{12}^{i\,*} + \mathrm{E}_{11} \mathrm{E}_{12}^* \overline{C}_{12}^i + \left|\mathrm{E}_{12}\right|^2 \overline{C}_{22}^i = \\ &= \left|\mathrm{E}_{11}\right|^2 \overline{C}_{11}^i + \mathrm{Re}\left\{\overline{C}_{12}^i\right\}\left[\mathrm{E}_{11}\mathrm{E}_{12}^* + \mathrm{E}_{11}^*\mathrm{E}_{12}\right] + j\,\mathrm{Im}\left\{\overline{C}_{12}^i\right\}\left[\mathrm{E}_{11}\mathrm{E}_{12}^* - \mathrm{E}_{11}^*\mathrm{E}_{12}\right] + \left|\mathrm{E}_{12}\right|^2 \overline{C}_{22}^i \end{aligned} \qquad 4.12$$

Separando esta ecuación en dos matrices queda de la forma

$$y_i = \begin{bmatrix} \left|\mathrm{E}_{11}\right|^2 & \mathrm{E}_{11}\mathrm{E}_{12}^* + \mathrm{E}_{11}^*\mathrm{E}_{12} & j(\mathrm{E}_{11}\mathrm{E}_{12}^* - \mathrm{E}_{11}^*\mathrm{E}_{12}) & \left|\mathrm{E}_{12}\right|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}_{11}^i \\ \mathrm{Re}\left\{\overline{C}_{12}^i\right\} \\ \mathrm{Im}\left\{\overline{C}_{12}^i\right\} \\ \overline{C}_{22}^i \end{bmatrix} \qquad 4.13$$

Extendiendo la ecuación 4.13 a los n valores de frecuencia para los que será evaluada y representándola por medio de una expresión matricial, se tiene la siguiente ecuación

$$[Y] = [\Xi]\left[\overline{C}_h^{\,i}\right] \qquad 4.14$$

donde la matriz $[Y]$ ha sido definida por la ecuación 3.33 y por lo tanto consta de $n\times 1$ elementos. Por otro lado la matriz Ξ queda expresada por la matriz de n renglones por 4 columnas:

$$[\Xi] = \begin{bmatrix} \left(\left|\mathrm{E}_{11}\right|^2\right)_1 & \left(\mathrm{E}_{11}\mathrm{E}_{12}^* + \mathrm{E}_{11}^*\mathrm{E}_{12}\right)_1 & j(\mathrm{E}_{11}\mathrm{E}_{12}^* - \mathrm{E}_{11}^*\mathrm{E}_{12})_1 & \left(\left|\mathrm{E}_{12}\right|^2\right)_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\left|\mathrm{E}_{11}\right|^2\right)_n & \left(\mathrm{E}_{11}\mathrm{E}_{12}^* + \mathrm{E}_{11}^*\mathrm{E}_{12}\right)_n & j(\mathrm{E}_{11}\mathrm{E}_{12}^* - \mathrm{E}_{11}^*\mathrm{E}_{12})_n & \left(\left|\mathrm{E}_{12}\right|^2\right)_n \end{bmatrix} \qquad 4.14.1$$

cuyas dimensiones son $n\times 4$, así como la matriz de 4×1 elementos:

$$\left[\overline{C}_h^{\,i}\right] = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11}^i \\ \mathrm{Re}\left\{\overline{C}_{12}^i\right\} \\ \mathrm{Im}\left\{\overline{C}_{12}^i\right\} \\ \overline{C}_{22}^i \end{bmatrix} \qquad 4.15$$

Solucionando la ecuación 4.14 para $\left[\overline{C}_h^{\,i}\right]$ se obtiene la siguiente expresión

$$\left[\overline{C}_h^{\,i}\right] = \left([\Xi]^T[\Xi]\right)^{-1}\left([\Xi]^T[Y]\right) \qquad 4.16$$

donde se observa que se cuenta con matrices de 4×1 elementos a ambos lados de la igualdad y además $[\Xi]^T$ es una matriz de $4\times n$ elementos.

$$[\Xi]^T = \begin{bmatrix} \left(\left|E_{11}\right|^2\right)_1 & \cdots & \cdots & \left(\left|E_{11}\right|^2\right)_n \\ \left(E_{11}E_{12}^{\ *} + E_{11}^{\ *}E_{12}\right)_1 & \cdots & \cdots & \left(E_{11}E_{12}^{\ *} + E_{11}^{\ *}E_{12}\right)_n \\ j(E_{11}E_{12}^{\ *} - E_{11}^{\ *}E_{12})_1 & \cdots & \cdots & j(E_{11}E_{12}^{\ *} - E_{11}^{\ *}E_{12})_n \\ \left(\left|E_{12}\right|^2\right)_1 & \cdots & \cdots & \left(\left|E_{12}\right|^2\right)_n \end{bmatrix} \qquad 4.16.1$$

Sustituyendo los valores obtenidos de $\overline{C}_h{}^i{}_{11}$ y $\overline{C}_h{}^i{}_{41}$ de la ecuación 4.16, en los elementos $\overline{C}^i_{11}$ y $\overline{C}^i_{22}$ de la ecuación 3.6 respectivamente se obtienen las ecuaciones para las temperaturas del transistor intrínseco

$$T_G = \frac{\overline{C}^i_{h11}}{Ri} \qquad 4.17$$

$$T_D = \overline{C}^i_{h41} Rds \qquad 4.18$$

4.2.4 Cálculo de los parámetros de ruido del transistor de efecto de campo

Finalmente, como resultado de cada uno de los tres métodos arriba planteados se obtiene el valor de cada una de las dos temperaturas de ruido del transistor intrínseco, las cuales son necesarias para la determinación de los elementos de la matriz de correlación de ruido de parámetros H $\overline{C}_H{}^i$, (ver ecuación 3.6), de la que a su vez depende el valor de la matriz de correlación total de ruido de parámetros ABCD del transistor $\overline{C}^T_A$, (ver ecuaciones 3.1 y 3.15), necesaria para el cálculo de los parámetros de ruido del transistor, (ver ecuaciones 2.70, 2.71, 2.72 y 2.73).

4.3 Desarrollo de la herramienta de cómputo con base en la técnica de F50 para la determinación de los parámetros de ruido del transistor de efecto de campo

En esta sección se describe el funcionamiento de la herramienta de cómputo para obtener los parámetros de ruido del transistor.

En la herramienta se consideran como variables de entrada los valores de los elementos del circuito equivalente del modelo de pequeña señal del TEC con fuentes de ruido en configuración híbrida en el transistor intrínseco (V_G e I_D) [2] y los valores de medición de su factor de ruido para el ancho de banda de interés, cuando la impedancia de fuente es igual a Z_S=50Ω o sea F50.

4.3.1 El programa principal de la herramienta.

La herramienta cuenta con un programa principal el cual se encarga de manejar todas las funciones para el cálculo de los parámetros de ruido. Como se describe en el diagrama de la figura 4.1, genera el valor de la matriz de transformación P, definida por la ecuación 3.13. Esta matriz depende de las matrices A_g, P_{HY}^{i}, matriz de transformación de parámetros H a Y del transistor intrínseco, P_{YZ}^{gdi} matriz de transformación de parámetros Y a Z del bipuerto resultante de la conexión del capacitor Cgd y el transistor intrínseco y P_{ZA}^{gdis}, matriz de transformación de parámetros Z a ABCD del bipuerto resultante de la conexión de Cgd, el transistor intrínseco y la red de fuente; todas estas se generan por la herramienta a partir de los valores de los elementos del modelo de pequeña señal del transistor.

Por otro lado, también se genera la matriz de correlación de ruido del transistor extrínseco $\overline{C}_A^{EXT}$, cuya definición se presenta en la ecuación 3.2. Esta matriz también depende de A_g, P_{YZ}^{gdi} y P_{ZA}^{gdis}.

Con los valores esta matriz de correlación extrínseca, el valor de la temperatura ambiente T_0 y el valor de la impedancia de la fuente Z_S, se generan los valores de y_i para los *n* puntos de frecuencia de la banda de interés y la cual ha sido definida en la ecuación 3.10.

A y_i, por estar en función de $\overline{C}_A^{EXT}$, en el programa se le denominó como y_i^{EXT}.

4.3.2 Función para la determinación de las temperaturas equivalentes T_G y T_D por medio de la implantación de la solución basada en el método de una temperatura propuesta.

Para la implantación de esta solución primero se desarrolla una matriz $\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \end{bmatrix}$ para cada punto de frecuencia de interés y como se indica en la ecuación 4.3, estas matrices dependen de su correspondiente matriz de transformación P, que en el diagrama de la figura 4.2 se indica que viene del punto de continuación número 1, así como del valor de la impedancia de la fuente Z_S.

Con las matrices $[E_{11} \quad E_{12}]$, los valores de los elementos resistivos del transistor intrínseco Ri y Rds, además del valor de la temperatura T_G la cual se considera que es

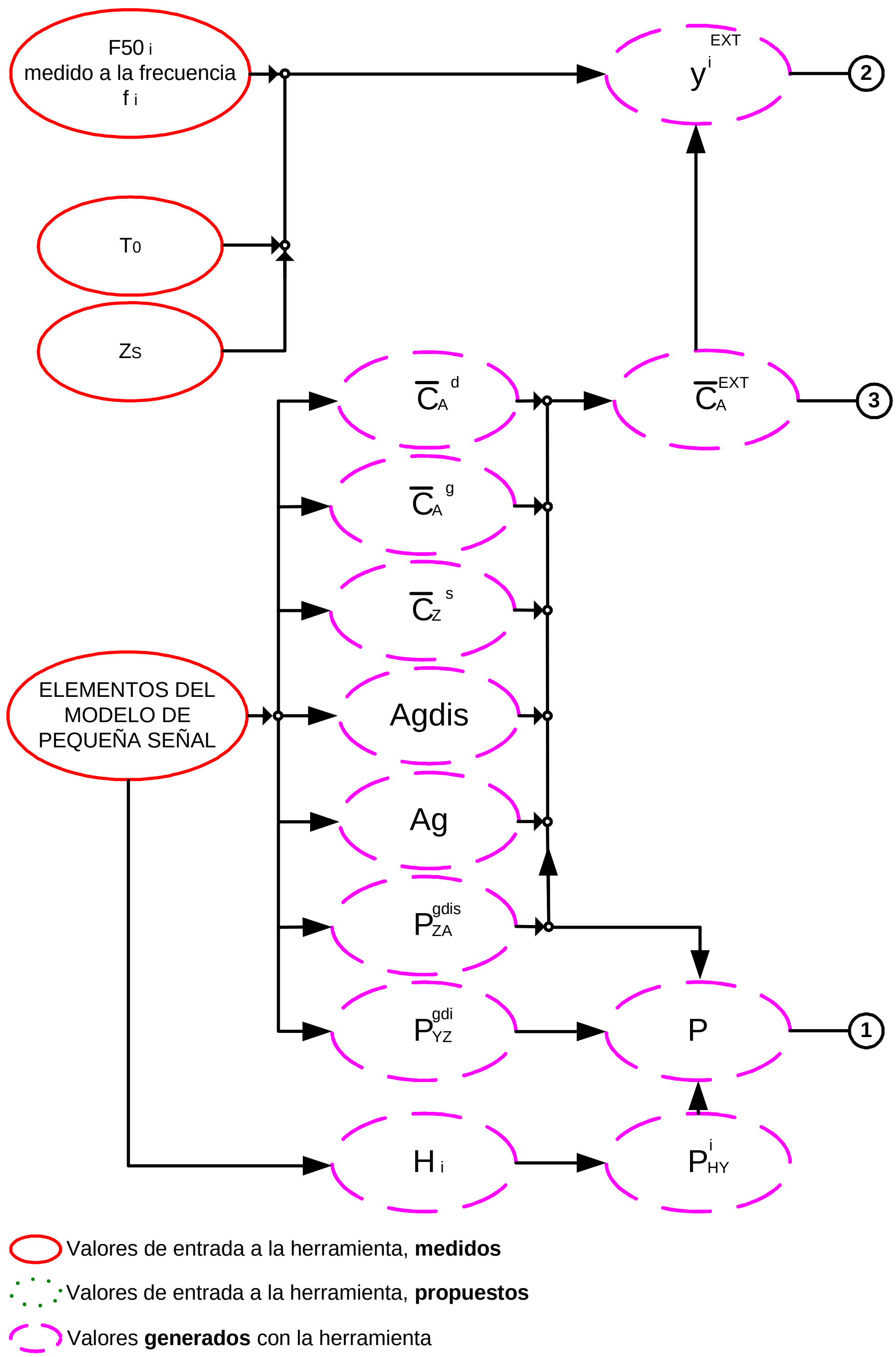


Figura 4.1 Diagrama de flujo del programa principal de la herramienta de cómputo, desarrollada para el cálculo de los parámetros de ruido del TEC.

igual a 290° K, tal y como se indicó en la sección 4.2.1, se genera el valor de la temperatura T_D con base a la ecuación 4.9 y que una vez obtenida se utiliza para generar a las matrices de correlación de ruido en parámetros H del transistor intrínseco $\overline{C}_H{}^i$ con base en la ecuación 3.6 y que en el diagrama se ha indicado con el punto de continuación número 4.

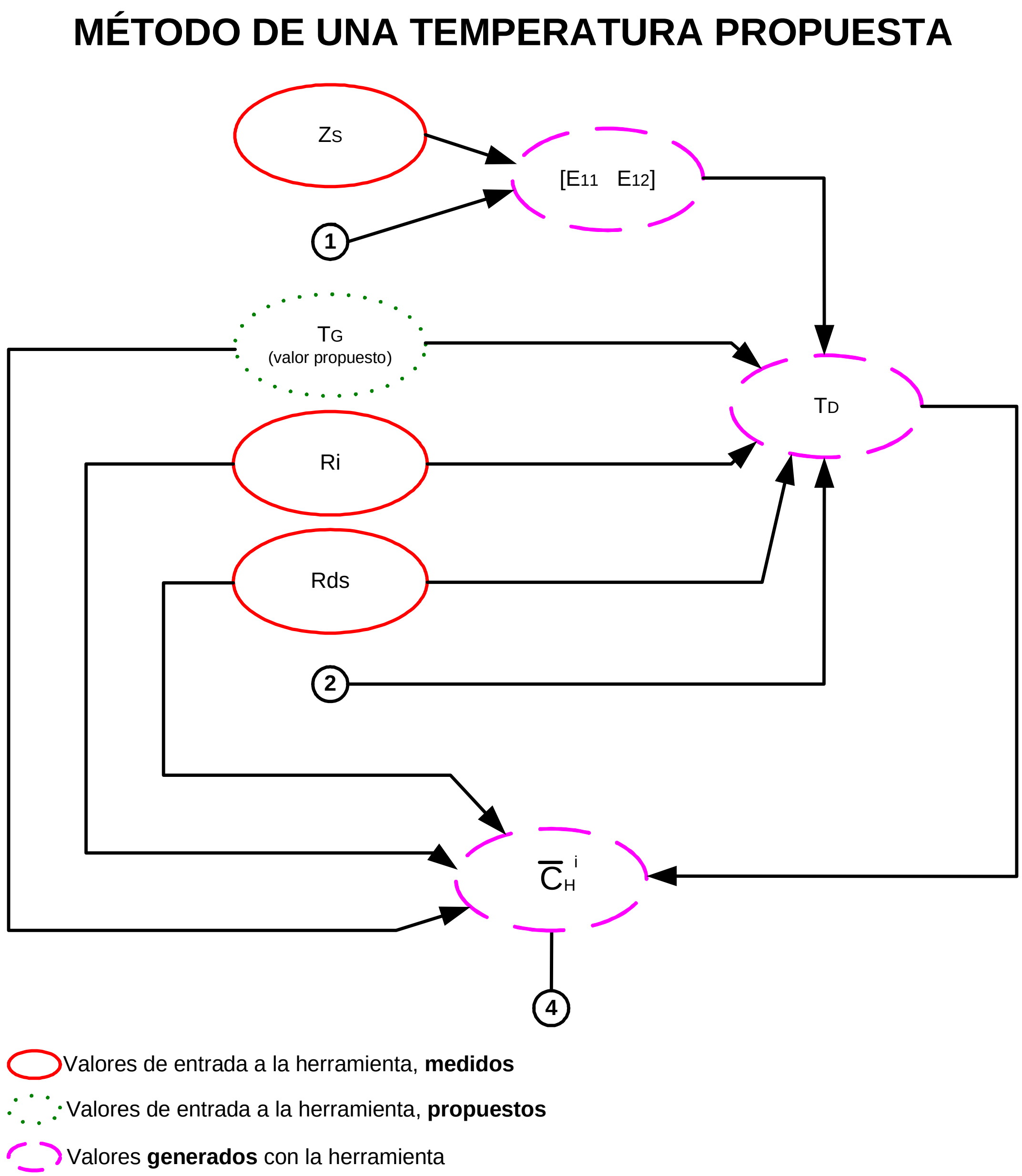


Figura 4.2 Diagrama de flujo de la función de la herramienta de cómputo desarrollada para la solución basada en el método de una temperatura propuesta.

4.3.3 Función para la determinación las temperaturas equivalentes T_G y T_D por medio de la implementación de la solución basada en el método de la matriz pseudo inversa.

Para la realización de esta función, se extiende la solución de la ecuación 4.3 a su solución para cada uno de los "n" puntos de frecuencia del ancho de banda de interés, generando de esta manera una nueva matriz E de $n \times 2$ elementos, cuya definición se presenta con la ecuación 4.10.1.

Para la generación de $E_{n\times 2}$, como se indica en la figura 4.3 y en la definición de la ecuación 3.13, es necesario evaluar la matriz P para cada punto de frecuencia.

Como se presenta en el diagrama de bloques de esta función, también es necesario considerar el valor de la impedancia de fuente $Zs_i = 50\Omega$ para todo el ancho de banda.

Posteriormente se genera la matriz transpuesta $E^T_{2\times n}$ y la solución de y_i^{EXT} también para los "n" puntos de frecuencia. Junto con estas, la matriz $E_{n\times 2}$ y los valores de los elementos resistivos del transistor intrínseco Ri y Rds se implementa la solución a la ecuación 4.11 de la cual y como se define en la ecuación 4.10.2, el valor del elemento en la posición (1,1) corresponde a la temperatura equivalente T_G y el valor del elemento en la posición (2,1) de la matriz corresponde a la temperatura equivalente T_D.

Finalmente con los valores obtenidos de las temperaturas equivalentes de ruido y de los elementos resistivos del transistor intrínseco, se genera la matriz de correlación de ruido en parámetros H $\overline{C}_H{}^i$.

4.3.4 Función para la determinación de las temperaturas equivalentes T_G y T_D por medio de la implementación de la solución basada en el método de Lázaro.

Para la implementación de esta función tal y como se muestra en la figura 4.4, es necesario extender la solución de la ecuación 4.3 a los "n" puntos de frecuencia del ancho de banda generando con esto a la matriz de $n \times 4$ elementos Ξ definida por la ecuación 4.14.1.

Posteriormente se genera la matriz transpuesta Ξ^T, matriz de $4 \times n$ elementos y con esta, la matriz Ξ y la matriz y_i^{EXT} de $n \times 1$ elementos, señalada en el diagrama de bloques de la figura 4.4 con el punto de continuación número 2, la matriz $\overline{C}_h{}^i$, de 4×1 elementos y definida en las ecuaciones 4.15 y 4.16.

Como se observa en la ecuación 4.15, los elementos $\overline{C}_{h11}^{\,i}$ y $\overline{C}_{h41}^{\,i}$ corresponden a los valores de $\overline{C}_{11}^{\,i}$ y $\overline{C}_{22}^{\,i}$ respectivamente de la matriz de correlación de ruido en parámetros H $\overline{C}_{H}^{\,i}$, indicada en el diagrama de la figura 4.4. Con estos y los valores de los elementos resistivos del transistor intrínseco Ri y Rds, se generan los valores de las temperaturas equivalentes de ruido, de la forma en que se definieron por las ecuaciones 4.17 y 4.18.

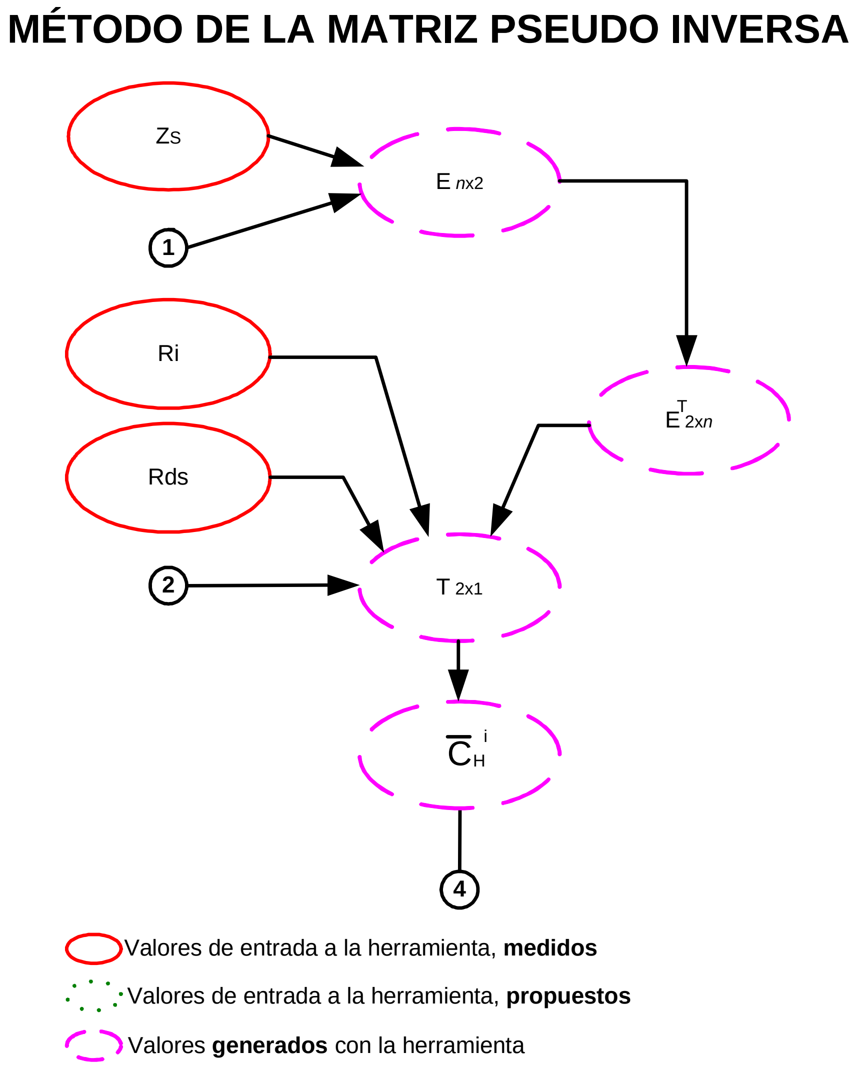


Figura 4.3 Diagrama de flujo de la función de la herramienta de cómputo desarrollada para la solución de la matriz pseudo inversa.

4.3.5 Cálculo de los parámetros de ruido del transistor.

En esta etapa se utilizan las matrices $\overline{C}_H{}^i$ y P, para implementar la matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD $\overline{C}_A^{INT}$ que junto con la matriz $\overline{C}_A^{EXT}$, genera la matriz de correlación de ruido total de parámetros ABCD del transistor $\overline{C}_A^T$ en función de la ecuación 3.1 y con la que finalmente se generan los parámetros de ruido del transistor, $F_{\min}$, R_{R_T}, G_{opt} y B_{opt} en función de las ecuaciones 2.70 a 2.73, ver diagrama de la figura 4.5.

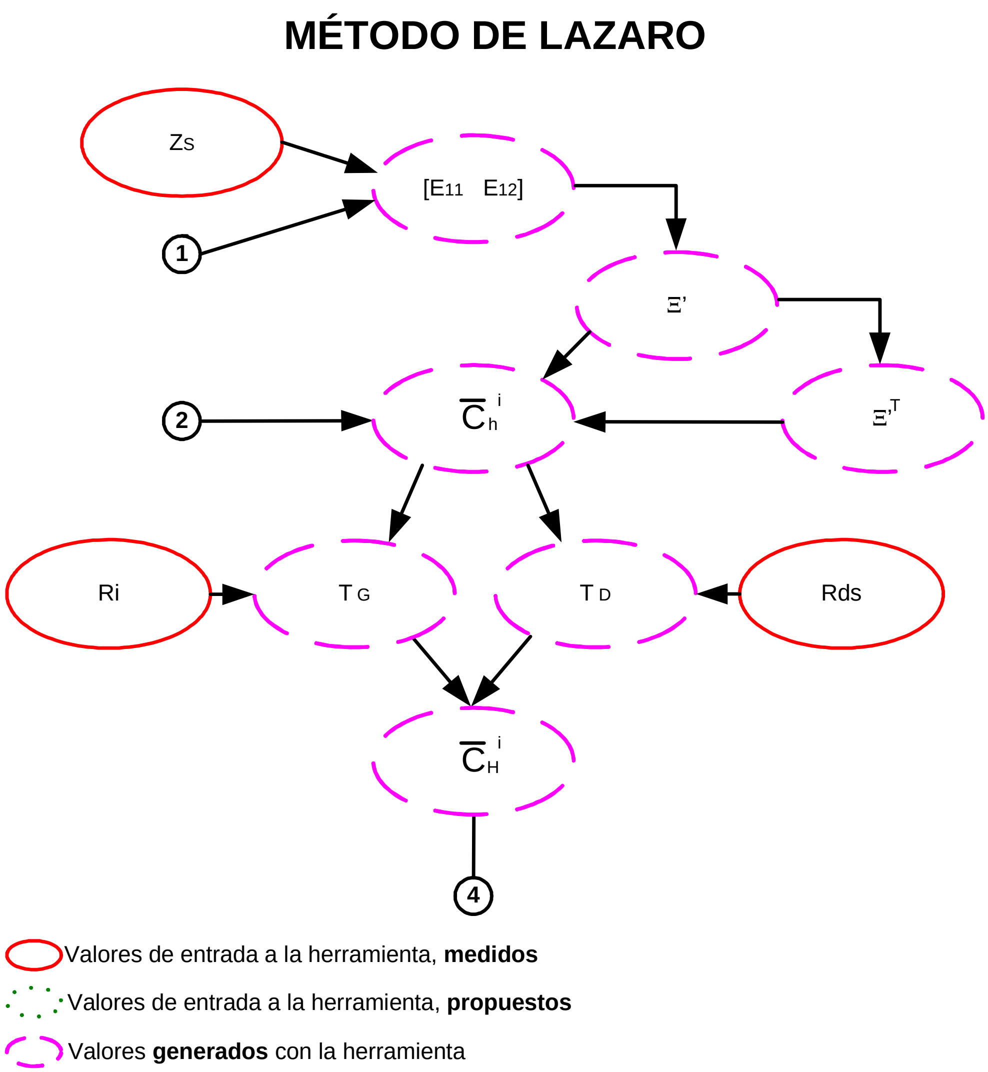


Figura 4.4 Diagrama de flujo de la función de la herramienta de software desarrollada para la solución por el método de Lázaro.

OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS DE RUIDO DEL TRANSISTOR DE EFECTO DE CAMPO

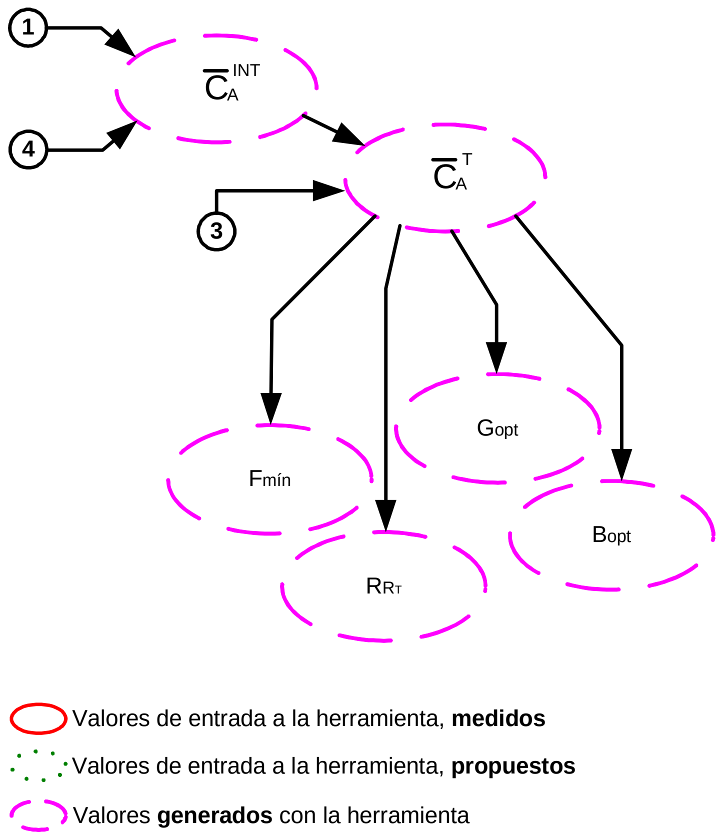


Figura 4.5 Diagrama de flujo de la etapa final de la herramienta de cómputo en la que se obtienen los valores de los parámetros de ruido.

Hasta este punto, se ha presentado la técnica de Lázaro para la determinación de las temperaturas equivalentes de ruido del transistor intrínseco, así como la propuesta de dos alternativas adicionales para su cálculo y con éstas obtener sus parámetros de ruido.

Además se presentó en forma de diagramas de flujo la estructura de la herramienta de cómputo desarrollada.

En el capítulo siguiente se discuten y analizan los resultados obtenidos de la validación de la herramienta con valores del factor de ruido y de los elementos del modelo de pequeña señal presentados en trabajos relacionados con la determinación de los parámetros de ruido de transistores de efecto de campo para microondas.

Capítulo 5

Resultados

Por el hecho de que aún no se cuenta con equipo para la medición del factor de ruido en transistores de microondas en la Facultad de Ingeniería de la U.A.B.C. unidad Mexicali, para validar la herramienta desarrollada en este trabajo de tesis, fue necesario obtener valores del factor de ruido de trabajos reportados relacionados con el tema, así como también los correspondientes valores de los elementos del modelo de pequeña señal del transistor en cuestión para cada caso, los cuales sirvieron como parámetros de entrada de la herramienta.

Estos datos se tomaron de trabajos relacionados con la extracción de las temperaturas equivalentes del transistor intrínseco y los parámetros de ruido de transistores de efecto de campo para señales de microondas [9] y [10].

5.1 Modelo de pequeña señal utilizado para la validación

Se hizo uso de la configuración del modelo de pequeña señal del transistor de efecto de campo que reporta Mikael Garcia en [9] y [10], la cual incluye las fuentes de ruido del transistor intrínseco, (ver figura 5.1).

En esta configuración se considera que la red de compuerta y la red de drenador cuentan con dos capacitores de valor $Cpg/2$ y $Cpd/2$, respectivamente. Además se considera la existencia de una resistencia Rj de $1\mu\Omega$ en la red de interconexión entre estas redes, (compuerta y drenador), la cual se encuentra a temperatura ambiente, (T_C = 290°K).

Los valores de los demás elementos se tomaron en función del valor de la corriente de polarización del transistor, I_{ds}, igual a 34 mA en [10] y a 55 mA en [9].

Los valores de los elementos del modelo para cada caso se presentan en la tabla 5.1.

En [10], se asume que el valor del factor de ruido es independiente de los valores de los elementos Cpg y Ld, y por ello no se toman en cuenta, sin embargo para realizar los cálculos y generar los valores de los parámetros de ruido utilizando la herramienta que se desarrolló en este trabajo, se consideran en todo caso del mismo valor que los que Garcia reporta en [9] y que también se muestra en la tabla 5.1.

Debido a que en estos trabajos, Garcia solo establece un método para determinar las temperaturas de ruido asociadas al transistor intrínseco y no reporta valores del factor de ruido de su modelo de pequeña señal, en este trabajo se generaron los valores del factor de ruido a partir de los valores de los elementos del modelo y de la impedancia de fuente reportados.

5.2 Tipo de soluciones con que cuenta la herramienta para la obtención de los parámetros de ruido.

En la figura 5.2 se presenta la ventana de la herramienta que corresponde al menú de elección del tipo de solución que se utilizará para la generación de los parámetros de ruido.

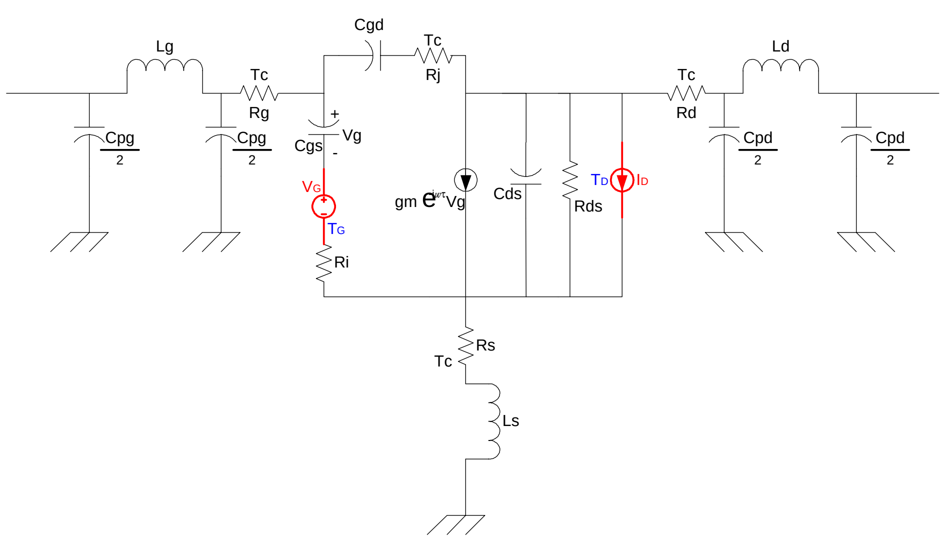


Figura 5.1 Modelo de pequeña señal del transistor utilizado en [9] y [10].

Tabla 5.1 Valores de los elementos del modelo de pequeña señal utilizado por M. García.

Ids [mA]	**Cgs [fF]**	**Cgd [fF]**	**Cds [fF]**	**Gm [mS]**	**T [ps]**	**R_i [Ω]**	**Rgd [Ω]**	**Rds [Ω]**	**Cpg [fF]**	**Cpd [fF]**	**Lg [pH]**	**Ls [pH]**	**Rg [Ω]**	**Rs [Ω]**	**Rd [Ω]**	**Ld [pH]**
34	152	19.0	59.8	111	0.4	0.7	0.0	108	10.1	10.1	48.9	2.9	0.5	1.9	2.9	39.5
55	151	17.8	55.8	88.0	0.5	2.2	0.0	106	11.6	11.6	49.1	2.5	0.5	1.9	2.9	39.5

La opción número **1** corresponde al caso en que se implementó la solución para obtener el valor de T_D, considerando un valor determinado de T_G. En este caso se hace la consideración de que no existe correlación entre las fuentes de ruido del transistor intrínseco.

La opción número **2** corresponde a la solución en la que la ecuación que define a la matriz de las temperaturas equivalentes intrínsecas del transistor se obtiene por medio de la técnica de matriz pseudo-inversa. En este caso también se hace la consideración de que no existe correlación entre las fuentes de ruido del transistor intrínseco.

La opción número **3** corresponde a la solución en la que se implementan las ecuaciones propuestas por Lázaro. En este caso se hace la consideración de que sí existe correlación entre las fuentes de ruido del transistor intrínseco.

En las siguientes secciones se presentan los resultados obtenidos utilizando la herramienta desarrollada en el presente trabajo de tesis con cada una de las opciones de solución.

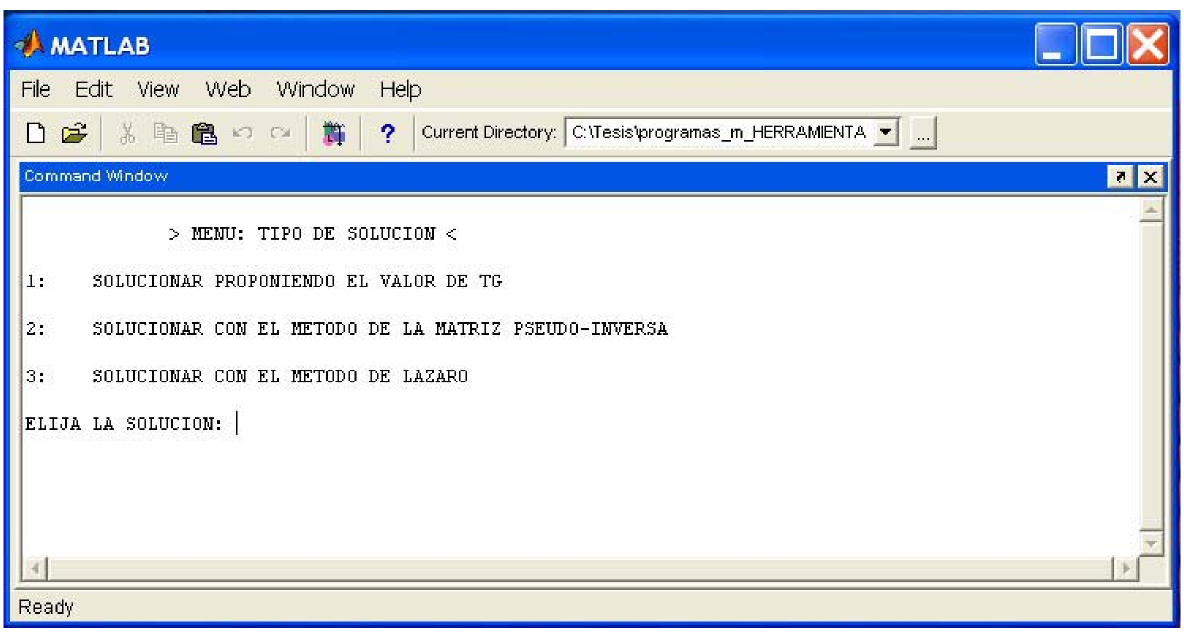


Figura 5.2. Pantalla de la herramienta para la elección del tipo de solución a utilizar.

5.3 Resultados obtenidos utilizando el modelo de pequeña señal polarizado a Ids = 34 mA

En esta sección se presentan los resultados obtenidos con cada una de las tres opciones de solución que permite la herramienta, para el modelo de Garcia con una Ids = 34 mA.

Obsérvese en la figura 5.3 que para las tres soluciones la curva de la figura de ruido mínima presenta un comportamiento muy aproximado al de una recta que parte de un valor cercano a los 0.1 dB para una frecuencia de 2 GHz y asciende hasta un valor aproximado de 1.2 dB, para una frecuencia de 26 GHz.

La curva de la resistencia de ruido presenta un valor cercano a los 13 Ω a una frecuencia de 2 GHz y desciende hasta aproximadamente los 8 Ω a los 26 GHz.

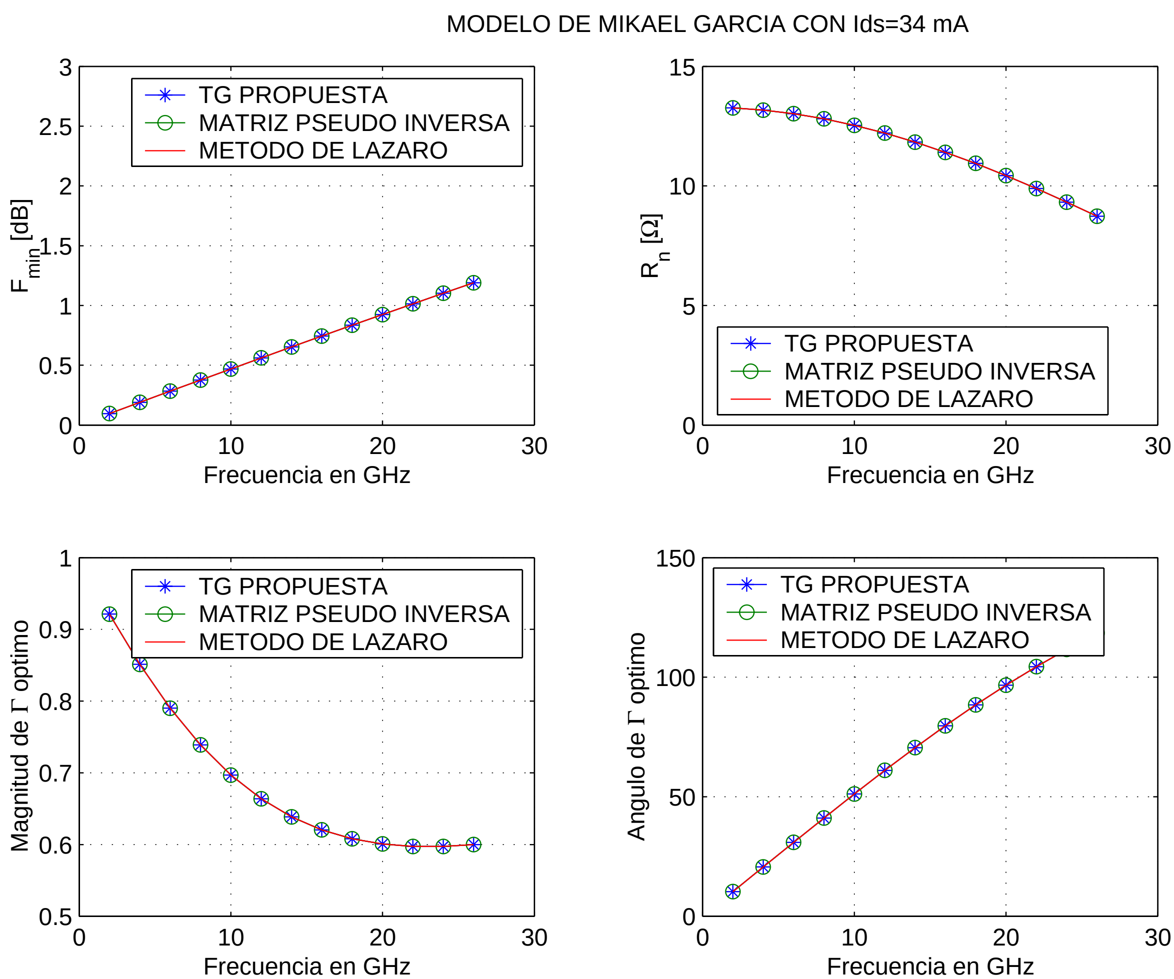


Figura 5.3 Parámetros de ruido generados con las diferentes soluciones de la herramienta, para el modelo utilizado por M. Garcia polarizado con Ids = 34 mA [10].

La curva de la magnitud del coeficiente de reflexión óptimo tiene un valor aproximado de 0.92 para una frecuencia de 2 GHz y decreciente hasta un valor cercano a 0.6 para los 26 GHz.

La curva del ángulo del coeficiente de reflexión óptimo tiene un comportamiento ascendente desde los 6.25 grados aproximadamente a una frecuencia de 2 GHz y hasta un valor cercano a los 120 grados para una frecuencia de 26 GHz.

En la figura 5.4 se presenta la curva del coeficiente de reflexión óptimo en gráfico polar. En esta se observa una magnitud cercana a 0.9 y un ángulo aproximado de 6 grados para el menor valor de frecuencia y una magnitud de 0.6 y un ángulo de 120 grados para el valor mayor de las frecuencias del ancho de banda evaluado.

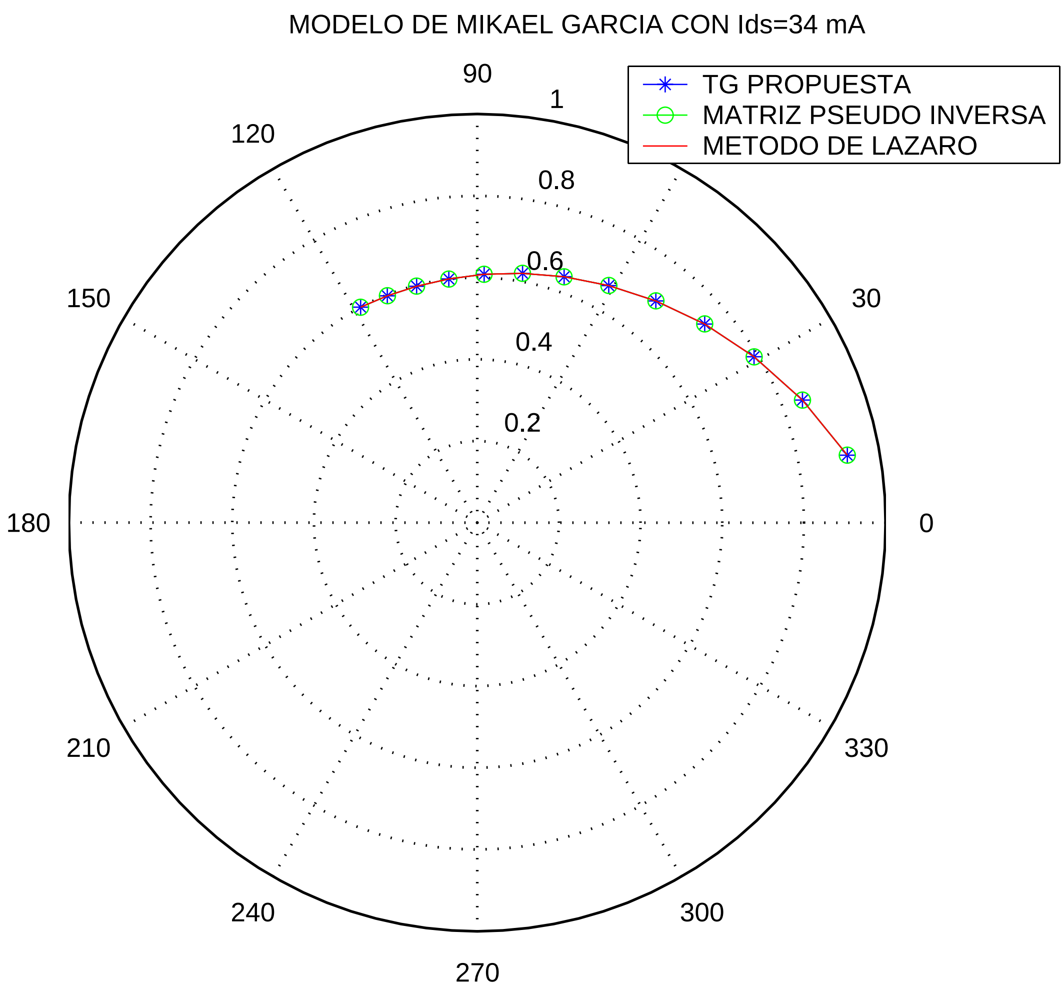


Figura 5.4. Coeficiente de reflexión de fuente óptimo en formato polar, generado con las diferentes soluciones de la herramienta, para el modelo utilizado por M. Garcia polarizado con Ids = 34 mA [10].

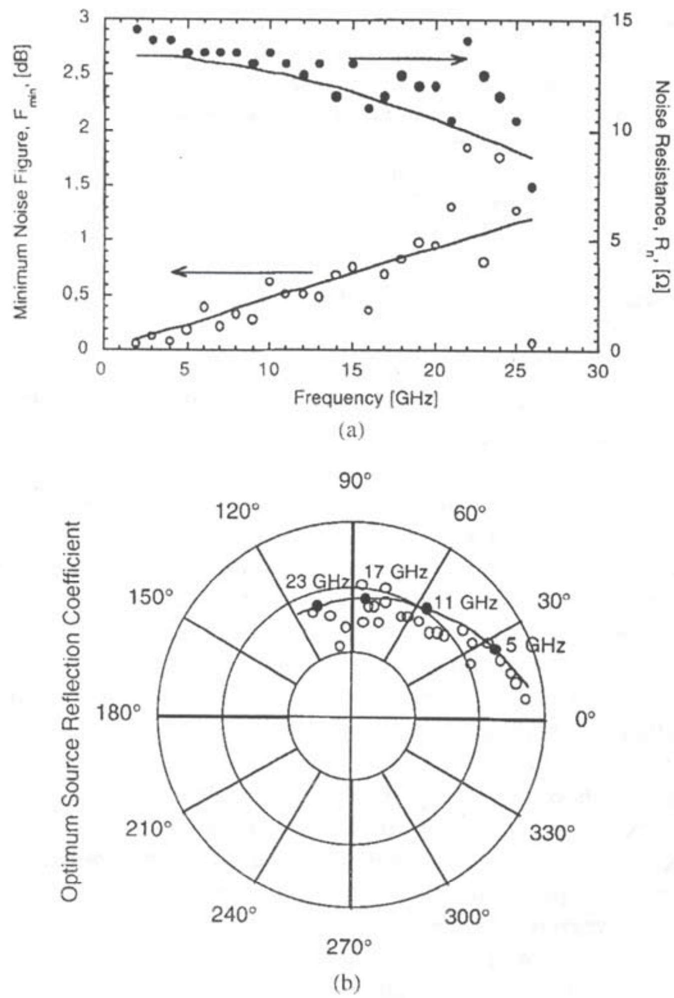


Figure 4 Measured and modeled noise parameters in the frequency range of 2–26 GHz for the NEC transistor: (a) minimum noise figure F_{min} and noise resistance R_n, (b) optimum source reflection coefficient Γ_{opt}. $V_{ds} = 2.0$ V, $I_{ds} = 34.0$ mA, $T_d = 3800$ K, $T_a = 290$ K, $T_s = 290$ K, $Y_s = (20 + 0 \cdot j)$ mS

Figura 5.5. Valores de los parámetros de ruido reportados por Garcia en [10].

Como se puede observar, los valores obtenidos con la herramienta coinciden en gran medida con los reportados en [10] por Garcia (ver figura 5.5).

Además se puede observar que el comportamiento de las curvas obtenidas con la herramienta con cualquiera de sus soluciones, es muy parecido entre ellas.

5.4 Resultados obtenidos utilizando el modelo de pequeña señal de Mikael Garcia para Ids = 55 mA

A continuación se presentan los resultados obtenidos utilizando cada una de las soluciones de la herramienta, para el modelo de Garcia con Ids=55 mA.

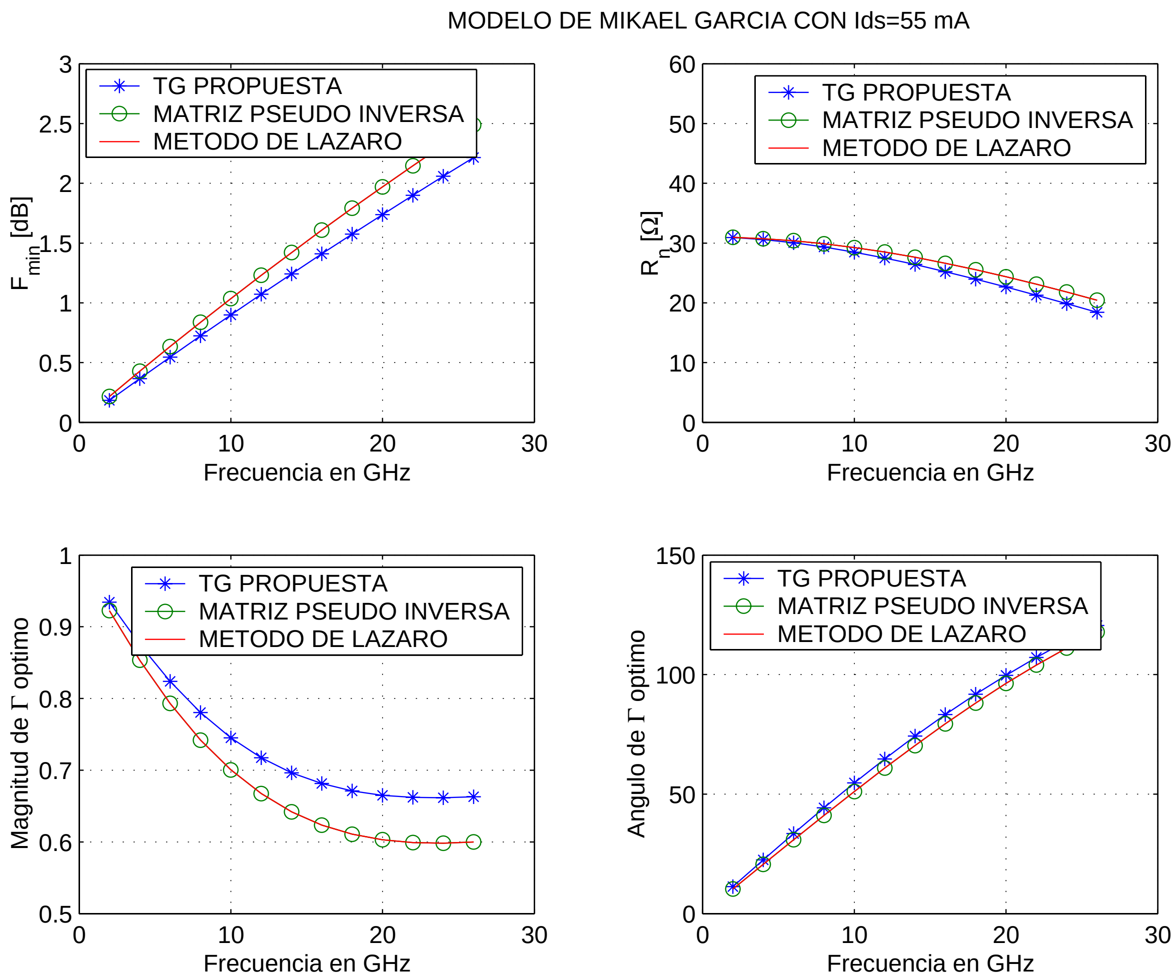


Figura 5.6 Parámetros de ruido generados con las diferentes soluciones de la herramienta, para el modelo utilizado por M. Garcia polarizado con Ids = 55 mA [9].

Los valores de la figura de ruido mínima en dB, la resistencia de ruido y la magnitud y el ángulo del coeficiente de reflexión óptimo de fuente generados por la herramienta se presentan en la figura 5.6.

Obsérvese que para las tres soluciones, la curva de la figura de ruido mínima presenta un comportamiento muy aproximado al de una recta de pendiente de 45º. Su punto inicial tiene un valor aproximado de 0.1 dB para una frecuencia de 2 GHz, y su punto final tiene un valor de cercano a los 2.25 dB para una frecuencia de 26 GHz.

La curva de la resistencia de ruido presenta un comportamiento descendente, desde un valor aproximado a los 31Ω, para una frecuencia de 2 GHz, hasta un valor de 18Ω, para una frecuencia de 26 GHz.

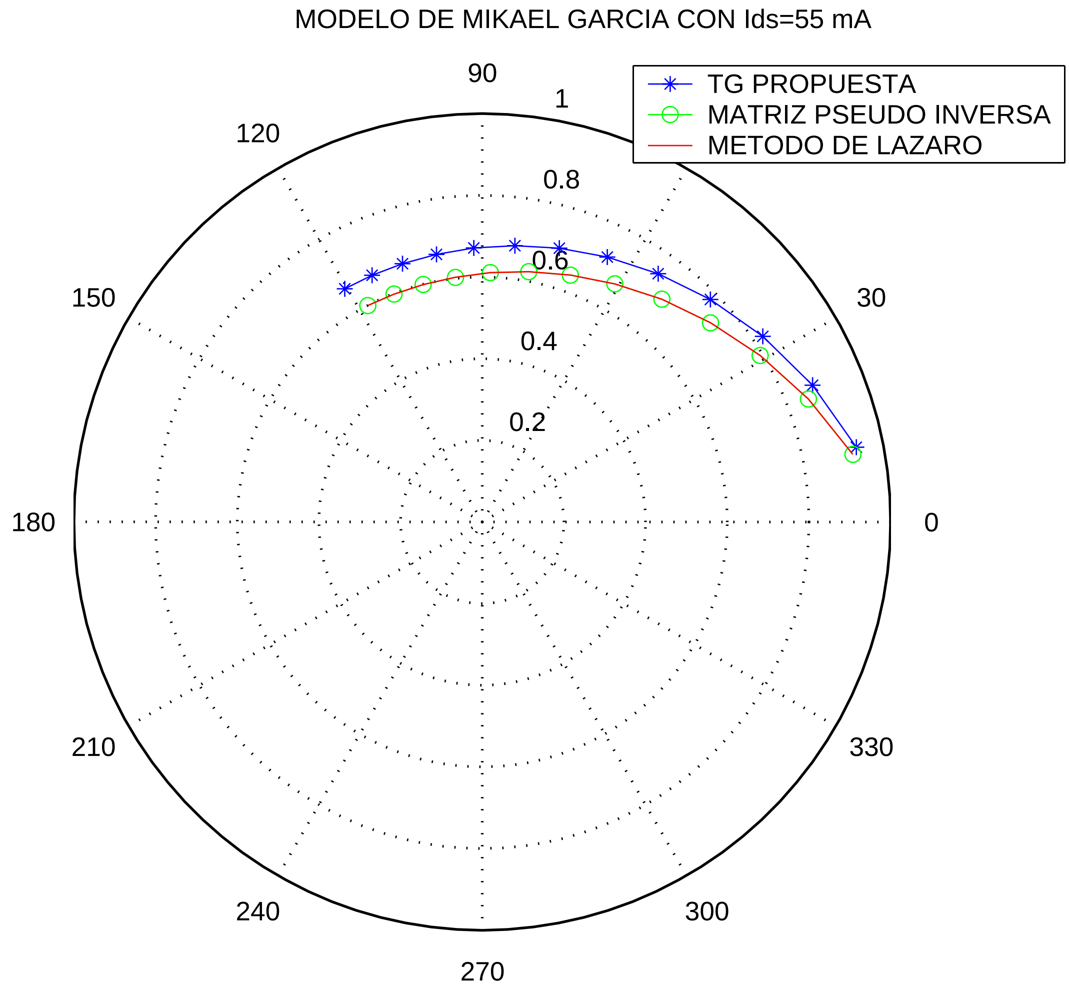


Figura 5.7. Coeficiente de reflexión de fuente óptimo en formato polar, generado con las diferentes soluciones de la herramienta, para el modelo utilizado por M. Garcia polarizado con Ids = 55 mA [9].

El coeficiente de reflexión óptimo de fuente presenta una magnitud aproximada de 0.93 para una frecuencia de 2 GHz, y decrece hasta un valor de 0.66 para una frecuencia de 26 GHz.

En cuanto a su ángulo, este presenta un valor cercano a los 10º para una frecuencia de 2 GHz y crece hasta aproximadamente los 120º para 26 GHz.

Por otro lado, en la figura 5.7 se presenta el coeficiente de reflexión óptimo de fuente generado con la herramienta para cada una de las tres soluciones.

En este caso las curvas del coeficiente de reflexión presenta un punto inicial cuya magnitud es cercana a un valor de 0.9 y ángulo de 10º, y un punto final de magnitud aproximado a 0.65 y ángulo de 120º.

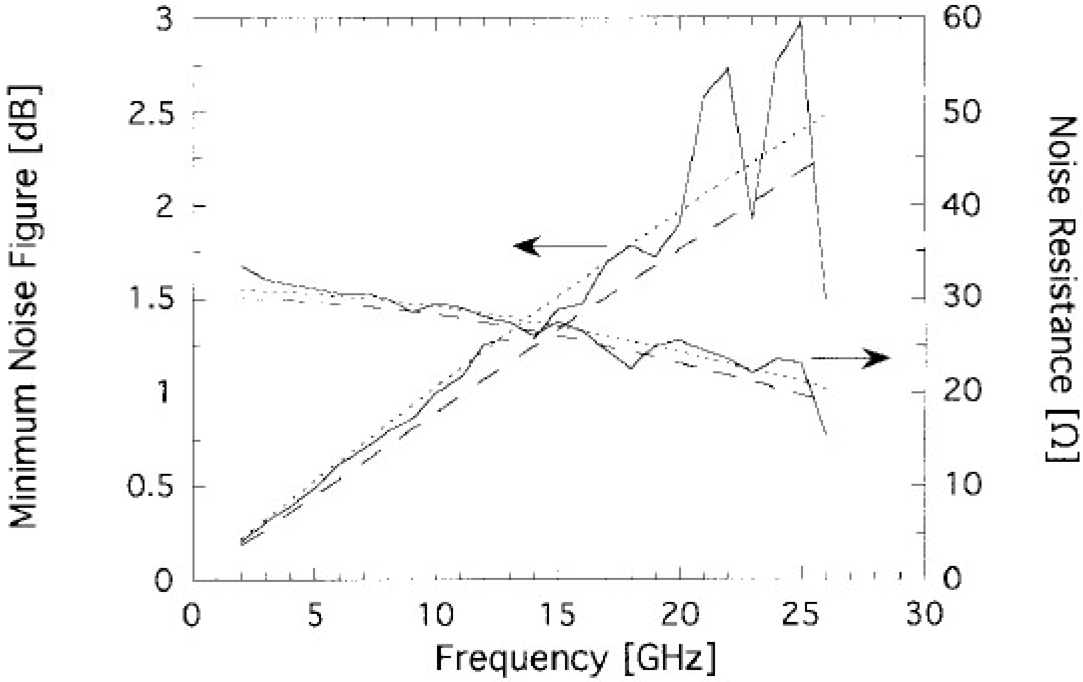


Fig. 7. Minimum noise figure $F_{\min}$ and noise resistance R_n versus frequency for the NEC device at $V_{ds} = 2.0$ V and $I_{ds} = 55$ mA. Measured data (—). Single-parameter model (– –): $T_d = 5990$ K and $T_g = T_a = 290$ K. Two-parameter model (··): $T_d = 5530$ K and $T_g = 650$ K.$T_a = 290$ K.

Figura 5.8. Valores de la figura de ruido mínima y de la resistencia de ruido reportados por Garcia en [9].

En las figuras 5.8 y 5.9, se presentan las gráficas de los parámetros de ruido reportados por Garcia en [9].

Puede observarse que existe gran similitud entre los valores de los parámetros obtenidos con la herramienta y los reportados por Garcia.

Obsérvese también que en este caso, entre los valores obtenidos con las diferentes soluciones existe mucha similitud.

Como se observa, en ambos casos existe mucha similitud entre los valores generados con la herramienta y los reportados en los trabajos tomados como referencia.

Además se observa que entre los resultados obtenidos con las diferentes soluciones de la herramienta existe alguna diferencia, específicamente para el caso en que se utilizó el modelo polarizado con Ids=55 mA, y que esta diferencia surge precisamente entre la solución generada proponiendo el valor de T_G y las otras dos soluciones, tal y como se observa que sucede con los resultados reportados en [9].

De cualquier manera en el siguiente capítulo se presentan gráficas comparativas entre los resultados obtenidos con las diferentes soluciones de la herramienta.

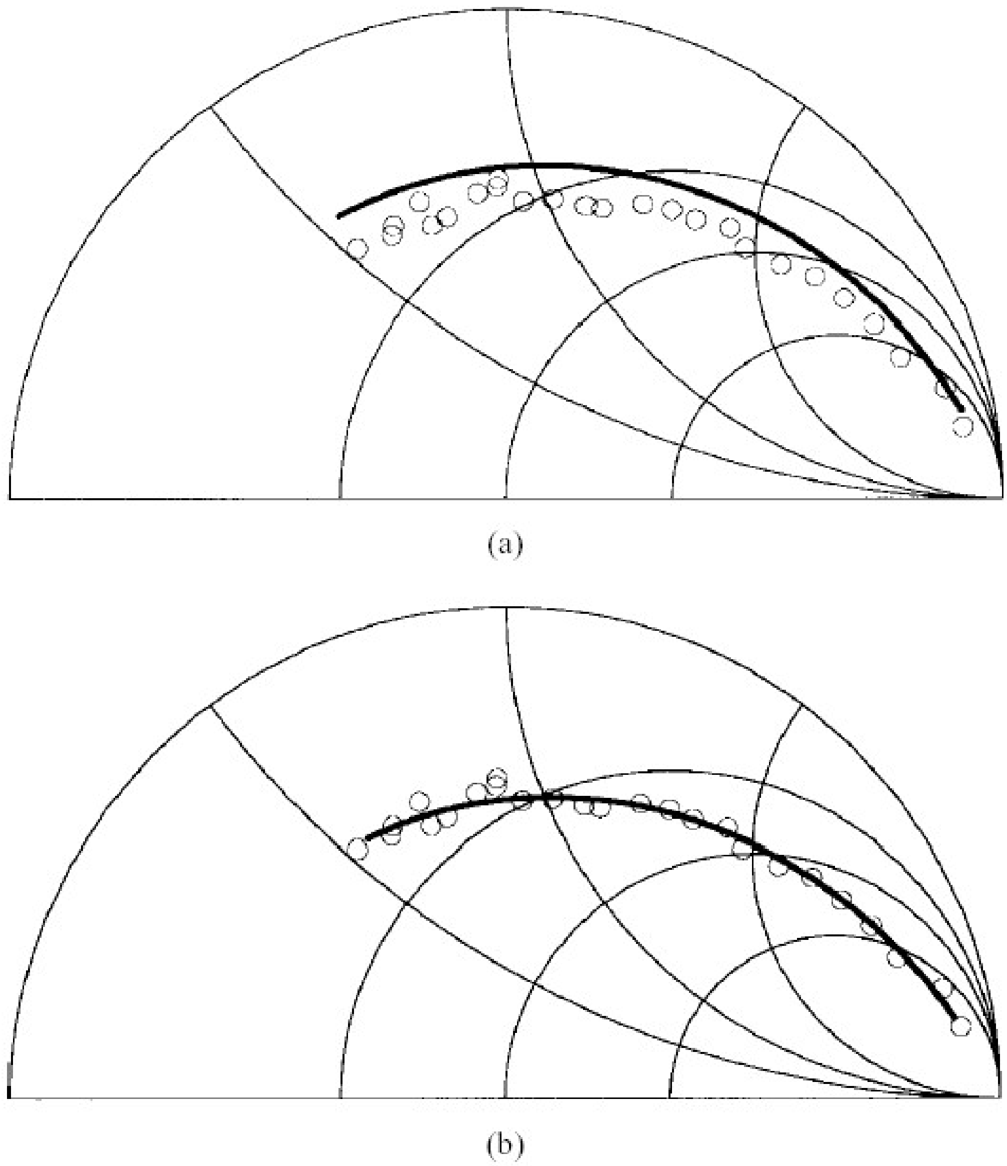


Fig. 8. Measured (○) and modeled (—) optimal source reflection coefficient Γ_{opt} for the NEC device in the 2–26-GHz frequency range at $V_{ds} = 2.0$ V and $I_{ds} = 55$ mA. (a) Single-parameter model: $T_d = 5990$ K and $T_g = T_a = 290$ K. (b) Two-parameter model: $T_d = 5530$ K and $T_g = 650$ K. $T_a = 290$ K.

Figura 5.9. Valores del coeficiente de reflexión de fuente óptimo, reportados por Garcia en [9].

Capítulo 6

Conclusiones

Es importante señalar las diferencias entre los valores de los parámetros de ruido obtenidos en los diferentes casos evaluados y para las diferentes soluciones de la herramienta, por lo que a continuación se hace un análisis al respecto.

En la figura 6.1 se presentan de forma gráfica las diferencias entre los parámetros de ruido obtenidos con las tres soluciones de la herramienta desarrollada, utilizando el modelo de Garcia polarizado con Ids= 34mA.

Obsérvese que en el caso de cualquiera de los cuatro parámetros, los valores obtenidos con la solución 1, (T_G propuesta) y la solución 2, (matriz pseudo inversa) son prácticamente los mismos ya que la curva que indica la diferencia entre ellos, (∇) tiene un valor de cero para todo el ancho de banda evaluado.

Por otro lado, se observa que la diferencia de los cuatro parámetros obtenidos con la solución 3, (método de Lázaro) y cualquiera de las otras dos soluciones, (1 ó 2), es la misma, es decir, las curvas indicadas con $*$, para la diferencia entre los valores obtenidos con las soluciones 3 y 2, así como la curva indicada con — para la diferencia entre los valores obtenidos con las soluciones 3 y 1 son exactamente iguales, para todo el ancho de banda evaluado. Dichas diferencias no sobrepasan un valor de 1.5×10^{-7} unidades, para los casos de las comparaciones entre las resistencias de ruido (R_n) y los factores de ruido mínimos ($F_{\min}$), y no sobrepasan un valor de 4×10^{-8} unidades, para los casos de las comparaciones entre los valores obtenidos de magnitud y fase del coeficiente de reflexión óptimo (Γ_{opt}).

Es necesario tomar en cuenta que en el desarrollo de la herramienta de cómputo presentada, se consideró para el caso de las soluciones 1 y 2 que la correlación cruzada de los elementos de la matriz de correlación del transistor intrínseco, $\overline{C}_H{}^i$, es igual a cero y para la solución 3 se consideró la existencia de esta correlación cruzada. A esto se deben las diferencias antes descritas.

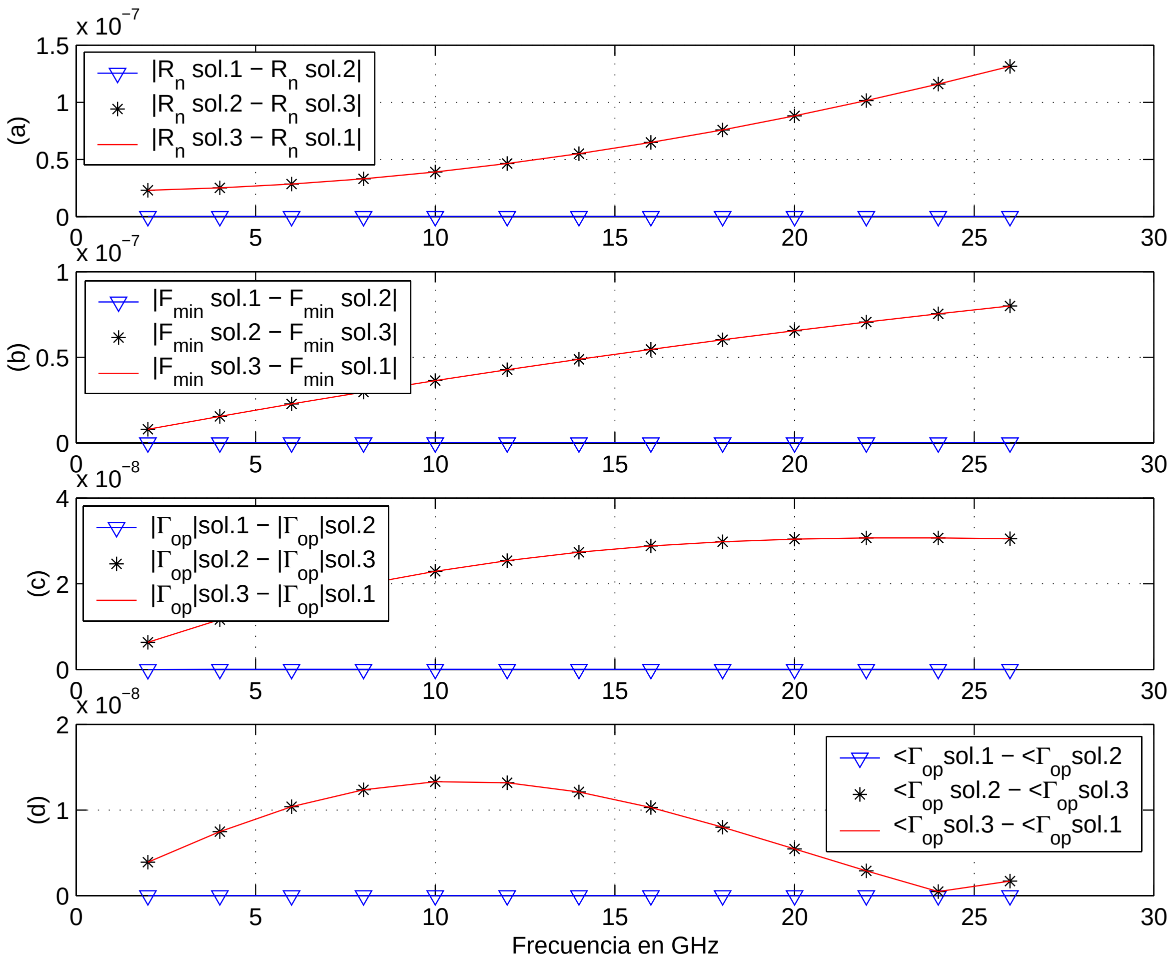


Figura 6.1 Diferencias entre los valores de los parámetros de ruido generados con las diferentes soluciones de la herramienta para el modelo de Garcia polarizado a Ids=34 mA. **(a)** Diferencias entre los valores de resistencia de ruido obtenidos. **(b)** Diferencias entre los valores de figura de ruido mínima obtenidos. **(c)** Diferencias entre los valores de magnitud del coeficiente de reflexión óptimo obtenidos. **(d)** Diferencias entre los valores de fase del coeficiente de reflexión óptimo obtenidos.

En la figura 6.2 se presentan de forma gráfica las diferencias entre los parámetros de ruido obtenidos con las diferentes soluciones de la herramienta, utilizando el modelo de Garcia polarizado con Ids= 55mA.

En este caso, para cualquiera de los cuatro parámetros obtenidos se observan diferencias entre los valores obtenidos con la solución 1, (T_G propuesta) y cualquiera de las otras dos soluciones, (comparación con la solución 2 indicadas con $*$ y con la solución 3 indicada con —).

En el caso de los valores de las resistencias de ruido obtenidas estas diferencias no sobrepasa a las 3 unidades.

En el caso de los valores de los factores de ruido mínimos obtenidos estas diferencias no sobrepasa a las 0.4 unidades.

Para el caso de las magnitudes y fases de los coeficientes de reflexión óptimos, esta diferencia no sobrepasa las 0.1 unidades.

Como una causa de lo anterior debe considerarse el hecho de que para la solución 1, la temperatura equivalente de ruido T_G es de un valor preestablecido, mientras que en el caso de las otras dos soluciones ambos valores T_G y T_D también son calculados por la herramienta, por lo que sus valores no están condicionados a un valor fijo determinado para todo el ancho de banda evaluado.

Un indicativo adicional de la diferencia en los resultados que se obtiene con la herramienta al calcular los parámetros de ruido con una temperatura propuesta o no, se puede observar en el hecho de que en los valores obtenidos con esta así como en los resultados presentados por Garcia en su artículo se observan estas diferencias. Por ejemplo, en la figura 6.3 se muestran las diferencias que obtiene en sus resultados Garcia al calcular con una temperatura propuesta y una por determinar (resultado indicado con una flecha de línea discontinua en color rojo), y cuando determina las dos temperaturas (resultado indicado con una flecha de línea continua en color azul).

De la misma forma estas diferencias también se observan en los resultados obtenidos con la herramienta y los cuales se verifican visualmente en la figura 5.6, así como más específicamente en la figura 6.2 ya antes descrita.

Una situación similar ocurre para los valores del coeficiente de reflexión óptimo obtenidos (ver figuras 5.7, 5.9 y 6.2).

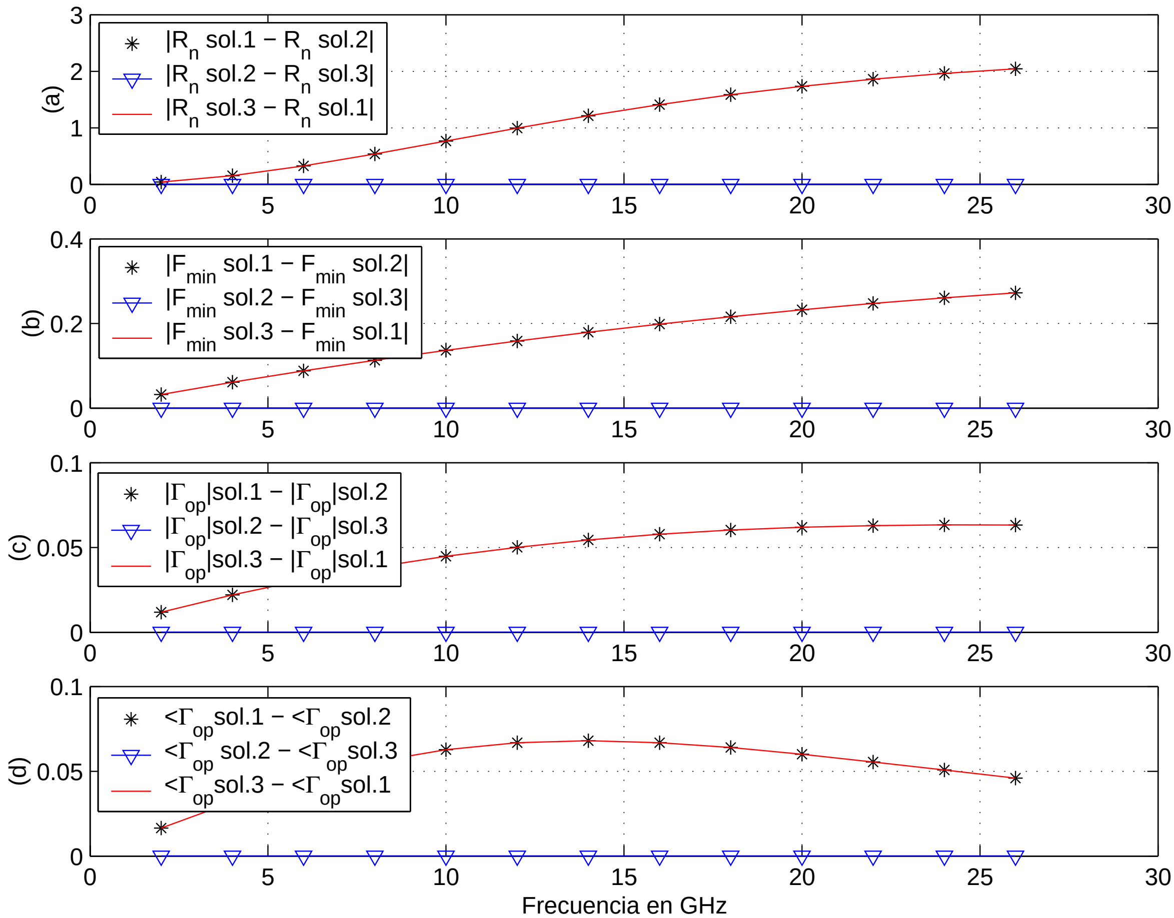


Figura 6.2 Diferencias entre los valores de los parámetros de ruido obtenidos con las diferentes soluciones de la herramienta para el modelo de Garcia polarizado a Ids=55 mA. **(a)** Diferencias entre los valores de resistencia de ruido obtenidos. **(b)** Diferencias entre los valores obtenidos de figura de ruido mínima. **(c)** Diferencias entre los valores de magnitud del coeficiente de reflexión óptimo obtenidos. **(d)** Diferencias entre los valores de fase del coeficiente de reflexión óptimo obtenidos.

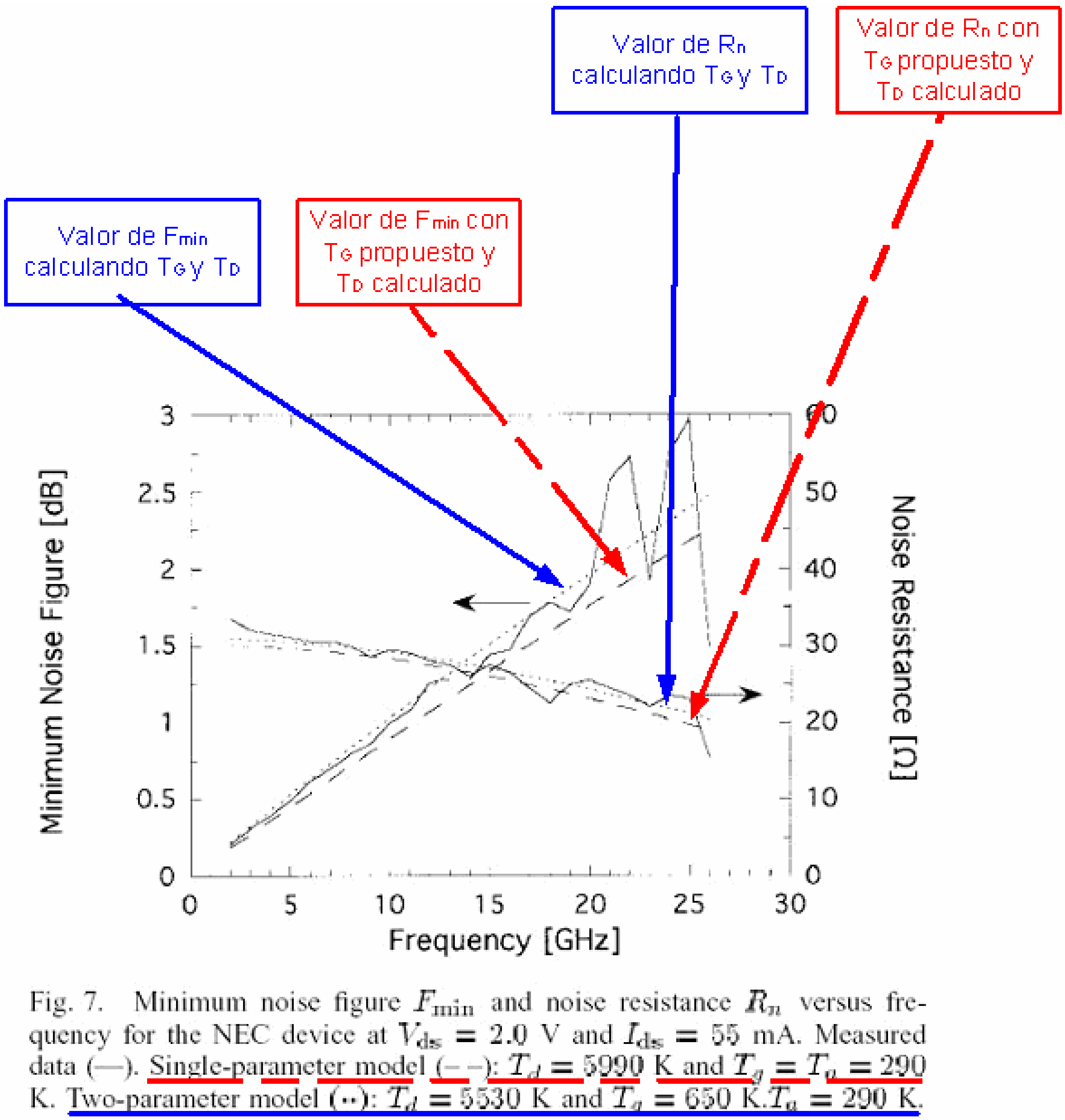


Figura 6.3 Diferencias entre los valores de $F_{\min}$ y R_n obtenidos por Garcia con una y dos temperaturas equivalentes de ruido calculadas.

Hasta este punto, se han presentado los resultados obtenidos de la evaluación de la herramienta desarrollada con los valores reportados en trabajos relacionados con la obtención de los parámetros de ruido en los que no se proporcionan resultados del factor de ruido medido, y se ha demostrado que los resultados arrojados por la herramienta son satisfactorios.

Se sugiere como un trabajo a futuro, que la herramienta sea integrada como parte de un sistema de medición de los parámetros de ruido de transistores de microondas debido a la suficiente confiabilidad que presenta.

Bibliografía

[1] Pettai R. Noise in receiving systems. John Wiley & Sons. New York. pp 273. 1984.

[2] Lazaro A., Pradell L., O'Callaghan J.M. FET Noise Parameter Determination using a Novel Technique based on 50 Ω Noise Figure Measurement. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 47. 3. 315-324. 1999.

[3] Rothe H., Dahlke W., Theory of noisy fourpoles. Proc. IRE. 44. 811-818. 1956

[4] Hillbrand H., Russer P. An Efficient Method for Computer Aided Noise Analysis of Linear Amplifier Networks. IEEE Trans. On Circuits and Systems. 23. 4. 235-238. 1976.

[5] Dambrine G., Cappy A., Heliodore F., Playez E. A New Method for Determining the FET Small-Signal Equivalent Circuit. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 36. 7. 1151-1159. 1988.

[6] Pospieszalski M. W. Modeling of Noise Parameters of MESFET's and MOSFET's and Their Frequency and Temperature Dependence. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 37. 9. 1340-1350. 1989.

[7] Pucel R., et. al., A General Noise De-embedding Procedure for Packaged Two-Port Linear Active Devices. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 40. 11. 2013-2024. 1992.

[8] Lázaro A., et. al., Measurement of On-wafer Transistor Noise Parameters Without a Tuner Using Unrestricted Noise Sources. Microwave Journal. 3. 382-387. March 1993.

[9] Garcia M., Stenarson J. A New Extraction Method for the Two-Parameter FET Temerature Noise Model. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 46. 11. 1679-1685. 1998.

[10] Garcia M., Stenarson J., Zirath H. A Direct Extraction Formula for the FET Temperature Noise Model. Microwave and Optical Tech. Letters 16. 4. 208-212. 1997.

[11] Heymann P., et. al., Experimental Evaluation of Microwave Field-Effect-Transistor Noise Models. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 47. 2. 156-163. 1999.

[12] Hernández D. Tesis de Maestría: Diseño y construcción con tecnología coplanar de un preamplificador de bajo ruido en la banda de 36 a 40GHz de telecomunicaciones. Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada. pp. 160. Agosto 1999.

[13] Maya M.C. Tesis Doctoral: Medida de Parámetros de Ruido de Dispositivos Activos, Basada en Fuente Adaptada. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. pp. 217. Octubre 2003.

[14] Gonzalez G. Microwave Transistor Amplifiers Analysis and Design. Prentice Hall. New Jersey. 1997

[15] Anónimo., Fundamentals of RF and Microwave Noise Figure Measurements. Hewlett-Packerd Aplication Note 57-1, Palo Alto, CA.1983

[16] Kondoh H. An Accurate FET Modelling From Measured S-Parameters. IEEE MTT-S Digest. 377-380. 1986.

[17] Wurtz L. GaAsFET and HEMT Small-Signal Parameter Extraction from Measured S-Parameters. IEEE Trans. Instrumentation Meas. 43. 4. 655-658. 1994.

[18] Heymann P., Rudolph M., Prinzler H., Doerner R. Experimental Evaluation of Microwave Field-Effect-Transistor Noise Models. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 47. 2. 1999.

[19] Rudolph M., Doerner R., Heymann P., Klapproth L., Böck G. Direct Extraction of FET Noise Models From Noise Figure Measurements. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 50. 2. 461-464. 2002.

[20] De Dominicis M., Giannini F., Limiti E., Serino A. A Novel Noise Extraction Technique For Microwave And Millimeter Wave HEMT. 11th GAAS Symposium. 33-36. Munich. 2003.

[21] Dobrowolski J. A. Introduction to Computer Methods for Microwave Circuit Análisis and Design. Artech House. Boston. pp 427. 1991.

APÉNDICE A. MODELO DE UN BIPUERTO RUIDOSO POR MEDIO DE LOS PARÁMETROS ABCD.

En términos de parámetros ABCD el bipuerto ruidoso está representado por un bipuerto sin ruido ABCD conectado a fuentes de voltaje de ruido y corriente de ruido tal y como se muestra en la figura A.1.

Su ecuación matricial es:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} \qquad \text{A.1}$$

Desarrollando la ecuación A.1 se obtiene

$$V_1 = AV_2 - BI_2 + V_{R_T} \qquad \text{A.1.1}$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 + I_{R_T} \qquad \text{A.1.2}$$

y del circuito de la figura A.1 por las leyes de Kirchoff se tiene que

$$I_1 = I_{X1} + I_{R_T} \qquad \text{A.1.3}$$

$$V_1 = V_{R_T} + V_{X1} \qquad \text{A.1.4}$$

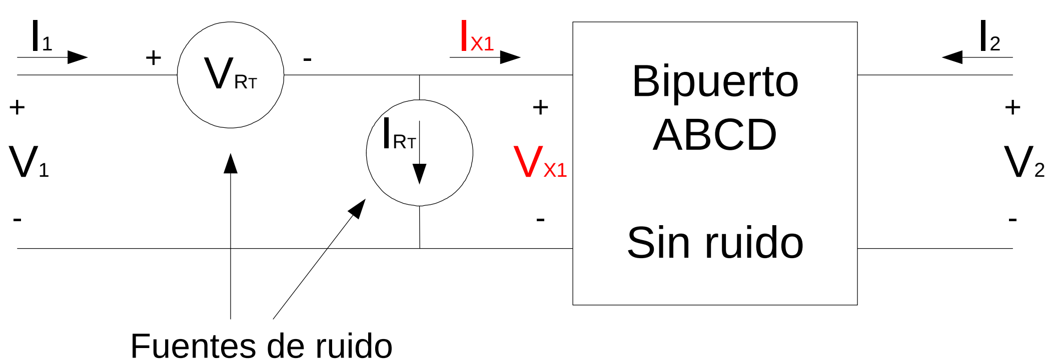


Figura A.1. Representación en parámetros ABCD de un bipuerto sin ruido y sus fuentes de ruido.

Las fuentes de ruido están parcialmente correlacionadas de modo que

$$V_{R_T} = V_{R_T NC} + V_{R_T C}(I_{R_T}) \qquad \text{A.2.1}$$

$$I_{R_T} = I_{R_T NC} + I_{R_T C}(V_{R_T}) \qquad \text{A.2.2}$$

donde $V_{R_T NC}$ es una fuente de voltaje de ruido térmico *no correlacionada* con I_{R_T},

$V_{R_T C}(I_{R_T})$ es una fuente de voltaje de ruido térmico *correlacionada* con I_{R_T},

$I_{R_T NC}$ es una fuente de corriente de ruido térmico *no correlacionada* con V_{R_T},

$I_{R_T C}(V_{R_T})$ es una fuente de corriente de ruido térmico *correlacionada* con V_{R_T}. I_{R_T} y V_{R_T} son fuentes de corriente de ruido térmico y voltaje de ruido térmico respectivamente.

$V_{R_T C}(I_{R_T})$ está totalmente correlacionada con I_{R_T} por lo tanto es proporcional a ella, de modo que es posible escribir que

$$V_{R_T C} = Z_{cor} I_{R_T} \qquad \text{A.2.3}$$

donde Z_{cor} es la impedancia de correlación que da la proporcionalidad que las relaciona.

De la misma forma

$$I_{R_T C} = Y_{cor} V_{R_T} \qquad \text{A.2.4}$$

donde Y_{cor} es la admitancia de correlación que da la proporcionalidad correspondiente a la igualdad de la ecuación A.2.4.

Sustituyendo la ecuación A.2.3 en la ecuación A.2.1

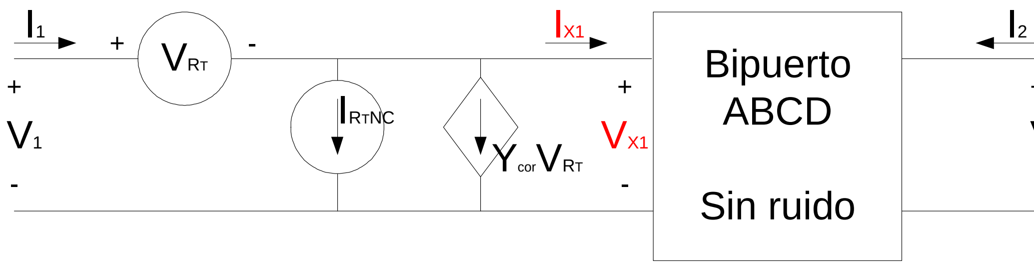
$$V_{R_T} = V_{R_T NC} + Z_{cor} I_{R_T} \qquad \text{A.3.1}$$

y de sustituir la ecuación A.2.4 en la ecuación A.2.2

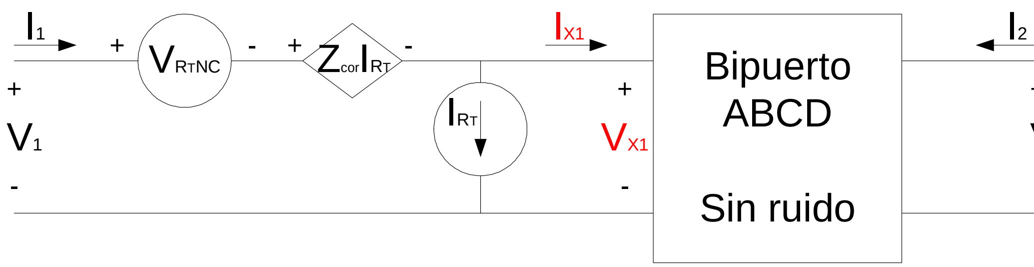
$$I_{R_T} = I_{R_T NC} + Y_{cor} V_{R_T} \qquad \text{A.3.2}$$

De sustituir A.3.1 y A.3.2 en A.1.3 y A.1.4

$$I_1 = I_{X1} + I_{R_T NC} + Y_{cor} V_{R_T} \qquad \text{A.3.3}$$



a)



b)

Figura A.2. Representación de un bipuerto ruidoso en términos de sus fuentes correlacionadas y no correlacionadas.

$$V_1 = V_{X1} + V_{R_T NC} + Z_{cor} I_{R_T} . \qquad \text{A.3.4}$$

De este modo ahora los elementos del bipuerto ruidoso V_{R_T} e I_{R_T} se transforman cada uno en dos fuentes, una correlacionada y una no correlacionada. El nuevo circuito se presenta en la figura A.2.

De las mismas ecuaciones A.1.3 y A.1.4

$$I_{R_T} = I_1 - I_{X1} \qquad \text{A.3.5}$$

$$V_{R_T} = V_1 - V_{X1} \qquad \text{A.3.6}$$

Sustituyendo A.3.5 y A.3.6 en A.3.3 y A.3.4

$$I_1 = I_{X1} + I_{R_T NC} + Y_{cor}(V_1 - V_{X1}) \qquad \text{A.3.7}$$

$$V_1 = V_{X1} + V_{R_T NC} + Z_{cor}(I_1 - I_{X1}) . \qquad \text{A.3.8}$$

Las representaciones dadas por estas últimas ecuaciones son más adecuadas que las de las ecuaciones anteriores, ya que como se observa en el circuito de la figura A.3a) V_{R_T} y $I_{R_T NC}$ son fuentes que no están correlacionadas y Y_{cor} es una admitancia de correlación a temperatura $T = 0$. Además en el circuito de la figura A.3b) I_{R_T} y $V_{R_T NC}$ también son fuentes de ruido no correlacionadas y Z_{cor} es una impedancia de correlación a temperatura $T = 0$.

Por otro lado, en estos modelos las únicas fuentes que generan ruido son V_{R_T}, $I_{R_T NC}$ y I_{R_T}, $V_{R_T NC}$ para cada uno respectivamente y las cuales se pueden modelar como:

$$\overline{|V_{R_T}|^2} = 4KBT_0 R_{R_T} \qquad \text{A.4.1} \qquad\qquad \overline{|I_{R_T NC}|^2} = 4KBT_0 G_{R_T NC} \qquad \text{A.4.2}$$

$$\overline{|I_{R_T}|^2} = 4KBT_0 G_{R_T} \qquad \text{A.4.3} \qquad\qquad \overline{|V_{R_T NC}|^2} = 4KBT_0 R_{R_T NC} \qquad \text{A.4.4}$$

donde T_0 es la temperatura ambiente ($290^\circ K$).

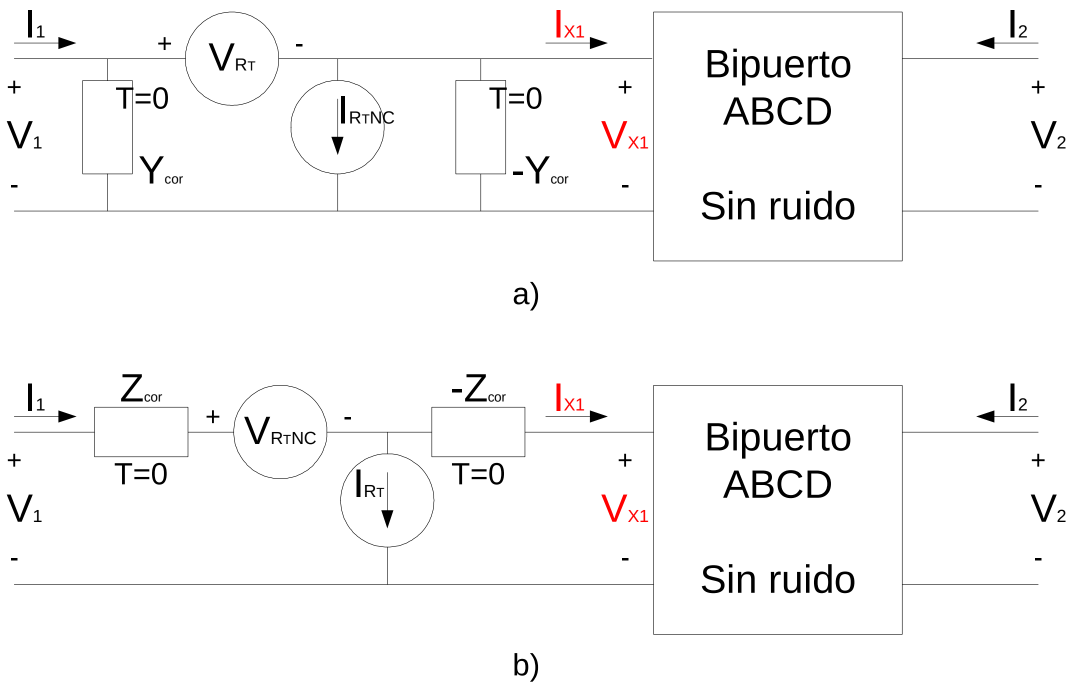


Figura A.3. Representación de un bipuerto ruidoso en términos de sus a) admitancias correlacionadas y sus b) impedancias correlacionadas.

APÉNDICE B. LOS PARÁMETROS DE RUIDO

Considérese el circuito de la figura B.1 en el cual se presenta la conexión de una fuente I_F con admitancia intrínseca Y_F a la entrada del modelo de parámetros ABCD de un bipuerto ruidoso como el que se muestra en la figura A.1.

La parte real de Y_F representa a los elementos de la fuente que por su efecto térmico provoquen la presencia de ruido en I_F por lo que se asume que el ruido de la fuente y del bipuerto no están correlacionados.

En la figura B.1. se muestra el arreglo anteriormente descrito donde

$$I_F = i_1 + I_{R_T} + I_{TOT} \tag{B.1}$$

donde

$$i_1 = V_{R_T} Y_F \tag{B.2}$$

por lo tanto

$$I_{TOT} = I_F - V_{R_T} Y_F - I_{R_T} \tag{B.3}$$

Por definición

$$F = \frac{\overline{|I_{TOT}|^2}}{\overline{|I_F|^2}} \tag{B.4}$$

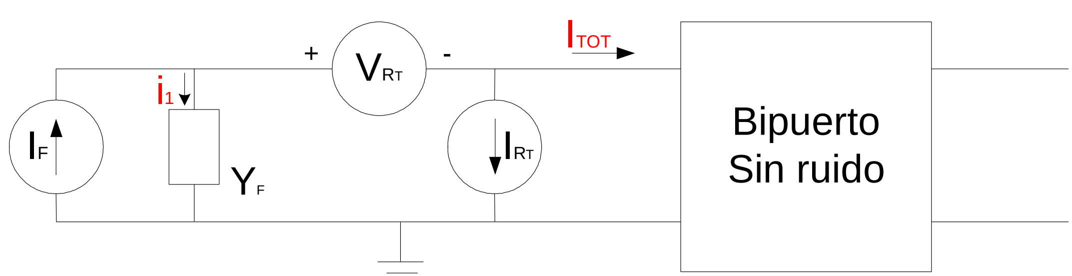


Figura B.1. Fuente I_F con admitancia intrínseca Y_F conectada a la entrada del modelo de parámetros ABCD de un bipuerto ruidoso.

De la ecuación (A.3.2)

$$I_{TOT} = I_F - V_{R_T} Y_F - (I_{R_T NC} + Y_{cor} V_{R_T})$$

$$I_{TOT} = I_F - I_{R_T NC} - V_{R_T}(Y_{cor} + Y_F) \qquad \text{B.5}$$

donde I_F, $I_{R_T NC}$ y V_{R_T} no están correlacionadas por lo que

$$\overline{|I_{TOT}|^2} = \overline{|I_F|^2} + \overline{|I_{R_T NC}|^2} + \overline{|V_{R_T}|^2}\,\overline{|Y_{cor} + Y_F|^2} \qquad \text{B.6}$$

Sustituyendo la ecuación B.6 en la ecuación B.4

$$F = \frac{\overline{|I_F|^2} + \overline{|I_{R_T NC}|^2} + \overline{|V_{R_T}|^2}\,\overline{|Y_{cor} + Y_F|^2}}{\overline{|I_F|^2}} \qquad \text{B.7}$$

Suponiendo que la fuente de entrada es térmica entonces

$$\overline{|I_F|^2} = 4KT_0 G_F B \qquad \text{B.8}$$

entonces de las ecuaciones A.4.1, A.4.2 y B.8

$$F = \frac{4KT_0 G_F B + 4KBT_0 G_{R_T NC} + 4KBT_0 R_{R_T}\overline{|Y_{cor} + Y_F|^2}}{4KT_0 G_F B} \qquad \text{B.9}$$

$$F = 1 + \frac{G_{R_T NC}}{G_F} + \frac{R_{R_T}}{G_F}\overline{|Y_{cor} + Y_F|^2} \qquad \text{B.10}$$

$$F = 1 + \frac{G_{R_T NC}}{G_F} + \frac{R_{R_T}}{G_F}\left[(G_{cor} + G_F)^2 + (B_{cor} + B_F)^2\right] \qquad \text{B.10.1}$$

La ecuación B.10 muestra la dependencia del factor de ruido, del bipuerto ruidoso, de la impedancia que se le conecte a la entrada, (I_F) ya que los valores de $G_{R_T NC}$, Y_{cor} y R_{R_T} son parámetros propios del bipuerto y por lo tanto invariables. Por esta razón es necesario investigar de qué manera cambia el valor del factor de ruido con respecto a la variación del valor de esta impedancia conectada a la entrada del bipuerto. Una manera de calcular esta variación se basa en encontrar de la derivada del factor de ruido con respecto a Y_F, es decir:

$$\frac{dF}{dY_F} \qquad \text{B.11}$$

$$\frac{\partial F}{\partial G_F} = -\frac{G_{R_T NC}}{G_F{}^2} + \frac{2G_F R_{R_T}(G_F + G_{cor}) - R_{R_T}(G_F + G_{cor})^2}{G_F{}^2} \qquad \text{B.12}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial B_F} = \frac{2R_{R_T}}{G_F}(B_F + B_{cor}) \qquad \text{B.13}$$

donde

$$Y_F = G_F + jB_F \qquad \text{y} \qquad Y_{cor} = G_{cor} + jB_{cor}$$

Esta variación obtendrá su valor mínimo cuando la ecuación B.11 sea igual a cero, es decir cuando:

$$\frac{\partial F}{\partial G_F} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial B_F} = 0,$$

entonces de las ecuaciones B.12 y B.13:

$$G_F = \sqrt{\frac{G_{R_T NC}}{R_{R_T}} + G_{cor}{}^2} \qquad \text{B.14}$$

y $$B_F = -B_{cor} \qquad \text{B.15}$$

Por lo tanto, la admitancia de fuente conectada a la entrada del bipuerto ruidoso que provoque en él un factor de ruido mínimo será aquella cuyas partes real e imaginaria cumplan con las ecuaciones B.14 y B.15, es decir:

$$Y_{opt} = \sqrt{G_{cor}{}^2 + \frac{G_{R_T NC}}{R_{R_T}}} - jB_{cor} \qquad \text{B.16}$$

a la cual se le denomina como la admitancia de fuente *óptima* y es aquella para que el valor de F es mínimo.

De B.16

$$G_{opt} = \sqrt{G_{cor}{}^2 + \frac{G_{R_T NC}}{R_{R_T}}} \qquad \text{B.17}$$

$$B_{opt} = -B_{cor} \qquad \text{B.18}$$

Entonces de las ecuaciones B.17 y B.15

$$F_{\min}\Big|_{\substack{G_F = G_{opt} \\ B_F = B_{opt}}} = 1 + 2R_{R_T}(G_{opt} + G_{cor}) \qquad \text{B.19}$$

por lo tanto, $F_{\min}$ es el valor mínimo de F para el cual

$$Y_F = Y_{opt} = \sqrt{G_{cor}{}^2 + \frac{G_{R_T NC}}{R_{R_T}}} - jB_{cor} \qquad \text{B.19.1}$$

donde R_{R_T} es la resistencia equivalente de ruido asociada a la fuente de voltaje del modelo.

De la ecuación B.17

$$G_{R_T NC} = R_{R_T}(G_{opt}{}^2 - G_{cor}{}^2) \qquad \text{B.20}$$

Sustituyendo las ecuaciones B.18, B.19 y B.20 en la ecuación B.10.1

$$F = F_{\min} - 2R_{R_T}(G_{opt} + G_{cor}) + \frac{R_{R_T}(G_{opt}{}^2 - G_{cor}{}^2)}{G_F} + \frac{R_{R_T}(G_F + G_{cor})^2}{G_F} + \frac{R_{R_T}(B_F - B_{opt})^2}{G_F} =$$

$$= F_{\min} + \frac{R_{R_T}}{G_F}\left[(G_F - G_{opt})^2 + (B_F - B_{opt})^2\right] = F_{\min} + \frac{R_{R_T}}{G_F}\left|Y_F - Y_{opt}\right|^2 \qquad \text{B.21}$$

En resumen, como se observa en la ecuación B.10, el valor del *Factor de Ruido* depende de los siguientes parámetros:

R_{R_T} : resistencia asociada a la fuente de voltaje de ruido térmico V_{R_T}

$G_{R_T NC}$: conductancia asociada a la fuente de corriente no correlacionada $I_{R_T NC}$

Y_{cor} : admitancia de correlación.

Por otro lado, el *Factor de Ruido* en términos de *F_{min}*, ecuación B.21 está en términos de R_{R_T} .

APÉNDICE C. CONVERSIONES ENTRE MATRICES DE DIFERENTES PARÁMETROS PARA BIPUERTOS RUIDOSOS

De parámetros Z a parámetros ABCD

Considérese la siguiente ecuación la cual modela a los voltajes de un bipuerto ruidoso por medio de sus parámetros Z

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T 1} \\ V_{R_T 2} \end{bmatrix}$$

de la cual

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + V_{R_T 1} \qquad \text{C.1.1}$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + V_{R_T 2} \qquad \text{C.1.2}$$

De la ecuación A.1

$$V_1 = AV_2 - BI_2 + V_{R_T} \qquad \text{C.2.1}$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2 + I_{R_T} \qquad \text{C.2.2}$$

Despejando V_{R_T} de la ecuación C.2.1

$$V_{R_T} = V_1 - AV_2 + BI_2\,, \qquad \text{C.3}$$

Sustituyendo las ecuaciones C.1.1 y C.1.2 en la ecuación C.3 queda

$$\begin{aligned} V_{R_T} &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + V_{R_T 1} - A(Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + V_{R_T 2}) + BI_2 \\ &= I_1 (Z_{11} - AZ_{21}) + I_2 (Z_{12} - AZ_{22} + B) + V_{R_T 1} - AV_{R_T 2} \end{aligned} \qquad \text{C.4}$$

De la equivalencia entre parámetros Z y ABCD se tiene que:

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \text{C.5.1,} \qquad B = \frac{|Z|}{Z_{21}} \quad \text{C.5.2,}$$

$$C = \frac{1}{Z_{21}} \quad \text{C.5.3} \;\; \text{y} \qquad D = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \quad \text{C.5.4}$$

donde

$$|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$$

Sustituyendo C.5.1 y C.5.2 en C.4:

$$V_{R_T} = V_{R_{T1}} - V_{R_{T2}} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \qquad \text{C.6.1}$$

Sustituyendo la ecuación C.1.2 en la ecuación C.2.2 y solucionando para I_{R_T} ,

$$I_{R_T} = -\frac{1}{Z_{21}} V_{R_{T2}} \qquad \text{C.6.2}$$

Sustituyendo las ecuaciones C.5.1 a C.5.4, C.6.1 y C.6.2 en la ecuación A.1, la matriz de ruido en parámetros ABCD queda como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{|Z|}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} - V_{R_{T2}} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \\ -\frac{1}{Z_{21}} V_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad \text{C.6.3}$$

Relacionando a C.6.1 y a C.6.2 es posible establecer la ecuación de conversión de la matriz que modela a las fuentes de ruido térmico de un bipuerto en parámetros Z a su equivalente en parámetros ABCD como

$$\begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \\ 0 & -\frac{1}{Z_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad \text{C.6.4}$$

De parámetros ABCD a parámetros Z

Sustituyendo en las ecuaciones C.2.1 y C.2.2 las ecuaciones C.5.1, C.5.2 y C.5.3, C.5.4 respectivamente:

$$V_1 = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} V_2 - \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}} I_2 + V_{R_T} \qquad \text{C.7.1}$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_{21}} V_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} I_2 + I_{R_T} \qquad \text{C.7.2}$$

Sustituyendo C.7.1 y C.7.2 en C.1.1 y solucionando para $V_{R_{T1}}$

$$V_{R_{T1}} = V_{R_T} - Z_{11} I_{R_T} \qquad \text{C.8.1}$$

Sustituyendo C.7.2 en la ecuación C.1.2 y solucionando para $V_{R_{T2}}$

$$V_{R_{T2}} = -Z_{21} I_{R_T} \qquad \text{C.8.2}$$

Rescribiendo la ecuación matricial de parámetros Z esta queda como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T} - I_{R_T} \frac{A}{C} \\ -\frac{1}{C} I_{R_T} \end{bmatrix} \qquad \text{C.8.3}$$

donde

$$\Delta = AD - BC .$$

De las ecuaciones C.8.1, C.8.2 y C.8.3 se deduce que la ecuación de conversión de la matriz que modela a las fuentes de ruido de un bipuerto en parámetros ABCD a parámetros Z está dada por

$$\begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{A}{C} \\ 0 & -\dfrac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_{11} \\ 0 & -Z_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} \qquad \text{C.8.3.1}$$

De parámetros Y a parámetros ABCD

Considerando la ecuación que modela a un bipuerto ruidoso en parámetros Y

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_T1} \\ I_{R_T2} \end{bmatrix} \qquad \text{C.8.4}$$

de la cual se tiene que

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + I_{R_T1} \qquad \text{C.9.1}$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + I_{R_T2} \qquad \text{C.9.2}$$

$$A = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \quad \text{C.10.1,} \qquad B = \frac{-1}{Y_{21}} \quad \text{C.10.2,}$$

$$C = -\frac{|Y|}{Y_{21}} \quad \text{C.10.3} \qquad \text{y} \qquad D = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \quad \text{C.10.4}$$

Sustituyendo en las ecuaciones C.2.1 y C.2.2 las ecuaciones C.10.1, C.10.2 y C.10.3, C.10.4 respectivamente

$$V_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}V_2 + \frac{1}{Y_{21}}I_2 + V_{R_T} \qquad \text{C.11.1}$$

$$I_1 = -\frac{|Y|}{Y_{21}}V_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}I_2 + I_{R_T} \qquad \text{C.11.2}$$

donde

$$|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$$

Sustituyendo las ecuaciones C.9.1 y C.9.2 en la ecuación C.11.2 y solucionando para I_{R_T} se obtiene:

$$I_{R_T} = I_{R_{T1}} - \frac{Y_{11}}{Y_{21}} I_{R_{T2}} \qquad \text{C.12.1}$$

Sustituyendo la ecuación C.9.2 en la ecuación C.11.1 y solucionándola para V_{R_T}:

$$V_{R_T} = -\frac{I_{R_{T2}}}{Y_{21}} \qquad \text{C.12.2}$$

Rescribiendo la matriz de parámetros ABCD

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\dfrac{1}{Y_{21}} \\ -\dfrac{|Y|}{Y_{21}} & -\dfrac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{I_{R_{T2}}}{Y_{21}} \\ I_{R_{T1}} - \dfrac{Y_{11}}{Y_{21}} I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad \text{C.12.3}$$

De la ecuación C.12.3 se obtiene la ecuación de conversión de la matriz que modela a las fuentes de ruido de un bipuerto en parámetros Y a parámetros ABCD la cual está dada por

$$\begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{Y_{21}} \\ 1 & -\dfrac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad \text{C.12.4}$$

De parámetros ABCD a parámetros Y

Sustituyendo las ecuaciones C.11.1 y C.11.2 en la ecuación C.9.1 y solucionando para $I_{R_{T1}}$:

$$I_{R_{T1}} = I_{R_T} - Y_{11} V_{R_T} \qquad \text{C.13.1}$$

Sustituyendo la ecuación C.11.1 en la ecuación C.9.2 y solucionando para $I_{R_{T2}}$:

$$I_{R_{T2}} = -Y_{21} V_{R_T} \qquad \text{C.13.2}$$

Por lo tanto la matriz de parámetros Y

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{D}{B} & -\dfrac{\Delta}{B} \\ -\dfrac{1}{B} & \dfrac{A}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_T} - \dfrac{D}{B} V_{R_t} \\ \dfrac{1}{B} V_{R_T} \end{bmatrix} \qquad \text{C.13.3}$$

donde

$$\Delta = AD - BC\,.$$

y la ecuación que representa la conversión de las fuentes de ruido de un bipuerto de parámetros ABCD a parámetros Y está dada como

$$\begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{D}{B} & 1 \\ \dfrac{1}{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_t} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} \qquad \text{C.13.3.1}$$

De parámetros Z a parámetros Y

Considerando la siguiente ecuación la cual modela a un bipuerto ruidoso en parámetros Z:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T 1} \\ V_{R_T 2} \end{bmatrix} \qquad \text{C.13.4}$$

y representándola con variables matriciales de modo que quede de la forma:

$$\mathsf{V} = \mathsf{Z}\mathsf{I} + \mathsf{V}_{\mathsf{R_T}}\,;$$

donde

$$\mathsf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{V}_{\mathsf{R_T}} = \begin{bmatrix} V_{R_T 1} \\ V_{R_T 2} \end{bmatrix}$$

y solucionando para I:

$$\mathsf{I} = \mathsf{Z}^{-1}\mathsf{V} - \mathsf{Z}^{-1}\mathsf{V}_{\mathsf{R_T}}\,,$$

por lo tanto

$$\mathbf{I}_{R_T} = -\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{V}_{R_T} \qquad \text{C.14}$$

Ahora, desarrollando la ecuación C.14 para encontrar la ecuación para convertir de las fuentes de ruido de un bipuerto de parámetros Z a parámetros Y la cual estará dada como

$$\begin{bmatrix} I_{R_T 1} \\ I_{R_T 2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{|Z|}\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{R_T 1} \\ V_{R_T 2} \end{bmatrix} \qquad \text{C.15}$$

donde

$$I_{R_T 1} = -\frac{Z_{22}}{|Z|}V_{R_T 1} + \frac{Z_{12}}{|Z|}V_{R_T 2} \qquad \text{C.15.1}$$

$$I_{R_T 2} = \frac{Z_{21}}{|Z|}V_{R_T 1} - \frac{Z_{11}}{|Z|}V_{R_T 2} \qquad \text{C.15.2}$$

De parámetros Y a parámetros Z

Considerando la ecuación C.8.4 y representándola con variables matriciales de modo que quede de la forma

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V} + \mathbf{I}_{R_T}\ .$$

donde

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{R_T} = \begin{bmatrix} I_{R_T 1} \\ I_{R_T 2} \end{bmatrix}$$

y solucionando para $\mathbf{V}$ se tiene que

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I}_{R_T}\ ,$$

por lo tanto

$$\mathbf{V}_{R_T} = -\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I}_{R_T} \qquad \text{C.16}$$

Desarrollando la ecuación C.16 para encontrar la ecuación para convertir, de la representación matricial de las fuentes de ruido de un bipuerto en parámetros Y a parámetros Z, queda como

$$\begin{bmatrix} V_{R_T 1} \\ V_{R_T 2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{|Y|}\begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{R_T 1} \\ I_{R_T 2} \end{bmatrix} \qquad \text{C.17}$$

donde

$$V_{R_T 1} = -\frac{Y_{22}}{|Y|}I_{R_T 1} + \frac{Y_{12}}{|Y|}I_{R_T 2} \qquad \text{C.17.1}$$

$$V_{R_T 2} = \frac{Y_{21}}{|Y|}I_{R_T 1} - \frac{Y_{11}}{|Y|}I_{R_T 2} \qquad \text{C.17.2}$$

De parámetros Y a parámetros H

De la ecuación C.8.4 se tiene que

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + I_{R_T1} \qquad \text{C.18.1}$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + I_{R_T2} \qquad \text{C.18.2}$$

Despejando V_1 de la ecuación C.18.1

$$V_1 = \frac{1}{Y_{11}}I_1 - \frac{Y_{12}}{Y_{11}}V_2 - \frac{1}{Y_{11}}I_{R_{T1}} \qquad \text{C.19}$$

Sustituyendo C.19 en C.18.2 y ordenando la ecuación resultante

$$I_2 = \frac{Y_{21}}{Y_{11}}I_1 + \frac{\Delta Y}{Y_{11}}V_2 - \frac{Y_{21}}{Y_{11}}I_{R_{T1}} + I_{R_{T2}} \qquad \text{C.20}$$

por lo tanto se tiene

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{Y_{11}}I_{R_{T1}} \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{11}}I_{R_{T1}} + I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad \text{C.21}$$

Comparando la ecuación C.21 con la ecuación de un bipuerto ruidoso en parámetros H

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_TH} \\ I_{R_TH} \end{bmatrix} \qquad \text{C.21.1}$$

se tiene que:

$$V_{R_TH} = -\frac{1}{Y_{11}}I_{R_{T1}} = -H_{11}I_{R_{T1}} \qquad \text{C.22}$$

$$I_{R_TH} = -\frac{Y_{21}}{Y_{11}}I_{R_{T1}} + I_{R_{T2}} = -H_{21}I_{R_{T1}} + I_{R_{T2}} \qquad \text{C.23}$$

Por lo tanto, la ecuación para convertir, de la representación matricial de fuentes de ruido de un bipuerto en parámetros Y a parámetros H, queda como

$$\begin{bmatrix} V_{R_TH} \\ I_{R_TH} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Y_{11}} & 0 \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{11}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{11} & 0 \\ -H_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad \text{C.24}$$

ó

$$H_{R_T} = RY_{R_T} \qquad \text{C.25}$$

donde

$$H_{R_T} = \begin{bmatrix} V_{R_TH} \\ I_{R_TH} \end{bmatrix} \qquad \text{C.25.1}$$

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{Y_{11}} & 0 \\ -\frac{Y_{21}}{Y_{11}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{11} & 0 \\ -H_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{C.25.2}$$

$$Y_{R_T} = \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad \text{C.25.3}$$

De parámetros H a parámetros Y

De la ecuación C.21.1 se tiene

$$V_1 = H_{11}I_1 + H_{12}V_2 + V_{R_T H} \qquad \text{C.26.1}$$

$$I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}V_2 + I_{R_T H} \qquad \text{C.26.2}$$

Despejando I_1 de la ecuación C-26.1,

$$I_1 = \frac{1}{H_{11}}V_1 - \frac{H_{12}}{H_{11}}V_2 - \frac{1}{H_{11}}V_{R_T H} \qquad \text{C.27}$$

Sustituyendo C.27 en la ecuación C.26.2 y reordenando

$$I_2 = \frac{H_{21}}{H_{11}}V_1 + \frac{\Delta H}{H_{11}}V_2 - \frac{H_{21}}{H_{11}}V_{R_T H} + I_{R_T H} \qquad \text{C.28}$$

Relacionando las ecuaciones C.27 y C.28 en una expresión matricial queda la siguiente expresión

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{H_{11}} & -\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta H}{H_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_{11}}V_{R_T H} \\ -\frac{H_{21}}{H_{11}}V_{R_T H} + I_{R_T H} \end{bmatrix} \qquad \text{C.29}$$

y comparando la ecuación C.29 con la ecuación C.8.4 se tienen la siguientes expresiones para los términos de ruido

$$I_{R_T 1} = -\frac{1}{H_{11}}V_{R_T H} = -Y_{11}V_{R_T H} \qquad \text{C.30}$$

$$I_{R_T 2} = -\frac{H_{21}}{H_{11}}V_{R_T H} + I_{R_T H} = -Y_{21}V_{R_T H} + I_{R_T H} \qquad \text{C.31}$$

Por lo tanto la ecuación para convertir, de la representación matricial de fuentes de ruido de un bipuerto en parámetros H a parámetros Y, queda como

$$\begin{bmatrix} I_{R_T 1} \\ I_{R_T 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_{11}} & 0 \\ -\frac{H_{21}}{H_{11}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{11} & 0 \\ -Y_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T H} \\ I_{R_T H} \end{bmatrix} \qquad \text{C.32}$$

ó

$$Y_{R_T} = \tilde{N} H_{R_T} \qquad \text{C.33}$$

donde

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{H_{11}} & 0 \\ -\frac{H_{21}}{H_{11}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{11} & 0 \\ -Y_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{C.33.1}$$

y los términos H_{R_T} y Y_{R_T} están definidos por la ecuaciones C.25.1 y C.25.3 respectivamente.

APÉNDICE D. MATRICES DE CORRELACIÓN

La matriz de correlación de dos señales ruidosas R_1 y R_2 se define como:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 N_1^* & N_1 N_2^* \\ N_2 N_1^* & N_2 N_2^* \end{bmatrix} \quad \text{D.1}$$

donde N_1 es la transformada de Fourier de la señal R_1,
N_1* es el complejo conjugado de N_1,
N_2 es la transformada de Fourier de la señal R_2,
N_2* es el complejo conjugado de N_2.
Las propiedades de la matriz de correlación son las siguientes:

$$\mathrm{Im}\{C_{11}\} = \mathrm{Im}\{C_{22}\} = 0$$

$$C_{21} = C_{12}^*$$

D.1 Matrices de Correlación en sus diferentes representaciones

D.1.1 Representación en parámetros Y

La matriz de parámetros Y de un bipuerto ruidoso está dada por:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \quad \text{D.2}$$

La matriz de correlación está dada por

$$\overline{C}_Y = \overline{\begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix}^+} = \begin{bmatrix} \overline{I_{R_{T1}} I_{R_{T1}}^*} & \overline{I_{R_{T1}} I_{R_{T2}}^*} \\ \overline{I_{R_{T2}} I_{R_{T1}}^*} & \overline{I_{R_{T2}} I_{R_{T2}}^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Y\,11} & C_{Y\,12} \\ C_{Y\,21} & C_{Y\,22} \end{bmatrix} \quad \text{D.3}$$

donde

$\begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix}^+$ es la matriz conjugada transpuesta de la matriz $\begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix}$

$I_{R_{T1}}^*$ es el complejo conjugado de $I_{R_{T1}}$

De la ecuación D.3 se tiene que la matriz de correlación ruido en parámetros Y es igual a:

$$\overline{C}_Y = \begin{bmatrix} \overline{\left|I_{R_{T1}}\right|^2} & \overline{I_{R_{T1}} I_{R_{T2}}{}^*} \\ \overline{I_{R_{T2}} I_{R_{T1}}{}^*} & \overline{\left|I_{R_{T2}}\right|^2} \end{bmatrix} \qquad \text{D.4}$$

D.1.2 Representación en parámetros Z

La matriz de parámetros Z de un bipuerto ruidoso está dada por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix} \qquad \text{D.5}$$

La matriz de correlación está dada por

$$\overline{C}_Z = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix}^+} = \begin{bmatrix} \overline{V_{R_{T1}} V_{R_{T1}}{}^*} & \overline{V_{R_{T1}} V_{R_{T2}}{}^*} \\ \overline{V_{R_{T2}} V_{R_{T1}}{}^*} & \overline{V_{R_{T2}} V_{R_{T2}}{}^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Z_{11}} & C_{Z_{12}} \\ C_{Z_{21}} & C_{Z_{22}} \end{bmatrix} \qquad \text{D.6}$$

donde

$\begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix}^+$ es la matriz conjugada transpuesta de la matriz $\begin{bmatrix} V_{R_1} \\ V_{R_2} \end{bmatrix}$

$V_{R_{T1}}{}^*$ es el complejo conjugado de $V_{R_{T1}}$

De la ecuación D.6 la matriz de correlación en parámetros Y es igual a:

$$\overline{C}_Z = \begin{bmatrix} \overline{\left|V_{R_{T1}}\right|^2} & \overline{V_{R_{T1}} V_{R_{T2}}{}^*} \\ \overline{V_{R_{T2}} V_{R_{T1}}{}^*} & \overline{\left|V_{R_{T2}}\right|^2} \end{bmatrix} \qquad \text{D.7}$$

D.1.3 Representación en parámetros ABCD

La matriz de parámetros ABCD de un bipuerto ruidoso está dada por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \qquad \text{D.8}$$

La matriz de correlación está dada por

$$\overline{C}_A = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix}^+} = \begin{bmatrix} \overline{\left|V_{R_T}\right|^2} & \overline{V_{R_T} I_{R_T}{}^*} \\ \overline{I_{R_T} V_{R_T}{}^*} & \overline{\left|I_{R_T}\right|^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{A_{11}} & C_{A_{12}} \\ C_{A_{21}} & C_{A_{22}} \end{bmatrix} \qquad \text{D.9}$$

donde

$\begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix}^+$ es la matriz conjugada transpuesta de la matriz $\begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix}$

$V_{R_T}{}^*$ es el complejo conjugado de V_{R_T}

$I_{R_T}{}^*$ es el complejo conjugado de I_{R_T}

D.2 Representación del Factor de Ruido usando la matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD

Tomando en cuenta la solución planteada para I_{TOT} en la ecuación B.3 entonces

$$\overline{\left|I_{TOT}\right|^2} = \overline{\left(I_F - V_{R_T} Y_F - I_{R_T}\right)\left(I_F - V_{R_T} Y_F - I_{R_T}\right)^*} =$$
$$= \overline{\left(I_F - V_{R_T} Y_F - I_{R_T}\right)\left(I_F^* - V_{R_T}^* Y_F^* - I_{R_T}^*\right)}$$
$$= \overline{\left|I_F\right|^2} + \overline{\left|V_{R_T}\right|^2}\left|Y_F\right|^2 + \overline{\left|I_{R_T}\right|^2} + \overline{V_{R_T} I_{R_T}^*} Y_F + \overline{V_{R_T}^* I_{R_T}} Y_F^* \qquad \text{D.10}$$

donde

$$I_F V_{R_T}^* Y_F^* = I_{R_T}^* I_F = V_{R_T} Y_F I_F^* = I_{R_T} I_F^* = 0$$

ya que I_F no está correlacionada con V_{R_T} ni con I_{R_T}.

Considerando la definición del *Factor de Ruido* dada en la ecuación B.4 y sustituyendo en esta la ecuación D.10 se obtiene que el F es igual a

$$F = \frac{\overline{\left|I_F\right|^2} + \overline{\left|V_{R_T}\right|^2}\left|Y_F\right|^2 + \overline{\left|I_{R_T}\right|^2} + \overline{V_{R_T} I_{R_T}^*} Y_F + \overline{V_{R_T}^* I_{R_T}} Y_F^*}{\overline{\left|I_F\right|^2}} \qquad \text{D.11}$$

y aplicando la definición de la matriz de correlación de ruido, C_A, dada en la ecuación D.9 se llega a que el *Factor de Ruido* es igual a

$$F = 1 + \frac{C_{A_{11}}\left|Y_F\right|^2 + C_{A_{22}} + C_{A_{12}} Y_F + C_{A_{21}} Y_F^*}{\overline{\left|I_F\right|^2}} \qquad \text{D.12}$$

La ecuación D.12 puede escribirse también de la forma

$$F = 1 + \frac{\begin{bmatrix} Y_F & 1 \end{bmatrix} \overline{C}_A \begin{bmatrix} Y_F^* \\ 1 \end{bmatrix}}{\overline{\left|I_F\right|^2}} \qquad \text{D.13}$$

Sustituyendo la ecuación B.8,

$$F = 1 + \frac{\begin{bmatrix} Y_F & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{A_{11}} & C_{A_{12}} \\ C_{A_{21}} & C_{A_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_F^* \\ 1 \end{bmatrix}}{4KT_0 G_F B} \qquad \text{D.14}$$

Por otro lado, de la ecuación A.3.2

$$\left|I_{R_T}\right|^2 = \left(I_{R_T NC} + Y_{cor} V_{R_T}\right)\left(I_{R_T NC} + Y_{cor} V_{R_T}\right)^* = \left|I_{R_T NC}\right|^2 + \left|Y_{cor}\right|^2 \left|V_{R_T}\right|^2 \qquad \text{D.15}$$

$$V_{R_T} I_{R_T}^* = V_{R_T}\left(I_{R_T NC} + Y_{cor} V_{R_T}\right)^* = Y_{cor}^* \left|V_{R_T}\right|^2 \qquad \text{D.16}$$

$$V_{R_T}^* I_{R_T} = V_{R_T}^*\left(I_{R_T NC} + Y_{cor} V_{R_T}\right) = Y_{cor}\left|V_{R_T}\right|^2 \qquad \text{D.17}$$

De las ecuaciones D.16, D.17 y A.4.1

$$\overline{V_{R_T} I_{R_T}^*} = Y_{cor}^* \overline{\left|V_{R_T}\right|^2} = Y_{cor}^* 4KBT_0 R_{R_T} \qquad \text{D.18}$$

$$\overline{V_{R_T}^* I_{R_T}} = Y_{cor} \overline{\left|V_{R_T}\right|^2} = Y_{cor} 4KBT_0 R_{R_T} \qquad \text{D.19}$$

De la ecuación D.15 y sustituyendo las ecuaciones A.4.1 y A.4.2

$$\overline{\left|I_{R_T}\right|^2} = 4KBT_0 G_{R_T NC} + \left|Y_{cor}\right|^2 4KBT_0 R_{R_T} \qquad \text{D.20}$$

Sustituyendo las ecuaciones A.4.1, A.4.2, D.18 y D.20 en D.9

$$\overline{C}_A = \begin{bmatrix} R_{R_T} & Y_{cor}^* R_{R_T} \\ Y_{cor} R_{R_T} & G_{R_T NC} + R_{R_T}\left|Y_{cor}\right|^2 \end{bmatrix} \qquad \text{D.21}$$

y cuyo determinante es igual a:

$$\Delta = R_{R_T} G_{R_T NC}$$

Del la ecuación B.19.1 se deduce que la magnitud al cuadrado de Y_{opt} es igual a

$$\left|Y_{opt}\right|^2 = G_{cor}{}^2 + \frac{G_{R_T NC}}{R_{R_T}} + B_{cor}{}^2 = \left|Y_{cor}\right|^2 + \frac{G_{R_T NC}}{R_{R_T}}$$

de donde

$$R_{R_T}\left|Y_{opt}\right|^2 = G_{R_T NC} + R_{R_T}\left|Y_{cor}\right|^2 \qquad \text{D.22}$$

Ahora, por otro lado, de la ecuación B.19 se puede deducir que

$$R_{R_T} G_{cor} = \frac{F_{\min} - 1}{2} - R_{R_T} G_{opt}$$

expresión que es equivalente a la siguiente ecuación

$$R_{R_T} Y_{cor} = \frac{F_{\min} - 1}{2} - R_{R_T}\left(G_{opt} - jB_{cor}\right) \qquad \text{D.23}$$

Sustituyendo la ecuación B.18 en la ecuación D.23 se obtiene que

$$R_{R_T} Y_{cor} = \frac{F_{\min} - 1}{2} - R_{R_T}\left(G_{opt} + jB_{opt}\right)$$

$$R_{R_T} Y_{cor} = \frac{F_{\min} - 1}{2} - R_{R_T} Y_{opt} \qquad \text{D.24}$$

entonces tomando en cuenta lo establecido en la ecuación D.21 se tiene que

$$C_{A_{21}} = \frac{F_{\min} - 1}{2} - R_{R_T} Y_{opt} \qquad \text{D.24.1}$$

Por similitud

$$R_{R_T} Y_{cor}{}^* = \frac{F_{\min} - 1}{2} - R_{R_T} Y_{opt}{}^* \qquad \text{D.25}$$

y por lo tanto

$$C_{A_{12}} = \frac{F_{\min} - 1}{2} - R_{R_T} Y_{opt}{}^* \qquad \text{D.25.1}$$

De la ecuación B.19.1,

$$\left|Y_{opt}\right|^2 = G_{cor}{}^2 + \frac{G_{R_T NC}}{R_{R_T}} + B_{cor}{}^2$$

$$= \left|Y_{cor}\right|^2 + \frac{G_{R_T NC}}{R_{R_T}}$$

multiplicando ambos lados por R_{R_T} queda de la forma

$$R_{R_T}\left|Y_{opt}\right|^2 = G_{R_T NC} + R_{R_T}\left|Y_{cor}\right|^2 \qquad \text{D.26}$$

Sustituyendo las ecuaciones D.24.1, D.25.1 y D.26 en la ecuación D.21

$$\overline{C}_A = \begin{bmatrix} R_{R_T} & \dfrac{F_{\min} - 1}{2} - R_{R_T} Y_{opt}{}^* \\ \dfrac{F_{\min} - 1}{2} - R_{R_T} Y_{opt} & R_{R_T}\left|Y_{opt}\right|^2 \end{bmatrix} \qquad \text{D.27}$$

por lo tanto

$$C_{A_{11}} = R_{R_T} \qquad \text{D.27.1}$$

$$C_{A_{12}} = \left[\frac{1}{2}\left(F_{\min} - 1\right) - R_{R_T} Y_{opt}{}^*\right] \qquad \text{D.27.2}$$

$$C_{A_{21}} = \left[\frac{1}{2}\left(F_{\min} - 1\right) - R_{R_T} Y_{opt}\right] \qquad \text{D.27.3}$$

$$C_{A_{22}} = R_{R_T} \left|Y_{opt}\right|^2 \qquad \text{D.27.4}$$

Los parámetros de ruido en función de los elementos de la matriz de correlación C_A de la ecuación D.27 están dados por las ecuaciones

$$R_{R_T} = C_{A_{11}} \qquad \text{D.28}$$

$$B_{opt} = \frac{\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}}{C_{A_{11}}} = \frac{-\mathrm{Im}\{C_{A_{21}}\}}{C_{A_{11}}} \qquad \text{D.29}$$

$$G_{opt} = \sqrt{\frac{C_{A_{22}}}{C_{A_{11}}} - \left[\frac{\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}}{C_{A_{11}}}\right]^2} \qquad \text{D.30}$$

donde

$$\frac{C_{A_{22}}}{C_{A_{11}}} \geq \left[\frac{\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}}{C_{A_{11}}}\right]^2$$

puesto que se debe cumplir que

$$G_{opt} \geq 0$$

De la ecuación D.27

$$C_{A_{12}} + C_{A_{21}} = F_{\min} - 1 - 2R_{R_T} G_{opt}$$

$$F_{\min} = C_{A_{12}} + C_{A_{21}} + 2R_{R_T} G_{opt} + 1 \qquad \text{D.31}$$

De la ecuación D.27.2

$$\mathrm{Re}\{C_{A_{12}}\} = \frac{1}{2}\left(F_{\min} - 1\right) - R_{R_T} G_{opt}$$

$$F_{\min} = 2\left\lfloor \mathrm{Re}\{C_{A_{12}}\} + R_{R_T} G_{opt} \right\rfloor + 1$$

$$= 2R_{R_T} G_{opt} + 2\,\mathrm{Re}\{C_{A_{12}}\} + 1 \qquad \text{D.32}$$

Sustituyendo la ecuación D.30 en D.32

$$F_{\min} = 2R_{R_T} \sqrt{\frac{C_{A_{22}}}{C_{A_{11}}} - \left[\frac{\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}}{C_{A_{11}}}\right]^2} + 2\,\mathrm{Re}\{C_{A_{12}}\} + 1 \qquad \text{D.33}$$

De la ecuación D.27.1

$$2R_{R_T} = 2C_{A_{11}},$$

que sustituida en la ecuación D.33 da como resultado la siguiente ecuación para $F_{\min}$

$$F_{\min} = 2C_{A_{11}} \sqrt{\frac{C_{A_{22}}}{C_{A_{11}}} - \left[\frac{\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}}{C_{A_{11}}}\right]^2} + 2\,\mathrm{Re}\{C_{A_{12}}\} + 1$$

$$= 1 + 2\left[\mathrm{Re}\{C_{A_{12}}\} + \sqrt{C_{A_{22}} C_{A_{11}} - \left(\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}\right)^2}\right] \qquad \text{D.34}$$

En resumen, los elementos de la matriz de correlación de ruido C_A en función de los parámetros de ruido están definidos por las siguientes ecuaciones

$$C_{A_{11}} = R_{R_T} \qquad\qquad C_{A_{12}} = \left[\frac{1}{2}\left(F_{\min} - 1\right) - R_{R_T} Y_{opt}{}^{*}\right]$$

$$C_{A_{21}} = \left[\frac{1}{2}\left(F_{\min} - 1\right) - R_{R_T} Y_{opt}\right] \qquad\qquad C_{A_{22}} = R_{R_T} \left|Y_{opt}\right|^2$$

Por otro lado, los parámetros de ruido en función de los elementos de la matriz de correlación de ruido están definidos por las ecuaciones:

$$R_{R_T} = C_{A_{11}}$$

$$B_{opt} = \frac{\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}}{C_{A_{11}}} = \frac{-\mathrm{Im}\{C_{A_{21}}\}}{C_{A_{11}}}$$

$$G_{opt} = \sqrt{\frac{C_{A_{22}}}{C_{A_{11}}} - \left[\frac{\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}}{C_{A_{11}}}\right]^2}$$

$$F_{\min} = 1 + 2\left[\mathrm{Re}\{C_{A_{12}}\} + \sqrt{C_{A_{22}} C_{A_{11}} - \left(\mathrm{Im}\{C_{A_{12}}\}\right)^2}\right]$$

APÉNDICE E. CONEXIONES DE BIPUERTOS CON RUIDO

E.1 Conexión de bipuertos en serie

En el circuito de la figura E.1 se presentan dos bipuertos sin ruido de parámetros Z conectados cada uno en cascada con bipuertos ruidosos modelados por las fuentes de ruido V_{R_T1}, I_{R_T1} y V_{R_T2}, I_{R_T2} sucesivamente. Las ecuaciones que modelan a este circuito son las siguientes:

$$I_1 = I_{A1} + I_{R_T1} \qquad \text{E.1}$$

$$I_2 = I_{B2} = I_{A2} \qquad \text{E.2}$$

$$I_1 = I_{B1} + I_{R_T2} \qquad \text{E.3}$$

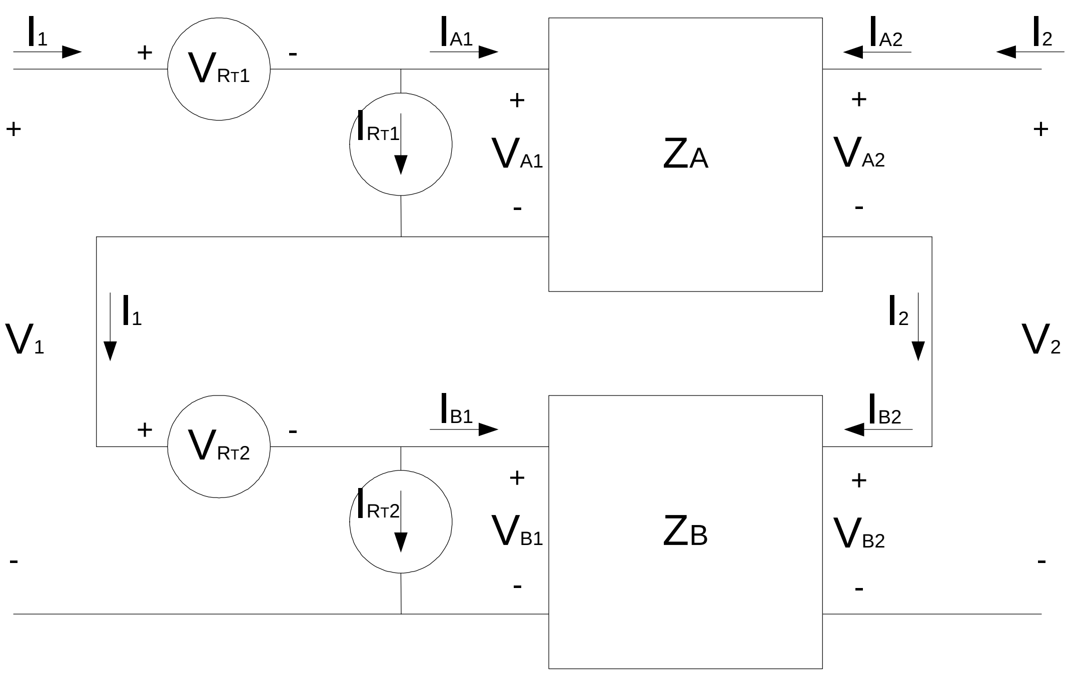


Figura E.1 Conexión de bipuertos con ruido en serie.

$$V_1 = V_{R_t 1} + V_{A1} + V_{R_T 2} + V_{B1} \qquad \text{E.4}$$

$$V_2 = V_{A2} + V_{B2} \qquad \text{E.5}$$

$$Z_T = Z_A + Z_B \qquad \text{E.6}$$

$$V_{A1} = Z_{A11} I_{A1} + Z_{A12} I_{A2} \qquad \text{E.7}$$

$$V_{B1} = Z_{B11} I_{B1} + Z_{B12} I_{B2} \qquad \text{E.8}$$

Despejando I_{A1} de la ecuación E.1, sustituyendo este resultado y la ecuación E.2 en la ecuación E.7 se obtiene

$$V_{A1} = Z_{A11}\left(I_1 - I_{R_T 1}\right) + Z_{A12} I_2 \qquad \text{E.9}$$

Despejando I_{B1} de la ecuación E.3, sustituyendo este resultado y la ecuación E.2 en la ecuación E.8 se obtiene

$$V_{B1} = Z_{B11}\left(I_1 - I_{R_T 2}\right) + Z_{B12} I_2 \qquad \text{E.10}$$

Sustituyendo las ecuaciones E.9 y E.10 en la ecuación E.4

$$V_1 = V_{R_t 1} + V_{R_T 2} + Z_{A11}\left(I_1 - I_{R_T 1}\right) + Z_{A12} I_2 + Z_{B11}\left(I_1 - I_{R_T 2}\right) + Z_{B12} I_2 \qquad \text{E.11}$$

Por otro lado:

$$V_{A2} = Z_{A21} I_{A1} + Z_{A22} I_{A2} \qquad \text{E.12}$$

$$V_{B2} = Z_{B21} I_{B1} + Z_{B22} I_{B2} \qquad \text{E.13}$$

Sustituyendo el valor de I_{A1} despejado de la ecuación E.1 así como la ecuación E.2 en la ecuación E.12

$$V_{A2} = Z_{A21}\left(I_1 - I_{R_T 1}\right) + Z_{A22} I_2 \qquad \text{E.14}$$

y haciendo operaciones similares con las ecuaciones E.3 y E.2 sobre la ecuación E.13

$$V_{B2} = Z_{B21}\left(I_1 - I_{R_T 2}\right) + Z_{B22} I_2 \qquad \text{E.15}$$

Sustituyendo E.14 y E.15 en la ecuación E.5

$$V_2 = Z_{A21}\left(I_1 - I_{R_T 1}\right) + Z_{A22} I_2 + Z_{B21}\left(I_1 - I_{R_T 2}\right) + Z_{B22} I_2 \qquad \text{E.16}$$

Ordenando las ecuaciones E.11 y E.16 y poniéndolas en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{A11} + Z_{B11} & Z_{A12} + Z_{B12} \\ Z_{A21} + Z_{B21} & Z_{A22} + Z_{B22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T 1} - Z_{A11} I_{R_T 1} \\ - Z_{A21} I_{R_T 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T 2} - Z_{B11} I_{R_T 2} \\ - Z_{B21} I_{R_T 2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} Z_{A11} & Z_{A12} \\ Z_{A21} & Z_{A22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{B11} & Z_{B12} \\ Z_{B21} & Z_{B22} \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T 1} - Z_{A11} I_{R_T 1} \\ - Z_{A21} I_{R_T 1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T 2} - Z_{B11} I_{R_T 2} \\ - Z_{B21} I_{R_T 2} \end{bmatrix} \qquad \text{E.17}$$

El circuito que modela a la ecuación E.17 se presenta en la figura E.2 a).

Comparando las ecuaciones A.5, C.8.1 y C.8.2 con la ecuación E.17 se puede concluir que

$$V_{R_T A1} = V_{R_T 1} - Z_{A11} I_{R_T 1} \qquad \text{E.18.1} \qquad V_{R_T A2} = -Z_{A21} I_{R_T 1} \qquad \text{E.18.2}$$

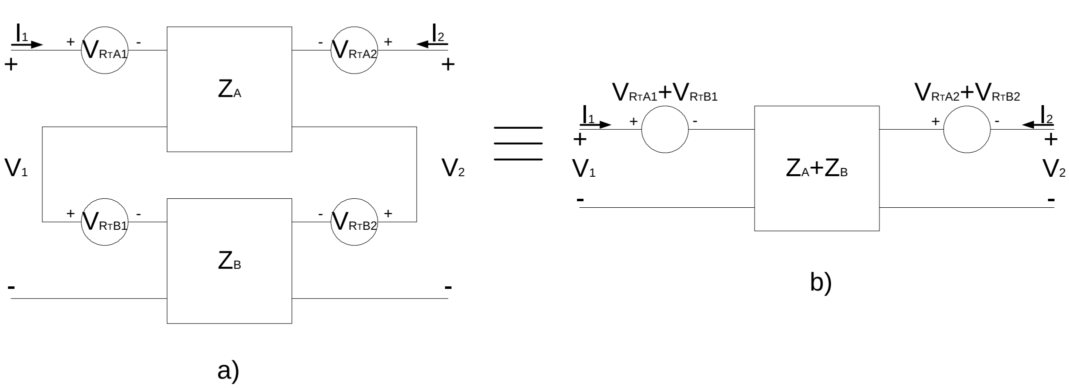


Figura E.2 Circuitos equivalentes de bipuertos con ruido conectados en serie.

Por lo tanto sustituyendo las ecuaciones E.18 y E.19 en la ecuación E.17, y rescribiéndola se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Z_A + Z_B] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T A1} + V_{R_T B1} \\ V_{R_T A2} + V_{R_T B2} \end{bmatrix} \qquad \text{E.20}$$

ó

$$V_T = Z_T I_T + V_{R_T T} \qquad \text{E.21}$$

donde

$$V_{R_T T} = V_{R_T A} + V_{R_T B} \qquad \text{E.22}$$

El circuito que al que modela la ecuación E.20 se presenta en la figura E.2 b).

Retomando la ecuación D.6 que también se puede escribir como

$$\overline{C}_Z = \overline{V_{R_T T} V_{R_T T}^{+}} = \begin{bmatrix} V_{R_T A1} + V_{R_T B1} \\ V_{R_T A2} + V_{R_T B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T A1}^{*} + V_{R_T B1}^{*} & V_{R_T A2}^{*} + V_{R_T B2}^{*} \end{bmatrix} \qquad \text{E.23}$$

donde los términos $V_{R_T A1}$ y $V_{R_T A2}$ están correlacionadas entre sí al igual que $V_{R_T B1}$ y $V_{R_T B2}$, pero no entre $V_{R_T A}$'s y $V_{R_T B}$'s, entonces la ecuación E.23 queda como sigue

$$\overline{C}_Z = \begin{bmatrix} V_{R_T A1} V_{R_T A1}^{*} + V_{R_T B1} V_{R_T B1}^{*} & V_{R_T A1} V_{R_T A2}^{*} + V_{R_T B1} V_{R_T B2}^{*} \\ V_{R_T A2} V_{R_T A1}^{*} + V_{R_T B2} V_{R_T B1}^{*} & V_{R_T A2} V_{R_T A2}^{*} + V_{R_T B2} V_{R_T B2}^{*} \end{bmatrix} = \overline{C}_{ZA} + \overline{C}_{ZB}$$

Por lo tanto

$$\overline{C}_{ZT} = \overline{C}_{ZA} + \overline{C}_{ZB} \qquad \text{E.24}$$

E.2. Conexión de bipuertos en paralelo

A continuación se presentan las ecuaciones que modelan al circuito de la figura E.3:

$$V_1 = V_{R_T 1} + V_{A1} = V_{R_T 2} + V_{B1} \qquad \text{E.25}$$

$$V_2 = V_{A2} = V_{B2} \qquad \text{E.26}$$

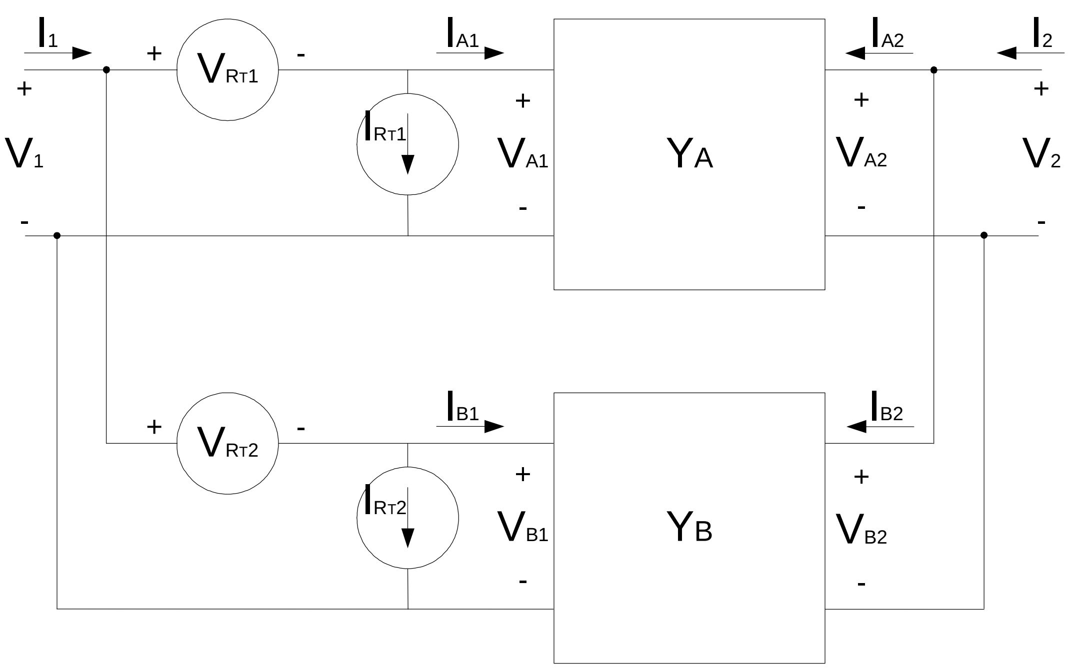


Figura E.3 Bipuertos con ruido conectados en paralelo.

$$I_1 = I_{R_T1} + I_{R_T2} + I_{A1} + I_{B1} \qquad \text{E.27}$$

$$I_2 = I_{A2} + I_{B2} \qquad \text{E.28}$$

$$I_{A1} = Y_{A11}V_{A1} + Y_{A12}V_{A2} \qquad \text{E.29}$$

$$I_{A2} = Y_{A21}V_{A1} + Y_{A22}V_{A2} \qquad \text{E.30}$$

$$I_{B1} = Y_{B11}V_{B1} + Y_{B12}V_{B2} \qquad \text{E.31}$$

$$I_{B2} = Y_{B21}V_{B1} + Y_{B22}V_{B2} \qquad \text{E.32}$$

Despejando V_{A1} de la ecuación E.25

$$V_{A1} = V_1 - V_{R_T1} \qquad \text{E.33}$$

Sustituyendo las ecuaciones E.33 y E.26 en E.29

$$I_{A1} = Y_{A11}\left(V_1 - V_{R_T1}\right) + Y_{A12}V_2 \qquad \text{E.34}$$

Por similitud para E.31

$$I_{B1} = Y_{B11}\left(V_1 - V_{R_T2}\right) + Y_{B12}V_2 \qquad \text{E.35}$$

Sustituyendo E.34 y E.35 en E.27

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{R_T1} + I_{R_T2} + Y_{A11}\left(V_1 - V_{R_T1}\right) + Y_{A12}V_2 + Y_{B11}\left(V_1 - V_{R_T2}\right) + Y_{B12}V_2 \\ &= V_1\left(Y_{A11} + Y_{B11}\right) + V_2\left(Y_{A12} + Y_{B12}\right) + I_{R_T1} - V_{R_T1}Y_{A11} + I_{R_T2} - V_{R_T2}Y_{B11} \end{aligned} \qquad \text{E.36}$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación E.33 así como el valor de V_{A2} de la ecuación E.26 en la ecuación E.30 se tiene

$$I_{A2} = Y_{A21}\left(V_1 - V_{R_T1}\right) + Y_{A22}V_2 \qquad \text{E.37}$$

De la ecuación E.25

$$V_{B1} = V_1 - V_{R_T2} \qquad \text{E.38}$$

Sustituyendo las ecuaciones E.38 y E.22 en la ecuación E.32

$$I_{B2} = Y_{B21}\left(V_1 - V_{R_T2}\right) + Y_{B22}V_2 \qquad \text{E.39}$$

Sustituyendo E.37 y E.39 en E.28

$$\begin{aligned} I_2 &= Y_{A21}\left(V_1 - V_{R_T1}\right) + Y_{A22}V_2 + Y_{B21}\left(V_1 - V_{R_T2}\right) + Y_{B22}V_2 \\ &= V_1\left(Y_{A21} + Y_{B21}\right) + V_2\left(Y_{A22} + Y_{B22}\right) - V_{R_T1}Y_{A21} - V_{R_T2}Y_{B21} \end{aligned} \qquad \text{E.40}$$

Expresando matricialmente las ecuaciones E.36 y E.40

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_{A11} + Y_{B11} & Y_{A12} + Y_{B12} \\ Y_{A21} + Y_{B21} & Y_{A22} + Y_{B22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_T1} - Y_{A11}V_{R_T1} \\ -Y_{A21}V_{R_T1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_T2} - Y_{B11}V_{R_T2} \\ -Y_{B21}V_{R_T2} \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{bmatrix} Y_{A11} & Y_{A12} \\ Y_{A21} & Y_{A22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{B11} & Y_{B12} \\ Y_{B21} & Y_{B22} \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_T1} - Y_{A11}V_{R_T1} \\ -Y_{A21}V_{R_T1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_T2} - Y_{B11}V_{R_T2} \\ -Y_{B21}V_{R_T2} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \text{E.41}$$

El circuito modelo de la ecuación E.41 se muestra en la figura E.4 a).

Comparando las ecuaciones A.6, E-13.1 y E-13.2 con E.41 se tiene que

$$I_{R_TA1} = I_{R_T1} - Y_{A11}V_{R_T1} \qquad \text{E.42.1} \qquad\qquad I_{R_TA2} = -Y_{A21}V_{R_T1} \qquad \text{E.42.2}$$

$$I_{R_TB1} = I_{R_T2} - Y_{B11}V_{R_T2} \qquad \text{E.43.1} \qquad\qquad I_{R_TB2} = -Y_{B21}V_{R_T2} \qquad \text{E.43.2}$$

Rescribiendo la ecuación E.41

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \left[Y_A + Y_B\right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_TA1} + I_{R_TB1} \\ I_{R_TA2} + I_{R_TB2} \end{bmatrix} \qquad \text{E.44}$$

que también se puede representar por la ecuación

$$I_T = Y_T V_T + I_{R_TT} \qquad \text{E.45}$$

donde

$$I_{R_TT} = I_{R_TA} + I_{R_TB} \qquad \text{E.46}$$

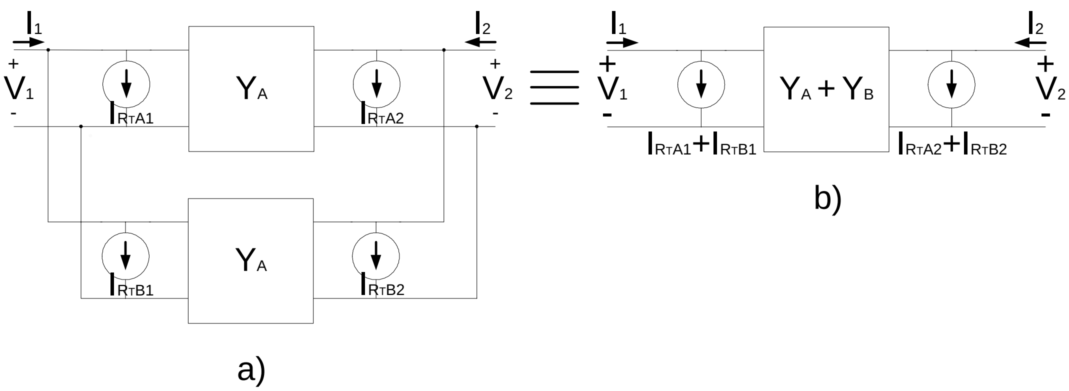


Figura E.4 Circuito equivalente para bipuertos conectados en paralelo.

El circuito modelado por la ecuación E.44 se presenta en la figura E.4 b).

Por otro la ecuación D.3 se puede escribir como

$$\overline{C}_Y = \overline{I_{R_T T}}\,\overline{I_{R_T T}}^{+} = \begin{bmatrix} I_{R_T A1} + I_{R_T B1} \\ I_{R_T A2} + I_{R_T B2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_T A1}^{*} + I_{R_T B1}^{*} & I_{R_T A2}^{*} + I_{R_T B2}^{*} \end{bmatrix} \qquad \text{E.47}$$

Por similitud con la ecuación E.23

$$\overline{C}_Y = \begin{bmatrix} I_{R_T A1} I_{R_T A1}^{*} + I_{R_T B1} I_{R_T B1}^{*} & I_{R_T A1} I_{R_T A2}^{*} + I_{R_T B1} I_{R_T B2}^{*} \\ I_{R_T A2} I_{R_T A1}^{*} + I_{R_T B2} I_{R_T B1}^{*} & I_{R_T A2} I_{R_T A2}^{*} + I_{R_T B2} I_{R_T B2}^{*} \end{bmatrix} = \overline{C}_{YA} + \overline{C}_{YB} \qquad \text{E.48}$$

es decir

$$\overline{C}_{YT} = \overline{C}_{YA} + \overline{C}_{YB} \qquad \text{E.49}$$

E.3. Conexión de bipuertos en cascada

Las ecuaciones que modelan al circuito presentado en la figura E.5 a) son las siguientes:

$$V_1 = V_{R_T A} + V_{A1} \qquad \text{E.50}$$

$$I_1 = I_{R_T A} + I_{A1} \qquad \text{E.51}$$

$$V_{A2} = V_{R_T B} + V_{B1} \qquad \text{E.52}$$

$$I_{A2} = I_{R_T B} + I_{B1} \qquad \text{E.53}$$

$$I_2 = I_{B2} \qquad \text{E.54}$$

$$V_2 = V_{B2} \qquad \text{E.55}$$

$$V_{A1} = A_A V_{A2} + B_A I_{A2} \qquad \text{E.56}$$

$$I_{A1} = C_A V_{A2} + D_A I_{A2} \qquad \text{E.57}$$

$$V_{B1} = A_B V_{B2} + B_B I_{B2} \qquad \text{E.58}$$

$$I_{B1} = C_B V_{B2} + D_B I_{B2} \qquad \text{E.59}$$

Sustituyendo la ecuación E.56 en la ecuación E.50

$$V_1 = V_{R_T A} + A_A V_{A2} + B_A I_{A2} \qquad \text{E.60}$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación E.57 en la ecuación E.51

$$I_1 = I_{R_T A} + C_A V_{A2} + D_A I_{A2} \qquad \text{E.61}$$

y ahora sustituyendo las ecuaciones E.52 y E.53 en E.60 y E.61 se obtiene

$$V_1 = V_{R_T A} + A_A\left(V_{R_T B} + V_{B1}\right) + B_A\left(I_{R_T B} + I_{B1}\right) \qquad \text{E.62.1}$$

$$I_1 = I_{R_T A} + C_A\left(V_{R_T B} + V_{B1}\right) + D_A\left(I_{R_T B} + I_{B1}\right) \qquad \text{E.62.2}$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones E.54 y E.55 en las ecuaciones E.58 y E.59

$$V_{B1} = A_B V_2 + B_B I_2 \qquad \text{E.63.1}$$

$$I_{B1} = C_B V_2 + D_B I_2 \qquad \text{E.63.2}$$

Sustituyendo las ecuaciones E.63 en las ecuaciones E.62, desarrollando y ordenando las ecuaciones resultantes

$$V_1 = V_2\left(A_A A_B + B_A C_B\right) + I_2\left(A_A A_B + B_A D_B\right) + V_{R_T A} + A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \qquad \text{E.64.1}$$

$$I_1 = V_2\left(C_A A_B + D_A C_B\right) + I_2\left(C_A B_B + D_A D_B\right) + C_A V_{R_T B} + I_{R_T A} + D_A I_{R_T B} \qquad \text{E.64.2}$$

Entonces la forma matricial de las ecuaciones E.64 estará dada por

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A A_B + B_A C_B & A_A A_B + B_A D_B \\ C_A A_B + D_A C_B & C_A B_B + D_A D_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T A} + A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ C_A V_{R_T B} + I_{R_T A} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_B & B_B \\ C_B & D_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T A} + A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ C_A V_{R_T B} + I_{R_T A} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix} \qquad \text{E.65}$$

Por otro lado, las ecuaciones que modelan al circuito de la figura E.5 b) son las siguientes:

$$V_1 = V_{R_T} + V_{A1} \qquad \text{E.66}$$

$$I_1 = I_{R_T} + I_{A1} \qquad \text{E.67}$$

$$I_{A2} = I_{B1} \qquad \text{E.68}$$

$$V_{A2} = V_{B1} \qquad \text{E.69}$$

$$I_2 = I_{B2} \qquad \text{E.70}$$

$$V_2 = V_{B2} \qquad \text{E.71}$$

$$V_{A1} = A_A V_{A2} + B_A I_{A2} \qquad \text{E.72}$$

$$I_{A1} = C_A V_{A2} + D_A I_{A2} \qquad \text{E.73}$$

$$V_{B1} = A_B V_{B2} + B_B I_{B2} \qquad \text{E.74}$$

$$I_{B1} = C_B V_{B2} + D_B I_{B2} \qquad \text{E.75}$$

De las ecuaciones E.69, E.74, E.70 y E.71

$$V_{A2} = A_B V_2 + B_B I_2 \qquad \text{E.76.1}$$

y de las ecuaciones E.68, E.75, E.70 y E.71

$$I_{A2} = C_B V_2 + D_B I_2 \qquad \text{E.76.2}$$

Sustituyendo la ecuación E.72 en la ecuación E.66 y posteriormente las ecuaciones E.76.1 y E.76.2 se tiene

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{R_T} + \left[A_A\left(A_B V_2 + B_B I_2\right) + B_A\left(C_B V_2 + D_B I_2\right)\right] \\ &= V_{R_T} + V_2\left(A_A A_B + B_A C_B\right) + I_2\left(A_A B_B + B_A D_B\right) \qquad \text{E.77.1} \end{aligned}$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación E.73 en la ecuación E.67, así como las ecuaciones E.76 se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{R_T} + \left[C_A\left(A_B V_2 + B_B I_2\right) + D_A\left(C_B V_2 + D_B I_2\right)\right] \\ &= I_{R_T} + V_2\left(C_A A_B + D_A C_B\right) + I_2\left(C_A B_B + D_A D_B\right) \qquad \text{E.77.2} \end{aligned}$$

Matricialmente las ecuaciones E.77 están dadas por

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A A_B + B_A C_B & A_A B_B + B_A D_B \\ C_A A_B + D_A C_B & C_A B_B + D_A D_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_B & B_B \\ C_B & D_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T} \\ I_{R_T} \end{bmatrix} \qquad \text{E.78}$$

Comparando la ecuación E.78 con la ecuación E.65 es posible plantear que:

$$V_{R_T} = V_{R_T A} + A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \qquad \text{E.79.1}$$

$$I_{R_T} = I_{R_T A} + C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \qquad \text{E.79.2}$$

por lo tanto asumiendo lo anterior, los circuitos de la figura E.5 son equivalentes entre sí y de modo simplificado

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [ABCD_A] \times [ABCD_B] \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T T} \\ I_{R_T T} \end{bmatrix} \qquad \text{E.80}$$

donde

$$\begin{bmatrix} V_{R_T T} \\ I_{R_T T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{R_T A} + A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ I_{R_T A} + C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix} \qquad \text{E.81}$$

Comparando la ecuación E.81 con la ecuación D.9 es posible escribir que

$$\overline{C}_{AT} = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_T T} \\ I_{R_T T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T T} \\ I_{R_T T} \end{bmatrix}^{+}} \qquad \text{E.82}$$

La ecuación E.81 también se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} V_{R_T T} \\ I_{R_T T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix} \qquad \text{E.83}$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} V_{R_T T} \\ I_{R_T T} \end{bmatrix}^{+} = \left(\begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix} \right)^{+} \qquad \text{E.84}$$

entonces, de las ecuaciones E.83 y E.84

$$\overline{C}_{AT} = \left(\begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix}^{+} + \begin{bmatrix} A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix}^{+} \right) \qquad \text{E.85}$$

Las fuentes $V_{R_T A}$ y $I_{R_T A}$ están correlacionadas entre sí, de la misma forma que las fuentes $V_{R_T B}$ y $I_{R_T B}$ también están correlacionadas entre sí.

Por otro lado, las fuentes $V_{R_T A}$ y $I_{R_T A}$ no están correlacionadas con las fuentes $V_{R_T B}$ y $I_{R_T B}$, entonces efectuando las operaciones indicadas en la ecuación E.85 esta queda como

$$\overline{C}_{AT} = \begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix}^{+} + \begin{bmatrix} A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix}^{+}$$

$$= \begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix}^{+} + \begin{bmatrix} A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \\ C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \end{bmatrix} \left[\left(A_A V_{R_T B} + B_A I_{R_T B} \right)^{*} \quad \left(C_A V_{R_T B} + D_A I_{R_T B} \right)^{*} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix}^{+} + \left(\begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T B} \\ I_{R_T B} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} V_{R_T B}{}^{*} & I_{R_T B}{}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_A{}^{*} & C_A{}^{*} \\ B_A{}^{*} & D_A{}^{*} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T A} \\ I_{R_T A} \end{bmatrix}^{+} + \left(\begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T B} \\ I_{R_T B} \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} V_{R_T B} \\ I_{R_T B} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix}^{+} \right) \qquad \text{E.86}$$

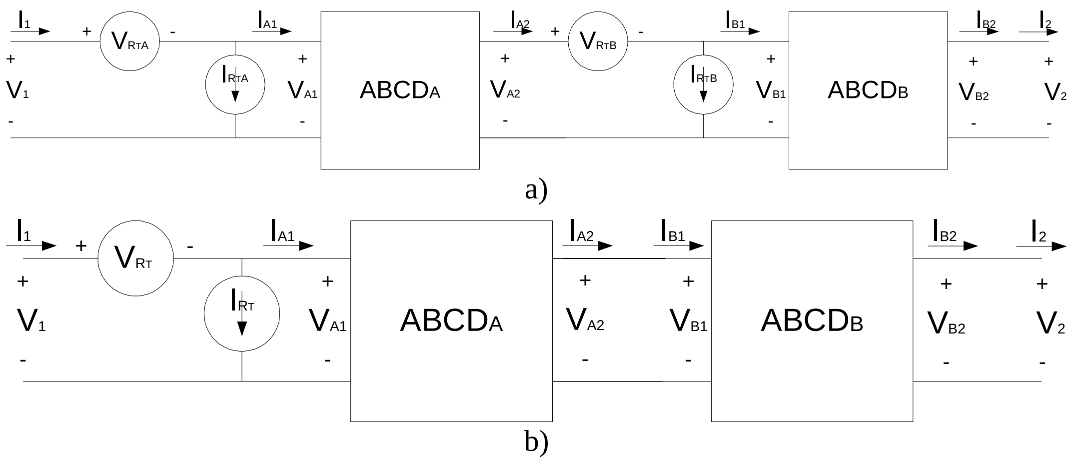


Figura E.5 a) bipuertos con ruido conectados en cascada. **b)** bipuertos con ruido y sin ruido conectados en cascada.

Entonces

$$\overline{C}_{AT} = \overline{C}_{A_A} + \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T B} \\ I_{R_T B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{R_T B} \\ I_{R_T B} \end{bmatrix}^{+} \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix}^{+}$$

Por lo tanto

$$\overline{C}_{AT} = \overline{C}_{A_A} + ABCD_A \overline{C}_{A_B} ABCD_A^{+} \qquad \text{E.87}$$

En resumen

Para bipuertos conectados en:	
Serie	$\overline{C}_{ZT} = \overline{C}_{ZA} + \overline{C}_{ZB}$
Paralelo	$\overline{C}_{YT} = \overline{C}_{YA} + \overline{C}_{YB}$
Cascada	$\overline{C}_{AT} = \overline{C}_{A_A} + ABCD_A \overline{C}_{A_B} ABCD_A^{+}$

APÉNDICE F. ANÁLISIS DE LAS REDES DEL TRANSISTOR EXTRÍNSECO CON RUIDO

F.1 Análisis de una red tipo T con ruido

Supóngase una red tipo T la cual consta de elementos que contribuyen al ruido térmico del bipuerto como la de la figura F.1.

Las ecuaciones de voltaje que la modelan son las siguientes

$$V_1 = I_1(Z_1 + Z_3) + I_2 Z_3 + V_{R_T 1} + V_{R_T 3}$$

$$V_2 = I_1 Z_3 + I_2(Z_2 + Z_3) + V_{R_T 2} + V_{R_T 3}$$

que matricialmente se expresan como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T 1} + V_{R_T 3} \\ V_{R_T 2} + V_{R_T 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{R_T 1} + V_{R_T 3} \\ V_{R_T 2} + V_{R_T 3} \end{bmatrix} \quad \text{F.1}$$

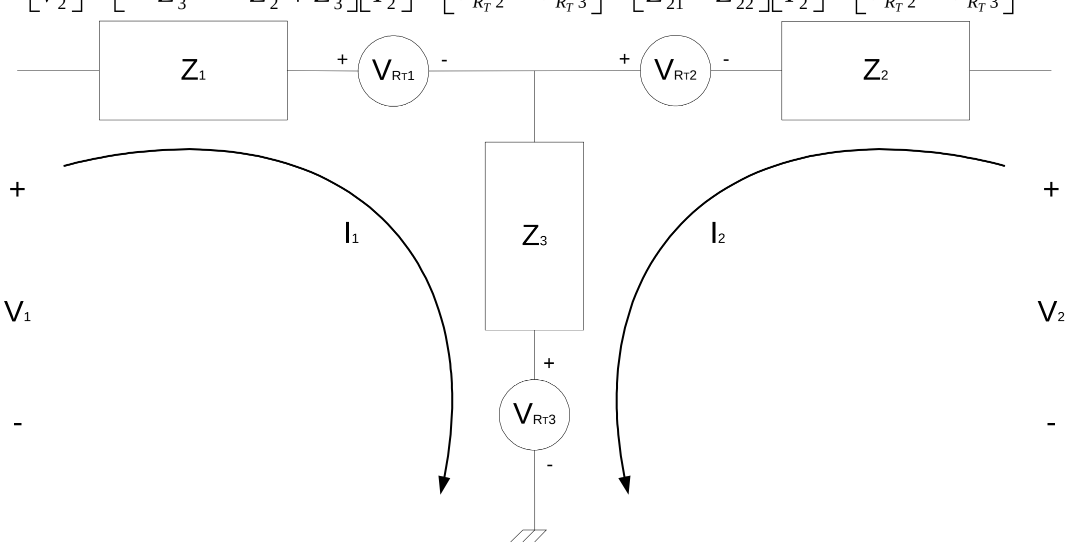


Figura F.1. Red tipo T con ruido térmico.

Considerando lo establecido en la ecuación 2.10 se tiene que la matriz de ruido del bipuerto de la figura F.1 está dado por:

$$\begin{bmatrix} V_{R_{T1}} \\ V_{R_{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{R_T1} + V_{R_T3} \\ V_{R_T2} + V_{R_T3} \end{bmatrix}$$

Entonces con base a la ecuación 2.19 la matriz de correlación de ruido en parámetros Z de la red tipo T será igual a:

$$\overline{C}_Z = \overline{\begin{bmatrix} V_{R_T1} + V_{R_T3} \\ V_{R_T2} + V_{R_T3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{R_T1} + V_{R_T3} \\ V_{R_T2} + V_{R_T3} \end{bmatrix}^{+}} =$$
$$= \overline{\begin{bmatrix} |V_{R_T1}|^2 + V_{R_T1}V_{R_T3}^* + V_{R_T3}V_{R_T1}^* + |V_{R_T3}|^2 & V_{R_T1}V_{R_T2}^* + V_{R_T1}V_{R_T3}^* + V_{R_T3}V_{R_T2}^* + |V_{R_T3}|^2 \\ V_{R_T2}V_{R_T1}^* + V_{R_T2}V_{R_T3}^* + V_{R_T3}V_{R_T1}^* + |V_{R_T3}|^2 & |V_{R_T2}|^2 + V_{R_T2}V_{R_T3}^* + V_{R_T3}V_{R_T2}^* + |V_{R_T3}|^2 \end{bmatrix}} \quad \text{F.2}$$

Considerando la no correlación de las fuentes de voltaje térmico V_{R_T1}, V_{R_T2} y V_{R_T3} la ecuación F.2 se simplifica a la matriz:

$$\overline{C}_Z = \overline{\begin{bmatrix} |V_{R_T1}|^2 + |V_{R_T3}|^2 & |V_{R_T3}|^2 \\ |V_{R_T3}|^2 & |V_{R_T2}|^2 + |V_{R_T3}|^2 \end{bmatrix}} \quad \text{F.3}$$

Como la parte contribuyente al ruido es la parte resistiva de las impedancias del bipuerto porque el voltaje de ruido térmico está definido como $V_{R_T} = \sqrt{4KBTR}$ entonces

$$\overline{C}_Z = \overline{\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(Z_1 + Z_3) & \mathrm{Re}(Z_3) \\ \mathrm{Re}(Z_3) & \mathrm{Re}(Z_2 + Z_3) \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(Z_{11}) & \mathrm{Re}(Z_{12}) \\ \mathrm{Re}(Z_{21}) & \mathrm{Re}(Z_{22}) \end{bmatrix}} \quad \text{F.4}$$

F.2 Análisis de una red de acceso a compuerta

Para una red de acceso a la compuerta del transistor como la que se presenta en la figura F2, la matriz de sus parámetros Z está dada por

$$Z_g = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{j\omega Cpg} & \dfrac{1}{j\omega Cpg} \\ \dfrac{1}{j\omega Cpg} & Rg + j\omega Lg + \dfrac{1}{j\omega Cpg} \end{bmatrix} \quad \text{F.5}$$

Transformando la ecuación F.5 a su representación en parámetros ABCD se tiene la ecuación:

$$A_g = \begin{bmatrix} 1 & Rg + j\omega Lg \\ j\omega Cpg & 1 + j\omega Cpg(Rg + j\omega Lg) \end{bmatrix} \quad \text{F.6}$$

La ecuación de la matriz de correlación de ruido en parámetros Z de esta red está dada según la ecuación F.4 por:

$$\overline{C}_Z^g = \overline{\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{j\omega Cpg}\right) & \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{j\omega Cpg}\right) \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{j\omega Cpg}\right) & \mathrm{Re}\left(Rg + j\omega Lg + \dfrac{1}{j\omega Cpg}\right) \end{bmatrix}} = T_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Rg \end{bmatrix} \quad \text{F.7}$$

donde el voltaje de ruido térmico provocado por el elemento resistivo Rg es igual a $\sqrt{4KBT_0Rg}$ y la matriz de ruido del bipuerto estará dada por

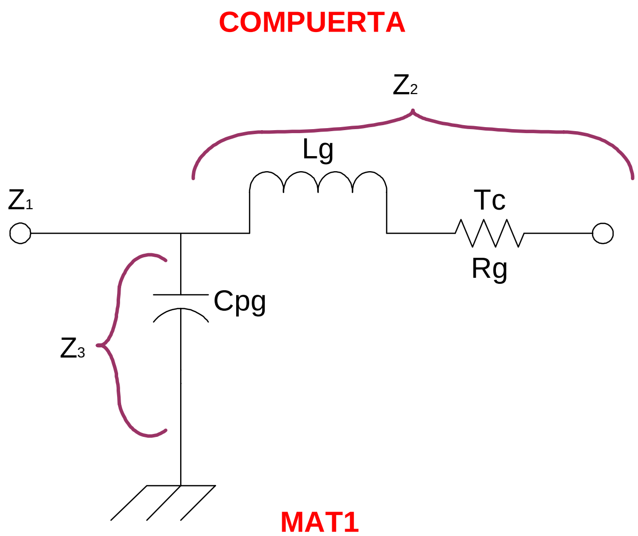


Figura F.2. Red de acceso compuerta.

$$V_{R_T} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{4KBT_0Rg} \end{bmatrix}$$

Para convertir la matriz de correlación de ruido en parámetros Z $\overline{C}_Z^g$ a su equivalente en parámetros ABCD considérense la ecuación de la matriz de transformación de la matriz de correlación de ruido en parámetros Z a ABCD dada por la ecuación 2.47 de modo que utilizando la ecuación F.5 se tiene que:

$$P_{ZA}^g = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -j\omega Cpg \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P_{ZA}^{g\,+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & j\omega Cpg \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz de correlación $\overline{C}_A^g$ estará dada por la ecuación

$$\overline{C}_A^g = P_{ZA}^g \overline{C}_Z^g P_{ZA}^{g\,+} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -j\omega Cpg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_0 Rg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & j\omega Cpg \end{bmatrix} = \tag{F.8}$$

$$= T_0 \begin{bmatrix} Rg & -j\omega RgCpg \\ j\omega RgCpg & \omega^2 RgCpg^2 \end{bmatrix}$$

F.3 Análisis de una red de acceso a drenador

Para una red de acceso al drenador del transistor como la que se presenta en la figura F3, la matriz de sus parámetros Z está dada por

$$Z_d = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rd + j\omega Ld + \dfrac{1}{j\omega Cpd} & \dfrac{1}{j\omega Cpd} \\ \dfrac{1}{j\omega Cpd} & \dfrac{1}{j\omega Cpd} \end{bmatrix} \tag{F.9}$$

La ecuación de la matriz de correlación de ruido en parámetros Z de esta red está dada según la ecuación F.4 por:

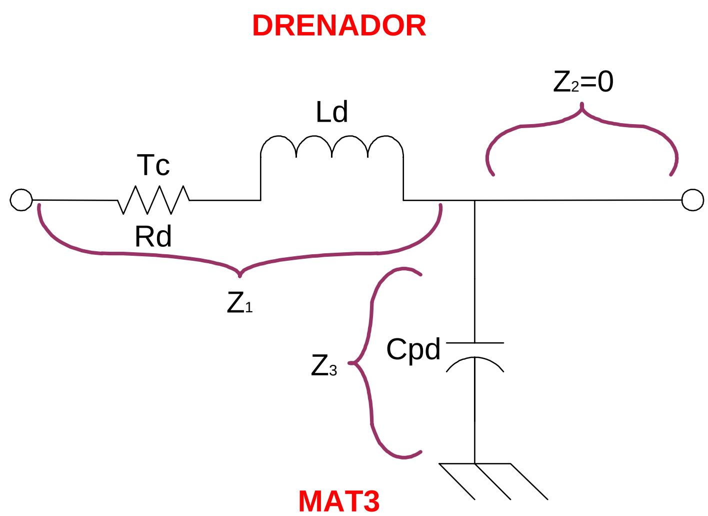


Figura F.3. Red de acceso drenador.

$$\overline{C}_Z^d = \overline{\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\left(Rd + j\omega Ld + \dfrac{1}{j\omega Cpd}\right) & \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{j\omega Cpd}\right) \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{j\omega Cpd}\right) & \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{j\omega Cpd}\right) \end{bmatrix}} = T_0 \begin{bmatrix} Rd & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{F.10}$$

donde el voltaje de ruido térmico generado por el elemento resistivo Rd es igual a $\sqrt{4KBT_0Rd}$ y la matriz de ruido del bipuerto estará dada por

$$V_{R_T} = \begin{bmatrix} \sqrt{4KBT_0Rd} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para convertir la matriz de correlación de ruido en parámetros Z $\overline{C}_Z^d$ a su equivalente en parámetros ABCD considérense la ecuación de la matriz de transformación de la matriz de correlación de ruido en parámetros Z a ABCD dada por la ecuación 2.47 de modo que utilizando la ecuación F.9 se tiene que:

$$P_{ZA}^d = \begin{bmatrix} 1 & -1 + \omega^2 LdCpd - j\omega CpdRd \\ 0 & -j\omega Cpd \end{bmatrix}$$

y

$$P_{ZA}^{d\,+} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 + \omega^2 LdCpd + j\omega CpdRd & j\omega Cpd \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz de correlación $\overline{C}_A^d$ estará dada por la ecuación

$$\overline{C}_A^d = P_{ZA}^d \overline{C}_Z^d P_{ZA}^{d\,+} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 + \omega^2 LdCpd - j\omega CpdRd \\ 0 & -j\omega Cpd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 Rd & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 + \omega^2 LdCpd + j\omega CpdRd & j\omega Cpd \end{bmatrix} = \qquad \text{F.11}$$

$$= T_0 \begin{bmatrix} Rd & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

F.4 Análisis de una red de acceso a fuente

Para una red de acceso a la fuente del transistor como la que se presenta en la figura F4, la matriz de sus parámetros Z según la ecuación F.1 está dada por

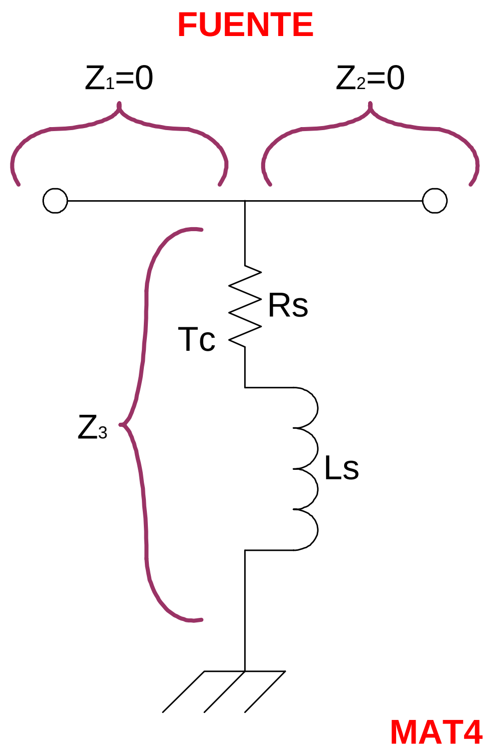


Figura F.4. Red de Acceso Fuente.

$$Z_S = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rs + j\omega Ls & Rs + j\omega Ls \\ Rs + j\omega Ls & Rs + j\omega Ls \end{bmatrix} \qquad \text{F.12}$$

La ecuación de la matriz de correlación de ruido en parámetros Z de esta red está dada según la ecuación F.4 por:

$$V_{R_T} = \begin{bmatrix} \sqrt{4KBT_0 Rs} \\ \sqrt{4KBT_0 Rs} \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}_Z^s = \overline{\begin{bmatrix} \mathrm{Re}(Rs + j\omega Ls) & \mathrm{Re}(Rs + j\omega Ls) \\ \mathrm{Re}(Rs + j\omega Ls) & \mathrm{Re}(Rs + j\omega Ls) \end{bmatrix}} = T_0 \begin{bmatrix} Rs & Rs \\ Rs & Rs \end{bmatrix} \qquad \text{F.13}$$

donde el voltaje de ruido térmico generado por el elemento resistivo Rs es igual a $\sqrt{4KBT_0 Rs}$ y la matriz de ruido del bipuerto estará dada por

F.5 Análisis de una red tipo Pi con ruido

Las corrientes del circuito de la figura F.5 están modeladas por las siguientes ecuaciones

$$I_1 = V_1(Y_1 + Y_2) - V_2 Y_2 + I_{R_T 1} + I_{R_T 2}$$

$$I_2 = -V_1 Y_2 + V_2(Y_3 + Y_2) - I_{R_T 2} + I_{R_T 3}$$

Entonces la ecuación matricial de la corriente del bipuerto está expresada como

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{R_T 1} + I_{R_T 2} \\ I_{R_T 3} - I_{R_T 2} \end{bmatrix} \qquad \text{F.14}$$

donde la matriz de ruido del circuito está dada por:

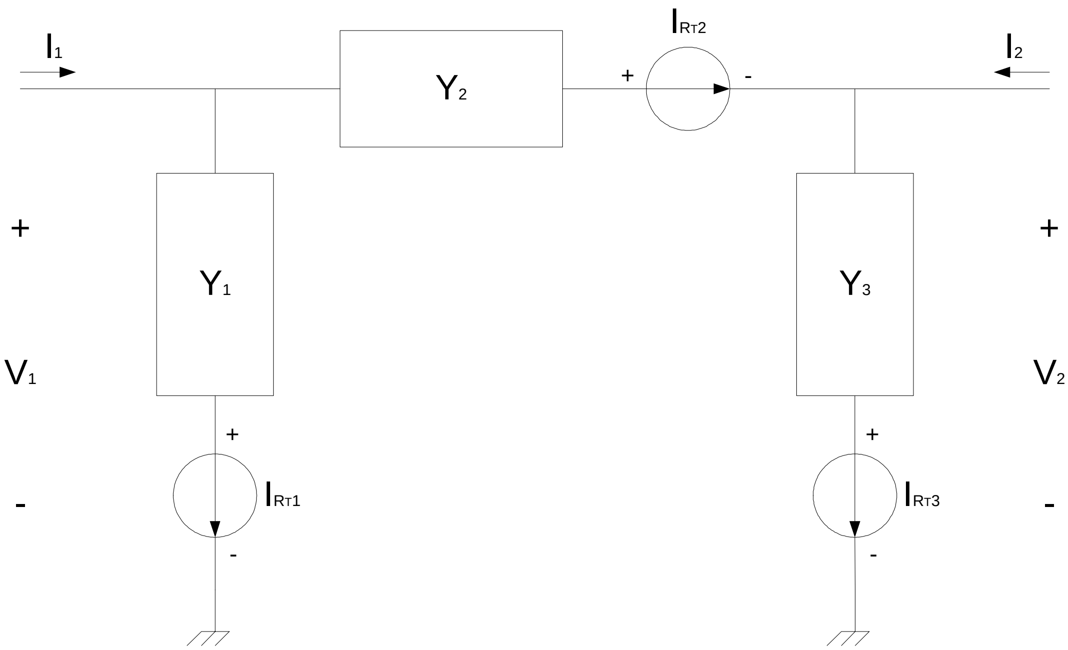


Figura F.5. Red tipo Pi con ruido térmico.

$$\begin{bmatrix} I_{R_{T1}} \\ I_{R_{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{R_T 1} + I_{R_T 2} \\ I_{R_T 3} - I_{R_T 2} \end{bmatrix} \qquad \text{F.15}$$

A partir de la ecuación F.15 y de lo definido en la ecuación 2.17 se tiene que la matriz de correlación de ruido $\overline{C}_Y$ estará dada como

$$\overline{C}_Y = \begin{bmatrix} I_{R_T 1} + I_{R_T 2} \\ I_{R_T 3} - I_{R_T 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{R_T 1} + I_{R_T 2} \\ I_{R_T 3} - I_{R_T 2} \end{bmatrix}^+ =$$

$$= \begin{bmatrix} \left|I_{R_T 1}\right|^2 + I_{R_T 1} I_{R_T 2}^{\ *} + I_{R_T 2} I_{R_T 1}^{\ *} + \left|I_{R_T 2}\right|^2 & I_{R_T 1} I_{R_T 3}^{\ *} - I_{R_T 1} I_{R_T 2}^{\ *} + I_{R_T 2} I_{R_T 3}^{\ *} - \left|I_{R_T 2}\right|^2 \\ I_{R_T 3} I_{R_T 1}^{\ *} + I_{R_T 3} I_{R_T 2}^{\ *} - I_{R_T 2} I_{R_T 1}^{\ *} - \left|I_{R_T 2}\right|^2 & \left|I_{R_T 3}\right|^2 - I_{R_T 3} I_{R_T 2}^{\ *} - I_{R_T 2} I_{R_T 3}^{\ *} + \left|I_{R_T 2}\right|^2 \end{bmatrix} \text{F.16}$$

Considerando que las fuentes de ruido térmico $I_{R_T 1}$, $I_{R_T 2}$ y $I_{R_T 3}$ no están correlacionadas, entonces F.16 se transforma en

$$\overline{C}_Y = \begin{bmatrix} \left|I_{R_T 1}\right|^2 + \left|I_{R_T 2}\right|^2 & -\left|I_{R_T 2}\right|^2 \\ -\left|I_{R_T 2}\right|^2 & \left|I_{R_T 3}\right|^2 + \left|I_{R_T 2}\right|^2 \end{bmatrix} \qquad \text{F.17}$$

Para este caso, la parte contribuyente al ruido es la parte conductiva de las admitancias del bipuerto ya que la corriente de ruido térmico está definida como $I_{R_T} = \sqrt{4KBTG}$ entonces

$$\overline{C}_Y = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(Y_1 + Y_2) & \mathrm{Re}(-Y_2) \\ \mathrm{Re}(-Y_2) & \mathrm{Re}(Y_1 + Y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(Y_{11}) & \mathrm{Re}(Y_{12}) \\ \mathrm{Re}(Y_{21}) & \mathrm{Re}(Y_{22}) \end{bmatrix} \qquad \text{F.18}$$

F.6 Análisis de una red Compuerta-Drenador

Para una red de interconexión de compuerta a drenador del transistor como la que se muestra en la figura F.6 y con base en la ecuación F.14 la matriz de sus parámetros Y estará dada como

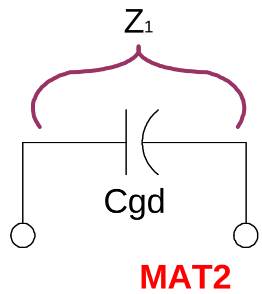


Figura F.6. Red compuerta drenador.

$$Ygd = \begin{bmatrix} j\omega Cgd & -j\omega Cgd \\ -j\omega Cgd & j\omega Cgd \end{bmatrix} \quad \text{F.19}$$

Como el elemento que integra a este bipuerto es puramente reactivo no contribuye al ruido térmico por lo tanto la matriz de las corrientes de ruido térmico será igual a

$$I_{R_T}^{gd} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{F.20}$$

De lo establecido por la ecuación 2.17, se tiene que la matriz de correlación que le corresponde a este bipuerto está dada por:

$$\overline{C}_Y^{gd} = I_{R_T}^{gd} I_{R_T}^{gd\,+}$$

Por lo tanto

$$\overline{C}_Y^{gd} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{F.21}$$

APÉNDICE G. ANÁLISIS DE LOS PARÁMETROS DEL TRANSISTOR INTRÍNSECO

G.1

El circuito de la figura G1 representa el modelo del transistor intrínseco. Las ecuaciones que lo definen son las siguientes:

$$V_1 = I_1\left(Ri + \frac{1}{j\omega Cgs}\right) \tag{G-1}$$

$$I_2 = gm \cdot e^{-j\omega\tau}Vg + V_2\left(\frac{1}{Rds} + j\omega Cds\right) \tag{G-2}$$

Por otro lado

$$Vg = I_1 \frac{1}{j\omega Cgs} \tag{G-3}$$

Sustituyendo la ecuación (G-3) en (G-2) y ordenando esta última, se tiene que

$$I_2 = I_1 \frac{gm}{j\omega Cgs} + V_2\left(\frac{1}{Rds} + j\omega Cds\right) \tag{G-4}$$

A partir de las ecuaciones (G-1) y (G-4), la matriz de parámetros H del transistor intrínseco queda como:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ri + \dfrac{1}{j\omega Cgs} & 0 \\ \dfrac{gm}{j\omega Cgs} & \dfrac{1}{Rds} + j\omega Cds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{G-5}$$

o de la misma forma

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\omega^2 Cgs^2 Ri^2}{\omega^2 Cgs^2 Ri + j\omega Cgs} & 0 \\ \dfrac{gm}{j\omega Cgs} & \dfrac{1}{Rds} + j\omega Cds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{G-6}$$

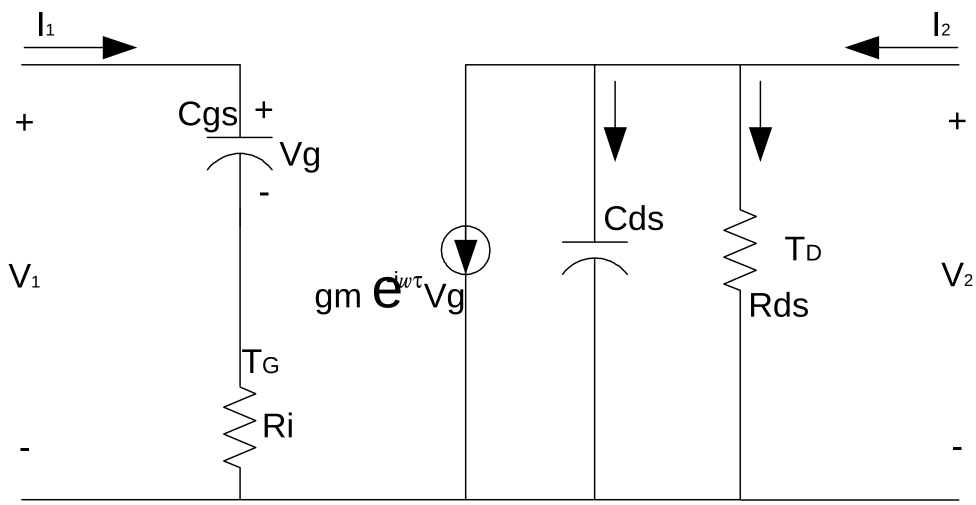


Figura G1. Modelo del transistor intrínseco sin fuentes de ruido.

Convirtiendo los parámetros H del transistor intrínseco, ecuaciones (G-5) y (G-6), a su equivalente en parámetros Y se obtiene la matriz Y del transistor intrínseco:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{j\omega Cgs}{1+j\omega CgsRi} & 0 \\ \dfrac{gm}{1+j\omega RiCgs} & \dfrac{1}{Rds}+j\omega Cds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(G-7)}$$

y

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega^2 Cgs^2 Ri + j\omega Cgs}{1+\omega^2 Cgs^2 Ri^2} & 0 \\ \dfrac{gm}{1+j\omega RiCgs} & \dfrac{1}{Rds}+j\omega Cds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(G-8)}$$

respectivamente.

Análisis del transistor intrínseco con fuentes de ruido.

El circuito de la figura G2 presenta el modelo del transistor intrínseco considerando el efecto de las fuentes de ruido.

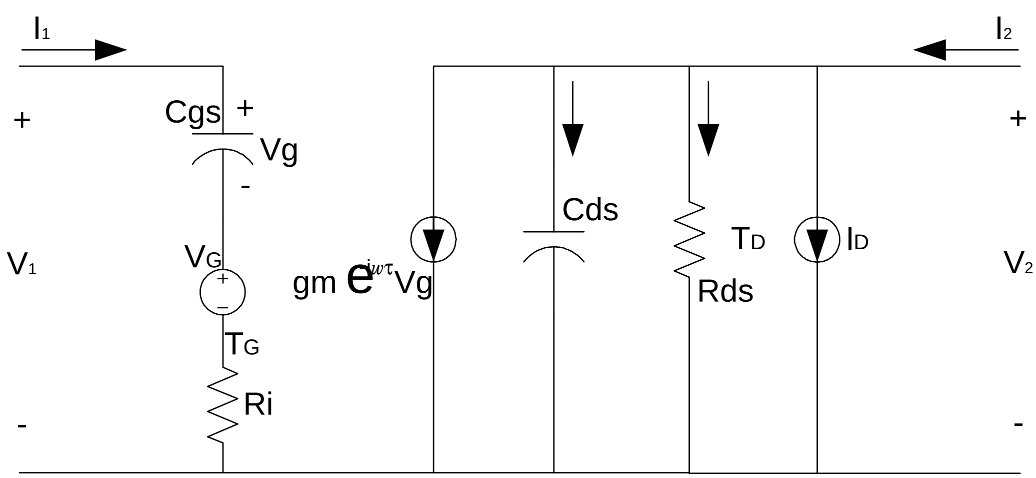


Figura G2. Modelo del transistor intrínseco con fuentes de ruido.

Las ecuaciones que lo describen son:

$$V_1 = I_1 Ri + \frac{I_1}{j\omega Cgs} + Vg \tag{G-9}$$

$$I_2 = gmVg + \frac{V_2}{Rds} + j\omega CdsV_2 + I_D \tag{G-10}$$

entonces, factorizando I_1 en la ecuación (G-9) se tiene que

$$V_1 = I_1\left(\frac{1 + j\omega CgsRi}{j\omega Cgs}\right) + Vg \tag{G-11}$$

Por otro lado

$$Vg = \frac{I_1}{j\omega Cgs} \tag{G-12}$$

Sustituyendo la ecuación (G-12) en (G-10) y factorizando V_2:

$$I_2 = I_1\left(\frac{gm}{j\omega Cgs}\right) + V_2\left(\frac{1}{Rds} + j\omega Cds\right) + I_D \tag{G-13}$$

Por lo tanto la matriz de parámetros H para el transistor intrínseco con fuentes de ruido estará dada por:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1 + j\omega CgsRi}{j\omega Cgs} & 0 \\ \dfrac{gm}{j\omega Cgs} & \dfrac{1}{Rds} + j\omega Cds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Vg \\ I_D \end{bmatrix} \tag{G-14}$$

De la ecuación (G-14) la matriz de parámetros de ruido será

$$\begin{bmatrix} V_H \\ I_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Vg \\ I_D \end{bmatrix} \tag{G-15}$$

donde

$$Vg = \sqrt{4KBT_G Ri}$$

y

$$I_D = \sqrt{4KBT_D Rds}$$

La matriz de correlación de parámetros H estará definida como

$$C_H^i = \begin{bmatrix} Vg \\ I_D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Vg \\ I_D \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 4KBT_G Ri & 4KB\sqrt{T_G T_D RiRds} \\ 4KB\sqrt{T_D T_G RdsRi} & 4KBT_D Rds \end{bmatrix} \tag{G-16}$$

APÉNDICE H. CÁLCULO DE LA MATRIZ DE CORRELACIÓN DE RUIDO TOTAL EN PARÁMETROS ABCD $\overline{C}_{AT}$ DEL TRANSISTOR

H.1 Obtención de las matrices de correlación de ruido intrínseca y extrínseca del FET para microondas

En la figura H.1 se presenta el modelo de pequeña señal de una configuración del modelo de pequeña señal del transistor FET para microondas, dividido en cinco bipuertos, los cuales pueden describirse como sigue:

MAT1: Elemento de acceso de compuerta, a temperatura T_C (ambiente).
MAT2: Capacitor conectado de compuerta a drenaje.
MAT3: Elementos de acceso de drenaje, a temperatura T_C (ambiente).
MAT4: Elementos de acceso de fuente, a temperatura T_C (ambiente).
MAT5: Transistor intrínseco a temperaturas T_G y T_D.

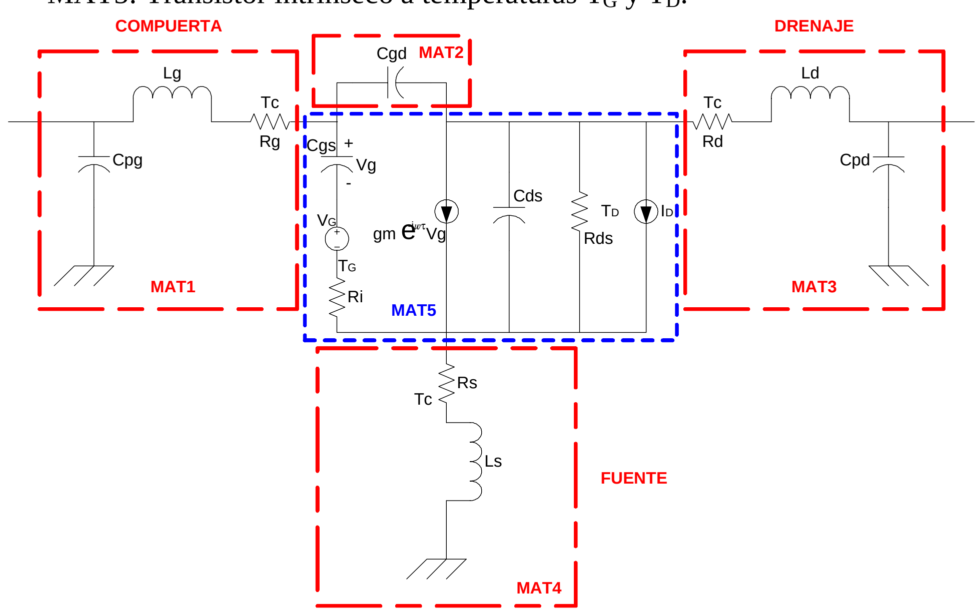


Figura H.1 Modelo de pequeña señal de un transistor.

En la figura H1 se observa que:

- El bipuerto MAT2 está conectado en paralelo con el bipuerto MAT5.
- El bipuerto MAT4 está conectado en serie con el paralelo de los bipuertos MAT2 y MAT5.
- Los bipuertos MAT1 y MAT3 están conectados en cascada con la conexión en serie del bipuerto MAT4 y el bipuerto resultante del paralelo de los bipuertos MAT2 y MAT5.

Para calcular los parámetros ABCD del circuito completo del transistor y derivar la matriz de correlación de ruido total $\overline{C}_{AT}$ del transistor será necesario comenzar con la reducción de las matrices de correlación de ruido de los bipuertos MAT2 y MAT5 a la matriz de correlación de ruido de parámetros Y del bipuerto total que se obtiene de la reducción de este paralelo.

Tomando en cuenta la ecuación E.49 es posible escribir

$$\overline{C}_Y{}^{gdi} = \overline{C}_Y{}^{gd} + \overline{C}_Y{}^{i} \qquad \text{H.1}$$

donde

$\overline{C}_Y{}^{gd}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros Y del bipuerto MAT2, (capacitor Cgs).

$\overline{C}_Y{}^{i}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros Y del bipuerto MAT5, (el transistor intrínseco).

$\overline{C}_Y{}^{gdi}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros Y del paralelo de MAT2 y MAT5.

Ahora para la conexión en serie entre MAT4 y el paralelo de MAT2 y MAT5, y tomando en cuenta la ecuación E.24

$$\overline{C}_Z{}^{gdis} = \overline{C}_Z{}^{s} + \overline{C}_Z{}^{gdi} \qquad \text{H.2}$$

donde

$\overline{C}_Z{}^{s}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros Z del bipuerto MAT4. Su deducción se presenta en la sección F.4 del apéndice F.

$\overline{C}_Z{}^{gdi}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros Z del paralelo de MAT2 y MAT5.

$\overline{C}_Z{}^{gdis}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros Z de la conexión en serie entre MAT4 y el paralelo de MAT2 y MAT5.

Utilizando la matriz de conversión de la matriz de correlación de ruido en parámetros H a la matriz de correlación de ruido en parámetros Y, ecuación 2.67, la matriz de correlación de ruido $\overline{C}_Y{}^{i}$ del transistor intrínseco queda expresada como

$$\overline{C}_Y{}^{i} = P_{HY}^{i}\,\overline{C}_H{}^{i}\,P_{HY}^{i}{}^{+} \qquad \text{H.3}$$

donde

P_{HY}^{i} es la matriz de transformación de la matriz de correlación de ruido del transistor intrínseco de parámetros H a parámetros Y.

$P_{HY}^{i}{}^{+}$ es la matriz compleja conjugada de P_{HY}^{i}.

Sustituyendo la ecuación H.3 en la ecuación H.1 se tiene que

$$\overline{C}_Y{}^{gdi} = \overline{C}_Y{}^{gd} + P_{HY}^{i}\,\overline{C}_H{}^{i}\,P_{HY}^{i}{}^{+} \qquad \text{H.4}$$

Para poder sustituir la matriz $\overline{C}_Y{}^{gdi}$ en la ecuación H.2 primero será necesario encontrar su equivalente en parámetros Z, $\overline{C}_Z{}^{gdi}$, para lo cual deberá generarse la matriz de conversión de la matriz de correlación de ruido del bipuerto resultante de la interconexión en paralelos de las redes MAT2 y MAT5 P_{YZ}^{gdi} con base en la ecuación 2.34. De modo que:

$$\overline{C}_Z{}^{gdi} = P_{YZ}^{gdi}\overline{C}_Y{}^{gd}P_{YZ}^{gdi+} + P_{YZ}^{gdi}P_{HY}^{i}\overline{C}_H{}^{i}P_{HY}^{i}{}^{+}P_{YZ}^{gdi+} \qquad \text{H.5}$$

Sustituyendo H.5 en H.2 queda la ecuación:

$$\overline{C}_Z{}^{gdis} = \overline{C}_Z^{s} + P_{YZ}^{gdi}\overline{C}_Y{}^{gd}P_{YZ}^{gdi+} + P_{YZ}^{gdi}P_{HY}^{i}\overline{C}_H{}^{i}P_{HY}^{i}{}^{+}P_{YZ}^{gdi+} \qquad \text{H.6}$$

Para incluir el efecto de la red de acceso a compuerta será necesario transformar la matriz de correlación de ruido $\overline{C}_Z^{gdis}$ a su representación en parámetros ABCD, $\overline{C}_A^{gdis}$. Para esto debe considerarse la ecuación 2.47 para generar a la matriz de conversión de la matriz de correlación de parámetros Z a ABCD, P_{ZA}^{gdis}, utilizando para ello el bipuerto resultante de la interconexión de las redes MAT2, MAT5 Y MAT4 para obtener la siguiente expresión

$$\overline{C}_A^{gdis} = P_{ZA}^{gdis}\overline{C}_Z^{gdis}P_{ZA}^{gdis+} \qquad \text{H.7}$$

y considerando a H.6

$$\begin{aligned}\overline{C}_A{}^{gdis} = {} & P_{ZA}^{gdis}\overline{C}_Z^{s}P_{ZA}^{gdis+} + P_{ZA}^{gdis}P_{YZ}^{gdi}\overline{C}_Y{}^{gd}P_{YZ}^{gdi+}P_{ZA}^{gdis+} \\ & + P_{ZA}^{gdis}P_{YZ}^{gdi}P_{HY}^{i}\overline{C}_H{}^{i}P_{HY}^{i}{}^{+}P_{YZ}^{gdi+}P_{ZA}^{gdis+}\end{aligned} \qquad \text{H.8}$$

Considérese la conexión en cascada de los bipuertos MAT3 y el formado por la interconexión de las redes MAT2, MAT5 y MAT4. La matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD del bipuerto resultante $\overline{C}_A^{gdisd}$, según la ecuación E.87 estará dada por

$$\overline{C}_A^{gdisd} = \overline{C}_A^{gdis} + A_{gdis}\overline{C}_A^{d}A_{gdis}{}^{+} \qquad \text{H.9}$$

donde

A_{gdis} es la matriz de parámetros ABCD del bipuerto formado por la interconexión de las redes MAT2, MAT5 y MAT4.

$\overline{C}_A^{d}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD de la red de drenaje. Su deducción se presenta en la sección F.3 del apéndice F.

Del mismo modo, la matriz de correlación de ruido total del transistor estará dada por

$$\overline{C}_A^{T} = \overline{C}_A^{g} + A_g\overline{C}_A^{gdisd}A_g{}^{+} \qquad \text{H.10}$$

donde

A_g es la matriz de parámetros ABCD de la red de compuerta.

$\overline{C}_A^{g}$ es la matriz de correlación de ruido en parámetros ABCD de la red de compuerta.

Sus ecuaciones para una red específica de compuerta se presentan en la sección F.2 del apéndice F.

Sustituyendo la ecuación H.9 en la ecuación H.10

$$\overline{C}_A^{T} = \overline{C}_A^{g} + A_g\overline{C}_A^{gdis}A_g{}^{+} + A_gA_{gdis}\overline{C}_A^{d}A_{gdis}{}^{+}A_g{}^{+} \qquad \text{H.11}$$

Ahora sustituyendo H.8 en H.11 queda la ecuación:

$$\begin{aligned}\overline{C}_A^{T} = {} & \overline{C}_A^{g} + A_gP_{ZA}^{gdis}\overline{C}_Z^{s}P_{ZA}^{gdis+}A_g{}^{+} + A_gP_{ZA}^{gdis}P_{YZ}^{gdi}\overline{C}_Y{}^{gd}P_{YZ}^{gdi+}P_{ZA}^{gdis+}A_g{}^{+} + \\ & + A_gP_{ZA}^{gdis}P_{YZ}^{gdi}P_{HY}^{i}\overline{C}_H{}^{i}P_{HY}^{i}{}^{+}P_{YZ}^{gdi+}P_{ZA}^{gdis+}A_g{}^{+} + A_gA_{gdis}\overline{C}_A^{d}A_{gdis}{}^{+}A_g{}^{+}\end{aligned} \qquad \text{H.12}$$

La ecuación de la matriz de correlación de ruido toral del transistor también se puede escribir de la forma

$$\overline{C}_A^{T} = \overline{C}_A^{EXT} + \overline{C}_A^{INT} \qquad \text{H.13}$$

donde

$$\overline{C}_A^{EXT} = \overline{C}_A^{g} + A_g P_{ZA}^{gdis} \overline{C}_Z^{s} P_{ZA}^{gdis+} A_g^{+} + A_g P_{ZA}^{gdis} P_{YZ}^{gdi} \overline{C}_Y^{gd} P_{YZ}^{gdi+} P_{ZA}^{gdis+} A_g^{+} + \\ + A_g A_{gdis} \overline{C}_A^{d} A_{gdis}^{+} A_g^{+} \qquad \text{H.14.1}$$

y

$$\overline{C}_A^{INT} = A_g P_{ZA}^{gdis} P_{YZ}^{gdi} P_{HY}^{i} \overline{C}_H^{i} P_{HY}^{i+} P_{YZ}^{gdi+} P_{ZA}^{gdis+} A_g^{+} \qquad \text{H.14.2}$$

Tomando en cuenta lo establecido en la ecuación 2.15, las ecuaciones H.14.1 y H.14.2 como:

$$\overline{C}_A^{EXT} = \overline{C}_A^{g} + \left(A_g P_{ZA}^{gdis}\right) \overline{C}_Z^{s} \left(A_g P_{ZA}^{gdis}\right)^{+} + \left(A_g P_{ZA}^{gdis} P_{YZ}^{gdi}\right) \overline{C}_Y^{gd} \left(A_g P_{ZA}^{gdis} P_{YZ}^{gdi}\right)^{+} + \\ + \left(A_g A_{gdis}\right) \overline{C}_A^{d} \left(A_g A_{gdis}\right)^{+} \qquad \text{H.16.1}$$

$$\overline{C}_A^{INT} = \left(A_g P_{ZA}^{gdis} P_{YZ}^{gdi} P_{HY}^{i}\right) \overline{C}_H^{i} \left(A_g P_{ZA}^{gdis} P_{YZ}^{gdi} P_{HY}^{i}\right)^{+} \qquad \text{H.16.2}$$

Del resultado obtenido en la ecuación F.21 del apéndice F, la matriz de correlación de ruido del transistor extrínseco queda de la forma:

$$\overline{C}_A^{EXT} = \overline{C}_A^{g} + \left(A_g P_{ZA}^{gdis}\right) \overline{C}_Z^{s} \left(A_g P_{ZA}^{gdis}\right)^{+} + \left(A_g A_{gdis}\right) \overline{C}_A^{d} \left(A_g A_{gdis}\right)^{+} \qquad \text{H.16.3}$$