

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS



ESTADO DEL ARTE DE INGENIERÍAS DIDÁCTICAS: FRACCIONES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

ARMANDO AGUSTÍN CHAVEZ SALAZAR

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, MÉXICO. JULIO DEL 2017

Dedicatoria

A mi madre Reyna

Por todo lo que me ha apoyado, escuchado, inculcado, enseñado y sobre todo por creer en mí. Por estar al pendiente mío cuando más lo he necesitado y por ese constante amor que siempre me ha demostrado. Seguiré mirando hacia delante.

A mi padre Miguel

Por el gran apoyo que me ha dado respecto de mis decisiones y metas, y por la gran enseñanza de intentar las cosas para aprender. Por todo el amor de padre que me has demostrado sin ser de la misma sangre. Siempre recordare sus enseñanzas e inspiradora forma de ser.

A mi padre Agustín

Por toda la motivación que me ha dado para continuar siempre hacia delante y el gran apoyo en mis decisiones. A pesar de que no estamos cerca físicamente, yo sé que siempre podré contar con usted. Con su apoyo sé que podre dar el siguiente paso.

A mis familiares

A mi hermana Karla que procuraba escucharme siempre que podía y que continuamente me daba ánimos; a mi tía Soledad y primo Voniek, quienes compartieron sus opiniones como maestros; a mi abuela Esther que siempre estuvo para escucharme y animarme para seguir adelante, y a todos aquellos que participaron directa o indirectamente en la elaboración de esta tesis.

A mis amigos

Aquellos que estuvieron conmigo a lo largo de mi formación profesional tanto en los buenos como en los malos momentos. Que me enseñaron lo importante que es saber trabajar en equipo y que es importante saber cuándo tomarse un respiro.

Aquellos que si bien no se encontraron cerca de mí físicamente durante mi formación, me apoyaron continuamente de acuerdo a sus posibilidades y más allá.

Nunca me olvidare de todos ustedes.

A mis maestros

Por toda la paciencia, esfuerzo y dedicación que demostraron todos estos años y sobre todo, por su gran apoyo y motivación para la culminación de mis estudios y en el desarrollo de este trabajo de tesis. Estoy muy orgulloso de que hayan sido mis maestros, muchas gracias por su arduo trabajo.

A mi directora de tesis Adina

Usted que me acompañó a lo largo de toda mi trayectoria en la universidad, que estuvo conmigo durante todo el proceso del trabajo de tesis, con quien tuve incontables reuniones e intensas discusiones. Por usted es que la experiencia de este trabajo no fue fácil, sin embargo fue la mejor que pude haber obtenido. Muchas gracias por todo.

Agradecimientos

Agradezco a la Maestra en Ciencias Diana del Carmen Torres Corrales, por tan amablemente aceptar ser lector externo de mi trabajo de tesis. Sus recomendaciones y observaciones fueron de gran ayuda.

RESUMEN de la Tesis de Armando Agustin Chavez Salazar presentada como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Ensenada, Baja California, México, Julio 2017.

ESTADO DEL ARTE DE INGENIERÍAS DIDÁCTICAS: FRACCIONES

En la presente tesis se trabaja con la metodología de Ingeniería Didáctica enfocada en el tema de fracciones. Se realizó una revisión del estado el arte de ingenierías didácticas en el tema de fracciones, misma que muestra el éxito de la aplicación de esta metodología en el tema de fracciones. La revisión permitió identificar características positivas y negativas de la metodología. En general, se identificaron aspectos como llevar a cabo las fases de análisis preliminar, concepción y análisis *a priori*, experimentación y, análisis *a posteriori* y validación de forma incorrecta, no mostrar la información, no respetar la estructura de la metodología, entre otros aspectos. Se destaca que en uno de los artículos revisados se puede observar la efectividad de la metodología de Ingeniería Didáctica en comparación con la metodología tradicional en la enseñanza del tema de fracciones.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica, metodología, fracciones, estado del arte.

Resumen aprobado:



M. C. Adina Jordan Arámburo

Índice de contenido

Introducción.....	9
1. Objetivo.....	12
2. Metodología.....	12
3. Antecedentes: Importancia y dificultades de la enseñanza-aprendizaje de las fracciones.....	14
3.1. Dificultades conceptuales	15
3.2. Dificultades procedimentales	18
3.3. Dificultades en la resolución de problemas	21
3.4. En síntesis.....	22
4. Preliminares	24
5. Ingeniería didáctica	28
5.1. Definiciones y aspectos generales	28
5.2. La ingeniería didáctica como metodología de investigación	30
5.3. Fases de una ingeniería didáctica	31
5.3.1. Análisis preliminar.....	31
5.3.2. Concepción y análisis <i>a priori</i>	33
5.3.3. Experimentación	34
5.3.4. Análisis <i>a posteriori</i> y validación	35
6. Revisión de ingenierías didácticas en el tema de fracciones	37

6.1. Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones, Ríos (2007).....	37
6.1.1 Reflexión del estudio de Ríos (2007)	44
6.2. La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica, Tovar y Sevilla (2005).....	47
6.2.1 Reflexión del estudio de Tovar y Sevilla (2005)	53
6.3. Influencia de la metodología “Ingeniería Didáctica Matemática” en el aprendizaje de los números fraccionarios de los estudiantes de 7Mo grado de la unidad educativa José Antonio Ramos Sucre, Díaz (2006)	55
6.3.1 Reflexión del estudio de Díaz (2006)	59
6.4. Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar, Peña (2011).....	62
6.4.1 Reflexión del estudio de Peña (2011)	72
6.5. Una ingeniería didáctica aplicada sobre proporcionalidad y semejanza, Veiga (2013) ...	75
6.5.1 Reflexión del estudio de Veiga (2013)	81
6.6. La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria, un estudio didáctico, Block (2000)	83
6.6.1 Reflexión del estudio de Block (2000).....	90
7. Conclusiones	91
Bibliografía	100
Anexos.....	109

Índice de figuras

Figura 1: Representación gráfica de $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$	16
---	----

Figura 2: Transposición Didáctica	29
---	----

Índice de imágenes recuperadas

Imagen recuperada 1: Procedimiento realizado por los estudiantes.....	51
---	----

Imagen recuperada 2: Procedimiento realizado por los estudiantes.....	51
---	----

Imagen recuperada 3: Reglas de los equipos y conjunto de tiras a medir	74
--	----

Imagen recuperada 4: Esquema de figuras	119
---	-----

Índice de cuadros

Cuadro I: Procedimientos erróneos y correctos.	20
---	----

Cuadro II: Secuencia de situaciones.....	50
--	----

Cuadro III: Secuencia de situaciones.....	70
---	----

Cuadro IV: Secuencia de situaciones	79
---	----

Cuadro V: Secuencia de situaciones	88
--	----

Introducción

La educación es una de las bases del desarrollo socio-económico de un país, por lo que es de gran importancia a nivel mundial. Un factor importante en este son los ciudadanos, cuya contribución está ampliamente conectada a su nivel educativo. Por lo cual, si la educación recibida es nula, poca o de baja calidad, es altamente probable que la preparación de estos ciudadanos sea insuficiente para influir de forma positiva en el desarrollo socio-económico (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO], 2014; Pérez y Castillo, 2016).

El interés y preocupación que existe por la educación se puede observar a través de las diversas acciones realizadas por los gobiernos de los países e instituciones. Entre las acciones que llevan a cabo los primeros, se encuentran: la actualización de planes de estudio de niveles básico y por ende de libros, la capacitación y evaluación de los maestros, realización de evaluaciones estandarizadas a los estudiantes, se proporcionan herramientas tecnológicas a las escuelas, se fundan nuevas escuelas, entre otras acciones. Dentro de las acciones que realizan distintas instituciones están: la creación de programas de becas para personas de bajos recursos, donación de material a escuelas, la inversión en proyectos liderados por estudiantes, el apoyo a estudiantes para salir de intercambio, etcétera.

La preocupación por lo que sucede en la educación es evidente, ya que las dificultades en esta área no dejan de hacerse presentes, principalmente en lo que respecta al trabajo dentro del aula y, específicamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En lo que respecta al área de Educación Matemática (Matemática Educativa, Didáctica de las Matemáticas) han continuado surgiendo avances metodológicos y teóricos, entre otros, que buscan la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, por ejemplo las estrategias de resolución de problemas, la enseñanza por competencias, la teoría de las situaciones didácticas y la teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estos avances surgen debido a problemáticas que siempre han estado presentes en la matemática educativa y que son líneas de investigación, tales como: 1) la escasez de medios educativos, académicos y tecnológicos para la enseñanza, 2) la enseñanza a través de modelos tradicionales y poco efectivos, y 3) las concepciones de los estudiantes como obstáculo para el aprendizaje. Centrándonos en avances metodológicos, un ejemplo es la ingeniería didáctica, cuyas características le han permitido adaptarse a las problemáticas actuales en variedad de temas (Díaz, 2006; Peña, 2011).

Enfocándonos en las fracciones, este es un tema ampliamente conocido por la dificultad en su aprendizaje y la aversión que existe por parte de los estudiantes. En general son muchos los esfuerzos, mejoras y avances que se han hecho para poder llevar

este tema al aula de forma satisfactoria, es decir es un tema de interés en lo que respecta a la Educación Matemática (Díaz, 2006; Peña, 2011).

Con base en los aspectos anteriores se planteó y realizó como trabajo de tesis, una revisión del estado del arte de ingenierías didácticas en el tema de fracciones.

La tesis comprende siete capítulos, además de la introducción: En el capítulo 1 se plantea el objetivo de la tesis. En el capítulo 2 se presenta el método utilizado para lograr el objetivo. En el capítulo 3 se expone una síntesis de las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones: conceptuales, procedimentales y en resolución de problemas. En el capítulo 4 se dan a conocer conceptos que ayudarán a comprender la metodología de ingeniería didáctica, los cuales son afines a la Educación Matemática. En el capítulo 5 se aborda la estructura general de la metodología de investigación de ingeniería didáctica (orígenes, teorías centrales, fases, entre otros aspectos). En el capítulo 6 se presenta una revisión del estado del arte de ingenierías didácticas en el tema de fracciones. Finalmente, en el capítulo 7 se exponen las conclusiones.

1. Objetivo

El objetivo central de la presente tesis es revisar trabajos de Ingeniería Didáctica en el tema de fracciones analizando su estructura, propuestas y resultados, para sintetizar el conocimiento existente de la metodología; e identificar mejoras, relaciones, contradicciones, lagunas e inconsistencias en la literatura.

Con el fin de justificar y fundamentar adecuadamente lo definido en el objetivo central, se establecen como objetivos específicos: 1) Identificar las dificultades existentes en el proceso enseñanza-aprendizaje del tema de fracciones, analizarlas y clasificarlas a través de una revisión de la literatura y 2) De la metodología de *Ingeniería Didáctica*, establecer definiciones, fases, teorías relativas y características generales, con el fin de analizar, interpretar, comprender y apropiarse de este conocimiento.

2. Metodología

Se realizó una revisión de la literatura buscando destacar las problemáticas en torno a la enseñanza-aprendizaje de las fracciones, los factores que dieron pie al desarrollo de la metodología de Ingeniería Didáctica, su proceso de construcción y su puesta en práctica. La búsqueda de información se efectuó en distintas bases de datos electrónicas como Elsevier, Redalyc, Springer, EBSCOhost; se utilizaron distintos libros electrónicos y los

motores de búsqueda Google y Google Académico. Utilizándose palabras clave tales como: Metodología Ingeniería didáctica, fracción (proporción, decimal, racional, parte-todo, etcétera), Teoría de situaciones didácticas, situación didáctica, secuencia didáctica, propuesta didáctica, transposición didáctica, dificultades, error, concepto, procedimiento y problema. Los recursos consultados fueron principalmente artículos de revistas científicas, libros electrónicos, tesis de licenciatura y de maestría de universidades nacionales e internacionales. Mediante lectura profunda, comparación, interpretación y análisis de la información recopilada, es que fue posible comprender y apropiarse de este conocimiento.

3. Antecedentes: Importancia y dificultades de la enseñanza-aprendizaje de las fracciones

En los planes y programas de los diferentes niveles educativos de México el tema de fracciones aparece de manera recurrente, es decir, es un tema de gran importancia en Matemáticas, no sólo por el objeto matemático en sí, sino por su vinculación con otros temas. El tema aparece por primera vez en el tercer año de primaria, volviéndose a presentar en cuarto, quinto y sexto año (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011a, 2011b, 2011c, 2011d); en el nivel medio, se estudia en los tres grados (SEP, 2011e, 2011f, 2011g); en el bachillerato se revisa en el plan de primer semestre (SEP, 2013a). Como parte de la formación de profesores, se estudia en los primeros semestres de los planes de las escuelas normales (SEP, 2012a, 2012b); y en un gran número de carreras universitarias. El tema se desarrolla tanto de manera explícita, por ejemplo en operaciones con fracciones, como de manera implícita (porcentajes, razones, ley de senos, operaciones con polinomios, etcétera).

Existe un gran número de investigaciones en donde se abordan temas relacionados al aprendizaje del concepto de fracción (sobre sus distintas acepciones, interpretaciones, representaciones, etcétera); a la manipulación, ejecución, comprensión conceptual y razonamiento de los procedimientos rutinarios de operaciones con fracciones; y a la

resolución de problemas relacionados con fracciones, las investigaciones de Parra y Flores (2008); Siegler, Fazio, Bailey y Zhou (2013); Kellman et al. (2008), son ejemplo de esto.

3.1. Dificultades conceptuales

En el transcurso de su vida escolar, los estudiantes llegan a trabajar con un gran número de significados, representaciones e interpretaciones que tienen las fracciones, lo cual es una de las causas de las dificultades de su aprendizaje. Se identifican alguna de las representaciones más comunes en la escuela: parte-todo (sub-área), razón (subconjunto), reparto (cociente y división indicada), operador, número racional y decimal, (Clarke y Roche ,2009; Ríos, 2007; Sari, Juniati y Patahudin, 2012).

Respecto a las concepciones de los estudiantes, algo que se observa de manera recurrente es el que perciben al numerador y al denominador cómo dos números enteros que se encuentran separados por una línea y que no están relacionados, lo cual más adelante los lleva a conceptos erróneos cuando se comparan áreas y representaciones numéricas de fracciones equivalentes. Por ejemplo, para comparar con el apoyo de representaciones graficas $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ (ver figura 1), los estudiantes argumentan cosas como: “las fracciones no son iguales porque las representaciones tienen diferente

número de piezas coloreadas y diferente número de piezas totales” (Jigyel y Afamasaga-Fuata’i, 2007).

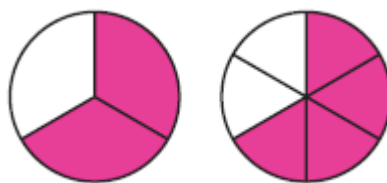


Figura 1: Representación gráfica de $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$.

Cuando se trabaja con la representación parte-todo con unidades continuas (áreas por ejemplo), un elemento conceptual de gran importancia es la conservación del entero. Por lo cual, un manejo pobre de este elemento provoca dificultades al momento de trabajar con esta representación. Dos concepciones relacionadas con este elemento que son observadas en los estudiantes son: quien conserva el entero tiene el conocimiento de que éste puede fraccionarse en diversas partes y cada una de ellas es susceptible de fraccionarse también, pero continúan siendo parte del mismo entero, de tal manera que la suma de todas las partes da como resultado el entero; quien no conserva el entero tiene el conocimiento de que un entero puede fraccionarse, pero cada fracción se “convierte” en un nuevo entero independiente del original, susceptible de ser fraccionado también (Parra y Flores, 2008).

Para los estudiantes el concepto de fracción es estático, una evidencia simple de esto es el hecho de que no son conscientes de que una fracción representa a toda una familia

de números con distinto nombre, a los que se les puede asociar un mismo punto en la recta numérica (Larson, 1980, citado en Kamii, 1994).

Según los resultados de las diferentes evaluaciones, así como el de diferentes investigaciones, se sabe que los estudiantes están concluyendo sus estudios de primaria con una comprensión muy limitada del concepto de fracción. Cortina, Cardoso y Zúñiga (2012), observaron que algunos estudiantes no parecen haber desarrollado nociones cuantitativas básicas que les permitan interpretar de forma inmediata y correcta el significado de las notaciones fraccionarias más comunes.

A pesar de los esfuerzos del docente y el estudiante, en muchas ocasiones el conocimiento de este último sobre ciertos aspectos de las fracciones queda incompleto o no se comprende del todo, continuando y destacando estas deficiencias en niveles superiores. Brown y Quinn (2006), y Ríos (2011) hablan de una gran falta de competencias sobre los conceptos de fracción (interpretaciones, concepciones, acepciones, constructos).

Entre los conceptos que se llegan a estudiar en la escuela hay algunos que los estudiantes encuentran más complejos y otros que encuentran menos complejos. Ríos (2011) identificó como conceptos de alta y mediana complejidad: interpretación de fracción como número racional, interpretación del símbolo de fracción impropia y

número mixto, interpretación de reparto, interpretación de operador, interpretación como razón, interpretación como número decimal, interpretación como medida para la fracción impropia, interpretación de la totalidad fraccionada y definición del concepto de fracción; y como conceptos de baja complejidad: lectura de las fracciones, interpretación del símbolo de fracción para las fracciones propias y unitarias, interpretación como parte todo, interpretación como medida de la fracción propia.

3.2. Dificultades procedimentales

Cuando los estudiantes empiezan a aprender fracciones, un error que es ampliamente observado consiste en la generalización equivocada sobre los números enteros y sus propiedades. Es decir, los estudiantes asumen erróneamente que lo que saben de los números enteros se aplica de la misma forma en las fracciones. Esto se convierte más tarde en una de las causas de dificultades en el aprendizaje de procedimientos que involucran fracciones (Bezuk y Cramer, 1989; Clarke y Roche, 2009; Siegler, Fazio, Bailey y Zhou, 2013).

Las relaciones confusas entre procedimientos aritméticos creadas por los estudiantes son otra causa de las dificultades en el aprendizaje. Por ejemplo, existen casos donde los estudiantes cometen el error de mantener el común denominador en problemas de multiplicación, como si se tratase de suma o resta de fracciones con común

denominador. Aquí se observa que estos no parecen entender cuándo y por qué se mantiene el común denominador. Otro error muy común observado en el aula y causa de dificultades, es que los estudiantes confunden el procedimiento de multiplicación con el de división (Siegler *et al.*, 2013; Parra y Flores, 2008).

Cuando se habla de procedimientos que involucran fracciones, una dificultad es que los estudiantes no comprenden conceptualmente los procedimientos, esto más allá de poder llevarlos a cabo o no. Ríos (2011) habla de una gran falta de competencias sobre conceptos específicos (relaciones de orden, equivalencia y fracción decimal) de ciertos procedimientos y/o aspectos de las fracciones.

Respecto de la equivalencia de fracciones, se reporta en la literatura la observación de dificultades de forma recurrente en el salón de clases. Kamii (1994), habla de cómo una baja capacidad de cálculo en la suma y resta de fracciones, saca a la luz dificultades en la equivalencia de fracciones. Así mismo menciona que el porcentaje de estudiantes que tuvieron respuestas correctas en problemas de cálculo, muestra que algo está claramente mal con la manera en que las fracciones equivalentes y/o los comunes denominadores son enseñados.

Continuando con procedimientos específicos, el orden de las fracciones es un tema que presenta dificultades para los estudiantes en lo que respecta a destrezas de cálculo

y comprensión conceptual. Más concretamente, la dificultad en la comparación de dos fracciones puede variar mucho dependiendo de los numeradores y denominadores involucrados, y de las relaciones entre los números. La obtención del común denominador (procedimiento involucrado con la suma y resta) también es un procedimiento que presenta dificultades para los estudiantes, principalmente en lo que respecta a recordar los pasos para obtenerlo. Por su parte en la suma de fracciones, existe una notoria dificultad para comprender la relación entre numerador y denominador, los cuales en ocasiones, son sumados como si fueran enteros sin ninguna relación entre sí (Cubillo y Ortega, 2003; Parra y Flores, 2008).

Respecto de la suma de fracciones, Bezuk y Cramer (1989) y Siegler *et al.*, (2013) mencionan que un error ampliamente observado en el aula es el que los estudiantes suman fracciones como si fuesen números enteros, es decir, suman numerador con numerador y denominador con denominador. Estos autores expresan que los estudiantes parecen operar con fracciones sin ninguna referencia mental que apoye su razonamiento, identificando que este error se debe a que los estudiantes asumen que lo que saben de los números enteros, se aplica de igual forma a las fracciones.

Operación		Procedimiento erróneo	Procedimiento correcto
1	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{(1)(3) + (2)(2)}{(2)(3)} = \frac{7}{6}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{(1)(2)}{3} = \frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{(2)(1)}{(3)(3)} = \frac{2}{9}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{((1)(3) + (2)(2))}{(2)(3)} = \frac{7}{6}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{(1)(2)}{(2)(3)} = \frac{2}{6}$

Cuadro I: Procedimientos erróneos y correctos.

Realmente no es como si los estudiantes no fueran buenos del todo en llevar a cabo procedimientos, de hecho, estos suelen ser más competentes en efectuar el algoritmo o procedimiento, que en el razonamiento de éste. Sin embargo, los procedimientos que aprenden en muchas ocasiones no poseen significado alguno para ellos, pues al preguntarles ¿por qué los aplican? la gran mayoría responde que no sabe o porque así se les explicó, lo cual habla de un bajo o nulo razonamiento (comprensión) de los procedimientos (Lindquist *et al.*, 1983 en Bezuk y Cramer, 1989; Sari, Juniati y Patahudin, 2012).

3.3. Dificultades en la resolución de problemas

Algo que es ampliamente observado en el salón de clases, es que cuando se les presenta a los estudiantes dos problemas que dan la misma información numérica y cuya descripción es similar, pero que le piden al estudiante que obtenga resultados distintos, es que estos no son capaces de distinguir entre uno y otro. Es decir, los estudiantes no son capaces de abstraer la estructura fundamental de los problemas. Esta situación tiene como consecuencia que los estudiantes no realicen una estrategia de resolución correspondiente y que generen simultáneamente respuestas erróneas y correctas (Kellman *et al.*, 2008; Siegler *et al.*, 2013).

Parra y Flores (2008) identifican tres concepciones que obstaculizan el proceso de solución de los estudiantes: en un problema con fracciones el valor del entero siempre

es uno, al resultado se llega con una sola operación y la única cantidad mencionada en el problema equivale al entero. Es decir, hablan de cómo la poca diversidad y complejidad de los problemas propuestos dificultan el proceso de solución.

Una pregunta que repiten los estudiantes cada vez con mayor frecuencia es: ¿Cuándo voy a utilizar fracciones?, ya que no son capaces de ver que ese conocimiento puede estar hasta en las tareas más simples. Ross y Bruce (2009), expresan que la insuficiencia de conocimientos sobre fracciones trae consecuencias en la vida cotidiana de los estudiantes, puesto que les impide poder llevar a cabo ciertas tareas encomendadas por los adultos. Así mismo se mencionan algunas profesiones donde es muy importante la comprensión y el manejo de fracciones para resolver situaciones problemáticas, siendo estas enfermero, pediatra y farmacéutico.

3.4. En síntesis

Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones son una realidad, no sólo se presentan en los primeros años de enseñanza, sino que estas son llevadas a niveles superiores. Estas se pueden clasificar esencialmente en tres tipos: conceptuales, procedimentales y en resolución de problemas. Un aspecto muy importante que se puede observar a través de esta clasificación, es el hecho de que los tres tipos están ampliamente conectados. Si un estudiante tiene dificultades conceptuales, estas influyen en la posibilidad de que surjan procedimentales; si posee dificultades tanto

conceptuales como procedimentales, es un hecho que tendrá dificultades en la resolución de problemas; entre otros casos.

4. Preliminares

En el área de educación matemática¹ han surgido toda clase de conceptos que, para profundizar en la metodología de ingeniería didáctica, es necesario conocer. Los conceptos de sistema didáctico, contrato didáctico y secuencia didáctica si bien no nacieron dentro de la metodología, son aspectos importantes dentro de su teoría. Mientras que las definiciones de situación didáctica, situación a-didáctica, medio, variable didáctica, realización didáctica e institucionalización, son conceptos propios de las Teoría de las situaciones didácticas, que a su vez es base de la metodología de ingeniería didáctica, de igual forma que la Transposición Didáctica.

Contrato didáctico: Es aquello que rige de manera más o menos explícita las expectativas respectivas del estudiante y el profesor en relación con el conocimiento (Artigue, 1995, p.12).

Institucionalización: Es el proceso llevado a cabo después del momento de aprendizaje, mediante el cual el docente presenta a los estudiantes los conocimientos a partir de lo producido por ellos. En este se recapitula, sistematiza, ordena, organiza, relaciona y da cuenta de lo que produjeron los estudiantes vinculándolo con el

¹ Educación Matemática es un término que engloba a las denominaciones: *Mathematics Education*, *Didactique des mathématiques* y Matemática Educativa, de acuerdo a las fuentes consultadas. En México se hace referencia a la disciplina de Matemática Educativa.

conocimiento en cuestión, con el fin de establecer una relación de las producciones del estudiante y el saber cultural (Brousseau 2007 citado en Angles, 2015).

Medio: Se define como el objeto de la interacción de los estudiantes: es la tarea específica que deben llevar a cabo, y las condiciones en que deben realizarla, es decir, el ejercicio, el problema, el juego, incluyendo los materiales, lápiz y papel u otros. En una acepción un poco más amplia, el medio al que el estudiante se enfrenta incluye también las acciones del maestro, la consigna que él da, las restricciones que pone, las informaciones y las ayudas que proporciona, y podríamos agregar, las expectativas que tiene sobre la acción de los estudiantes y que mediante mecanismos diversos transmite (Block, 2000, p.27).

Realización didáctica: Se trata de la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza (Artigue, 1995).

Secuencia didáctica: es una sucesión premeditada de actividades planeadas para ser desarrolladas en un determinado período de tiempo y a través de las cuales se lleva a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje (Rodríguez, 2013).

Sistema didáctico: Es un sistema que se encuentra conformado por la triada de actores: Estudiante, profesor, conocimiento (saber a enseñar), y las relaciones que hay entre estos (Escolá, 2001).

Situación a-didáctica: Es una situación en la cual no se revela la intención de enseñar al estudiante, esto se debe a que es un momento de aprendizaje y no de enseñanza, donde la situación que se le presenta al estudiante es imaginada, planeada y construida por el profesor para proporcionarle al estudiante todas las condiciones de tal manera, que sea favorable al aprendizaje del nuevo saber que se desea enseñar. Esperándose que el estudiante asuma el problema (que forma parte de la situación) planteado como propio (Almouldud 2007 citado en Angles 2015; Block, 2000).

Situación didáctica: Es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un estudiante o un grupo de estudiantes, el medio-profesor y el saber. Dichas interacciones tienen como fin el permitir a los estudiantes aprender, esto es, reconstruir algún conocimiento (Díaz, 2006; Block, 2000).

Transposición didáctica: Es el proceso mediante el cual el saber sabio pasa a ser un saber enseñado (Chevallard, 1991).

Variable didáctica: Es un parámetro que impone una restricción al conocimiento matemático puesto en juego dentro de un problema. A este parámetro se le da un valor determinado en el problema con base en la estimación que el profesor hace de las consecuencias eventuales de éste en el proceso de aprendizaje del estudiante (Valero, 1997, p.12).

5. Ingeniería didáctica

5.1. Definiciones y aspectos generales

La noción del término ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas, (nombre que toma la disciplina de Educación Matemática en Francia) a principio de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau y de la Transposición Didáctica (TD) de Yves Chevallard, siendo estas el sustento teórico de la ingeniería didáctica. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (Artigue, 1995; Campos, 2006; y Escolá, 2001).

La TSD trata de una teoría de la enseñanza sustentada en una concepción constructivista, la cual busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea. Ésta aporta principalmente el objeto “situación didáctica” como

una herramienta que busca la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje, así como los conceptos de: situación a-didáctica, variable didáctica, contrato didáctico, medio, devolución e institucionalización (Artigue, Douady y Moreno, 1995; Panizza, 2003).

La TD (ver Figura 2) es el proceso mediante el cual se transforma el “saber sabio” en “saber enseñado” (Chevallard 1991).

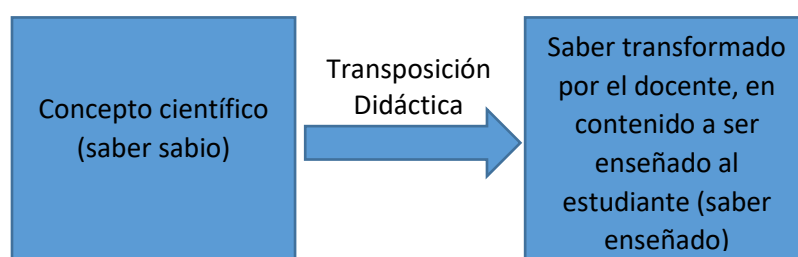


Figura 2: Transposición Didáctica

El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de estudiantes (Douady, 1995).

En realidad, el término ingeniería didáctica en didáctica de las matemáticas, y en general dentro de la didáctica, posee una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, basadas en resultados de investigaciones que han utilizado metodologías externas a la clase, como lo son cuestionarios, entrevistas y tests (Artigue, 1995, Campos, 2006).

En este trabajo se abordan las características de la ingeniería didáctica como metodología de investigación.

5.2. La ingeniería didáctica como metodología de investigación

La ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Se distinguen por lo general dos niveles: el de micro-ingeniería y el de macro-ingeniería, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. Las investigaciones de micro-ingeniería tienen por objeto el estudio de un determinado tema, son locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula. Por otra parte, las investigaciones de macro-ingeniería se refieren a procesos de varios años de duración, que pueden englobar varios conceptos relacionados entre sí, que se interesan por ejemplo por la articulación de distintos conocimientos o estrategias globales de aprendizaje. Éstas, a pesar de todas las dificultades metodológicas e institucionales, se hacen indispensables (Artigue, 1995; Campos, 2006; Chamorro, 2003).

Los objetivos de una investigación que aplica la metodología ingeniería didáctica pueden ser diversos, por ejemplo hay investigaciones que abordan el estudio de los procesos de aprendizaje de un concepto determinado; otros trabajos apuntan al dominio

paramatemático, es decir, aquel de las nociones que, como aquellas de parámetro, ecuación, demostración, guardan un estatus de herramienta en la enseñanza, al menos en un nivel determinado; otras investigaciones abordan el estudio y la aplicación de estrategias didácticas globales, entre otras. La metodología se caracteriza por basarse en la experimentación en clase, por ubicarse en el registro de estudio caso o análisis de caso y por su forma de validación asociada, en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*. Por lo tanto, esta metodología es singular no por los objetivos de las investigaciones que entran en sus límites, sino por las características de su funcionamiento metodológico (Artigue, 1995).

5.3. Fases de una ingeniería didáctica

Artigue (1995), Campos (2006) y Gutiérrez (2009) dividen a la ingeniería didáctica en cuatro fases: 1) análisis preliminar, 2) concepción y análisis *a priori*, 3) experimentación y 4) análisis *a posteriori* y validación. Ríos (2007) por otro lado la divide en tres, uniendo las dos últimas fases como una sola. Con base en lo descrito por estos autores sobre las fases de la metodología, se llegó a lo que se establece a continuación.

5.3.1. Análisis preliminar

Se refiere a los conocimientos teóricos didácticos generales y específicos del campo de estudio; y a una serie de análisis preliminares, siendo los más frecuentes:

- a) El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- b) El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- c) El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- d) El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la secuencia didáctica.

Los objetivos específicos de la investigación llevan a elegir los tipos de análisis que se realizarán, dentro de los cuáles se distinguen tres dimensiones: didáctica, cognitiva y epistemológica.

a) **La didáctica:** toca todo aquello que tiene que ver con la enseñanza y aprendizaje del contenido.

b) **La cognitiva:** toma en cuenta el componente cognitivo de la población que va a ser sometida a la secuencia didáctica, las dificultades y obstáculos que deben de enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego en la secuencia implementada, especificando las concepciones que tienen los estudiantes, las cuales son de dos tipos: las concepciones espontáneas o *a priori* desarrolladas antes de que el sujeto haya sido sometido al aprendizaje oficial y las concepciones desarrolladas en el contexto del proceso de aprendizaje.

c) **La epistemológica:** toma en cuenta la evolución histórica de los conceptos matemáticos, las diferencias entre el saber científico y el saber enseñado, y las dificultades que se presentan al enseñarse mal algún concepto.

5.3.2. Concepción y análisis *a priori*

En esta segunda fase, se lleva a cabo el diseño de la ingeniería, es decir, de la o las secuencias didácticas. El investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema didáctico no fijadas por las restricciones, estas son las variables de comando que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado. Dividiéndose en:

a) Variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería.

b) Variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización de una secuencia o de una fase.

Ambas pueden ser generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza.

El análisis *a priori* comprende una parte descriptiva y una predictiva. Se centra en las características de una situación a-didáctica que se ha querido diseñar y que se va a tratar de llevar a los estudiantes:

a) Se describen las selecciones del nivel local (relacionándolas eventualmente con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.

b) Se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.

c) Se prevén los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

El objetivo del análisis *a priori* es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*.

5.3.3. Experimentación

La experimentación es el momento en el cual se ejecuta lo planificado en la ingeniería didáctica. Es la fase de la realización de ésta con una cierta población de estudiantes,

iniciando en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes objeto de la investigación. La experimentación supone:

- a) La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- b) El establecimiento del contrato didáctico.
- c) La aplicación de los instrumentos de investigación.
- d) El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una sesión, hacer un análisis *a posteriori* local, confrontando con los análisis *a priori*, con el fin de hacer las correcciones necesarias. Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis *a priori*.

Las formas en las cuales se recopilará la información son decisión del investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

5.3.4. Análisis *a posteriori* y validación

El análisis *a posteriori* consiste en analizar el conjunto de datos recogidos tales como las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza y las producciones de los estudiantes; se pueden complementar con cuestionarios, entrevistas individuales o en

pequeños grupos, aplicadas durante el momento de enseñanza. La validación de las hipótesis se realiza con la confrontación de los análisis: *a priori* y *a posteriori*.

6. Revisión de ingenierías didácticas en el tema de fracciones

A continuación, se presenta una revisión de diversas ingenierías didácticas en el tema de fracciones. La estructura de forma general es: objetivo, análisis preliminar, variables didácticas, hipótesis, secuencia de situaciones, aspectos metodológicos (tipos de análisis hechos, herramientas para recoger información, entre otras), análisis *a posteriori* y validación. Así mismo se presenta una breve reflexión por ingeniería.

6.1. Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones, Ríos (2007)

El objetivo general de la investigación es determinar la efectividad de la aplicación de la metodología de ingeniería didáctica en el tema de fracciones, esto en estudiantes del primer semestre del 2004 de la Licenciatura en Educación, Mención Matemática y Física, en Venezuela.

Es importante aclarar que este trabajo es una modificación (rediseño) de una versión desarrollada en el 2002, en la cual para el análisis preliminar se hizo una revisión de textos y programas de Matemáticas de educación básica, y bibliografía sobre investigaciones referidas al proceso de aprendizaje de las fracciones. Además, se tomaron en cuenta las observaciones realizadas a maestros y profesores.

El análisis preliminar del rediseño se conforma de una revisión de la teoría de las situaciones didácticas (aportando los elementos de error y obstáculo), la metodología de ingeniería didáctica, las diversas representaciones conceptuales que pueden tener las fracciones y bibliografía sobre investigaciones referidas al proceso de aprendizaje de las fracciones.

La estructura lógica de las Matemáticas plantea que se debe pasar del conocimiento de los números naturales a los enteros, después a los racionales, continuando con los reales y finalmente con los complejos. Esta secuencia “lógica” contradice el surgimiento natural histórico de los conjuntos numéricos, el cual fue: los naturales, las fracciones (de numerador y denominador naturales), irracionales, enteros, números racionales y reales. Afirmando que esta situación se repite con las fracciones, puesto que su evolución histórica no coincide con la secuencia en la enseñanza de las fracciones en su país.

Analizando algunos informes de ciertos historiadores matemáticos, hay un acuerdo en el hecho de que las fracciones aparecen en la resolución de problemas sobre repartos, esto en Egipto (1650 a.C.), por lo que pareciera que las fracciones surgen en este contexto y no conciben a la fracción como número, sino que $\frac{a}{b}$ representaba la cantidad que le tocaba a una persona, entre un conjunto de b personas, al dividir a panes.

Haciendo la comparación entre la evolución histórica de las fracciones y la secuencia de enseñanza en las aulas de su país, expresa que se debe hacer una revisión de estos aspectos, pues quizás la enseñanza de la Matemática debe responder a su evolución histórica.

Respecto a la enseñanza tradicional, se habla que por mucho tiempo y hasta la actualidad, en la enseñanza del concepto de fracción, ha predominado este tipo de enseñanza donde el docente expone una serie de contenidos y por último se resuelven “problemas” relacionados a estos contenidos. Algunas de las secuencias instruccionales y las características de estas que privan al concepto de fracción son: la presentación de la definición bajo la interpretación parte todo con representaciones gráficas con figuras geométricas (al trabajarse la fracción impropia usando esta concepción no se le encuentra significado al hecho de que se van a tomar más partes de las que se ha dividido la unidad), se trabaja el proceso de simplificación de fracciones de forma algorítmica (sin dársele una interpretación gráfica en los niveles iniciales, ni algebraica en niveles avanzados), entre otras.

Para la investigación se toma en consideración cómo en teoría los estudiantes representan y relacionan las diversas interpretaciones del concepto. Así como las representaciones iniciales de los estudiantes sobre el concepto de fracción, las cuales se obtuvieron a través de los resultados de un cuestionario inicial (ver anexo A).

Se afirma que las dificultades para aprender fracciones se deben a las diversas representaciones conceptuales (concepciones, interpretaciones, constructos, acepciones) que admite este concepto.

Un obstáculo para el aprendizaje del estudiante es el hecho de que las representaciones de conceptos matemáticos que suelen adquirirse en el sistema escolarizado, en muchas ocasiones, son el resultado de las experiencias previas del estudiante y/o son el resultado de la combinación de éstas con las experiencias vividas en el aula. Esto provoca dificultades al momento de tratar de entender algún concepto matemático, puesto que no tienen una organización sistemática y mucho menos se establecen relaciones entre ellas.

Realizado el análisis preliminar se procede a iniciar con la concepción de la ingeniería didáctica, para ésta se consideran las variables:

- A) Definición de fracción
- B) Tipos de representaciones de la fracción: parte todo con unidad continua, reparto con unidad continua, parte todo con unidad discreta, reparto con unidad discreta y razón.
- C) Traslado de representación: simbólica a verbal, gráfica a simbólica y simbólica a simbólica.
- D) Propiedad del inverso multiplicativo

E) Proporcionalidad

F) Operaciones combinadas entre fracciones

G) Fracciones equivalentes

H) Resolución de problemas

I) Errores

J) Estrategias: tormenta de ideas, técnica de la pregunta, resolución de problemas y comunicación interactiva (docente-estudiante)

Estas variables se consideran de distintas formas, por un lado, se tienen en cuenta de la (A) a la (I) en la elaboración del cuestionario inicial. De la (A) a la (H) cada variable representa un tema y por cada uno se elabora una cierta cantidad de reactivos, así, por variable se considera: cantidad de respuestas correctas e incorrectas, y la calidad de la justificación. La variable “errores” se maneja de la siguiente forma.

a. Tipo:

i. Semánticos.

ii. Sintácticos.

iii. De razonamiento

iv. De cálculo.

b. Frecuencia

Para la concepción de la secuencia las variables de la (A) a la (H) pasan a ser valores de las variables: conocimiento conceptual, conocimiento procedimental. La variable (J) no sufre cambios.

- a) Conocimiento conceptual:
 - a. Definición de fracción
 - b. Definición de fracciones equivalentes
 - c. Tipos de representaciones de la fracción:
 - i. Parte todo.
 - ii. Reparto.
 - iii. Razón.
 - d. Traslado de representación:
 - i. Simbólica a verbal.
 - ii. Grafica a simbólica.
 - iii. Simbólica a simbólica.
 - e. Propiedad del inverso multiplicativo.
 - f. Proporcionalidad.
- b) Conocimiento procedimental:
 - a. Operaciones combinadas entre fracciones.
 - b. Fracciones equivalentes.
 - c. Resolución de problemas.
- c) Estrategias
 - a. Tormenta de ideas.
 - b. Técnica de la pregunta.
 - c. Resolución de problemas.

d. Comunicación interactiva (docente-estudiante)

En el análisis *a priori* se consideran dos hipótesis: los seres humanos no aprenden del mundo directamente; y la mente es un sistema procesador de información, que utiliza funciones cognitivas de información tales como la percepción, memoria, lenguaje y pensamiento.

Se trabaja con una muestra de 26 estudiantes de un total de 40 durante seis semanas, tres sesiones semanales de 45 minutos cada una. Hay que destacar que el trabajo no presenta la secuencia de situaciones. Al finalizar las actividades se aplica el cuestionario inicial. Con base en los resultados se realizan cuatro tipos de análisis: diferenciación del grupo antes y después del tratamiento, efectividad de la ingeniería didáctica, errores, y contenido.

En el análisis *a posteriori* expresa que los resultados de la aplicación de la ingeniería didáctica muestran su efectividad cuantitativa en los aspectos siguientes: representaciones parte todo y reparto de unidades discretas y continuas, representación razón, resolución de problemas, operaciones combinadas, fracciones equivalentes, definición de fracción, la propiedad del inverso multiplicativo y traslado de la

representación simbólica a la verbal; y a través del porcentaje de respuestas correctas, el cual superó el 70%².

Por otro lado, la efectividad cualitativa se traduce en cambios tales como: la forma de expresar algunas ideas en lenguaje formal, que inicialmente eran expresadas en lenguaje coloquial; y eliminación de errores (repartición desigual de la totalidad, operaciones inadecuadas entre números enteros y la utilización del signo de igualdad, entre otros).

6.1.1 Reflexión del estudio de Ríos (2007)

Por su amplia conexión con el resto de las fases los análisis preliminares son de gran importancia, la extensión y profundidad de estos son factores importantes que influyen en el desarrollo de las fases siguientes. En este trabajo no se muestran por completo los análisis preliminares. Es deducible que estos debieron de ser más extensos, pero que en su lugar se optó por mostrar lo esencial, lo que facilitó la lectura, comprensión y parte del proceso de revisión. Desafortunadamente no se muestra lo suficiente como para vincularlos con el resto de las fases.

La secuencia didáctica es el producto central de la metodología, dado que es el resultado de todo el trabajo teórico del investigador (análisis preliminares, selección de

² Criterio de decisión: porcentaje mayor al 70%, ingeniería didáctica efectiva sobre el indicador

variables y análisis *a priori*) y que mediante su aplicación se obtiene la información para llevar a cabo el análisis *a posteriori* y la validación. En lo que respecta a este trabajo, la falta de la secuencia didáctica, del análisis *a priori*, así como de los resultados obtenidos por sesión/situación, impidió el poder analizar más a fondo la ingeniería como para sugerir modificaciones. La ausencia de estos elementos resta peso a los resultados reflejados en el análisis *a posteriori*.

El análisis *a posteriori* y la validación son dos procesos ampliamente conectados, si bien el segundo depende en parte del primero para ser llevado a cabo, la naturaleza del segundo influye en el primero. Puesto que la validación no debe reducirse a un proceso estadístico, el análisis *a posteriori* no debiera ser puramente de dicho tipo. En este trabajo se realizaron dos tipos de análisis: cuantitativo y cualitativo. El primer tipo de análisis da una primera noción de lo efectiva que fue la ingeniería aplicada, esto lo hace a través del porcentaje de respuestas correctas de los estudiantes, sin embargo, no va más allá de lo estadístico. El segundo tipo de análisis refleja en qué aspectos afectó a los estudiantes la ingeniería y cómo lo hizo, en lo que respecta a la teoría fue el más acertado de llevar a cabo, dado que es en este tipo de información en el que se refleja la validez de las hipótesis planteadas, es decir, hacen posible llevar a cabo el proceso de validación. A pesar de que el análisis cualitativo debió proporcionar información suficiente para realizar el proceso, no se encontraron indicios de que se haya llevado a cabo, por lo cual desde la perspectiva de la teoría no se puede concluir que la aplicación de la metodología

fue un éxito, aunque los resultados indiquen (de acuerdo al criterio establecido por el autor) que sí lo fue.

6.2. La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica, Tovar y Sevilla (2005)

El estudio busca explorar el potencial didáctico para el aprendizaje de la noción de fracción, a partir de un tipo de problema prácticamente ausente en la enseñanza escolar en el nivel primaria: la división de una fracción de unidad entre un natural³, en quinto año.

Para el análisis preliminar se examina teoría de la metodología de ingeniería didáctica y se lleva a cabo una revisión curricular. La revisión de los programas muestra que la división de una fracción entre un número natural no ocupa un lugar explícito en estos, aunque es posible encontrar en los textos oficiales para el maestro, situaciones aisladas que la implican. Así mismo ésta permite comprobar que los estudiantes dispondrán de los antecedentes necesarios para abordar los problemas que se plantearán.

El diseño de la secuencia de situaciones se hace a partir de la identificación de algunos problemas para los cuales el conocimiento en juego podía constituir una herramienta de solución. Se identifican algunas variables didácticas de dichos problemas, anticipando sus efectos sobre los procedimientos de los estudiantes:

- a) Elección de un tipo de problema: división como reparto.

³ Los autores trabajan la división sobre un natural, sin embargo en distintas etapas del trabajo hacen referencia a la división sobre un entero. En esta revisión se hará referencia la división sobre un natural.

- b) Elección de un tipo de magnitud: la longitud, y de la variable fracción unitaria-no unitaria.
- c) División de fracciones unitarias de superficie.
- d) División de fracciones unitarias de longitud.
- e) División de fracciones no unitarias de superficie.
- f) División de fracciones no unitarias de longitud.

Se decide trabajar la división como reparto y la longitud como la magnitud involucrada en los problemas, trabajándose por separado problemas con fracciones unitarias y no unitarias. Es decir, se descartan la variable c) y e).

Respecto al análisis *a priori*, la hipótesis central de la investigación es que el estudio de la operación de división de una medida fraccionaria entre un número natural puede favorecer una comprensión más profunda de la noción de fracción.

Dos afirmaciones realizadas por el autor son interpretadas como hipótesis secundarias, dada su redacción y que fueron hechas en la sección de variables didácticas:

- 1) los problemas de partición con divisor entero son presumiblemente más sencillos para los estudiantes; y
- 2) la longitud es una magnitud que permite una manipulación sencilla de los objetos portadores, facilita las representaciones gráficas y es con la que los estudiantes han tenido más experiencia escolar.

La secuencia didáctica se aplica sobre un grupo de 33 estudiantes, por parte de su maestra de matemáticas con la asesoría de uno de los investigadores. La secuencia está compuesta por tres partes, conformadas por ocho situaciones didácticas, llevadas a cabo en nueve sesiones. En el cuadro II se resume la secuencia de situaciones y en el anexo B se presenta la descripción de la situación “forma tus banderas”.

Parte	Propósito	Tareas	Material
I: “La hoja rayada”	-Aprender a utilizar un entramado de líneas paralelas equidistantes para realizar particiones de segmentos, con la idea de que los estudiantes utilicen este recurso en el trabajo posterior (3 sesiones).	-Hacer uso de la hoja rayada para dividir un segmento en “x” partes. Ejemplo: dividir un segmento en 14 partes, disponiendo de una hoja con solamente 10 rayas paralelas.	-Hoja rayada con líneas paralelas equidistantes.
II: Fracción unitaria entre naturales	-Desarrollar procedimientos para dividir fracciones unitarias entre un número natural (4 sesiones).	-Construir una bandera utilizando dos tramos de distintos colores (rojo y azul), esto por equipos (situación “forma tus banderas”, sesión 1).	-Tramos rectangulares de cartoncillo: rojo, azul y amarillo.
		-Verificar la fracción de tira obtenida al dividir $\frac{1}{4}$ de tira amarilla entre los integrantes de los equipos (situación “forma tus banderas” simplificada, sesión 2).	
		- Resolver divisiones ($\frac{1}{4} \div 6$; $\frac{1}{5} \div 3$ y $\frac{1}{5} \div 10$).	
		-Calificar como correctos o incorrectos resultados dados de divisiones y justificar la calificación (sesión 3).	
III: Fracción no unitaria	-Analizar la factibilidad de que los estudiantes utilicen	-Dada una división ya resuelta ($\frac{1}{5}$ de tira entre 3), escribir con notación matemática la operación presente (sesión 4).	-Papel -Lápiz
		-Resolver la división $\frac{2}{5}$ de tira entre 3, esto en grupos.	

entre naturales ⁴	el procedimiento para dividir una fracción unitaria como estrategia base para construir otro que permita dividir fracciones no unitarias (2 sesiones, la última fuera de clase).	-Resolver las divisiones $\frac{3}{5} \div 3$, $\frac{4}{5} \div 3$ y $\frac{4}{5} \div 5$ (esta actividad sólo es aplicada a tres estudiantes).	-Tiras de cartoncillo
------------------------------	--	---	-----------------------

Cuadro II: Secuencia de situaciones

Los resultados de la parte I⁵ no se presentan debido a que por un lado el recurso de la hoja rayada no fue retomado en las situaciones siguientes y por otro lado porque participaron muy pocos estudiantes.

Para la recuperación de datos se opta por obtener información del desempeño de la mayor parte posible del grupo, turnando los equipos que son observados, lo cual permite tener una visión general del desempeño del grupo completo, pero no un seguimiento por estudiante. Este proceso lo lleva a cabo un observador, siendo éste el investigador que asesora a la maestra. Así el conjunto de datos a analizar está formado por el registro del observador, las hojas de trabajo de los estudiantes y el análisis preliminar.

Respecto del análisis *a posteriori*, en el caso de las divisiones de fracciones unitarias, una parte importante del grupo pudo establecer que el cociente de $\frac{1}{a}$ entre n es $\frac{1}{na}$ y argumentarlo. Este logro supuso: 1) recuperar la unidad de referencia original para

⁴ En esta parte no se separan las actividades por sesiones, se deduce que esto se debe al tiempo que podría llevar la realización de la primera de éstas.

⁵ Se desconoce si se llevaron a cabo más actividades en esta parte.

identificar la fracción resultante, 2) por ejemplo, para la división $\frac{1}{4}$ de U entre 6, da como cociente $\frac{1}{24}$ de unidad en vez de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{6}$ de unidad, y 3) hacer explícito que al multiplicar el denominador la fracción disminuye de tamaño.

La división de fracciones no unitarias entre un natural resultó más difícil: sólo 13 de 33 estudiantes lograron resolver el primer problema, y aproximadamente 10 más pudieron abordarlo mediante un procedimiento correcto. El procedimiento exitoso más utilizado fue, como se previó, el que descompone el problema de la división de fracciones no unitarias en divisiones de fracciones unitarias.

$$a/b:n = a \text{ veces } (1/b:n).$$

Imagen recuperada 1: Procedimiento realizado por los estudiantes

Se identificó además un bosquejo de otro procedimiento que consiste en sustituir la fracción que se divide por otra equivalente cuyo numerador sea múltiplo del divisor y luego “repartir”.

$$2/5:3 = 6/15:3 = 2/15$$

Imagen recuperada 2: Procedimiento realizado por los estudiantes

Una gran parte de las dificultades que los estudiantes tuvieron al intentar resolver las divisiones de fracciones no unitarias se originaron en el hecho de que tendieron a perder de vista la unidad de referencia de las fracciones.

Se observa que los riesgos de error aumentaron considerablemente cuando, en sus representaciones gráficas, los estudiantes omitieron la parte del entero que no es objeto de reparto. La superación de estos errores pasa por explicitar la unidad de referencia y por comprender que, al variar la unidad, varía la medida. Estos aspectos forman parte esencial de una buena comprensión de las nociones de fracción y de medida.

Dentro de las situaciones planteadas se destaca la situación “forma tus banderas” debido a que esta no funcionó, sin embargo, esto fue superado realizando modificaciones a dicha situación, pasando a ser más simple y directa.

Finalmente, debido a las dificultades en el diseño de la situación “forma tus banderas” y al hecho de que no fue posible identificar los avances individuales de todos los estudiantes que participaron en la experiencia, los autores expresan que no pueden ser suficientemente concluyentes respecto a su hipótesis de partida, a saber, que el estudio de la operación de división de una medida fraccionaria entre un número natural puede favorecer una comprensión más profunda de la noción de fracción. Sin embargo, se hace hincapié en que los resultados sugieren fuertemente que la hipótesis podría verificarse.

Adicionalmente se señalan algunos de los puntos que convendría considerar en un segundo estudio: abarcar una gama más amplia de variantes, en particular, anteponer o intercalar el caso de las superficies rectangulares; intercalar casos en los que el

numerador es múltiplo del divisor; rediseñar la situación para la división de medidas fraccionarias unitarias, y prolongar un poco más tiempo el trabajo.

6.2.1 Reflexión del estudio de Tovar y Sevilla (2005)

En el análisis *a posteriori* se observaron ciertos aspectos relacionados con el éxito de las situaciones y las dificultades de los estudiantes. Respecto del caso de las divisiones de fracciones unitarias entre un natural, si bien la situación inicial “forma tus banderas” (ver anexo B) no funcionó, las modificaciones realizadas permitieron que se cumpliera el objetivo de la situación original. En general el resto de las situaciones correspondientes a este caso tuvieron éxito, esto se le atribuye en parte al hecho de que se trabajó con fracciones unitarias. Como parte de los resultados se destaca el establecimiento de un procedimiento sistemático para dividir una fracción unitaria entre un natural.

Respecto del caso de las divisiones de fracciones no unitarias entre un natural, si bien este tipo de problema resultó más difícil para los estudiantes, disponiendo de una sesión más se podría haber planteado una nueva actividad destinada para los estudiantes que no lograron resolver los problemas, apoyados de los compañeros que sí lo hicieron. Con una actividad de este tipo quienes ya comprendieron refuerzan los conocimientos y facilita el entendimiento de quienes no comprendieron mediante el trabajo entre iguales.

En la validación hay un desacuerdo con la argumentación de los autores en lo que respecta a la situación “forma tus banderas”. Si bien no se pudo llevar a cabo la situación original de forma exitosa, esto se superó, por lo cual no se considera que pudiera influir de forma que impidiera el proceso de validación. Respecto al hecho de que no fue posible identificar los avances individuales de todos los estudiantes que participaron en la experiencia, en las actividades pudo haberse implementado el uso de hojas para que los estudiantes escribieran sus procedimientos, complementando así la información recabada por el observador.

6.3. Influencia de la metodología “Ingeniería Didáctica Matemática” en el aprendizaje de los números fraccionarios de los estudiantes de 7Mo grado de la unidad educativa José Antonio Ramos Sucre, Díaz (2006)

El propósito de la investigación es determinar cómo influye la metodología aplicada en el tema de fracciones, en el rendimiento académico de los estudiantes de 7mo grado de la III Etapa de la Educación Básica Venezolana, de la U.E. José A. Ramos Sucre de la Ciudad de Cumaná, Estado Sucre, en el año escolar 2005-2006.

Cabe destacar que la investigación va más allá de la aplicación de esta metodología, se hace uso de un grupo de control al que se le aplica la metodología tradicional sugerida por el manual del docente para este grado y de un grupo experimental al que se le aplica la metodología de ingeniería didáctica. Se le aplica una pre-prueba al grupo de control y post-prueba al grupo experimental (siendo ambas pruebas escritas), y se contrastan los resultados con el propósito de comparar las metodologías.

En el análisis preliminar se realiza una revisión de: Teoría de las situaciones didácticas, ingeniería didáctica, constructivismo en general, radical y social; las interacciones entre el estudiante y el profesor, el procesamiento de la información, transposición didáctica, Teoría de los Campos Conceptuales, contrato didáctico, los obstáculos y sus tipos, todo esto en relación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se menciona que históricamente los estudiantes han percibido los “números fraccionarios” como un contenido de difícil comprensión, lo que incide en su rechazo y desmotivación para acceder a su aprendizaje.

Concluye que el uso de estrategias tradicionales, lejos de fortalecer la adquisición de conocimientos, ha influido en un aprendizaje memorístico de los números fraccionarios que limitan el logro de un aprendizaje significativo. Así mismo, este tipo de enseñanza ha privilegiado o se ha centrado en el cuadro aritmético o numérico despreciando al cuadro geométrico.

Como parte del análisis se recopilan las planillas de “Resumen de notas definitivas del tercer lapso” en el Departamento de Evaluación de la U.E. José A. Ramos Sucre, en donde se refleja el rendimiento académico de 17 grupos de 7mo grado en la unidad programática “números fraccionarios” (las calificaciones reflejadas son el resultado de la denominada pre-prueba, ver anexo C y D), comprendido entre los años escolares 1996 al 2004. El análisis de éstas muestra que el 40.05% de los estudiantes aprobó, y el 59.95% reprobó.

Las situaciones son seleccionadas y diseñadas del cuaderno estructurado de matemática de Pedro Alson *Números fraccionarios*, las cuales se usan para abordar la unidad programática “números fraccionarios”, cuyo contenido está conformado por los

elementos epistemológicos: la fracción utilizada como medida, medidas equivalentes, comparación de medidas, la fracción utilizada como proporción, proporciones equivalentes, comparación de proporciones, la fracción, valor numérico de una fracción, orden de fracciones, fracciones equivalentes y operaciones con fracciones.

Las situaciones son aplicadas sobre una muestra de cuatro grupos, siendo 91 estudiantes originalmente y reduciéndose a 53 (siendo este el grupo experimental). Esta muestra es intencional, ya que está conformada por grupos a cargo del investigador. La experiencia se lleva a cabo de noviembre del 2005 hasta mayo del 2006, en sesiones de cuatro horas semanales con una duración de 40 minutos cada una.

Las situaciones didácticas aplicadas son:

- a) La medida desde adentro o interna.
- b) La proporción.
- c) La fracción y operaciones.

El ya mencionado cuaderno de Pedro Alson fortalece la relación estudiante-profesor.

Por ello las actividades vienen enmarcadas de dos maneras.

- a) Doble marco: es la actividad que el profesor realiza en el pizarrón para que los estudiantes sepan qué hacer.
- b) Marco sencillo: son actividades que realizan los estudiantes, las cuales se dividen en dos tipos:

- a. Aquellas que el estudiante realiza en clase, inmediatamente después que el profesor explica el modelo de cómo proceder.
- b. Aquellas actividades que el estudiante realiza en casa como tarea asignada, para practicar y repensar en otro contexto lo hecho en clase.

A lo largo de la experiencia se aplican seis pruebas a cada uno de los grupos (una cada cuatro sesiones) y se dejan tareas.

La metodología tradicional es aplicada por distintos docentes a los 17 grupos de 7mo grado entre los años escolares 1996 al 2004, este conjunto se denominó el “grupo de control”. El proceso didáctico de clase llevado a cabo con este grupo, se realiza en el tercer lapso comprendido entre los meses de abril y junio de los años escolares ya mencionados, esto en sesiones de cuatro horas semanales con una duración de 40 minutos cada una. La unidad programática desarrollada en clase es la de números fraccionarios, cuyo contenido está conformado por los siguientes elementos epistemológicos: fracción, expresión decimal, fracciones equivalentes, comparación de fracciones y operaciones con fracciones.

Para el análisis *a posteriori* se recolectaron las calificaciones de las pruebas aplicadas a las cuatro secciones, sus tareas e intervenciones. El promedio de las calificaciones obtenidas en las 6 pruebas fue la calificación de la denominada post-prueba, estos resultados muestran que de 53 estudiantes un 75,47% aprobó y un 24,53% reprobó (Ver

anexo E). En general hubo una significativa participación de los estudiantes de manera espontánea.

La validación consistió en la confrontación de lo recabado en el análisis *a posteriori* con las calificaciones reflejadas en las planillas de Resumen de notas definitivas correspondiente a las 17 secciones de 7mo grado, comprendido entre los años escolares 1996 al 2004 (ver anexo C).

Con base en los resultados se realiza un análisis estadístico, el cual demuestra que la proporción de estudiantes aprobados tratados bajo la metodología ingeniería didáctica es mayor que la proporción de estudiantes aprobados bajo la metodología tradicional, lo que permite inferir que la metodología ingeniería didáctica es más eficiente que la metodología basada en estrategias tradicionales en relación con el contenido programático “números fraccionarios”.

6.3.1 Reflexión del estudio de Díaz (2006)

De acuerdo a la teoría en muchas ocasiones los análisis preliminares se ven sintetizados, es decir, no se muestran en su totalidad. En este trabajo si bien los análisis abordan ampliamente teoría didáctica, la cantidad de información mostrada de los análisis frecuentes es muy escasa para una síntesis (se muestra información de tres análisis frecuentes, en promedio cinco renglones por análisis) y para la cantidad de temas

que se dice que se abordó, por lo cual queda en duda el nivel de profundidad con el que se realizaron los análisis preliminares así como su extensión real.

Las variables didácticas son otros de los componentes importantes de la metodología, dado que es posible a partir de estas identificar las hipótesis tomadas en consideración para el análisis *a priori*, aún si estas no son declaradas explícitamente. En esta investigación se plantea la hipótesis de que no se muestran variables didácticas así como el análisis *a priori*, debido a que el cuaderno estructurado de donde fueron tomadas las situaciones originales no contenía dicha información. Siendo consecuencia de esta ausencia de elementos, la imposibilidad de identificar las hipótesis.

Como se dijo en otro momento, el análisis *a posteriori* y la validación son procesos que por su naturaleza no deben verse reducidos solamente a procesos estadísticos, pues esto se desprende de lo establecido en la teoría. En el trabajo revisado el análisis *a posteriori* se redujo a un proceso estadístico al sólo considerarse las calificaciones de las pruebas aplicadas, lo cual no coincide con lo que establece la teoría. De igual forma la validación pasó a ser un proceso estadístico.

Un aspecto del trabajo que sobresalió ampliamente fue la confrontación que hubo entre los resultados obtenidos de la aplicación de la metodología de ingeniería didáctica y el conjunto de calificaciones que reflejaban la aplicación de la metodología tradicional.

Debido a que mostró que la metodología de ingeniería didáctica fue más efectiva que la metodología tradicional en la enseñanza del tema de fracciones, hipótesis desarrollada desde la revisión bibliográfica de la metodología.

6.4. Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar, Peña (2011)

El objetivo general de la investigación es construir una propuesta didáctica que a través de un trabajo conceptual resignifique el algoritmo para operar aditivamente con fracciones. Esto sobre un grupo de sexto año de primaria, en el municipio de La Florida ubicado en Santiago de Chile.

En el análisis preliminar se hace una revisión de la Teoría de Situaciones Didácticas y se consideran las nociones de: convención matemática, tarea, técnica y resignificación. Así mismo se consideran algunos significados de fracción: parte de un todo, cociente, razón, operador, probabilidad, la fracción en los puntajes, como número racional, punto de una recta orientada, medida, indicador de una cantidad de elección en el todo, y porcentaje.

Según diferentes registros históricos, todo apunta a que fue la necesidad de medir y de resolver situaciones de reparto, en las que el objeto medido, o la medida de la porción repartida, resultó ser una cantidad no entera, lo que propició la emergencia de lo que hoy llamamos fracción.

Expresa que el uso social predominante del concepto de fracción, lo vincula a una relación parte-todo, pero que en la actualidad esta es utilizada en distintos contextos situacionales que dan origen a distintos significados.

Retomando los distintos significados mencionados anteriormente, afirma que no todos se presentan con la misma fuerza, ni cobran la misma importancia en el sistema escolar. Identifica los significados parte-todo, cociente, medida, operador y razón, como los principales conceptos de fracción (con base en un modelo que ha logrado un gran grado de validación social), dado que estos se consideran indispensables para llegar a resolver problemas en el campo de las fracciones. Con base en esto y en las investigaciones de distintos autores, se toma la decisión de centrarse en los significados de fracción como parte-todo y como medida, dado que estas señalan que los significados están íntimamente relacionados, siendo el primero el fundamento de la interpretación del segundo.

Respecto a los algoritmos aditivos menciona que, en la gran mayoría de los procesos de aprendizaje, este manejo aritmético se vuelve mecánico y sin sentido para el estudiante, lo que lo lleva o bien a reemplazarlos por otros con mayor significado, o bien a modificarlos, convirtiéndolos en procedimientos erróneos. Expresa que las razones para este manejo mecanicista son variadas, pero que se destaca, por una parte, la introducción demasiado temprana de la enseñanza del algoritmo en la escuela, y por

otra, la introducción desvinculada de un fundamento suficientemente concreto y natural de la operación.

Expresa que estas razones hacen ver claramente que no basta con un tiempo prolongado de trabajo sobre los algoritmos, sino una vinculación con el significado de cada uno de los pasos. Siendo aquí donde se hace necesaria la idea de resignificación de la fracción, a través del estudio de situaciones de medida, que es uno de los contextos originarios de las fracciones.

El estudio de las concepciones de los estudiantes se lleva a cabo mediante el análisis de la información recogida de tres entrevistas grupales aplicadas a un total de diecisiete estudiantes. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes no tienen claro el concepto de fracción, y han adquirido un conocimiento procedimental para trabajar con las fracciones, sin saber explicar sus fundamentos matemáticos.

Respecto de los libros de texto, menciona que estos están organizados con base a una premisa de adquisición de conocimientos por sobre una de construcción de estos. Las estrategias y las técnicas son entregadas por el texto en forma previa a su utilización en ejercicios y problemas, particularmente las técnicas de cálculo cobran un valor práctico. Se observa así, una ausencia de valoración del significado y la funcionalidad de los conocimientos matemáticos.

La secuencia didáctica tiene por objetivo central que los estudiantes construyan y justifiquen un procedimiento de cálculo para resolver problemas aditivos con fracciones, teniendo en cuenta los resultados obtenidos del análisis preliminar se determinan las ideas claves para conseguir tal propósito.

Primero, la secuencia debe permitir que los estudiantes amplíen el concepto de fracción, conceptualizándola como un número útil para cuantificar medidas y/o cantidades no enteras. En segundo lugar, debe abordar la noción de igualdad o equivalencia entre fracciones, de manera de poder establecer que en las fracciones, una misma cantidad se puede expresar con fracciones escritas en forma distinta. Además, es preciso que los estudiantes construyan los procedimientos para expresar fracciones equivalentes (amplificación y simplificación). Sólo entonces, los estudiantes estarán en condiciones de construir un procedimiento fundamentado para sumar fracciones.

Con base en las ideas anteriores se establecen los propósitos de cada sesión, y estos a su vez permiten establecer las variables didácticas, y la progresión de tareas y técnicas a abordar en cada una de dichas sesiones. Las variables didácticas consideradas en la concepción de la secuencia son:

- a) Significado de la fracción: Como medida para la cuantificación de los trozos de yuan (unidad de medida ficticia usada en la secuencia) y como razón para el establecimiento de las fracciones equivalentes.

- b) Relación entre los denominadores: Iguales o distintos. Uno múltiplo del otro, con un factor en común, o primos entre sí (sin factor común).
- c) Tipo de fracción: propia o impropia.
- d) Disponibilidad del material: disponible en el trabajo de cuantificación y de las equivalencias; no disponible para la construcción del procedimiento de cálculo.
- e) Disponibilidad de trozos de un mismo tipo: mayor o igual que un medio y menor a una unidad (por ejemplo dos trozos de un tercio, tres de un cuarto, tres de un quinto, etc.); menor que una unidad para incentivar la construcción del concepto de fracción como medida y no el de parte-todo; mayor o igual que un medio para facilitar el establecimiento de relaciones de equivalencia.

Para la concepción de la secuencia didáctica y el análisis *a priori* se consideraron distintos aspectos con base en el análisis preliminar. A continuación se describen algunas de las hipótesis consideradas en el análisis *a priori* y la descripción de cómo éstas afectan la concepción de la secuencia.

- a) Uno de los factores que inciden en el proceso de aprendizaje es el enfoque didáctico, específicamente, el grado de participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. Esta idea ha sido planteada tanto por expertos como por los propios aprendices.
 - a. Por lo tanto, la secuencia didáctica debe propiciar espacios para que los propios estudiantes construyan los conocimientos.

- b) Es importante que los conocimientos sean funcionales y tengan sentido.
 - a. Por lo tanto, la situación didáctica debe permitir revivir la emergencia histórica del concepto para comprender que la fracción es un tipo de número que sirve para cuantificar cantidades no enteras.
 - b. Proponer situaciones problemáticas en las que la adición sea la operación que resuelve el problema.
- c) Los significados asociados a las fracciones son uno de los factores que inciden en las dificultades de aprendizaje de las mismas.
 - a. Por lo tanto, puesto que interesa que el saber construido sea funcional, es necesario seleccionar aquellos significados que favorezcan la construcción del conocimiento con esa característica.
- d) El significado parte-todo es el dominante en el Discurso Matemático Escolar. El uso exclusivo de este significado no favorece la construcción del concepto de fracción como número. Para corregir dicha dificultad, esta secuencia considerará:
 - a. La interpretación de medida para ampliar la conceptualización de la fracción más allá de la idea de parte-todo.
 - b. La interpretación de medida para proponer problemas que sean resueltos naturalmente mediante adición.
 - c. La interpretación de razón para promover el concepto de igualdad o equivalencia entre fracciones.

e) Las fracciones propias y su representación en diagramas refuerzan el significado parte-todo.

a. Es importante trabajar paralelamente con fracciones propias e impropias para conceptualizar la fracción como número.

f) La relación entre los denominadores de las fracciones determina distintos grados de complejidad del algoritmo de la adición de fracciones.

a. Es importante considerar esta variable en la graduación del proceso de construcción de dicho algoritmo.

g) Ni profesores ni estudiantes son capaces de fundamentar matemáticamente el algoritmo de la adición de fracciones. Las técnicas y los algoritmos son presentados a los estudiantes, ya sea a través de los libros de texto, o de la explicación de los profesores, y posteriormente se aplican para hacer cálculos o resolver problemas. Los problemas no son concebidos como medios que promueven el aprendizaje.

a. Es importante problematizar a los estudiantes, de manera que la situación en la que se les sitúe les provoque un conflicto que deban resolver construyendo los conocimientos requeridos para ello.

La secuencia didáctica se trabaja en un grupo de nueve estudiantes durante cinco sesiones. Las tres primeras sesiones contaron con la participación de los nueve estudiantes y las dos últimas de sólo seis, puesto que los otros tres no habían asistido al colegio ese día. La primera sesión fue de aproximadamente 90 minutos, las cuatro

restantes duraron alrededor de 70 minutos cada una. Cuando los estudiantes debieron trabajar en equipo lo hicieron en grupos de tres.

La secuencia de situaciones se estructura de la siguiente manera:

Sesión	Propósito de la sesión	Tarea(s)	Material
1 y 2	-Experimentar con fracciones, problematizando el concepto de fracción como medida. -Conceptualizar la fracción como un número que permite cuantificar medidas y/o cantidades no enteras.	-Medir la longitud de cintas no numeradas utilizando una unidad de medida arbitraria (yuan) y trozos de ella. -Cuantificar las mediciones realizadas con los trozos utilizando más de una fracción (cuantificar la medida de cada uno de los trozos de yuan). (sesión 1)	-9 cintas de cartulina blanca con medidas en yuanes: $\frac{8}{15}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{11}{6}$ y $\frac{19}{12}$. -3 fichas de actividades 1 y 2 (ver anexo F y G). 3 sets con: -1 cinta cuya longitud es 1 yuan. -Trozos de cintas de colores con medida en yuanes: uno de $\frac{1}{2}$, dos de $\frac{1}{3}$, tres de $\frac{1}{4}$, tres de $\frac{1}{5}$, cuatro de $\frac{1}{6}$, cinco de $\frac{1}{8}$, seis de $\frac{1}{10}$, siete de $\frac{1}{12}$ y ocho de $\frac{1}{15}$. -10 micas transparentes de 1 yuan. -Plumones.
		-Expresar las medidas de las cintas de la sesión anterior utilizando un sólo referente (cuantificar las mediciones utilizando una sola fracción o un entero y fracción) (sesión 2)	
3	-Experimentar con la relación entre las fracciones, problematizando el concepto de equivalencia. -Conceptualizar la igualdad o equivalencia entre fracciones: una misma cantidad se puede expresar con fracciones que utilizan diferente unidad de medida.	-Dadas dos fracciones que expresan la misma cantidad (cuya igualdad se ha verificado previamente con material concreto), determinar la operación matemática que permite expresar una fracción en los términos de la otra.	-9 fichas de actividades 3 (ver anexo H).
4	-Determinar el sumando que reemplaza convenientemente	-Dada una suma de fracciones ya resuelta (cuya igualdad se ha	-9 fichas de actividades 4 (ver anexo I).

	a uno conocido mediante una convención matemática. -Construir un procedimiento estándar para sumar fracciones cuyos denominadores son uno múltiplo del otro, sin tener que recurrir a las reglas graduadas.	verificado previamente con material concreto) en la que uno de los sumandos tiene el mismo denominador que la suma, determinar qué otro sumando puede reemplazar al que tiene un denominador distinto a la suma. Utilizar dicho procedimiento para sumar fracciones.	
5	-Profundizar en los fundamentos que sustentan el procedimiento construido en la sesión anterior. -Generalizar el procedimiento estándar para sumar fracciones cuyos denominadores se relacionan de diversos modos.	-Resolver sumas de fracciones cuyos denominadores son uno múltiplo del otro, tienen un factor común o son primos entre sí.	-9 fichas de actividades 5 (ver anexo J).

Cuadro III: Secuencia de situaciones

Con el propósito de proporcionar una mejor visión de lo que es una situación didáctica se desglosa la primera de ellas en el anexo K, brevemente descrita en el cuadro III.

Respecto de la composición de grupo, seis de los nueve estudiantes son seleccionados de entre quienes participan en la entrevista inicial, teniéndose cuidado de elegir a quienes experimentan dificultades para operar aditivamente con fracciones. Los otros tres son escogidos al azar, con la ayuda de la profesora de matemáticas, teniendo como único requisito que no sean los estudiantes aventajados del curso.

El registro de las sesiones se hace a través de videograbación, y se recogen las fichas de trabajo que contempla el conjunto de las sesiones.

Hay que destacar que en cada sesión los estudiantes se enfrentaron a las actividades diseñadas sin recibir indicaciones adicionales. Es decir, ellos no sabían cuál era el propósito de cada sesión ni de la secuencia completa, sino sólo de las tareas solicitadas.

En el análisis *a posteriori* se refleja que los propósitos planteados para cada una de las sesiones se cumplieron, se logró la resignificación del concepto de fracción y principalmente, se cumplió el propósito general de la secuencia didáctica, es decir, se logró la resignificación del algoritmo para la suma de fracciones.

Una de las primeras dificultades que presentan los estudiantes se relaciona con la idea de parte-todo en contextos en que las partes superan al todo. La existencia de fracciones mayores que un entero es un aspecto difícil de explicar, dado que la única funcionalidad conocida hasta el momento de las fracciones es que permiten representar una parte de un todo. Las actividades presentadas en la secuencia permitieron problematizar estas concepciones iniciales y comenzar el trabajo de una conceptualización más robusta de las fracciones que posibilitaron a los estudiantes ampliar el concepto de fracción en tanto objeto que permite expresar cantidades no enteras.

Otra de las dificultades relativas a la naturaleza de la fracción es que hasta antes de enfrentarse a esta secuencia, los estudiantes han tenido como gran referente el trabajo

con números naturales, lo que les provoca una gran dificultad cuando se desea comprender la fracción como un sólo objeto matemático.

En relación con la comprensión del algoritmo se constata que la interpretación de la fracción como medida es propicia para la construcción de un algoritmo aditivo (es decir se valida la hipótesis central). Por una parte, porque permite abordar con mucha naturalidad situaciones problemáticas que son resueltas mediante adición. Por otra, porque la contextualización en una situación concreta permite realizar las sumas con material concreto, para llegar a establecer un procedimiento estándar para efectuar la suma.

Respecto de la validación, en general las hipótesis planteadas para cada una de las situaciones se cumplieron.

6.4.1 Reflexión del estudio de Peña (2011)

Los análisis preliminares son muy importantes, la extensión y profundidad de estos son factores de peso que influyen en el desarrollo del resto de las fases. En este trabajo los análisis fueron de los más completos, se abordaron distintos aspectos de la fracción, así como de los algoritmos aditivos para fracciones, entre otros puntos. Se observó el cómo la calidad de estos análisis repercutió claramente en el diseño, aplicación y efectividad de la secuencia didáctica.

En el análisis *a posteriori* y en las conclusiones es donde se reflejan los distintos logros obtenidos y dificultades observadas, en lo que respecta a esta investigación, el logro de resignificar tanto el concepto de fracción como del algoritmo aditivo para fracciones es un logro significativo, debido que para obtenerlo fue necesario hacer frente a las concepciones de los estudiantes.

Específicamente en lo que se refiere resignificar el concepto de fracción, la concepción parte-todo (que es la más común en los estudiantes) fue un obstáculo. Un indicio de esto se observó durante la sesión 2 al comparar dos mediciones hechas por dos equipos usando sus reglas de quinceavos de yuan. Los estudiantes debían obtener cuánto medían en conjunto 3 tiras (2 de $\frac{1}{3}$ y una de $\frac{1}{5}$), el equipo con la medición incorrecta ($\frac{14}{15}$) elaboró su regla sobreponiendo en una tira de yuan en blanco quince tiras de quinceavo de yuan, esto influyó en su manera de anotar las fracciones y en consecuencia afectó sus mediciones. El equipo con la medición correcta ($\frac{13}{15}$) elaboró su regla usando un trozo de $\frac{1}{15}$, repitiendo este sobre la tira de yuan y marcando hasta dónde el trozo llegaba. (Ver imagen recuperada 3)

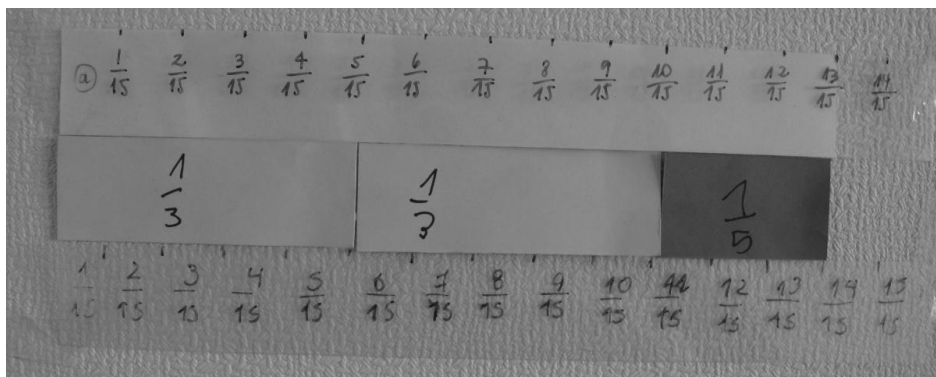


Imagen recuperada 3: Reglas de los equipos y conjunto de tiras a medir

Se plantea así que el “error” en la forma de elaborar la regla del primer equipo, se deba al notable peso de la concepción de fracción como parte-todo.

En lo que respecta al algoritmo aditivo, la resignificación del concepto de fracción a través de la concepción “como medida” fue la clave para lograr la resignificación del algoritmo, debido a la conexión existente entre la concepción y la suma de fracciones, misma que fue identificada durante los análisis preliminares. Otra forma de apreciar esto es en el diseño de las actividades y los resultados de aplicarlas, las ideas generadas durante las actividades enfocadas en la resignificación del concepto de fracción, sirvieron en muchas ocasiones de apoyo en las actividades enfocadas en la suma de fracciones. Un ejemplo de lo descrito anteriormente es en la cuarta sesión, en la cual para empezar a definir un algoritmo para la suma, los estudiantes se apoyan de la equivalencia de fracciones, tema que es reforzado mediante la concepción de fracción como medida.

6.5. Una ingeniería didáctica aplicada sobre proporcionalidad y semejanza, Veiga (2013)

El objetivo del trabajo es abordar la proporcionalidad y semejanza, esto en dos grupos de 3er año de escuela secundaria, en Buenos Aires, Argentina.

En el análisis preliminar se revisa: Ingeniería Didáctica, la noción de razón y función (puesto que están relacionadas). Así como una revisión histórica sobre las nociones de proporcionalidad y linealidad.

El análisis de los contenidos curriculares y de los libros de texto permite identificar las concepciones de los conceptos de proporcionalidad y semejanza que subyacen y que, de alguna manera, contribuyen a la formación de las concepciones de los estudiantes.

En los contenidos curriculares del 1er año de la escuela secundaria, se propone introducir el concepto de razón por medio del análisis de las fracciones como parte de un todo. Luego, se plantea en forma explícita el contenido “proporcionalidad”. En este bloque, se hace mención a las aplicaciones en la vida cotidiana, porcentajes, regla de tres simple y estudio de funciones de dominio discreto (para proporcionalidad directa e inversa), pero mediante la organización de la información en tablas. No se hace mención a la construcción y análisis de gráficos. En el 2do año se propone presentar la función de

proporcionalidad directa como caso especial de la función lineal. Además, se recomienda trabajar con contraejemplos para clarificar y alertar sobre cuándo una relación es directamente proporcional. También se introduce la función de proporcionalidad inversa. En el 3er año se propone trabajar el concepto de proporcionalidad en un contexto geométrico. De esta manera, se introduce el Teorema de Thales y la aplicación en el estudio y construcción de figuras semejantes.

En los libros de texto más usuales en la Escuela Secundaria, se respeta el marco que brinda el diseño curricular expuesto anteriormente, que se puede agrupar en tres momentos.

a) Primer momento: se introduce el concepto de razón y proporción desde un punto de vista algebraico. Se resuelven problemas de proporcionalidad directa e inversa, priorizando el trabajo algebraico con propiedades y planteo de ecuaciones.

La idea que subyace en las definiciones y ejemplos de este tratamiento es que dos magnitudes son proporcionales cuando al aumentar o disminuir una, la otra aumenta o disminuye de la misma manera. Esa manera de aumentar o disminuir se relaciona con la noción de factor de proporción, coeficiente de proporcionalidad o reducción a la unidad.

b) Segundo momento: se estudian las funciones de proporcionalidad. Cabe aclarar que en varios libros se trabaja con funciones proporcionales como primera aproximación al concepto de función.

En esta revisión es posible encontrar definiciones formales, algebraicas o coloquiales, que indican que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando el cociente entre dos valores correspondientes es una constante. Y en el caso de la proporcionalidad inversa, indicando que en ese caso el producto entre dos valores correspondientes es constante. Generalmente estas definiciones van acompañadas de ejemplos y ejercicios, que involucran el completar tablas y representar en un sistema de coordenadas, para identificar qué curva determina los valores encontrados.

c) Tercer momento: se aplica el concepto de proporcionalidad directa en contextos geométricos. Se introduce el Teorema de Thales y construcción y propiedades de figuras semejantes. En este momento, se encuentran definiciones que determinan que dos figuras son semejantes si tienen la misma forma. Esto ocurre cuando los ángulos homólogos son iguales y los segmentos homólogos son proporcionales.

Se identifica que las concepciones de los estudiantes en referencia a la proporcionalidad son las siguientes:

a) No diferencian razones de fracciones. Seguramente, esto se deba a la elección de ejemplos triviales por parte del docente al introducir el concepto de razón y proporción.

b) En general, el estudiante asocia el concepto de proporción al de un tipo particular de ecuación. Esto se debe a que el trabajo con proporciones es principalmente algebraico y carente de sentido para el estudiante. En reglas generales, las clases de matemática se ven invadidas por largos procedimientos algebraicos carentes de significatividad, esto conduce a una algoritmización de los contenidos y conceptos vacíos.

c) Todos los problemas donde a medida que crece una variable, ocurre lo mismo con la otra, es de proporcionalidad directa. O bien, si aumenta una y disminuye la otra, es de proporcionalidad inversa. Esto se debe a definiciones simplistas del tipo “a más-más y a menos-más”.

d) Las funciones lineales representan relaciones de proporcionalidad directa. Existe una ruptura entre el trabajo realizado al introducir los conceptos de proporcionalidad y sus representaciones gráficas. Normalmente, se trabajan como contenidos aislados.

Para la concepción de la secuencia no se explicitan las variables que se tienen en cuenta. La actividad tiene el objetivo de que los estudiantes adviertan el alcance de la proporcionalidad directa en la confección de escalas.

Respecto a las hipótesis consideradas en el análisis *a priori*, estas se identificaron con base en el análisis *a priori*.

a) Debido al tratamiento del concepto de proporcionalidad directa en años anteriores, muchos estudiantes reducen sus conocimientos de proporcionalidad a comentarios del tipo “a más, más y a menos, menos”. Como consecuencia, suelen incurrir en errores epistemológicos.

b) Aun con las dificultades que les pueda presentar la actividad y frente a varios intentos, los estudiantes no pensarán en que no es posible realizarla, debido a que esta postura es fácilmente rebatida con argumentos simples.

Las actividades se llevan a cabo en dos cursos de 3º año de Escuela Secundaria de 34 y 36 estudiantes cada uno, organizándose en equipos de entre 4 y 6. El desarrollo es en dos clases de 60 minutos cada una.

Sesión	Propósito	Tarea(s)	Material
1	-Determinar si los estudiantes son capaces de generar estrategias personales para resolver problemas en contextos geométricos aplicando conocimientos previos de razones y proporciones. -Valorar y aplicar conceptos de proporcionalidad y semejanza en la ampliación y reducción de formas en cualquier escala. -Introducir el estudio al análisis y aplicación de escalas.	-Dado un rompecabezas, construir el mismo rompecabezas de tal manera que lo que mide 4 cm pase a medir 7 cm. -Se necesita un modelo más pequeño. Construir el mismo rompecabezas pero de tal forma que lo que mide 5 cm (o 5 unidades) pase a medir 3 cm.	-Rompecabezas (ver anexo L) -Hojas lisas -Reglas -Escuadras -Compás -Transportador -Tijeras
2	-Exponer y comparar los resultados obtenidos en la sesión anterior.	-Puesta en común de las soluciones propuestas por cada equipo	

Cuadro IV: Secuencia de situaciones

Con el propósito de proporcionar una mejor visión de lo que es una situación didáctica se desglosa la primera de ellas en el anexo M, brevemente descrita en el cuadro IV.

Para el análisis *a posteriori* se realiza el comentario de las actividades desarrolladas por tres equipos. La elección de los mismos se debe a que el trabajo realizado por el resto de los equipos es similar al de los tres seleccionados y, por lo tanto, no aportan datos relevantes.

Una observación importante realizada por varios estudiantes al finalizar las dos actividades fue la siguiente: “Si multiplicamos cada medida de la figura original por un número mayor que 1, obtenemos una ampliación. En cambio, si multiplicamos por un número menor que 1, obtenemos una reducción”.

En primer lugar, cabe destacar que la totalidad de los estudiantes se sumaron al trabajo de cada equipo. Todos aportaban ideas y sugerencias. Esta participación activa por parte de los estudiantes se debe a que el problema planteado en un contexto geométrico no presentaba dificultades de comprensión y resultaba fácil comenzar a hacer conjeturas, pruebas y mediciones.

Es notable que si bien el concepto de proporcionalidad directa se trabaja desde años anteriores y es considerado uno de los conocimientos más importantes (dentro y fuera

del ámbito de la Matemática) por sus múltiples aplicaciones, sólo dos grupos aplicaron correctamente este concepto en la resolución del problema.

El desarrollo de las actividades permitió resignificar contenidos previos e integrarlos en función de dar solución al problema planteado. Cabe destacar que la mayor parte de las dificultades que surgieron a lo largo de la resolución del problema, fueron superadas por los mismos integrantes de los equipos. En ocasiones, debieron recurrir a los contenidos desarrollados en su carpeta, pero en otras ocasiones no fue necesario.

6.5.1 Reflexión del estudio de Veiga (2013)

Las hipótesis son un componente que en algunas ocasiones no aparece de forma explícita, sin embargo, es posible identificarlas a partir de las variables didácticas o del análisis *a priori*. Respecto de las hipótesis consideradas en el trabajo, no fueron establecidas tal cual por el autor, sino extraídas del análisis *a priori* planteado.

Las dificultades que afrontaron los estudiantes es uno de los aspectos comunes que se abordan en el análisis *a posteriori*. En el análisis de la investigación se destaca el hecho de que sólo dos equipos aplicaron correctamente el concepto de proporcionalidad directa, a pesar de ser un concepto que se trabaja desde años anteriores y es considerado uno de los conocimientos más importantes. Reflejándose cómo las dificultades en temas relacionados con las fracciones son arrastradas a años superiores,

dejando en duda quien está fallando en este punto: el estudiante por no intentarlo lo suficiente, el método de enseñanza del maestro o la escuela por permitir que el estudiante siga avanzando a pesar de las consecuencias que puede traer esto para él.

Se desconoce por qué para abordar el tema sólo se dedicaron dos sesiones (la primera plantea la actividad principal), si bien tiene un trasfondo geométrico, lo que lo hace fácilmente abordable, se considera que se debieron haber diseñado más situaciones para obtener mejores resultados.

6.6. La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria, un estudio didáctico, Block (2000)

El propósito del estudio es destacar el papel de la razón como elemento precursor de la construcción de las nociones de número y aplicación, mediante un análisis didáctico de situaciones.

La ingeniería didáctica analizada es aplicada a un grupo de tercer año de una primaria pública vespertina en la ciudad de México, su objetivo específico se presenta más adelante.

El análisis preliminar está conformado por una revisión de: Teoría de Situaciones Didácticas, Transposición Didáctica, Ingeniería Didáctica, el sentido de un conocimiento. Se realiza el análisis de un amplio conjunto de situaciones que dan lugar a la utilización de una razón (análisis del medio de la razón)⁶. Además se realiza un análisis de los procedimientos de resolución de un grupo pequeño de niños de 4º a 6º de primaria, para un conjunto de problemas aplicados en la modalidad de entrevistas individuales semi-estructuradas.

⁶ El conjunto de “medios” (en el sentido de la TSD) específicos que implican a la razón.

Se realiza una revisión desde la perspectiva de la transposición didáctica, es decir, de la organización de los saberes en el currículum, en la cual se busca desentrañar la lógica interna de esta organización y de sus transformaciones, así como los vínculos que mantiene con los saberes en otras instituciones, en particular, con el saber de los matemáticos.

Respecto de la noción de razón, se realizan estudios en busca de explicaciones del papel que jugó en la evolución de los conceptos matemáticos de número y de función, y de los motivos de su desaparición de los programas de enseñanza.

Desde una perspectiva cognitiva, se lleva a cabo un análisis de estudios sobre el desarrollo del “pensamiento proporcional” en niños y adolescentes, principalmente como una capacidad ligada al desarrollo de las estructuras del pensamiento lógico.

Como último componente de este análisis se realiza una revisión desde la perspectiva de la enseñanza escolar de nociones matemáticas específicas, en la cual se encuentran diversos estudios que hacen referencia a la noción de razón como parte del conjunto de significados que asumen otras nociones, en particular, las fracciones.

Realizado el análisis preliminar se procede a iniciar con la concepción de la secuencia. Su propósito es propiciar un acercamiento por parte de los estudiantes a la noción de razón. Las variables consideradas en esta fase son:

- a) La naturaleza de las cantidades
- b) La formulación de las reglas de cambio
- c) El carácter numérico de las razones
 - a. Externas
 - b. Internas
- d) Número de reglas a comparar
- e) El tamaño de las cantidades

En el análisis *a priori* se considera la hipótesis: la noción de razón juega en el aprendizaje, de manera parecida a como sucedió en la historia, el papel de precursora de la noción de número, en sus funciones de medida, de relación entre medidas y de aplicación lineal.

La aplicación de la secuencia se efectúa a 24 estudiantes (realizándose las actividades en equipos de cuatro), ésta la lleva a cabo una maestra con amplia experiencia en la aplicación de situaciones experimentales. La secuencia está conformada por cinco sesiones de entre 50 y 90 minutos cada una, estructurándose de la siguiente forma:

Sesión	Propósito	Tarea(s)	Material
1	-Comprobar que la comparación de cantidades aisladas no lleva a escoger la mejor regla. -Desarrollar procedimientos que permitan comparar.	-Dado un conjunto de reglas, determinar por equipo qué regla permite obtener la mayor cantidad de estampas, teniendo 12 fichas. Reglas: a) Por cada 2 fichas se dan 8 estampas. b) Por cada ficha se dan 3 estampas. c) Por cada 3 fichas se dan 9 estampas. d) Por cada 6 fichas se dan 12 estampas. (situación 1: Selección de la mejor regla de cambio (I)) -Se repite la tarea anterior excluyendo la regla ganadora y teniendo 6 fichas. (situación 1: Selección de la mejor regla de cambio (II))	Por equipo: -15 fichas y 50 estampas. -Tablas de multiplicar. -Un pedazo de hoja de papel.
2	-Comprobar que la comparación de cantidades aisladas no lleva a escoger la mejor regla. -Desarrollar procedimientos que permitan comparar. -Empezar a difundir las estrategias de algunos niños. -Identificar la existencia de reglas equivalentes.	-Dado un conjunto de reglas, determinar por equipo qué regla permite obtener la mayor cantidad de estampas, teniendo 8 fichas. a) Por cada ficha se dan 4 estampas. b) Por cada 2 fichas se dan 6 estampas. c) Por cada 4 fichas se dan 8 estampas. d) Por cada 8 fichas se dan 24 estampas. Al final: confrontación de procedimientos. (situación 1: Selección de la mejor regla de cambio (III)) -Se repite la tarea anterior excluyendo la confrontación, usando 10 fichas y las reglas. a) Por cada 5 fichas se dan 10 estampas. b) Por cada ficha se dan 3 estampas. c) Por cada 2 fichas se dan 10 estampas. d) Por cada 10 fichas se dan 20 estampas. (situación 1: Selección de la mejor regla de cambio (IV))	Por equipo: -15 fichas y 50 estampas. -Tablas de multiplicar. -Un pedazo de hoja de papel.

3	-Desarrollar procedimientos más eficientes para calcular el número de estampas.	-Se calcula el número de estampas que arrojan cuatro reglas, para varias cantidades de fichas (12, 24, 30, 60). (situación 2: Cálculo del número de estampas)	Por estudiante: una hoja de trabajo y una hoja blanca. (ver Anexo N) Por equipo: otra hoja de trabajo y una tabla de multiplicaciones. Para todo el grupo: 60 fichas y 300 estampas, por si las solicitan.
4		-Terminar la actividad anterior: se confrontan observaciones realizadas a partir de los resultados obtenidos.	
	-Explicar el significado de la nueva formulación en donde un número natural juega el papel de razón constante (número de veces).	Primera parte: -Dada la regla "Se da una cantidad de estampas igual a tres veces la cantidad de fichas", se aplica a varias cantidades de estampas (12, 24, 36 y 60). (situación 3: una nueva regla)	-El cuadro de la situación anterior, con los resultados, en el pizarrón.
	-Identificar la equivalencia entre las dos formulaciones de la razón: "por cada 2, 10" y "5 veces".	Segunda parte: -Dado un conjunto de reglas, determinar por equipo que regla permite obtener la mayor cantidad de estampas, teniendo 10 fichas. a) Se da una cantidad de estampas igual a cinco veces la cantidad de fichas b) Se cambia cada ficha por 4 estampas c) Se cambian cada 2 fichas por 10 estampas d) Se cambian cada 10 fichas por 20 estampas (situación 1: selección de la mejor regla de cambio (V))	-Una hoja blanca por estudiante. -Un papelito para que anoten la regla que escogen. Por equipos: -10 fichas y 50 estampas.
5	-Identificar la equivalencia entre las dos formulaciones de la razón: "por cada 2, 10" y "5 veces".	Primera parte: -Identificar de un conjunto de cuatro reglas, cuales son equivalentes. a) Se da una cantidad de estampas igual a cinco veces la cantidad de fichas. b) Por cada ficha se dan 5 estampas. c) Por cada 5 fichas se dan 10 estampas. d) Por 2 fichas se dan 6 estampas.	-Las cuatro reglas en una hoja grande para pegar en el pizarrón. Por equipo: -Una hoja blanca. -10 fichas y 50 estampas (se usarán sólo si son solicitadas).

		(situación 4: Identificar reglas equivalentes (I))	
		Segunda parte: - Identificar de un conjunto de cuatro reglas, cuales son equivalentes. d) Se da una cantidad de estampas igual a DOS VECES la cantidad de fichas. e) Por cada ficha se dan 4 estampas. f) Por cada 4 fichas se dan 8 estampas. g) Por 2 fichas se dan 8 estampas. (situación 4: Identificar reglas equivalente (II))	-Las cuatro reglas en una hoja grande para pegar en el pizarrón. -Una hoja blanca por estudiante
	-Propiciar una reflexión explícita sobre el orden.	Tercera parte: -Dada una regla específica, proponer una mejor regla, una regla equivalente y una regla menos buena. A comparación de: a) Se cambian 2 fichas por 10 estampas” En las reglas propuestas sólo se pueden usar números hasta 10.	-Una hoja blanca por estudiante, y una adicional para que anoten sus reglas.

Cuadro V: Secuencia de situaciones

Con el propósito de proporcionar una mejor visión de lo que es una situación didáctica se desglosa la primera de ellas en el anexo O, brevemente descrita en el cuadro V.

Los propósitos presentados están ampliamente ligados con las actividades, no son generales y es difícil percibir qué es lo que se deseaba que el estudiante aprendiera. Son expresados de esta forma debido a que el trabajo no da suficiente información como para reescribirlos de forma más general.

Durante la aplicación de la secuencia participaron tres observadores, cada uno a cargo del registro (con apoyo de grabadora) de un equipo de cuatro niños. Uno de los observadores registra, además, los momentos de interacción colectiva (consignas y confrontaciones). Con esta organización se logra tener información precisa del trabajo de alrededor de 10 niños e información más puntual de los demás.

Respecto del análisis *a posteriori*, la experiencia analizada confirma que las tareas de comparar “reglas de cambio”, y de identificar reglas equivalentes, pueden llevar a los estudiantes de tercer grado a tomar en consideración la idea de relación entre dos cantidades, como algo distinto de las cantidades mismas.

En el proceso, la noción de relación entre cantidades se desprende lentamente de la noción de cantidad: primero, al descartar las comparaciones centradas en una cantidad y al considerar la necesidad de igualar un término, el número de fichas o el de estampas; después, al comprender que reglas expresadas con cantidades distintas pueden ser equivalentes, y, finalmente, punto al que no fue posible llegar, al poder expresar la relación entre las cantidades con un sólo número, un operador, momento en el que la razón en juego asume una forma propia.

La comprensión de la noción de razón progresa a la par con el desarrollo de los procedimientos numéricos que permiten manipular las razones: la suma iterada, la

multiplicación (y la división) como razón interna que se conserva y la multiplicación como operador, expresión de una razón constante.

6.6.1 Reflexión del estudio de Block (2000)

Los logros obtenidos durante la aplicación de la secuencia son uno de los puntos importantes que se expresan en el análisis *a posteriori*. Dentro de los logros reflejados en el análisis del trabajo se destaca el desarrollo de los procedimientos numéricos que permiten manipular las razones: la suma iterada, la multiplicación (y la división) como razón interna que se conserva y la multiplicación como operador, expresión de una razón constante. Si bien no se presentaron todos de forma espontánea y algunos estudiantes presentaron dificultades para comprenderlos y aplicarlos, la diversidad de procedimientos permitió que los estudiantes encontraran un procedimiento adecuado para ellos.

Respecto de la validación, se considera que con lo específicos y completos que son el análisis *a priori* y *a posteriori*, debió ser suficiente para llevar a cabo dicho proceso. Sin embargo, no se identificó en ningún apartado su presencia de forma explícita, lo cual sugiere que fue presentado de forma implícita a lo largo de los análisis *a posteriori* de cada una de las situaciones.

7. Conclusiones

La revisión del estado del arte de ingenierías didácticas en el tema de fracciones presentada, permitió caracterizar la metodología de Ingeniería Didáctica e identificar aspectos positivos y negativos en la puesta en práctica de la misma: llevar a cabo las fases de forma incorrecta, sugerencias de mejoras para las situaciones, no respetar la estructura de la metodología, entre otros aspectos. Se destaca que en uno de los artículos revisados se puede observar la efectividad de la metodología de Ingeniería Didáctica en comparación con la metodología tradicional en la enseñanza del tema de fracciones.

Durante la revisión del estado del arte de la metodología de ingeniería didáctica se identificaron tres características relacionadas con su estructura: su generalidad, adaptabilidad y poca restrictividad; a ellas se les atribuye que la metodología se haya ido adoptando en distintos grupos de investigación de la Educación Matemática.

La ingeniería didáctica es general debido a que lo planteado en las fases fue llevado a cabo en diferentes sistemas educativos, en distintos niveles y en lugares con diferentes culturas. Esta característica no es compartida por todas las metodologías que buscan una mejora en el proceso enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo la metodología “*Lesson Study*” (desarrollada en Japón) está ampliamente ligada a su sistema educativo y a su cultura, lo

cual se observa en cómo es llevada a cabo. Su aplicación requiere que un pequeño grupo de maestros deba colaborar entre sí, reunirse para discutir objetivos de aprendizaje, planear una sesión de clase (*research lesson*), entre otras; acciones facilitadas por el modo de trabajo de las escuelas japonesas y que requieren de un fuerte trabajo en equipo, un aspecto muy arraigado en esta comunidad (Miyakawa y Winslow, 2009). Esta descripción da una idea de lo complejo que podría ser el aplicar esta metodología japonesa en otros lugares fuera de este país. Por lo menos en lo que respecta a mis experiencias en la educación básica, específicamente en la primaria, observe maestros muy desorganizados e individualistas.

La ingeniería didáctica es adaptativa puesto que permite que se agreguen elementos a las fases, siempre y cuando no se modifique su estructura esencial. Un ejemplo fue observado en Gutiérrez (2009), que en su trabajo agrega la dimensión socio-cultural en el análisis preliminar, como respuesta a las condiciones de vida de los estudiantes a los que se les aplicaría la secuencia.

La metodología es poco restrictiva respecto al cómo llevar a cabo lo planteado en las fases. Por ejemplo: 1) en la primera fase se realizan los análisis preliminares, identificándose cuatro como los tipos más frecuentes, que si bien se plantea qué es lo que abordan, no se indica cómo llevarlos a cabo (investigando la teoría, realizando exámenes, revisando planes y programas escolares, usando la experiencia del

investigador como base, cuestionarios, etcétera); y 2) en la tercera fase se lleva a cabo la experimentación, es decir la aplicación de la secuencia para la posterior recolección de información específica, para esta última no se plantea ninguna restricción en cuanto al tipo de herramientas a utilizar (entrevistas individuales, entrevistas grupales, exámenes, cuestionarios, entre otras).

La metodología de ingeniería didáctica tiene como teorías centrales a la teoría de las situaciones didácticas y a la transposición didáctica, sustentando estas a la secuencia didáctica, producto final de la metodología. La secuencia, a través de la situación didáctica, aborda el aprendizaje de los estudiantes desde un enfoque constructivista. Se les presenta una situación la cual busca que conciban un determinado conocimiento sin revelarse la intención de enseñanza, con una intervención mínima por parte del maestro.

En las primeras sesiones de la secuencia se busca introducir al tema de interés mediante situaciones que propicien la formulación de las ideas base, que le servirán al estudiante para construir el conocimiento. En estas situaciones los estudiantes, si bien empiezan a manifestar ciertas ideas, no poseen noción alguna de lo que se les desea enseñar. En las sesiones siguientes se plantean situaciones de distinta complejidad, donde pequeños conocimientos que conforman al conocimiento final, responden a las situaciones, buscándose concretar y formalizar poco a poco este conocimiento. Para llevar cabo lo planteado en las situaciones los estudiantes hacen uso de sus ideas,

previamente formuladas, y por sí mismos (con participación regulada del maestro) logran llegar a las respuestas, “conectándose” estos pequeños conocimientos y tomando forma el conocimiento final.

En las últimas actividades se busca la institucionalización del conocimiento final, es en este momento cuando se les revela a los estudiantes que el conocimiento construido a lo largo de las distintas situaciones tiene “nombre”, y al haber sido ellos los que lo construyeron, lo vuelve significativo.

En la revisión de ingenierías didácticas se observaron ciertas limitaciones y características potencialmente negativas, por ejemplo:

-El sistema educativo bajo el que trabaje la institución donde se desee aplicar la metodología puede imponer una limitación. Debido a que el enfoque de enseñanza bajo el que se rige la metodología de ingeniería didáctica es el constructivismo, si este difiere del enfoque del sistema de la institución donde se desea aplicar la metodología, es probable que la institución impida dicha aplicación.

-La gran cantidad de tiempo necesario para realizar lo establecido en la metodología es una característica potencialmente negativa. La calidad y efectividad de la secuencia diseñada está ampliamente ligada con la elección de las variables y el análisis *a priori*,

que a su vez dependen del análisis preliminar, por lo cual los análisis y la elección de variables debe realizarse de la manera más detallada, cuidadosa y completa posible, implicando un gran uso de tiempo. Una consecuencia inmediata de la característica es el hecho de que la metodología no sirve para solucionar problemas inmediatos, es decir, si por ejemplo un profesor observa después de una clase que su grupo tiene dificultades con “x” tema, no tiene la posibilidad de aplicar la metodología en su totalidad. Porque suponiendo que se empiece a aplicar, para el momento en que se hayan llevado a cabo las primeras dos fases, es probable que haya concluido el tiempo que el profesor destinó para abordar el tema o que el tiempo restante sea insuficiente para aplicar la secuencia.

-El hecho de que la metodología es idealista es otra característica potencialmente negativa, la cual se refleja en el análisis *a priori*. En esta fase se intenta predecir el comportamiento de los estudiantes en las diferentes situaciones didácticas, así mismo, el diseño y la secuencia de situaciones se encuentran sujetos a esta serie de predicciones. Por lo cual, si los estudiantes no responden/reaccionan de acuerdo a lo predicho en alguna(s) de las situaciones, esto puede provocar que sean necesarios un gran número de cambios durante la aplicación de la secuencia y en el peor de los casos hasta la interrupción del proceso, dependiendo completamente de las capacidades del aplicador el poder superar estas posibles situaciones.

Durante la revisión del estado del arte se observaron ciertas características en las que los trabajos concordaron, sus inconsistencias con la literatura, entre otros aspectos. Estos se presentan a continuación separados por fase.

Se observó que el conjunto de análisis preliminares no se exponen en su totalidad, sino que se muestra lo esencial. Así mismo, se aprecia que en la totalidad de los trabajos revisados no intervienen de forma explícita los cuatro tipos de análisis frecuentes de la fase de análisis preliminar.

Un aspecto que es importante declarar cuando se realiza la primera fase es la facilidad para aplicar la metodología, información que corresponde al cuarto tipo de análisis frecuente, sin embargo, en todos los trabajos revisados no se expone ninguna evidencia de que se haya realizado este tipo de análisis.

Otro aspecto a destacar es que los análisis junto con el resto de los trabajos que el investigador realiza como bases de su ingeniería, se retoman y profundizan en el desarrollo de las diferentes fases.

En la fase de concepción se observó que los autores no clasifican sus variables en micro-didácticas y macro-didácticas, en su lugar hablan de variables generales y didácticas. Se destaca que las variables en algunas ocasiones no son presentadas, en uno

de los casos (Díaz, 2006) se le atribuye a que las situaciones no fueron diseñadas por el autor, sino que fueron tomadas y rediseñadas de un libro. Otro aspecto observado es el hecho de que la secuencia didáctica de una parte de los trabajos revisados no se presenta, lo cual, si bien no impidió llevar a cabo las revisiones, las dificultó.

En los análisis *a priori* se exponen principalmente las hipótesis bajo las que se trabajó y diseñaron las situaciones didácticas, más que el análisis predictivo por situación que implica la fase (lo que no implica que no se haya realizado este último), razón por la cual en los análisis *a priori* presentados se mostraron solamente las hipótesis. Estas últimas no siempre se expusieron de forma explícita en los trabajos, en algunas ocasiones fue posible extraerlas del análisis *a priori* realizado, lo cual tiene sentido, dado que esta serie de análisis se hacen con base en las hipótesis.

En la experimentación los investigadores suelen hacer modificaciones en las situaciones por cuestiones tales como: no cumplen su objetivo, se muestran difíciles de llevar a cabo.

En la fase de análisis *a posteriori* y validación, los análisis revisados se pueden separar en dos tipos: 1) análisis general de los resultados obtenidos de aplicar la secuencia (Ríos, 2007; Díaz, 2006), 2) análisis de los resultados obtenidos por sesión o actividad, junto con un análisis general (Tovar y Sevilla, 2005; Peña, 2011; Veiga, 2013; Block, 2000). Cabe

aclarar que la teoría como tal, expresa que se debe de llevar a cabo el segundo tipo de análisis, en particular el análisis por sesión.

Respecto a la validación, sólo en un par de trabajos se habla de un correcto proceso de validación (Tovar y Sevilla, 2005; Peña, 2011). En uno de los trabajos (Ríos, 2007) se observa que en lugar de llevar a cabo la confrontación de los análisis *a priori* y *a posteriori*, el investigador hace sugerencias de modificaciones de las situaciones, basándose en las que tuvieron que hacer durante la experimentación, esto con el propósito de que se consideren para una siguiente aplicación de la secuencia. Algunos autores (Ríos, 2007; Díaz, 2006) en esta fase realizan análisis de tipo estadístico como forma de llevarla a cabo, que si bien son una manera de estimar si la metodología fue efectiva o no, se desprenden de lo que implica verdaderamente la validación de las hipótesis. Finalmente en un par de trabajos (Veiga, 2013; Block, 2000) no fue posible identificar si se realizó este proceso.

Si bien no fue el propósito de este trabajo la comparación con otras metodologías, uno de los trabajos revisados (Díaz, 2006) realiza una comparación con la metodología tradicional. El trabajo aborda la enseñanza de distintos temas en torno a las fracciones y muestra mediante un análisis estadístico que la proporción de estudiantes aprobados bajo la metodología de ingeniería didáctica es mayor que la proporción de estudiantes

aprobados bajo la metodología tradicional, lo que permite inferir que la metodología ingeniería didáctica en Matemática, es más eficiente que la metodología tradicional.

Como se planteó, la metodología de ingeniería didáctica es efectiva en lo que respecta a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones, si bien no en todos los trabajos se validaron las hipótesis, los resultados reflejaron el éxito de aplicar la metodología. La revisión muestra un panorama de lo que es la ingeniería didáctica, sus pros y contras, se encontró una evidencia concreta (Díaz, 2006) de la efectividad de ésta en comparación con la metodología tradicional, sin embargo, el panorama está incompleto.

La presente tesis proporciona bases para en un siguiente trabajo llevar a la práctica la metodología. Mediante este tipo de trabajo se podrá apreciar su funcionamiento de forma directa, constatar la exactitud de la caracterización presentada y sobre todo, proporcionar herramientas para mejorar la metodología.

Bibliografía

Angles, S. (2015). *El aprendizaje de la adición y sustracción de fracciones en estudiantes de primer grado de educación secundaria basado en la teoría de situaciones didácticas* (Tesis inédita de maestría). Recuperada del Repositorio Digital de Tesis PUCP. (No. 6748)

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (p. 33-60). Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>

Bezuk, N. y Cramer, K. (1989). Teaching About Fractions: What, When, and How? en P. Trafton (Ed.), National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New Directions For Elementary School Mathematics (p. 156-167). Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/89_1.html

Block, D. (2000). *La noción de razón en las Matemáticas de la escuela primaria un estudio didáctico* (Tesis doctoral). Université de Bordeaux-I, Francia.

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître, *Bulletin de l'A.M.Q. Montréal*, 28(2), p.14-24. , Recuperado de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00497481/document>

Brown, G. y Quinn, R. J. (2006). Algebra Students' Difficulty with Fractions: An Error Analysis. *Australian Mathematics Teacher*, 62(4), 28-40. Recuperado de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ765838.pdf>

Campos, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1(2). Recuperado de <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6887/6573>

Chamorro, C. (2002). Métodos alternativos de investigación en didáctica de las matemáticas: la observación. En Murillo, J.; Arnal, P. M.; Escolano, R.; Gairín, J. M. (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (p. 73-94). Logroño: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1395/1/Chamorro2003Metodos_SEIEM_73.pdf

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Ed. Aique, 1997. Nueva edición ampliada de la original de 1985.

Clarke, D. M. y Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 127-138. Recuperado de <http://148.231.10.114:3017/ehost/pdfviewer/pdfviewer?sid=0f8eb388-ed19-43cc-892c-1001ac7cbb54%40sessionmgr4002&vid=20&hid=4201>

Cortina, J., Cardoso, E. y Zúñiga, C. (2012). El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6o. de primaria. *REDIE. Revista Electrónica de*

Investigación Educativa, 14(1). Recuperado de <http://redalyc.org/articulo.oa?id=15523175005>

Cubillo, C. y Ortega, T. (2003). Análisis de un modelo didáctico para la enseñanza/aprendizaje del orden de las fracciones. *Educación Matemática*, 15(2). Recuperado de <http://redalyc.org/articulo.oa?id=40515203>

Díaz, J. (2006). *Influencia de la metodología "Ingeniería Didáctica Matemática" en el aprendizaje de los números fraccionarios de los estudiantes de 7mo grado de la unidad educativa José Antonio Ramos Sucre* (Tesis inédita de maestría). Recuperado desde UDOspace Repositorio Institucional de la Universidad de Oriente. (No. 4137)

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. (p. 61-96) Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>

Escolá, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo* (Tesis inédita de maestría). CINVESTAV-IPN, México.

González, N. y Block, D. (2005). La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica. *Educación Matemática*, 17(2). Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517204>

Gutiérrez, N. (2009). *Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior* (Tesis de maestría no publicada). CICATA- IPN, México.

Jigyel, K. y Afamasaga-Fuata'i, K. (2007). Students' Conceptions of Models of Fractions and Equivalence. *Australian Mathematics Teacher*, 63(4), 17-25. Recuperado de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ779072.pdf>

Kamii, C. (1994). *Equivalent Fractions: An Explanation of Their Difficulty and Educational Implications*. Recuperado de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED372948.pdf>

Kellman, P. J., Massey, C., Roth, Z., Burke, T. Zucker, J., Saw, A. ... y Wise, J. A. (2008). Perceptual learning and the technology of expertise: Studies in fraction learning and algebra. *Pragmatics & Cognition*, 16(2), 356-405. Recuperado de <http://148.231.10.114:3017/ehost/pdfviewer/pdfviewer?sid=0f8eb388-ed19-43cc-892c-1001ac7cbb54%40sessionmgr4002&vid=23&hid=4201>

Miyakawa, T. y Winslow, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 199-218. Recuperado de <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-009-9188-y>

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2014). El desarrollo sostenible comienza por la educación, recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0023/002305/230508s.pdf>

Panizza, M. (2003). II Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. Recuperado de: http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf

Parra, M. y Flores, R. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación Matemática*, 20(1). Recuperado de <http://redalyc.org/articulo.oa?id=40512063003>

Peña, P. (2011). Resignificación del algoritmo para operar aditivamente con fracciones en un contexto escolar. Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México. Recuperado de http://www.repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/11644/pena_2011.pdf?sequence=1

Pérez, D. y Castillo, J. (2016). Capital humano, teorías y métodos: importancia de la variable salud. *Economía, Salud y Territorio*, 16(52). Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/111/11146910004.pdf>

Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Omnia*, 13(2). Recuperado de <http://redalyc.org/articulo.oa?id=73713207>

Ríos, Y. (2011). Concepciones sobre las fracciones en docentes en formación en el área de matemática. *Omnia*, 17(1). Recuperado de <http://redalyc.org/articulo.oa?id=73718406002>

Rodríguez, C. E. (2013). Didáctica de las ciencias económicas: una reflexión metodológica sobre su enseñanza. Recuperado de: <http://bibliotecadigital.uca.edu.ar/repositorio/libros/didactica-cienciaseconomicas-reflexion.pdf>

Ross, J. A. y Bruce, C. D. (2009). Student achievement effects of technology-supported remediation of understanding of fractions. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 40(6), 713-727. Recuperado de <http://148.231.10.114:3017/ehost/pdfviewer/pdfviewer?sid=0f8eb388-ed19-43cc-892c-1001ac7cbb54%40sessionmgr4002&vid=15&hid=4201>

Sari, E. A. P., Juniati, D. y Patahudin, S. M. (2012). Early Fractions Learning of 3rd Grade Students in SD Laboratorium Unesa. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, 3(1), 17-28. Recuperado de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1078505.pdf>

Secretaria de Educación Pública. (2011a). Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro Primaria. Tercer grado, recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/primaria/3ergrado/matematicas/PRIM3er2013_MAT.pdf

Secretaria de Educación Pública. (2011b). Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro Primaria. Cuarto grado, recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/primaria/4togrado/matematicas/PRIM4to2013_MAT.pdf

Secretaria de Educación Pública. (2011c). Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro Primaria. Quinto grado, recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/primaria/5togrado/matematicas/PRIM5to2013_MAT.pdf

Secretaria de Educación Pública. (2011d). Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro Primaria. Sexto grado, recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/primaria/6togrado/matematicas/PRIM6to2013_MAT.pdf

Secretaria de Educación Pública. (2011e). Programas de estudios 2011 Guía para el Maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas, recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/PROG1EROSEC_MAT2013.pdf

Secretaria de Educación Pública. (2011f). Programas de estudios 2011 Guía para el Maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas, recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/PROG2NDO_MAT2013.pdf

Secretaria de Educación Pública. (2011g). Programas de estudios 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas, recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/secundaria/matematicas/PROG3EROSEC_MAT2013.pdf

Secretaria de Educación Pública. (2012a). Licenciatura en Educación Primaria. Programa del curso. Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, recuperado de http://www.dgespe.sep.gob.mx/public/rc/programas/lepri/aritmetica_su_aprendizaje_y_ensenanza_lepri.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2012b). Licenciatura en Educación Primaria. Programa del curso. Álgebra: su aprendizaje y enseñanza, recuperado de http://www.dgespe.sep.gob.mx/public/rc/programas/lepri/algebra_su_aprendizaje_y_ensenanza_lepri.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2013a). Programa de estudios de bachillerato. Primer semestre. Matemáticas I, recuperado de http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/1er_SEMESTRE/Matematicas_I_biblio2014.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2013b). Programa de estudios de bachillerato. Segundo semestre. Matemáticas II, recuperado de: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/2do_SEMESTRE/Matematicas_II_biblio2014.pdf

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H. y Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13-19. Recuperado de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED552807.pdf>

Valero, P. (1997). Una visión de la didáctica de las matemáticas desde Francia. Algunos conceptos y métodos. Seminario de formación de profesores sobre la didáctica de las matemáticas francesa. Manuscrito no publicado, Centro de Investigación y Formación en Educación, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Veiga, D. (2013). Una ingeniería didáctica aplicada sobre proporcionalidad y semejanza. *Premisa*, (56). Recuperado de:

<http://www.soarem.org.ar/Documentos/56%20Veiga.pdf>

Anexos

A) Cuestionario inicial.

1. ¿Cómo se leen las siguientes fracciones? (si conoces varias formas de leerlas escríbelas todas las que conozcas)

a) $\frac{1}{3}$ _____ b) $\frac{1}{12}$ _____

c) $\frac{7}{10}$ _____ d) $\frac{8}{7}$ _____

e) $2\frac{1}{8}$ _____

2. ¿Qué significado tiene para ti la expresión " $\frac{2}{3}$ de una torta"?

3. ¿Qué significado tiene para ti la expresión " $\frac{5}{2}$ de una torta"?

4. ¿Qué significado tiene para ti la expresión " $\frac{4}{4}$ de una torta"?

5. ¿Qué significado tiene para ti la expresión " $1\frac{1}{2}$ de una torta"?

6. ¿Cuántas quintas partes tiene la unidad?

7. Se tienen dos pizzas y se quieren repartir entre 5 personas
¿Cuánto le toca a cada uno? Haz una representación gráfica.
Si realizas alguna operación, escríbela.

8. Se tienen cuatro pizzas y se quieren repartir entre 3 personas
¿Cuánto le toca a cada uno? Haz una representación gráfica.
Si realizas alguna operación, escríbela.

9. ¿Cuánto le faltan a los $\frac{3}{7}$ de la unidad para llegar a ser la unidad completa? Si realizas alguna operación, escríbela.

10. ¿Cuántos bolívaes representan los $\frac{3}{4}$ de 60 bolívaes? Si realizas alguna operación, escríbela.

11. ¿Cuántos bolívaes representan los $\frac{7}{5}$ de 60 bolívaes? Si realizas alguna operación, escríbela.

B) Situación “Forma tus banderas”, Tovar y Sevilla (2005)

En la situación central “Forma tus banderas”, las actividades son en equipos, cada uno de estos debe de formar una bandera con dos pequeños tramos rectangulares de cartoncillo de colores distintos, por ejemplo, uno rojo y otro azul.

El tramo azul se obtiene de una doble partición.

a) El maestro da al equipo la cuarta parte de una tira larga de cartoncillo azul (la corta en cuatro a la vista de todos).

b) Dentro de cada equipo se reparten aquel cuarto entre los integrantes.

Usando uno de estos como el primer tramo de la bandera.

El tramo rojo deben solicitarlo a otro equipo.

c) Solicitar por escrito una tira roja del mismo tamaño que las que obtuvieron al repartirse la tira azul.

Los equipos deben de lograr que sus dos tramos sean del mismo tamaño. El uso de la regla graduada está prohibido. Se espera que los estudiantes proporcionen la medida del tramo solicitado tomando la tira larga como unidad y, por lo tanto, que expresen con fracciones el resultado de la doble partición.

C) Resumen de aprobados y reprobados de la pre-prueba comprendido entre los años escolares 1996 al 2004.

Secciones de 7mo año	aprobados	%	reprobados	%	total
01	106	49,30	109	50,70	215
02	88	38,43	141	61,57	229
03	108	50,23	107	49,77	215
04	77	35,32	141	64,68	218
05	75	33,78	147	66,22	222
06	67	35,45	122	64,55	189
07	86	43,88	110	56,12	196
08	90	44,78	111	55,22	201
09	79	40,72	115	59,28	194
10	80	44,94	98	55,06	178
11	93	49,21	96	50,79	189
12	100	48,78	105	51,22	205
13	59	30,26	136	69,74	195
14	48	27,43	127	72,57	175
15	71	42,01	98	57,99	169
16	59	36,65	102	63,35	161
17	50	27,03	135	72,97	185
Total	1336	40,05	2000	59,95	3336

D) Relación de aprobados y reprobados de 7mo del 3er lapso, unidad programática “números fraccionarios”.

Año escolar																
	96	97	97	98	98	99	99	00	00	01	01	02	02	03	03	04
Sección	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R
01	13	13	13	14	17	06	13	09	13	15	94	19	14	21	19	12
02	10	20	12	17	05	24	10	19	07	19	11	14	13	17	20	11
03	18	05	05	11	25	06	08	18	04	25	13	17	16	13	19	12
04	07	19	10	14	18	11	05	20	09	20	03	19	13	17	12	21
05	11	12	09	15	06	25	07	19	06	23	11	19	14	14	11	20
06	11	08	03	15	06	17	02	21	10	20	08	09	14	16	13	16
07	10	08	15	09	10	16	07	17	06	22	09	12	14	12	15	14
08	08	11	11	13	11	09	18	08	08	21	12	12	15	14	07	23
09	04	16	12	10	15	10	07	17	09	21	11	13	09	16	12	12
10	09	09	09	06	15	06	14	11	08	20	06	16	11	14	08	11
11	15	07	15	10	11	07	05	18	10	14	13	10	10	15	14	15
12	10	12	16	13	11	11	05	20	14	12	16	07	14	14	14	16
13	14	03	08	17	02	20	02	21	07	17	02	22	08	20	16	16
14	12	05	07	17	01	19	03	23	05	16	04	16	07	13	09	18
15	06	08	09	15	02	19	00	23	04	13	15	05	10	11	25	04
16	12	07	10	12	02	20	00	16	05	15	11	08	06	11	13	13
17	05	12	09	16	03	19	02	25	02	14	14	11	06	16	09	22
Total	175	175	173	224	160	245	108	305	127	307	163	229	194	254	236	261

E) Comparación entre aprobados y reprobados de la post-prueba correspondiente al año escolar 2005-2006.

Secciones de 7mo año	aprobados	%	reprobados	%	total
10	14	87,50	02	12,50	16
12	09	75,00	03	25,00	12
14	07	63,64	04	36,36	11
17	10	71,43	04	28,57	14
Total	40	75,47	13	24,53	53

F) Ficha 1 de actividades (Equipo).

Ficha 1.

¿Cómo podríamos expresar cuánto mide cada una de estas cintas?

Una vez que hayan decidido cómo hacerlo, anoten las mediciones en la tabla:

Cintas	Medida
a)	$1/3 + 1/3 + 1/5$
b)	...
c)	$1/3 + 1/6 + 1/12$
d)	$1 + 1/4 + 1/6$
...	...
i)	

G) Ficha 2 de actividades (Equipo).

Cintas	Medida en yuan y fracciones de yuan	
	Utilizando más de un referente Expresión compuesta	Utilizando un solo referente Expresión simple
a)		
b)		19/15 de yuan
c)		7/12 de yuan
d)		1 yuan y 1/3 de yuan
...		
i)		

H) Ficha 3 de actividades (Individual).

Ficha 3: Buscando la misma fracción

1.- En la actividad anterior, pudieron establecer que una misma fracción se podía expresar con distinta unidad de medida, sin que la fracción cambie. Utiliza lo aprendido para buscar cuatro expresiones distintas para las siguientes fracciones:

Medidas	
a)	$\frac{1}{2} =$
b)	$\frac{3}{15} =$
c)	$\frac{2}{3} =$
d)	$\frac{1}{6} =$

I) Ficha 4 de actividades (Individual).

Ficha 4

Expresa la suma de las siguientes medidas.

Medidas	
1)	$\frac{1}{2} + \frac{2}{6}$
2)	$\frac{2}{15} + \frac{1}{5}$
3)	$\frac{4}{3} + \frac{2}{9}$
4)	$\frac{1}{4} + \frac{5}{12}$

J) Ficha 5 de actividades (Individual).

Ficha 5

Expresa la suma de las siguientes medidas.

Medidas	
1)	$\frac{1}{4} + \frac{2}{6}$
2)	$\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$
3)	$\frac{3}{8} + \frac{2}{6}$
4)	$\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$
5)	$\frac{1}{4} + \frac{3}{16}$
6)	$\frac{2}{25} + \frac{1}{5}$

K) Situación de la sesión 1, Peña (2011)

En la situación de la sesión 1 se plantea la necesidad de medir la longitud de 9 cintas no numeradas (pegadas sobre el pizarrón), utilizando como referente una unidad de medida desconocida, llamada yuan.

a) Se entrega a los equipos dos sets con el siguiente material:

- a. Una cinta cuya longitud es 1 yuan.
- b. Trozos de cintas de colores con medida en yuanes: uno de $\frac{1}{2}$, dos de $\frac{1}{3}$, tres de $\frac{1}{4}$, tres de $\frac{1}{5}$, cuatro de $\frac{1}{6}$, cinco de $\frac{1}{8}$, seis de $\frac{1}{10}$, siete de $\frac{1}{12}$ y ocho de $\frac{1}{15}$.
- c. 10 micas transparentes de 1 yuan.
- d. Plumones.

b) Se le pide a uno o dos estudiantes de cada equipo que pasen cada uno a medir una cinta distinta, utilizando los trozos que tienen en su equipo. Se les indica que peguen los trozos elegidos debajo de la cinta. Se espera que seleccionen dos o tres trozos que en conjunto compongan la longitud de cada cinta puesta en la pizarra.

c) Una vez que han sido medidas todas las cintas, el docente problematiza la situación preguntando al grupo “¿cuánto mide esta cinta?”. Se espera que los estudiantes señalen que para poder comunicar la cuantificación de la medida, es

necesario averiguar a qué parte de 1 yuan corresponde cada uno de los otros trozos de colores utilizados para medir las cintas blancas.

d) Luego de establecida dicha idea, el docente toma uno de los trozos fraccionarios y le pregunta al grupo “¿qué podríamos hacer para averiguar a qué parte de 1 yuan corresponde este trozo?”. La discusión debe ser gestionada por el docente de manera tal que surja la idea de repetir varias veces la medida del trozo hasta ver cuántos de ellos componen un yuan. Luego les pide que investiguen la medida de cada trozo de color.

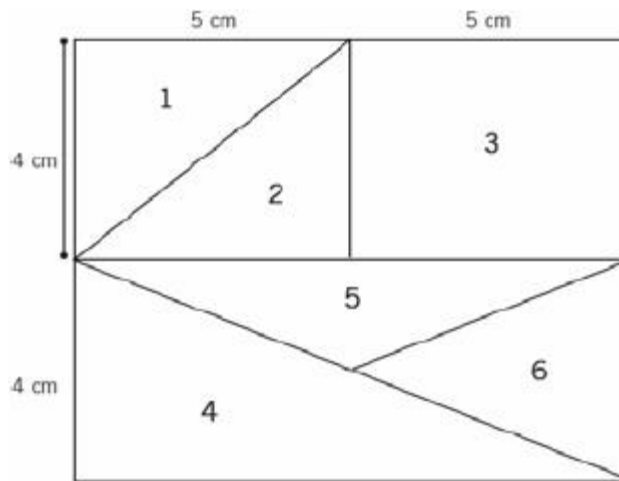
e) Una vez que han averiguado el valor de cada trozo de color, cuantifican las mediciones de las cintas blancas y las anotan en una ficha grupal (ficha 1).

f) Cuando todos los grupos han efectuado sus mediciones, se realiza una puesta en común registrando las medidas en la pizarra en una tabla similar a la de la ficha. Si hay más de una forma de expresar la medida, se anota cada opción expuesta y se discute acerca de la equivalencia entre las distintas combinaciones que componen la medida.

Al cierre de esta actividad, siempre y cuando haya surgido a partir de los planteamientos de los estudiantes, es importante dar énfasis a que existe más de una manera de expresar las medidas, y si es posible, identificar las igualdades entre algunas de las fracciones utilizadas y dejarlas registradas a un costado de la pizarra. En este momento el docente incentiva la reflexión acerca del sentido de existencia de las fracciones con preguntas tales como ¿por qué tuvimos que utilizar fracciones en esta

actividad? ¿Para qué nos sirvieron las fracciones? Si las medidas hubiesen sido cantidades enteras, ¿habríamos necesitado usar fracciones? ¿Cómo podemos estar seguros de que es así?, entre otras.

L) Rompecabezas.



M) Situación de la sesión 1, Veiga (2013)

La clase anterior al desarrollo de la sesión 1 se les solicita a los estudiantes que lleven hojas lisas, reglas, escuadras, compás, transportador y tijeras para la clase siguiente.

La actividad de la sesión 1 se desarrolla de la siguiente forma:

a) Cada equipo recibe en un sobre el enunciado de la actividad con las piezas de un rompecabezas recortadas y numeradas. Una representación del rompecabezas original queda expuesta en el pizarrón.

El esquema muestra las figuras que forman el rompecabezas con sus medidas:

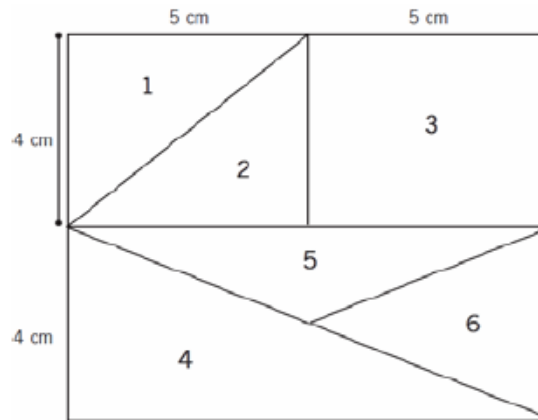


Imagen recuperada 4: Esquema de figuras

b) Los estudiantes habrán de resolver:

- a. Construir el mismo rompecabezas de manera tal que lo que mide 4 cm pase a medir 7 cm.
- b. Se necesita un modelo más pequeño. Construir el mismo rompecabezas pero de tal forma que lo que mide 5 cm (o 5 unidades) pase a medir 3 cm.

N) Hoja de trabajo.

	12 fichas	24 fichas	30 fichas	60 fichas
<i>Regla A</i> <i>Por cada 6 fichas,</i> <i>12 estampas</i>				
<i>Regla B</i> <i>Por cada ficha,</i> <i>3 estampas</i>				
<i>Regla C</i> <i>Por cada 2 fichas,</i> <i>8 estampas</i>				
<i>Regla D</i> <i>Por cada 3 fichas,</i> <i>9 estampas</i>				

O) situación 1: Selección de la mejor regla de cambio, Block

(2000)

A continuación se describe de forma general la “situación 1: Selección de la mejor regla”:

- Se anotan en el pizarrón las reglas de cambio.
- Los estudiantes, organizados en equipos de cuatro integrantes, escogen la regla con la que piensan que ganarán más estampas y la anotan en un papel que entregan a la maestra.
- Una vez escogida una regla, se les entrega cierta cantidad de fichas, la misma a todos los equipos.
- Los equipos calculan cuántas estampas les corresponden de acuerdo a la regla que escogieron.

e) En el pizarrón se anota la regla que escogió cada equipo y la cantidad de estampas que espera recibir. Si hay discrepancias (por ejemplo, dos equipos que, habiendo escogido la misma regla, esperan recibir cantidades de estampas diferentes) se discute. Éste constituye un primer momento de verificación (en el nivel numérico)

f) Se efectúan los intercambios de material de acuerdo con cada regla. Éste constituye un segundo momento de verificación, esta vez empírica.

Nótese que la situación se organiza de manera que, en el momento de escoger la regla de cambio, los estudiantes todavía no saben cuál es la cantidad de fichas que van a recibir, de manera que tienen que comparar las reglas de cambio antes.

El momento de la verificación empírica es fundamental, se espera que ayude a comprender la situación, y que sea la ocasión para poner en evidencia hipótesis erróneas (por ejemplo, la mejor regla es la que se formula con más estampas) así como para esbozar estrategias para la próxima ocasión.

Ensenada B.C. a 16 de mayo de 2017

ASUNTO: VOTO APROBATORIO

Armando Agustín Chavez Salazar

Presente.

Por este conducto le informo a usted que después de haber leído su trabajo de tesis titulado: "ESTADO DEL ARTE DE INGENIERÍAS DIDÁCTICAS: FRACCIONES", considero que cumple con los requisitos necesarios para aprobar la fase escrita de su **examen profesional**.

Sin más por el momento quedo de usted para cualquier aclaración.

Atentamente



Adina Jordán Aramburo
Presidente

Ensenada B.C. a 17 de mayo de 2017

ASUNTO: VOTO APROBATORIO

Armando Agustín Chavez Salazar

Presente.

Por este conducto le informo a usted que después de haber leído su trabajo de tesis titulado: "Estado del arte de ingenierías didácticas: Fracciones", considero que cumple con los requisitos necesarios para aprobar la fase escrita de su **examen profesional**.

Sin más por el momento quedo de usted para cualquier aclaración.

Atentamente



Gloria Elena Rubí Vázquez
Primer vocal

Ensenada B.C. a 17 de mayo de 2017

ASUNTO: VOTO APROBATORIO

Armando Agustín Chavez Salazar

Presente.

Por este conducto le informo a usted que después de haber leído su trabajo de tesis titulado: "Estado del arte de ingenierías didácticas: Fracciones", considero que cumple con los requisitos necesarios para aprobar la fase escrita de su **examen profesional**.

Sin más por el momento quedo de usted para cualquier aclaración.

Atentamente



Angelina Guadalupe González Peralta
Secretario