

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE INGENIERÍA ENSENADA



PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA

**SOBRE CONTROL POR INTERCONEXIÓN E
INYECCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO (IDA-PBC)
APLICADO A MECANISMOS**

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el
grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

JESÚS ALBERTO SANDOVAL GALARZA

Ensenada, Baja California, México. Agosto de 2010.

RESUMEN de la Tesis de Jesús Alberto Sandoval Galarza, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS en ELÉCTRICA con orientación en CONTROL. Ensenada, Baja California, México. Agosto de 2010.

SOBRE CONTROL POR INTERCONEXIÓN E INYECCIÓN DE AMORTIGUAMIENTO (IDA-PBC) APLICADO A MECANISMOS

Resumen aprobado por:



Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez
Director de tesis

El diseño de sistemas de control basado en conceptos energéticos ha sido un área de intensa investigación desde hace varias décadas. Una metodología de diseño de sistemas de control, es el *control por interconexión e inyección de amortiguamiento* (IDA) —una formulación del control basado en pasividad (PBC)—, introducido a principios de esta década. Este método utiliza la formulación hamiltoniana como marco natural. En este trabajo de tesis se presentan un par de extensiones de la metodología IDA-PBC para la regulación de mecanismos. La primera extensión aplica a la estabilización de una clase de mecanismos subactuados con fricción, donde se ha utilizado el modelo de fricción de Dahl para aproximar la fricción real; se muestran resultados experimentales con un péndulo de Furuta para verificar el desempeño del sistema de control. La segunda extensión aplica a la regulación de mecanismos accionados con motores de CD con escobillas e imanes permanentes. Adicionalmente, con el fin de ilustrar la aplicación del método IDA-PBC, se presentan nuevos IDA-PBC de los siguientes mecanismos subactuados: el sistema carro-péndulo y el péndulo de Furuta. Finalmente, se presenta en detalle el análisis de estabilidad de un IDA-PBC de un sistema barra-bola, donde la fricción juega un rol importante en la prueba de estabilidad.

Palabras clave: Sistemas subactuados, formulación hamiltoniana, modelo de fricción de Dahl.

ABSTRACT of the thesis of Jesús Alberto Sandoval Galarza, presented as partial requirement for obtaining the degree of DOCTOR OF SCIENCE in ELECTRIC with orientation in CONTROL. Ensenada, Baja California, México. August 2010.

ON INTERCONNECTION AND DAMPING ASSIGNMENT CONTROL (IDA-PBC) APPLIED TO MECHANISMS

Energetic concepts-based control system design has been an area of intense research from several decades ago. A methodology for design of control systems, is the *control by interconnection and damping assignment* (IDA) —a formulation of the passivity-based control (PBC)— introduced at the beginning of this decade. This method uses the Hamiltonian formulation as natural framework. Two extensions of the IDA-PBC methodology for stabilization of mechanisms are presented in this thesis work. The former extension applies to the stabilization of a class of underactuated mechanical systems with friction, where it uses the Dahl model to approximate the actual friction; experimental results with a Furuta pendulum have been shown to verify the performance of the control system. The second extension applies to the regulation of mechanisms actuated with permanent magnets and brushed DC motors via the IDA-PBC method. Additionally, the application of this methodology is illustrated with a new IDA-PBC of the following underactuated mechanical systems: the cart-pendulum system and the Furuta pendulum. Finally, the stability analysis of the IDA-PBC of a ball and beam system is shown in detail, where the friction plays an important role in the stability analysis.

Keywords: Underactuated systems, Hamiltonian formulation, Dahl model.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA ENSENADA

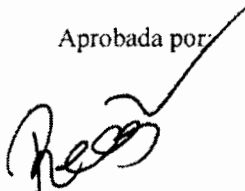
**Sobre Control por Interconexión e Inyección de Amortiguamiento
(IDA-PBC) Aplicado a Mecanismos**

TESIS

Que para obtener el grado de Doctor en Ciencias presenta:

Jesús Alberto Sandoval Galarza

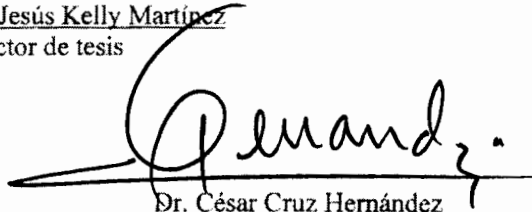
Aprobada por:



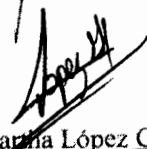
Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez
Director de tesis



Dr. Víctor Adrián Santibáñez Dávila
Miembro del comité



Dr. César Cruz Hernández
Miembro del comité



Dra. Rosa Martha López Gutiérrez
Miembro del comité



Dr. Oscar Roberto López Bonilla
Miembro del comité

Ensenada, Baja California, México. Agosto, 2010

AGRADECIMIENTOS

A la **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA** y al **INSTITUTO TECNOLÓGICO DE LA PAZ** por permitirme realizar esta tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias en Eléctrica con orientación en Control.

A mi director de tesis, el **Dr. Rafael Kelly Martínez**, quien me ha enseñado con su ejemplo la ardua labor de la investigación y la importancia de un buen planteamiento del problema antes de buscar su solución.

Al **Dr. Víctor Santibáñez Dávila**, quien desde mi tesis de Maestría me ha apoyado y alentado siempre en los momentos difíciles.

A la **Dra. Rosa Martha López Gutiérrez**, por su generosidad y apoyo recibido desde mi ingreso hasta la terminación de mis estudios doctorales.

A los otros miembros de mi comité de tesis: **Dr. César Cruz Hernández** y **Dr. Oscar López Bonilla**, por sus comentarios y sugerencias para mejorar este trabajo de tesis.

Un agradecimiento muy en especial al **Dr. Eusebio Bugarín** y a su esposa, la **Dra. Ana Aguilar**, por su valiosa amistad y apoyo incondicional para lograr esta nueva meta; así como también al **Dr. Ricardo Campa**, por compartir su amistad y sus conocimientos.

A mis excompañeros del doctorado, con quienes compartí experiencias de trabajo y personales, al **M.C. Dann de la Torre** y al **Dr. Javier Moreno**.

A mis queridos padres, **Rigoberto Sandoval** y **Evangelina Galarza**, por darme la vida y sus invaluable enseñanzas.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** por el apoyo recibido para terminar mis estudios doctorales.

*Dedico este trabajo con todo
mi amor, a mi esposa Elda
Patricia y a mis hijos Kidzia
y Alberto.*

CONTENIDO

	Pág.
I Introducción	1
I.1 Objetivo de la tesis	4
I.2 Principales contribuciones	5
I.3 Organización del documento	5
II El método IDA-PBC	7
II.1 Estabilización de sistemas mecánicos subactuados	7
II.1.1 Dinámica deseada	8
II.1.2 Estabilidad	9
II.1.3 Mecanismos con fricción	12
II.2 Nuevo IDA-PBC de un sistema carro-péndulo	15
II.2.1 Modelo y objetivo de control	16
II.2.2 Diseño del control IDA-PBC	17
II.2.3 Simulaciones	23
II.3 Análisis de estabilidad del control IDA-PBC de un sistema barra-bola con fricción	24
II.3.1 Nueva inyección de amortiguamiento con k_v no lineal	30
II.3.2 Simulaciones	32
III Estabilización de una clase de sistemas mecánicos subactuados con fricción dinámica mediante el método IDA-PBC	34
III.1 Introducción	34

CONTENIDO (Continuación)	Pág.
III.2 Formulación del problema	36
III.3 Observador de fricción	38
III.4 Análisis de estabilidad	39
III.5 Aplicación: El péndulo de Furuta	44
III.5.1 Nuevo IDA-PBC del péndulo de Furuta	45
III.5.2 Resultados experimentales	50
III.6 Conclusiones	52
IV Control IDA-PBC de mecanismos accionados por motores de CD con escobillas e imanes permanentes	54
IV.1 Introducción	54
IV.2 Formulación del problema	55
IV.3 Análisis de estabilidad	58
IV.4 Aplicación: El sistema barra-bola	61
IV.4.1 Simulaciones	62
IV.5 Conclusiones	63
V Conclusiones generales	65
V.1 Problema abiertos	65
LITERATURA CITADA	67

LISTA DE FIGURAS

1	Sistema carro-péndulo.	15
2	Evolución temporal de la posición del carro $q_1(t)$	24
3	Evolución temporal de la posición del péndulo $q_2(t)$	24
4	Sistema barra-bola.	25
5	Evolución temporal de posiciones en simulación 1.	32
6	Evolución temporal de posiciones en simulación 2.	33
7	Péndulo de Furuta y parámetros característicos.	44
8	Péndulo de Furuta experimental.	50
9	Evolución temporal de $q_1(t)$ sin compensación de fricción.	52
10	Evolución temporal de $q_2(t)$ sin compensación de fricción.	52
11	Evolución temporal de $q_1(t)$ usando compensación de fricción.	53
12	Evolución temporal de $q_2(t)$ usando compensación de fricción.	53
13	Evolución temporal de la posición de la bola $q_1(t)$	63
14	Evolución temporal de la posición de la barra $q_2(t)$	63
15	Evolución temporal de la corriente de armadura del motor $i_a(t)$	64
16	Evolución temporal del voltaje del motor $v_a(t)$	64

LISTA DE TABLAS

I	Parámetros del péndulo de Furuta.	51
---	---	----

I Introducción

Históricamente, el control de mecanismos ha sido una área de investigación permanente que se remonta al origen del control automático. En las últimas décadas, el estudio de algunos fenómenos físicos como la energía y la fricción en sistemas mecánicos, ha permitido el desarrollo de nuevas técnicas de control basadas en conceptos energéticos. Técnicas de diseño de control que incorporan principios de energía tienen sus fundamentos en la mecánica clásica, la cual permite describir el movimiento de sistemas mecánicos. Más aún, las ecuaciones de movimiento de esta clase de sistemas pueden ser obtenidas a partir de su función de energía, ya sea con las ecuaciones Euler-Lagrange, o bien, con las ecuaciones de Hamilton (Jose & Saletan, 1998).

Originalmente, en ambas formulaciones —lagrangiana y hamiltoniana— las ecuaciones de movimiento describen el comportamiento natural del sistema y no se consideran fuerzas externas. Sin embargo, desde el punto de vista de control, una generalización de ambas formulaciones para sistemas mecánicos, se obtiene al considerar como fuerzas externas el par mecánico proporcionado por la entrada de control y la fricción del mecanismo. En ese caso, la dinámica del sistema puede ser manipulada mediante la entrada de control para obtener un comportamiento deseado, y una estrategia para lograrlo es el control por *moldeo de energía* (Ortega *et al.*, 1998). En ese trabajo, los autores definen “moldeo de energía” como el proceso mediante el cual el sistema en malla cerrada es obtenido a partir de una función escalar, llamada función de energía artificial. El control de posición de robots manipuladores fue uno de los primeros trabajos sobre control por moldeo de energía e inyección de amortiguamiento, mostrado en (Takegaki & Arimoto, 1981). La idea principal de ese trabajo es moldear la energía potencial del sistema en malla cerrada e inyectar amortiguamiento con retroalimentación de velocidad, para alcanzar estabilidad asintótica global del equilibrio deseado.

Por otro lado, una clase de sistemas que ha permitido el desarrollo de novedosas técnicas para el análisis y síntesis de controladores son los sistemas pasivos. Esta clase

de sistemas son llamados así debido a la noción fundamental de pasividad; y en el caso de sistemas mecánicos la pasividad encuentra una clara interpretación física en los conceptos de balance de energía y disipación de energía (Ortega *et al.*, 1998). El control basado en pasividad (PBC, del inglés Passivity-Based Control) es una metodología de diseño para el control de sistemas no lineales, la cual es bien conocida en el control de sistemas mecánicos, y fue introducida por (Ortega & Spong, 1989). Más precisamente, en el método PBC, el objetivo de control es hacer el sistema pasivo con una función de almacenamiento que tenga un mínimo en el equilibrio deseado; y un segundo requerimiento para asegurar estabilidad asintótica del equilibrio es detectabilidad de la salida pasiva (Ortega *et al.*, 2002b). Resultados relevantes del método PBC aplicado al control de diferentes sistemas físicos son presentados en (Ortega *et al.*, 1998).

En años recientes, una clase de sistemas que ha despertado gran interés en la comunidad de control son los sistemas mecánicos subactuados. Existen diferentes definiciones en la literatura sobre esta clase de sistemas, y por la importancia que reviste en este trabajo de tesis, se presentan un par de esas definiciones:

Definición 1. *Los sistemas mecánicos subactuados son aquellos que tienen menos entradas de control que grados de libertad (Spong, 1994).*

Definición 2. *Los sistemas subactuados son sistemas de control mecánico con menos controles que número de variables de configuración (Olfati-Saber, 2001).*

De las definiciones anteriores, puede establecerse una equivalencia entre ellas, si se considera que los siguientes términos tienen el mismo significado: *sistemas mecánicos subactuados* y *sistemas de control mecánicos*, *entradas de control* y *controles*, *grados de libertad* y *variables de configuración*. Sin embargo, y a pesar de que al menos una de las definiciones podría cuestionarse su aplicación para algunos sistemas mecánicos particulares, en este trabajo de tesis se usará la Definición 1 cuando se haga referencia a sistemas mecánicos subactuados. Uno de los principales retos en el control de los sistemas mecánicos subactuados es su estabilización, ya que estrategias de control es-

tablecidas pueden fallar en estabilizar esta clase de sistemas. Un ejemplo de esto último es la estrategia mostrada en (Takegaki & Arimoto, 1981), que funciona bien para sistemas mecánicos completamente actuados, como los robots manipuladores, pero que puede fallar en el control de posición de algunos sistemas mecánicos subactuados. Para esos casos, diferentes metodologías de diseño han resuelto el problema de estabilización satisfactoriamente, ver por ejemplo los trabajos de (Olfati-Saber, 2002), (Fantoni & Lozano, 2000), (Ortega *et al.*, 1999), (Bloch *et al.*, 1999), (Reyhanoglu *et al.*, 1999), (Spong, 1997) y (Jankovic *et al.*, 1996).

El control por interconexión e inyección de amortiguamiento (IDA) —una nueva formulación del control basado en pasividad— introducido en (Ortega *et al.*, 1999), es una metodología de diseño de sistemas de control, que se fundamenta en especificar y obtener un sistema en malla cerrada deseado cuya función de energía total convenga a los fines del planteamiento del problema de control. Originalmente, el método IDA-PBC fue planteado para la estabilización de sistemas hamiltonianos controlados por puertos (PCHS, por sus siglas en inglés) (Ortega *et al.*, 1999). Los sistemas PCHS son sistemas hamiltonianos generalizados con ciertas propiedades téóricas y han sido llamados así en alusión al concepto de redes y su interacción con el entorno a través de puertos, donde un puerto es definido como un par de variables tales que su producto tiene unidades de potencia, e.g. en un circuito eléctrico el par voltaje–corriente o en un sistema mecánico el par posición–velocidad (Van der Schaft, 2000). Se destaca en el método IDA-PBC su filosofía de diseño, donde se considera a la planta y al controlador como sistemas dinámicos que intercambian energías mediante un patrón de interconexión. Más aún, desde su introducción, el método IDA-PBC ha demostrado ser una poderosa herramienta de diseño de sistemas de control para estabilizar un gran cantidad de sistemas físicos, como lo demuestra el número de extensiones y aplicaciones mostradas en (Ortega & García-Canseco, 2004).

Posterior al planteamiento original del método IDA-PBC, una nueva propuesta para estabilizar una clase de sistemas mecánicos subactuados fue presentada en (Ortega

et al., 2002a). El principal desafío que enfrenta esa propuesta y la propuesta original es la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (PDEs). Algunas estrategias para simplificar su solución son reportadas en (Ortega & García-Canseco, 2004); mientras en (Acosta *et al.*, 2005) y (Mahindrakar *et al.*, 2006) se presentan novedosas propuestas para casos particulares de sistemas mecánicos subactuados, donde las soluciones de las PDEs pueden ser obtenidas explícitamente. Para el caso de sistemas mecánicos completamente actuados, no es necesario resolver las PDEs, y luego entonces, la técnica de moldeado de energía potencial de (Takegaki & Arimoto, 1981) puede ser visto como un caso particular del método IDA-PBC (Ortega *et al.*, 2002a).

Trabajos recientes del método IDA-PBC aplicado a mecanismos, muestran algunos resultados novedosos, e.g. el diseño de un IDA-PBC para una clase de sistemas mecánicos que requiere sólo medición de posición es mostrado en (Venkatraman *et al.*, 2010) y (Dirks *et al.*, 2008), mientras en (Muralidharan *et al.*, 2009) presentan una nueva extensión del método IDA-PBC para el control de una clase de sistemas mecánicos con restricciones no holonómicas que aplican a robots móviles, en (Astolfi & Ortega, 2009) comprueban que una extensión dinámica en el método IDA-PBC no es necesaria para estabilización, y en (Viola *et al.*, 2007) presentan una nueva estrategia para facilitar la solución de las PDEs basada en un cambio de coordenadas parcial. Además, en (Santibáñez *et al.*, 2005) se presenta un control IDA-PBC con pares acotados para el mecanismo subactuado conocido como péndulo con rueda inercial. Finalmente, existen trabajos de tesis doctoral que han abordado el estudio de la metodología IDA-PBC aplicada a sistemas mecánicos, por ejemplo, (Acosta J., 2004) y (Gómez Estern F., 2002).

I.1 Objetivo de la tesis

El objetivo principal en esta tesis es aportar contribuciones para la solución de algunos problemas, aún sin resolver, en el ámbito del control de sistemas mecánicos, tanto actuados como subactuados utilizando principalmente la metodología IDA-PBC.

Estos incluyen sistemas con fricción.

I.2 Principales contribuciones

Este trabajo de tesis presenta ejercicios que aplican a la regulación de una clase de sistemas mecánicos, tanto actuados como subactuados. Como resultado del mismo se consideran las siguientes contribuciones:

1. Extensión del método IDA-PBC para la estabilización de una clase de sistemas mecánicos subactuados con fricción dinámica.
2. Extensión del método IDA-PBC para la regulación de mecanismos accionados por motores de CD con escobillas e imanes permanentes.

I.3 Organización del documento

El contenido de este documento de tesis está distribuido de la siguiente manera:

En el capítulo I se presentan algunos antecedentes de la metodología IDA-PBC, tema principal de esta tesis, desde su introducción hasta su aplicación al control de sistemas mecánicos.

El capítulo II presenta la formulación del problema del método IDA-PBC, y su aplicación al control de una clase de sistemas mecánicos subactuados. La formulación considera primero el caso en que la fricción esta ausente, y posteriormente el caso en que la fricción del mecanismo es tomada en cuenta. También, se ilustra la aplicación del método IDA-PBC en el diseño de un nuevo IDA-PBC de un sistema carro-péndulo. Finalmente, se muestra en detalle el análisis de estabilidad de un IDA-PBC de un sistema barra-bola, donde la fricción del mecanismo juega un rol importante en la prueba de estabilidad.

El capítulo III presenta una nueva extensión del método IDA-PBC para la estabilización de una clase de sistemas mecánicos subactuados con fricción dinámica, siendo este uno de los resultados más relevantes de este trabajo de tesis. La principal aportación de esta extensión es la incorporación del modelo de fricción de Dahl en la formulación del método IDA-PBC, con el fin de compensar la fricción mediante un observador no lineal que define una nueva inyección de amortiguamiento. Con el fin de verificar los resultados obtenidos, se muestra una aplicación de esta propuesta para la estabilización de un péndulo de Furuta, con un nuevo IDA-PBC. Los resultados de este capítulo han sido reportados en (Sandoval *et al.*, 2010b).

El capítulo IV muestra una nueva extensión del método IDA-PBC para la regulación de mecanismos, tanto actuados como subactuados, accionados por motores de CD con escobillas e imanes permanentes. El principal aporte de esta propuesta es la incorporación de la dinámica del motor de CD en el diseño del nuevo control IDA-PBC, sin despreciar la inductancia de armadura, tal que se obtiene un IDA-PBC en términos del voltaje y corriente del motor, en lugar de un par mecánico. Los resultados de este capítulo han sido reportados en (Sandoval *et al.*, 2010a).

Las conclusiones generales y comentarios finales de este trabajo se dan en el capítulo V.

II El método IDA-PBC

A continuación se presenta la metodología IDA-PBC aplicada a una clase de mecanismos subactuados, mostrada en (Ortega *et al.*, 2002a), donde la fricción está ausente.

II.1 Estabilización de sistemas mecánicos subactuados

La función de energía total es la suma de la energía cinética más la energía potencial del sistema¹

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) \quad (1)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ son los vectores de posiciones y momentos generalizados, respectivamente, $M = M^T > 0$ es la así llamada matriz de inercia, V es la energía potencial; y $\mathbf{p}$ es definido como

$$\mathbf{p} = M \dot{\mathbf{q}} \quad (2)$$

donde $\dot{\mathbf{q}}$ es el vector de velocidades generalizadas. Si se considera que el sistema no tiene amortiguamiento natural, las ecuaciones de movimiento del sistema pueden ser escritas como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (3)$$

donde $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$, tal que $\text{rango}\{G\} = m$, y $m < n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, y $\nabla(\cdot) = \frac{\partial}{\partial(\cdot)}$.

¹Para simplificar las expresiones, los argumentos de todas las funciones serán omitidas, y serán explícitamente escritas solo la primera vez cuando la función es definida.

II.1.1 Dinámica deseada

Motivados por (1), en (Ortega *et al.*, 2002a) proponen la siguiente función (la cual han llamado *función de energía deseada*):

$$H_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M_d^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + V_d(\mathbf{q}) \quad (4)$$

donde $M_d = M_d^T$ y V_d son la “matriz de inercia” y “función de energía potencial” deseadas (ambas a ser definidas), respectivamente. Será requerido que V_d tenga un mínimo aislado en $\mathbf{q}^*$, esto es

$$\mathbf{q}^* = \arg \min \{V_d\}. \quad (5)$$

En el método PBC, la entrada de control es separada naturalmente en dos términos

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{es}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{u}_{di}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (6)$$

donde el primer término es diseñado para lograr el moldeo de energía y el segundo inyecta amortiguamiento al sistema. La dinámica hamiltoniana deseada controlada por puertos toma la siguiente forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = [J_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - R_d(\mathbf{q}, \mathbf{p})] \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde los términos

$$J_d = -J_d^T = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & J_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix},$$

y

$$R_d = R_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GK_v(\mathbf{q}, \mathbf{p})G^T \end{bmatrix} \geq 0$$

representan las estructuras de interconexión y de amortiguamiento deseadas, donde $J_2 = -J_2^T$ y $K_v = K_v^T > 0$.

Las siguientes observaciones son hechas (Ortega *et al.*, 2002a).

- De (1) y (3), se tiene que $\dot{\mathbf{q}} = M^{-1}\mathbf{p}$. Esta relación debe cumplirse también en el sistema en malla cerrada. Fijando (4) y (7) se determina el bloque (1,2) de J_d .
- La matriz R_d es incluida para inyectar amortiguamiento en el sistema. Como es bien conocido, esto es logrado con retroalimentación negativa de la (nueva) salida pasiva (también llamado control $L_g V$), el cual en este caso es $G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d$. Esto es, se seleccionará el segundo término de (6) como

$$\mathbf{u}_{di} = -K_v G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d. \quad (8)$$

Esto explica el bloque (2,2) de R_d .

- Se mostrará más adelante que la matriz antisimétrica J_2 (y los elementos de la matriz M_d) pueden ser usados como *parámetros libres* para lograr el moldeo de energía. La posibilidad de proporcionar esos grados de libertad es la esencia del método IDA-PBC.

II.1.2 Estabilidad

Para la dinámica en malla cerrada deseada, se tiene la siguiente proposición, la cual revela las propiedades de estabilización del método IDA-PBC.

Proposición 1. (*Ortega et al., 2002a*). *El sistema (7), con (4) y (5), tiene un punto de equilibrio estable en $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T]^T$. Este punto de equilibrio es asintóticamente estable si este es localmente detectable de la salida² $G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d$. Un estimado del dominio de atracción está dado por $\Omega_{\bar{c}}$ donde*

$$\Omega_c \triangleq \{[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n} | H_d < c\} \quad (9)$$

y

$$\bar{c} \triangleq \sup\{c > H_d(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}) | \Omega_c \text{ está acotado}\}. \quad (10)$$

Prueba (*Ortega et al., 2002a*). De (4) y (5), se tiene que en una vecindad de $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T]^T$, H_d es una función definida positiva. Luego de algunos cálculos se muestra que, a lo largo de las trayectorias de (7), $\dot{H}_d$ satisface

$$\begin{aligned} \dot{H}_d &= [\nabla_{\mathbf{q}} H_d]^T \dot{\mathbf{q}} + [\nabla_{\mathbf{p}} H_d]^T \dot{\mathbf{p}} \\ &= -[\nabla_{\mathbf{p}} H_d]^T G K_v G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d \\ &\leq -\lambda_{\min}\{K_v\} |[\nabla_{\mathbf{p}} H_d]^T G|^2 \leq 0 \end{aligned}$$

dado que J_d es antisimétrica y K_v es definida positiva. Por tanto, $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T]^T$ es un equilibrio estable. Estabilidad asintótica, bajo la suposición de detectabilidad, es establecida invocando el teorema de Barbashin–Krasovskii (Khalil, 1996) y los argumentos usados en la prueba de (Byrnes *et al.*, 1991, Teorema 3.2). Finalmente, el estimado del dominio de atracción sigue del hecho que $\Omega_{\bar{c}}$ es el conjunto de nivel acotado más grande de H_d .

Por otro lado, para obtener el término $\mathbf{u}_{es}$ del controlador se reemplaza (6) y (8) en

²Esto es, para cualquier solución $[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T]^T$ del sistema en malla cerrada que pertenezca a alguna vecindad del equilibrio para todo $t \geq 0$, la siguiente implicación es verdadera: $G^T \nabla_{\mathbf{p}} H_d \equiv \mathbf{0}, \forall t \geq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} [\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T]^T = [\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T]^T$.

(3), y se iguala con (7)³

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u}_{es} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d \end{bmatrix}.$$

Mientras el primer renglón de las ecuaciones anteriores es claramente satisfecho, el segundo conjunto de ecuaciones puede ser expresado como

$$G\mathbf{u}_{es} = \nabla_{\mathbf{q}} H - M_dM^{-1}\nabla_{\mathbf{q}} H_d + J_2M_d^{-1}\mathbf{p}.$$

Ahora, es claro que si G es invertible, esto es, si el sistema es completamente actuado, entonces puede ser resuelto únicamente la entrada de control $\mathbf{u}_{es}$ dada cualquier H_d y J_2 . En el caso subactuado, G no es invertible sino solo de rango pleno columna, y $\mathbf{u}_{es}$ puede solo afectar los términos en el espacio del rango de G . Esto conduce al siguiente conjunto de ecuaciones, el cual debe ser satisfecho para cualquier selección de $\mathbf{u}_{es}$:

$$G^\perp \{ \nabla_{\mathbf{q}} H - M_dM^{-1}\nabla_{\mathbf{q}} H_d + J_2M_d^{-1}\mathbf{p} \} = \mathbf{0} \quad (11)$$

donde $G^\perp$ es una matriz aniquiladora izquierda de rango pleno de G , esto es, $G^\perp G = 0$. La ecuación (11), con H_d dada por (4), es un conjunto de PDEs no lineales con M_d y V_d desconocidas, con J_2 como parámetro *libre*, y $\mathbf{p}$ una coordenada independiente. Si una solución para esta PDE es obtenida, la ley de control resultante $\mathbf{u}_{es}$ está dada por

$$\mathbf{u}_{es} = [G^T G]^{-1} G^T [\nabla_{\mathbf{q}} H - M_dM^{-1}\nabla_{\mathbf{q}} H_d + J_2M_d^{-1}\mathbf{p}]. \quad (12)$$

Las PDEs (11) pueden ser naturalmente separadas en los términos que dependen de $\mathbf{p}$ y los términos que son independientes de $\mathbf{p}$, esto es, aquellos correspondientes a la energía cinética y a la energía potencial, respectivamente. Por tanto, (11) puede ser

³Note que la matriz de amortiguamiento se cancela con $\mathbf{u}_{di}$.

equivalentemente escrita como

$$G^\perp [\nabla_{\mathbf{q}} (\mathbf{p}^T M^{-1} \mathbf{p}) - M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) + 2J_2 M_d^{-1} \mathbf{p}] = \mathbf{0}, \quad (13)$$

$$G^\perp [\nabla_{\mathbf{q}} V - M^{-1} M_d \nabla_{\mathbf{q}_a} V_d] = \mathbf{0}. \quad (14)$$

En el epígrafe II.2, con el fin de ilustrar la aplicación del método IDA-PBC, se presenta en detalle el diseño de un nuevo IDA-PBC de un sistema carro-péndulo, donde se muestra un procedimiento para resolver (13) y (14), cuando se considera ese mecanismo.

II.1.3 Mecanismos con fricción

En la formulación original del método IDA-PBC (Ortega *et al.*, 2002a), la fricción está ausente y una extensión para el caso en que la fricción es tomada en cuenta ha sido presentada en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004). Un análisis detallado del método IDA-PBC aplicado a la estabilización de los sistemas mecánicos subactuados en presencia de amortiguación natural, por ejemplo, la fricción viscosa, se ha mostrado tanto en formulación lagrangiana (Reddy *et al.*, 2004) como en formulación hamiltoniana (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004). En esos trabajos, se muestra cómo el amortiguamiento natural puede comprometer la estabilidad del sistema cuando este no se considera en el marco de la metodología IDA-PBC.

Basado en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004), a continuación se muestra la formulación del problema de la extensión del método IDA-PBC para la regulación de sistemas mecánicos subactuados con fricción.

Tomando en cuenta la fricción viscosa, (3) puede ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & -R(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (15)$$

donde $R = \text{diag}\{f_{v_1}, \dots, f_{v_n}\}$ es una matriz diagonal definida positiva, la cual contiene

los coeficientes de fricción viscosa de las n coordenadas. Ahora, defínase la matriz

$$B(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = J_2 - R_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (16)$$

donde la matriz R_d está dada por

$$R_d = GK_v G^T + RM^{-1}M_d. \quad (17)$$

Entonces, el sistema en malla cerrada deseado (7) queda como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_dM^{-1} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Enseguida, considere la siguiente desigualdad:

$$G^\perp [RM^{-1}M_d + M_dM^{-1}R] > 0. \quad (19)$$

Siguiendo el mismo razonamiento usado en la Proposición 1, a continuación se presenta el principal resultado de estabilidad cuando se considera (15) con la ley de control mostrada en (6), con (8) y (12).

Proposición 2. *Considere el sistema (18). Suponga que existe una matriz M_d simétrica y definida positiva, y una función V_d que satisfacen (13), (14), (5) y (19), y aseguran la positividad de R_d dada por (17) con una K_v apropiada. Entonces, el equilibrio $[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T]^T = [\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T]^T$ del sistema en malla cerrada (18) es asintóticamente estable, al menos localmente. Una función de Lyapunov para probarlo está dada por (4) y un estimado del dominio de atracción está dado por (9)-(10).*

Prueba: Primero, puede verificarse que $[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T]^T = [\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T]^T$ es un punto de equilibrio aislado de (18). Luego, la función (4) es definida positiva, al menos localmente, de acuerdo a los argumentos usados en la prueba de la Proposición 1. Enseguida, la

derivada temporal de (4) a lo largo de las trayectorias del sistema (18) está dada por

$$\dot{H}_d = -\mathbf{p}^T M_d^{-1} R_d M_d^{-1} \mathbf{p} \quad (20)$$

la cual es una función no positiva con $R_d > 0$. Note que para asegurar positividad de R_d debe cumplirse (19) y existir una K_v en (17) que garantice $R_d > 0$. Por tanto, con estos resultados concluimos que (4) es una función de Lyapunov. Basado en la teoría de Lyapunov, estos resultados aseguran que el equilibrio $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T]^T$ es estable.

Ahora, solo resta asegurar estabilidad asintótica. Con este fin, de acuerdo con el Teorema de Barbashin–Krasovskii el conjunto Ω queda como:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \in D : \dot{H}_d = 0 \right\} \\ &= \{ \mathbf{p}^T M_d^{-1} R_d M_d^{-1} \mathbf{p} = 0 \} \end{aligned}$$

donde $D \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Enseguida, buscamos todas las trayectorias que, iniciando en Ω , permanezcan allí para siempre. Con este fin, note que en Ω lo siguiente debe ser satisfecho

$$\mathbf{p}^T M_d^{-1} R_d M_d^{-1} \mathbf{p} = 0. \quad (21)$$

De acuerdo a los resultados previos, con $R_d > 0$, la única solución que cumple (21) es $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Esto implica que $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, y sustituyendo esos resultados en (18) tomando en cuenta (5), obtenemos $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$. Por tanto, concluimos que el equilibrio $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T]^T$ es asintóticamente estable, al menos localmente.

Finalmente, el estimado del dominio de atracción sigue del hecho que $\Omega_{\bar{c}}$ es el conjunto de nivel más grande de H_d . Esto completa la prueba.

Comentario 1. Al comparar la Proposición 1 con la Proposición 2, puede observarse que en esta última puede concluirse estabilidad asintótica directamente, si existe una M_d que garantice la condición (19) y una K_v que asegure positividad de (17); mientras

que en la Proposición 1 depende de que sea cierta la suposición de detectabilidad, para la cual no queda claro como verificarla de manera sistemática. Sin embargo, esa condición adicional sobre la matriz M_d en la Proposición 2, que no se requiere en la Proposición 1, sea tal vez sea una de las razones de que en la mayoría de las extensiones y aplicaciones del método IDA-PBC, la fricción está ausente.

II.2 Nuevo IDA-PBC de un sistema carro-péndulo

Con el fin de ilustrar la aplicación del método IDA-PBC para la regulación de sistemas mecánicos subactuados, en este epígrafe se muestra el diseño de un nuevo IDA-PBC del sistema carro-péndulo. El procedimiento de diseño está basado en la propuesta presentada en (Sandoval *et al.*, 2008).

El sistema carro-péndulo es un sistema mecánico subactuado que consiste de un carro moviéndose horizontalmente con un péndulo acoplado al carro, el cual gira libremente (ver figura 1).

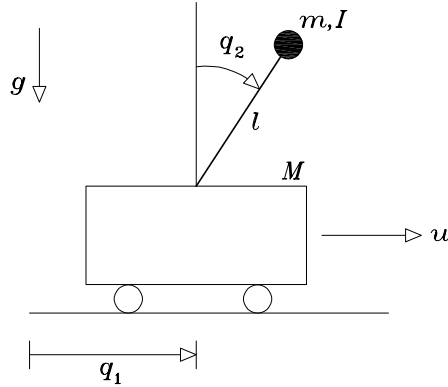


Figura 1: Sistema carro-péndulo.

El desplazamiento del carro es controlado con un actuador que aplica un par sobre él, mientras la ausencia de actuación en el péndulo determina la naturaleza subactuada del

mecanismo (Kelly *et al.*, 2005c). En la figura 1, las posiciones son q_1 y q_2 , mientras el resto de los parámetros del carro-péndulo: longitud, momento de inercia y masas están dados por l , I , m y M , respectivamente. La aceleración de la gravedad es g , mientras u es el par aplicado sobre el carro.

II.2.1 Modelo y objetivo de control

El modelo hamiltoniano del carro-péndulo mostrado en la figura 1, puede ser descrito por (3) con las matrices

$$M(q_2) = \begin{bmatrix} \varphi & \gamma \cos(q_2) \\ \gamma \cos(q_2) & \beta \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

y la función de energía potencial

$$V(q_2) = \delta[\cos(q_2) - 1]$$

donde las constantes están definidas como

$$\begin{aligned} \varphi &= M + m, & \beta &= ml^2 + I, \\ \gamma &= ml, & \delta &= mgl. \end{aligned} \quad (23)$$

Por conveniencia de notación, los elementos de la matriz $M(q_2)$ dada en (22) son denotados como sigue

$$M(q_2) \triangleq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

El objetivo de control es llevar al péndulo a la posición vertical superior con el carro en una posición deseada, iniciando desde una vecindad de esta configuración, donde la posición deseada del carro está acotada por los límites físicos del mecanismo.

Formalmente, el objetivo de control puede ser establecido como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{d_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

donde q_{d_1} es la posición deseada del carro.

II.2.2 Diseño del control IDA-PBC

Primero, se aplican los resultados mostrados en el epígrafe II.1, donde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad G^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que $G^\perp G = 0$. Enseguida, la asignación de $M_d = M_d(q_2)$ facilitará la solución de la PDE (13), como se verá más adelante. Un paso clave en el diseño es la asignación particular de la matriz

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\alpha}(q_2) \\ -\tilde{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\alpha}(q_2) & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\alpha} W \quad (26)$$

siendo $\tilde{\mathbf{p}} = M_d^{-1} \mathbf{p}$, $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1(q_2) \quad \alpha_2(q_2)]^T$ libre y $W \in so(2)$. Usando (26) y la siguiente identidad

$$\frac{dM^{-1}}{dq_i} = -M^{-1} \frac{dM}{dq_i} M^{-1}$$

la Ecuación (13) queda

$$-\mathbf{p}^T M^{-1} \frac{dM}{dq_2} M^{-1} \mathbf{p} + G^\perp M_d M^{-1} e_2 \mathbf{p}^T M_d^{-1} \frac{dM_d}{dq_2} M_d^{-1} \mathbf{p} + 2\mathbf{p}^T M_d^{-1} \boldsymbol{\alpha} G^\perp W M_d^{-1} \mathbf{p} = 0 \quad (27)$$

donde e_2 es el vector base. Ahora, (27) puede ser expresada como

$$\mathbf{p}^T \left[-M^{-1} \frac{dM}{dq_2} M^{-1} + [G^\perp M_d M^{-1} e_2] M_d^{-1} \frac{dM_d}{dq_2} M_d^{-1} - M_d^{-1} \begin{bmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} M_d^{-1} \right] \mathbf{p} = 0 \quad (28)$$

tal que se ha asignado únicamente la parte simétrica de la matriz $2\alpha G^\perp W$, dado por $\mathcal{A} = \alpha G^\perp W + [\alpha G^\perp W]^T$, esto es,

$$2\alpha G^\perp W = -2 \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} - \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que $2G^\perp J_2 M_d^{-1} \mathbf{p} = \mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathcal{A} M_d^{-1} \mathbf{p}$, con J_2 dado por (26). Es importante resaltar que la asignación de la matriz $\mathcal{A}$ es crucial en el diseño. Un análisis detallado de la incorporación de esta novedosa matriz en la solución de (13) es mostrada en (Acosta *et al.*, 2005). Luego, de (28) se tiene que

$$-M^{-1} \frac{dM}{dq_2} M^{-1} + [G^\perp M_d M^{-1} e_2] M_d^{-1} \frac{dM_d}{dq_2} M_d^{-1} - M_d^{-1} \begin{bmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} M_d^{-1} = 0$$

la cual multiplicando tanto por la izquierda como por la derecha por M_d , y definiendo $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix} \triangleq M_d M^{-1}$, queda

$$\gamma_{\text{sen}(q_2)} \Lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Lambda^T + \lambda_4 \frac{dM_d}{dq_2} - \begin{bmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (29)$$

Antes de continuar, es conveniente decir que hasta ahora, la estrategia de diseño que se ha seguido busca facilitar la solución de M_d en (13). En este caso, el conjunto de PDEs mostradas en (13) ha sido transformado en un conjunto de ecuaciones algebraicas en

(29), las cuales no presentan obstáculo alguno en la solución de M_d , ya que α_1 y α_2 son libres.

Ahora, se continúa el diseño considerando de la definición de la matriz Λ ,

$$M_d = \Lambda M \triangleq \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \gamma \cos(q_2), \\ d_2 &= \lambda_1 \gamma \cos(q_2) + \lambda_2 \beta, \\ d_3 &= \lambda_3 \varphi + \lambda_4 \gamma \cos(q_2), \\ d_4 &= \lambda_3 \gamma \cos(q_2) + \lambda_4 \beta. \end{aligned} \tag{30}$$

Tomando en cuenta (30) en (29), resulta el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas con:

$$2\gamma \sin(q_2) \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_4 \frac{d}{dq_2} (\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \gamma \cos(q_2)) - 2\alpha_1 = 0 \tag{31}$$

$$\gamma \sin(q_2) [\lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_3] + \lambda_4 \frac{d}{dq_2} (\lambda_1 \gamma \cos(q_2) + \lambda_2 \beta) - \alpha_2 = 0 \tag{32}$$

$$2\gamma \sin(q_2) \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_4 \frac{d}{dq_2} (\lambda_3 \gamma \cos(q_2) + \lambda_4 \beta) = 0. \tag{33}$$

Mientras que de acuerdo a (14), resulta la siguiente PDE

$$\lambda_3 \nabla_{q_1} V_d + \lambda_4 \nabla_{q_2} V_d = -\delta \sin(q_2). \tag{34}$$

La asignación de $\lambda_4 = -k_4$ y $\lambda_3 = k_3 k_4 \cos(q_2)$ permite resolver (33), siendo k_3 y k_4 constantes arbitrarias. Más aún, incorporando esos resultados en (34) se obtiene la

siguiente solución de la PDE,

$$V_d = -\frac{\delta}{k_4} \cos(q_2) + \Phi(k_3 \sin(q_2) + [q_1 - q_{d_1}]) \quad (35)$$

donde $\Phi(\cdot) \in C^1$ es libre. La necesidad de $\mathbf{q}^* = \arg \min\{V_d\}$ requiere que V_d sea definida positiva en una vecindad de $\mathbf{q}^*$. Con este fin, puede ser verificado que

$$V_d = -\frac{\delta}{k_4} \cos(q_2) + \frac{k_p}{2} [k_3 \sin(q_2) + [q_1 - q_{d_1}]]^2 \quad (36)$$

cumple el requerimiento previo con las constantes k_p , k_3 y k_4 positivas. Para probar positividad de V_d , note que el gradiente de V_d es

$$\nabla_{\mathbf{q}} V_d = \begin{bmatrix} k_p [k_3 \sin(q_2) + [q_1 - q_{d_1}]] \\ \frac{\delta}{k_4} \sin(q_2) + k_p k_3 \cos(q_2) [k_3 \sin(q_2) + [q_1 - q_{d_1}]] \end{bmatrix}$$

con soluciones $q_1 = q_{d_1}$ y $q_2 = n\pi$, y $n \in \mathbb{N}$. Es fácil verificar que el Hessiano de V_d es

$$\nabla_{\mathbf{q}}^2 V_d = \begin{bmatrix} k_p & k_p k_3 \cos(q_2) \\ k_p k_3 \cos(q_2) & \frac{\delta}{k_4} \cos(q_2) + k_p k_3^2 \cos(q_2)^2 - k_p k_3 \sin(q_2) [k_3 \sin(q_2) + q_1 - q_{d_1}] \end{bmatrix}$$

el cual al evaluarlo en $(q_1 = q_{d_1}, q_2 = 0)$, resulta en

$$\nabla_{\mathbf{q}}^2 V_d = \begin{bmatrix} k_p & k_p k_3 \\ k_p k_3 & \frac{\delta}{k_4} + k_p k_3^2 \end{bmatrix}$$

siendo definido positivo con k_p , k_3 y k_4 positivos.

Enseguida, se procede con la asignación de los elementos que aseguran la positividad y simetría de M_d . Con este fin, note que de las dos últimas líneas de (30), d_3 y d_4 son

determinados por λ_3 y λ_4 como

$$\begin{aligned} d_3 &= k_4[k_3 \cos(q_2)\varphi - \gamma \cos(q_2)] \\ d_4 &= k_4[k_3\gamma \cos(q_2)^2 - \beta]. \end{aligned}$$

Un requisito parcial para asegurar positividad de M_d es $d_4 > 0$, el cual se cumple para todo

$$q_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad (37)$$

siendo $\varepsilon = \arccos\left(\sqrt{\frac{\beta}{k_3\gamma}}\right)$ con $k_3 > \frac{\beta}{\gamma}$, implicando esto último que $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. El valor ε acota la posición inicial del péndulo, tal que la configuración en reposo del péndulo debe estar sobre la horizontal (ver figura 1).

Por otro lado, de las primeras dos líneas de (30), la asignación de λ_1 y λ_2 está sujeta al requerimiento que impone la positividad y simetría de M_d sobre los elementos d_1 y d_2 . Tomando en cuenta este requerimiento, y habiendo definido previamente λ_3 y λ_4 , puede reescribirse $M_d = \Lambda M$ como

$$M_d = k_4 \begin{bmatrix} \rho & \lambda_1^o a_2 + \lambda_2^o a_3 \\ k_3 \cos(q_2) a_1 - a_2 & k_3 \cos(q_2) a_2 - a_3 \end{bmatrix}$$

donde los elementos λ_1 y λ_2 han sido expresados convenientemente como el producto de k_4 por λ_1^o y λ_2^o , respectivamente, y ρ está dado por

$$\rho = \lambda_1^o a_1 + \lambda_2^o a_2. \quad (38)$$

Note que la simetría de M_d está determinada por

$$\lambda_2^o = \frac{k_3 \cos(q_2) a_1 - a_2}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} \lambda_1^o \quad (39)$$

mientras para asegurar positividad de M_d , se necesita que

$$\rho > \frac{[k_3 \cos(q_2)a_1 - a_2]^2}{a_2 - a_3} = \frac{\cos(q_2)^2[k_3\varphi - \gamma]^2}{k_3\gamma \cos(q_2)^2 - \beta}$$

sea positivo, el cual es satisfecho con

$$\rho > \frac{\cos(\varepsilon - \mu)^2[k_3\varphi - \gamma]^2}{k_3\gamma \cos(\varepsilon - \mu)^2 - \beta} \quad (40)$$

siendo $\mu \ll 1$. Posteriormente, sustituyendo (39) en (38), queda

$$\lambda_1^o = \frac{a_3\rho - k_3 \cos(q_2)a_1 - a_2}{\Delta} = \frac{\beta\rho - \cos(q_2)[k_3\varphi - \gamma]}{\varphi\beta - \gamma^2 \cos(q_2)^2}.$$

Luego entonces, la matriz M_d queda finalmente como:

$$M_d = k_4 \begin{bmatrix} \rho & \cos(q_2)[k_3\varphi - \gamma] \\ \cos(q_2)[k_3\varphi - \gamma] & k_3\gamma \cos(q_2)^2 - \beta \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Por otro lado, sustituyendo los elementos λ_i en (31) y (32), se determina α_1 y α_2 , como

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma \sin(q_2)\lambda_1\lambda_2 + \frac{\lambda_4}{2}[\lambda_1'\rho + \lambda_2'\gamma \cos(q_2) - \lambda_2\gamma \sin(q_2)], \\ \alpha_2 &= \gamma \sin(q_2)[\lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3] + \lambda_4[\lambda_1'\gamma \cos(q_2) - \lambda_1\gamma \sin(q_2) + \lambda_2'\beta], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_1' &\triangleq \frac{d\lambda_1}{dq_2} = \frac{k_4}{\Delta^2}[\Delta \sin(q_2)(k_3\rho - \gamma) - [\beta\rho - \cos(q_2)[k_3\rho - \gamma]][2\gamma^2 \cos(q_2)\sin(q_2)]], \\ \lambda_2' &\triangleq \frac{d\lambda_2}{dq_2} = \frac{k_4}{\beta}[-\gamma \sin(q_2) \cos(q_2)[k_3\varphi - \gamma] - [1 + \gamma \cos(q_2)]\sin(q_2)[k_3\varphi - \gamma] + \gamma\beta\rho \sin(q_2)]. \end{aligned}$$

Por último, de acuerdo a (6), con (12) y (8), la ley de control queda

$$u = - \left[\lambda_1 \nabla_1 V_d + \lambda_2 \left[\frac{1}{2} \nabla_2 (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) + \nabla_2 V_d \right] \right] + \mathbf{p}^T M_d^{-1} \boldsymbol{\alpha} \begin{bmatrix} \frac{d_3 p_1 + d_1 p_2}{\Delta_d} \\ -k_v \left[\frac{d_4 p_1 - d_2 p_2}{\Delta_d} \right] \end{bmatrix} \quad (42)$$

donde $\Delta_d = d_1 d_4 - d_2 d_3 > 0$, es el determinante de M_d , $k_v > 0$ es una constante arbitraria y el resto de los términos están dados por

$$\nabla_1 V_d = k_p [k_3 \sin(q_2) + (q_1 - q_{d1})],$$

$$\begin{aligned} \nabla_2 (\mathbf{p}^T M_d^{-1} \mathbf{p}) &= \frac{1}{\Delta_d^2} \{ \Delta_d [-2 \sin(q_2) [k_3 \varphi + \gamma] p_1 p_2 - 2 k_3 \gamma \cos(q_2) \sin(q_2)] \\ &\quad - [2 \cos(q_2) [k_3 \varphi - \gamma] p_1 p_2 + [k_3 \gamma \cos(q_2)^2 - \beta] p_2^2] \times \\ &\quad [-2 \rho k_3 \gamma \cos(q_2) \sin(q_2) + 2 \cos(q_2) \sin(q_2) [k_3 \varphi - \gamma]^2] \}, \end{aligned}$$

$$\nabla_2 V_d = \frac{\delta}{k_4} \sin(q_2) + k_p k_3 \cos(q_2) [k_3 \sin(q_2) + (q_1 - q_{d1})],$$

$$\mathbf{p}^T M_d^{-1} \boldsymbol{\alpha} = \frac{p_1 [d_4 \alpha_1 - d_2 \alpha_2] + p_2 [-d_3 \alpha_1 + d_1 \alpha_2]}{\Delta_d}.$$

II.2.3 Simulaciones

Simulaciones del nuevo IDA-PBC del carro-péndulo han sido llevadas a cabo para verificar los resultados. La condición inicial fue: $[q_1(0) \ q_2(0) \ p_1(0) \ p_2(0)]^T = [1 \ 0.15 \ 0 \ 0]^T$, Los parámetros del sistema carro-péndulo mostrado en la figura 1 son: $M = 2.024$, $m = 0.338$, $l = 0.33$, $I = 0.015$ y $g = 9.8$. Las ganancias de la ley de control IDA-PBC dada por (42) son $\rho = 240$, $k_3 = 0.6$, $k_4 = 0.05$, $k_p = 10$ y $k_v = 20$.

Las gráficas mostradas en las figuras 2 y 3 muestran cómo las posiciones van desvaneciéndose como se esperaba.

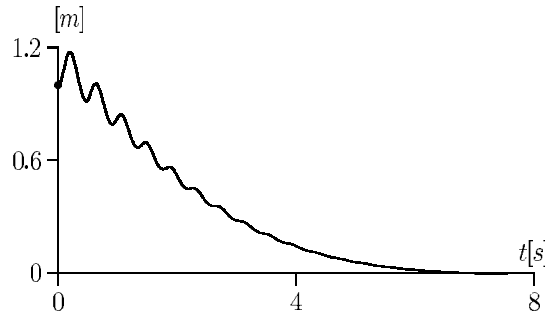


Figura 2: Evolución temporal de la posición del carro $q_1(t)$.

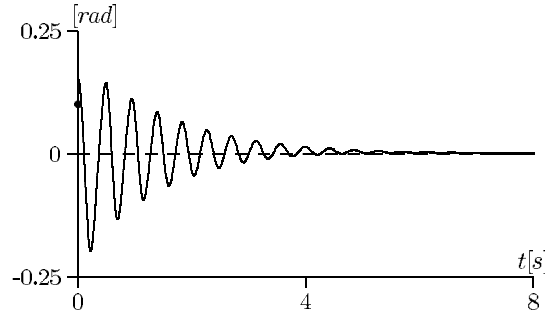


Figura 3: Evolución temporal de la posición del péndulo $q_2(t)$.

II.3 Análisis de estabilidad del control IDA-PBC de un sistema barra-bola con fricción

Una ley de control IDA-PBC para la estabilización del sistema barra-bola sin fricción ha sido presentado en (Ortega *et al.*, 2002a). Una modificación de este controlador, pero ahora considerando fricción en el sistema barra-bola, fue mostrada en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004). En ella, los autores incorporan una nueva inyección de amortiguamiento con una ganancia no lineal en la ley de control, y más importante aún, presentan nuevas condiciones de estabilidad. Tomado en cuenta esto último, en este epígrafe se presenta en detalle el análisis de estabilidad mostrado en (Gómez Estern

& Van der Schaft, 2004), con un aporte adicional que consiste en la corrección de un error tipográfico en la ganancia k_v no lineal, mostrada en el control IDA-PBC, y que es crucial para concluir estabilidad asintótica.

El sistema barra-bola mostrado en la figura 4 es un sistema mecánico subactuado que consiste en una bola moviéndose sobre una barra. La barra está dotada con un actuador que aplica un par sobre él, mientras la ausencia de actuación en la bola determina la naturaleza subactuada del mecanismo.

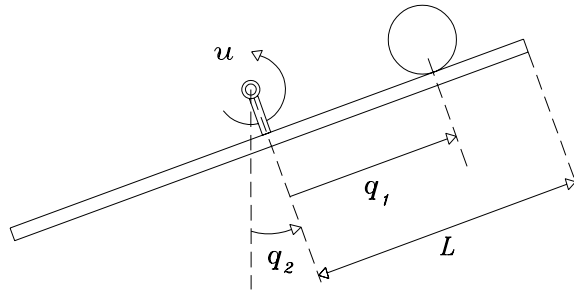


Figura 4: Sistema barra-bola.

Las ecuaciones de movimiento del sistema barra-bola con fricción viscosa, mostrado en la figura 4, están dadas por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \frac{p_2}{L^2 + q_1^2} \\ \frac{q_1 p_2^2}{(L^2 + q_1^2)^2} - g \sin(q_2) - f_{v1} p_1 \\ u - g q_1 \cos(q_2) - f_{v2} \frac{p_2}{L^2 + q_1^2} \end{bmatrix} \quad (43)$$

donde q_1 y q_2 son la posición de la bola y el ángulo de la barra, respectivamente, p_1 y p_2 son los momentos de cada coordenada, L es la longitud de la barra, la entrada de control es u y g es la aceleración debido a la gravedad, f_{v1} y f_{v2} son los coeficientes de fricción viscosa de cada coordenada. El objetivo de control es llevar a la bola a la

posición de reposo con $q_1 = q_2 = 0$. En este epígrafe se usa la notación $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$ y $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2]^T$.

Cabe destacar que el análisis aquí presentado rectifica el término no lineal k_v mostrado en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004), en la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned} u = & \frac{q_1}{\sqrt{2}(L^2 + q_1^2)} \left[-\sqrt{L^2 + q_1^2} p_1^2 + \sqrt{2} p_1 p_2 + \frac{1}{(L^2 + q_1^2)} p_2^2 \right] \\ & + g q_1 \cos(q_2) - g \sqrt{2(L^2 + q_1^2)} \sin(q_2) - k_p \sqrt{\frac{L^2 + q_1^2}{2}} \left[q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{q_1}{L} \right) \right] \\ & + \frac{k_v}{L^2 + q_1^2} \left[p_1 - \sqrt{\frac{2}{L^2 + q_1^2}} p_2 \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

El sistema en malla cerrada se obtiene sustituyendo la ley de control (44) en (43)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \frac{p_2}{L^2 + q_1^2} \\ \frac{q_1 p_2^2}{(L^2 + q_1^2)^2} - g \sin(q_2) - f_{v_1} p_1 \\ f(q_1, q_2, p_1, p_2) \end{bmatrix} \quad (45)$$

donde $f(q_1, q_2, p_1, p_2)$ es

$$\begin{aligned} f(q_1, q_2, p_1, p_2) = & -g q_1 \cos(q_2) + \frac{q_1}{\sqrt{2}(L^2 + q_1^2)} \left[-\sqrt{L^2 + q_1^2} p_1^2 + \sqrt{2} p_1 p_2 + \frac{1}{\sqrt{L^2 + q_1^2}} p_2^2 \right] \\ & + g q_1 \cos(q_2) - g \sqrt{2(L^2 + q_1^2)} \sin(q_2) - k_p \sqrt{\frac{L^2 + q_1^2}{2}} \left[q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{q_1}{L} \right) \right] \\ & + \frac{k_v}{L^2 + q_1^2} \left[p_1 - \sqrt{\frac{2}{L^2 + q_1^2}} p_2 \right] - f_{v_2} \frac{p_2}{L^2 + q_1^2}. \end{aligned}$$

con k_p positivo, y una k_v propuesta en (Sandoval *et al.*, 2009) como:

$$k_v = \frac{[L^2 + q_1^2]^2 f_{v_1}^2 + f_{v_2}^2}{2\sqrt{2}[L^2 + q_1^2] f_{v_1}}. \quad (46)$$

Comentario 2. Más adelante, se proporcionan más detalles acerca de la k_v dada por (46), la cual difiere de la mostrada en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004).

Puede verificarse que los equilibrios del sistema están contenidos en el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : q_1 = L \sinh(\sqrt{2}n\pi), q_2 = n\pi, p_1 = 0, p_2 = 0 \right\}$$

donde n es cualquier número entero. Dado que $|\sinh(\sqrt{2}n\pi)| > 1$ para $n \neq 0$, entonces los equilibrios asociados a $|n| \geq 1$ no tienen algún interés práctico —la bola está más alla del extremo de la barra—. Por tanto, se tiene interés en estudiar la estabilidad del equilibrio correspondiente a $n = 0$, esto es, el origen del espacio de estado $[q_1 \ q_2 \ p_1 \ p_2]^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$. El objetivo del análisis es mostrar en detalle que este equilibrio es asintóticamente estable.

En (Ortega *et al.*, 2002a) ha sido mostrado que la función asociada al sistema en malla cerrada (45) (que han llamado “función de energía total”) es

$$V(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{2}p_1^2}{\sqrt{L^2 + q_1^2}} - \frac{2p_1p_2}{L^2 + q_1^2} + \frac{\sqrt{2}p_2^2}{(L^2 + q_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + V_d(\mathbf{q}) \quad (47)$$

donde

$$V_d = g[1 - \cos(q_2)] + \frac{k_p}{2} \left[q_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{q_1}{L} \right) \right]^2. \quad (48)$$

El primer término del lado derecho corresponde a la “energía cinética” y $V_d(\mathbf{q})$ es la “energía potencial”.

Es conveniente definir el conjunto $D \subset \mathbb{R}^4$ como

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : q_2 \in (-\pi, \pi) \right\}.$$

El principal resultado de estabilidad es establecido como la Proposición 4 en (Ortega *et al.*, 2002a); el cual es presentado aquí en una forma ligeramente diferente (ver (Sandoval *et al.*, 2008)).

Proposición 3. *Considere el sistema barra-bola (43) con la ley de control IDA-PBC (44). Entonces, el origen del espacio de estado del sistema en malla cerrada descrito en términos de $[q_1 \ q_2 \ p_1 \ p_2]^T \in \mathbb{R}^4$ es un equilibrio asintóticamente estable.*

Prueba. Considere la función de energía total (47) propuesta en (Ortega *et al.*, 2002a) como función candidata de Lyapunov. Para mostrar que la función de Lyapunov es definida positiva en D , observe que el primer término del lado derecho de (47) puede ser escrito como

$$\mathbf{p}^T \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L^2+q_1^2}} & -\frac{1}{(L^2+q_1^2)} \\ -\frac{1}{(L^2+q_1^2)} & \frac{\sqrt{2}}{(L^2+q_1^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} \mathbf{p}$$

el cual es claramente positivo con respecto a p_1 y p_2 . Por otro lado, note que el término restante del lado derecho $V_d(\mathbf{q})$ definido en (48) se desvanece en D solo en $q_1 = q_2 = 0$, en caso contrario es positivo. Por tanto, la función de Lyapunov (47) es definida positiva en D .

Después de varias manipulaciones algebraicas, la derivada temporal de la función de Lyapunov (47) a lo largo de las trayectorias del sistema en malla cerrada (45) queda

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = & - \left[\frac{\sqrt{2}f_{v_1}p_1^2}{\sqrt{L^2+q_1^2}} - \left(f_{v_1} + \frac{f_{v_2}}{L^2+q_1^2} \right) \frac{p_1p_2}{L^2+q_1^2} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{2}f_{v_2}p_2^2}{[L^2+q_1^2]^{\frac{5}{2}}} + k_v \left[\frac{\sqrt{L^2+q_1^2}p_1 - \sqrt{2}p_2}{[L^2+q_1^2]^{\frac{3}{2}}} \right]^2 \right] \end{aligned} \quad (49)$$

tal que si sustituimos k_v dado por (46) en (49), la ecuación anterior puede reescribirse

como

$$\dot{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}}_{B_b} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

donde

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{5}{2} \frac{\sqrt{2}f_{v_1}}{\sqrt{2[L^2 + q_1^2]}} + \frac{f_{v_2}^2}{2\sqrt{2}[L^2 + q_1^2]^{\frac{5}{2}}}, \\ b_2 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{2f_{v_1}}{[L^2 + q_1^2]} + \frac{f_{v_2}}{[L^2 + q_1^2]^2} + \frac{f_{v_2}^2}{f_{v_1}[L^2 + q_1^2]^3} \right], \\ b_3 &= \frac{f_{v_1}}{\sqrt{2}[L^2 + q_1^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{2}f_{v_2}}{[L^2 + q_1^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{f_{v_2}^2}{\sqrt{2}f_{v_1}[L^2 + q_1^2]^{\frac{7}{2}}}. \end{aligned}$$

Por tanto, las siguientes condiciones aseguran que B_b sea una matriz definida positiva:

$$b_1 > 0, b_1 b_3 - b_2^2 > 0$$

garantizando que (49) sea una funcion no positiva en D . La primera condición es satisfecha debido a que f_{v_1} es una constante positiva y de acuerdo al diseño de la ley de control mostrado en (Ortega *et al.*, 2002a), solo la parte positiva es considerada en todas las raíces cuadradas. Luego de algunas manipulaciones algebraicas y simplificaciones, de la segunda condición, se obtiene:

$$f_{v_1}^2 [L^2 + q_1^2]^2 + 6f_{v_1} f_{v_2} [L^2 + q_1^2] + f_{v_2}^2 > 0$$

debido a que f_{v_1} y f_{v_2} son constantes positivas. Esos argumentos prueban que (47) califica como función de Lyapunov. Por tanto, el origen del espacio de estado es un equilibrio estable.

Enseguida, se probará que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable (localmente). Invocando el Teorema de Barbashin–Krasovskii, se requiere que en el

conjunto Ω definido por

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \in D : \dot{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0 \right\} \quad (51)$$

el origen sea la única trayectoria que iniciando allí permanece por siempre en Ω . Por tanto, en Ω la siguiente ecuación

$$\mathbf{p}^T B_B \mathbf{p} = 0 \quad (52)$$

tiene como solución únicamente $p_1 = p_2 = 0$, en virtud de que la matriz B_b es definida positiva. A su vez, esto implica que $\dot{p}_1 = \dot{p}_2 = 0$. Sustituyendo estos resultados previos en (45) resulta que $q_1 = q_2 = 0$. Por tanto, se concluye que el origen del espacio de estado es la única condición inicial que inicia en Ω y permanece allí para siempre. Esto completa las condiciones establecidas por el Teorema Barbashin–Krasovskii para asegurar estabilidad asintótica del equilibrio.

II.3.1 Nueva inyección de amortiguamiento con k_v no lineal

Una aportación del análisis que presentaron en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004), es la nueva inyección de amortiguamiento con una k_v no lineal, a diferencia de la constante k_v positiva que utilizaron en (Ortega *et al.*, 2002a). Sin embargo, en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004) omitieron un término en la k_v mostrada en ese trabajo, el cual es crucial para concluir estabilidad asintótica. Por tal motivo, enseguida se mostrará en detalle el procedimiento para la selección de la k_v no lineal, con el fin de corregir el error tipográfico dado en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004).

Basado en el epígrafe 3.2 de (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004), se definen las siguientes matrices:

$$C \triangleq \frac{1}{2}(RM^{-1}M_d + M_dM^{-1}R), \quad D \triangleq GK_vG^T$$

tal que para el sistema barra-bola, estas corresponden a

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (L^2 + q_1^2) \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} f_{v_1} & 0 \\ 0 & f_{v_2} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y

$$M_d = [L^2 + q_1^2] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L^2 + q_1^2}} & 1 \\ 1 & \sqrt{2[L^2 + q_1^2]} \end{bmatrix}.$$

En (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004) muestran que la función de energía del sistema en malla cerrada es

$$\dot{V}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -\mathbf{p}^T M_d^{-1} (C + D) M_d^{-1} \mathbf{p}$$

donde los autores concluyen que $C + D$ puede ser definida positiva seleccionando una K_v apropiada, donde

$$C + D = \begin{bmatrix} \sqrt{2[L^2 + q_1^2]} f_{v_1} & \frac{1}{2} [[L^2 + q_1^2] f_{v_1} + f_{v_2}] \\ \frac{1}{2} [[L^2 + q_1^2] f_{v_1} + f_{v_2}] & \sqrt{2[L^2 + q_1^2]} f_{v_2} + k_v \end{bmatrix}.$$

En virtud de que los elementos de la diagonal de esta matriz son positivos, la única condición para asegurar positividad de la matriz $C + D$ es probar que su determinante sea positivo. Por tanto, la k_v que asegura lo último es

$$k_v > \frac{[L^2 + q_1^2]^2 f_{v_1}^2 - 6[L^2 + q_1^2] f_{v_1} f_{v_2} + f_{v_2}^2}{4\sqrt{2[L^2 + q_1^2]} f_{v_1}}$$

y una selección apropiada de k_v es

$$k_v = \frac{[L^2 + q_1^2]^2 f_{v_1}^2 + f_{v_2}^2}{2\sqrt{2[L^2 + q_1^2]} f_{v_1}} \quad (53)$$

la cual corresponde a (46), y que difiere de aquel mostrado en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004), donde la constante f_{v_1} que aparece en el denominador ha sido omitido en (Gómez Estern & Van der Schaft, 2004).

II.3.2 Simulaciones

Simulaciones del sistema barra-bola han sido llevados a cabo para verificar los resultados. La condición inicial en la primera simulación fue: $[q_1(0) \ q_2(0) \ p_1(0) \ p_2(0)]^T = [0.96 \ -0.30 \ 0 \ 0]^T$, mientras en la segunda simulación la condición inicial fue: $[q_1(0) \ q_2(0) \ p_1(0) \ p_2(0)]^T = [0.96 \ 0.40 \ 0 \ 0]^T$. Los parámetros del sistema barra-bola (43) son: $L = 1$, $g = 9.8$, $f_{v_1} = 1$ y $f_{v_2} = 1$. Las ganancias de la ley de control IDA-PBC (44) son $k_p = 10$ y k_v dada por (46).

Las gráficas mostradas en las figuras 5 y 6 muestran cómo las posiciones van desvaneciéndose como se esperaba. Sin embargo, observe en la figura 5 que la bola abandona la barra en oposición al comportamiento mostrado en la figura 6, donde la bola permanece siempre en la barra.

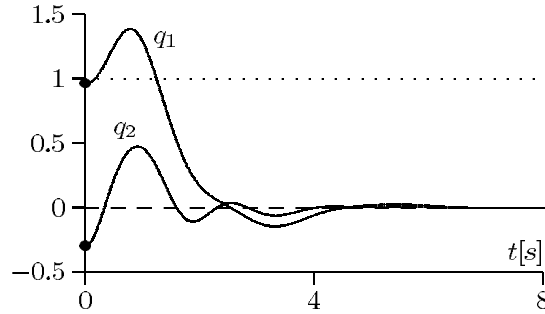


Figura 5: Evolución temporal de posiciones en simulación 1.

Más aún, de acuerdo a la Proposición 5 establecida en (Ortega *et al.*, 2002a) —donde

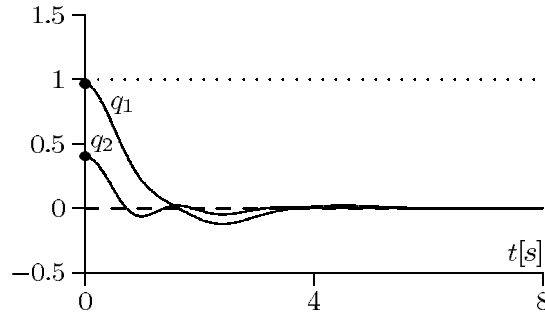


Figura 6: Evolución temporal de posiciones en simulación 2.

se proporcionan condiciones para asegurar que $|q_1(t)| < L$ — se verifica que el valor

$$c = \frac{1}{8} \frac{k_p g}{2k_p + g} = 0.4111$$

define un estimado del dominio de atracción restrictivo dado por (9), ya que de la configuración inicial en la segunda simulación se calcula $V(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) = 0.9797$ el cual viola la desigualdad en (9) con el resultado previo de c , no obstante que $|q_1(t)| < L$ en la figura 6. Por tanto, desde un punto de vista práctico, la búsqueda de estimados del dominio de atracción menos restrictivos debería ser abordada como trabajo futuro.

III Estabilización de una clase de sistemas mecánicos subactuados con fricción dinámica mediante el método IDA-PBC

III.1 Introducción

La fricción es un fenómeno complejo que aparece en todos los sistemas mecánicos, y muchas estrategias para desvanecer sus efectos perjudiciales en sistemas de control han sido investigados por largo tiempo. Errores en estado estacionario y oscilaciones son efectos típicos de la fricción en el control de movimiento de sistemas mecánicos. Existen muchos esquemas de compensación de fricción basados en modelos, que intentan reducir esos comportamientos indeseables causados por la fricción, ver por ejemplo (Armstrong *et al.*, 1994), (Åström, 1998) y (Hensen & Molengraft, 2002). Esos esquemas están basados sobre modelos de fricción, los cuales son capaces de predecir una extensa variedad de fenómenos de fricción (e.g. desplazamiento predeslizante, atraso friccional y fuerza de rompimiento), todos ellos observados en la práctica. La naturaleza de los modelos es completamente diferente, pero todos aproximan la fricción real. La exactitud de la aproximación está dada principalmente por la complejidad del modelo, ya sea estático o dinámico. Los modelos de fricción dinámica, tales como el modelo de Dahl (Dahl, 1976), y el modelo de LuGre (Canudas *et al.*, 1995), han sido usados para compensar fricción en sistemas de control (ver (Moreno *et al.*, 2003) y referencias allí citadas). El modelo de Dahl es uno de los modelos de fricción dinámica más simples, el cual está inspirado en una interpretación de deflexión de cerdas, y es capaz de predecir fenómenos importantes que aparecen a bajas velocidades, tales como desplazamiento predeslizante. Esencialmente, el modelo de Dahl es un modelo de fricción de Coulomb con un atraso en el cambio de la fuerza de fricción, cuando la dirección del movimiento cambia (Armstrong *et al.*, 1994). Algunas propiedades relevantes de este modelo de fricción son: es extensivamente usada en estudios de simulación, la fricción depende

solo del desplazamiento, no captura el efecto Stribeck y no describe el fenómeno stick-slip (Åström, 1998).

Por otro lado, en (Reddy *et al.*, 2004) se presenta evidencia experimental del desempeño de un lagrangiano controlado de un sistema carro-péndulo, mostrándose un comportamiento indeseable debido al fenómeno de fricción. En ese trabajo, se menciona que una fuerza compensatoria fue usada para minimizar el efecto de la fricción dinámica, pero esta fuerza no fue mostrada en la ley de control y no queda claro cómo esa fuerza fue considerada. Más aún, en este trabajo de tesis se llevaron a cabo experimentos para verificar el desempeño de un control IDA-PBC sobre un péndulo de Furuta donde la fricción no fue considerada. Esos experimentos revelaron un comportamiento oscilatorio del mecanismo, el cual permaneció a pesar de modificar los parámetros del sistema de control.

Motivados por la evidencia exhibida en los experimentos realizados con el péndulo de Furuta, se procedió a analizar la compensación de fricción en el marco de la metodología IDA-PBC. Como consecuencia, se ha extendido la formulación original de esta metodología para el caso en que la fricción está presente sólo en las coordenadas actuadas de una clase de sistemas mecánicos subactuados. El aporte novedoso de esta propuesta es la incorporación del modelo de Dahl en la formulación del método IDA-PBC, preservando su filosofía de diseño. Esto significa que el modelo de Dahl puede ser incluido en un control IDA-PBC con compensación de fricción. Una ventaja de la inclusión del modelo de Dahl en el método IDA-PBC es la simplicidad en el diseño del observador que trata con la estimación del estado interno no medible del modelo de fricción. Desafortunadamente, este procedimiento puede fallar con otros modelos de fricción dinámica, y una novedosa estrategia debe ser considerada si se desea incorporarlas en la metodología IDA-PBC. Los resultados de esta extensión podrán ser útiles para lograr un mejor desempeño en experimentos de una amplia clase de sistemas de control IDA-PBC para mecanismos subactuados reportados en la literatura (ver (Ortega & García-Canseco, 2004) para un resumen completo). En suma, la principal contribución

de esta extensión es el método IDA-PBC aplicado al control de una clase de sistemas mecánicos subactuados, con fricción dinámica caracterizada por el modelo de Dahl.

III.2 Formulación del problema

El nuevo procedimiento está basado sobre la formulación dada en el epígrafe II.1. Se considera que las primeras m de las n articulaciones son actuadas; si el sistema es subactuado entonces $m < n$. Serán llamadas esas m articulaciones las coordenadas actuadas. Por otro lado, el modelo de Dahl aplicado a los sistemas subactuados es (Moreno *et al.*, 2003):

$$\dot{\mathbf{z}} = -G\Psi(\dot{\mathbf{q}})G^T\Sigma_o\mathbf{z} + [GG^T]^T\dot{\mathbf{q}}, \quad (54)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}) = GG^T\Sigma_o\mathbf{z} + GF_vG^T\dot{\mathbf{q}}, \quad (55)$$

donde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ es un vector de estados internos no medibles, $G = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, tal que $\text{rango}\{G\} = m$, $\Psi = \text{diag}\left\{\frac{1}{f_{c1}}|\dot{q}_1|, \dots, \frac{1}{f_{cm}}|\dot{q}_m|\right\}$ es una matriz diagonal semidefinida positiva, donde f_{c_i} ($i = 1, 2, \dots, m$) denota los parámetros de Coulomb de cada una de las m coordenadas actuadas, $\Sigma_o = \text{diag}\{\sigma_{01}, \dots, \sigma_{0n}\}$ es una matriz diagonal definida positiva la cual contiene los parámetros de rigidez de las n coordenadas, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas debido a la fricción, $F_v = \text{diag}\{f_{v1}, \dots, f_{vm}\}$ es una matriz diagonal definida positiva la cual contiene los coeficientes de fricción viscosa de las m coordenadas actuadas, y

$$\dot{\mathbf{q}} = M^{-1}\mathbf{p} = [\dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n]^T \quad (56)$$

es el vector de velocidades generalizadas. A pesar de que el estado $\mathbf{z}$ no es medible, se supone que todos los parámetros del modelo son conocidos. Para el análisis, se considera que la fricción está presente sólo en las coordenadas articulares, esto es equivalente a

decir que $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n]^T$ con $z_k = 0$, para $k = m+1, \dots, n$. Si se toma en cuenta el modelo de fricción de Dahl (54)-(55), las ecuaciones de movimiento del sistema completo pueden ser reescritas como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & -GF_v G^T & -GG^T \\ 0 & [GG^T]^T & -G\Psi G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \\ \nabla_{\mathbf{z}} W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G\mathbf{u} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

donde

$$W(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \Sigma_o \mathbf{z},$$

y el lado derecho de (55) está incluida en la segunda línea de (57), donde el signo menos es debido a la oposición de la fuerza de fricción a la entrada de control.

Siguiendo el razonamiento del método IDA-PBC en asignar una estructura deseada en malla cerrada, preservando en este caso la estructura de (57), con una función H_d dada por (4), se tiene que el sistema en malla cerrada deseado es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d & 0 \\ -M_d M^{-1} & J_2(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - GK_v G^T & -GG^T \\ 0 & [GG^T]^T & -G\Psi G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d \\ \nabla_{\tilde{\mathbf{z}}} W_d \end{bmatrix} \quad (58)$$

donde $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}$, siendo $\hat{\mathbf{z}}$ la estimación del estado $\mathbf{z}$, y se introduce en la formulación una función semidefinida positiva

$$W_d(\tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_o \tilde{\mathbf{z}}. \quad (59)$$

Ahora, para esta nueva clase de sistemas (58) el principal desafío del método IDA-PBC aún consiste en resolver las PDEs (13) y (14), tales que las soluciones M_d y V_d definen

la nueva ley de control

$$\mathbf{u} = \underbrace{[G^T G]^{-1} G^T [\nabla_{\mathbf{q}} H - M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + J_2 M_d^{-1} \mathbf{p}]}_{\mathbf{u}_{es}} - \underbrace{K_v G^T M_d^{-1} \mathbf{p}}_{\mathbf{u}_{di}} + \underbrace{F_v G^T M^{-1} \mathbf{p} + G^T \Sigma_o \hat{\mathbf{z}}}_{\mathbf{u}_{fric}} \quad (60)$$

donde el nuevo término $\mathbf{u}_{fric}$ define la compensación de fricción.

Luego entonces, similar a la formulación descrita en el epígrafe II.1, el problema de control consiste en obtener el sistema en malla cerrada (58), lo cual significa que existen soluciones M_d y V_d de (13)-(14), tal que al sustituir (60) en (57), considerando que $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{z}}$ y por tanto $\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \dot{\mathbf{z}} - \dot{\tilde{\mathbf{z}}}$, se obtiene (58).

Comentario 3: Se resalta el hecho de que la compensación de fricción está ausente en la formulación original mostrada en (Ortega *et al.*, 2002a). Más aún, es importante subrayar que en esta nueva propuesta las PDEs (13) y (14) no cambian con respecto a la formulación original del método IDA-PBC. Esto se debe a que la compensación de fricción define una nueva inyección de amortiguamiento dada por $\mathbf{u}_{di}^{\text{new}} = \mathbf{u}_{di} + \mathbf{u}_{fric}$.

III.3 Observador de fricción

Dado que el modelo de Dahl es dinámico y tiene un estado no medible $\mathbf{z}$, algún tipo de observador debe ser necesario. Es conocido que existen varias metodologías de diseño de observadores, y también existen varios observadores no lineales propuestos de manera particular (Canudas *et al.*, 1995; Canudas & Lischinsky, 1997; Moreno *et al.*, 2003; Olsson *et al.*, 1998). No obstante, inspirados por (Kelly *et al.*, 2004), enseguida se presenta el siguiente observador de fricción

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = [GG^T]^T [M^{-1} \mathbf{p} - M_d^{-1} \mathbf{p}] - G \Psi G^T \Sigma_o \hat{\mathbf{z}} \quad (61)$$

el cual proporciona un estimado del estado no medible $\mathbf{z}$. Una ventaja de la inclusión del modelo de Dahl (54)-(55) en (57) es la simplicidad para diseñar el observador. Para clarificar este procedimiento, note que, de la definición $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}$, la derivada temporal puede ser escrita como

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \dot{\mathbf{z}} - \dot{\hat{\mathbf{z}}}. \quad (62)$$

Por tanto, el observador propuesto (61) es obtenido sustituyendo $\dot{\mathbf{z}}$ y $\dot{\hat{\mathbf{z}}}$ de (57) y (58), respectivamente, en (62).

Comentario 4: Una conexión interesante de esta propuesta y el trabajo de (Rocha-Cotzal & Moreno, 2002) es el observador no lineal definido por (61), el cual podría ser considerado como una entrada desconocida de acuerdo con (Rocha-Cotzal & Moreno, 2002), donde la fuerza de fricción —capturada por el modelo de Dahl— sería la entrada desconocida (ver epígrafe 2.1 en (Rocha-Cotzal & Moreno, 2002)). Por tanto, en un estudio posterior sería interesante analizar la propuesta que aquí se presenta en el marco teórico mostrado en (Rocha-Cotzal & Moreno, 2002).

III.4 Análisis de estabilidad

Basado en el método directo de Lyapunov se muestra que, bajo algunas condiciones, el sistema en malla cerrada es estable, e invocando el teorema de Barbashin–Krasovskii, se obtienen condiciones de estabilidad asintótica.

Primero, se procede a definir una condición necesaria para asegurar que $[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T \ \tilde{\mathbf{z}}^T]^T = [\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ es un equilibrio aislado de (58), donde $\mathbf{q}^*$ cumple con (5). Con este fin, se introduce la siguiente hipótesis:

Hipótesis A1: EL siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas

$$G^\perp \nabla_{\mathbf{q}} V = \mathbf{0} \quad (63)$$

tiene como única solución $\mathbf{q} = \mathbf{q}_a$, al menos localmente, con $\mathbf{q}_a \in \{\mathbf{q}^* \in \mathbb{R}^n\}$. Más aún, considerando (63) con $\mathbf{q} = \mathbf{q}_a$, se tiene de (14) que

$$G^\perp M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} V_d = \mathbf{0}, \quad (64)$$

tiene como única solución $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$.

Comentario 5: La hipótesis A1 incluye una clase de sistemas mecánicos subactuados donde el vector de posiciones deseadas $\mathbf{q}^*$ en el sistema en malla cerrada pertenece al conjunto de puntos críticos del sistema en malla abierta, tal que $\nabla_{\mathbf{q}} V(\mathbf{q})|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}^*} = \mathbf{0}$. Algunos ejemplos son: el péndulo con rueda inercial y sistema barra-bola mostrados en (Ortega *et al.*, 2002a), el sistema carro-péndulo (Acosta *et al.*, 2005), el acrobot (Mahindrakar *et al.*, 2006), el péndulo de Furuta (Viola *et al.*, 2007), y el pendubot (Sandoval *et al.*, 2008).

Ahora, se presenta el resultado principal de estabilidad, contenido en la siguiente proposición.

Proposición 4. *Bajo la hipótesis A1, el sistema (58) tiene un punto de equilibrio aislado estable $[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T \ \tilde{\mathbf{z}}^T]^T = [\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$. Este punto de equilibrio será asintóticamente estable si en*

$$\Omega = \{[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T \ \tilde{\mathbf{z}}^T]^T \in D_n : \dot{\mathcal{H}}_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{z}}) = 0\}$$

*el máximo conjunto invariante es $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$, donde $D_n \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ y*

$$\mathcal{H}_d = H_d + W_d \quad (65)$$

califica como una función de Lyapunov. Un estimado del dominio de atracción está

dado por $L_V(\bar{c}_3)$ donde

$$L_V(c_3) \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \in D_n : \mathcal{H}_d < c_3 \right\}$$

y

$$\bar{c}_3 = \sup\{c_3 > \mathcal{H}_d(\mathbf{q}_d, \mathbf{0}, \mathbf{0}) | L_V(c_3) \text{ está acotado}\}. \quad (66)$$

Prueba: Note que el conjunto de equilibrios de (58) está dado por

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{p} = \mathbf{0}, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n : M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} V_d + G G^T \Sigma_o \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}\}.$$

La ecuación mostrada en el conjunto $\mathcal{E}$ puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} G^T \\ G^\perp \end{bmatrix} [M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} V_d + G G^T \Sigma_o \tilde{\mathbf{z}}] = \mathbf{0},$$

tal que al desarrollar el producto queda,

$$G^T [M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} V_d + G G^T \Sigma_o \tilde{\mathbf{z}}] = \mathbf{0}, \quad (67)$$

$$G^\perp M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} V_d = \mathbf{0}. \quad (68)$$

Ahora, por diseño, (68) implica que $G^\perp \nabla_{\mathbf{q}} V = \mathbf{0}$, de acuerdo con (14). Entonces, usando la hipótesis A1 se asegura que (68) se cumple únicamente en $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$, al menos localmente. Finalmente, sustituyendo este resultado previo en (67) queda $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$. Por tanto, se concluye que $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ es un equilibrio aislado de (58).

Enseguida, tomando en cuenta (4), (59) y (5), es fácil verificar que (65) es una función definida positiva en una vecindad del punto $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$, donde una constante

apropiada puede ser agregada a V_d tal que se desvanezca en $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$. La derivada temporal de (65) a lo largo de las trayectorias del sistema (58) está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{H}}_d &= -\mathbf{p}^T M_d^{-1} G K_v G^T M_d^{-1} \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_o G \Psi G^T \Sigma_o \tilde{\mathbf{z}} \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_d^{-1} G K_v G^T M_d^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_o G \Psi G^T \Sigma_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (69)$$

la cual es una función no positiva. Basado en la teoría de Lyapunov, los resultados anteriores aseguran que el punto de equilibrio $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ es estable.

Solo resta establecer condiciones que aseguren estabilidad asintótica. Con este fin, de acuerdo con el Teorema de Barbashin–Krasovskii se define el conjunto Ω como:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \tilde{\mathbf{z}} \end{bmatrix} \in D_n : \mathbf{p}^T M_d^{-1} G K_v G^T M_d^{-1} \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_o G \Psi G^T \Sigma_o \tilde{\mathbf{z}} = 0 \right\}.$$

El siguiente paso es determinar el máximo conjunto invariante en Ω . Por tanto, buscamos todas las trayectorias que, iniciando en Ω , permanecen allí por siempre. Con este fin, note que en Ω lo siguiente debe ser satisfecho

$$\mathbf{p}^T M_d^{-1} G K_v G^T M_d^{-1} \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{z}}^T \Sigma_o G \Psi G^T \Sigma_o \tilde{\mathbf{z}} = 0. \quad (70)$$

Existen dos mecanismos para cumplir la ecuación anterior. La primera opción es $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^n$ debido a que $\Psi(\mathbf{0}) = 0$ de acuerdo con la definición $\dot{\mathbf{q}} = M^{-1} \mathbf{p}$. Entonces, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ implica $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ y, sustituyendo este resultado en (58), bajo la hipótesis A1, se obtiene $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ y $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$. Por tanto, se concluye que un conjunto invariante en Ω es el punto de equilibrio $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$. La segunda opción es $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ y

$$G^T M_d^{-1} \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (71)$$

Lo primero implica que $\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{0}$ y sustituyendo este resultado, junto con (71), en (58), conduce a

$$\dot{\mathbf{p}} = -M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + J_2 M_d^{-1} \mathbf{p}. \quad (72)$$

Más aún, (71) implica que su derivada temporal se cumple, esto es,

$$G^T \dot{M}_d^{-1} \mathbf{p} - G^T M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + G^T M_d^{-1} J_2 M_d^{-1} \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (73)$$

donde se ha considerado (72). Por tanto, el problema a resolver se reduce a probar que $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ es la única solución que simultáneamente satisface (71), (72) y (73), lo cual significa que no existen otros conjuntos invariantes en Ω , además del punto de equilibrio $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$. Similar al análisis mostrado en el epígrafe II.1, no existe aún un procedimiento general para resolver este problema, sólo soluciones particulares para una clase de sistemas mecánicos subactuados. Lo último es equivalente a considerar $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ en el análisis, tal que los resultados mostrados en los trabajos de (Mahindrakar *et al.*, 2006), (Acosta *et al.*, 2005) y (Ortega *et al.*, 2002a) aseguran, para una clase de mecanismos subactuados, que el conjunto de ecuaciones (71)-(73) tienen como solución única $[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T]^T = [\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T]^T$. Por lo tanto, siguiendo procedimientos similares en (Mahindrakar *et al.*, 2006), (Acosta *et al.*, 2005) y (Ortega *et al.*, 2002a) es posible probar que el punto de equilibrio $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ será el máximo conjunto invariante en Ω .

Finalmente, el estimado del dominio de atracción sigue del hecho que $L_V(\bar{c}_3)$ es el conjunto de nivel más grande de $\mathcal{H}_d$. Esto completa la prueba.

En el siguiente epígrafe, se aplican los resultados de la nueva extensión del método IDA-PBC a un péndulo de Furuta.

III.5 Aplicación: El péndulo de Furuta

El *péndulo de Furuta*, también conocido como péndulo rotatorio, es un sistema mecánico subactuado que consiste de dos eslabones con dos articulaciones rotacionales (Åström & Furuta, 2000). La primera articulación está dotada con un actuador que aplica un par sobre él, mientras la ausencia de actuación en la segunda articulación determina la naturaleza subactuado del mecanismo. Un esquema del péndulo de Furuta es mostrado en la figura 7, donde q_1 y q_2 son las posiciones articulares (De la Torre D., 2005). El primer eslabón gira alrededor del eje vertical mientras el segundo eslabón, localizado en el extremo del primer eslabón, se mueve en un plano vertical. Los parámetros de los dos eslabones son la longitud del eslabón l_i , la distancia al centro de la masa l_{c_i} , el momento de inercia I_i y la masa m_i , con $i = 1, 2$. Las ecuaciones de

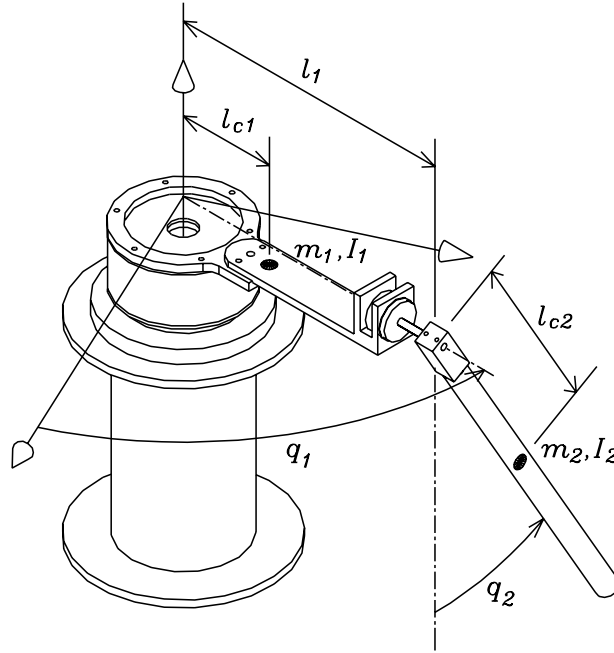


Figura 7: Péndulo de Furuta y parámetros característicos.

movimiento del péndulo de Furuta mostrado en la figura 7, puede ser descrito por (57)

con las matrices

$$M(q_2) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \sin(q_2)^2 & a_3 \cos(q_2) \\ a_3 \cos(q_2) & a_2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la función de energía potencial

$$V(q_1, q_2) = a_4 \cos(q_2) \quad (74)$$

donde las constantes a_i son definidas como

$$\begin{aligned} a_1 &= I_1 + m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2, & a_2 &= I_2 + m_2 l_{c_2}^2, \\ a_3 &= m_2 l_1 l_{c_2}, & a_4 &= m_2 g l_{c_2}. \end{aligned} \quad (75)$$

El objetivo de control es llevar el primer eslabón del péndulo de Furuta a la posición deseada con el segundo eslabón en posición vertical superior, iniciando desde una vecindad de esta configuración.

Formalmente, el objetivo de control puede ser establecido como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{d_1} \\ \pi \end{bmatrix} \quad (76)$$

donde q_{d_1} es la posición deseada.

III.5.1 Nuevo IDA-PBC del péndulo de Furuta

Basado en el procedimiento mostrado en el epígrafe II.2, junto con el esquema de compensación, se ha diseñado un IDA-PBC para estabilizar el péndulo de Furuta, el

cual es

$$u = \underbrace{-[\lambda_1 \nabla_1 V_d + \lambda_2 \nabla_2 H_d] + \frac{j_2[-d_2 p_1 + d_1 p_2]}{\Delta_d}}_{u_{es}} - \underbrace{\frac{k_v[d_3 p_1 - d_2 p_2]}{\Delta_d}}_{u_{di}} + \underbrace{f_{v_1} \dot{q}_1 + \sigma_{o_1} \hat{z}}_{u_{fric}} \quad (77)$$

$$\dot{\hat{z}} = \frac{-d_3 p_1 + d_2 p_2}{\Delta_d} + \dot{q}_1 - \frac{\sigma_{o_1}}{f_{c_1}} |\dot{q}_1| \hat{z} \quad (78)$$

donde k_v es una constante positiva; j_2 y d_i ($i = 1, 2, 3$) son los elementos de las matrices J_2 y M_d , respectivamente, tal que

$$M_d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & \frac{r_3 \cos(q_2)}{\rho} \\ \frac{r_3 \cos(q_2)}{\rho} & \frac{-r_1 + r_2 \cos(q_2)^2}{\rho} \end{bmatrix}, \quad (79)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & j_2 \\ -j_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

y

$$V_d = \frac{a_4}{k_1} [1 + \cos(q_2)] + \frac{k_p}{2} \left[q_1 - q_{d_1} + \frac{a_3 \arctan\left(\frac{a_2 \sin(q_2)}{r_4}\right)}{r_4} \right]^2 \quad (81)$$

donde $k_p > 0$, $\rho = k_1 k_2 a_3 + a_2 \sin^2(q_2)$,

$$r_1 = k_1 a_2^2 + k_1^2 k_2 a_2 a_3, \quad r_2 = k_1 a_2^2 + k_1 a_3^2,$$

$$r_3 = k_1 a_1 a_3 - k_1^2 k_2 a_3^2, \quad r_4 = \sqrt{k_1 k_2 a_2 a_3}$$

y

$$j_2 = \frac{p_1[d_3 \alpha_1 - d_2 \alpha_2] + p_2[-d_2 \alpha_1 + d_1 \alpha_2]}{\Delta_d} \quad (82)$$

siendo k_1, k_2, k_3 constantes positivas satisfaciendo algunas condiciones, y $\Delta_d = d_1 d_3 - d_2^2 > 0$ es el determinante de M_d . De acuerdo a la hipótesis A1, considerando (74) con $G^\perp = [0 \ 1]$, se tiene que (63) tiene como única solución $\mathbf{q}_a = [q_1 \ \pi]^T \ \forall q_1 \in \mathbb{R}$ y $\frac{\pi}{2} < q_2 < \frac{3\pi}{2}$. Sustituyendo $\mathbf{q}_a$ en (64) con M , M_d y V_d dados en (74), (79) y (81), respectivamente, se verifica que $\mathbf{q}^* = [q_{d_1} \ \pi]$ es única la solución de (64) localmente. Por tanto, el péndulo de Furuta satisface la hipótesis A1 tal que el método propuesto es aplicable.

El resto de los términos de la ley de control (77)-(78), α_1 , α_2 y las condiciones sobre las ganancias k_1, k_2 y k_3 son descritas de la siguiente manera. Considere la ley de control (77)-(78) y las definiciones de M_d , J_2 y V_d en (79)-(81). Las siguientes condiciones aseguran que M_d es una matriz definida positiva:

$$d_1 > 0, \ d_1 d_3 - d_2^2 > 0.$$

Ambas condiciones son satisfechas si k_1, k_2 y k_3 son seleccionadas tal que

$$k_1 k_2 < \frac{a_3}{a_2} \tag{83}$$

y

$$k_3 > \frac{r_3^2 \cos^2(q_2)}{[k_1 k_2 a_3 + a_2 \sin^2(q_2)][-r_1 + r_2 \cos^2(q_2)]}. \tag{84}$$

El elemento d_3 de la matriz M_d es positivo para $q_2 \in (\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon)$, donde

$$\varepsilon = \arccos \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right)$$

tal que $|\varepsilon| < \frac{\pi}{2}$ con $\frac{r_1}{r_2} < 1$; donde

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{k_1 a_2^2 + k_1^2 k_2 a_2 a_3}{k_1 a_2^2 + k_1 a_3^2},$$

de allí la condición (83).

Por otro lado, algunas manipulaciones algebraicas permiten verificar que la función de energía deseada V_d es una función no negativa con respecto a $[q_1^* \ q_2^*]^T = [q_{d_1} \ \pi]^T$, $\forall q_{d_1} \in \mathbb{R}$, $q_2 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Por tanto, ambas condiciones —positividad de M_d y V_d — son simultáneamente satisfechas con $\pi - \varepsilon < q_2 < \pi + \varepsilon$. Además, también es cierto que

$$\pi - (\varepsilon - \mu) \leq q_2 \leq \pi + (\varepsilon - \mu)$$

con $\mu \ll 1$ y, considerando (84), se tiene que

$$k_3 > \frac{r_3^2 \cos^2(\varepsilon - \mu)}{[k_1 k_2 a_3 + a_2 \sin^2(\varepsilon - \mu)][-r_1 + r_2 \cos^2(\varepsilon - \mu)]} \quad (85)$$

asegura la positividad de M_d . Aquí, se han utilizado las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \operatorname{sena} \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a \pm b) &= \operatorname{sena} \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

siendo $a = \pi$ y $b = \varepsilon - \mu$.

Note que la ganancia k_3 mostrada en la tabla I ha sido escogida tomando en cuenta (85), donde $k_3 > 0.1288$, con $\mu = 0.15$ y ε definida por

$$\varepsilon = \arccos \left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) = 0.45 \text{ [rad]} = 25.78^\circ$$

tal que la configuración inicial para q_2 está acotada por

$$q_2 \in (154.22^\circ, 205.78^\circ)$$

Más aún, sustituyendo los valores de la tabla I en (75), se obtiene $\frac{a_3}{a_2} = 1.03$; por tanto, se asigna k_1 y k_2 tal que $k_1 k_2 = 0.49$ satisfacen (83).

Los parámetros α_i en (82) son

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\text{sen}(q_2)[a_2\lambda_1^2 \cos(q_2) - a_3\lambda_1\lambda_2], \\ \alpha_2 &= -\text{sen}(q_2)[2a_2\lambda_1\lambda_3 \cos(q_2) - a_3\lambda_1\lambda_4 - a_3\lambda_2\lambda_3] + \frac{k_1 r_3 \text{sen}(q_2)[\rho + 2a_2 \cos(q_2)^2]}{\rho^2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{k_3 a_2 \rho - r_3 a_3 \cos(q_2)^2}{\rho \Delta}, & \lambda_2 &= \frac{d_2 - \lambda_1 a_3 \cos(q_2)}{a_2}, \\ \lambda_3 &= \frac{k_1 a_3 \cos(q_2)}{\rho}, & \lambda_4 &= -k_1\end{aligned}$$

donde $\Delta = a_1 a_3 - a_2^2$ es el determinante de la matriz M . El resto de los términos en (77) son

$$\begin{aligned}\nabla_1 V_d &= k_p \left[q_1 - q_{d_1} + \frac{a_3 \arctan\left(\frac{a_2 \text{sen}(q_2)}{r_4}\right)}{r_4} \right], \\ \nabla_2 H_d &= \frac{\Delta_d [f_1 p_1^2 - 2f_2 p_1 p_2] - f_3 [d_3 p_1^2 - 2d_2 p_1 p_2 + d_1 p_2^2]}{2\Delta_d^2} + \nabla_2 V_d,\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}\nabla_2 V_d &= -\frac{a_4 \text{sen}(q_2)}{k_1} + \frac{k_p [a_2 a_3 \cos(q_2)]}{r_4^2 + a_2^2 \text{sen}(q_2)^2} \left[q_1 - q_{d_1} + \frac{a_3 \arctan\left(\frac{a_2 \text{sen}(q_2)}{r_4}\right)}{r_4} \right], \\ f_1 &= \frac{-2r_2 \cos(q_2) \text{sen}(q_2)}{\rho} - \frac{[-r_1 + r_2 \cos(q_2)^2][2a_2 \text{sen}(q_2) \cos(q_2)]}{\rho^2}, \\ f_2 &= \frac{\rho[-r_3 \text{sen}(q_2) - r_3 \cos(q_2)[2a_2 \text{sen}(q_2) \cos(q_2)]]}{\rho^2}, \\ f_3 &= k_3 f_1 - 2d_2 f_2.\end{aligned}$$

III.5.2 Resultados experimentales

Experimentos con un péndulo de Furuta, muestran la efectividad del esquema propuesto cuando la fricción es compensada⁴. El péndulo de Furuta fue construido por (De la Torre D., 2005) para hacer experimentos en tiempo real (ver figura 8). El motor usado en el péndulo de Furuta experimental es el modelo DM1004-C de Parker Compumotor. El motor es operado en modo par, tal que este actúa como una fuente de par y acepta un voltaje análogo como señal de referencia. El motor DM1004-C es capaz de suministrar un par máximo de 4 Nm. El algoritmo de control es ejecutado a un periodo de muestreo de 2.5 ms en una computadora equipada con la tarjeta de adquisición de datos MultiQ-PCI de Quanser Consulting Inc. Desde un punto de vista práctico, se ha encontrado que el modelo de fricción de Dahl se acerca mucho a los experimentos llevados a cabo en el actuador accionado (Moreno *et al.*, 2003).



Figura 8: Péndulo de Furuta experimental.

Siguiendo los procedimientos en (Kelly *et al.*, 2000) y (Olsson, 1996), se han estimado los parámetros del modelo de fricción de Dahl para el único actuador del meca-

⁴El autor del presente trabajo de tesis agradece al M. C. Dann de la Torre, del laboratorio de Robótica del CICESE, por su valioso apoyo en las pruebas experimentales.

nismo experimental:

$$\sigma_{o_1} = 2764 \text{ Nm/rad}$$

$$f_{c_1} = 0.745 \text{ Nm}$$

$$f_{v_1} = 0.144 \text{ Nm s/rad}$$

Los valores de los parámetros del péndulo de Furuta están dados en las primeras dos columnas de la tabla I.

Tabla I: Parámetros del péndulo de Furuta.

<i>Eslabón 1</i>	<i>Eslabón 2</i>	<i>Ganancias</i>
$l_1 = 0.252$	$l_2 = 0.366$	$k_1 = k_2 = 0.7$
$m_1 = 1.636$	$m_2 = 0.336$	$k_3 = 0.2$
$l_{c_1} = 0.019$	$l_{c_2} = 0.177$	$k_p = 0.2$
$I_1 = 0.0075$	$I_2 = 0.004$	$k_v = 15$

Se han realizado dos experimentos diferentes para comparar el desempeño del sistema de control IDA-PBC cuando la compensación de fricción está presente y cuando está ausente. Se consideró en ambos experimentos las ganancias dadas en la tercera columna de la tabla I (las cuales satisfacen las condiciones requeridas dadas en el epígrafe III.5.1), y una configuración inicial con $q_2 \in (154.22^\circ, 205.78^\circ)$ (ver detalles también en el epígrafe III.5.1). Más aún, se ha tenido cuidado de que la entrada de control no exceda el par máximo del motor.

La posición deseada en los experimentos fue $q_{d_1} = -90^\circ$. Las gráficas mostradas en las figuras 9 y 10 muestran la evolución temporal de las posiciones articulares cuando la compensación de fricción no está presente, mientras las figuras 11 y 12 muestran los resultados cuando la compensación de fricción es considerada. Note que el comportamiento oscilatorio en las posiciones articulares se desvanece hacia la posición deseada, con un pequeño error (offset), cuando se incorpora la compensación de fricción en la ley

de control. Este error puede estar asociado al proceso de discretización del algoritmo de control, donde las velocidades son estimadas mediante un algoritmo de diferencias regresivas (backward), en lugar de que sean medidas directamente.

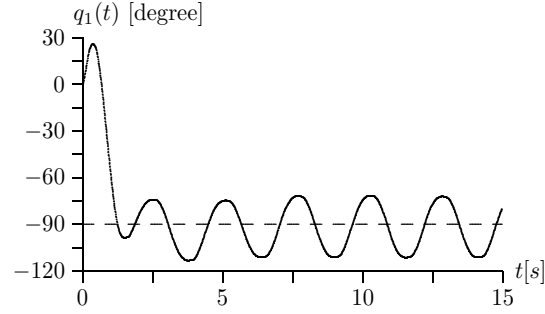


Figura 9: Evolución temporal de $q_1(t)$ sin compensación de fricción.

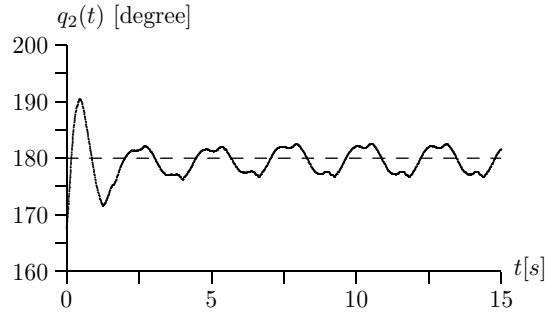


Figura 10: Evolución temporal de $q_2(t)$ sin compensación de fricción.

III.6 Conclusiones

En este capítulo, se ha presentado una extensión de la metodología IDA-PBC para el control de una clase de sistemas mecánicos subactuados con fricción, donde se ha modelado la fricción usando el modelo de Dahl. Se han llevado a cabo experimentos para comparar el desempeño del sistema de control IDA-PBC sobre un péndulo de Furuta, cuando la compensación de fricción está presente y cuando está ausente. La

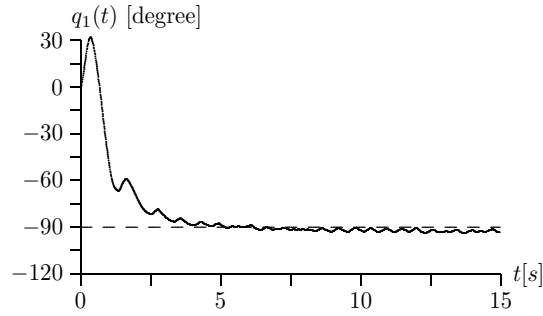


Figura 11: Evolución temporal de $q_1(t)$ usando compensación de fricción.

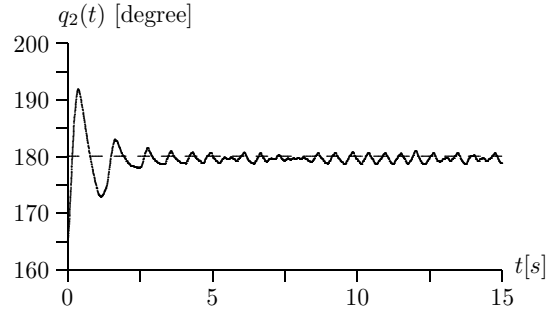


Figura 12: Evolución temporal de $q_2(t)$ usando compensación de fricción.

evidencia experimental exhibida muestra cómo el comportamiento oscilatorio de las posiciones articulares —debida principalmente a la alta fricción en el actuador— se desvaneció cuando la compensación de fricción fue incorporada en la ley de control. El precio a ser pagado por tener la posibilidad de incluir el modelo de Dahl en la metodología IDA-PBC es la limitación para agregar nuevos términos libres —como los efectos Stribeck y stick-slip— en la ley de control, para lograr un mejor desempeño en presencia de fricción dinámica.

IV Control IDA-PBC de mecanismos accionados por motores de CD con escobillas e imanes permanentes

Una nueva extensión del método IDA-PBC para la regulación de mecanismos accionados por medio de motores de CD con escobillas e imanes permanentes es presentado en este capítulo. La propuesta que se presenta considera la dinámica del motor en el diseño del sistema de control. La principal aportación es una ley de control en términos del voltaje aplicado a cada uno de los motores para estabilizar el mecanismo en una posición deseada. Para verificar el desempeño del controlador propuesto, se presentan simulaciones de un nuevo control IDA-PBC del sistema barra-bola mostrado en el epígrafe II.3.

IV.1 Introducción

Para regulación de sistemas mecánicos, la mayoría de las técnicas de diseño de control provee una ley de control en términos de un par mecánico en lugar de un voltaje. No obstante, motores eléctricos son usados típicamente como actuadores para el control de sistemas mecánicos. En esos casos, el par es usualmente suministrado como voltaje del motor por medio de dispositivos electrónicos, e.g. un amplificador de potencia, ya que la dinámica del motor no es considerado en el diseño. Existen algunos motores eléctricos donde el motor es operado en modo par, tal que este actúa como una fuente de par y acepta un voltaje análogo como una señal de par de referencia. Un ejemplo es el modelo DM1200-A de Parker Compumotor (Reyes *et al.*, 1997). Por otro lado, uno de los motores eléctricos más simple para operar es el motor de CD con escobillas e imanes permanentes, en el cual un voltaje de CD es suministrado a la armadura (rotor) del motor. El modelo matemático de este tipo de motores de CD es usualmente un modelo lineal, donde sus parámetros son a menudo dados por el

fabricante o bien obtenidos mediante pruebas experimentales. Ventajas de esos motores son las relaciones lineales del par vs corriente del rotor y voltaje vs velocidad, las cuales pueden ser explotadas en el diseño del sistema de control.

Por otro lado, la estabilización de sistemas electromecánicos ha sido resuelto exitosamente con el método IDA-PBC (Rodríguez & Ortega, 2003). En ese trabajo, las dinámicas del sistema mecánico y el sistema eléctrico son escritos juntos como el sistema completo. Los autores suponen materiales magnéticos lineales y la dinámica eléctrica completamente actuada. Más aún, instrumental en el desarrollo es la incorporación de acoplamientos “virtuales” entre el sistema mecánico y el sistema eléctrico. Inspirados en ese trabajo, en este capítulo se considera el motor de CD con escobillas e imanes permanentes como el sistema eléctrico. El acoplamiento de ambos sistemas, eléctrico y mecánico, es hecho mediante la corriente del rotor del motor de CD y la velocidad articular del mecanismo. Como antecedente a este trabajo, en (Morillo *et al.*, 2007) presentan un control IDA-PBC para la regulación de un motor de CD.

Un aportación novedosa en la propuesta que aquí se presenta es la posibilidad de conocer explícitamente en malla cerrada la corriente del motor, la cual podría ser usada como entrada de control de un motor controlado por corriente.

IV.2 Formulación del problema

En este epígrafe, se muestra un repaso de la formulación del método IDA-PBC para el control de una clase de sistemas electromecánicos, donde la fricción es considerada en el sistema mecánico, y se supone la dinámica eléctrica completamente actuada. El procedimiento está basado en la descripción mostrada en el epígrafe II.1.3. Más aún, se supone que las primeras m de las n articulaciones son actuadas; si el sistema es completamente actuado $m = n$ y si el sistema es subactuado entonces $m < n$. Se llamarán a esas m articulaciones las coordenadas actuadas.

Por otro lado, la generalización del modelo lineal del motor de CD con escobillas

e imanes permanentes al conjunto de motores localizados en las n coordenadas del mecanismo, puede ser escrito en la siguiente notación (Ogata, 1996):

$$\mathbf{v}_a = L_a \frac{d\mathbf{i}_a}{dt} + R_a \mathbf{i}_a + \mathbf{e}_g(\dot{\mathbf{q}}) \quad (86)$$

donde $\mathbf{v}_a = [v_{a_1}, v_{a_2}, \dots, v_{a_n}]^T$, con v_{a_i} voltajes aplicados al motor, e $i = 1, 2, \dots, n$, $L_a = \text{diag}\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ con L_i inductancias de la armadura, $\mathbf{i}_a \in \mathbb{R}^n$ es el vector de corrientes de armadura, $R_a = \text{diag}\{r_{a_1}, r_{a_2}, \dots, r_{a_n}\}$ con r_{a_i} resistencias del rotor, $\mathbf{e}_g \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas contra electromotrices (FCEM) tal que

$$\mathbf{e}_g = K_g \dot{\mathbf{q}} \quad (87)$$

siendo $K_g = \text{diag}\{k_{g_1}, k_{g_2}, \dots, k_{g_n}\}$ con k_{g_i} constantes. Para mayor claridad de presentación, el modelo (86) se reescribe como

$$\frac{d\mathbf{i}_a}{dt} = L_a^{-1} [\mathbf{v}_a - R_a \mathbf{i}_a - \mathbf{e}_g]. \quad (88)$$

Si se toma en cuenta el modelo del sistema mecánico (3), el modelo del sistema eléctrico (88), y la siguiente función semidefinida positiva

$$W_L(\mathbf{i}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{i}_a^T L_a K_g^{-1} K_T \mathbf{i}_a,$$

donde K_T es una matriz diagonal con k_{t_i} constantes del par, el modelo dinámico del sistema completo puede ser escrito como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & -R & A \\ 0 & -A^T & -B_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H \\ \nabla_{\mathbf{p}} H \\ \nabla_{\mathbf{i}_a} W_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_a \end{bmatrix} \mathbf{v}_a \quad (89)$$

donde $A = GG^T K_g L_a^{-1}$, $B_a = GG^T L_a^{-1} R_a K_T^{-1} K_g L_a^{-1}$, $C_a = GG^T L_a^{-1}$ y el vector de

entradas de control $\mathbf{u}$ ha sido incluido en (89) por medio de la corriente de armadura como

$$\mathbf{u} = K_T \mathbf{i}_a \quad (90)$$

la cual junto con (87) representa el acoplamiento del sistema mecánico (3) con el sistema eléctrico (88), respectivamente. Es importante resaltar que las constantes k_{g_i} y k_{t_i} a menudo son proporcionadas por el fabricante, o bien, pueden ser obtenidas experimentalmente.

Comentario 6: Para el análisis, se considera que el modelo dinámico eléctrico está presente sólo en las coordenadas actuadas, lo cual es equivalente a decir que $\mathbf{i}_a = [i_{a_1}, \dots, i_{a_m}, i_{a_{m+1}}, \dots, i_{a_n}]^T$ con $i_{a_k} = 0$, para $k = m + 1, \dots, n$.

Ahora, para el sistema eléctrico, se introduce en la formulación una función semi-definida positiva

$$W_{d_m}(\mathbf{i}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{i}_a^T L_d K_{g_d}^{-1} K_{T_d} \mathbf{i}_a \quad (91)$$

donde L_d , K_{g_d} y K_{T_d} son matrices diagonales libres con elementos positivos y dimensiones apropiadas. El sistema en malla cerrada deseado es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d & 0 \\ -M_d M^{-1} & B & -A_d \\ 0 & A_d^T & -B_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} H_d \\ \nabla_{\mathbf{i}_a} W_{d_m} \end{bmatrix} \quad (92)$$

donde H_d y B están dados por (4) y (16), respectivamente, $A_d = GG^T K_{g_d} L_d^{-1}$, $B_d = GG^T L_d^{-1} R_{d_m} K_{T_d}^{-1} K_{g_d} L_d^{-1}$, siendo R_{d_m} una matriz diagonal libre.

Igualando $\frac{d}{dt}[\mathbf{q}^T \mathbf{p}^T]^T$ de (89) con (92) queda:

$$GG^T K_d \mathbf{i}_a = \nabla_{\mathbf{q}} H - M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + [J_2 - GK_v G^T] M_d^{-1} \mathbf{p} \quad (93)$$

donde $K_d = K_T + K_{T_d}$. Ahora, multiplicando (93) por la matriz de rango pleno $\begin{bmatrix} G^T \\ G^\perp \end{bmatrix}$, queda

$$\begin{bmatrix} G^T \\ G^\perp \end{bmatrix} G G^T K_d \mathbf{i}_a = \begin{bmatrix} G^T \\ G^\perp \end{bmatrix} [\nabla_{\mathbf{q}} H - M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + [J_2 - G K_v G^T] M_d^{-1} \mathbf{p}] \quad (94)$$

tal que de las últimas n ecuaciones se obtienen las PDEs (13) y (14). Dadas las soluciones M_d y V_d de (13) y (14), ellas definen las corriente de armadura $\mathbf{i}_a$ de las primeras n ecuaciones de (94) como

$$\mathbf{i}_a = K_d^{-1} [-\nabla_{\mathbf{q}} H - M_d M^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} H_d + [J_2 - G K_v G^T] M_d^{-1} \mathbf{p}] \quad (95)$$

donde $G^T G G^T = G^T$.

Por otro lado, igualando $\frac{d\mathbf{i}_a}{dt}$ de (89) con (92), y tomando en cuenta que $A = A^T$ y $A_d = A_d^T$, se obtiene la ley de control como

$$\mathbf{v}_a = L_a [L_d^{-1} [K_{g_d} M_d^{-1} \mathbf{p} - R_{d_m} \mathbf{i}_a] + R_a \mathbf{i}_a + K_g M^{-1} \mathbf{p}] \quad (96)$$

la cual depende solo de las posiciones y velocidades del sistema mecánico.

Luego entonces, similar a la formulación descrita en el epígrafe II.1, el problema de control consiste en obtener el sistema en malla cerrada (92), lo cual significa que existen soluciones M_d y V_d de (13)-(14), tal que al sustituir (95)-(96) en (89), se obtiene (92).

IV.3 Análisis de estabilidad

Ahora, el principal resultado de estabilidad es mostrado en la siguiente proposición.

Proposición 5. *Considere el sistema en malla cerrada dado por (92). Suponga que existe una matriz M_d simétrica y definida positiva, y una función V_d que satisfacen*

(13), (14), (5) y (17). Entonces, el equilibrio $[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T \ \mathbf{i}_a^T]^T = [\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ del sistema en malla cerrada (92) es asintóticamente estable, al menos localmente. Una función de Lyapunov para probarla está dada por

$$\mathcal{H}_{d_m} = H_d + W_{d_m} \quad (97)$$

con H_d y W_{d_m} dadas por (4) y (91). Un estimado del dominio de atracción es $L_V(\bar{c}_m)$ donde

$$L_V(c_m) \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{i}_a \end{bmatrix} \in D_m : \mathcal{H}_{d_m} < c_m \right\}$$

donde $D_m \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ y

$$\bar{c}_m = \sup\{c_m > \mathcal{H}_{d_m}(\mathbf{q}^*, \mathbf{0}, \mathbf{0}) | L_V(c_m) \text{ está acotada}\}. \quad (98)$$

Prueba: Primero, note que $[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T \ \mathbf{i}_a^T]^T = [\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ es un punto de equilibrio aislado de (92), donde $\mathbf{q}^*$ ha sido definido en (5). Ahora, tomando en cuenta (4), (91) y (5), se verifica que $\mathcal{H}_{d_m}$ se desvanece en $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$, y es positiva para todo $[\mathbf{q}^T \ \mathbf{p}^T \ \mathbf{i}_a^T]^T \in D_m$. Por tanto, la función candidata de Lyapunov (97) es una función definida positiva, al menos localmente.

La derivada temporal de (97) a lo largo de las trayectorias del sistema (92) está dada por

$$\dot{\mathcal{H}}_{d_m} = -\mathbf{p}^T M_d^{-1} R_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) M_d^{-1} \mathbf{p} - \mathbf{i}_a^T G G^T L_d^{-1} R_{d_m} \mathbf{i}_a \quad (99)$$

donde R_d está dada por (17), tal que (99) puede ser escrita como

$$\dot{\mathcal{H}}_{d_m} = - \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{i}_a \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_d^{-1} R_d M_d^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & GG^T L_d^{-1} R_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{i}_a \end{bmatrix}. \quad (100)$$

Cabe recordar que para garantizar positividad de la matriz R_d , debe cumplirse (17) y existir una matriz K_v que asegure $R_d > 0$. Enseguida, note que el segundo término del lado derecho de (99) es no positivo, ya que se ha supuesto que el modelo dinámico del sistema eléctrico está solo presente en las coordenadas actuadas. Los resultados previos aseguran que (99) es una función no positiva, y por tanto, se concluye que (97) es una función de Lyapunov. Basado en la teoría de Lyapunov, esos resultados aseguran que el equilibrio $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ es estable.

Ahora, solo resta establecer estabilidad asintótica. Con este fin, de acuerdo con el Teorema de Barbashin–Krasovskii se define el conjunto:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{i}_a \end{bmatrix} \in D_m : \dot{\mathcal{H}}_{d_m} = 0 \right\}.$$

Enseguida, se buscan todas las trayectorias que, iniciando en Ω , permanecen allí por siempre. Con este fin, note que en Ω lo siguiente debe ser satisfecho

$$\mathbf{p}^T M_d^{-1} R_d M_d^{-1} \mathbf{p} + \mathbf{i}_a^T GG^T L_d^{-1} R_d \mathbf{i}_a = 0. \quad (101)$$

De acuerdo a los resultados previos, la única solución que cumple (101) es $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{i}_a = \mathbf{0}$. Esto implica que $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ y $\frac{d\mathbf{i}_a}{dt} = \mathbf{0}$, y sustituyendo esos resultados en (92), se obtiene $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$. Por tanto, se concluye que el equilibrio $[\mathbf{q}^{*T} \ \mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T$ es asintóticamente estable, al menos localmente.

Finalmente, el estimado del dominio de atracción sigue del hecho que $L_V(\bar{c}_m)$ es el

conjunto de nivel más grande de $\mathcal{H}_{d_m}$. Esto completa la prueba.

IV.4 Aplicación: El sistema barra-bola

El modelo dinámico completo del sistema barra bola con fricción viscosa, mostrado en el epígrafe II.3, junto con el motor de CD, está dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \frac{p_2}{L^2 + q_1^2} \\ \frac{q_1 p_2^2}{(L^2 + q_1^2)^2} - g \sin(q_2) - f_{v_1} p_1 \\ k_t i_a - g q_1 \cos(q_2) - f_{v_2} \frac{p_2}{L^2 + q_1^2} \\ L_a^{-1} [v_a - r_a i_a - k_g \frac{p_2}{L^2 + q_1^2}] \end{bmatrix} \quad (102)$$

donde las constantes k_t y k_g establecen el acoplamiento natural del sistema mecánico con el sistema eléctrico, la corriente del rotor i_a y la ley de control v_a están definidas por (96), con los elementos que serán mostrados más adelante. Los parámetros del motor son la inductancia L_a y la resistencia del rotor r_a .

Considerando el esquema propuesto en este capítulo, y los resultados dados en (Ortega *et al.*, 2002a), el sistema en malla cerrada completo es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \\ i_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \frac{p_2}{L^2 + q_1^2} \\ \frac{q_1 p_2^2}{(L^2 + q_1^2)^2} - g \sin(q_2) - f_{v_1} p_1 \\ k_t i_a - g q_1 \cos(q_2) - f_{v_2} \frac{p_2}{L^2 + q_1^2} \\ L_a L_d^{-1} \left[\frac{k_{gd} [-d_2 p_1 + d_1 p_2]}{\Delta_d} - r_d i_a \right] \end{bmatrix} \quad (103)$$

donde k_d , L_d y k_p son constantes positivas, k_v está dada por (46), los d_i elementos son: $d_1 = \sqrt{2[L^2 + q_1^2]}$, $d_2 = L^2 + q_1^2$, $d_3 = \sqrt{2}[L^2 + q_1^2]^{\frac{3}{2}}$, con $\Delta_d = d_1 d_3 - d_2^2$, y la corriente

i_a está dada por:

$$\begin{aligned}
i_a = & k_d^{-1} \left[\frac{q_1}{\sqrt{2}(L^2 + q_1^2)} \left[-\sqrt{L^2 + q_1^2} p_1^2 + \sqrt{2} p_1 p_2 + \frac{1}{\sqrt{L^2 + q_1^2}} p_2^2 \right] \right. \\
& + g q_1 \cos(q_2) - g \sqrt{2(L^2 + q_1^2)} \sin(q_2) - k_p \sqrt{\frac{L^2 + q_1^2}{2}} \left[q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{q_1}{L} \right) \right] \\
& \left. + \frac{k_v}{L^2 + q_1^2} \left[p_1 - \sqrt{\frac{2}{L^2 + q_1^2}} p_2 \right] \right]. \tag{104}
\end{aligned}$$

Por otro lado, recordando que para este caso $R = \operatorname{diag}\{f_{v_1}, f_{v_2}\}$, y las matrices $G^\perp$, M y M_d del sistema barra-bola están dados en (Ortega *et al.*, 2002a) como

$$G^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L^2 + q_1^2 \end{bmatrix}, \quad M_d = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{bmatrix},$$

puede verificarse que M_d satisface (17), y por tanto el esquema propuesto en este capítulo puede ser aplicado.

IV.4.1 Simulaciones

Simulaciones han sido realizadas sobre el sistema barra-bola mostrado en la figura 4 para verificar los resultados anteriores. La configuración inicial del sistema barra-bola es: $[q_1(0) \ q_2(0) \ p_1(0) \ p_2(0) \ i_a(0)]^T = [0.25 \ 0.4 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Los parámetros del mecanismo son: $L = 0.42$, $g = 9.8$, $f_{v_1} = 0.5$ y $f_{v_2} = 0.5$. Los parámetros del motor son: $k_g = 0.15$, $k_t = 0.3$, $r_a = 2.5 \ \Omega$ y $L_a = 0.1$ mH. Las ganancias del nuevo IDA-PBC dado por (96) y (104) son: $k_{g_d} = 0.025$, $k_{t_d} = 0.1$, $k_p = 10$, $r_d = 2.5 \ \Omega$, $L_d = 0.1$ mH, y k_v mostrada en (46).

Las gráficas mostradas en las figuras 13, 14, 15 y 16 muestran cómo las posiciones de la bola y la barra, la corriente de armadura y el voltaje aplicado al motor van desvaneciéndose hacia el origen, tal y como se esperaba.

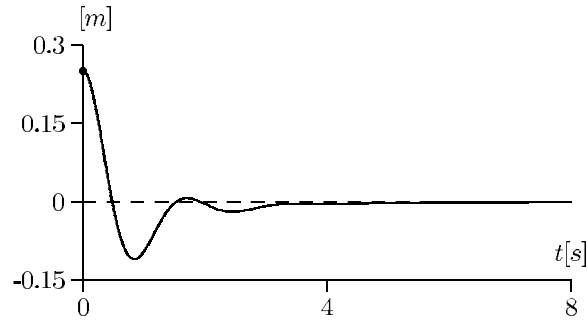


Figura 13: Evolución temporal de la posición de la bola $q_1(t)$.

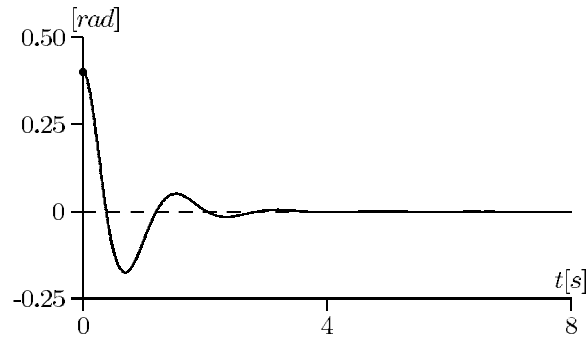


Figura 14: Evolución temporal de la posición de la barra $q_2(t)$.

IV.5 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una nueva extensión del método IDA-PBC para estabilizar una clase de sistemas mecánicos accionados por motores de CD con escobillas e imanes permanentes. El nuevo control IDA-PBC incorpora los parámetros del motor sin despreciar la inductancia de armadura, como se hace en otros esquemas cuando se considera la dinámica del motor en el diseño del control. El control propuesto aplica a sistemas completamente actuados —como robots manipuladores— y a una clase de sistemas mecánicos subactuados. Simulaciones sobre un sistema barra-bola ilustran los resultados.

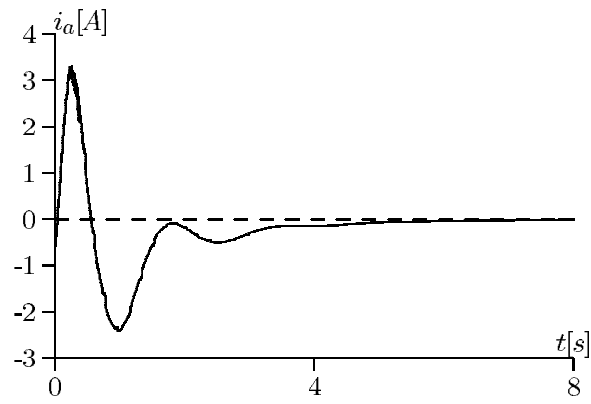


Figura 15: Evolución temporal de la corriente de armadura del motor $i_a(t)$.

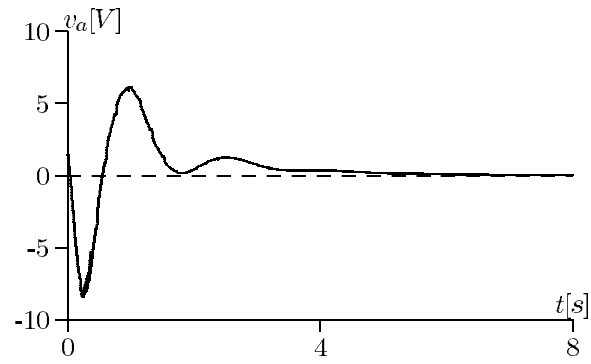


Figura 16: Evolución temporal del voltaje del motor $v_a(t)$.

V Conclusiones generales

En este trabajo de tesis, se han presentado dos nuevas extensiones sobre el método IDA-PBC aplicado a la regulación de sistemas mecánicos, tanto actuados como subactuados. La incorporación de nuevos elementos en la formulación original de esa metodología ha permitido el desarrollo de diferentes propuestas de control, con el fin de mejorar el desempeño de sistemas de control IDA-PBC de una clase de mecanismos subactuados. La fricción ha jugado un rol fundamental en los resultados mostrados, ya que tiene repercusiones importantes en el análisis de estabilidad y en la compensación de fricción dinámica, dos temas de relevancia que fueron presentados en este trabajo. Además, con el fin de ilustrar la aplicación del método IDA-PBC, se han presentado dos nuevos IDA-PBC de mecanismos subactuados, mostrando en detalle en uno ellos el diseño del control. Simulaciones y resultados experimentales sobre diferentes mecanismos subactuados han sido presentados para ilustrar el desempeño satisfactorio de los nuevos IDA-PBC propuestos.

V.1 Problema abiertos

De acuerdo a la formulación del problema del método IDA-PBC aplicado a mecanismos, existen algunos problemas que aún permanecen abiertos, así como nuevas propuestas por explorar. A continuación se enlistan algunos de ellos, los cuales merecen ser abordados en investigaciones futuras:

- Desarrollo de un procedimiento general para asegurar estabilidad asintótica, al menos localmente, para el caso de sistemas mecánicos subactuados en que la fricción está ausente.
- Desarrollo de un procedimiento analítico para determinar estimados del dominio de atracción menos restrictivos de sistemas de control IDA-PBC.

- Análisis de robustés ante incertidumbre paramétrica del sistema en malla abierta.
- Diseño de nuevos IDA-PBC aplicando un cambio total de coordenadas, con el fin de mejorar su desempeño y de trabajar con otros objetivos de control además de regulación.
- Control de oscilaciones en sistemas mecánicos subactuados basado en el método IDA-PBC.

LITERATURA CITADA

- Acosta J. A., Ortega R., Astolfi A. and Mahindrakar A. 2005. “Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **50**(12):1936–1955.
- Acosta J. A. 2004. “Control no lineal de sistemas subactuados”. *Tesis doctoral*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla. Sevilla, España.
- Armstrong-Hélouvry B., Dupont P., and Canudas de Wit C. 1994. “A survey of analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction”. *Automatica*. **30**(7):1083–1138.
- Astolfi A. and Ortega R. 2009. “Dynamic extension is unnecessary for stabilization via interconnection and damping assignment passivity-based control”. *Systems & Control Letters*. **58**(2):133–135.
- Åström K. and Furuta K. 2000. “Swinging up a pendulum by energy control”. *Automatica*. **36**:287–295.
- Åström K. 1998. “Control of systems with friction”. *Proceedings of the Fourth International Conference on Motion and Vibration Control*. Zürich, Switzerland, August; 25–32.
- Blankenstein G., Ortega R. and Van der Schaft A. 2002. “The matching conditions of controlled Lagrangians and interconnection and damping assignment passivity based control”. *International Journal of Control*. **75**(9):645–665.
- Bloch A. M. 2003. “Nonholonomic mechanics and control”. Springer–Verlag, New York, USA.
- Bloch A. M., Leonard N. E. and Marsden J. E. 1999. “Stabilization of the pendulum on a rotor arm by the method of controlled lagrangians”. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Detroit, Michigan, 500-505.

- Byrnes C., Isidori A., Willems J. C. 1991. "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*. **36**:1228–1240.
- Canudas de Wit C. and Lischinsky P. 1997. "Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model". *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. **11**:65–80.
- Canudas de Wit C., Olsson H., Åström K. and Lischinsky P. 1995. "A new model for control of systems with friction". *IEEE Transactions on Automatic Control*. **40**(3):419–425.
- Chang D. E., Bloch A. M., Leonard N. E., Marsden J. E. and Woolsey C. A. 2002. "The equivalence of controlled Lagrangian and controlled Hamiltonian systems". *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*. **8**:393–422.
- De la Torre D. 2005. "Control del péndulo de Furuta". *Tesis de Maestría*. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), Ensenada, B.C.
- Dahl P. R. 1976. "Solid friction damping of mechanical vibrations". *AIAA Journal*. **40**(12):1675–1682.
- Dirksch D., Scherpen J. and Ortega R. 2008. "Interconnection and damping assignment passivity-based control for port-hamiltonian mechanical systems with only position measurements". *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico, December 9-11; 4957–4962.
- Fantoni I. and Lozano R. 2000. "Non-linear control underactuated mechanical systems". Springer-Verlag.
- Gómez-Estern F. and Van der Schaft A. 2004. "Physical damping in IDA–PBC con-

- trolled underactuated mechanical systems”. *European Journal of Control*. **10**:451–468.
- Gómez-Estern F. 2002. “Control de sistemas no lineales basado en la estructura hamiltoniana”. *Tesis doctoral*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla. Sevilla, España.
- Hensen R. H. and van de Molengraft H. J. 2002. “Friction induced hunting limit cycle: an event mapping approach”. *Proceedings of the American Control Conference*. Alaska, USA; 2267–2272.
- Jankovic M., Fontaine D., and Kokotovic P. V. 1996. “TORA example: Cascade and passivity-based control designs”. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. **4**(3):292–297.
- Jose J. V. and Saletan E. 1998. “Classical dynamics: a contemporary approach”. Cambridge University Press, USA.
- Kelly R., Santibáñez V. and Loria A. 2005a. “Control of robot manipulators in joint space”. SpringerVerlag, London.
- Kelly R. y Campa R. 2005b. “Control basado en IDA-PBC del péndulo con rueda inercial en formulación lagrangiana”. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. **2**(1):36-42.
- Kelly R., Sandoval J. y Monroy C. 2005c. “Estabilización del sistema carro-péndulo: Análisis del método por lagrangiano controlado”. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*. Cuernavaca, Morelos.
- Kelly R., De la Torre D. y Campa R. 2004. “Control de energía del péndulo de Furuta con fricción: Método del gradiente de velocidad en formulación hamiltoniana”. *Memorias del VI Congreso Mexicano de Robótica*, Torreón, Coahuila, México.

- Kelly R., Llamas J. and Campa R. 2000. "A measurement procedure for viscous and Coulomb friction". *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. **49**(4):857–861.
- Khalil H. K. 1996. "Nonlinear systems". Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 1996.
- Mahindrakar A., Acosta J. A., Ortega R., Astolfi A. and Viola G. 2006. "Further constructive results on interconnection and damping assignment control of mechanical systems: The acrobot example". *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. **16**(14):671–685.
- Marsden J. and Tromba A. 1988. "Vector Calculus". W. H. Freeman and Company, USA.
- Moreno J., Kelly R. and Campa R. 2003. "Manipulator velocity control using friction compensation". *IEE Proceedings Control Theory Applications*. **150**(2):119–126.
- Morillo A., Ríos Bolívar M. and Acosta V. 2007. "Feedback regulation of a DC motor via interconnection and damping assignment". *Ingeniería Universidad de Carabobo (UC)*. Venezuela **14**(2):19–24.
- Muralidharan V., Ravichandran M. and Mahindrakar A. 2009. "Extending interconnection and damping assignment passivity-based control (IDA-PBC) to under-actuated mechanical systems with nonholonomic Pfaffian constraints: The mobile inverted pendulum robot". *Conference on Decision and Control (CDC 2009)*. Shanghai, China. December 16-18. 6305–6310.
- Olsson H., Åström K. J., Canudas de Wit C., Gäfvert M. and Lischinsky P. 1998. "Friction Models and Friction Compensation". *European Journal of Control*. **4**(3):176–195.

- Olsson H. 1996. “Control systems with friction”. *PhD. Dissertation, Department of Automatic Control*. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.
- Ogata K. 1996. “Modern control engineering”, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, USA.
- Olfati-Saber R.. 2002. “Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **47**(2):307–308.
- Olfati-Saber R. 2001. “Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles”. *PhD. Dissertation, Department of Electrical Engineering and Computer Science*. Massachusetts Institute of Technology, Boston, USA.
- Ortega R. and García-Canseco E. 2004. “Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey”. *European Journal of Control*. **10**:432–450.
- Ortega R., Spong M. W., Gómez-Estern F. and Blankenstein G. 2002a. “Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **47**(8):1213–1233.
- Ortega R., van der Schaft A., Maschke B. and Escobar G. 2002b. “Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems”. *Automatica*. **38**:585–596.
- Ortega R., van der Schaft A.J., Mareels I. & Maschke B. 2001. “Putting energy back in control”. *IEEE Control Systems Magazine*. pp. 18-33.
- Ortega R., van der Schaft A., Maschke B. & Escobar G. 1999. “Energy shaping of port-controlled hamiltonian systems by interconnection”. *Proceedings of IEEE Conference Decision and Control*. Phoenix, AZ, USA, December. 7–10.
- Ortega R., Loria A., Nicklasson P.J. and Sira-Ramirez H. 1998. “Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems”. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

- Ortega R. & Spong M. 1989. “Adaptative motion control of rigid robots: a tutorial”. *Automatica*, **25**(6):877–888.
- Reddy K. C., Whitacre W. W. and Woolsey C. A. 2004. “Controlled Lagrangians with gyroscopic forcing: An experimental application”. *Proceedings of the American Control Conference*. Boston, MA, USA. 511–516.
- Reyes F. and Kelly R. 2001. “Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm”. *Mechatronics*. **11**:267–282.
- Reyhanoglu M., van der Schaft A., McClamroch N. H. and Kolmanovsky I. 1999. “Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **44**(9):1663-1671.
- Rocha-Cozatl E. and Moreno J. 2002 “Passivity and unknown input observers for non-linear systems”. *15th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*. Barcelona, Spain.
- Rodriguez H. and Ortega, R. 2003. “Stabilization of a electromechanical systems via interconnection and damping assignment”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. **13**:1095–1111.
- Sandoval J., Kelly R. and Santibáñez V. 2010. “Regulation of mechanisms driven by brushed DC motors via IDA-PBC method”. *Conference on Decision and Control (CDC 2010)*. Atlanta, Georgia, USA. December 15-17; (Accepted).
- Sandoval J., Kelly R. and Santibáñez V. 2010. “Interconnection and damping assignment passivity-based control of a class of underactuated mechanical systems with dynamic friction”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. DOI 10.1002/rnc 1622. Published online. July 30, 2010.
- Sandoval J., Kelly R. and Santibáñez V. 2009. “Analysis of an IDA passivity-based control of the ball and beam system with friction”. *Proceedings of the IASTED Inter-*

- national Conference Identification, Control and Applications (ICA 2009)*. August 17-19, Honolulu, Hawaii, USA; 116–120.
- Sandoval J., Ortega R. and Kelly R. 2008. “Interconnection and damping passivity-based control of the pendubot”. *17th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*. Seoul, Korea; 7700–7704.
- Santibáñez V., Kelly R. and Sandoval J. 2005. “Control of the Inertia Wheel Pendulum by Bounded Torques”. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain, December 12-15; 8266–8270.
- Spong M. W. 1997. “Underactuated mechanical systems”. In B. Siciliano and K. P. Valavanis, editor, *Control Problems in Robotics and Automation*. Springer-Verlag, London, UK.
- Spong M. W. 1994. “The swing up control problem for the acrobot”. *IEEE Control Systems Magazine*. **15**(1):49–55.
- Takegaki M. & Arimoto S. 1981. “A new feedback Method for dynamic control of manipulators”. *Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. **103**:119–125.
- Van Der Schaft, A., 2000. “ $\mathcal{L}_2$ gain and passivity techniques in nonlinear control”. Springer-Verlag, London.
- Venkatraman A., Ortega R., Sarras I. and Van der Schaft A. 2010. “Speed observation and position feedback stabilization of partially linearizable mechanical systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **55**(5):1059–1074.
- Viola G., Ortega R., Banavar J., Acosta J. A., Astolfi A. 2007. “Total energy shaping control of mechanical systems: simplifying the matching equations via coordinate changes”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. **52**(6):1093–1099.