



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE  
BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS  
MARINAS

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES  
OCEANOLÓGICAS

**INFLUENCIA DE LAS  
INTERACCIONES NO LINEALES EN  
LA FORMA DEL ESPECTRO DE  
OLEAJE CERCANO AL EQUILIBRIO**

**TESIS**

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de:

**MAESTRO EN CIENCIAS EN OCEANOGRAFÍA COSTERA**

**PRESENTA:**

**Diego Perelló Reina**

Ensenada, B.C., México. Agosto, 2005

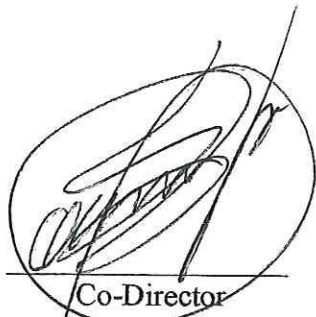
**“INFLUENCIA DE LAS INTERACCIONES NO  
LINEALES EN LA FORMA DEL ESPECTRO DE  
OLEAJE CERCANO AL EQUILIBRIO”**

---

TESIS DE MAESTRÍA EN CIENCIAS  
EN OCEANOGRAFÍA COSTERA  
QUE PRESENTA:

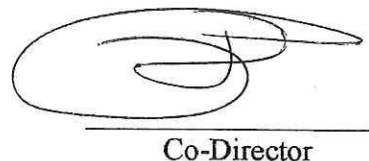
**Diego Perelló Reina**

Aprobada por:



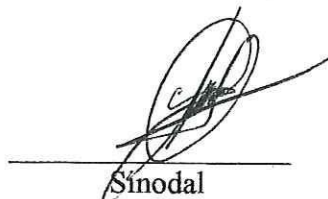
Co-Director

Dr. Francisco J. Ocampo Torres




Co-Director

Dr. Rafael Hernández Walls



Sinodal

Dr. Roberto Padilla Hernández



Sinodal

Dr. Reginaldo Durazo Arvisu

## INFLUENCIA DE LAS INTERACCIONES NO LINEALES EN LA FORMA DEL ESPECTRO DE OLAJE CERCANO AL EQUILIBRIO

---

### RESUMEN

En este trabajo se investiga el efecto e influencia de dos esquemas de solución para el término fuente que representa el efecto de las interacciones no lineales ( $S_{nl}$ ) en la forma del espectro de oleaje cercano al equilibrio temporal (en el contexto de un mar completamente desarrollado). Esto se logra a través de la simulación numérica de la ecuación de balance de densidad de acción del oleaje con el modelo SWAN, bajo tres escenarios con diferentes condiciones iniciales y de frontera. La comparación incluye un esquema discreto: DIA (Hasselmann, *et al.*, 1985) y uno exacto FD-RIAM (Hashimoto, *et al.*, 2002); se incluyen también corridas sin el término no lineal (el SWAN en modo de primera generación), con estos se calculan las diferencias de los espectros obtenidos con los esquemas, relativas al espectro calculado sin el efecto de las interacciones no lineales para observar desigualdades en los resultados: esto determina la influencia relativa de  $S_{nl}$  en el dominio espectral. El uso del esquema DIA introduce el doble de energía en la región de alta frecuencia del espectro que con el esquema FD-RIAM. Para la región del pico espectral, el esquema FD-RIAM introduce casi el triple de energía que el esquema DIA. Los resultados indican que la evolución temporal del espectro con una representación exacta al término  $S_{nl}$ , es menos dependiente de las condiciones iniciales que con una representación discreta de dicho término. Estas variaciones en la forma espectral tienen importantes implicaciones en los procesos que se llevan en la superficie del océano. Ejemplos de esto puede ser la intensificación de los flujos océano-atmósfera (de momento, de calor, de gases, etc.) y la modificación de la observación de la superficie del océano mediante microondas y/o radares de alta frecuencia.

## AGRADECIMIENTOS

Al comité de tesis por haber ayudado a la realización de este trabajo, por sus comentarios, apoyo y sugerencias.

Al CONACYT por haberme proporcionado la beca que me mantuvo durante mis estudios.

Al Dr. Francisco J. Ocampo Torres por haber confiado en mí, por haberme llevado a la reunión WISE 2004 y por haberme dado trabajo cuando se acabó la beca como parte del proyecto "Análisis del intercambio entre el océano y la atmósfera (intOA) mediante mediciones directas y observaciones remotas" (SEP-2003-C02-44718). Por haberme enseñado lo que me enseñó.

Al Dr. Roberto Padilla Hernández por haberme planteado preguntas importantes del trabajo y de la vida, por haberme aceptado en su casa durante mi visita a su lugar de trabajo, por haberme dejado trabajar con él y por haberme enseñado lo que me enseñó. A su familia que me aceptó con los brazos abiertos.

Al Dr. Antonio Trujillo Ortiz y al Dr. Rafael Hernández Walls por su invaluable colaboración en la sección de estadística, no lo hubiera logrado (incluido) sin ustedes.

Al grupo ROCO (Radares para la Observación de Corrientes y Olas) por las invaluable sesiones que tuvimos y en especial a la ROCola (grupo de oleaje de ROCO), ellos saben por qué.

Pero sobre todo agradezco y dedico esta tesis (y todo el esfuerzo que conlleva) a mi familia y a Laura que nunca dejaron de apoyarme todos estos años.

A todos, gracias...

## ÍNDICE

INFLUENCIA DE LAS INTERACCIONES NO LINEALES EN LA FORMA DEL ESPECTRO DE OLAJE CERCANO AL EQUILIBRIO .....	1
1. INTRODUCCIÓN .....	1
2. HIPÓTESIS Y OBJETIVO DEL TRABAJO .....	6
HIPÓTESIS.....	6
OBJETIVO GENERAL.....	6
3. ANTECEDENTES.....	7
3.2. Distribución direccional de la energía.....	11
3.3. “Mar completamente desarrollado” .....	14
3.4. Ecuación de balance de acción.....	18
3.5. Modelos numéricos .....	20
3.5.1. Modelos de primera generación .....	23
3.5.2. Modelos de segunda generación .....	24
3.5.3. Modelos de tercera generación.....	25
3.6. Interacciones no lineales: características y técnicas de solución .....	26
4. MODELO SWAN.....	38
4.1. Términos fuente: $S_{Tot}$ .....	41
4.1.1. Suministro de energía por el viento: $S_{in}$ .....	43
4.1.2. Disipación de energía: $S_{ds}$ .....	44
4.1.3. Interacciones no lineales: $S_{nl}$ .....	45
4.1.3.1. SWAN con esquema exacto para el cálculo de las interacciones no lineales.....	48
5. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS.....	53
5.1. Descripción de la malla computacional .....	55
5.2. Experimento 1: Crecimiento del oleaje limitado por la longitud del área de generación (fetch) y el tiempo durante el cual el viento actúa sobre la superficie del mar.....	56
5.3. Experimento 2: Cambio repentino de 180° en la dirección del viento.....	58
5.4. Experimento 3: Crecimiento del oleaje sobre oleaje libre que se propaga en dirección opuesta.....	60
6. DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS .....	62
6.1. Experimento 1: Crecimiento del oleaje limitado por la longitud del área de generación y el tiempo que sopla el viento sobre el mar.....	63
6.2. Cambio repentino de 180° en la dirección del viento. ....	78
6.3. Crecimiento del oleaje sobre oleaje libre que se propaga en dirección opuesta. Modificación al Experimento 2. ....	86
7. ANÁLISIS ESTADÍSTICO.....	94
8. DISCUSIÓN .....	104
9. CONCLUSIONES .....	114
10. BIBLIOGRAFÍA CITADA .....	115

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.	Espectro de densidad de energía, $E$ en función de la frecuencia, $f$ . Tomado de Resio y colaboradores, 2004. ....	8
Figura 2.	Contornos de densidad de energía en función de la frecuencia relativa $f/f_y$ y la dirección $\theta$ . Tomado de Young, 1999. ....	14
Figura 3.	Curvas de crecimiento del oleaje en función de la longitud del fetch y la duración. ....	17
Figura 4.	“Figura de ocho” que representa el espacio de interacción de la cuadrupleta. Tomada de Hasselmann, 1963b. ....	27
Figura 5.	Espectro de energía y firma característica del término fuente $S_{nl}$ . ....	30
Figura 6.	tres etapas en la evolución del espectro del oleaje después de una perturbación en él. ....	33
Figura 7.	Término $S_{nl}$ justo antes (línea sólida) y justo después (línea punteada) de la perturbación. ....	34
Figura 8.	Término fuente $S_{nl}$ en función de la frecuencia relativa, $f/f_y$ y la dirección $\theta$ . Tomado de Young, 1999. ....	35
Figura 9.	Configuración de las cuadrupletas de interacción en el DIA. ....	46
Figura 10.	Mapa de interacción resonante (“Figura de ocho”) en FD-RIAM. Tomada de Komatsu y Masuda, 1996. ....	49
Figura 11.	Malla computacional para los experimentos. ....	56
Figura 12.	Curvas de crecimiento del espectro de oleaje en función de la distancia obtenidas como resultado de $SWAN_{G1}$ (—), de $SWAN_{DIA}$ (···) y de $SWAN_{FD-RIAM}$ (---). Evolución de la densidad de energía (a) y de la frecuencia relacionada al pico espectral (b); datos obtenidos a la última hora de simulación. ....	63
Figura 13.	Curvas de crecimiento del espectro de oleaje en función del tiempo obtenidas como resultado de $SWAN_{G1}$ (—), de $SWAN_{DIA}$ (···) y de $SWAN_{FD-RIAM}$ (---). Evolución de la densidad de energía (a) y de la frecuencia relacionada al pico espectral (b); datos obtenidos al centro del área de generación (punto 5). ....	65
Figura 14.	Curvas de crecimiento de la energía del espectro en función del tiempo obtenidas como resultado de $SWAN_{G1}$ (—), de $SWAN_{DIA}$ (···) y de $SWAN_{FD-RIAM}$ (---). Evolución de la densidad de energía (a) y de la frecuencia relacionada al pico espectral (b); datos obtenidos al final del área de generación (punto 7). ....	66
Figura 15.	Distribución direccional de la energía del espectro en función de la longitud del fetch para el último tiempo (a), en función del tiempo para el punto 5 del área de generación (b) y para el punto 7 (c) obtenidas como resultado de $SWAN_{G1}$ (—), de $SWAN_{DIA}$ (···) y de $SWAN_{FD-RIAM}$ (---). ....	67
Figura 16.	Evolución temporal de $E(f)$ obtenida como resultado de $SWAN_{G1}$ (a), de $SWAN_{DIA}$ (b) y de $SWAN_{FD-RIAM}$ (c) para el punto 5. ....	70
Figura 17.	$E(\omega, \theta)$ para el último tiempo de simulación al final del área computacional bajo condiciones del Experimento 1, obtenidos como resultado de $SWAN_{G1}$ (a), de $SWAN_{DIA}$ (b) y de $SWAN_{FD-RIAM}$ (c). ....	72
Figura 18.	Término $S_{nl}(\omega, \theta)$ para el punto 5 asociado a los espectros obtenidos como resultado de $SWAN_{DIA}$ (a) y de $SWAN_{FD-RIAM}$ (b) bajo condiciones del Experimento 1. ....	74

- Figura 19.  $E(f)$  (a) y  $S_{nl}(f)$  (b) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>G1</sub> (—), de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 1. .... 75
- Figura 20.  $E(f)$  en escala logarítmica (a) y  $S_{nl}(f)$  en escala semilogx (b) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>G1</sub> (—), de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 1; se muestran diferentes líneas teóricas de equilibrio en cierto intervalo de frecuencias (azul  $=f^{-5}$ , roja  $=f^{-4}$ , amarilla  $=f^{-3.8}$ , verde  $=f^{-3.5}$ )..... 76
- Figura 21. Diferencia relativa en dos dimensiones asociado a los espectros obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub> (a) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (b) bajo condiciones del Experimento 1. .... 77
- Figura 22. Diferencia relativa del espectro en una dimensión (a) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 1 y resta de las diferencias (b). .... 77
- Figura 23. Estructura de  $E(\omega, \theta)$  para el último tiempo de simulación al centro del área computacional bajo condiciones del Experimento 2, obtenidos como resultado de SWAN<sub>G1</sub> (a), de SWAN<sub>DIA</sub> (b) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (c). .... 80
- Figura 24. Estructura de  $S_{nl}(\omega, \theta)$  para el centro del área de generación asociado a los espectros obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub> (a) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (b) bajo condiciones del Experimento 2. .... 81
- Figura 25.  $E(f)$  y su respectivo término  $S_{nl}(f)$  al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>G1</sub>(—), de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 2. .... 83
- Figura 26.  $E(f)$  en escala logarítmica (a) y  $S_{nl}(f)$  en escala semilogx (b) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>G1</sub> (—), de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 2; se muestran diferentes líneas teóricas de equilibrio en cierto intervalo de frecuencias (azul  $=f^{-5}$ , roja  $=f^{-4}$ , amarilla  $=f^{-3.8}$ , verde  $=f^{-3.5}$ )..... 84
- Figura 27. Diferencia relativa en dos dimensiones asociado a los espectros obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub> (a) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (b) bajo condiciones del Experimento 2. .... 84
- Figura 28. Diferencia relativa del espectro en una dimensión (a) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 2 y resta de las diferencias (b). .... 85
- Figura 29.  $E(\omega, \theta)$  para el último tiempo de simulación al centro del área computacional bajo condiciones del Experimento 3, obtenidos como resultado de SWAN<sub>G1</sub> (a), de SWAN<sub>DIA</sub> (b) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (c). .... 88
- Figura 30. Estructura de  $S_{nl}(\omega, \theta)$  para el centro del área de generación asociado a los espectros obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub>(a) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub>(b) bajo condiciones del Experimento 3. .... 89
- Figura 31. Forma de  $E(f)$  y de  $S(f)$  al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>G1</sub> (—), de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 3. .... 90
- Figura 32.  $E(f)$  en escala logarítmica (a) y  $S_{nl}(f)$  en escala semilogx (b) al cuarto día de simulación obtenidos bajo condiciones del Experimento 3; se muestran

	diferentes líneas teóricas de equilibrio en cierto intervalo de frecuencias (azul $=f^{-5}$ , roja $=f^{-4}$ , amarilla $=f^{-3.8}$ , verde $=f^{-3.5}$ ). .....	90
Figura 33.	Diferencia relativa en dos dimensiones asociado a los espectros obtenidos como resultado de SWAN <sub>DIA</sub> (a) y de SWAN <sub>FD-RIAM</sub> (b) bajo condiciones del Experimento 3. ....	91
Figura 34.	Diferencia relativa del espectro en una dimensión (a) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN <sub>DIA</sub> (··) y de SWAN <sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 3 y resta de las diferencias (b). ....	92
Figura 35.	Método gráfico de multinormalidad de acuerdo a Trujillo-Ortiz.....	95
	y Hernández-Walls 2002.....	95

# INFLUENCIA DE LAS INTERACCIONES NO LINEALES EN LA FORMA DEL ESPECTRO DE OLAJE CERCA AL EQUILIBRIO

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Una representación apropiada de las ondas oceánicas superficiales generadas por viento, llamadas de aquí en adelante *oleaje* o simplemente *olas*, es esencial para comprender el papel que juegan en otros procesos y fenómenos de la naturaleza. Para lograr una buena representación es necesario estudiar y entender los diferentes procesos de generación, propagación, modificación y disipación del oleaje. Esto para realizar predicciones adecuadas del comportamiento del fenómeno con la mejor precisión posible y a la resolución espacial y temporal deseada. Hoy día la importancia de ese conocimiento se vuelve cada vez más clara y trascendental, principalmente por la tendencia humana a realizar asentamientos o actividades cerca y sobre el ambiente oceánico y costero. En esto radica la mejor justificación para el estudio del oleaje.

Entre las aplicaciones más tangibles del conocimiento del oleaje están la ingeniería costera y oceánica, donde es vital el entendimiento del fenómeno y su evolución a través del tiempo y el espacio para el diseño de cualquier obra. Existen numerosos ejemplos en los que no se realizó un estudio de la climatología del oleaje para proyectar obras de protección o desarrollo costero. Muchos de estos resultan en desastres y pérdidas monetarias, e incluso humanas, de gran magnitud.

Otros ejemplos de la importancia del estudio del oleaje pueden ser la intensificación de los flujos (de momento, de calor, de CO<sub>2</sub> y otros gases traza) que ocurren entre el océano y la atmósfera ante la presencia de oleaje desde los inicios de su crecimiento<sup>1</sup>. La modificación del patrón de circulación superficial local, e incluso en ocasiones a mesoescala, debido a la deriva de Stokes; y todo lo que esto implica en la comunidad planctónica y al momento de un derrame petrolero. Y por supuesto la estrecha interacción que tiene con el sedimento en aguas someras y sobre todo en la zona de rompiente, modificando la línea de costa a través del tiempo y clasificando el material que la compone.

En un intento por aumentar la probabilidad de éxito de obras de gran magnitud, la *modelación numérica de oleaje* ha sido extensamente utilizada en la mayoría de los países industrializados para el diseño de estructuras costeras, el trazado de rutas de navegación e incluso en el diseño de barcos. La modelación numérica es la representación sintética de algo real que simula sus características principales y la manera en que evoluciona a través del tiempo y el espacio. Por esto un modelo numérico de simulación de oleaje puede ser utilizado para fines de investigación, al probar hipótesis acerca de la evolución y estado de la superficie del mar y su interacción con la atmósfera, la litósfera y la misma hidrósfera, con los diferentes procesos que ahí suceden.

---

<sup>1</sup> Este tema ha adquirido recientemente un gran interés debido a la estrecha relación entre el aumento de los gases invernadero en la atmósfera y el eminente cambio climático global.

Generalmente las olas son descritas mediante un espectro de densidad de energía  $E(f, \theta)$ , que representa la cantidad de energía en función de las diferentes frecuencias espectrales  $f$ , y direcciones de propagación  $\theta$ . La evolución de dicho espectro puede ser expresada en su forma más simple mediante la ecuación de balance espectral:

$$\frac{DE}{Dt} = S_{Tot}$$

donde la derivada total  $\frac{D}{Dt}$  incluye los efectos de propagación del oleaje y  $S_{Tot}$  representa los flujos de energía en el espectro, a lo que típicamente se les denomina términos fuente. En agua profunda los términos fuente se dividen en:  $S_{in}$  representa el suministro de energía al espectro por parte del viento,  $S_{ds}$  representa la disipación de la energía del espectro y  $S_{nl}$  representa la redistribución de la energía del espectro debido a las interacciones no lineales que ocurren entre las componentes del espectro. Esta ecuación se utiliza para simular oleaje numéricamente pues describe la evolución espectral como resultado de tres procesos físicos principales en aguas profundas: el suministro de energía por parte del viento, la disipación debido al rompimiento en aguas profundas y la redistribución de la energía dentro de las componentes del espectro debido a las interacciones (ola-ola) no lineales. Estos procesos son representados como términos fuente individuales e independientes, pero en realidad están interrelacionados durante la evolución del espectro.

Durante esa evolución, el espectro de oleaje tiende a mostrar un cierto equilibrio energético en al menos un intervalo de las frecuencias que lo componen. Desde hace tiempo se han propuesto y discutido diferentes funciones que describan la forma del espectro en ese intervalo de frecuencias que se encuentran en equilibrio. Las diferencias van desde dependencias de la evolución del oleaje a diferentes variables, hasta la obtención de coeficientes adimensionales o exponentes que ajusten mejor las funciones propuestas a la forma del espectro. La causa de este balance dinámico sigue en debate.

El equilibrio en este balance es alcanzado cuando la pérdida de energía es igualada a la ganancia, dejando como único responsable de la evolución del espectro al término asociado a las interacciones no lineales. Por lo que la forma que adquiere el espectro en la etapa cercana al equilibrio es en gran parte función de este flujo de energía debido a estas interacciones. Las interacciones no lineales son muy sensibles a la forma del espectro en la región de frecuencias altas, y a su vez el espectro es sensible a la forma del término  $S_{nl}$ . Para modelar apropiadamente la evolución del oleaje es importante conocer los efectos de diferentes representaciones para el término fuente no lineal y documentar las diferencias esenciales.

Típicamente se han seguido dos caminos para sobrepasar la gran dificultad de representar y calcular las interacciones no lineales entre componentes del espectro de densidad de energía del oleaje de manera numérica. Uno intenta reducir el tiempo de cómputo de los esquemas exactos, el otro trata de aumentar la exactitud de los cálculos con esquemas aproximados.

El lograr mejores representaciones del oleaje, permite aumentar el conocimiento de la respuesta del fenómeno a diferentes situaciones y su interacción con otros fenómenos y procesos físicos, geológicos, químicos y biológicos. Debido a esto, el papel que juegan hoy día los modelos de simulación numérica de oleaje en diferentes ramas de la ciencia está claro: se necesita saber qué pasa y qué va a pasar en la superficie del océano bajo condiciones dadas.

Este trabajo pretende desarrollar un avance en el entendimiento del mecanismo e influencia de las interacciones no lineales en la forma que adquiere el espectro de oleaje en la etapa cercana al equilibrio. El escenario bajo el cual se analiza el acoplamiento no lineal entre componentes del espectro de oleaje es el estado cercano al equilibrio espectral (en el contexto de un “mar completamente desarrollado”). Se realizan comparaciones de la forma de los espectros obtenidos al simular numéricamente su evolución con diferentes formulaciones para el término fuente que representa la transferencia no lineal de energía entre diferentes componentes del espectro. Los esquemas comprenden una solución exacta a la integral de colisión y una solución aproximada. Con lo que se prueba que la simulación de la evolución del espectro de oleaje con una solución exacta del término no lineal es decisiva para la forma que adquiere el espectro en la región que se encuentra en balance energético.

## **2. HIPÓTESIS Y OBJETIVO DEL TRABAJO**

### HIPÓTESIS

Las interacciones no lineales entre componentes del espectro de oleaje influyen decisivamente en la forma espectral que se alcanza en la etapa cercana al equilibrio entre el suministro y la disipación de energía.

### OBJETIVO GENERAL

Determinar la influencia de las interacciones no lineales en la forma espectral que se alcanza en la etapa cercana al equilibrio mediante la simulación numérica.

### OBJETIVO PARTICULAR

Cuantificar la diferencia en la forma del espectro de densidad de energía cercano al equilibrio al considerarse dos esquemas numéricos de las interacciones no lineales (uno completo y otro aproximado) en un modelo para la predicción del oleaje.

### **3. ANTECEDENTES**

En esta sección se describen los elementos necesarios para establecer un preámbulo a este trabajo: el de la comparación de resultados al utilizar dos esquemas para el cálculo de la contribución de las interacciones no lineales en la evolución del espectro. En esta sección se tocan temas que abarcan la descripción del espectro en sus diferentes representaciones, la modelación numérica de oleaje y sus diferentes clasificaciones. Así como una descripción de la ecuación que se resuelve para representar la evolución del espectro de oleaje a través del tiempo y el espacio y una descripción detallada del término que representa la transferencia no lineal de energía entre componentes del espectro. Se presenta también un acercamiento a la discusión existente en torno a la forma que mejor describa al espectro de oleaje y los diferentes valores de la potencia a la cual el espectro es proporcional en el intervalo de equilibrio y a la existencia de un estado completamente desarrollado adquirido por el oleaje en algún momento.

#### **3.1. El espectro de densidad de energía y el intervalo de equilibrio.**

Las observaciones de oleaje generado por viento realizadas tanto en campo como en laboratorio, confirman que el espectro unidimensional de densidad de energía del oleaje  $E(f)$ , en función de la frecuencia  $f$ , presenta un pico único bien definido con frecuencia  $f_p$ , y dos caras: una en la que la energía disminuye rápidamente de la frecuencia asociada al pico espectral hacia frecuencias más bajas, y otra en la que la energía disminuye de manera considerablemente más lenta hacia frecuencias mayores.

Resio y colaboradores (2004) propusieron una partición conceptual del espectro de oleaje en cuatro regiones con el propósito de facilitar el estudio de los flujos de energía entre diferentes zonas del espectro. En la Figura 1 se presentan las cuatro diferentes regiones caracterizadas esencialmente en términos de la cantidad de energía que fluye entre las diferentes frecuencias que componen el espectro. La región I representa la zona del pico espectral, la cual encuentra su límite superior en la frecuencia  $f_0$ , frecuencia en la que los flujos netos de energía son cero. La región II representa la banda transicional entre la región I y la III y tiene como límite superior la frecuencia  $f_{eq}$ . La región III representa la región del intervalo de equilibrio con límite superior  $f_d$ . En estas dos últimas regiones, el flujo neto de energía proviene de frecuencias mucho más altas que la frecuencia relacionada al pico espectral. La región IV representa la parte del espectro en la que la energía proveniente de los flujos de las regiones II y III, es perdida finalmente debido a procesos disipativos.

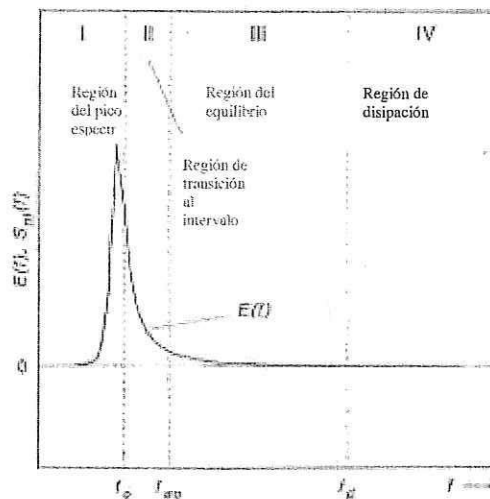


Figura 1. Espectro de densidad de energía,  $E$  en función de la frecuencia,  $f$ . Tomado de Resio y colaboradores, 2004.

La estructura detallada del espectro es el resultado del balance entre los términos fuente considerados<sup>2</sup>. En particular en la región de frecuencias altas ( $f > f_p$ ), las interacciones no lineales parecen tener una gran influencia sobre la forma del espectro, llevándolo a adoptar una forma del tipo  $f^{-n}$  (Banner y Young, 1994). Se supone que al menos en este intervalo de frecuencias del espectro, los términos fuente de suministro y disipación de energía en el espectro de oleaje se encuentran en balance energético y su sumatoria debe ser cero. A esta región del espectro se le denomina intervalo o región de equilibrio (Phillips, 1958; Zakharov y Filonenko, 1966; Kitaigorodskii, 1983; Liu, 1989; Resio y Perrie, 1989). Para este intervalo de frecuencias en las que la energía contenida en ellas está en equilibrio dinámico se han propuesto varias formas del espectro de oleaje, entre las que se encuentran como las más históricamente aceptadas la de Phillips (1958) y la de Toba (1973).

Phillips (1958) supuso que la energía del espectro dentro de este intervalo de frecuencias, estaba controlada únicamente por la gravedad ( $g$ ) y mediante un análisis dimensional basado en la idea de un intervalo de equilibrio para el espectro en frecuencia, concluyó que en esa región el espectro es de la forma  $E \propto g^2 f^{-5}$ . Toba (1973) argumentó que también la velocidad de fricción del viento ( $u_*$ ) era importante en esta región del espectro, y mediante un análisis dimensional llegó a la forma  $E \propto g u_*^3 f^{-4}$ .

---

<sup>2</sup> Términos fuente ( $S_{Tot}$ ): sumatoria de procesos físicos independientes que transforman el oleaje a lo largo de su "vida": generación ( $S_{in}$ ), disipación ( $S_{ds}$ ) e interacciones no lineales ( $S_{nl}$ ). Por lo tanto:  $S_{Tot} = S_{in} + S_{ds} + S_{nl}$ . Más adelante se hace una descripción detallada de estos términos.

Liu (1989) analizó más de 2200 espectros obtenidos por boyas en los Grandes Lagos, encontrando una gran variedad de valores para  $n$ . Aunque la mayoría se agrupó entre 3.5 y 5.5, se concluyó que para efectos prácticos era más útil una representación de  $f^{-4}$ , pero que el valor exacto, o incluso el hecho de que existiese o no una única pendiente para el intervalo de equilibrio en ese intervalo de frecuencias del espectro, seguía siendo elusivo y tendría que ser sustentado satisfactoriamente.

Banner (1990) especuló sobre la existencia de un intervalo de frecuencias en equilibrio con energía en la dirección del viento generador dentro del espectro direccional (o bidimensional: en frecuencia y dirección). Argumentó que el valor de  $n$  depende de la estructura direccional detallada del espectro, pues el espectro unidimensional de densidad de energía es la integral en dirección del espectro bidimensional. Además las componentes de frecuencias altas son afectadas por el efecto Doppler provocado por las componentes de frecuencias bajas. El resultado de este efecto es cambiar el valor del exponente  $n$ , por lo que la existencia de un valor universal para dicho parámetro es cuestionable.

Aún cuando queda claro que la evidencia observacional apoya una forma del espectro proporcional a  $f^{-n}$  para la región de altas frecuencias del espectro (Alves *et al.*, 2003), los argumentos del análisis dimensional que sostienen valores tanto de  $n = 4$  como de  $n = 5$ , no tienen ninguna relevancia en cuanto a la física que controla la forma en esta región del espectro (Phillips, 1985; Young, 1999; Resio, 1999).

### 3.2. Distribución direccional de la energía.

El entendimiento empírico del desarrollo del espectro unidimensional es resultado de un gran número de mediciones (Hasselmann *et al.*, 1973; Komen *et al.*, 1984). Pero en el caso del espectro direccional o bidimensional, se tiene menos tiempo estudiándolo y por consiguiente está menos entendido. Esto es debido a la introducción de un concepto de direccionalidad en el espectro para su descripción, lo cual demanda un grado de desarrollo tecnológico significativamente más alto (por parte de los sistemas de medición) y un aumento considerable en la demanda computacional necesaria para realizar simulaciones numéricas de su evolución. Como resultado de esto se tenía una base de datos experimentales y explicaciones teóricas, hasta cierto punto incompletas (Young, Verhagen y Banner, 1995).

Frecuentemente el espectro direccional de densidad de energía  $E(f, \theta)$ , en función de la frecuencia  $f$  y la dirección de propagación  $\theta$ , es representado, siguiendo a Longuet-Higgins y colaboradores (1963), en términos del espectro unidimensional de energía,  $E(f)$  y una función de distribución direccional de la energía del espectro,  $D(f, \theta)$ , por lo que:

$$E(f, \theta) = E(f) D(f, \theta), \quad (3.1)$$

donde  $D(f, \theta)$  debe satisfacer la condición:

$$\int_0^{2\pi} D(f, \theta) d\theta = 1. \quad (3.2)$$

En la práctica, el espectro direccional del oleaje es discretizado en bandas de frecuencia y dirección para su representación numérica. Para una representación adecuada se necesitan al menos 30 componentes direccionales por cada banda de frecuencia a considerar. Debido a que las técnicas comunes de medición sólo proporcionan un pequeño número de cantidades con las cuales determinar dichas componentes direccionales (tres en el caso de boyas y  $n$  en el caso de un arreglo de  $n$  cables), el problema se encuentra indeterminado, de ahí que las técnicas analíticas sólo puedan proveer estimaciones del espectro direccional real (Young, 1994).

Por lo general se reconocen tres fuentes principales de datos de la distribución direccional de la energía del oleaje (Young *et al.*, 1995): La serie de datos obtenidos por Mitsuyasu y colaboradores (1975) y los de Hasselmann y colaboradores (1980) que utilizaron boyas con acelerómetros. Y los obtenidos por Donelan y colaboradores (1985) que utilizaron un arreglo espacial de 14 cables.

Con base en el análisis de sus datos, Mitsuyasu y colaboradores (1975) y Hasselmann y colaboradores (1980) propusieron una dependencia de la direccionalidad del oleaje al viento de la forma:  $\cos^{2n}(\theta - \theta_m)$ , con diferentes valores para  $n$ . En cambio Donelan y colaboradores (1985) argumentaron no haber encontrado dependencia alguna con el

inverso de la edad de ola, por lo que la forma de Longuet-Higgins no representaba bien sus datos. Ellos propusieron adoptar la forma:  $sech^2 \beta \theta$ . Aun cuando sean diferentes, ambas representaciones coinciden en que sus coeficientes  $n$  y  $\beta$  son parámetros que dependen de  $f$  y determinan la tasa de decaimiento de la energía del oleaje con el aumento de  $\theta$ .

En una comparación detallada de las diferentes técnicas utilizadas para obtener mediciones del espectro direccional, se concluyó que los arreglos espaciales de cables tienen un poder de resolución significativamente mayor, como era de esperarse. Por lo que los datos de las boyas presentan una dispersión direccional mucho más amplia. No obstante, las tendencias observadas en ambos métodos son consistentes: Las funciones de direccionalidad son unimodales, decaen con el incremento del ángulo al viento y la mayor parte de la energía se propaga en la misma dirección del viento generador. Las series de datos demuestran que existe una menor dispersión direccional en la región del pico espectral, la cual aumenta hacia frecuencias más altas y más bajas que  $f_p$  (Young *et al.*, 1995).

La evidencia observacional muestra que el oleaje generado por el viento no es unidireccional y que su espectro en frecuencia y dirección, mostrado en la Figura 2, presenta una distribución direccional bimodal para componentes de mayor frecuencia que la frecuencia relacionada al pico espectral, sin embargo la mayor energía se encuentra centrada en la dirección del viento predominante (Hwang y Wang, 2001). La

Figura 2 muestra un ejemplo de un espectro direccional contornos con niveles mostrados en la barra de color que representan los exponentes de cada nivel de densidad de energía.

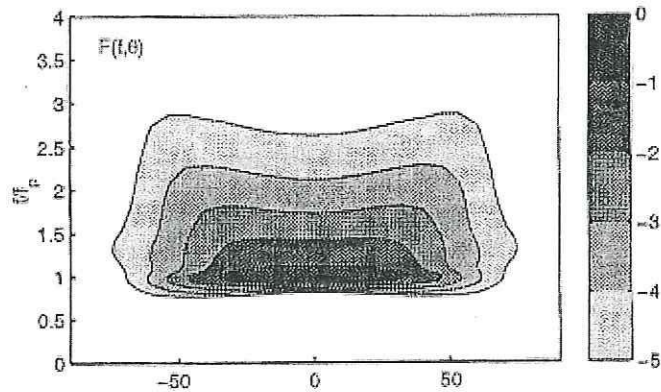


Figura 2. Contornos de densidad de energía en función de la frecuencia relativa  $f/f_p$  y la dirección  $\theta$ . Tomado de Young, 1999.

### 3.3. “Mar completamente desarrollado”

El crecimiento del oleaje básicamente es función de la rapidez y dirección del viento y de la longitud del área sobre la cual sopla ese viento, pero sobre todo del tiempo que permanezcan las condiciones sin cambiar. Si el viento es lo suficientemente homogéneo y constante en un área dada, el oleaje seguirá creciendo hasta alcanzar ciertos valores de saturación de energía en función de la frecuencia. Esto sucede cuando las olas ya no son capaces de acumular más energía suministrada por el viento, entonces se presenta un “mar completamente desarrollado”.

En realidad existe un conflicto en el concepto y medición de un “mar completamente desarrollado”. En primer lugar porque es necesario acotar el número de variables que influyen significativamente en el crecimiento y desarrollo del campo de oleaje (como son

influyen significativamente en el crecimiento y desarrollo del campo de oleaje (como son la dirección, rapidez y variaciones del viento, la profundidad y la presencia o ausencia y configuración de la línea de costa). Y en segundo lugar por la gran variedad de escenarios que presenta la combinación de las variables involucradas. El Grupo SWAMP (1985) reconoció y exploró dos casos ideales para el estudio de la saturación espectral de energía: El crecimiento de oleaje limitado por la longitud del fetch<sup>3</sup> (originalmente descrito por Sverdrup y Munk en 1947) y el crecimiento limitado por la duración del viento que genera ese oleaje (originalmente descrito por Wiegel en 1961). Ambos casos reconocen como saturación espectral de energía a la igualdad entre el suministro y la disipación de la energía contenida por el oleaje.

El caso ideal de crecimiento limitado por *fetch* se presenta cuando un viento de magnitud y dirección constante sopla de manera perpendicular a una frontera cerrada, representada por una larga línea de costa derecha. En este caso se supone que la profundidad es mucho mayor a la longitud de onda de la ola y que el viento sopla de manera homogénea y constante en tiempo y espacio, lo suficiente como para que el espectro alcance el estado estacionario. Bajo esta situación el campo de oleaje evoluciona únicamente como función de la distancia hacia la costa o longitud del fetch.

En el caso de crecimiento de oleaje limitado por *duración* se supone que las fronteras se encuentran lo suficientemente lejos como para que no haya limitación por la longitud del

---

<sup>3</sup> Fetch: longitud del área de agua sobre la cual sopla un viento constante en dirección y rapidez que genera oleaje.

fetch. El inicio del desarrollo del campo de oleaje se considera a partir de un mar en calma. También se supone que la profundidad es infinita y que el viento sopla de manera homogénea y constante (en magnitud y dirección) sobre toda el área de generación. Esto implica que el campo de oleaje resultante también será espacialmente homogéneo y tan sólo función del tiempo que perdure soplando el viento o *duración* del viento. La probabilidad de encontrar campos de oleaje limitados por la duración del viento aumenta a mayor longitud del fetch.

Se podría llegar a pensar que no son raras las situaciones en las que el viento sopla de manera perpendicular a la costa lo suficientemente constante<sup>4</sup>. Sin embargo estos casos de crecimiento de oleaje limitados por la longitud del fetch están poco documentados y aún menos los casos de crecimiento limitado por duración (Young, 1999).

La Figura 3 muestra las curvas de crecimiento del oleaje. Estas curvas representan el aumento de la energía del oleaje y corrimiento de la frecuencia al aumentar la duración o la longitud del fetch. Un “mar completamente desarrollado” es alcanzado en términos espectrales en los límites asintóticos (definidos por Pierson y Moskowitz, 1964) de las curvas de crecimiento. Estos límites indican la interrupción del crecimiento posterior del oleaje, y están basados en mediciones directas del campo de oleaje.

---

<sup>4</sup> Como ocurre comúnmente durante un evento Tehuano, un Santa Ana o un Monzón de la India, por ejemplo.

En términos de la ecuación que describe el estado del mar, el equilibrio espectral se alcanza una vez que la suma de los términos fuente es cero. Esto es, al estar igualados el suministro de energía al espectro por parte del viento y la disipación de esa energía por parte de la rompiente en agua profunda. Dejando a las interacciones no lineales como únicas responsables de la evolución del espectro (ya que éstas no suman ni restan energía al espectro, sólo la redistribuyen entre las diferentes frecuencias que lo componen).

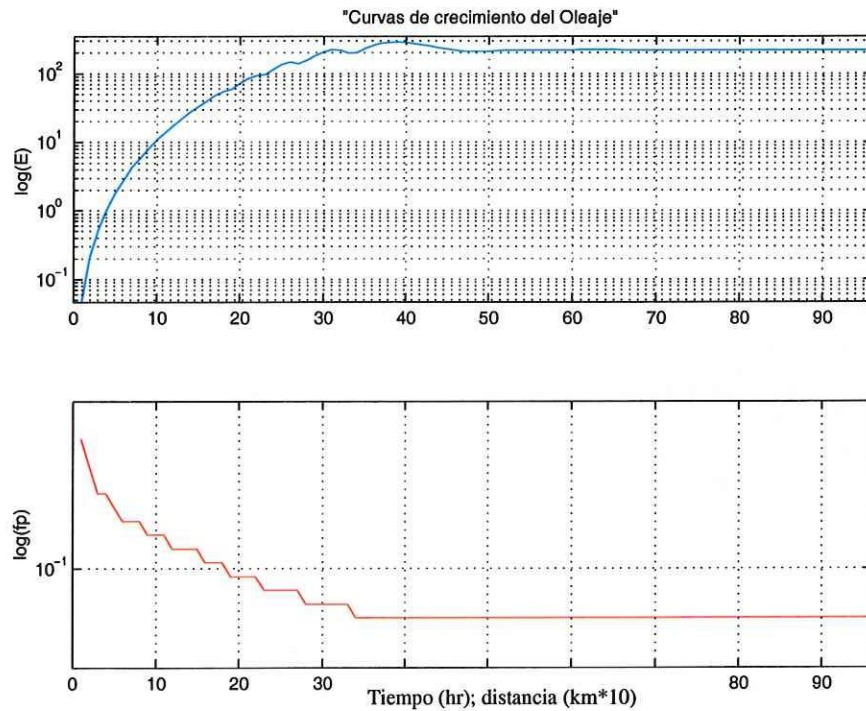


Figura 3. Curvas de crecimiento del oleaje en función de la longitud del fetch y la duración.

### 3.4. Ecuación de balance de acción

Actualmente, los modelos más populares que predicen la evolución espectral del oleaje lo hacen tanto temporal como espacialmente resolviendo la ecuación de balance de acción (Padilla-Hernández, 2002). Esta ecuación incluye los procesos de propagación del oleaje suponiendo que el cambio del espectro está dado en función de cinco diferentes cantidades o dimensiones: el tiempo  $t$ , el espacio físico en dirección  $x$ - $y$ , y las dimensiones espectrales (frecuencia relativa,  $\sigma$  y dirección,  $\theta$ ). La propagación y la evolución del oleaje son igualadas a los procesos de generación, disipación y transferencia no lineal de energía entre las componentes del espectro. A estos procesos se les conoce como términos fuente.

La ecuación de balance de densidad de acción espectral en coordenadas cartesianas es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \frac{\partial}{\partial x} C_x N + \frac{\partial}{\partial y} C_y N + \frac{\partial}{\partial \sigma} C_\sigma N + \frac{\partial}{\partial \theta} C_\theta N = \frac{S_{Tot}}{\sigma} \quad (3.3)$$

donde  $N = N(\sigma, \theta) = E(\sigma, \theta) / \sigma$  es el espectro de densidad de acción del oleaje en función de la frecuencia relativa,  $\sigma$  y la dirección de propagación del oleaje,  $\theta$ . El primer término representa la razón de cambio del espectro a través del tiempo. El segundo y tercer términos representan la razón de cambio del espectro en el espacio geográfico, tanto en

la dirección  $x$  y velocidad de propagación  $C_x$ , como en dirección  $y$  y velocidad de propagación  $C_y$ . El cuarto término de la ecuación representa los efectos del cambio de la frecuencia relativa, con velocidad de propagación  $C_\sigma$ , debido a variaciones en la configuración de la batimetría y la corriente. El quinto término representa la refracción (cambio en la dirección de la energía tomada como una línea ortogonal a la cresta de la ola) inducida tanto por la corriente como por variaciones en el fondo. El término  $S_{Tot}$  representa a los términos fuente, que como se había mencionado anteriormente, es la sumatoria de procesos independientes que dan, quitan o redistribuyen la energía del espectro. Por lo que de manera general y para el caso de aguas profundas:

$$S_{Tot} = S_{in} + S_{ds} + S_{nl}, \quad (3.4)$$

donde:  $S_{in}$  representa la transferencia de energía del viento al campo de oleaje.  $S_{ds}$  representa la disipación de la energía del oleaje por rompimiento en aguas profundas o "crestas blancas".  $S_{nl}$  es el término fuente que representa la redistribución no lineal conservativa de la energía que se lleva a cabo entre diferentes componentes del espectro. La sofisticación en la representación de estos términos puede variar significativamente, haciendo la diferencia entre un modelo numérico y otro.

En los últimos años estos términos fuente han adquirido gran importancia para comprender la evolución del oleaje, por lo que reciben cada vez más atención. Sobre todo el término de transferencia no lineal juega un papel fundamental en la forma y

evolución del espectro. Por esto, cualquier avance en el entendimiento de este término y la posibilidad de calcularlo con precisión son fundamentales.

### 3.5. Modelos numéricos

La modelación numérica es una herramienta comúnmente utilizada para simular el espectro de oleaje y su evolución a través del tiempo y el espacio. El realizar predicciones prácticas de oleaje involucra una mezcla de diversos elementos. El conocimiento del estado actual del oleaje generado tanto localmente como a distancia. Las variaciones temporales y espaciales de los campos de viento y corriente. La irregularidad del fondo batimétrico y la configuración de las costas (Young, 1999). Pero sobre todo de la cantidad de recursos con los que se cuente para lograrlo, ya que es necesario contar con una serie de aparatos, equipos y sistemas altamente especializados que brinden, procesen y analicen la información necesaria para producir predicciones confiables. Predecir oleaje bajo estas condiciones no es tarea fácil.

Los modelos numéricos se han clasificado por la manera en que están formulados en modelos *resueltos en fase*, los cuales predicen la amplitud y fase de olas individuales y modelos *promediados en fase*, los cuales predicen cantidades como el espectro o sus propiedades integradas, sin tener información de la fase (Young, 1999).

Los modelos *resueltos en fase* están basados ya sea en un acercamiento Hamiltoniano, de Boussinesq o en la ecuación de pendiente suave. Estos modelos son generalmente

usados bajo condiciones de oleaje rápidamente cambiantes (en el orden de una longitud de onda o menos), o sea cuando el promedio de las propiedades de la ola varían rápidamente (Ris, 1997). Con este tipo de modelos se reconstruye la elevación de la superficie del mar en tiempo y espacio con una buena precisión, pero es muy difícil representar el proceso de generación por el viento. Además son “computacionalmente muy demandantes, por lo que sólo deben usarse cuando sean estrictamente requeridos” (Battjes, 1994).

La demanda computacional de este tipo de modelos se debe a la resolución temporal y espacial que requieren para hacer sus cálculos; que son del orden de una fracción de período y longitud de onda respectivamente. Esto hace que resulte impráctico utilizar modelos resueltos en fase en problemas de oleaje con escalas que van del orden de decenas a incluso cientos de longitudes de onda. No obstante, también se debe decir que en este tipo de modelos si es posible calcular los efectos de difracción del oleaje, y tanto en el acercamiento Hamiltoniano como en el de Bousinesq, las interacciones no lineales son incorporadas implícitamente en los cálculos.

En los modelos *promediados en fase* se supone que las propiedades del oleaje varían en escala de algunas longitudes de onda (más lentamente que en los modelos resueltos en fase) y la superficie del mar es descrita en función del espectro de densidad de energía del oleaje. En estos modelos la cinemática del oleaje puede ser descrita de manera Lagrangeana (siguiendo la trayectoria de rayos individuales perpendiculares a la

propagación de la ola), de forma Euleriana (calculando la evolución del campo de oleaje en una malla bidimensional) o mediante una combinación de ambos.

La desventaja de utilizar un punto de vista Lagrangeano es que al propagar la energía de cada componente a lo largo de rayos, independientemente de otras componentes, el cálculo de las interacciones no lineales se hace muy ineficiente. Además no es raro el caso en el que se presentan patrones de rayos caóticos (sobre-posición) que hacen difícil su interpretación.

En modelos con un punto de vista Euleriano, los cálculos son formulados sobre una malla computacional, en donde cada punto de la malla contiene toda la información del espectro de oleaje. El hacer esto evita el problema de patrones de rayos caóticos. Además, los efectos de propagación, generación, disipación e interacciones no lineales pueden ser incluidos eficientemente en los cálculos de manera explícita.

Los modelos numéricos de oleaje actualmente más usados (sobre todo operacionalmente) se basan en resolver la ecuación de balance de densidad de acción, la cual integra los procesos de generación, propagación y disipación del oleaje. No obstante, la sofisticación en la representación de dicha ecuación puede variar significativamente, haciendo la diferencia entre un modelo y otro. Dependiendo de la presencia y el nivel de parametrización en el proceso de interacciones no lineales se tienen modelos de primera, segunda o tercera generación (Grupo WAMDI, 1988).

### 3.5.1. Modelos de primera generación

Los modelos de primera generación fueron desarrollados antes del planteamiento de la teoría de las interacciones no lineales entre olas. Por lo que en este tipo de modelos las interacciones no lineales no son incluidas en los cálculos, de manera que la evolución del espectro es resultado únicamente del balance entre  $S_{in}$  y  $S_{ds}$ . Además a lo largo de la evolución, cada componente del espectro crece independientemente hasta llegar a un límite de saturación que depende de la frecuencia. Estos límites están basados en mediciones directas del crecimiento del oleaje; usualmente se utiliza el espectro de Pierson-Moskowitz (1964) como forma preestablecida del espectro con una distribución direccional estándar y con un límite superior de saturación predeterminado (Phillips, 1958). Debido a esta limitación, estos modelos tampoco son capaces de representar el fenómeno de sobresaturación, el cual se presenta en ocasiones durante las primeras etapas del desarrollo del oleaje cuando el pico espectral presenta un valor de energía mayor al valor de saturación correspondiente a esa frecuencia, por lo que se subestiman los valores de energía por banda de frecuencia del espectro en un momento dado (Barnett y Wilkerson, 1967).

Después del proyecto JONSWAP (Hasselmann, *et al.*, 1973), que trató con problemas relacionados al crecimiento del oleaje, se volvió evidente que las interacciones no lineales entre componentes del espectro debían de ser tomadas en cuenta para describir apropiadamente el crecimiento del oleaje.

### 3.5.2. Modelos de segunda generación

Una vez que quedó clara la importancia de las interacciones no lineales en la evolución del espectro se empezaron a desarrollar los modelos de *segunda generación*. Snyder y colaboradores (1981) se basaron en los trabajos experimentales de Mitsuyasu (1968) y Hasselmann y colaboradores (1973) para tratar de solucionar el problema del corrimiento de la frecuencia del pico y la cantidad de energía que entra del viento al campo de oleaje. Usando una parametrización del término no lineal (de flexibilidad limitada) y el espectro JONSWAP como límite superior de crecimiento del espectro en lugar del espectro de Phillips (1958). Con esto se logró reproducir el fenómeno de sobresaturación. Sin embargo, este tipo de modelos no simulan apropiadamente el rápido crecimiento de oleaje bajo condiciones cambiantes del campo de viento (por ejemplo durante huracanes, ciclones de pequeña escala o frentes atmosféricos). De igual manera se tienen dificultades en el tratamiento de la transición de oleaje local a oleaje lejano. Para el caso de los modelos de segunda generación, los problemas más importantes eran numéricos más que físicos (Young, 1999).

Algunas de las conclusiones obtenidas del trabajo del Grupo SWAMP (1985) en el que se comparó el desempeño de varios modelos tanto de primera como de segunda generación, fueron que los modelos poseían ciertos inconvenientes básicos y que perdían credibilidad en casos de condiciones extremas, particularmente bajo condiciones de viento cambiantes. El conjunto de esfuerzos para desarrollar un modelo que no tuviera los problemas de los modelos comparados y en el que se incorpora el efecto de las

interacciones no lineales resolviendo una ecuación analítica, no mediante su parametrización (Ris, 1997). Esto dio como resultado la tercera generación de modelos numéricos.

### 3.5.3. Modelos de tercera generación

En los modelos de tercera generación el problema del crecimiento del espectro se resuelve mediante la integración de la ecuación de balance de acción sin restricciones en la forma misma del espectro y resolviendo explícitamente las interacciones no lineales de manera exacta. Al incorporar de forma completa las interacciones no lineales, se concluyó que para aplicaciones prácticas requería demasiado tiempo de cómputo (Hasselmann y Hasselmann, 1981). Esto llevó al desarrollo de la aproximación por interacción discreta (DIA, por sus siglas en inglés) propuesto por Hasselmann y Hasselmann (1985) y en la que las interacciones son calculadas con tan sólo un número restringido de componentes del espectro. Esto ha demostrado ser hasta cierto punto una alternativa eficiente y computacionalmente viable en términos operacionales.

Hoy día se considera al modelo WAM (siglas de Wave Modelling en inglés) del Grupo WAMDI (1988) como el modelo prototipo de oleaje de tercera generación (Padilla-Hernández, 2002), ya que el concepto de este modelo es usado en varios otros modelos de tercera generación (*i.e.* WAVEWATCH, Tolman, 1991; PHIDAS, Van Vledder et al, 1994; TOMOWAC, Benoit et al, 1996; SWAN, Booij et al, 1999).

### 3.6. Interacciones no lineales: características y técnicas de solución

La aportación que tienen las interacciones no lineales en la evolución del espectro fue observada por primera vez por Phillips (1960). Él encontró que existe transferencia no lineal de energía entre diferentes componentes del espectro. Sin embargo fue Hasselmann (1962) quien describió por primera vez la interacción no lineal entre esas componentes mediante la integral de Boltzmann. Hasselmann (1962 y 1963a,b) encontró intercambio de energía entre juegos de cuatro componentes o cuádrupletas en términos de su densidad de acción ( $\eta$ ), al suponer que las olas son casi lineales. Luego aplicó una técnica de perturbación para determinar la razón de cambio de la densidad de acción  $\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial t}\right)$  a un número de onda dado:  $k_1$ , debido a todas las cuádrupletas que involucren  $k_1$  y que cumplan las siguientes condiciones de resonancia:

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4 \quad (3.5)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (3.6)$$

Estas condiciones definen tanto las frecuencias ( $\omega$ ) de las componentes espectrales que pueden interactuar no linealmente, como la dirección de propagación de dichas componentes. Y debido a que la interacción puede ser entre componentes de diferente frecuencia y entre componentes que se propaguen en diferentes direcciones, todas las componentes del espectro son candidatos para formar parte de la cuádrupleta de

números de onda interactuantes, siempre y cuando se satisfagan las condiciones de resonancia (3.5) y (3.6).

La Figura 4 muestra el espacio de interacción de los números de onda de la cuadrupleta propuesto por Hasselmann (1963b) de acuerdo a las ideas de Longuet-Higgins. A esta figura se le conoce como “figura de ocho” por los contornos de interacción resonante que forman los valores de  $\gamma$ . Estos contornos aseguran que al fijar los valores de dos de los vectores que forman la cuadrupleta sobre alguno de los contornos, los otros dos vectores pueden adquirir cualquier valor sobre dicho contorno y se cumplen las condiciones de resonancia.

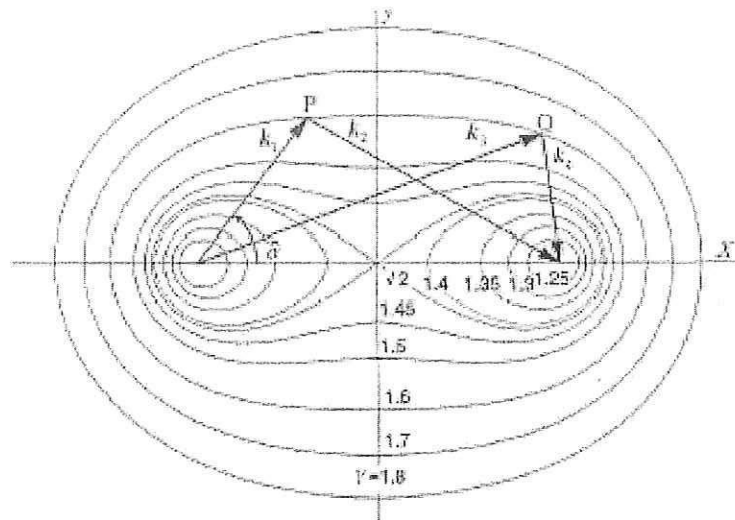


Figura 4. “Figura de ocho” que representa el espacio de interacción de la cuadrupleta.  
Tomada de Hasselmann, 1963b.

Trabajando de manera independiente, Zakharov (1968) utilizó un acercamiento Hamiltoniano para obtener el mismo resultado que Hasselmann: La razón de cambio de

la densidad de acción del oleaje debido a la interacción no lineal de cuádrupletas, está dada por:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \iiint G(k_1, k_2, k_3, k_4) \times \delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \times \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \times (\eta_1 \eta_3 (\eta_4 - \eta_2) + \eta_2 \eta_4 (\eta_3 - \eta_1)) dk_2 dk_3 dk_4 \quad (3.7)$$

donde  $\eta_j(k_j)$  representa la densidad de acción del número de onda  $k_j$ ;  $G$  es un coeficiente de acoplamiento (no lineal) complicado (Herterich y Hasselmann, 1980; Van Vledder, 1990) y la función  $\delta$  (delta de Dirac) asegura que la contribución a la integral sólo ocurre con cuádrupletas que satisfagan las condiciones de resonancia (3.5) y (3.6). Hay que hacer notar que la ecuación anterior esta expresada en notación vectorial, por lo que en realidad se tiene que resolver una integral séxtuple. Esto lo hace muy costosa en memoria y tiempo de cómputo.

La ecuación (3.7) es conocida como la integral de Boltzmann para ondas superficiales generadas por viento. Es análoga a expresiones usadas para describir la tasa de cambio de la distribución de densidad en un sistema de partículas que interactúan entre si. La transferencia de energía asociada a las interacciones no lineales representada por esta ecuación, conserva la energía y momento totales del campo de oleaje. La densidad de acción también se conserva a consecuencia de la simetría de las condiciones de resonancia (3.5) y (3.6). Por lo tanto la tasa de cambio de la densidad de acción es igual para todos los números de onda de la cuádrupleta (Young, 1999). Esto es:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = -\frac{\partial \eta_3}{\partial t} = -\frac{\partial \eta_4}{\partial t}. \quad (3.8).$$

Este resultado es conocido como la propiedad de balance detallado y muestra que el valor absoluto del cambio en la densidad de acción,  $|\Delta \eta_j|$  es igual para todas las componentes en un conjunto de números de onda resonantes o cuadrupleta.

La ecuación (3.7) estima la tasa de cambio de la densidad de acción media, definida como el promedio de un conjunto de estados del mar representativos. Al no llevar un registro detallado de la amplitud y fase de cada número de onda, la información que se tiene del estado del mar puede degradarse con el paso del tiempo. Como resultado la entropía (o desorden) de la solución debería aumentar con el tiempo, o por lo menos permanecer constante. A pesar de esto, al ser aplicada a la evolución de un espectro de oleaje típico (por ejemplo uno obtenido a partir de observaciones directas), las no-linealidades producen un pico angosto en las frecuencias bajas, por lo que aparentemente están produciendo orden. El efecto de las interacciones no lineales es contrario a la intuición (Hasselmann *et al.*, 1973).

La Figura 5 muestra la firma característica del término fuente  $S_{nl}$  (calculado de manera exacta) sobrepuesta en la gráfica de un espectro en frecuencia de densidad de energía. Se observa que la línea que representa a  $S_{nl}$  presenta un máximo positivo, angosto y bien definido cercano al pico espectral y un máximo negativo más ancho en frecuencias más altas a la asociada al pico espectral. Hacia frecuencias incluso más altas ( $f >> f_p$ ) las

interacciones no lineales muestran una estrecha relación con la forma del espectro debido a su alta sensibilidad a números de onda altos. Al principio de su evolución el espectro es poco puntiagudo y el término no lineal es pequeño en magnitud. El lóbulo positivo de las interacciones no lineales se encuentra en frecuencias ligeramente más bajas que la frecuencia asociada al pico espectral, lo que explica la migración de dicho pico hacia las bajas frecuencias observada en las mediciones. Mientras que del lóbulo negativo se obtiene la energía para la migración del pico de las frecuencias altas.

Cercano al equilibrio, el espectro se hace más angosto en frecuencia y el término no lineal disminuye en magnitud. Mientras que el lóbulo positivo se encuentra casi en la frecuencia relacionada al pico espectral, lo que reduce su migración a frecuencias aún menores.

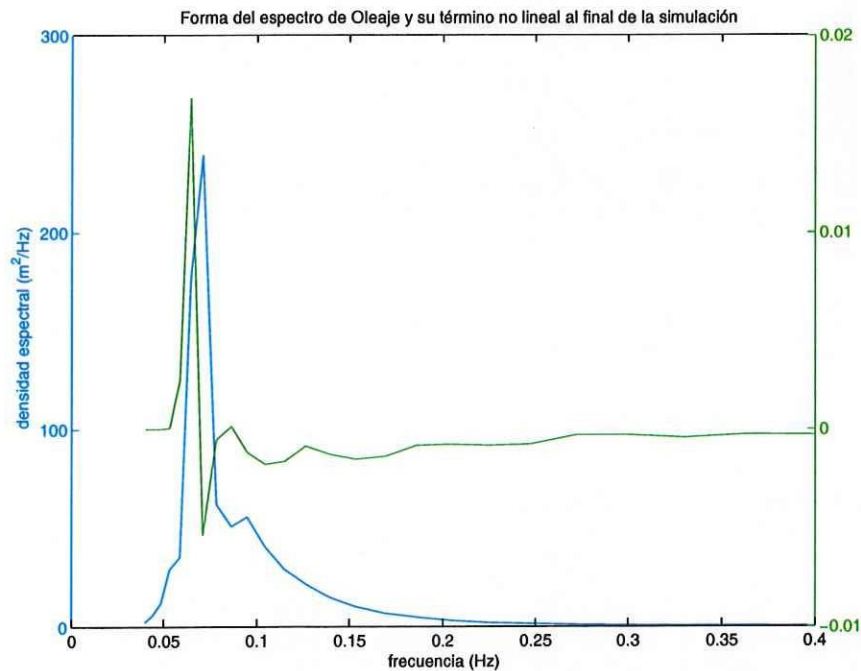


Figura 5. Espectro de energía y firma característica del término fuente  $S_{nl}$ .

Las interacciones no lineales juegan un papel muy importante en la evolución del espectro (Komen *et al.*, 1984) puesto que son muy sensibles a la forma espectral (sobre todo en la región de alta frecuencia). Pequeñas diferencias en la distribución de la energía del espectro darán formas distintas del término no lineal calculado. Estas a su vez resultarán en diferentes maneras de evolucionar del espectro hasta adquirir otras formas que representen el estado en equilibrio. De ahí la importancia de conocer la forma del espectro en el equilibrio al considerar un esquema completo o uno aproximado en el cálculo de las interacciones no lineales y así poder cuantificar la aportación del término no lineal en la generación y evolución del oleaje.

Por otro lado al referirse a la región de frecuencias muy altas del espectro (parte pronóstica), se podría llegar a pensar que no se está hablando estrictamente de ondas superficiales gravitatorias generadas por el viento (clasificadas típicamente por ondas con períodos de 1 a 30 segundos) puesto que es una región de frecuencias mayores a 1 Hz. Por lo que podrían no incluirse componentes de tan alta frecuencia en las fórmulas para reproducir el espectro del oleaje y así aumentar la velocidad de cómputo de los cálculos y reducir la memoria necesaria para hacerlos. Incluso se ha dicho que los modelos de tercera generación son insensibles a detalles en la región de frecuencias muy altas del espectro de oleaje (WAMDI, 1988).

Sin embargo también se ha probado que la energía en esta región tiene un impacto muy importante en la forma y evolución del espectro. De hecho si es removida, la energía

contenida en la región de equilibrio aumenta y la magnitud de  $S_{nl}$  disminuye, por lo que la evolución del espectro es fuertemente disminuida (Banner y Young, 1994). Esto se debe a que es en esta región de frecuencias muy altas donde se encuentra el mayor número de candidatos capaces de satisfacer las condiciones de resonancia (3.5) y (3.6) y contribuir a  $S_{nl}$ .

Young y Van Vledder (1993) demostraron que si la energía aumenta muy rápido dentro de la región de equilibrio, o si se aplica una perturbación a un espectro preexistente, las interacciones no lineales actúan rápidamente para restaurar el equilibrio transfiriendo energía desde las proximidades. Las Figuras 6 y 7 (tomadas de Young, 1999) muestran cómo el flujo de energía va de las frecuencias vecinas al centro de la perturbación en una situación de desequilibrio.

En este caso la perturbación o desequilibrio, representa una pérdida para las frecuencias de las que se transfirió la energía necesaria para atender dicha perturbación; y por supuesto una ganancia a las que se les transfirió. La Figura 8 también muestra que a pesar de esto, el flujo de energía en la región cercana al pico espectral casi no se ve afectado por esta característica, a menos que la perturbación ocurra cerca de la región del pico espectral.

Cuanto mayores sean las frecuencias de las componentes involucradas, mayor será la inestabilidad en el espectro y por lo tanto mayor la respuesta del término  $S_{nl}$  para tratar de restablecer el equilibrio. En otras palabras, cuanto menor sea la longitud de las olas

involucradas en la perturbación, más rápida será la respuesta del término no lineal para restituir el equilibrio (Young, 1999). A esta propiedad se le denomina “efecto estabilizador” de la forma del espectro y es una de las características más importantes de las interacciones no lineales (Young y Van Vledder, 1993).

Esto es evidencia de que la evolución y forma del espectro dependen fuertemente del término fuente que representa a las interacciones no lineales. Por lo tanto esa forma será diferente si el término  $S_{nl}$  es representado de diferente manera. Es de esperarse que la representación completa de las interacciones no lineales en la generación del oleaje, provoque una evolución diferente del espectro y por lo tanto una forma final o en equilibrio diferente a la que se obtiene si se utiliza una representación incompleta.

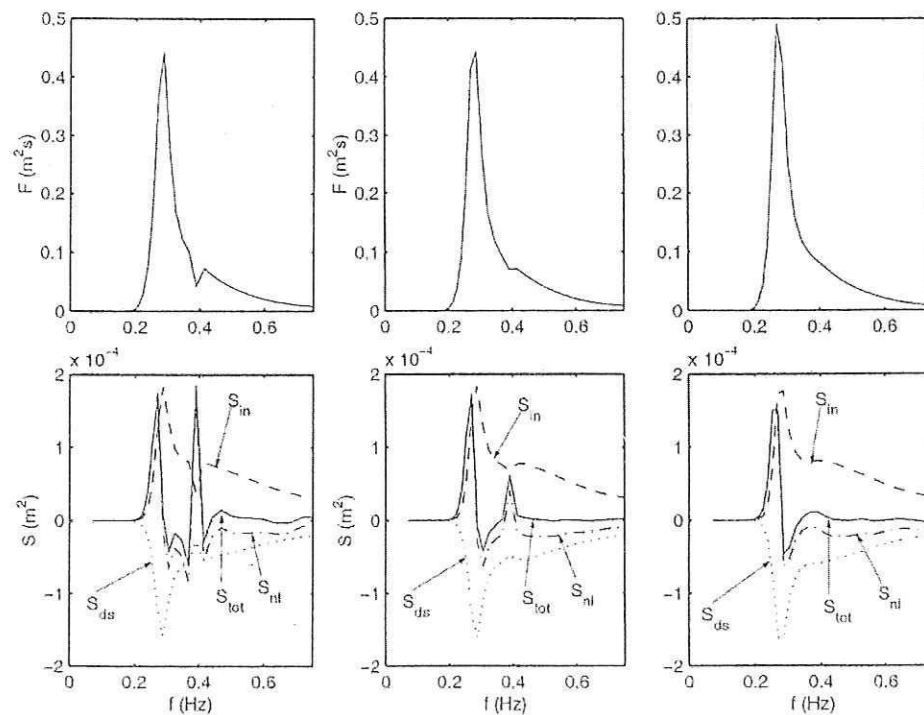


Figura 6. tres etapas en la evolución del espectro del oleaje después de una perturbación en él.

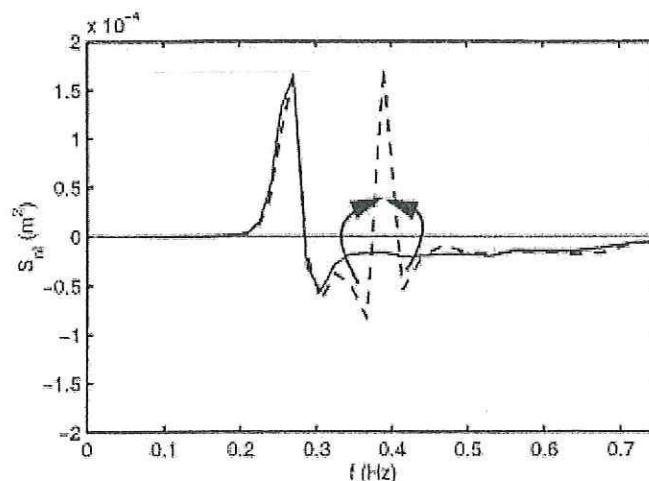


Figura 7. Término  $S_{nl}$  justo antes (línea sólida) y justo después (línea punteada) de la perturbación.

La Figura 8 muestra la forma de las interacciones no lineales en su representación bidimensional (en el espacio de frecuencia y dirección). En ella se observa una región o lóbulo positivo un tanto angosto en frecuencia. Su máximo se encuentra en una frecuencia un poco menor a la frecuencia relacionada al pico espectral. Se observa también una región negativa más ancha que la positiva, localizada en frecuencias mayores a la relacionada al pico espectral. Estos dos rasgos en la forma del término  $S_{nl}$  también son apreciables en su representación unidimensional (Figura 5).

La distribución direccional del máximo negativo se localiza en la dirección del viento predominante y su valor decrece con el incremento del ángulo a esta dirección. También se observan dos pequeños lóbulos positivos el mismo intervalo de frecuencias del lóbulo negativo pero en direcciones de aproximadamente  $\pm 45^\circ$  la dirección predominante del viento. Esto indica que en frecuencias mayores a la frecuencia del pico espectral, el

término no lineal transfiere energía de frecuencias viajando en dirección del viento a frecuencias viajando a ángulos mayores, ensanchando el espectro en esta región.

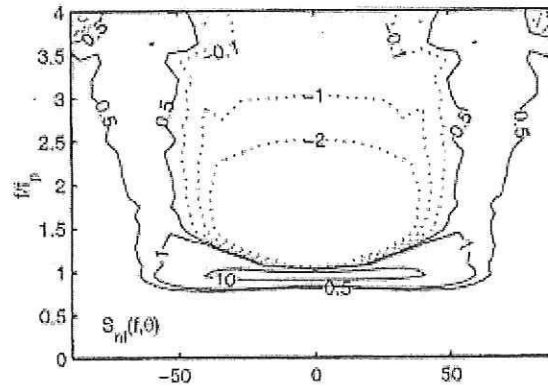


Figura 8. Término fuente  $S_{nl}$  en función de la frecuencia relativa,  $f/f_p$  y la dirección  $\theta$ . Tomado de Young, 1999.

Para la introducción eficiente de la integral de Boltzmann (ecuación (3.7)) en los modelos numéricos de oleaje, se han seguido dos líneas de investigación. La primera consiste en la optimización del tiempo de cómputo necesario para calcular las interacciones no lineales de manera exacta o completa. La segunda en mejorar la precisión de las técnicas discretas aumentando el número de cuádrupletas involucradas en la transferencia no lineal de energía. Como es de esperarse, el aumento del número de cuádrupletas involucradas es directamente proporcional al aumento en la precisión de los resultados, pero también al aumento de la memoria y tiempo de cómputo necesarios para calcular la interacción. Lo que finalmente conduce a esquemas completos para el cálculo de las interacciones no lineales y sus problemas para calcularlos numéricamente.

Los modelos numéricos de oleaje deberían tener una solución exacta del término asociado a las interacciones no lineales. Sin embargo esto representa un costo computacional bastante alto, haciendo impráctica la simulación del fenómeno para fines operacionales. Por esto se han desarrollado una serie de técnicas que siguen la segunda línea de investigación mencionada anteriormente para resolver la ecuación (3.7). Estas técnicas están basadas en métodos paramétricos u otras aproximaciones que disminuyen el tiempo de cómputo (Young y Van Vledder, 1993). Generalmente, estas aproximaciones consideran pocos números de onda para las interacciones no lineales, por lo que sólo es usada una pequeña porción de las configuraciones consideradas en la solución completa.

El hacer esto reduce el tiempo y memoria de cómputo, pero también produce espectros con picos espectrales menos energéticos, una zona en la región de frecuencias altas con más energía y una distribución direccional de la energía más angosta que la que muestran los espectros medidos (Young, 1999). La técnica más usada en modelos operacionales es la aproximación por interacción discreta (DIA por sus siglas en inglés) desarrollada por Hasselmann y colaboradores (1985a).

Sin embargo el usar aproximaciones discretas reduce la calidad en el modelado y se obtienen resultados no muy exactos al tratar de simular espectros de oleaje medidos (Hasselmann et al., 1985b; Young et al., 1987; Van Vledder, 1990; Van Vledder et al., 2000). Esto es permisible en modelos operacionales en términos de rapidez computacional, pues funciona bien y reduce considerablemente el tiempo de cómputo al

obtener resultados aceptables. Pero para fines de investigación y docencia se necesita mucho mayor detalle en los cálculos y fidelidad en los resultados al simular la evolución del espectro de oleaje. Además a pesar de que las aproximaciones captan la esencia de las propiedades físicas de la integral de Boltzmann, es importante conocer no sólo la magnitud de la contribución de dichas interacciones, sino también las características de la interacción al tomar en cuenta una solución completa. Por lo que se realizan esfuerzos en lograr una representación completa y al menos no tan lenta del término no lineal en la evolución del espectro siguiendo la primer línea de investigación mencionada anteriormente. Con esto se avanza en el conocimiento de la evolución del oleaje y se mejoran los resultados de los modelos, resultando en estimaciones más confiables de las condiciones del oleaje.

Algunos de los esquemas exactos para el cálculo de  $S_{nl}$  más reconocidos son (Lavrenov, 2003): el esquema WRT (Webb, 1978 y Tracy y Resio, 1982), el esquema RIAM (Masuda, 1980 y Komatsu y Masuda, 1996), el EXACT-NL (Hasselmann y Hasselmann, 1985a) y el GNL (Lavrenov, 1991). Se han realizado diferentes estudios con dichos esquemas en cuanto a su aplicabilidad en modelos operacionales. En la siguiente sección se describe el modelo numérico de simulación de oleaje SWAN y el esquema FD-RIAM de Hashimoto, *et al.* (2002) para el cálculo de las interacciones no lineales.

#### 4. MODELO SWAN

En esta sección se describe el modelo numérico de simulación de oleaje SWAN. También se presenta una descripción del concepto en el que se basa para la representación numérica de la forma y evolución del espectro, así como los aspectos numéricos que incorpora en sus cálculos. Se da énfasis en la representación de los términos fuente y en especial del término fuente  $S_m$ . Este término es descrito detalladamente para dos esquemas de solución: uno discreto, el DIA y otro exacto, el FD-RIAM.

El modelo SWAN (Booij, *et al.*, 1999) (Simulating WAVes Near-shore) es una extensión conceptual del modelo de tercera generación de predicción de oleaje WAM (Grupo WAMDI, 1988) (WAVE Modeling). El SWAN fue inicialmente concebido como un modelo para aguas someras incorporando la representación de los procesos que intervienen en el crecimiento y disipación del oleaje. Utiliza un esquema implícito para la propagación del oleaje en el espacio geográfico y espectral que permite que los cálculos sean incondicionalmente estables y que los pasos en el tiempo sean establecidos en términos de la precisión requerida en lugar de la estabilidad.

Puede ser operado en modo de primera, segunda o tercera generación de acuerdo a la física que involucra en los cálculos. En la Tabla 1 se muestran los procesos físicos (y diferentes formulaciones para cada proceso según el modo de generación) involucrados

en las diferentes generaciones de los modelos (tabla tomada y modificada de la versión larga del manual de operación del SWAN Ciclo III versión 40.31).

Tabla 1. Opciones en el SWAN para formular los procesos físicos que afectan el oleaje de acuerdo a diferentes generaciones de modelos numéricos.

Modo de generación del SWAN→		1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>	3 <sup>a</sup>
Crecimiento lineal por viento	Cavaleri y Malanotte-Rizzoli (1981) modificado	x	x	
	Cavaleri y Malanotte-Rizzoli (1981)			x
Crecimiento exponencial por viento	Snyder y colaboradores (1981) modificado	x	x	
	Janssen (1989, 1991)			x
Whitecapping	Holthuijsen y de Boer (1988)	x	x	
	Janssen (1991), Komen y colaboradores (1994)			x
Interacciones cuádruples	Hasselmann y colaboradores (1985)			x
	Hashimoto y colaboradores (2002)			x
Interacciones triadas	Eldeberky (1996)	x	x	x
Rompiente inducida por el fondo	Battjes y Janssen (1978)	x	x	x
Fricción con el fondo	Hasselmann y colaboradores JONSWAP (1973)	x	x	x
	Collins (1972)	x	x	x
	Madsen y colaboradores (1988)	x	x	x
Transmisión en obstáculos	Seelig (1979)	x	x	x

En este modelo se representan los procesos de:

- Propagación rectilínea a través del espacio geográfico  $x$ ,  $y$  (o latitud, longitud).
- Refracción debida a las variaciones espaciales de la batimetría y corrientes.
- Someramiento debido a variaciones en la batimetría y corrientes.
- Bloqueo y reflexión debido a obstáculos y corrientes opuestas.
- Transmisión de la energía del oleaje a través de obstáculos y en contra de corrientes ambientales intensas.

- Generación por viento.
- Disipación por rompiente en aguas profundas (*whitecapping*).
- Disipación debido a la fricción con el fondo.
- Disipación debido a la rompiente inducida por el fondo.
- Interacciones ola-ola (triadas y cuádrupletas).
- Obstáculos.

El modelo SWAN puede, además, calcular el aumento del nivel medio del mar inducido por el oleaje (set-up). Puede ser corrido en modo estacionario o no estacionario, y formulado en coordenadas cartesianas o esféricas y en modalidad uni o bi-dimensional. A partir de la versión 40.11 puede usarse en cualquier escala que sea relevante para la simulación de olas de gravedad generadas por el viento.

La ecuación básica implementada en el modelo SWAN es la ecuación de balance de acción del oleaje (3.3), y se integra numéricamente mediante el método de diferencias finitas (MDF) en cinco dimensiones:  $t$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\sigma$  y  $\theta$ , donde  $t$  representa el tiempo,  $x$  y  $y$  el espacio geográfico,  $\sigma = \omega + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$  la frecuencia relativa y  $\theta$  representa la dirección de propagación del oleaje.

Para la integración en el tiempo se utiliza un esquema implícito simple de primer orden. Para la integración en el espacio geográfico se utiliza un esquema de “corriente arriba” de segundo orden llamado S&L = Stelling y Leendertse, el cual es un método muy preciso y con una difusión muy pequeña. Y para la integración en el espacio espectral  $\sigma$  y  $\theta$ , se utiliza un esquema central implícito de primer orden. Por lo que la discretización

de la ecuación de balance de acción del oleaje para aplicaciones no estacionarias de gran escala queda como sigue:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{N^{i_t} - N^{i_t-1}}{\Delta t} \right]_{i_x, i_y, i_\sigma, i_\theta} + \\
& \left[ \frac{5/6[C_x N]_{i_x} - 5/4[C_x N]_{i_x-1} + 1/2[C_x N]_{i_x-2} - 1/12[C_x N]_{i_x-3}}{\Delta x} \right]_{i_y, i_\sigma, i_\theta}^{i_t} + \\
& \left[ \frac{5/6[C_y N]_{i_y} - 5/4[C_y N]_{i_y-1} + 1/2[C_y N]_{i_y-2} - 1/12[C_y N]_{i_y-3}}{\Delta y} \right]_{i_x, i_\sigma, i_\theta}^{i_t} + \\
& \left[ \frac{1/4[C_x N]_{i_x+1} - 1/4[C_x N]_{i_x-1}}{\Delta x} \right]_{i_y, i_\sigma, i_\theta}^{i_t-1} + \left[ \frac{1/4[C_y N]_{i_y+1} - 1/4[C_y N]_{i_y-1}}{\Delta y} \right]_{i_x, i_\sigma, i_\theta}^{i_t-1} + \\
& \left[ \frac{[C_\sigma N]_{i_\sigma+1} + 2[C_\sigma N]_{i_\sigma} - [C_\sigma N]_{i_\sigma-1}}{2\Delta\sigma} \right]_{i_x, i_y, i_\theta}^{i_t} + \left[ \frac{[C_\theta N]_{i_\theta+1} + 2[C_\theta N]_{i_\theta} - [C_\theta N]_{i_\theta-1}}{2\Delta\theta} \right]_{i_x, i_y, i_\sigma}^{i_t} = \left[ \frac{S_{Tot}}{\sigma} \right]_{i_x, i_y, i_\sigma, i_\theta}^{i_t}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde el superíndice,  $i_t$  denota el nivel en el tiempo, los subíndices  $i_x$ ,  $i_y$ ,  $i_\sigma$  e  $i_\theta$  representan los contadores de la malla computacional y  $\Delta t$  denota el incremento en el tiempo,  $\Delta x$  y  $\Delta y$  el incremento en el espacio geográfico ( $x$  y) respectivamente, y  $\Delta\sigma$  y  $\Delta\theta$  denotan el incremento en el espacio espectral.

#### 4.1. Términos fuente: $S_{Tot}$

La aproximación numérica de los términos fuente es esencialmente implícita y como todos dependen de la densidad de energía espectral (a excepción del término de

crecimiento lineal que sólo depende de la intensidad del viento), pueden ser descritos como términos (cuasi) lineales de  $E$ . Por lo tanto:

$$S = \varphi E, \quad (4.2)$$

donde  $\varphi$  es un coeficiente que depende de los parámetros integrales del espectro y de la densidad de acción. Debido a que estos valores sólo son conocidos en el nivel de iteración anterior  $n-1$ , el coeficiente  $\varphi$  debe ser determinado a ese nivel de iteración.

La integración de los términos fuente positivos (suministro del viento e interacciones no lineales entre triadas si fueran positivas) es generalmente más estable si se utiliza un esquema explícito, en el que el término fuente depende de  $E^{n-1}$  en lugar de  $E^n$ . Por lo que el esquema explícito para los términos fuente positivos en el SWAN es:

$$S^n \approx \varphi^{n-1} E^{n-1} \quad (4.3)$$

donde el superíndice  $n$  denota el nivel de iteración en el que se encuentra.

Por razones de economía computacional, la integración del término fuente  $S_{nl}$  entre cuadrupletas también se calcula mediante una aproximación explícita.

Para la integración de los términos fuente negativos (disipación por rompiente en agua profunda e inducida por el fondo, fricción con el fondo e interacciones no lineales entre triadas si fueran negativas) se utiliza un esquema implícito, que es generalmente más estable, en el que el valor del término fuente en un nivel de iteración también depende de  $E^n$ . Por lo que la estimación de  $S^n$  puede ser obtenida mediante:

$$S^n \approx \varphi^{n-1} E^n \quad (4.4)$$

#### 4.1.1. Suministro de energía por el viento: $S_{in}$

La transferencia de la energía del viento a las olas es descrita mediante un mecanismo de resonancia (Phillips, 1957) y un mecanismo de reciprocidad (Miles, 1957), comúnmente descritos como la suma de un crecimiento lineal y otro exponencial:

$$S_{in}(\sigma, \theta) = A + BE(\sigma, \theta) \quad (4.5)$$

donde  $A$  y  $B$  dependen de la frecuencia y dirección de la ola y de la rapidez y dirección del viento. Para el término  $A$  que corresponde al crecimiento lineal se utiliza la expresión de Cavaleri y Malanotte-Rizzoli (1981) con un filtro para evitar el crecimiento en frecuencias menores a la frecuencia de Pierson-Moskowitz (1964):

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1.25 \times 10^{-3}}{g^2 2\pi} [U_* \max[0, \cos(\theta - \theta_w) - 1]]^4 H \\
 H &= \exp\left(-\left(\sigma / \sigma_{PM}^*\right)^{-4}\right) \\
 \sigma_{PM}^* &= \frac{0.13g}{28U_*} 2\pi
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde  $U_*$  representa la velocidad de fricción,  $\theta_w$  indica la dirección del viento,  $\theta$  la dirección de oleaje,  $H$  es el filtro y  $\sigma_{PM}^*$  es la frecuencia relacionada al pico espectral del mar completamente desarrollado según Pierson-Moskowitz (1964).

La expresión del término  $B$  es tomada del modelo WAM Cycle 3 (Grupo WAMDI, 1988) la cual fue reescalada en términos de la velocidad de fricción,  $U_*$ , por Komen *et al.* (1984). Por lo que:

$$B = \max \left[ 0, 0.25 \frac{\rho_a}{\rho_w} \left[ 28 \frac{U_*}{c_{ph}} \cos(\theta - \theta_w) - 1 \right] \right] \sigma \tag{4.7}$$

donde  $c_{ph}$  es la velocidad de fase y  $\rho_a$  y  $\rho_w$  son las densidades del aire y del agua respectivamente.

#### 4.1.2. Disipación de energía: $S_{ds}$

La disipación de la energía del oleaje para el caso de aguas profundas en el modelo SWAN está representada por el rompimiento en aguas profundas,  $S_{ds,w}$  o “crestas

blancas". Ésta es controlada principalmente por la pendiente de la ola, los cálculos para obtener estimaciones de este proceso en el SWAN están basados en un modelo de pulso (Hasselmann, 1974) adaptado por el Grupo WAMDI (1988) en términos del número de onda, en lugar de la frecuencia como originalmente fue propuesto. Por lo que:

$$\begin{aligned}
 S_{ds,w}(\sigma, \theta) &= -\Gamma \sigma_m \frac{k}{k_m} E(\sigma, \theta), \\
 \Gamma &= C_{ds} \left( (1-\delta) + \delta \frac{k}{k_m} \right) \left( \frac{\tilde{s}}{\tilde{s}_{PM}} \right)^p, \\
 \tilde{s} &= k_m \sqrt{E_{Tot}},
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

donde  $\Gamma$  es un coeficiente que depende de la pendiente de la ola,  $k$  es el número de onda y  $\sigma_m$  y  $k_m$  denotan la frecuencia y número de onda promedio respectivamente.  $C_{ds}$ ,  $\delta$  y  $p$  son coeficientes ajustables con valores de  $2.36 \times 10^{-5}$ , 0 y 4 respectivamente,  $\tilde{s}$  representa la pendiente total de la ola y  $\tilde{s}_{PM}$  es el valor de  $\tilde{s}$  para el espectro de Pierson-Moskowitz con un valor de  $(3.02 \times 10^{-3})^{1/2}$ .

#### 4.1.3. Interacciones no lineales: $S_{nl}$

El SWAN calcula la aportación que tienen las interacciones no lineales entre componentes resonantes del espectro con la aproximación por interacción discreta (DIA). En esta aproximación se considera que interactúan dos conjuntos de cuádrupletas de números de onda con frecuencias:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma \\ \sigma_3 &= \sigma(1 + \lambda) = \sigma^+, \\ \sigma_4 &= \sigma(1 - \lambda) = \sigma^-\end{aligned}\quad (4.9)$$

donde  $\lambda$  es un coeficiente constante igual a 0.25. En la Figura 9 se observa que, para poder satisfacer estas condiciones de resonancia para la primera cuadrupleta, los vectores número de onda con frecuencias  $\sigma_3$  y  $\sigma_4$  se encuentran a un ángulo  $\theta_1 = -11.5^\circ$  y  $\theta_2 = 33.6^\circ$  de los dos vectores iguales con frecuencias  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . Para la segunda cuadrupleta se utiliza la imagen especular de la primera, donde los vectores número de onda con frecuencia  $\sigma_3$  y  $\sigma_4$  se encuentran a ángulos  $\theta_3 = 11.5^\circ$  y  $\theta_4 = -33.6^\circ$  respectivamente.

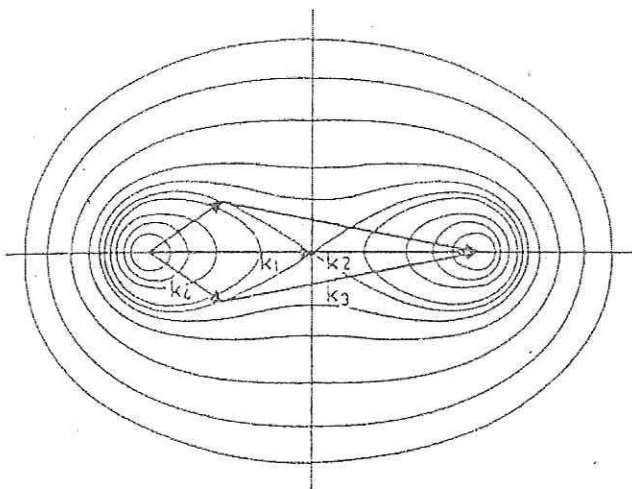


Figura 9. Configuración de las cuadrupletas de interacción en el DIA.

Mediante esta aproximación de interacción discreta, el término que representa las interacciones no lineales está dado por:

$$S_{nl4}(\sigma, \theta) = S_{nl4}^*(\sigma, \theta) + S_{nl4}^{**}(\sigma, \theta), \quad (4.10)$$

donde  $S_{nl4}^*$  se refiere a la primer cuadrupleta y  $S_{nl4}^{**}$  a la segunda, con expresiones idénticas pero con direcciones especulares (Figura 9), y:

$$S_{nl4}^*(\sigma, \theta) = 2\delta S_{nl4}(\alpha_1\sigma, \theta) - \delta S_{nl4}(\alpha_2\sigma, \theta) - \delta S_{nl4}(\alpha_3\sigma, \theta), \quad (4.11)$$

en la que  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = (1+\lambda)$  y  $\alpha_3 = (1-\lambda)$ . En 1981, Hasselmann y Hasselmann demostraron que era posible utilizar la expresión para el cálculo de la interacción no lineal de las cuadrupletas en aguas someras ( $S_{nl,as}$ ) de igual manera que para aguas profundas ( $S_{nl,ap}$ ) con tan sólo escalarla por un factor  $R$ . Por lo que:

$$S_{nl4,as} = R(k_p, d)S_{nl4,ap}, \quad (4.12)$$

donde  $k_p$  representa el número de onda del pico espectral y  $d$  la profundidad. Debido a que la relación entre estas variables y el término no lineal en aguas profundas es inversamente proporcional, la transferencia de energía en aguas someras tiende a infinito con la disminución de la profundidad. Esta forma de abordar el problema provee una aproximación conveniente a primer orden del cambio en magnitud de la transferencia de energía debido a interacciones no lineales en aguas someras, sin embargo con esta

técnica no se captan los cambios de frecuencia ni los cambios en la forma espectral que se observan al disminuir la profundidad.

#### 4.1.3.1. SWAN con esquema exacto para el cálculo de las interacciones no lineales

En la versión 40.31 del SWAN las interacciones no lineales se pueden calcular con un esquema exacto implementado por Hashimoto y colaboradores (2002). El esquema es llamado método para aguas finitas del Instituto de Investigación de Mecánica Aplicada de la Universidad de Kyushu, Japón, (FD-RIAM por sus siglas en inglés). Este esquema es el resultado del método propuesto originalmente por Masuda (1980) y Komatsu y Masuda (1996), la extensión de este método a aguas de profundidad finita fue hecha por Hashimoto y colaboradores (1998) y el cambio de la secuencia de las componentes que interactúan no linealmente fue realizada por Komatsu y Masuda (2000),

Masuda (1980) derivó una reducción de la integral de Boltzmann (ecuación 3.7) al tomar a  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  y  $\omega_3$ , como únicos parámetros independientes responsables del cambio de la densidad de acción del oleaje debido a la interacción no lineal de juegos de cuádrupletas resonantes. Estos parámetros corresponden a las direcciones de los vectores  $k_1$  y  $k_2$ , y a la frecuencia del vector  $k_3$  respectivamente. Sin embargo, sus resultados contienen cierta inestabilidad alrededor de puntos singulares mostrados en la Figura 10 como la curva o contorno de  $\gamma=0$ .

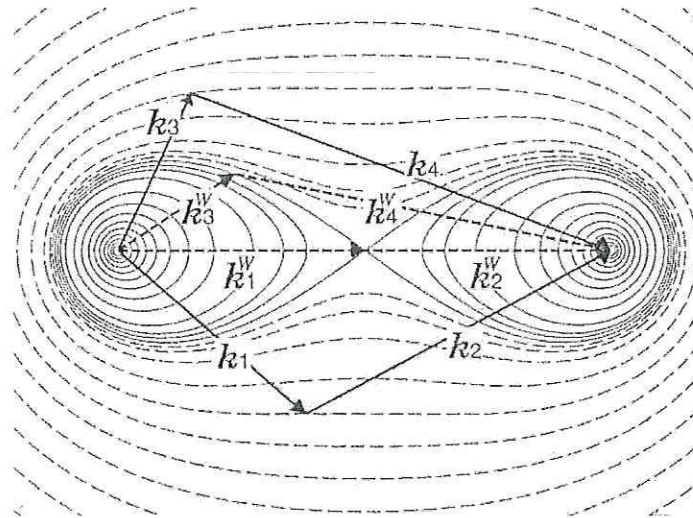


Figura 10. Mapa de interacción resonante (“Figura de ocho”) en FD-RIAM.  
Tomada de Komatsu y Masuda, 1996.

La Figura 10 muestra una esquematización del espacio de interacción de los vectores número de onda para olas en aguas profundas. Ésta es muy similar a la “figura de ocho” propuesta por Hasselmann (1963b) pero el orden de los vectores es diferente. Al fijar los valores de  $k_1$  y  $k_2$ , las curvas de  $\gamma$  constante son determinadas y sobre ellas caerán los vectores  $k_3$  o  $k_4$ , asegurando que se cumplan las condiciones de resonancia (3.5) y (3.6). En el caso de olas en aguas de profundidad intermedia, los contornos de interacción de resonancia  $\gamma(k, \omega)$ , son alargados debido a que  $k$  y  $\omega$  satisfacen la relación de dispersión en aguas intermedias que toma en cuenta la profundidad,  $h$ :

$$\omega_i^2 = gk_i \tanh k_i h, \quad (4.13)$$

donde  $i = 1, 2, 3, 4$  como en la ecuación (3.7). Lo que define a  $\gamma$  de la siguiente manera:

$$\gamma = \sqrt{gk_i \tanh \frac{k_i}{2} h} / \omega_i - 1/\sqrt{2} \quad (4.14)$$

por lo que la curva de  $\gamma=0$  pasa justo por el centro del esquema de la “figura de ocho”. Conforme  $h$  tiende a infinito,  $\gamma$  tiende a la definición original propuesta por Masuda (1980).

El hecho de que las curvas de interacción resonante  $\gamma$  se alarguen al incluir los efectos de la profundidad, implica que pequeños cambios en la dirección del vector  $k_1$  sobre  $\gamma$  causarían grandes cambios tanto en la magnitud de  $\omega_1$  como en el integrando de la ecuación (3.7) (comparado con los que se observan en el caso de aguas profundas). Esto causa inestabilidad en los resultados.

Komatsu y Masuda (2000) resolvieron este problema cambiando la secuencia original de frecuencias al integrar la ecuación (3.7), quedando de la siguiente manera:

$$\omega_1 \leq \omega_3 \leq \omega_4 \leq \omega_2. \quad (4.15)$$

Al realizar este cambio ya no es necesario un tratamiento especial de la integración alrededor de  $\gamma=0$ , ya que aún cuando el área de integración sea mayor, el cálculo es más estable y acertado pues no contiene puntos singulares.

La transformación de la ecuación (3.7) a una expresión más sencilla que involucre únicamente tres integrales en lugar de seis (ya que el número de onda es un vector), se logra mediante el uso de

$$dk = \frac{k}{C_g(k)} d\omega d\theta \quad (4.16)$$

y

$$\frac{\Phi(\omega, \theta)}{\omega} d\omega d\theta = \eta(k) dk. \quad (4.17)$$

que cambian del espacio del número de onda  $k(k_x, k_y)$  al espacio de frecuencia y dirección  $(\omega, \theta)$ .

Esta transformación hace posible la implementación de la expresión propuesta por Hashimoto y colaboradores (1998) para el cálculo exacto del término fuente no lineal en el modelo SWAN. La expresión es la siguiente:

$$\frac{\partial \phi(\omega_4, \theta_4)}{\partial t} = \frac{2\omega_4 k_4}{C_g(k_4)} \int d\tilde{\theta}_3 \int d\Omega \int d\tilde{\theta}_1 \left\{ \frac{k_1 k_3 \omega_3}{C_g(k_1) C_g(k_3)} \frac{G}{S} \right\} \{n_1 n_2 (n_3 + n_4) - n_3 n_4 (n_1 + n_2)\}, \quad (4.18)$$

donde  $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_a$ ,  $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_a$ ,  $\tilde{\theta}_3 = \theta_3 - \theta_a$  (siendo  $\theta_a$  la dirección del vector  $k_a = k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ ),  $\Omega = \ln \omega_3$ ,  $C_g$  es la velocidad de grupo,  $S$  proviene de la función delta de Dirac y esta dada por:

$$S = \left| 1 + \frac{C_g(k_2)}{C_g(k_1)} \left\{ \frac{k_1 - k_a \cos(\theta_1 - \theta_a)}{k_2} \right\} \right|, \quad (4.19)$$

y  $G$  el coeficiente de acoplamiento. Este coeficiente es la función no lineal núcleo y en donde está contenida la esencia de las interacciones no lineales del oleaje. Está definido como:

$$G = \frac{9\pi g^2 D^2}{4\rho^2 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}, \quad (4.20)$$

donde  $D$  es el coeficiente de interacción no lineal. Para los detalles del cálculo de esta complicada cantidad referirse a Herterich y Hasselmann (1980).

Es importante hacer notar que el uso del esquema FD-RIAM para el cálculo de  $S_{nl}$  en la ecuación (4.2), requiere un alto consumo de tiempo y memoria computacionales.

## 5. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En esta sección se describen los experimentos numéricos realizados con el modelo SWAN para estudiar la forma del espectro de densidad de energía cercano al equilibrio bajo diferentes escenarios.

Se diseñaron tres experimentos numéricos en los que se comparan dos esquemas para calcular el término fuente que representa las interacciones no lineales en la ecuación (3.3): el esquema DIA (Hasselmann, et al., 1985) y el esquema FD-RIAM (Hashimoto, et al., 2002). En cada uno de los experimentos se incluye una corrida sin el término no lineal a manera de referencia, en donde se calcula la evolución del espectro de densidad de energía del oleaje con el modelo en modo de primera generación. Los resultados de representar la evolución del espectro de oleaje utilizando el modelo SWAN sin el efecto de las interacciones no lineales (Primera Generación) serán referidos como:  $SWAN_{G1}$ . Los resultados de reproducir la evolución del espectro incluyendo el efecto de las interacciones no lineales con el esquema DIA serán referidos como:  $SWAN_{DIA}$  y los resultados de reproducirla con el esquema FD-RIAM:  $SWAN_{FD-RIAM}$ .

El propósito de incluir corridas sin el término  $S_{nl}$ , es formar una plataforma sobre la cual observar las diferencias más sencillas al hacer la comparación entre los esquemas. De esta manera no se comete el error de suponer que alguno de los dos es el correcto, simplemente se compara con la ausencia del término no lineal. Es importante hacer notar

que esto tampoco implica, ni pretende indicar que el hacerlo sin interacciones no lineales sea lo correcto, sólo brinda un marco de referencia común para la comparación de los esquemas.

Para la comparación se utiliza un estadístico con el que se obtiene la diferencia de los espectros calculados con alguno de los esquemas, relativa al espectro calculado sin interacciones no lineales. Esta diferencia relativa o desviación de los espectros con alguno de los dos esquemas con respecto al espectro sin interacciones no lineales, es calculado de la siguiente manera:

$$DR = \frac{E_e(f) - E_0(f)}{E_0(f)}, \quad (5.1)$$

donde  $E_e(f)$  representa el espectro del oleaje simulado al incluir alguno de los dos esquemas para el cálculo de las interacciones no lineales<sup>5</sup>, por lo que  $e = \text{DIA, FD-RIAM}$  y  $E_0(f)$  representa el espectro de densidad de energía sin considerar las interacciones no lineales.

En todos los experimentos se utilizó el modelo SWAN versión 40.31 en modo no estacionario, con una resolución espectral de 25 bandas de frecuencia (de 0.04Hz. a 0.4 Hz.) y 24 bandas de dirección ( $\Delta\theta = 15^\circ$ ).

---

<sup>5</sup> Aunque sólo está expresado el espectro unidimensional, también se compararon los espectros en su forma bidimensional.

Para efectos de una mejor visualización de los resultados, los espectros presentados como resultados de cada experimento se normalizan entre el máximo valor de energía del espectro con mayor energía de los tres (sin interacciones no lineales, con DIA o con FD-RIAM) y después se elimina toda la energía menor al 3% de la energía de cada espectro para evitar “llenar” todo el espacio espectral con energía.

### **5.1. Descripción de la malla computacional**

En la Figura 11 se presenta la geometría de la malla computacional para los diferentes experimentos, la cual consiste de un cuadrado de 20 por 20 nodos que representa un área de 1000 km por 1000 km. El punto rojo con recuadro ubicado en el centro del área de generación es el lugar donde se obtuvieron los resultados de los espectros, de los puntos negros alineados se obtuvieron los valores para construir las curvas de crecimiento del oleaje limitado por la longitud del fetch y la duración del viento; estos datos también son utilizados para el análisis estadístico.

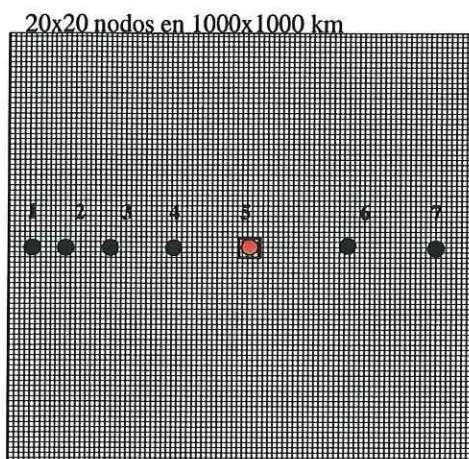


Figura 11. Malla computacional para los experimentos.

El modelo se corre hasta alcanzar un estado estacionario en toda el área, durante aproximadamente 5 días de simulación. Los resultados de altura significativa  $H_s$ , período relacionado al pico espectral  $f_p$ , dirección asociada al pico espectral  $\theta_p$ , y la distribución direccional de la energía  $DSPR^2$  (para el caso del Experimento 1), se obtienen en 7 puntos situados a lo largo del área de generación, a una distancia de la frontera izquierda de 20, 50, 150, 250, 500, 750 y 950 kilómetros.

**5.2. Experimento 1: Crecimiento del oleaje limitado por la longitud del área de generación (fetch) y el tiempo durante el cual el viento actúa sobre la superficie del mar.**

El propósito de este experimento es construir y comparar las curvas de crecimiento obtenidas con los diferentes esquemas para establecer los límites asintóticos que indican que el espectro se encuentra cercano al equilibrio. Estos resultados también brindan las condiciones iniciales del siguiente experimento.

En este experimento numérico se reproducen las condiciones del Caso II realizado por el Grupo SWAMP (1985); donde el campo de oleaje crece bajo la influencia de un viento estacionario y uniforme sobre un área de 1000 x 1000 km.

Para el Experimento 1, el viento sopla de manera homogénea y estacionaria de la frontera izquierda de la malla computacional a la derecha, con una rapidez de 20 m/s, referido a un nivel de 10 m sobre el nivel medio del mar. En este experimento se trabaja bajo la suposición de que el campo de viento es homogéneo en toda el área, que la energía del campo de oleaje al inicio del experimento es igual a cero y que al inicio del área de generación el espectro permanece sin energía para  $t \geq 0$ .

El viento sopla mar adentro desde una costa recta sobre un estado inicial en ausencia de olas (sin energía en el espectro). Al simular la evolución del campo de oleaje en función del tiempo, se pueden construir *curvas del crecimiento de oleaje limitado por duración*. Mientras que en el límite asintótico estacionario (no dependiente del tiempo), la dependencia del campo de oleaje con la distancia desde la costa proporciona *curvas del crecimiento limitado por la longitud del fetch*. De los resultados de este experimento se obtiene la distancia y el tiempo que se requieren para considerar un estado en balance energético de la superficie del mar bajo condiciones de viento constante, bajo un estado del mar preexistente y bajo un sistema de oleaje que se propaga en dirección opuesta a la dirección del viento.

Como parte de los resultados de este experimento también se añade una breve descripción y análisis de la distribución direccional de la energía del espectro, lo que permite distinguir el efecto que tienen los diferentes métodos de solución de la integral de Boltzmann en la direccionalidad del espectro. Esta distribución direccional de la energía del oleaje  $DSPR^2$ , es medida en grados como la desviación estándar direccional del ancho unidireccional del espectro, definida como (Kuik, *et al.*, 1988):

$$DSPR^2 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \{2 \text{sen}((\theta - \bar{\theta})/2)\}^2 D(\theta) d\theta \quad (5.2)$$

donde  $\theta$  es la dirección de propagación del oleaje asociado a una componente espectral,  $\bar{\theta}$  es la dirección promedio del oleaje y  $D(\theta)$  es la función de distribución direccional.

### 5.3. Experimento 2: Cambio repentino de 180° en la dirección del viento.

El propósito de este experimento es probar el proceso de relajación con los diferentes esquemas numéricos, identificar la influencia relativa de los sistemas en el acoplamiento no lineal y distinguir diferencias en los espectros de los nuevos límites asintóticos al comparar los resultados con los obtenidos en el Experimento 1.

En este experimento se toma como estado inicial, el estado final del Experimento 1. Al inicio del experimento ( $t = 0$ ) el viento es girado instantáneamente 180° sin cambiar su

intensidad, por lo que a partir del cambio de dirección del viento se corre el modelo hasta alcanzar en un punto el límite asintótico de la energía en el tiempo.

Justo en el instante en el que el viento cambia de dirección, el oleaje preexistente puede considerarse como oleaje libre (Young et al., 1987), ya que en ese momento alcanzaron los límites asintóticos de crecimiento. A partir de este instante se empieza a generar un nuevo sistema de oleaje local sobre él que tiende a cambiar rápidamente la dirección media del oleaje en la nueva dirección del viento (Van Vledder y Holthuijsen, 1993). La evolución temporal del oleaje local sobre el oleaje lejano, produce una relajación del campo de oleaje hacia un nuevo estado del mar (en el sentido de que ya no está siendo forzado al menos por las mismas condiciones). Éste se aproxima asintóticamente a un nuevo estado de completo desarrollo con oleaje que se propaga en la nueva dirección del viento.

Es necesario hacer notar que debido al cambio instantáneo en la dirección del viento, el experimento sólo prueba los procesos de interacción relacionados al acoplamiento entre el oleaje lejano y el oleaje local, no los de advección como lo haría si la variación en la dirección del viento fuera lenta (SWAMP Group, 1985).

La motivación de realizar este experimento fue una serie de ejercicios (no mostrados) que ilustran el acoplamiento no lineal entre sistemas de oleaje con diferente frecuencia y dirección del pico espectral. Estos ejercicios fueron realizados con un esquema exacto para el cálculo del término no lineal (Lavrenov y Ocampo-Torres, 1999) diferente al

utilizado en este trabajo. En estos ejercicios se observó que el acoplamiento entre los sistemas es función de la diferencia relativa de frecuencias asociadas al pico espectral de los sistemas y en menor medida de la dirección relativa de propagación. Estos resultados concuerdan con resultados publicados anteriormente.

#### **5.4. Experimento 3: Crecimiento del oleaje sobre oleaje libre que se propaga en dirección opuesta.**

Este experimento se diseñó para probar el desempeño del modelo con los dos diferentes esquemas bajo una situación más realista, en la que se presentan dos sistemas de oleaje distintos forzados a través del tiempo, no solo al principio del experimento como en el Experimento 2. Esto significa que la presencia del oleaje libre arribando a la costa está impuesta como condición de frontera, en lugar de ser sólo una condición inicial de la superficie sobre la cual se empieza a desarrollar el nuevo campo de oleaje. Lo quiere decir que el oleaje libre sigue siendo forzado por una de las fronteras con más oleaje similar durante todo el experimento. Por esto, más que presentarse una situación de relajación, se presenta una situación de sobreposición de sistemas a través del tiempo.

La sobreposición de sistemas se realiza con la intención de probar los diferentes esquemas en situaciones encontradas en la naturaleza. Como en las que se encuentra oleaje libre arribando a la costa y sobre él se genera un nuevo campo de oleaje en dirección contraria. Esta condición puede encontrarse en lugares donde el viento sople de tierra a mar por periodos prolongados de tiempo (más allá de una brisa nocturna) y de

manera mas o menos constante. Por ejemplo durante eventos Tehuanos en el Golfo de Tehuantepec, el Monzón de la India o incluso durante eventos Santa Ana intensos presentados en la región del sur de California y Baja California.

## **6. DESCRIPCIÓN DE RESULTADOS**

En esta sección se describen los resultados obtenidos en los experimentos numéricos del 1 al 3. De los resultados del Experimento 1 se presentan las curvas de crecimiento de la energía del espectro del oleaje, corrimiento de la frecuencia relacionada al pico espectral y de la distribución angular de la energía del oleaje. Tomadas a lo largo del fetch para el final de la simulación (quinto día) y a través del tiempo para un punto localizado al centro del dominio computacional y otro cercano al final de éste con los tres esquemas escogidos. También se presenta un análisis de la evolución temporal del espectro unidimensional bajo condiciones del Experimento 1, obtenido al centro del área de generación (punto 5) con los diferentes esquemas.

Se describe la forma unidimensional y bidimensional del espectro y del término no lineal de los resultados obtenidos en los Experimentos 1 al 3. Éstos fueron adquiridos en el centro del área de generación en el último instante de simulación (cuarto día), donde se supone que el equilibrio temporal se ha alcanzado (ver punto central). Además se presentan gráficas de la diferencia relativa en una y dos dimensiones, de los espectros analizados en los diferentes experimentos y la resta de las diferencias calculadas.

### 6.1. Experimento 1: Crecimiento del oleaje limitado por la longitud del área de generación y el tiempo que sopla el viento sobre el mar.

La Figura 12 muestra el crecimiento de la energía total contenida en el espectro de oleaje (a) y el corrimiento de la frecuencia relacionada al pico espectral (b) a lo largo del área de generación y para los resultados obtenidos de  $SWAN_{GI}$  (línea continua de color rojo), de  $SWAN_{DIA}$  (línea punteada de color negro) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (línea segmentada de color azul). Estas curvas representan las condiciones del estado del mar a lo largo del área de generación para el último instante de la simulación bajo condiciones del Experimento 1.

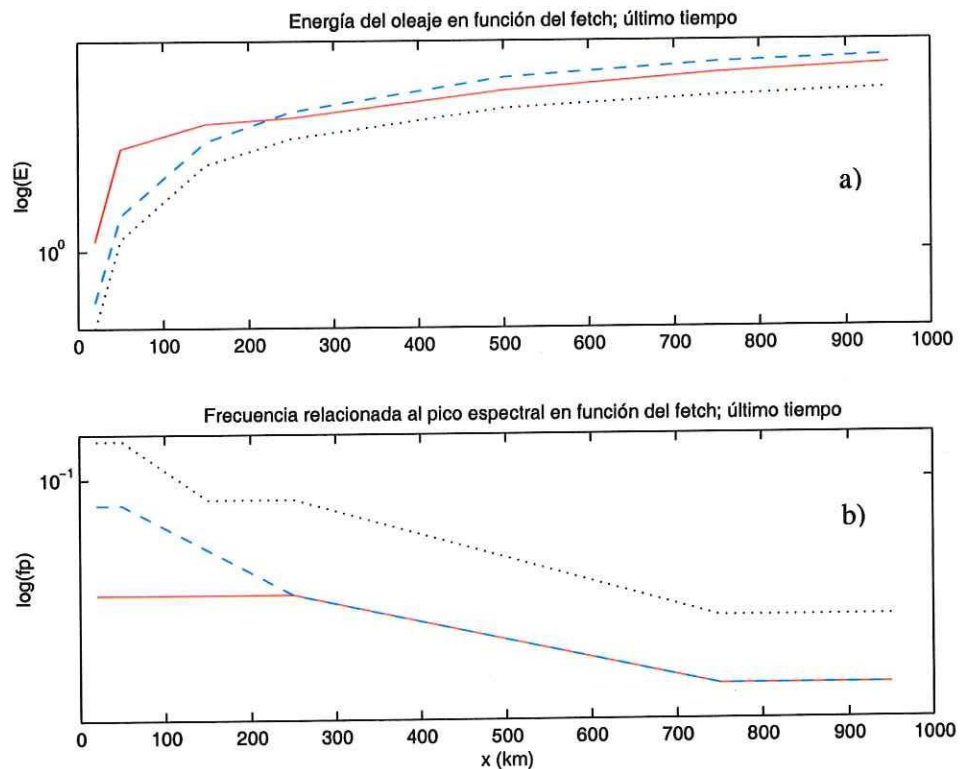


Figura 12. Curvas de crecimiento del espectro de oleaje en función de la distancia obtenidas como resultado de  $SWAN_{GI}$  (—), de  $SWAN_{DIA}$  (···) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (---). Evolución de la densidad de energía (a) y de la frecuencia relacionada al pico espectral (b); datos obtenidos a la última hora de simulación.

En esta figura se observa que para las condiciones de viento y distancia consideradas en la simulación (20m/s y 1000km), la curva de la energía contenida en el espectro en función de la distancia no alcanza totalmente el límite asintótico con ninguno de los esquemas. Sin embargo para el caso del corrimiento de la frecuencia relacionada al pico espectral (Figura 12 b), el límite asintótico si es alcanzado hacia el final del área de generación para las condiciones dadas (la razón de esto es discutido más adelante).

Por el contrario, en la Figura 13 se muestra que las curvas de crecimiento de la energía contenida en el espectro y corrimiento de la frecuencia relacionada al pico espectral en función del tiempo, si convergen a un límite asintótico tanto para el punto al centro del área de generación (punto 5), como en la Figura 14 para un punto cercano al final del área (punto 7). Esto se presenta para cualquiera de los tres esquemas de representación del espectro. De hecho estos límites son alcanzados bastante antes de terminarse el experimento; en aproximadamente 2.5 días de simulación.

El hecho de que los límites asintóticos de las curvas de crecimiento en función del tiempo para ambos puntos si sean observados (en Figuras 13 y 14), demuestra que sí se alcanzó el estado en equilibrio (limitado por fetch) en el que el espectro se encuentra en balance energético entre el suministro de energía por parte del viento y la disipación por parte del rompimiento. Con base en esta definición de equilibrio espectral, en los siguientes experimentos se analiza el espectro en equilibrio en función del tiempo, alcanzado en periodos largos de simulación (en aproximadamente 4 días).

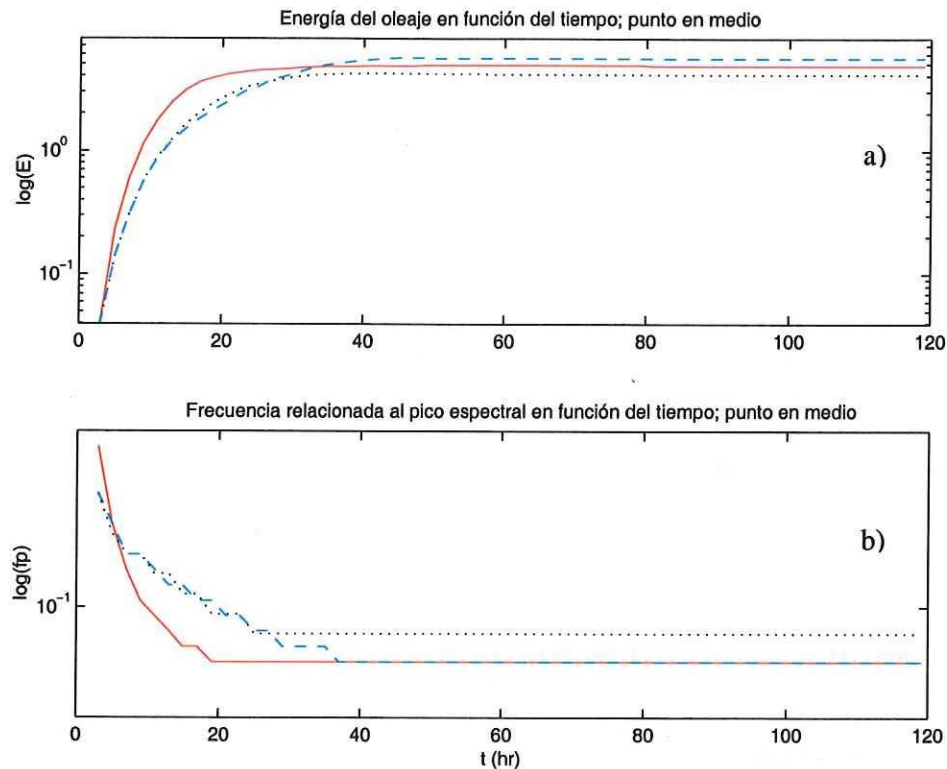


Figura 13. Curvas de crecimiento del espectro de oleaje en función del tiempo obtenidas como resultado de SWAN<sub>GI</sub> (—), de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (---). Evolución de la densidad de energía (a) y de la frecuencia relacionada al pico espectral (b); datos obtenidos al centro del área de generación (punto 5).

Entre las curvas que describen la evolución de la energía del oleaje a través del tiempo para el punto central (punto 5) y final (punto 7) del área de generación mostradas en las Figuras 13 y 14 respectivamente, presentan diferencias cuantitativas más que cualitativas. Estas diferencias se hacen notorias en los valores que alcanzan las variables (energía del espectro y frecuencia relacionada al pico espectral) al final de la simulación. En las curvas presentadas en las Figuras 13 y 14 se observan rasgos muy similares, a excepción de la sobresaturación observada (a penas visible debido a la escala logarítmica) a los poco más de día y medio en el punto central y a los dos días en el punto al final del fetch reproducido con SWAN<sub>FD-RIAM</sub> y el mínimo de frecuencia

encontrado poco antes de 1.7 días en el punto final reproducido sin la influencia de las interacciones no lineales. En todas las curvas se observa que la energía aumenta de manera exponencial con el tiempo y la frecuencia disminuye de manera exponencial negativa al aumentar el mismo.

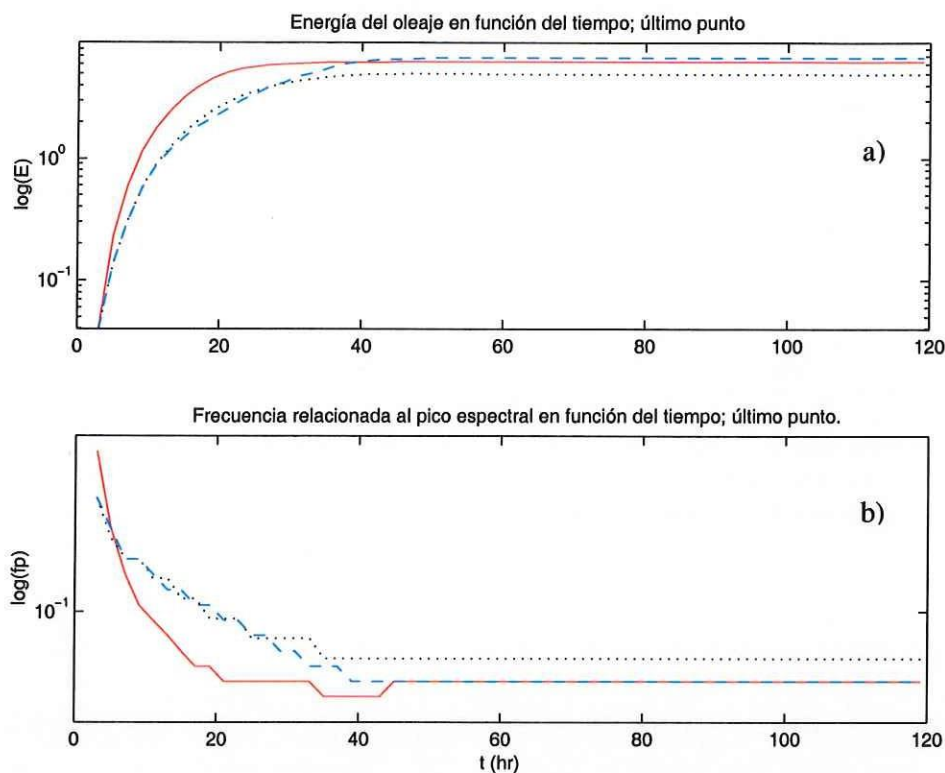


Figura 14. Curvas de crecimiento de la energía del espectro en función del tiempo obtenidas como resultado de SWAN<sub>G1</sub> (—), de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (---). Evolución de la densidad de energía (a) y de la frecuencia relacionada al pico espectral (b); datos obtenidos al final del área de generación (punto 7).

La Figura 15 muestra la distribución direccional de la energía del espectro obtenida como resultado de SWAN<sub>G1</sub> (línea continua de color rojo), de SWAN<sub>DIA</sub> (línea punteada de color negro) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (línea segmentada de color azul) en función del fetch para la última hora de simulación (a), en función del tiempo para el punto central del

área de generación (b) y en función del tiempo para el último punto del área de generación (c).

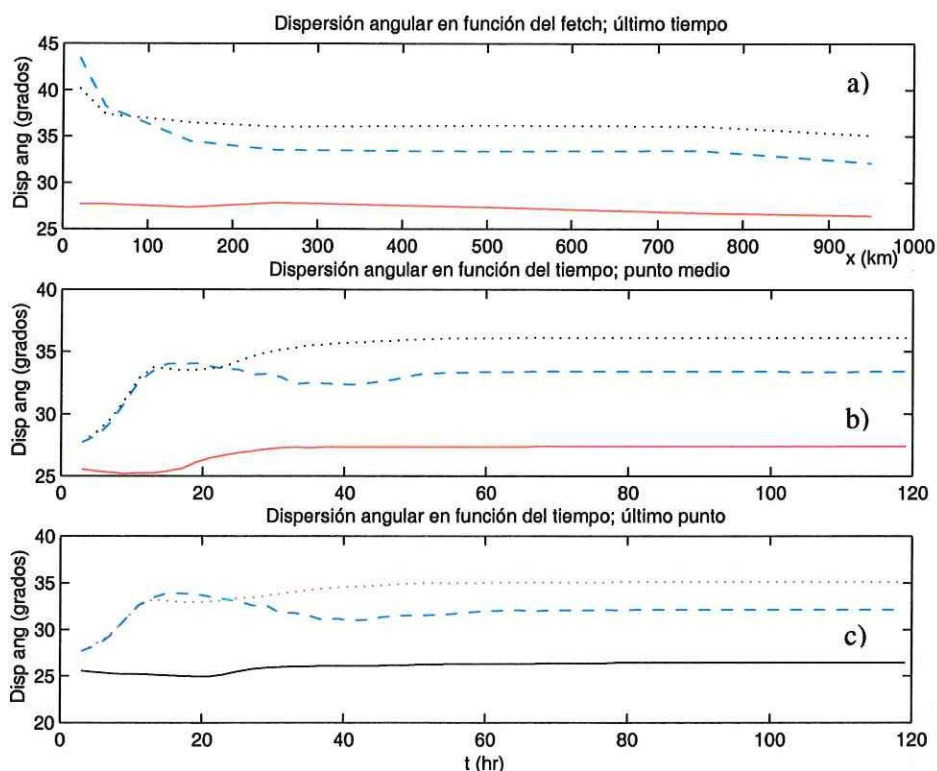


Figura 15. Distribución direccional de la energía del espectro en función de la longitud del fetch para el último tiempo (a), en función del tiempo para el punto 5 del área de generación (b) y para el punto 7 (c) obtenidas como resultado de SWAN<sub>GI</sub> (—), de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (---).

En esta figura se puede observar que en los tres paneles se alcanza el límite asintótico que define al estado en equilibrio, en especial para el caso en función del tiempo. Estos límites son alcanzados con las tres representaciones, sin embargo el que presenta la mayor dispersión es SWAN<sub>DIA</sub>, con el que se obtiene un valor de: 37°, alcanzado en aproximadamente 60 hrs. de simulación tanto en el punto 5 como en el 7, mientras que con SWAN<sub>FD-RIAM</sub> se obtiene un valor de: 33.4°, alcanzado a partir de 60 hrs. en el punto

5 y 80 hrs. en el punto 7. Para  $SWAN_{GI}$  se obtiene un valor:  $26.5^\circ$ , alcanzado a partir de 35 hrs. de simulación en el punto 5 y 87 hrs. en el punto 7.

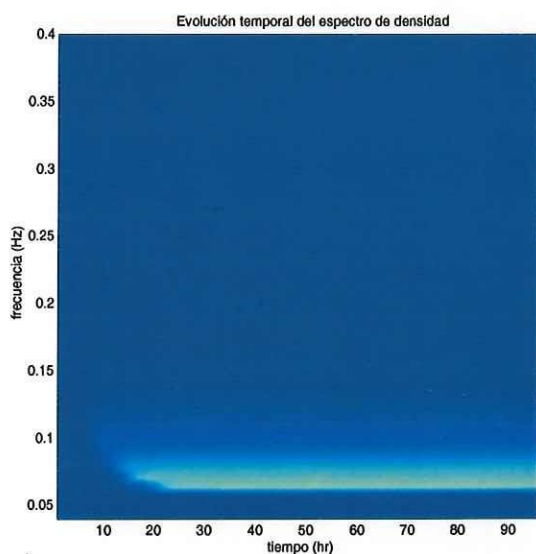
Las diferencias encontradas entre  $SWAN_{DIA}$  y  $SWAN_{FD-RIAM}$  se deben básicamente a que uno toma en cuenta un mayor número de configuraciones posibles de interacción entre componentes (FD-RIAM), mientras que el otro sólo toma en cuenta dos configuraciones posibles para la transferencia no lineal (DIA). En la Figura 15 se observa que aún cuando los valores numéricos del esparcimiento direccional de los espectros al inicio del experimento sean similares para los esquemas que incluyen el efecto de las interacciones no lineales (sobre todo en las curvas en función del tiempo), también se observa cómo al paso del tiempo estos valores siguen la misma tendencia hasta que difieren rápidamente alcanzando sus respectivos límites asintóticos después de pasado cierto tiempo.

En los siguientes experimentos y representaciones de la evolución temporal de las propiedades del espectro se toman los resultados a las 96 horas de simulación para ahorrar tiempo de cómputo, pues como se observa en las Figuras 13, 14 y 15, el estado del espectro para este tiempo de simulación ya puede ser considerado un espectro cercano al equilibrio.

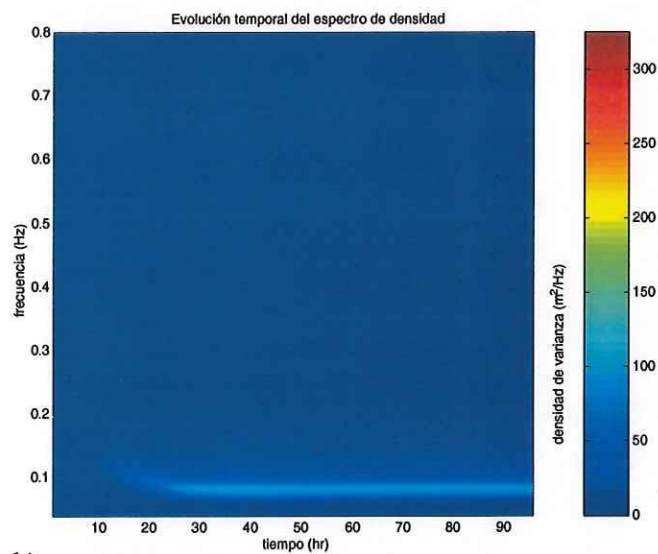
La Figura 16 muestra la evolución temporal del espectro unidimensional de densidad de energía del oleaje para el punto central del área de generación (punto 5) obtenida de los resultados de  $SWAN_{GI}$  (a), de  $SWAN_{DIA}$  (b) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (c); en el eje  $x$  está representado el tiempo, en el eje  $y$  la frecuencia y los niveles de colores representan la

densidad de energía. Nótese que las escalas de color son las mismas, lo que permite distinguir a simple vista las diferencias en la cantidad de energía.

Durante la evolución del espectro utilizando  $SWAN_{G1}$ , el máximo pico espectral alcanza un valor de  $141 \text{ m}^2/\text{Hz}$  a una frecuencia de  $0.0652 \text{ Hz}$  ( $15.34 \text{ s}$  de período). Para el caso de  $SWAN_{DIA}$ , se obtuvo un valor de densidad de energía del pico espectral de  $95 \text{ m}^2/\text{Hz}$  y frecuencia de  $0.0862 \text{ Hz}$  ( $11.6 \text{ s}$  de período). Para el caso de  $SWAN_{FD-RIAM}$  se obtuvo un valor máximo del pico espectral de  $223 \text{ m}^2/\text{Hz}$  a una frecuencia de  $0.0711 \text{ Hz}$  ( $14.08 \text{ s}$  de período).



a)



b)

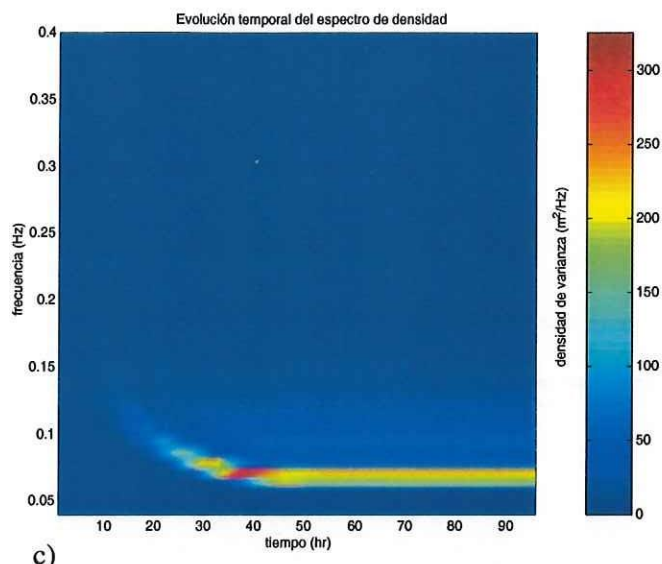
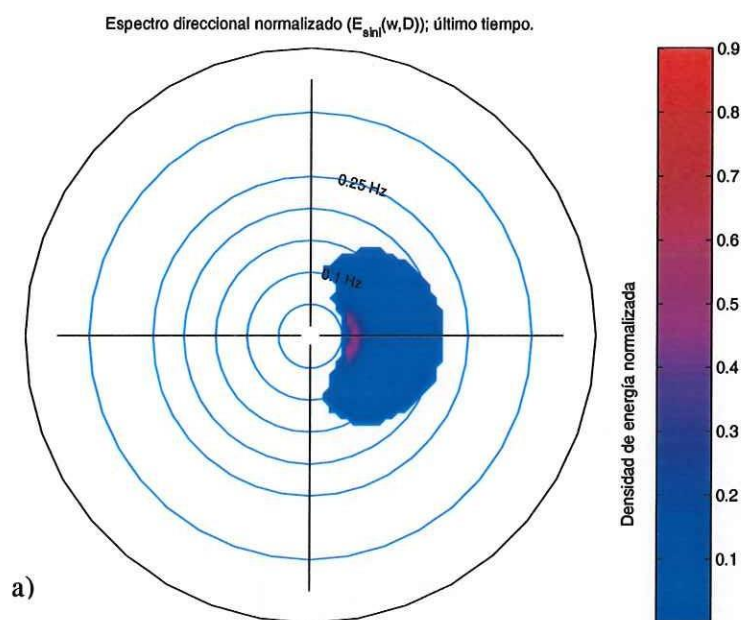


Figura 16. Evolución temporal de  $E(f)$  obtenida como resultado de  $SWAN_{G1}$  (a), de  $SWAN_{DIA}$  (b) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (c) para el punto 5.

En la Figura 16 se observa que el espectro final obtenido al utilizar  $SWAN_{FD-RIAM}$  es el espectro más energético, sin embargo el valor máximo se alcanza a las 40 hrs. de simulación y después disminuye hasta el valor mencionado anteriormente. En cuanto a la frecuencia mínima alcanzada, se observa que el corrimiento de la frecuencia relacionada al pico espectral está mejor reproducido con  $SWAN_{FD-RIAM}$  (al igual que la sobreestimación de la energía), sin embargo es con  $SWAN_{G1}$  con el que se alcanza el mínimo valor.

La Figura 17 muestra los espectros bidimensionales obtenidos al cuarto día de simulación en el punto 5 como resultados de utilizar  $SWAN_{G1}$  (a), de  $SWAN_{DIA}$  (b) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (c). El espectro que resulta al utilizar  $SWAN_{G1}$  presenta una forma simétrica con poco esparcimiento en frecuencia y poca distribución direccional de la energía. El espectro obtenido al utilizar  $SWAN_{DIA}$  presenta una forma con gran

esparcimiento en frecuencia y una amplia distribución direccional de la energía. Mientras que el espectro del oleaje obtenido de utilizar  $SWAN_{FD-RIAM}$  presenta una dispersión en frecuencia mayor al de  $SWAN_{G1}$  y menor al de  $SWAN_{DIA}$ . Presenta también una distribución direccional de la energía menor al de  $SWAN_{G1}$  y menor al de  $SWAN_{DIA}$  en la región del pico espectral, pero mayor al de  $SWAN_{DIA}$  en frecuencias mayores a la asociada al pico espectral.



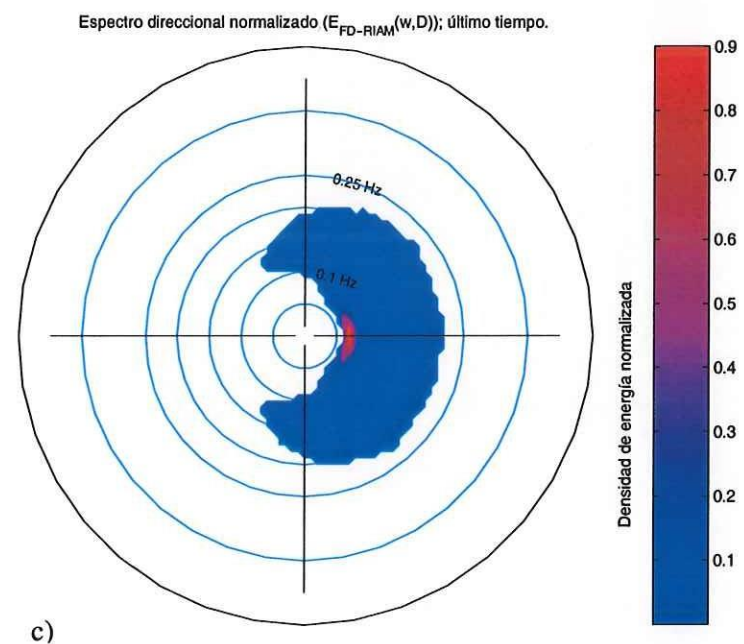
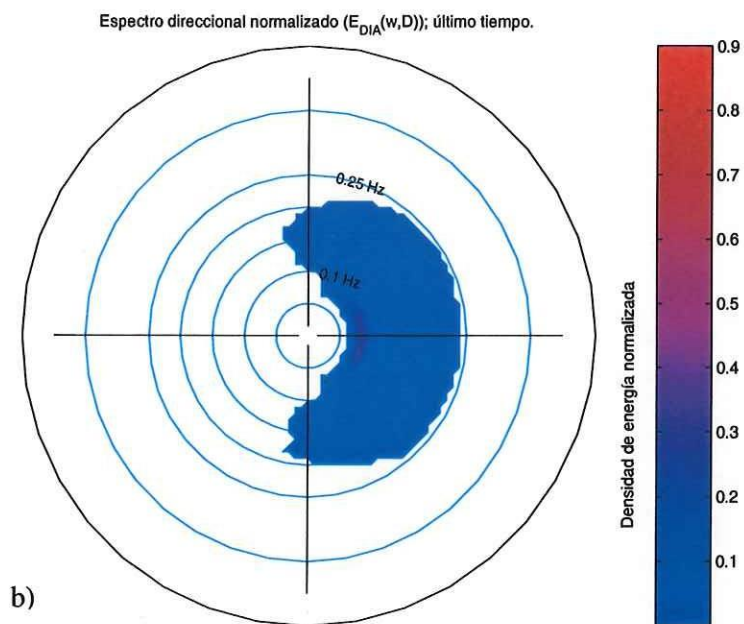


Figura 17.  $E(\omega, \theta)$  para el último tiempo de simulación al final del área computacional bajo condiciones del Experimento 1, obtenidos como resultado de  $SWAN_{GI}$  (a), de  $SWAN_{DIA}$  (b) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (c).

La Figura 18 muestra la estructura bidimensional del término  $S_{nl}$  al utilizar de utilizar  $SWAN_{DIA}$  (a) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (b) bajo condiciones del Experimento 1 en el punto 5. Nótese cómo el término no lineal de  $SWAN_{DIA}$  presenta máximos y mínimos más dispersos sobre el espacio espectral que  $SWAN_{FD-RIAM}$ , el cual presenta una estructura más simétrica (tanto en frecuencia como en dirección). Las irregularidades en la estructura de  $SWAN_{DIA}$  producen que el espectro se ensanche (en dirección) y disperse (en frecuencia). También es importante hacer notar que no sólo la magnitud del término no lineal es mayor al ser calculado con el esquema exacto, si no que además el campo de interacción es mayor. Esto es, con el esquema exacto se puede observar una interacción más amplia, incluso en la región opuesta a la dirección de la máxima energía. También se debe hacer notar que al utilizar  $SWAN_{FD-RIAM}$  sí se conserva la firma característica del término no lineal en dos dimensiones (Figura 8), así como que la magnitud de dicho término es un orden de magnitud mayor que al utilizar  $SWAN_{DIA}$ . Además este último tiene mucha mayor fluctuación en la región de frecuencias altas que el primero, que si converge a cero.

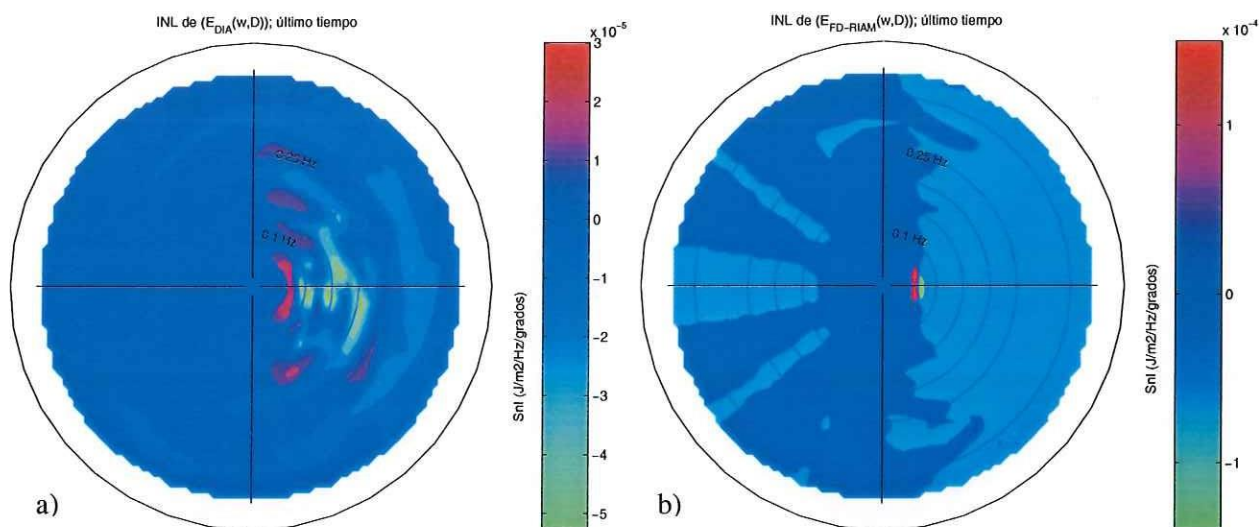


Figura 18. Término  $S_{nl}(\omega, \theta)$  para el punto 5 asociado a los espectros obtenidos como resultado de  $SWAN_{DIA}$  (a) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (b) bajo condiciones del Experimento 1.

La Figura 19 muestra el espectro unidimensional obtenido con los diferentes esquemas bajo condiciones del Experimento 1 como resultado de utilizar  $SWAN_{G1}$  (línea continua de color rojo), de  $SWAN_{DIA}$  (línea punteada de color negro) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (línea segmentada de color azul), al cuarto día de simulación en el punto 5 en el a y en el inferior los respectivos términos no lineales de utilizar  $SWAN_{DIA}$  y  $SWAN_{FD-RIAM}$ .

De la Figura 19 hay que hacer notar dos cosas: La primera es que el espectro obtenido de utilizar  $SWAN_{FD-RIAM}$  es el más energético ( $H_s = 9.43\text{m}$  contra  $8.81\text{m}$  al utilizar  $SWAN_{G1}$  y  $7.96\text{m}$  al utilizar  $SWAN_{DIA}$ ) y presenta dos máximos, cuando se esperaría sólo uno como con los otros métodos. Esta forma bimodal del espectro es resultado de la interacción de componentes de frecuencia alta que viajan en dirección contraria al viento, ya que en los cálculos del esquema FD-RIAM están involucrados mayor número de componentes del espectro. La segunda es la diferencia en la magnitud y forma del

término no lineal adquirido por el esquema exacto y el discreto. El término  $S_{nl}$  usando  $SWAN_{DIA}$  es muy irregular como se había observado en la Figura 18.

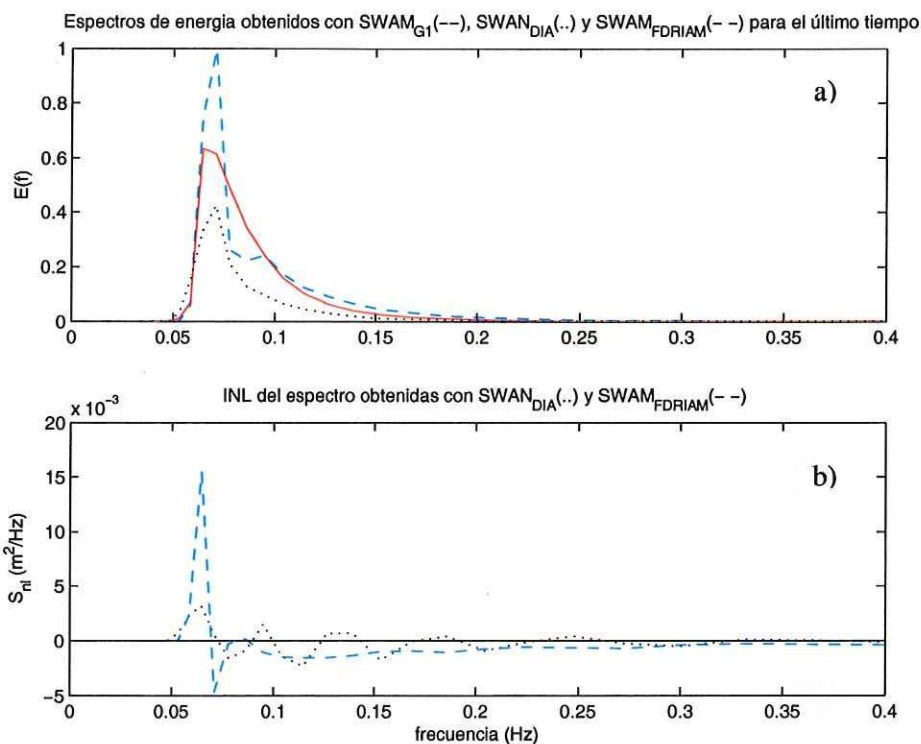


Figura 19.  $E(f)$  (a) y  $S_{nl}(f)$  (b) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de  $SWAN_{G1}$  (—), de  $SWAN_{DIA}$  (···) y de  $SWAN_{FDRIAM}$  (— —) bajo condiciones del Experimento 1.

En la Figura 20 se muestra el espectro unidimensional obtenido como resultado de utilizar  $SWAN_{G1}$  (línea continua de color rojo), de  $SWAN_{DIA}$  (línea punteada de color negro) y de  $SWAN_{FDRIAM}$  (línea segmentada de color azul) bajo condiciones del Experimento 1, al cuarto día de simulación y para el punto 5, así como el resultado de la función  $S_{nl}$  (b) en función de la frecuencia, asociada a los espectros del experimento. Se incluyen como referencia las rectas que representan la energía como función proporcional de la frecuencia. La línea teórica de un espectro en equilibrio proporcional a  $f^{-3.5}$  está representada por una línea verde, la de un espectro proporcional a  $f^{-3.8}$  por

una línea amarilla, la de un espectro proporcional a  $f^{-4}$  por una línea roja y la de un espectro proporcional a  $f^{-5}$  está representada por una línea azul.

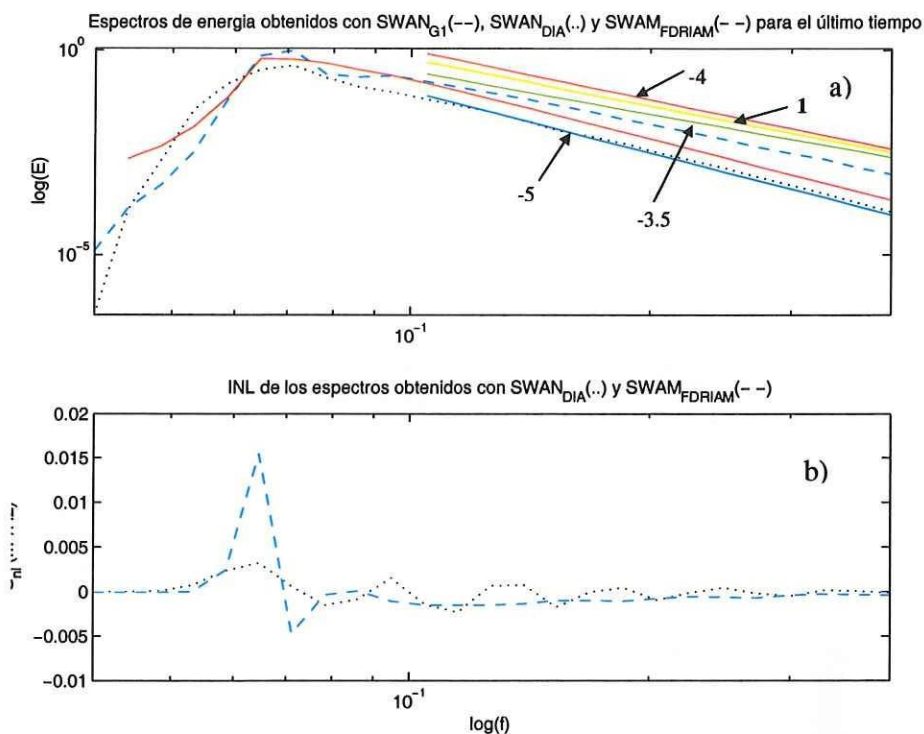


Figura 20.  $E(f)$  en escala logarítmica (a) y  $S_{nl}(f)$  en escala semilogx (b) al cuarto día de simulación obtenidos bajo condiciones del Experimento 1; se muestran diferentes líneas teóricas de equilibrio en cierto intervalo de frecuencias (azul  $=f^{-5}$ , roja  $=f^{-4}$ , amarilla  $=f^{-3.8}$ , verde  $=f^{-3.5}$ ).

Con la ayuda de las Figuras 16, 17, 18 y 19 se puede demostrar que la evolución temporal del espectro adquiere una forma totalmente diferente al utilizar  $SWAN_{FDRIAM}$ , que al utilizar  $SWAN_{G1}$  o  $SWAN_{DIA}$ . Al inicio de la simulación los espectros son similares y conforme pasa el tiempo evolucionan lentamente hasta alcanzar las formas mostradas, las diferencias son producto, enteramente, de utilizar diferentes esquemas para el cálculo del término  $S_{nl}$ .

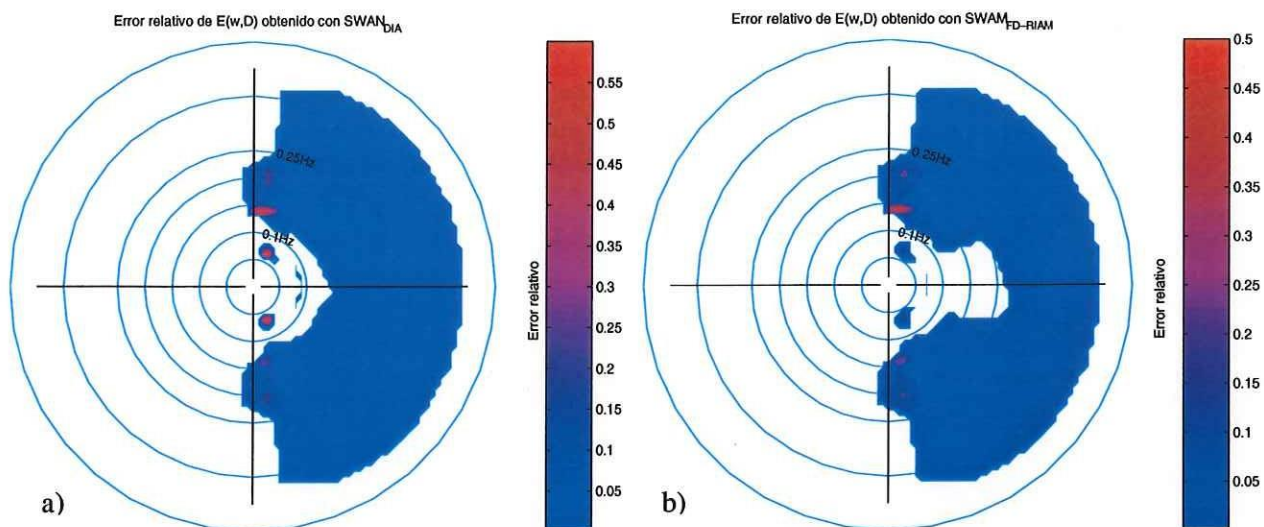


Figura 21. Diferencia relativa en dos dimensiones asociado a los espectros obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub> (a) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (b) bajo condiciones del Experimento 1.

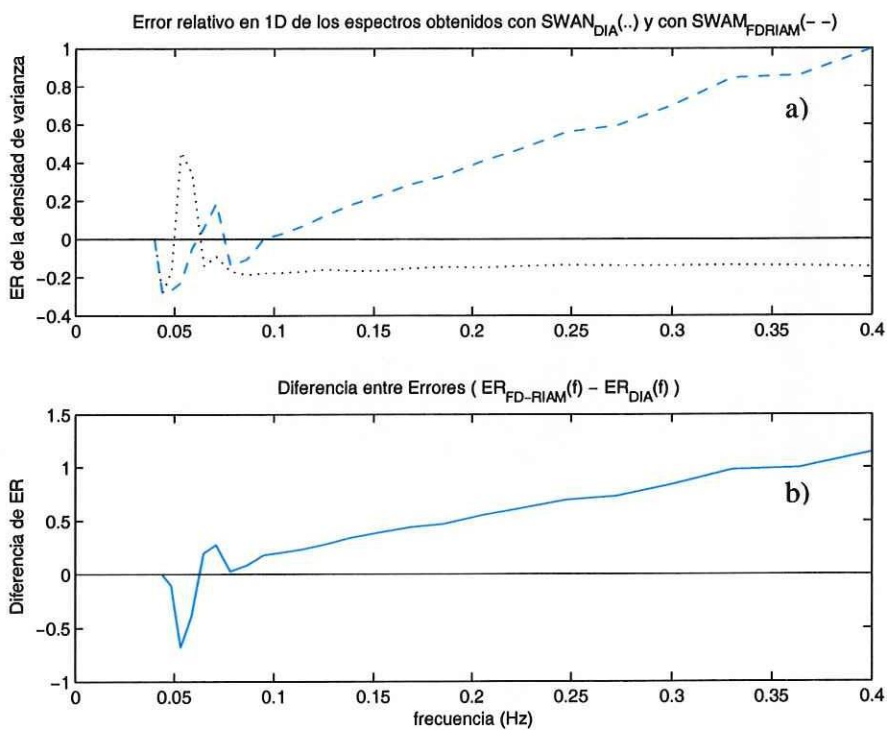


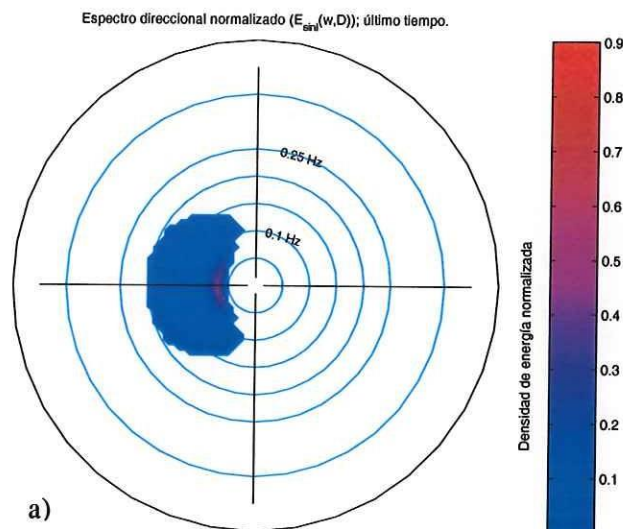
Figura 22. Diferencia relativa del espectro en una dimensión (a) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 1 y resta de las diferencias (b).

La Figura 21 muestra la diferencia relativa en dos dimensiones, entre el espectro obtenido al utilizar  $SWAN_{DIA}$  (a) y del espectro obtenido al utilizar  $SWAN_{FD-RIAM}$  (b). En esta figura se observa que la mayor desviación en ambos esquemas se encuentra casi perpendicular a la dirección predominante del viento y que el resultado de utilizar  $SWAN_{DIA}$  es el que produce la mayor desviación. La Figura 22 muestra la diferencia relativa en una dimensión de los diferentes esquemas para el cálculo del término no lineal (a): la diferencia de utilizar  $SWAN_{DIA}$  esta representado por la línea negra punteada y la de utilizar  $SWAN_{FD-RIAM}$  por la línea azul segmentada. En la Figura 22 b) se muestra el resultado de la resta de las diferencias calculadas sobre las diferentes frecuencias que componen el espectro. La región de frecuencias bajas del espectro obtenido con  $SWAN_{DIA}$  presenta mayor densidad de energía que el obtenido con  $SWAN_{FD-RIAM}$  en esa misma región y para las condiciones dadas. En cambio para la región de frecuencias altas, el espectro obtenido al utilizar  $SWAN_{FD-RIAM}$  resulta en un espectro con mayor energía que al utilizar  $SWAN_{DIA}$ .

## 6.2. Cambio repentino de $180^\circ$ en la dirección del viento.

Como resultados del Experimento 2 se presenta el conjunto de espectros uni y bidimensionales para el punto central del área de generación al cuarto día de simulación y sus respectivos términos no lineales. También se muestra y describe la diferencia relativa en una y dos dimensiones para esos espectros, asociado a  $SWAN_{DIA}$  y de  $SWAN_{FD-RIAM}$ .

En la Figura 23 se observan los espectros obtenidos al cuarto día de simulación bajo condiciones del Experimento 2 en el punto 5 como resultados de utilizar  $SWAN_{G1}$  (a), de  $SWAN_{DIA}$  (b) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (c). Los espectros son similares a los espectros calculados en el Experimento 1, sin embargo es importante hacer notar algunas diferencias. Por ejemplo que el pico del espectro calculado con  $SWAN_{G1}$  contiene menor densidad de energía, sin embargo la altura significativa calculada a partir de este espectro es mayor en este experimento que en el anterior (ver Tabla 2 de resultados). En cambio el espectro obtenido con  $SWAN_{DIA}$  presenta prácticamente la misma densidad de energía y altura significativa en los dos experimentos. Mientras que con  $SWAN_{FD-RIAM}$  contiene más energía que en el experimento anterior y un aumento en  $H_s$  menor al alcanzado por el espectro sin las interacciones no lineales.



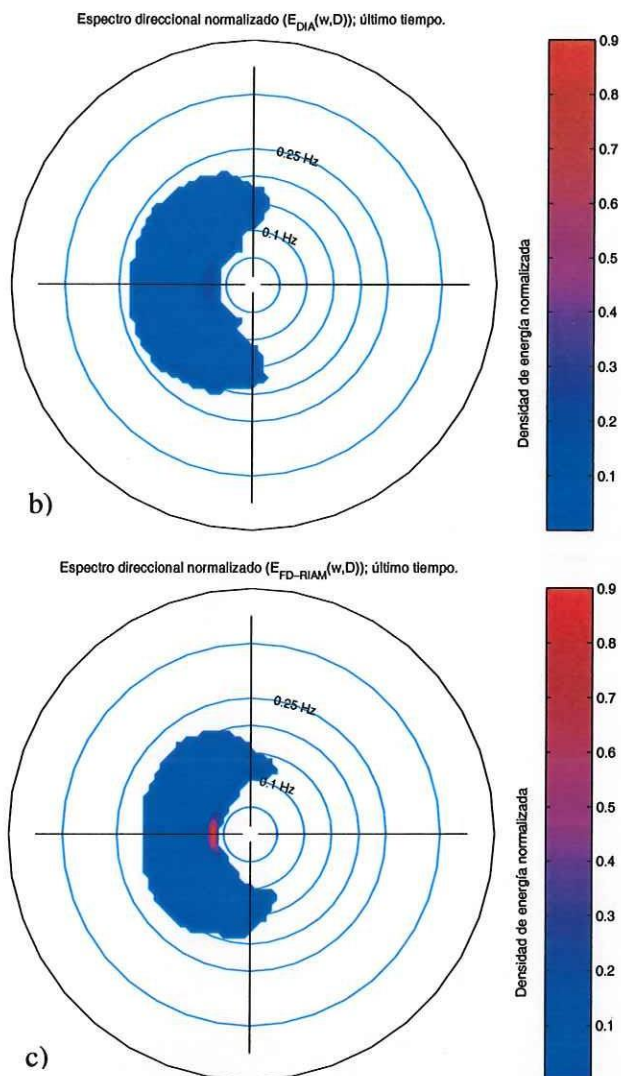


Figura 23. Estructura de  $E(\omega, \theta)$  para el último tiempo de simulación al centro del área computacional bajo condiciones del Experimento 2, obtenidos como resultado de  $SWAN_{G1}$  (a), de  $SWAN_{DIA}$  (b) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (c).

La Figura 24 muestra la estructura bidimensional del término fuente  $S_{nl}$  al utilizar de utilizar  $SWAN_{DIA}$  (a) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (b). Bajo las condiciones del Experimento 2, la estructura de  $S_{nl}$  al calcularlo con  $SWAN_{FD-RIAM}$  es menos ordenada en la región opuesta a la región del máximo que en el experimento anterior, prueba del acoplamiento no lineal entre los sistemas de oleaje. Además tampoco presenta claramente las características “lengüetas” de transferencia negativa que se observan en la Figura 18 del

término no lineal en dos dimensiones del Experimento 1, evidencia del acoplamiento no lineal entre los sistemas interactuantes bajo las condiciones impuestas en este experimento.

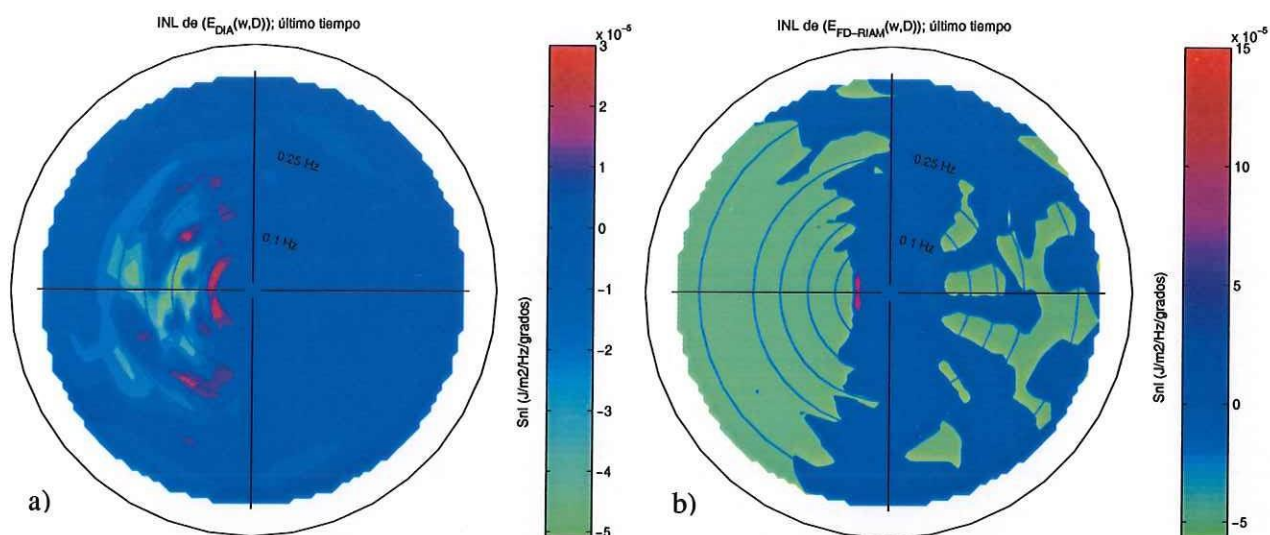


Figura 24. Estructura de  $S_{nl}(\omega, \theta)$  para el centro del área de generación asociado a los espectros obtenidos como resultado de  $SWAN_{DIA}$  (a) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (b) bajo condiciones del Experimento 2.

En la Figura 25 se muestra el espectro unidimensional obtenido con los diferentes esquemas bajo condiciones del Experimento 2 ( $SWAN_{G1}$ : línea continua de color rojo;  $SWAN_{DIA}$ : línea punteada de color negro;  $SWAN_{FD-RIAM}$ : línea segmentada de color azul), al cuarto día de simulación y en el punto 5 en el a y en el inferior los respectivos términos no lineales de utilizar  $SWAN_{DIA}$  y  $SWAN_{FD-RIAM}$ . Aunque es muy parecida a su homólogo (Figura 19), se observan diferencias sutiles entre ellas. Para este experimento el espectro más energético también es el espectro obtenido con  $SWAN_{FD-RIAM}$ , y aunque su forma sea prácticamente igual al experimento anterior, se puede observar que la frecuencia asociada al pico espectral está situado a la misma frecuencia

asociada al pico espectral del espectro calculado con  $SWAN_{GI}$  que en el Experimento 1. También se observa que el segundo pico del espectro calculado con  $SWAN_{FD-RIAM}$  presenta menor densidad de energía que en el Experimento 1. El espectro que presenta la mayor diferencia con respecto al experimento anterior es el calculado con  $SWAN_{DIA}$ , tanto en la frecuencia asociada al pico espectral como en la forma misma del espectro (mayor densidad de energía en la región de frecuencias medias y altas). De igual manera se pueden observar diferencias en el término  $S_{nl}$  del espectro calculado con  $SWAN_{DIA}$ , especialmente en la región de frecuencias medias y altas, donde presenta una menor fluctuación en torno al cero. Por el contrario, el término  $S_{nl}$  del espectro calculado con  $SWAN_{FD-RIAM}$  presenta un mínimo más cercano al cero que en experimento anterior y en la región de frecuencias medias y altas una mayor fluctuación con respecto al cero, aunque siempre con valores negativos.

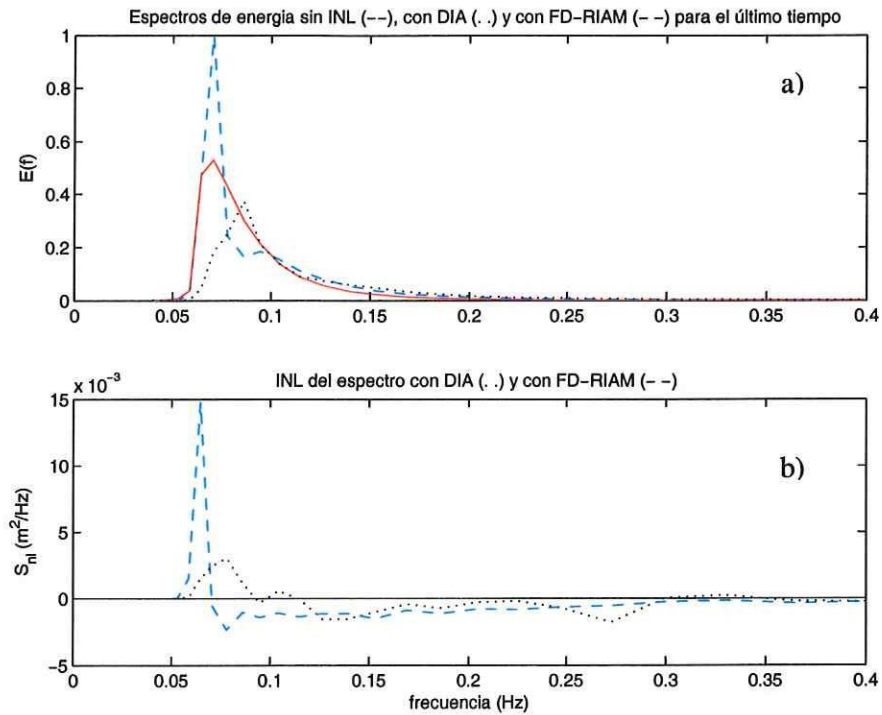


Figura 25.  $E(f)$  y su respectivo término  $S_{nl}(f)$  al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>G1</sub>(—), de SWAN<sub>DIA</sub>(···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub>(-- --) bajo condiciones del Experimento 2.

La Figura 26 muestra el espectro de oleaje obtenido como resultado de utilizar SWAN<sub>G1</sub> (línea continua de color rojo), de SWAN<sub>DIA</sub> (línea punteada de color negro) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (línea segmentada de color azul). En esta figura se observa cómo el espectro obtenido con SWAN<sub>DIA</sub> es el que presenta la mayor diferencia con el experimento anterior, el coeficiente al cual el espectro es proporcional en el intervalo de equilibrio cambia de  $n = -4.9$  a  $n = -3.5$ . El espectro obtenido con SWAN<sub>FD-RIAM</sub> parece conservar el mismo coeficiente en el intervalo de equilibrio; la mayor diferencia con el experimento anterior se encuentra en la región de frecuencias medias.

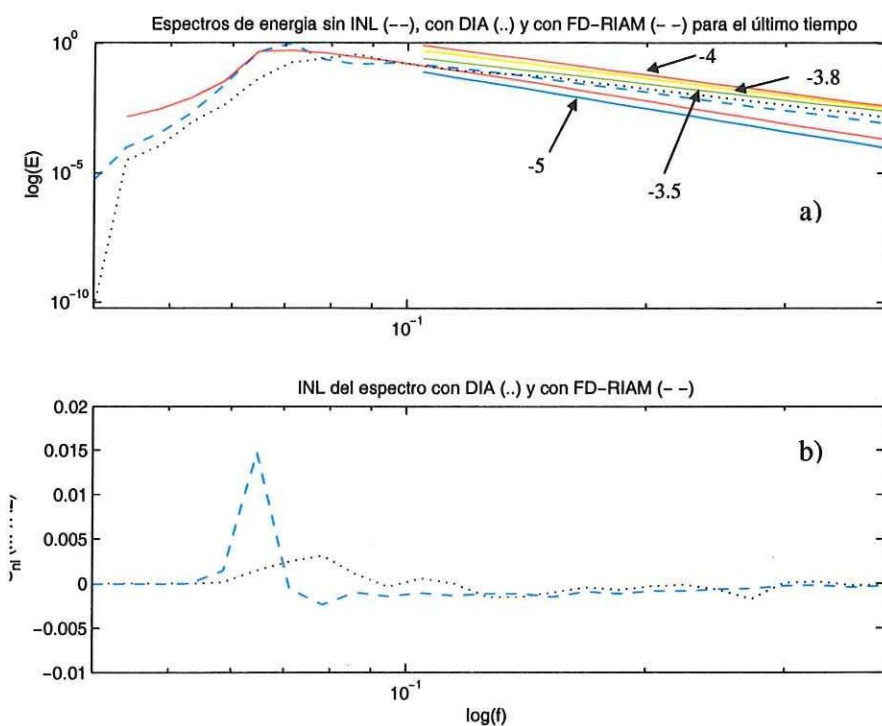


Figura 26.  $E(f)$  en escala logarítmica (a) y  $S_{nl}(f)$  en escala semilogx (b) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>GI</sub> (—), de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (--) bajo condiciones del Experimento 2; se muestran diferentes líneas teóricas de equilibrio en cierto intervalo de frecuencias (azul =  $f^{-5}$ , roja =  $f^{-4}$ , amarilla =  $f^{-3.8}$ , verde =  $f^{-3.5}$ ).

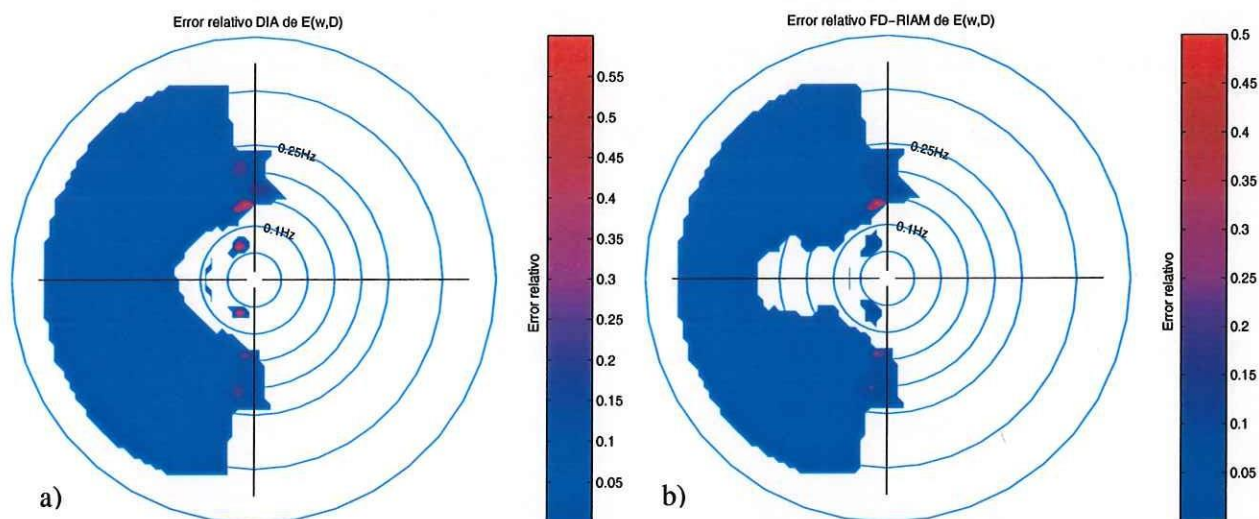


Figura 27. Diferencia relativa en dos dimensiones asociado a los espectros obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub> (a) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (b) bajo condiciones del Experimento 2.

La Figura 27 muestra la diferencia del espectro en dos dimensiones obtenido con el esquema discreto (a) y con el esquema exacto (b), relativa al espectro calculado sin el efecto de las interacciones no lineales. Se observa que la mayor diferencia tanto numérica como en área de cobertura de la diferencia, se obtuvo al utilizar  $SWAN_{DIA}$ . También se observan diferencias significativas para la porción del espectro en la dirección predominante del viento, lo que indica que en esa región el espectro está siendo muy influenciado por las interacciones no lineales.

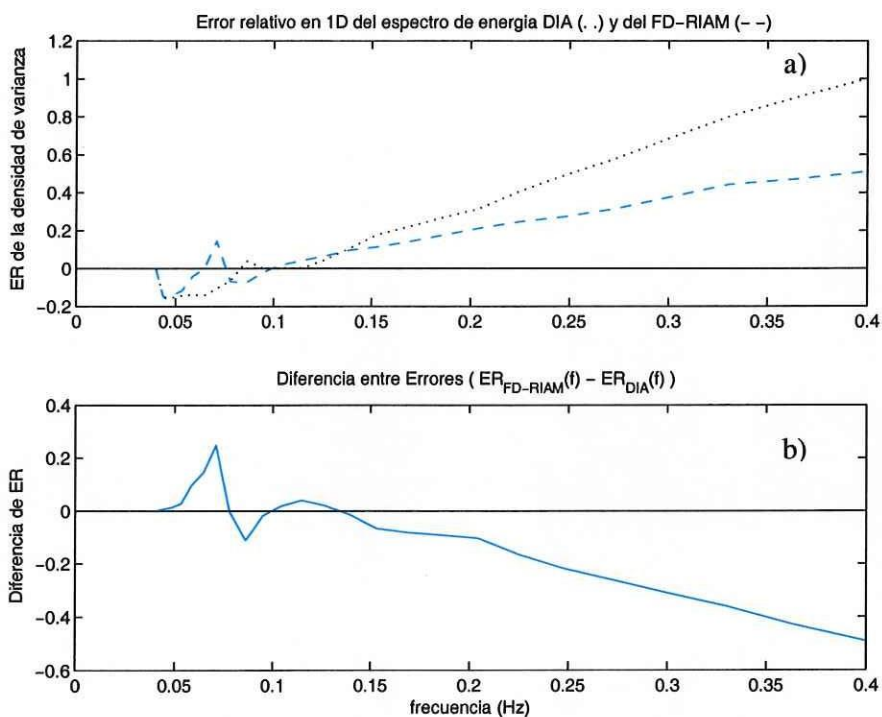


Figura 28. Diferencia relativa del espectro en una dimensión (a) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de  $SWAN_{DIA}$  (···) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (--) bajo condiciones del Experimento 2 y resta de las diferencias (b).

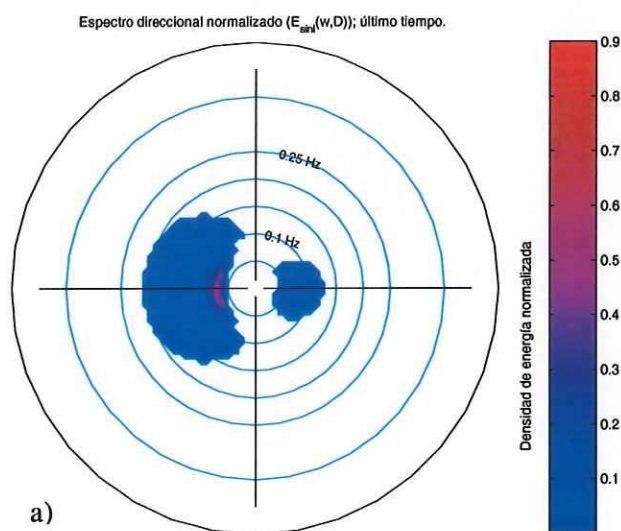
En la Figura 28 a) muestra el valor de las diferencias del espectro calculados con alguno de los dos esquemas para el término no lineal, relativas al espectro calculado sin dicho

término. Con la diferencia de estos estadísticos (Figura 28 b), se pueden identificar las regiones del espectro sobre las cuales trabaja un esquema en comparación con el otro.

### **6.3. Crecimiento del oleaje sobre oleaje libre que se propaga en dirección opuesta. Modificación al Experimento 2.**

La modificación propuesta en este experimento es simple y con poca diferencia respecto al Experimento 3, sin embargo al imponer condiciones de frontera con oleaje que se propaga hacia el interior área de generación para tiempos mayores a  $t = 0$ , los experimentos prueban el acoplamiento no lineal entre dos sistemas, y en donde si se alcanza un equilibrio más real que en los experimentos anteriores. Esto se debe a que en los experimentos anteriores el equilibrio realmente se alcanzaría hasta que el oleaje libre (estado inicial de la superficie del mar) desapareciera por completo y entonces el oleaje local se desarrollara sin el primer sistema de oleaje, llegando a una situación muy cercana al Experimento 1. Por esto, la introducción de oleaje libre como condición de frontera, en lugar de tan sólo como condición inicial, lleva realmente al estudio del acoplamiento no lineal entre dos sistemas de oleaje local y lejano. La analogía de los experimentos anteriores con la realidad es un tanto hipotética, ya que un cambio tan brusco en la dirección del viento es poco común en la naturaleza. Sin embargo se puede hacer esta analogía al inicio de los eventos antes mencionados, pero en situaciones en las que las condiciones hayan cambiado bruscamente después de periodos estables y que no se encuentre oleaje lejano arribando al área de generación.

La Figura 29 muestra los espectros obtenidos al cuarto día de simulación bajo condiciones del Experimento 3 en el punto 5 como resultados de utilizar  $SWAN_{G1}$  (a), de  $SWAN_{DIA}$  (b) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (c). Para las condiciones dadas se observa que en los tres casos existe la presencia del oleaje lejano impuesto como condición de frontera, sin embargo el espectro que presenta la mayor energía como representativa del oleaje lejano, es el calculado con  $SWAN_{G1}$ . Esto es debido al efecto que tienen las interacciones no lineales en el acoplamiento entre sistemas, las cuales transfieren energía del oleaje lejano al local; como se observa en los otros dos espectros que incluyen el término asociado a las interacciones no lineales. Esto puede ser observado también en la Figura 31, que muestra los espectros unidimensionales obtenidos con los tres métodos y sus interacciones no lineales en una dimensión (misma relación que la Figura 19).



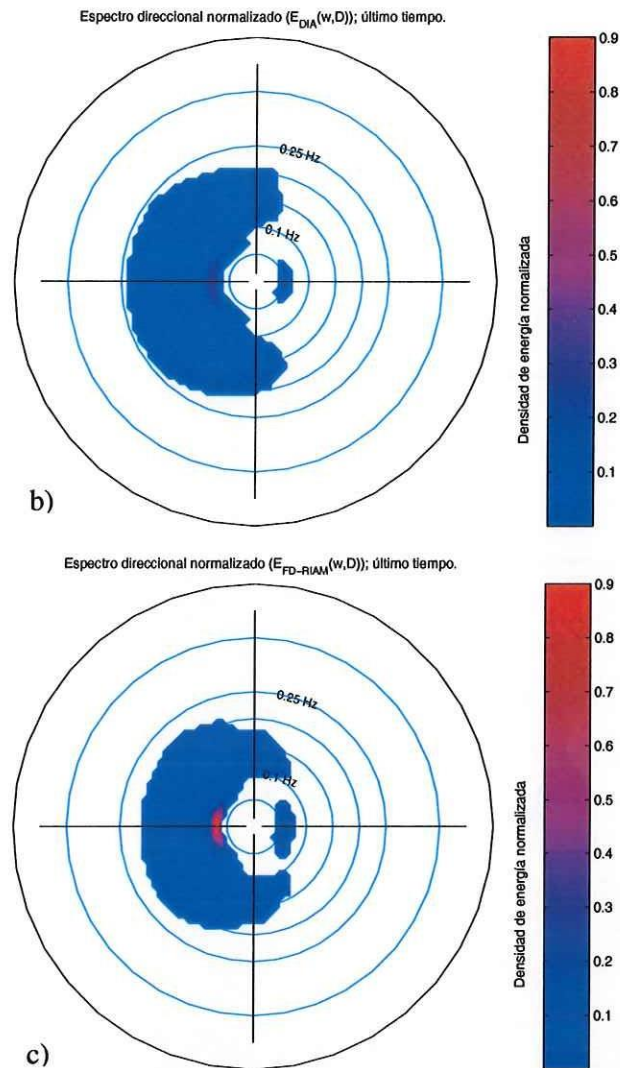


Figura 29.  $E(\omega, \theta)$  para el último tiempo de simulación al centro del área computacional bajo condiciones del Experimento 3, obtenidos como resultado de  $SWAN_{GI}$  (a), de  $SWAN_{DIA}$  (b) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (c).

En la Figura 30 se muestra el resultado de calcular el término fuente  $S_{nl}$  al utilizar  $SWAN_{DIA}$  (a) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (b) bajo condiciones del Experimento 3 para el punto de malla 5. Al igual que en los experimentos anteriores, en esta figura se puede observar cómo con el esquema DIA se obtienen patrones del término no lineal más asimétricos y limitados en el espacio de la dirección.

La Figura 32 muestra los mismos espectros obtenidos como resultado de utilizar  $SWAN_{GI}$  (línea continua de color rojo), de  $SWAN_{DIA}$  (línea punteada de color negro) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (línea segmentada de color azul) pero en escala logarítmica para ilustrar los intervalos de frecuencia en los que los espectros se encuentran en equilibrio. Al igual que en la Figura 20 y 26, se muestran diferentes líneas teóricas al cual el espectro es proporcional en el intervalo de equilibrio. La línea teórica de un espectro en equilibrio proporcional a  $f^{-3.5}$  está representada por una línea verde, la de un espectro proporcional a  $f^{-3.8}$  por una línea amarilla, la de un espectro proporcional a  $f^{-4}$  por una línea roja y la de un espectro proporcional a  $f^{-5}$  está representada por una línea azul.

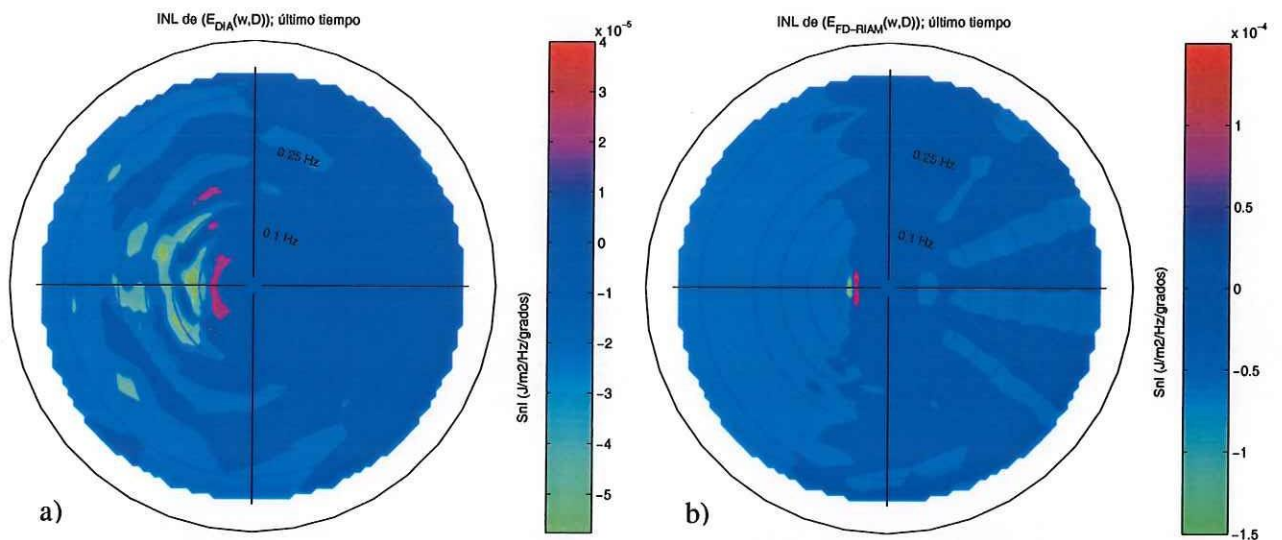


Figura 30. Estructura de  $S_{nl}(\omega, \theta)$  para el centro del área de generación asociado a los espectros obtenidos como resultado de  $SWAN_{DIA}$ (a) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$ (b) bajo condiciones del Experimento 3.

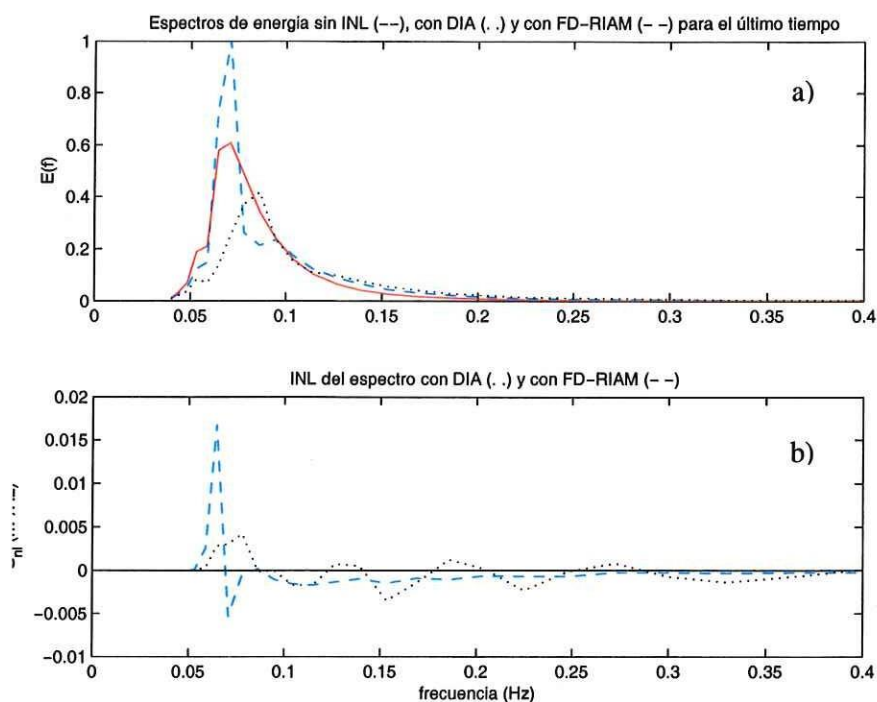


Figura 31. Forma de  $E(f)$  y de  $S_{nl}(f)$  al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de  $SWAN_{GI}$  (—), de  $SWAN_{DIA}$  (···) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (- -) bajo condiciones del Experimento 3.

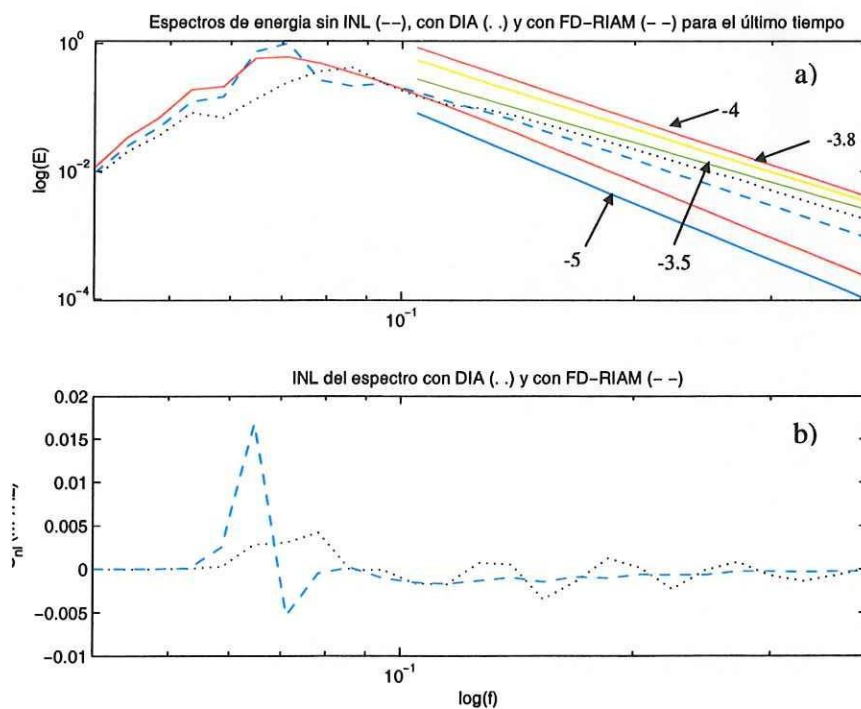


Figura 32.  $E(f)$  en escala logarítmica (a) y  $S_{nl}(f)$  en escala semilogx (b) al cuarto día de simulación obtenidos bajo condiciones del Experimento 3; se muestran diferentes líneas teóricas de equilibrio en cierto intervalo de frecuencias (azul  $=f^{-5}$ , roja  $=f^{-4}$ , amarilla  $=f^{-3.8}$ , verde  $=f^{-3.5}$ ).

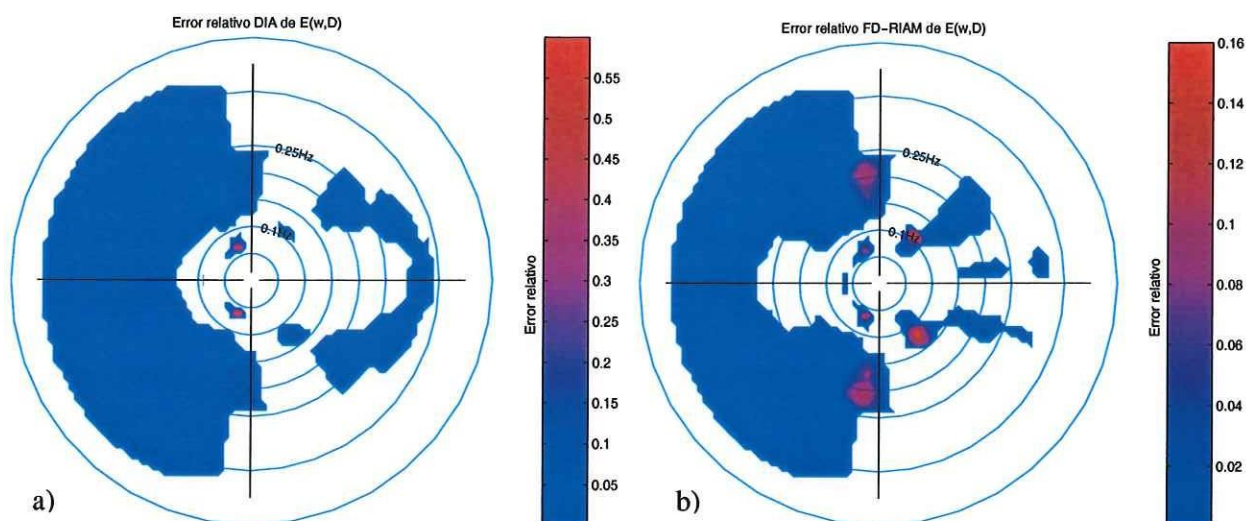


Figura 33. Diferencia relativa en dos dimensiones asociado a los espectros obtenidos como resultado de  $SWAN_{DIA}$  (a) y de  $SWAN_{FD-RIAM}$  (b) bajo condiciones del Experimento 3.

Las Figuras 33 y 34 muestran las diferencias relativas de los espectros calculados con los dos diferentes esquemas para el término no lineal, en función de la frecuencia y dirección, y en función de la frecuencia únicamente. En la Figura 34 b) se muestra la resta de las diferencias relativas entre esquemas, en donde se observa que al utilizar  $SWAN_{FD-RIAM}$ , se producen espectros con menor energía en la región de frecuencias altas y el de mayor densidad de energía en la región del pico espectral al compararlos con el espectro calculado con  $SWAN_{GI}$ . Estos resultados coinciden con los resultados del experimento anterior.

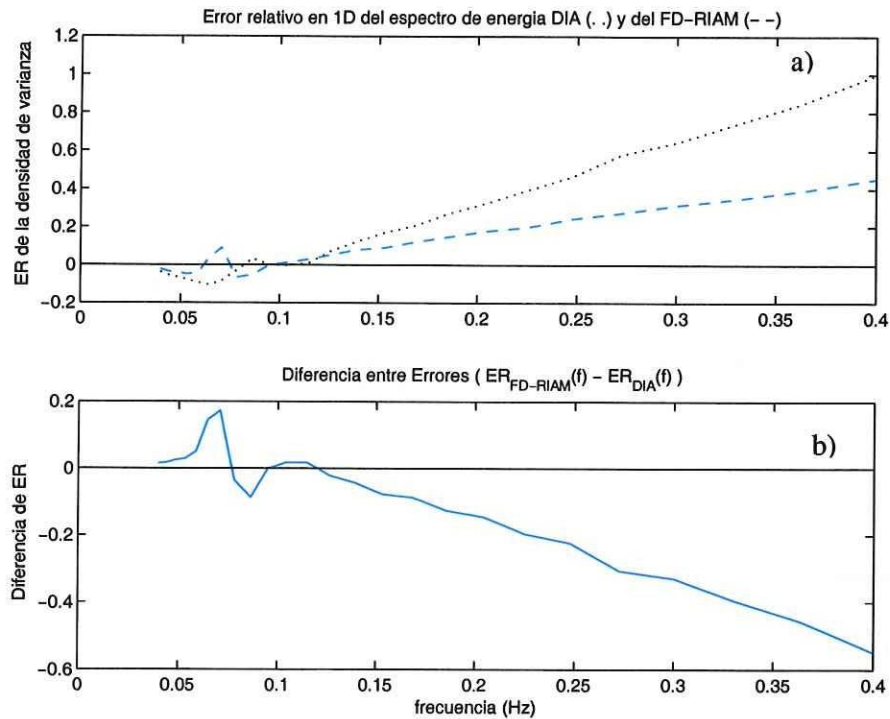


Figura 34. Diferencia relativa del espectro en una dimensión (a) al cuarto día de simulación obtenidos como resultado de SWAN<sub>DIA</sub> (···) y de SWAN<sub>FD-RIAM</sub> (- -) bajo condiciones del Experimento 3 y resta de las diferencias (b).

La Tabla 2 contiene el concentrado de algunos resultados: altura significativa  $H_s$ , período asociado al pico espectral  $T_p$ , tiempo de cálculo computacional  $t_{cpu}$  y el coeficiente  $n$  al cual es proporcional la forma del espectro en la región de equilibrio [ $E(f) \propto f^{-n}$ ] obtenidos como parte de los resultados de los distintos experimentos y con los cuales se realizó el análisis estadístico. La primer columna se refiere a los experimentos numéricos y los puntos de salida del modelo, localizados a 20, 50, 150, 250, 500, 750 y 950 km de la frontera. En las siguientes columnas se presenta el valor de las variables calculadas  $H_s$  y  $T_p$ , para cada experimento y para cada uno de los diferentes esquemas. En seguida se muestran los tiempos de cómputo necesarios, lo que da una idea de la complejidad relativa de los cálculos de los mismos. Por último se muestra el coeficiente

$n$  al cual es proporcional el espectro en la región de equilibrio. Estos coeficientes fueron adquiridos del ajuste lineal del logaritmo de la energía de los espectros en la región de equilibrio, y dan una idea del comportamiento del espectro en dicha región.

Tabla 2.- Resultados numéricos de estadísticos de oleaje calculados en los experimentos.

Ex-punto	sin INL		DIA		FD-RIAM	
	$H_s$ [m]	$T_p$ (s)	$H_s$ [m]	$T_p$ (s)	$H_s$ [m]	$T_p$ (s)
1-1	4.01	12.44	2.74	8.78	3.11	10.54
1-2	6.34	12.44	4.29	8.78	4.79	10.54
1-3	7.73	13.34	6.18	10.09	6.89	11.6
1-4	7.93	13.34	7.05	10.82	7.99	12.77
1-5	8.65	14.31	8.03	11.6	9.43	14.06
1-6	9.36	15.34	8.47	12.44	10.13	15.47
1-7	9.69	15.34	8.68	13.34	10.46	15.47
2-1	10.17	15.47	8.85	12.77	10.65	17.03
2-2	10.09	15.47	8.82	12.77	10.62	15.47
2-3	9.86	15.47	8.7	12.77	10.42	15.47
2-4	9.73	15.47	8.57	12.77	10.26	15.47
2-5	8.9	14.06	8.04	11.6	9.54	14.06
2-6	7.87	14.06	6.98	10.54	8.05	12.77
2-7	6.75	12.77	4.43	8.7	4.81	10.54
3-1	9.13	17.03	8.04	14.06	9.05	17.03
3-2	11.05	17.03	10.33	12.77	11.59	17.03
3-3	10.66	17.03	9.96	12.77	11.13	15.47
3-4	10.53	15.47	9.71	12.77	10.91	15.47
3-5	9.69	15.47	8.98	11.6	10.18	14.06
3-6	8.67	14.06	7.87	10.54	8.74	12.77
3-7	7.59	12.77	5.36	8.7	5.7	10.54
	$n$	tcpu (hr)	$n$	tcpu (hr)	$n$	tcpu (hr)
Ex-1	-5	0.492	-4.9	0.367	-3.8	29.3
Ex-2	-5	0.483	-3.5	0.475	-3.8	30.3
Ex-3	-5	0.437	-3.5	0.47	-3.9	33.3

Ex = núm de Experimento; punto = núm. de punto de salida a 20, 50, 150, 250, 500, 750 y 950km de la frontera;  $tcpu$  = tiempo de cómputo;  $n$  = constante de proporcionalidad del espectro en el intervalo de equilibrio;  $H_s$  = altura significante;  $T_p$  = período asociado al pico espectral;

## **7. ANÁLISIS ESTADÍSTICO**

Para decidir si existen diferencias estadísticamente significativas en los resultados de aplicar los experimentos y esquemas, se realizan las pruebas estadísticas pertinentes que se describen a continuación.

Para escoger el análisis estadístico a utilizar, primero se revisa que los datos cumplan con los supuestos o fundamentos estadísticos, los cuales consisten en analizar primero la multinormalidad de los datos y después la homocedasticidad de la matriz de covarianzas. En todas estas pruebas se trabajó con un nivel de confianza del 99%.

Para probar la multinormalidad de los datos se utiliza primero el método gráfico mostrado en la Figura 35. En ella se observa el ajuste de los datos a una recta compuesta por los valores del estadístico Chi-cuadrada contra la distancia de Mahalanobis, la cual mide la distancia que existe entre la media y cada valor proporcionado. Para este análisis se utilizó el programa MULTINORTEST desarrollado por Trujillo-Ortiz y Hernández-Walls (2002). Después se prueba la normalidad multivariada de manera analítica de acuerdo el método de Mardia, que prueba el grado de picudez y kurtosis de la curva de distribución de los datos. Para este análisis se utilizó el programa MSKEKUR desarrollado por Trujillo-Ortiz y Hernández-Walls (2002)

Las Tablas 3 y 4 muestran los resultados de las salidas de los programas que prueban la multinormalidad y el sesgo y la picudez de la curva de distribución de los datos.

Tabla 3.- Resultado del Análisis de Multinormalidad de los datos.

n	Variables	pendiente	t	P
21	2	0.8427	-3.9720	0.9996

Con una significancia dada de: 0.01

Con el nivel de significancia que se trabajo, se puede decir que es confiable hacer la suposición de que los datos cumplen con una normalidad multivariada.

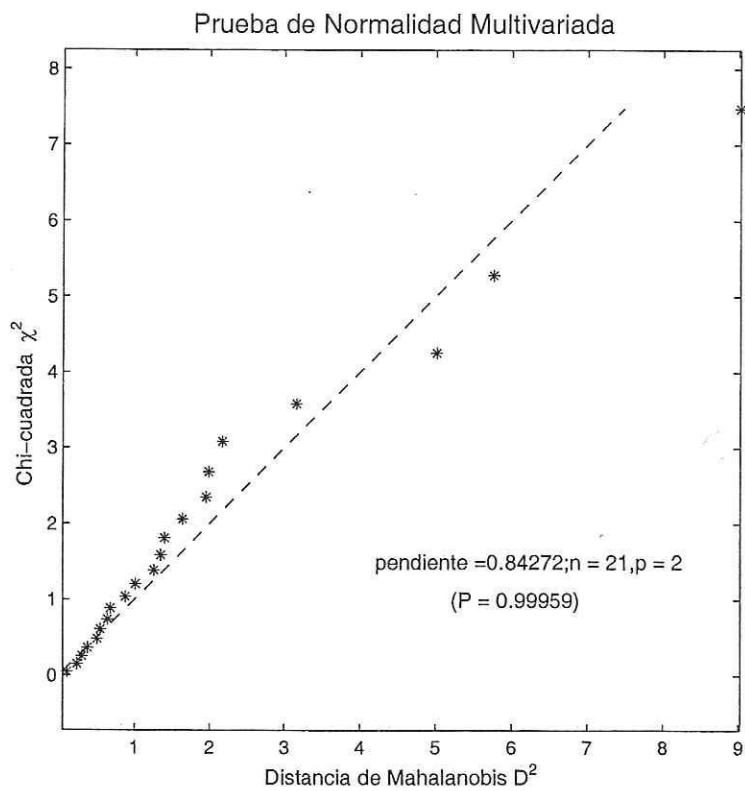


Figura 35. Método gráfico de multinormalidad de acuerdo a Trujillo-Ortiz y Hernández-Walls 2002.

Tabla 4.- Resultado del análisis de la picudez y kurtosis multivariada de Mardia.

Multivariada	Coefficiente	estadístico	gl	P
Sesgo	1.7870	7.8630	4	0.0967
Picudez	8.2767	0.1585		0.8741

Con una significancia dada de: 0.01

El valor de P para ambas pruebas es mayor al nivel de significancia dada, lo que indica que tanto el sesgo como la picudez multivariadas resultan no significativas, por lo que existe evidencia estadísticamente significativa para decir que los datos se distribuyen de manera normal.

Por último se prueba la homogeneidad de las matrices de covarianzas de las variables, u homocedasticidad, con la prueba MBOX desarrollado por Trujillo-Ortiz y colaboradores (2002). La Tabla 5 muestra los resultados de este programa.

Tabla 5.- Resultado del Análisis de homogeneidad de covarianzas.

MBox	F	gl1	gl2	P
16.7837	2.3463	6	8075	0.0289

Con una significancia dada de: 0.01.

Se puede observar que el valor de P es mayor al nivel de significancia dada, esto indica que no existen evidencias estadísticamente significativas para decir que las matrices de covarianzas sean diferentes, por lo que se concluye que son iguales.

Una vez probados los supuestos o fundamentos estadísticos, se realiza la prueba de análisis de varianza multivariada (MANOVA) de dos vías para probar las diferencias medias de las variables en varias muestras con dos factores. Para este caso en particular se tienen dos factores y dos variables con las que se hará la prueba. El primer factor está representado por los tres experimentos descritos en la sección 5. El segundo factor está representado por las diferentes representaciones  $SWAN_{G1}$ ,  $SWAN_{DIA}$  y  $SWAN_{FD-RIAM}$ . Las variables estimadas son la altura significativa ( $H_s$ ) y el período asociado al pico espectral ( $T_p$ ); que se obtuvieron en siete puntos a lo largo del área de generación durante la última hora de simulación. Con esto se tienen tres niveles del factor 1, tres del factor 2 y siete muestras por variable, por lo que se tiene un número de muestra  $m = 63$ . Para esta prueba se utilizó el programa MAOV2 desarrollado por Trujillo-Ortiz y Hernández-Walls (2003) en la Universidad Autónoma de Baja California, de uso público y accesible desde la red.

Esta prueba considera las matrices de la suma de cuadrados entre los valores de la variable y entre los factores. Debido a que el número de muestra es mayor a 25, se trabaja bajo la suposición de que los datos se aproximan a una distribución Chi-cuadrada. Se trabaja con un nivel de confianza del 99%.

Lo primero que se muestra con esta prueba, es si existen, o no, efectos de interacción entre los factores 1 y 2, en este caso entre los experimentos realizados y los esquemas escogidos. Después se prueban los efectos de la interacción del factor 1 y por último los de la interacción del factor 2.

Las Tablas 6, 7 y 8 presentan los resultados del programa MAOV2 para cada una de las posibles interacciones entre los factores:

Tabla 6.- Resultado del Análisis de Varianza Multivariada para interacción entre factores 1 y 2.

<i>m</i>	Niveles	VARIABLES	Lambda	Chi-sqrt.	gl	P
63	9	2	0.9484	2.8870	8	0.9412

Con una significancia dada de: 0.01

Los efectos de interacción entre los factores 1 y 2 resultan ser estadísticamente no significativos, por lo que no existe evidencia estadística para decir que existe interacción entre los diferentes experimentos y los diferentes esquemas escogidos. Esto es de esperarse pues son factores independientes que no deberían de estar relacionados; el primer factor son situaciones bajo las cuales actuará el segundo factor. Al haber demostrado que los factores son independientes, se prueban entonces los efectos del factor 1, o la interacción entre los Experimentos 1, 2 y 3.

Tabla 7.- Resultado del Análisis de Varianza Multivariada para interacción entre factor 1.

<i>n</i>	Niveles	VARIABLES	Lambda	Chi-sqrt.	gl	P
63	3	2	0.8119	11.1489	4	0.0249

Con una significancia dada de: 0.01.

Los vectores medios del factor 1 resultan estadísticamente significativos, lo que indica que existe evidencia estadística para decir que los resultados obtenidos bajo las

condiciones de los diferentes experimentos si tienen relación. Esto indica que los diferentes experimentos planteados si tienen efecto sobre los resultados obtenidos. Una vez demostrada la interacción entre el factor 1, se prueban los efectos del factor 2, o la interacción entre los esquemas utilizados.

Tabla 8.- Resultado del Análisis de Varianza Multivariada para interacción entre factor 2.

n	Niveles	VARIABLES	Lambda	Chi-sqrt.	gl	P
63	3	2	0.3983	49.2531	4	0.0000

Con una significancia dada de: 0.01.

Los vectores medios del factor 2 resultan estadísticamente significantes, lo que significa que existe evidencia estadística para decir que los resultados obtenidos con los diferentes esquemas tienen interacción. Esto indica que las diferentes representaciones del espectro si tienen efecto sobre los parámetros estadísticos del oleaje.

A pesar de encontrar diferencias significativas en los parámetros estadísticos del campo de oleaje obtenido como resultado de utilizar el modelo SWAN bajo los diferentes experimentos y esquemas, con estos análisis todavía no se puede decir nada acerca de la influencia de los experimentos y esquemas sobre la forma del espectro en el intervalo de equilibrio. Para esto es necesario utilizar una prueba estadística que compare la pendiente de la energía contenida por banda de frecuencia en la región de equilibrio, de los espectros obtenidos al utilizar  $SWAN_{G1}$ ,  $SWAN_{DIA}$  y  $SWAN_{FD-RIAM}$ . Esto se logra mediante la comparación de las ecuaciones de regresión lineal simple de las pendientes

de los espectros obtenidos como resultado de la combinación de los experimentos con los esquemas. Esta combinación da un total de nueve espectros en el intervalo de equilibrio para la comparación.

Para probar la hipótesis de que las pendientes son iguales se utiliza el programa ARSOS, desarrollado por Trujillo-Ortiz y colaboradores (2004) en la Universidad Autónoma de Baja California, de uso público y accesible desde la Internet. Con este programa se prueba la homogeneidad de los coeficientes de regresión ( $H_0: b_1 = b_2 = \dots = b_k$ ) de una serie de datos, con el estadístico F. Si la hipótesis nula es rechazada, se prueba cuáles pendientes difieren entre sí mediante el estadístico  $q$  de Tukey para comparación múltiple.

En estas pruebas se trabaja con un nivel de significancia de 95% para hacer la prueba un poco más robusta.

La Tabla 9 muestra los resultados de la primer parte del programa ARSOS, en los que se presenta el número de espectro o muestra, la suma de cuadrados de la variable independiente (la frecuencia)  $SC_x$ , la suma de cuadrados de la variable dependiente (la densidad de energía)  $SC_y$ , la suma de productos cruzados  $SC_{xy}$ , el número de muestras para cada intervalo de equilibrio del espectro  $m$ , la pendiente de la regresión de las muestras  $b_1$ , la suma de cuadrados del error  $SC_e$ , definido como:  $error = SC_y - \left( \frac{SC_{xy}^2}{SC_x} \right)$  y

los grados de libertad  $gl$ .

Tabla 9.- Resultados de la prueba de las diferencias entre las funciones de regresión.

Muestra	SCx	SCy	SCxy	m	bl	SCe	gl
1	2.58	62.48	-12.69	15	-4.9229	0.01	13
2	2.58	57.80	-12.20	15	-4.7329	0.06	13
3	2.58	39.68	-10.11	15	-3.9214	0.04	13
4	2.58	61.08	-12.55	15	-4.8671	0.01	13
5	2.58	29.58	-8.72	15	-3.3809	0.12	13
6	2.58	40.17	-10.17	15	-3.9457	0.03	13
7	2.58	62.61	-12.70	15	-4.9280	0.01	13
8	2.58	29.51	-8.70	15	-3.3746	0.15	13
9	2.58	40.09	-10.16	15	-3.9420	0.03	13

Con una significancia dada de: 0.05.

La probabilidad asociada a la prueba F para las pendientes es menor a 0.05, por lo que la suposición de que las pendientes de las regresiones de la población de espectros de oleaje son iguales, no es válida, por lo que se concluye que son diferentes. Ahora se procede a buscar en cuál de las permutaciones de pares de pendientes entre los espectros se encuentra diferencia, mediante el estadístico  $q$  de Tukey.

La Tabla 10 presenta los resultados de la segunda parte del programa ARSOS, la cual prueba el par de espectros que son diferentes. En la tabla se presenta el par de espectros con los que se está haciendo la comparación<sup>6</sup>, la diferencia de los coeficientes de regresión de los espectros comparados, el estadístico de Tukey calculado  $q$ , el estadístico de Tukey esperado  $q_e$  y la decisión de significancia.

<sup>6</sup> 1 representa el espectro del 1<sup>er</sup> esquema bajo condiciones del 1<sup>er</sup> experimento, 2 el del 2<sup>o</sup> experimento, 3 el del 3<sup>er</sup> experimento, 4 el del 2<sup>o</sup> esquema bajo condiciones del 1<sup>er</sup> experimento y así sucesivamente.

Tabla 10.- Resultados de la prueba de comparación múltiple entre pendientes.

Comparac.	Diferencia	$q$	$qe$	Decisión
9 8	0.5674	14.758	4.574	S
9 7	0.9860	25.645	4.574	S
9 6	0.0037	0.096	4.574	NS
9 5	0.5611	14.593	4.574	S
9 4	0.9251	24.061	4.574	S
9 3	0.0206	0.535	4.574	NS
9 2	0.7909	20.571	4.574	S
9 1	0.9809	25.512	4.574	S
8 7	1.5534	40.403	4.574	S
8 6	0.5711	14.854	4.574	S
8 5	0.0063	0.165	4.574	NS
8 4	1.4925	38.819	4.574	S
8 3	0.5468	14.223	4.574	S
8 2	1.3583	35.329	4.574	S
8 1	1.5483	40.270	4.574	S
7 6	0.9823	25.549	4.574	S
7 5	1.5471	40.239	4.574	S
7 4	0.0609	1.585	4.574	NS
7 3	1.0066	26.180	4.574	S
7 2	0.1951	5.075	4.574	S
7 1	0.0051	0.133	4.574	NS
6 5	0.5648	14.690	4.574	S
6 4	0.9214	23.965	4.574	S
6 3	0.0243	0.631	4.574	NS
6 2	0.7872	20.475	4.574	S
6 1	0.9772	25.416	4.574	S
5 4	1.4861	38.654	4.574	S
5 3	0.5405	14.058	4.574	S
5 2	1.3520	35.164	4.574	S
5 1	1.5419	40.106	4.574	S
4 3	0.9456	24.596	4.574	S
4 2	0.1342	3.490	4.574	NS
4 1	0.0558	1.452	4.574	NS
3 2	0.8115	21.106	4.574	S
3 1	1.0014	26.047	4.574	S
2 1	0.1900	4.942	4.574	S

Con un nivel de significancia dada de: 0.05, las comparaciones múltiples pueden ser significantes (S) o no significantes (NS).

Los resultados de esta prueba es evidencia de que existen diferencias estadísticamente significativas en las pendientes de los espectros obtenidos con los diferentes esquemas, por lo que la diferente representación del término fuente  $S_{nl}$  influye decisivamente en la forma del espectro en la región de equilibrio.

Los resultados de esta prueba sugieren que el uso de un esquema exacto para el cálculo de las interacciones no lineales como el FD-RIAM, hace que a tiempos largos de simulación, el espectro sea menos dependiente de las condiciones iniciales del estado del mar, ya que con ese esquema no se encontraron diferencias entre los experimentos, a diferencia del uso del esquema discreto. Las implicaciones de adoptar cualquiera de las representaciones en la evolución del espectro comparadas en este estudio son discutidas más adelante.

## **8. DISCUSIÓN**

Paradoja de los Modelos de Primera Generación: las bandas de frecuencia se van “llenando” hasta un valor máximo de energía por banda que definen la forma final del espectro, sin embargo estos valores de saturación se obtuvieron de espectros medidos considerados en estado de equilibrio o completamente desarrollados y no permiten la evolución espacio temporal del espectro de oleaje como resultado de los términos fuente involucrados, puesto que la forma del espectro ya está predeterminada. En los modelos de Tercera Generación el espectro no tiene una forma preestablecida. Más bien la forma final del espectro evoluciona “libremente” y es el resultado únicamente de los términos fuente involucrados, o sea de las condiciones bajo las cuales esté sometida la superficie del agua. Al cambiar únicamente la representación del término no lineal al reproducir la evolución del espectro, las diferencias observadas se deben a la representación de dicho término.

Aún cuando se tiene información del espectro en cada punto de la malla computacional, sólo son mostrados y analizados los espectros uni y bi dimensionales del punto localizado al centro del área de simulación y con los cuales se calcula el diferencia relativa en una y dos dimensiones. Este punto fue escogido bajo la suposición de que al final de la simulación, el estado en equilibrio ya fue alcanzado en toda el área, y como se encuentra en el centro del dominio computacional, es posible realizar la comparación con los siguientes experimentos que representan diferentes situaciones. Con esto se elimina la posibilidad de introducir en la comparación, los errores de propagación

(términos advectivos en la ecuación (3.3)) y de las fronteras inherentes al esquema numérico de integración de los términos de la ecuación de balance de acción del oleaje utilizado en el modelo. Esta suposición se hizo con base en los resultados del Experimento 1 donde se reproducen las curvas de crecimiento del oleaje bajo condiciones dadas. En las Figuras 14, 15 y 17 (de la evolución temporal de algunas propiedades del espectro del oleaje) se observa que las diferentes variables analizadas convergen a un valor con el paso del tiempo, lo que indica que el espectro se encuentra en balance energético. Por esto, aún cuando no sea alcanzado el límite asintótico en el espacio (en la dirección predominante del viento), el límite asintótico temporal si es logrado en periodos largos de simulación (por ejemplo 96 hrs), presentándose una situación de crecimiento de oleaje limitado por fetch.

Las dimensiones de la malla computacional se escogieron siguiendo las características de las mallas computacionales con las que se trabajó en el experimento del Grupo SWAMP (1985), ya que representa uno de los mejores y más citados experimentos numéricos de comparación de modelos de simulación de oleaje. Aún cuando los modelos comparados en ese experimento sean de Segunda Generación, marca la base de la geometría básica necesaria para una comparación numérica del desempeño de diferentes modelos de simulación de oleaje.

El límite asintótico de la curva de crecimiento de la energía contenida en el espectro del oleaje (Figura 13) no es alcanzado en realidad. Esto podría fácilmente ser atribuido a los efectos de las interacciones no lineales sobre la evolución del espectro, las cuales dan

energía a frecuencias bajas y altas a expensas de la energía de las frecuencias medias. Sin embargo la curva de crecimiento del espectro calculado sin término no lineal tampoco alcanza al límite asintótico, lo que indica que el área de generación no fue suficiente para la intensidad del viento dada. Aunque también podría ser atribuido a la dispersión y difusión numéricas inherentes al método de solución de la ecuación (4.1), que, aunque han sido reducidos significativamente (Zijlema, 2004), pueden llegar a ser considerables para periodos largos de simulación (comunicación personal Padilla-Hernández, 2003).

Los resultados muestran que a pesar de no ser alcanzado el límite asintótico de acumulación de energía por parte del espectro de densidad del oleaje en función de la distancia, lo que comúnmente se conoce como un “mar completamente desarrollado”, el límite asintótico en la curva del corrimiento de la frecuencia relacionada al pico espectral sí es alcanzado. Esto se observa en la Figura 13 b). Es importante mencionar que esta situación puede ser ficticia, pues probablemente es causada por la discretización de la frecuencia en bandas, mientras que la energía puede adquirir cualquier valor. Esto puede hacer que en cierto momento la frecuencia adquiera un valor todavía menor de haberse tenido una mayor longitud del área de generación.

Existen tres mecanismos generales que contribuyen a la relajación direccional del oleaje:

- 1) el suministro de energía por el viento a un nuevo oleaje local; formando un nuevo sistema,
- 2) la atenuación del oleaje libre y
- 3) las interacciones no lineales débiles que transfieren energía del oleaje libre al oleaje local.

De estos tres procesos, el

acoplamiento entre el oleaje lejano y el oleaje local es el que produce las mayores desviaciones al reproducir el relajamiento (SWAMP Group, 1985).

Los cálculos exactos de la transferencia de energía por interacciones no lineales para un número de espectros de oleaje lejano y oleaje local sobrepuestos realizados por Hasselmann (1963), indican que el acoplamiento entre los sistemas es débil hasta que las frecuencias relacionadas al pico espectral del oleaje lejano y el oleaje local son similares. A partir de este momento la interacción se incrementa rápidamente y el acoplamiento no lineal de energía entre oleaje preformado y el local, hace perder energía al oleaje lejano y disminuir su frecuencia aún más. La distribución espectral rápidamente cambia a una forma unimodal en la que el pico del oleaje local desaparece y el oleaje lejano se ensancha en frecuencia (Masson, 1993).

Se ha sugerido que en teoría, la región de frecuencias altas del espectro de oleaje está determinada enteramente por los armónicos generados por las olas rompientes más largas si la superficie se encuentra saturada por una gran cantidad de olas rompientes de diversas longitudes (Belcher y Vassilicos, 1997). Sin embargo esta situación sólo es posible con velocidades de viento muy grandes.

A pesar de esto también se ha probado que a medida que el campo de oleaje madura, una gran porción de componentes de alta frecuencia entra en fase con las componentes dominantes del espectro de oleaje. La contribución al espectro de oleaje de los armónicos de alta frecuencia se vuelve cada vez más importante con relación a la

contribución de los armónicos generados por las ondas libres de cresta larga. Esto sugiere que los modos acoplados en fase observados, son generados por los patrones de las pequeñas olas bidimensionales de pendiente pronunciada, más que por el oleaje lejano propagado a su propia velocidad de fase (Hara y Karachintsev, 2003).

En las Figuras 19, 25 y 31 se observa que los espectros obtenidos al utilizar SWAN<sub>FD-RIAM</sub>, son más angostos y contienen una mayor energía, que cuando se calcula la evolución del espectro unidimensional del oleaje con SWAN<sub>DIA</sub> y aún cuando los efectos del término no lineal no son incluidos en SWAN<sub>G1</sub>.

Durante la simulación del espectro sin el término no lineal no se presenta la sobresaturación (*overshoot*) observada en la evolución de los espectros calculados con el efecto de las interacciones no lineales y en espectros medidos (Young, 1999). Como es de esperarse, el esquema exacto reproduce esta situación claramente. En la simulación sin término no lineal más bien se van “llenando” las diferentes bandas de frecuencia hasta alcanzar un valor de saturación para cada frecuencia y esto determina la forma final de espectro. En este caso (cuando no se reproduce el efecto de las interacciones no lineales entre componentes del espectro) el equilibrio es función únicamente del suministro de energía por parte del viento y de la disipación de dicha energía por rompiente.

Es importante notar en el espectro unidimensional del oleaje obtenido con el esquema FD-RIAM en el Experimento 1 (Figura 20), la presencia de dos picos o máximos de

energía cuando se esperaría encontrar tan sólo uno como en los experimentos con los otros dos esquemas. Esta bimodalidad del espectro podría llegar a interpretarse como la presencia e interacción de dos sistemas diferentes, sin embargo al analizar la evolución temporal del espectro de dicho experimento, se hace notorio que el segundo pico es producto del esquema escogido para resolver la interacción no lineal de las diferentes componentes del espectro. Ese segundo pico es precisamente resultado de la transferencia de energía por parte de las interacciones no lineales (calculadas de manera exacta), hacia componentes de más alta frecuencia que viajan hacia  $\pm 45^\circ$  de la dirección del pico espectral. Esta energía aparece como un segundo pico al hacer la integración con respecto a  $\theta$  para obtener el  $E(f)$ . También es posible encontrar energía en componentes que viajan incluso en sentido opuesto a la dirección asociada al pico espectral, en los resultados del esquema exacto para el cálculo de la transferencia no lineal que involucra todas las configuraciones interactuantes posibles.

En la Figura 15 (distribución direccional de la energía del espectro) se observa que los límites asintóticos efectivamente son alcanzados, y que el espectro con la mayor dispersión es el obtenido con el esquema DIA, seguido por el del esquema FD-RIAM y por último el obtenido sin las interacciones no lineales. Esta situación se debe claramente al hecho de no incluir el efecto de las interacciones no lineales que no sólo van a redistribuir la energía en función de la frecuencia, si no también en función de la dirección relativa de las componentes del espectro, transfiriendo energía en todas direcciones. Esta situación puede ser observada también en la Figura 18 que ilustra el valor de la función fuente asociada a las interacciones no lineales en términos de la

frecuencia y la dirección para ambos esquemas utilizados. En estas figuras se observa que el campo de acción de las interacciones no lineales del esquema FD-RIAM, es mucho mayor que para el esquema DIA, esto es, el espacio spectral o intervalo de interacción de frecuencias y sobre todo de las direcciones sobre las cuales trabaja el esquema FD-RIAM es mayor al del esquema DIA.

A simple vista podría parecer que la distribución direccional de la energía de los espectros calculados con el esquema FD-RIAM es mayor a la de los espectros obtenidos con el esquema DIA. Sin embargo al analizar detalladamente los resultados de los diferentes experimentos, no sólo el valor numérico del esparcimiento direccional que sí es mayor para el esquema DIA, se puede observar el porqué de esta situación. Al comparar la evolución temporal de los espectros unidimensionales calculados sin las interacciones no lineales, contra la evolución obtenida tomando en cuenta el término no lineal, se observa que los espectros calculados con el efecto del término no lineal van realmente evolucionando a través del tiempo, cambiando de forma constantemente, lo que produce una verdadera "emigración" del pico spectral hacia frecuencias más bajas. En el caso de los espectros sin interacciones no lineales esta emigración del pico spectral se presenta más bien como una sobreposición de espectros, más que como una evolución de los mismos. Esto es claramente resultado de dos consideraciones, primero de no imponer límites superiores de energía por banda de frecuencia en la forma del espectro, y segundo de la transferencia de energía debido a interacciones no lineales entre diferentes componentes del espectro que establecen flujos de energía entre las diferentes regiones del espectro.

La Figura 29 a) (espectro obtenido de utilizar  $SWAN_{G1}$ , se observan claramente dos sistemas de oleaje, lo que concuerda con lo esperado pues no existe transferencia de energía entre ellos. Sin embargo en la representación unidimensional de este espectro (línea continua de color rojo en Figura 31 a) este rasgo no es observado como una bimodalidad en si, más bien como un quiebre en la región de frecuencias bajas del espectro. Esto sugiere que el sistema de oleaje lejano propagándose hacia el oeste es muy poco energético a comparación del oleaje generado localmente, esto hace que en las otras representaciones no sea tan observable, pues además de ser poco energético, está habiendo transferencia de energía entre los sistemas debido al efecto de las interacciones no lineales.

Los Modelos de Primera Generación no incluyen el término no lineal, lo que obliga necesariamente a ajustar los otros dos términos fuente para asegurar la estabilidad del espectro. Específicamente el término de entrada es forzado a introducir mayor energía por banda de frecuencia para compensar la falta de energía que debería estar redistribuyendo el término no lineal. El hacer esto hasta cierto punto podría estar sesgando la información, sin embargo es necesario reiterar que el incluir simulaciones sin el término fuente de la transferencia no lineal de energía, sirve únicamente como marco de referencia para la comparación entre los dos esquemas de resolver el término no lineal de la ecuación (3.7), no implica en ningún momento que el hacerlo así sea la manera correcta.

En general, al incluir el efecto de las interacciones no lineales se obtienen espectros con mayor energía en frecuencias más altas que al no incluirlas. También es claro que en presencia del término no lineal, el espectro adquiere cierta direccionalidad característica de espectros desarrollados, que es resultado del constante trabajar de las interacciones no lineales sobre el espectro. Esta diferencia se hace clara una vez alcanzado el estado de equilibrio espectral en función del tiempo para un punto dado, en donde se observa que a ambos lados de la región del pico espectral se encuentran las mayores diferencias entre la representación del espectro con interacciones no lineales y sin ellas (observado en las figuras del Diferencia relativa en dos dimensiones).

La configuración y forma de los espectros uni y bidimensionales del oleaje obtenidos en los experimentos muestran tendencias similares entre los distintos experimentos. Por lo que de manera general, los espectros calculados sin el término no lineal son más angostos en frecuencia y menos dispersos en dirección, que los obtenidos con el término no lineal. Sin embargo al hacer una comparación más detallada entre los esquemas para  $S_{nl}$ , se puede concluir que los espectros calculados al usar el esquema FD-RIAM presentan mayor esparcimiento direccional y una región del pico espectral con menor dispersión en frecuencia, además de picos espectrales con mayor densidad de energía (por un factor de tres) al compararlos con los espectros obtenidos con el esquema DIA. Esto es, con el esquema exacto se observa energía viajando en un intervalo de direcciones más amplio, pero la energía se encuentra más concentrada en la porción del pico espectral que con el esquema discreto. Por lo que en general, en el estado cercano al equilibrio calculado con un esquema como el DIA, los espectros contendrán menor

energía en la frecuencia relacionada al pico espectral ( $f_p$ ) y más energía en frecuencias más altas que la relacionada al pico espectral ( $f \gg f_p$ ) que en los espectros calculados con un esquema como el FD-RIAM. También la frecuencia relacionada al pico espectral será menor (períodos más largos) con FD-RIAM que con DIA, debido probablemente a la magnitud del término  $S_{nl}$  (el cual es un orden de magnitud mayor con el esquema exacto que con el discreto), lo que hace que el pico espectral tenga un corrimiento hacia las frecuencias bajas más rápido. Esto por supuesto da como resultado espectros con picos menos energéticos y más anchos en frecuencia al calcularse con el esquema DIA, y espectros más angostos y más energéticos al calcularse con el esquema FD-RIAM.

## 9. CONCLUSIONES

- Los resultados obtenidos sugieren que la forma del espectro del oleaje cercano al equilibrio, está fuertemente influenciada por la manera de representar el término fuente  $S_{nl}$ , ya sea de manera discreta o exacta, y es completamente diferente en ambos casos bajo los escenarios planteados.
- La forma del espectro del oleaje en la etapa cercana al equilibrio, calculada con un esquema exacto para el término fuente asociado a las interacciones no lineales (FD-RIAM), presenta más del doble de densidad de energía y menor esparcimiento (en el dominio de la frecuencia) en la región cercana al pico espectral, así como mayor distribución direccional de la energía (en el dominio de la dirección) en la región de frecuencias medias-altas y progresivamente menor energía hacia frecuencias altas que el espectro calculado con un esquema discreto (DIA).
- El uso de un esquema exacto para la representación del término no lineal produce un flujo de energía positivo en la región del pico espectral del doble que al utilizar un esquema discreto, sin embargo para la región de frecuencias altas, el flujo no lineal de energía obtenido con el esquema discreto es dos veces mayor al obtenido con el esquema exacto.
- La presencia de oleaje lejano propagándose en sentido opuesto al oleaje local, parece no tener mucho efecto en la forma del espectro en la región de frecuencias altas alcanzada después de largos periodos de simulación al utilizar el esquema FD-RIAM; a diferencia de la forma del espectro en la región de frecuencias más bajas que la asociada al pico espectral.
- El flujo de energía asociado al término  $S_{nl}$  en la región de frecuencias cercanas a la asociada al pico espectral es mayor con el esquema exacto FD-RIAM que con el esquema discreto DIA.
- El flujo de energía asociado al término  $S_{nl}$  en la región de frecuencias altas es mayor

## 10. BIBLIOGRAFÍA CITADA

1. Alves, J.H.G.M., Banner, M. y Young, I.R., 2003. "Revisiting the Pierson-Moskowitz asymptotic limits for fully developed wind waves". *J. Phys. Oceanogr.*, 33, 1301-1323.
2. Banner, M.L., 1990, "Equilibrium spectra of wind waves". *J. Phys. Oceanogr.*, 20, 966-984.
3. \_\_\_\_\_, y Young, I.R., 1994, "Modeling spectral dissipation in the evolution of wind waves. Part I. Assessment of existing model performance". *J. Phys. Oceanogr.*, 24, 1550-1671.
4. Belcher, S.E., y Vassilicos, J.C., 1997. "Breaking waves and the equilibrium range of wind-wave spectra." *J. Fluid Mech.*, 342, 377-401.
5. Booij, N., Ris, R. y Holthuijsen, H., 1999. "A third-generation wave model for coastal regions. 1. Model description and validation". *J. Geophys. Res.*, 104(C4), 7649-7666.
6. Davidan, I.N. y Lavrenov, I.V., 1991. "On energy "Imbalance" in the low-frequency region of the developed wave spectrum". *Izv. Atmospheric and Ocean. Phys.*, 27(8), 604-610.
7. Hara, T. y Karachintsev, A., 2003. "Observation effects in ocean surface wave spectra". *J. Phys. Oceanogr.*, 33, 422-430.
8. Hashimoto, N., Tsuruya, H. y Nakagawa, Y., 1998. "Numerical computations of the nonlinear energy transfer of gravity-wave spectra in finite depths". *Coastal Engng J.*, 40(1), 23-40.
9. \_\_\_\_\_, Haagsma, I.J.G. y Holthuijsen, H., 2002. "Four-wave interactions in SWAN". *Proc. 28<sup>th</sup> Int. Conf. Coastal Engng.*, 392-404.
10. Hasselmann, K., 1962. "On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory". *J. Fluid Mech.*, 12, 481-500.
11. \_\_\_\_\_, 1963a. "On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 2. Conservation theorems; wave-particle analogy; irreversibility". *J. Fluid Mech.*, 15, 273-281.

12. \_\_\_\_\_, 1963b. "On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 3. Evaluation of energy flux and swell-sea interaction for a Neumann spectrum". *J. Fluid Mech.*, 15, 385-398.
13. \_\_\_\_\_, Barnett, T.P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D.E., Enke, K., Ewing, J.A., Gienapp, H., Hasselmann, D.E., Kruseman, P., Mearburg, A., Muller, P., Olbers, D.J., Richter, K., Sell, W. y Walden, H., 1973. "Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP)". *Dent. Hydrogr.* 2. Suppl. A8, No.12.
14. \_\_\_\_\_, 1974. "On the spectral dissipation of ocean waves due to white-capping". *Boundary Layer Meteorol.*, 6, 107-127.
15. Hasselmann, D.E., Dunckel, M. y Ewing, J.A., 1980. "Directional wave spectra observed during JONSWAP 1973". *J. Phys. Oceanogr.*, 10, 1264-1280.
16. \_\_\_\_\_. y Hasselmann, S., 1985a. "Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part I: A new model for efficient computations of the exact nonlinear transfer integral". *J. Phys. Oceanogr.*, 15, 1369-1377.
17. \_\_\_\_\_ y Hasselmann, S., 1985c. "The wave model EXACT-NL". *Ocean wave modeling (The SWAMP group)*, Plenum Press, New-York, 249-251
18. Hasselmann, S., Hasselmann, K., Allender, J.H. y Barnett, T.P., 1985b. "Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part II: Parameterizations of the nonlinear energy transfer for application in wave models". *J. Phys. Oceanogr.*, 15, 1378-1391.
19. Herterich, K. y Hasselmann, K., 1980. "A similarity relation for the nonlinear energy transfer in a finite-depth gravity-wave spectrum". *J. Fluid Mech.*, 97, 215-224.
20. Hwang, P.A. y Wang, D.W., 2001. "Directional distributions and mean square slopes in the equilibrium and saturation ranges of the wave spectrum". *J. Phys. Oceanogr.*, 31, 1346-1360.

21. Kibblewhite, A.C. y Wu, C.Y., 1989. "A reexamination of the role of wave-wave interactions in ocean noise generation". *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(5), 1946-1957.
22. Kitaigorodskii, S.A., 1983. "On the theory of the equilibrium range in the spectrum of wind-generated gravity waves". *J. Phys. Oceanogr.*, 13, 816-827.
23. Komatsu, K. y Masuda, A., 1996. "A new scheme of nonlinear energy transfer among wind waves: RIAM Method –algorithm and performance". *J. Ocean.*, 52, 509-537.
24. Komen, G.J., Hasselmann, S. y Hasselmann, K., 1984. "On the existence of a fully developed wind-sea spectrum". *J. Phys. Oceanogr.*, 14, 1271-1285.
25. \_\_\_\_\_, Cavaleri, L., Donelan, M., Hasselmann, K., Hasselmann, S. y Jansen, P.A.E.M. (1994). *Dynamics and modeling of ocean waves*. Univ. Press, Cambridge, 532pp.
26. Kuik, A.J., Van Vledder, G.Ph. y Holthuijsen, L.H., 1988. "A method for the routine analysis of pitch-and-roll buoy wave data". *J. Phys. Oceanogr.*, 18, 1020-1034.
27. Lavrenov, I.V., 1991. "Weak nonlinear evolution of the wave spectrum in shallow water". *Izv. Atmospheric and Ocean. Phys.*, 27(12), 1004-1008.
28. \_\_\_\_\_ y Ocampo-Torres. F.J., 1999. "Angular distribution effect on weakly nonlinear energy transfer in the spectrum of wind waves". *Izv. Atmospheric and Ocean. Phys.*, 35(2), 254-265.
29. \_\_\_\_\_ y Ocampo-Torres. F.J., 1999. "Non-linear energy generation of waves opposite to the wind direction". *The wind-driven air-sea interface. Proc. Symp. on the Wind-Driven Air-Sea Interface*. Sydney Australia, 11-15 January 1999, 141-150.
30. \_\_\_\_\_, 2001. "Effect of wind wave parameter fluctuation on the nonlinear spectrum evolution". *J. Phys. Oceanogr. Am. Meteor. Soc.*, 31, 861-873.
31. \_\_\_\_\_, (2003). *Wind-Waves in Oceans*. Physics and Astronomy, Springer. Nueva York, 376pp.

32. Liu, P.C., 1971. "Normalized and equilibrium spectra of wind waves in Lake Michigan". *J. Phys. Oceanogr.*, 1, 249-257.
33. \_\_\_\_\_, 1989. "On the slope of the equilibrium range in the frequency spectrum of wind waves". *J. Geophys. Res.*, 94(C4), 5017-5023.
34. Masson, D., 1993. "On the nonlinear coupling between swell and wind waves". *J. Phys. Oceanogr.*, 23, 1249-1258.
35. Masuda, A., 1980. "Nonlinear energy transfer between wind waves". *J. Phys. Oceanogr.*, 10, 2082-2093.
36. Miles, J.W., 1957. "On the generation of surface waves by shear flows". *J. Fluid Mech.*, 3, 185-204.
37. Mitsuyasu, H., 1968. "On the growth of the spectrum of wind-generated waves. 1". *Rep. Res. Inst. Appl. Mech.*, Kyushu Univ., 16, 459pp.
38. \_\_\_\_\_, Tasai, F., Suhara, T., Mizuno, S., Ohkusu, M., Honda, T. y Rikiishi, K., 1975. "Observations of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy". *J. Phys. Oceanogr.*, 5, 750-760.
39. Padilla-Hernández, R., 2002. "Numerical modelling of the wind wave energy dissipation at the bottom including ambient currents". *Ph.D. Thesis*. Department of Civil Engineering, Catholic University of Leuven, Belgium. 171pp.
40. \_\_\_\_\_, 2003. *Teoría del oleaje*. Curso impartido en el CICESE como parte del programa de estudios de Maestría en Ciencias en Oceanografía Física. CICESE.
41. Phillips, O.M., 1957. "On the generation of waves by turbulent wind". *J. Fluid Mech.*, 2, 417-445.
42. \_\_\_\_\_, 1958. "The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves". *J. Fluid Mech.*, 4, 426-434.
43. \_\_\_\_\_, 1960. "On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1". *J. Fluid Mech.*, 9, 193-217.
44. \_\_\_\_\_, 1985. "Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated waves". *J. Fluid Mech.*, 156, 505-531.

45. Pierson, W.J. y Moskowitz, L., 1964. "A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii". *J. Geophys. Res.*, 69(24), 5181-5190.
46. Resio, D. y Perrie, W., 1989 "Implications of an  $f^{-4}$  equilibrium range for wind-generated waves". *J. Phys. Oceanogr.*, 19, 193-204.
47. \_\_\_\_\_ y Perrie, W., 1991. "A numerical study of non-linear energy fluxes due to wave-wave interactions. Part 1. Methodology and basic results". *J. Fluid Mech.*, 223, 603-629.
48. \_\_\_\_\_, Swail, V., Jensen, R. y Cardone, V., 1999. "Wind speed scaling in fully developed seas". *J. Phys. Oceanogr.*, 29, 1801-1811
49. \_\_\_\_\_, Pihl, J., Tracy, B. y Vincent, C., 2001. "Nonlinear energy fluxes and the finite depth equilibrium range in wave spectra". *J. Geophys. Res.*, 106, C4, 6985-7000.
50. \_\_\_\_\_, Long, C.E. y Vincent, C.L., 2004. "Equilibrium-range constant in wind-generated wave spectra". *J. Geophys. Res.*, 109, C01018.
51. Ris, R.C., 1997. "Spectral modelling of wind waves in coastal areas". *Ph.D. Thesis* Communications on Hydraulic and Geotechnical Engineering. Delft University of Technology. 160pp.
52. \_\_\_\_\_, Holthuijsen, H. y Booij, N., 1999. "A third-generation wave model for coastal regions. 2. Verification". *J. Geophys. Res.*, 104(C4), 7667-7681.
53. Snyder, R.L., Dobson, F.W., Elliot, J.A. y Long, R.B., 1981. "Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves". *J. Fluid Mech.*, 102, 1-59.
54. \_\_\_\_\_, Long, R.B. y Neu, W.L., 1998. "A fully nonlinear regional wave model for the Bight of Abaco. 1. Nonlinear-transfer computation". *J. Geophys. Res.*, 103(C2), 3119-3141.
55. SWAMP Group (1985). *Ocean wave modeling*. Plenum Press. New-York, 256pp.
56. Toba, Y., 1973. "Local balance in the air-sea boundary process". *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 29, 209-220.

57. Tolman, H., 1991. "A third-generation model for wind waves on slowly varying, unsteady and inhomogeneous depths and currents". *J. Phys. Oceanogr.*, 21, 782-797.
58. \_\_\_\_\_, 2004. "Inverse modeling of discrete interaction approximations for nonlinear interactions in wind waves". *Ocean Modelling*, 6, 405-422.
59. Tracy, B.A. y Resio, D.T., 1982. "Theory and calculation of the nonlinear energy transfer between sea waves in deep water". U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station. Rep. No. 11, Vicksburg. U.S.A.
60. Trujillo-Ortiz, A. y R. Hernández-Walls. (2003). MAOV2: Two-Factor Multivariate Analysis of Variance Test. A MATLAB file. [WWW document]. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange>
61. \_\_\_\_\_, Hernández-Walls, R., Castro-Morales, K., Espinoza-Tenorio, A., Guia-Ramírez, A., Muñiz-Salazar, R., Sánchez-Osorio, J.L. y Carmona-Pina, R. (2002). Mulnortest: Multivariate normality statistical test. A MATLAB file. [WWW document]. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange>
62. \_\_\_\_\_, Hernández-Walls, R., Castro-Morales, K., Espinoza-Tenorio, A., y Carmona-Pina, R. (2002). MBoxtest: Multivariate Statistical Testing for the Homogeneity of Covariance Matrices by the Box's M. A MATLAB file. [WWW document]. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange>
63. \_\_\_\_\_ y Hernández-Walls, R. (2003). Mskekur: Mardia's multivariate skewness and kurtosis coefficients and its hypotheses testing. A MATLAB file. [WWW document] URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange>
64. \_\_\_\_\_, Leal-Navarro, R.A., Hernández-Walls, R. y Soto-Sánchez, A. (2004). Arsos: Comparing Simple Linear Regression Equations. A MATLAB file. [WWW document]. URL: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange>

65. Van Vledder, G.Ph., 1990. "Directional response of wind waves to turning winds". *Communications on hydraulic and Geotechnical engineering*. Delft University of Technology, Fac. of Civil Engineering Report, 90-2, 255pp.
66. \_\_\_\_\_ y Holthuijsen, L.H., 1993. "The directional response of ocean waves to turning winds". *J. Phys. Oceanogr.*, 23, 177-192.
67. \_\_\_\_\_, de Ronde, J.G. y Stive, M.J.F., 1994. "Performance of a spectral wind-wave model in shallow water". *Proc. 24<sup>th</sup> Int. Conf. Coastal Engineering*, ASCE, 761-774.
68. \_\_\_\_\_, Herbers, T.H.C., Jensen, R.E., Resio, D.T. y Tracy, B., 2000. "Modelling of the non-linear quadruplet wave-wave interactions in operational wave models". *Proc. 27<sup>th</sup> Int. Conf. on Coastal Engineering*, Sydney, Australia. 15pp.
69. WAMDI Group, 1988. "The WAM Model –A Third Generation ocean wave model". *J. Phys. Oceanogr.*, 18, 1775 –1810.
70. Wang, D. y Hwang, P., 2001. "Evolution of the bimodal directional distribution of ocean waves". *J. Phys. Oceanogr.*, 31, 1200-1220.
71. Webb, D.J., 1978. "Non-linear transfers between sea Waves". *Deep-Sea Res.* Great Britain, 25, 279-298.
72. Young, I.R., Hasselmann, S. y Hasselmann, K., 1987. "Computations of the response of a wave spectrum to a sudden change in wind direction". *J. Phys. Oceanogr.*, 17,1317-1338.
73. \_\_\_\_\_ y Van Vledder, G.Ph., 1993. "The central role of nonlinear interactions in wind-wave evolution". *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, A 342, 505-524.
74. \_\_\_\_\_, 1994. "On the measurement of directional wave spectra". *Applied Oc. Res.*, Elsevier, Great Britain. 16, 283-294.
75. \_\_\_\_\_, Verhagen, L.A. y Banner, M.L., 1995. "A note on the bimodal directional spreading of fetch-limited wind waves". *J. Geophys. Res.*, 100(C1), 773-778.

76. \_\_\_\_\_. (1999). *Wind Generated Ocean Waves*. Elsevier. Oxford, U.K., 288 pp.
77. Zijlema, M. y Booij, N. (2004). *SWAN Cycle III version 40.31*. User Manual. Delft University of Technology, Holanda. 124pp.