

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS



**ESTUDIOS DEL CORRIMIENTO ESPECTRAL
DE LA LUZ ESPARCIDA
POR SUPERFICIES RUGOSAS (EFECTO WOLF)**

Tesis Profesional
que para obtener el título de

FISICO

presenta

Criseida González Rodríguez

Ensenada, B. C.

Agosto 1999.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESTUDIOS DEL CORRIMIENTO ESPECTRAL
DE LA LUZ ESPARCIDA
POR SUPERFICIES RUGOSAS (EFECTO WOLF)**

Tesis Profesional que como requisito
parcial para obtener el título de

FISICO


presenta

CRISEIDA GONZÁLEZ RODRIGUEZ

Aprobado por



Dr. Pedro Negrete Regagnon
Presidente



Dr. Eugenio R. Méndez Méndez
1er. Vocal



Dr. Roberto Machorro Mejia
Secretario

RESUMEN de la Tesis de Criseida González Rodríguez presentada como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Física.

Ensenada, Baja California, México. 4 de Febrero de 1999.

Estudios del corrimiento espectral de la luz esparcida por superficies rugosas (Efecto Wolf).

Resumen aprobado:

Dr. Pedro Negrete Regagnon.

El interés principal de este trabajo fué estudiar el comportamiento de la distribución espectral asociado a una onda óptica invariante, que viaja a través del espacio libre e interactúa con un medio esparcidor estadísticamente conocido. El problema fue resuelto numéricamente y de una manera rigurosa utilizando el segundo teorema integral de Green. En esta formulación el campo esparcido queda expresado en términos de sus valores de frontera. Para el caso de un campo con polarización 's' incidiendo sobre un material perfectamente conductor, la condición de frontera relevante está representada por el valor que toma la derivada normal del campo sobre cada punto de la superficie, llamada también función fuente. Interesados en el comportamiento de estas funciones en el campo lejano, se busca una expresión para describir el comportamiento angular del campo lejano esparcido por una superficie rugosa. De esta manera, se desarrollan los programas necesarios para resolver y calcular numéricamente la intensidad esparcida como función de la longitud de onda y de la dirección de observación. Al considerar una onda incidente de luz con un ancho de banda espectral finito en la intensidad total esparcida, se calcula el espectro generado y se compara con el espectro de la radiación incidente, encontrando una redistribución de energía, para algunas direcciones de observación.

Índice General

Lista de Figuras	3
1 Introducción	4
2 Coherencia Espacial y Espectro del Campo Radiado	8
2.1 Coherencia de Segundo Orden	8
2.1.1 Ecuación de propagación para las correlaciones	8
2.1.2 Solución de la ecuación de propagación	10
2.2 Intensidad Radiada por una Fuente con Coherencia Arbitraria	12
2.2.1 Radiación de una fuente plana secundaria	12
2.2.2 Fuente cuasi-homogénea que cumple con el modelo de Schell.	14
2.3 Espectro del Campo Lejano Generado por una Fuente Cuasi-homogénea	16
2.3.1 Expresión general para el espectro en el campo lejano	16
2.3.2 Espectro radiado por una fuente gaussiana	18
2.3.3 Espectro radiado por una fuente lambertiana	20
3 Espectro del Campo Esparcido por una Superficie Rugosa	22
3.1 Formulación del Problema de Esparcimiento.	22
3.1.1 La ecuación de Helmholtz y el teorema de Green	22
3.1.2 El método de la ecuación integral	23
3.2 El Campo Incidente	25
3.3 Generación Numérica de la Superficie	29
3.3.1 Propiedades Estadísticas	30
3.3.2 Implementación en computadora	31
3.4 El Campo Esparcido.	35
3.4.1 Polarización s.	35
3.4.2 Campo esparcido	37
3.4.3 Conductor perfecto	37
3.5 Determinación de la Función Fuente	38
3.5.1 La ecuación matricial	38
3.5.2 Solución numérica para la función fuente	42
3.6 El Problema de Esparcimiento como Radiación de Fuente Secundaria.	42
3.7 Radiación en el Campo Lejano	43

ÍNDICE GENERAL	2
3.7.1 La función de Green en el campo lejano	43
3.7.2 Componente angular del campo lejano	44
3.8 Cálculo del espectro de la luz esparcida.	45
4 Cambios Espectrales por Esparcimiento	48
4.1 Resultados.	48
5 Resumen y Conclusiones	51
Bibliografía	54

Índice de Figuras

2.1	Ilustrando la notación relacionada al cálculo de la función densidad espectral-cruzada en cualquier par de puntos del espacio.	11
2.2	Aproximación para puntos localizados en el campo lejano de la fuente.	13
2.3	Ilustrando el concepto de fuente cuasi-homogénea.	15
2.4	Notación relacionada a la expresión del espectro en el campo lejano de una fuente secundaria plana cuasi-homogénea.	17
2.5	Cambios espectrales como función de la dirección de observación en el campo lejano.	20
2.6	Invarianza espectral de una fuente con correlación Lambertiana.	21
3.1	Superficie de integración.	24
3.2	Representación esquemática del campo incidente.	28
3.3	Representación esquemática de una superficie rugosa.	30
3.4	Rayo óptico incidiendo sobre una superficie unidimensional	35
3.5	Discretización de una integral.	39
3.6	Aproximación de la función Hankel para argumentos pequeños.	41
3.7	El problema de esparcimiento como radiación de una fuente secundaria.	42
3.8	Aproximación de la función Hankel para argumentos grandes.	44
3.9	Aproximación del argumento $ \mathbf{r} - \mathbf{r}' $	44
4.1	Intensidad esparcida de una onda monocromática como función de la dirección de observación, producida por esparcimiento de luz a incidencia normal sobre una superficie con rugosidad estadísticamente gaussiana.	48
4.2	Intensidad esparcida de luz con un ancho de banda espectral finito.	49
4.3	Comparación del espectro incidente con el esparcido, observado a $\approx 90^\circ$	50

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La interacción de la luz con la materia ha sido objeto de estudio desde hace muchos años y es, actualmente, un tema de gran interés por la importancia que reviste para poder entender fenómenos ópticos como los de propagación y esparcimiento de luz.

Cuando una onda electromagnética incide sobre una interface plana entre dos medios, ésta se refleja de acuerdo a leyes que son bien conocidas. Sin embargo, si la frontera entre los medios no es un plano, sino una superficie irregular con variaciones de altura aleatorias, ocurre el fenómeno de esparcimiento.

El fenómeno de esparcimiento de ondas por superficies estadísticamente rugosas se encuentra frecuentemente en un gran número de problemas físicos. Prácticamente todas las superficies reales son rugosas y el grado y la forma de la rugosidad, así como la geometría del problema afectan la conducta de la onda esparcida, y esto ha sido tema de estudio por algunas décadas.

El problema de la propagación y esparcimiento de ondas es de interés en varios campos de la física moderna [2] y en diversas áreas de investigación [1], incluyendo imágenes ultrasónicas y de radar, detección sonar, física del estado sólido, óptica, astronomía, comunicación y percepción remota.

En problemas de radiación, propagación y esparcimiento de luz, el medio en el que la onda viaja ó se emite, puede ser clasificado como determinístico ó aleatorio. Algunos medios naturales y biológicos tienen variaciones aleatorias en espacio y tiempo, por lo que las ondas varían aleatoriamente en amplitud y fase de tal manera que pueden ser descritos en términos de sus promedios estadísticos, y por otro lado, caracterizados por las componentes espectrales que emite [2].

En este trabajo nuestro interés es estudiar el comportamiento de la distribución espectral asociada a una onda óptica que viaja a través del espacio libre e interactúa con un medio esparcidor. Para ésto plantearemos y formularemos matemáticamente el problema de ésta interacción.

Generalmente, la medición del espectro es hecha a grandes distancias de la fuente, en comparación con la longitud de onda de la radiación emitida y, normalmente, se ha

dado por hecho que la distribución espectral normalizada de la radiación que incide sobre el detector es la misma que en la región cercana a la fuente. Esta suposición está implícita en la espectroscopía convencional y no parece haberse cuestionado sino hasta hace algunos años [3]. Probablemente esto se debe a que las fuentes que se utilizan normalmente en el laboratorio son fuentes de espectro invariante. Cuando no hay cambios entre el espectro emitido en el campo cercano y el espectro observado en el campo lejano, se dice que la fuente presenta *invariancia espectral ante propagación* [3].

Sin embargo, con el desarrollo de nuevas fuentes de luz y el descubrimiento relativamente frecuente de objetos estelares poco familiares, el estudio de los cambios de la distribución espectral de la luz ha cobrado importancia. Si el espectro cambia, surge la posibilidad de que el corrimiento de una línea espectral, pueda ser debida al movimiento relativo que existe entre la fuente y el observador (efecto Doppler), a simples efectos de propagación en el espacio libre (efecto Wolf) [4], ó a la interacción que la radiación tiene con elementos esparcidos [8].

Empleando la teoría de coherencia para fuentes no monocromáticas, se han encontrado propiedades de las fuentes que garantizan que el espectro de la luz generada por ellas sea invariante ante propagación [5]. Además, se han desarrollado fuentes de laboratorio que generan luz cuyo espectro no es invariante, es decir, que presenta cambios espectrales [7]. Por otro lado también están emergiendo nuevas técnicas de espectroscopía de coherencia espacial para determinar correlaciones de campos a partir de mediciones espectrales [6]. Debido al interés en esta área, se considera necesario e importante presentar en el segundo capítulo, una revisión tutorial sobre la influencia que tienen las propiedades de coherencia de una fuente en el espectro del campo radiado.

En el tercer capítulo, se considera la posibilidad de generar una fuente secundaria de luz de espectro no-invariante mediante un medio esparcidor. Ésto, utilizando la analogía que existe entre los procesos de radiación y el de esparcimiento. El objetivo principal consistirá en detectar cambios espectrales que pudieran surgir cuando la radiación proveniente de una fuente de luz es esparcida por una superficie rugosa. Asimismo se analizará la influencia que las propiedades de correlación del medio tienen en la distribución del espectro de la radiación esparcida. Para atacar el problema se pretende resolver numéricamente un problema de esparcimiento, considerando un campo que con ciertas propiedades espectrales y de coherencia incide sobre una superficie rugosa. La superficie modifica las propiedades de coherencia de la luz y la esparce. Podemos considerar a la superficie como una fuente secundaria ó

construir en el campo cercano una fuente secundaria plana que produce la radiación esparcida. La radiación se propaga en el espacio libre hasta el campo lejano, donde calculamos su espectro, comparándolo finalmente con el espectro de la radiación incidente.

Debido a que la radiación emitida por todas las fuentes electromagnéticas encontradas en la naturaleza presentan fluctuaciones aleatorias, en el segundo capítulo consideraremos la relación de las fluctuaciones entre los campos y las propiedades de correlación de las fuentes que los generan. Se encuentra que la función de correlación obedece ciertas leyes al propagarse en el espacio libre.

Con esto se encuentra que la radiación generada por una fuente en el campo lejano depende de las propiedades de correlación de la luz en el plano de la fuente, y que la distribución espectral normalizada de la luz depende, en general, de la dirección de observación. En el mismo capítulo, y con el objeto de ilustrar las propiedades mencionadas, se presentan un par de ejemplos. Específicamente se considera, para la fuente, un grado de coherencia espectral de forma Lambertiana, que da como resultado que el espectro de la luz generada sea invariante ante propagación. En el otro caso el grado de coherencia espectral considerado tiene forma Gaussiana y se demuestra que para este caso el espectro no es invariante, y que depende de la dirección de observación.

Una vez convencidos de que la distribución espectral de la luz radiada por una fuente puede presentar cambios espectrales en el campo lejano, en el siguiente capítulo estudiamos el espectro de la luz esparcida por una superficie, con la idea de detectar posibles cambios con respecto al espectro incidente. Para realizar esta tarea se describe inicialmente el sistema físico, considerando un medio seminfinito, aire o vacío, en contacto con un medio perfectamente conductor. La frontera entre los medios constituye una superficie rugosa unidimensional con propiedades estadísticas determinadas de antemano. El problema de la interacción del haz incidente con la superficie rugosa se resuelve numéricamente y de manera rigurosa, con una técnica basada en el segundo teorema integral de Green. En esta formulación el campo esparcido en cualquier punto del espacio queda expresado en términos de la derivada normal del campo (función fuente) evaluado en cada punto de la superficie. La función fuente puede considerarse una generadora de ondas secundarias, y sus propiedades estadísticas dependen de las propiedades del medio esparcidor. Es decir que podemos considerar que se ha construido una fuente secundaria cuyas propiedades de coherencia se han modificado con respecto a las de la fuente incidente. En el capítulo cuatro, presentando gráficos de los resultados numéricos, se compara el espectro generado

en el campo lejano por una fuente secundaria, de este tipo, con el espectro de la radiación incidente, con el fin de analizar alguna posible redistribución de la energía radiada. Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones y comentarios finales.

Capítulo 2

COHERENCIA ESPACIAL Y ESPECTRO DEL CAMPO RADIADO

2.1 Coherencia de Segundo Orden

Todos los campos electromagnéticos encontrados en la naturaleza presentan fluctuaciones de naturaleza aleatoria. En éste capítulo, estudiaremos algunas propiedades de campos electromagnéticos fluctuantes, centrandó nuestra atención en la región óptica del espectro. Es necesario aclarar que aunque éstas fluctuaciones son muy rápidas y normalmente no pueden ser observadas directamente, se puede deducir su existencia con experimentos que proveen información acerca de la correlación entre las fluctuaciones en dos o más puntos del espacio-tiempo.

Las manifestación más simple de la correlación entre campos ópticos son los bien conocidos efectos de interferencia, que surgen cuando dos haces de luz originados de la misma fuente son superpuestos. En tiempos más recientes, con la disponibilidad de modernos detectores de luz se han empezado a estudiar correlaciones de orden más alto. Éste tipo de investigaciones, así como el desarrollo de láseres y otros tipos de fuentes de luz, han dado lugar a una clasificación sistemática del fenómeno de correlación y a una completa descripción estadística de campos ópticos fluctuantes. Esta área de la óptica se conoce ahora como la *teoría de coherencia óptica* y provee un tratamiento unificado de los fenómenos ópticos tradicionales como los de interferencia y polarización.

2.1.1 Ecuación de propagación para las correlaciones

Con el experimento interferométrico de Young, dos fuentes puntuales estadísticamente independientes pueden dar surgimiento a correlaciones manifestándose en un patrón de interferencia. La esencia del fenómeno es el argumento de que el estado de coherencia de la luz puede cambiar en el proceso de propagación y superposición. Más

específicamente, con éste experimento se mostró que aunque la luz se origine de fuentes puntuales no correlacionadas, el campo en puntos suficientemente alejados de las fuentes puede estar altamente correlacionado. Derivaremos en esta sección la ley que rige el cambio del estado de coherencia para cualquier campo óptico.

Sea $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ una realización del proceso aleatorio real que caracteriza a una perturbación fluctuante en el punto \mathbf{r} al tiempo t . Si identificamos a $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ con las componentes cartesianas del campo eléctrico, obedecerá en el espacio libre al igual que su señal analítica asociada, la ecuación de onda:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

Para un punto \mathbf{r}_1 al tiempo t_1 tomamos el complejo conjugado de la fórmula anterior y lo multiplicamos en ambos lados por $V(\mathbf{r}_2, t_2)$ considerando que el operador diferencial es tomado con respecto a las variables \mathbf{r}_1 y t_1 . Tomando un promedio sobre el ensamble que se supone estacionario y ergódico, obtenemos la expresión (2.2) y de la misma manera, para un punto \mathbf{r}_2 al tiempo t_2 , obtenemos la expresión (2.3):

$$\nabla_1^2 \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1) V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1) V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\partial t_1^2} \quad (2.2)$$

$$\nabla_2^2 \langle V^*(\mathbf{r}_2, t_2) V(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \langle V^*(\mathbf{r}_2, t_2) V(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle}{\partial t_2^2} \quad (2.3)$$

por definición la *función de coherencia mutua* representa a:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1, t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1) V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \quad (2.4)$$

que es una *función de correlación de segundo orden*. Si suponemos que el ensamble que representa las propiedades estadísticas del campo, es estacionario al menos en el sentido amplio y también ergódico, entonces la función de coherencia mutua dependerá de las dos variables del tiempo sólo a través de su diferencia $t_2 - t_1 = \tau$. Con ésta consideración obtenemos dos ecuaciones de onda que la función de coherencia mutua debe satisfacer en el espacio libre:

$$\nabla_1^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \quad (2.5)$$

$$\nabla_2^2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \quad (2.6)$$

de ésta manera se establece un importante resultado obtenido por Wolf en 1955: *en el espacio libre la función de correlación de segundo orden de un campo óptico*

obedece dos ecuaciones de onda que describen el cambio en la función de coherencia mutua.

Para simplificar los cálculos, aplicamos una transformada temporal de Fourier y utilizamos el teorema de Wiener-Khintchine [5], ya que de esta manera podemos representar a Γ en el espacio de frecuencias, llamándola *función de densidad espectral cruzada*:

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \Leftrightarrow W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \quad (2.7)$$

de ésta manera obtenemos dos ecuaciones de Helmholtz que W debe satisfacer en el espacio libre:

$$\nabla_1^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla_2^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) + k^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = 0 \quad (2.9)$$

además, sustituyendo la Ec.(2.7) en (2.4) tenemos a la densidad espectral cruzada en términos de la transformada de Fourier del campo fluctuante:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, \nu) U(\mathbf{r}_2, \nu) \rangle \quad (2.10)$$

Esta claro que el problema de determinar la función de coherencia mutua y la función de densidad espectral-cruzada para cualquier par de puntos, se reduce ahora a un problema estandar en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, el cual es resuelto con la ayuda de las fórmulas de difracción de Rayleigh [5].

2.1.2 Solución de la ecuación de propagación

Ya que la función de densidad espectral cruzada de un campo óptico fluctuante obedece la ecuación de Helmholtz en el espacio libre, y queremos conocer como cambia al propagarse, consideraremos su solución desde un plano ubicado en $z = 0$ donde $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, z_1 = 0) \equiv \rho_1$ y $\mathbf{r}_2(x_2, y_2, z_2 = 0) \equiv \rho_2$, a cualquier punto arbitrario del espacio. En otras palabras, resolveremos la ecuación de Helmholtz para la densidad espectral cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ para cualquier par de puntos $P_1(\mathbf{r}_1)$ y $P_2(\mathbf{r}_2)$ en términos de su valor en el plano $W^{(0)}(\rho_1, \rho_2)$. Para éste propósito haremos uso de las funciones de Green apropiadas a las condiciones de frontera.

Como tenemos una función de dos variables, primero determinemos la solución de la Ec.(2.9) para \mathbf{r}_2 en términos de ρ_2 . Tenemos de acuerdo a la primera fórmula de difracción de Rayleigh:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(z=0)} W(\mathbf{r}_1, \rho_2; \nu) \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{e^{ikR_2}}{R_2} \right) d^2 \rho_2 \quad (2.11)$$

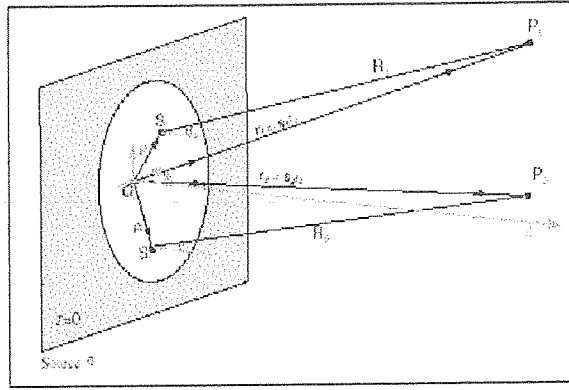


FIGURA 2.1.- Ilustrando la notación realcionada al cálculo de la función densidad espectral-cruzada en cualquier par de puntos del espacio.

donde $R_2 = |\mathbf{r}_2 - \rho_2|$ y $\frac{\partial}{\partial z_2}$ indica una diferenciación a través de la dirección 'z' positiva. De la misma manera, determinamos ahora la solución para la variable \mathbf{r}_1 en función de ρ_1 , obteniendo que:

$$W(\mathbf{r}_1, \rho_2; \nu) = -\frac{1}{2\pi} \int_{(z=0)} W(\rho_1, \rho_2; \nu) \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{e^{-ikR_1}}{R_1} \right) d^2 \rho_1 \quad (2.12)$$

donde $R_1 = |\mathbf{r}_1 - \rho_1|$. Sustituyendo (2.12) en (2.11) obtenemos la siguiente fórmula que expresa a la función densidad espectral-cruzada del campo en cualquier punto del espacio ($z > 0$), en términos de sus valores de frontera en el plano $z = 0$:

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{(z=0)} W(\rho_1, \rho_2; \nu) \left[\frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{e^{-ikR_1}}{R_1} \right) \right] \left[\frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{e^{ikR_2}}{R_2} \right) \right] d^2 \rho_1 d^2 \rho_2 \quad (2.13)$$

Reescribiremos ésta ecuación en una una forma más explícita utilizando el hecho de que:

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{e^{-ikR_1}}{R_1} \right) = - \left(ik + \frac{1}{R_1} \right) \frac{e^{-ikR_1}}{R_1} \cos \theta_1 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{e^{ikR_2}}{R_2} \right) = - \left(ik + \frac{1}{R_2} \right) \frac{e^{ikR_2}}{R_2} \cos \theta_2 \quad (2.15)$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos con los que las líneas S_1P_1 y S_2P_2 hacen con la dirección z-positiva. Si además consideramos que los puntos $P_1(\mathbf{r}_1)$ y $P_2(\mathbf{r}_2)$ están a varias longitudes de onda del plano, es decir $R_1, R_2 \gg \lambda$ y por lo tanto $k \gg 1/R_1, 1/R_2$,

obtenemos al substituir las aproximaciones de las expresiones (2.14) y (2.15) en la Ec.(2.13):

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) \approx \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int \int_{(z=0)} W(\rho_1, \rho_2; \nu) \frac{e^{ik(R_2-R_1)}}{R_2 R_1} \cos\theta'_1 \cos\theta'_2 d^2\rho_1 d^2\rho_2 \quad (2.16)$$

La ecuación anterior (2.16) es la expresión requerida para la propagación en el espacio libre de la función de densidad espectral-cruzada desde un plano ubicado en $z = 0$, por lo que describe los cambios en las propiedades de correlación del campo óptico generado por una fuente plana.

2.2 Intensidad Radiada por una Fuente con Coherencia Arbitraria

La naturaleza del campo óptico generado por una fuente estará determinada, en general, por su densidad espectral (espectro) y por sus propiedades de coherencia. Por tal motivo, en ésta sección aplicaremos la teoría de correlación de campos ópticos escalares, para estudiar la radiación generada por una fuente secundaria de cualquier estado de coherencia. En particular se analizará la influencia que tienen las propiedades de correlación de una fuente que genera haces parcialmente coherentes, en la intensidad radiante emitida.

Es conveniente y matemáticamente más simple utilizar la descripción y tratamiento del problema en el dominio espacio-frecuencia en vez del dominio espacio-tiempo, esto quiere decir que caracterizaremos las propiedades de correlación de la fuente por medio de la función de densidad espectral-cruzada, en vez de la función de coherencia mutua. Como ya sabemos los resultados estarán relacionados por medio del teorema generalizado de Wiener-Khintchine Ec.(2.7).

2.2.1 Radiación de una fuente plana secundaria

Muchas fuentes empleadas en el laboratorio son fuentes planas secundarias. Usualmente una fuente de éste tipo es una apertura en una pantalla opaca iluminada directamente por una fuente primaria ó por medio de un sistema óptico. La fuente primaria estará localizada trás del plano de la apertura y radiará hacia espacio libre ($z > 0$). En ésta sección estudiaremos la radiación de campos producidos por éste tipo de fuentes.

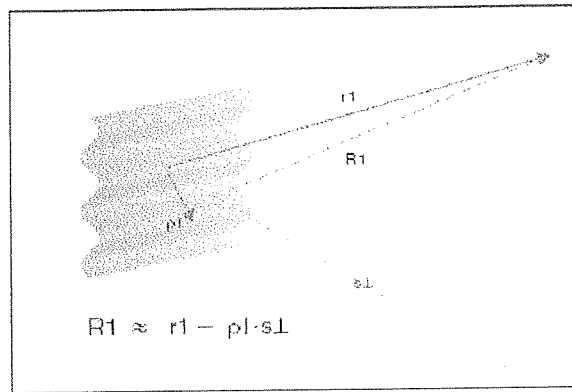


FIGURA 2.2.- Aproximación para puntos localizados en el campo lejano de la fuente.

Como hemos visto, dentro del marco de trabajo de la teoría de correlación, una fuente plana secundaria puede ser caracterizada por la función de densidad espectral-cruzada evaluada en el plano de la fuente σ , esto es, por $W^{(0)}(\rho_1, \rho_2; \nu)$. Para puntos que estén situados en el campo lejano, observamos de la figura (2.2) que podemos hacer la siguiente aproximación en el argumento de la fase de la función exponencial de la Ec.(2.16):

$$R_1 \approx r_1 - \rho_1 \cdot s_{1L}, R_2 \approx r_2 - \rho_2 \cdot s_{2L} \quad (2.17)$$

y para los factores de amplitud $\frac{1}{R_1}$ y $\frac{1}{R_2}$, la aproximación $R_1 \approx r_1$ y $R_2 \approx r_2$. De la misma manera también podemos reemplazar los ángulos θ'_1 y θ'_2 por los ángulos fijos θ_1 y θ_2 que las líneas OP_1 y OP_2 hacen con la normal al plano de la fuente. Resultando que la expresión aproximada (2.16) de la densidad espectral-cruzada para el campo lejano es:

$$W^{(\infty)}(r_1 s_1, r_2 s_2; \nu) = L(s_1, s_2, \nu) \frac{e^{ik(r_2 - r_1)}}{r_2 r_1} \quad (2.18)$$

donde

$$L(s_1, s_2, \nu) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \int \int_{\sigma} W^{(0)}(\rho_1, \rho_2; \nu) e^{-ik(s_{2L} \cdot \rho_2 - s_{1L} \cdot \rho_1)} d^2\rho_1 d^2\rho_2 \quad (2.19)$$

Debido a que la fuente secundaria σ ocupa una región finita del plano $x = 0$, $W^{(0)}(\rho_1, \rho_2; \nu)$ tendrá un valor de cero cuando ρ_1 ó ρ_2 representen puntos localizados fuera de la región de la fuente, de tal manera que se extiende la integral a un plano infinito y la ecuación (2.19) representará entonces a una transformada espacial de Fourier 4-dimensional de $W^{(0)}(\rho_1, \rho_2; \nu)$, es decir que:

$$L(s_1, s_2, \nu) = (2\pi k)^2 \tilde{W}^{(0)}(-ks_{1L}, ks_{2L}; \nu) \cos\theta_1 \cos\theta_2 \quad (2.20)$$

En el caso especial cuando los dos puntos \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 coinciden, la función de densidad espectral-cruzada del campo es sólo función de la localización de un punto y de la frecuencia, por lo que los elementos de la diagonal de W representan a la *densidad espectral de la luz* en el punto P especificado por la posición del vector rs y la frecuencia ν , a la que denotaremos como:

$$S(\mathbf{r}, \nu) \equiv W(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \nu) \quad (2.21)$$

en éste mismo sentido, los elementos de la diagonal de $L(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \nu)$ son representados por la función $J(\mathbf{s}, \nu)$ que es conocida como la *intensidad radiante* del campo, denotándola como:

$$J(\mathbf{s}, \nu) \equiv L(\mathbf{s}, \mathbf{s}, \nu) \quad (2.22)$$

Se sigue de la Ec.(2.20) que la intensidad radiante estará dada por:

$$J(\mathbf{s}, \nu) = (2\pi k)^2 \tilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_\perp, k\mathbf{s}_\perp, \nu) \cos^2\theta \quad (2.23)$$

donde θ es el ángulo en el que el vector $OP = rs$ hace con la normal al plano de la fuente.

Resulta útil también, normalizar a la función de densidad espectral-cruzada del campo generado, de la siguiente manera:

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)}{[W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, \nu)]^{1/2} [W(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \nu)]^{1/2}} \quad (2.24)$$

siguiendo a la expresión (2.21) tenemos que:

$$\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu) = \frac{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)}{[S(\mathbf{r}_1; \nu)]^{1/2} [S(\mathbf{r}_2; \nu)]^{1/2}} \quad (2.25)$$

y nos referiremos a $\mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \nu)$ como el *grado espectral de coherencia de la fuente a la frecuencia ν* para los puntos P_1 y P_2 .

2.2.2 Fuente cuasi-homogenea que cumple con el modelo de Schell.

Los campos generados por cierto tipo de fuentes, como las que cumplen con el modelo de "Schell" [5], son de particular interés en la práctica ya que se caracterizan por la propiedad de que su grado espectral de coherencia en el plano de la fuente $\mu^0(\rho_1, \rho_2; \nu)$ depende de las variables de localización en el plano ρ_1 y ρ_2 sólo através de su diferencia $(\rho_2 - \rho_1)$, es decir, es de la forma:

$$\mu^0(\rho_1, \rho_2; \nu) \equiv \mu^0(\rho_2 - \rho_1; \nu) \equiv \mu^0(\rho'; \nu) \quad (2.26)$$

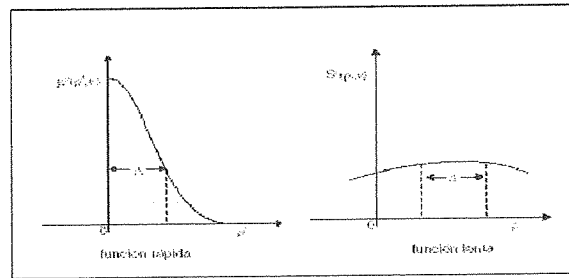


FIGURA 2.3.- Ilustrando el concepto de fuente cuasi-homogenea.

Recordando la definición (2.25) podemos seguir que la densidad espectral-cruzada en el plano de la fuente en términos del grado de coherencia espectral estará dada por:

$$W^{(0)}(\rho_1, \rho_2; \nu) = \mu^{(0)}(\rho_1 - \rho_2; \nu) \left[S^{(0)}(\rho_1, \nu) \right]^{1/2} \left[S^{(0)}(\rho_2, \nu) \right]^{1/2} \quad (2.27)$$

donde $S^{(0)}(\rho, \nu)$ es la densidad espectral (espectro) en un punto del plano de la fuente.

Frecuentemente el grado espectral de coherencia de la luz en el plano de la fuente $\mu^{(0)}(\rho'; \nu)$ varía mucho más rápido con ρ' que lo que la densidad espectral $S^{(0)}(\rho, \nu)$ varía con ρ' , para cada componente de frecuencia ν presente en la luz. Si suponemos además, que las dimensiones lineales de la fuente son mucho más grandes comparadas con la longitud de onda ($\lambda = c/\nu$) y con la longitud de correlación Δ (ancho espacial efectivo de $\mu^{(0)}(\rho'; \nu)$), se dirá entonces que la fuente es *cuasi-homogenea*.

Como se puede observar de la figura (2.3), la densidad espectral de una fuente cuasi-homogenea es una 'función lenta' de ρ , mientras que el grado de coherencia espectral es una 'función rápida' de ρ' . Debido a ésto, una buena aproximación de la expresión (2.27) para la densidad espectral-cruzada en el plano de la fuente puede ser:

$$W^{(0)}(\rho_1, \rho_2; \nu) = S^{(0)}\left[\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \nu\right] \mu^{(0)}(\rho_2 - \rho_1; \nu) \quad (2.28)$$

y su transformada espacial de Fourier estará dada por:

$$\tilde{W}^{(0)}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2; \nu) = \tilde{S}^{(0)}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \nu) \tilde{\mu}^{(0)}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1); \nu\right] \quad (2.29)$$

Haciendo una sustitución de la Ec.(2.29) en la Ec.(2.23) obtenemos la siguiente expresión para la intensidad radiante del campo generado por una fuente secundaria plana cuasi-homogénea.

$$J(\mathbf{s}, \nu) = (2\pi k)^2 \tilde{S}^{(0)}(0, \nu) \tilde{\mu}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp; \nu) \cos^2 \theta \quad (2.30)$$

2.3 Espectro del Campo Lejano Generado por una Fuente Cuasi-homogénea

En la sección anterior consideramos la radiación de una fuente con un estado de coherencia arbitrario y aprendimos cómo las propiedades de coherencia afectan a la distribución espacial de la energía radiada. En ésta sección, examinaremos cómo las propiedades de coherencia de la fuente afectarán a la distribución espectral de energía, es decir, de qué manera modifican el espectro de la radiación emitida considerado como función de la frecuencia.

2.3.1 Expresión general para el espectro en el campo lejano

Empezando con la expresión Ec.(2.30) para la intensidad radiante producida por una fuente secundaria plana cuasi-homogénea σ , a saber

$$J(\mathbf{s}, \omega) = (2\pi k)^2 \tilde{S}^{(0)}(\omega) \tilde{\mu}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp; \omega) \cos^2 \theta \quad (2.31)$$

donde

$$\tilde{S}^{(0)}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\sigma} S^{(0)}(\rho = 0, \omega) \exp^{-i\mathbf{f} \cdot \rho = 0} d^2 \rho$$

y donde $S^{(0)}(\omega)$ es la densidad espectral en un punto de la fuente, además

$$\tilde{\mu}^{(0)}(\mathbf{f}'; \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\sigma} \mu^{(0)}(\rho'; \omega) \exp^{-i\mathbf{f}' \cdot \rho'} d^2 \rho'$$

es la transformada espacial de Fourier del grado de coherencia espectral $\mu^{(0)}(\rho_2 - \rho_1; \omega)$ de la luz en el plano de la fuente. Como es costumbre, $k = \omega/c$ denota al número de onda asociado a la frecuencia ω , θ es el ángulo que el vector unitario \mathbf{s} hace con la normal al plano de la fuente (ver figura) y \mathbf{s}_\perp es la proyección del vector unitario bidimensional \mathbf{s} sobre la normal al plano de la fuente.

Como estamos interesados en el espectro $S^{(\infty)}(r\mathbf{s}; \omega)$ en el campo lejano más que en la intensidad radiante, recordamos de (2.21) que $S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \nu) \equiv W^{(\infty)}(r\mathbf{s}, r\mathbf{s}; \nu)$ y

2.3. ESPECTRO DEL CAMPO LEJANO GENERADO POR UNA FUENTE CUASI-HOMOGÉNEA 17

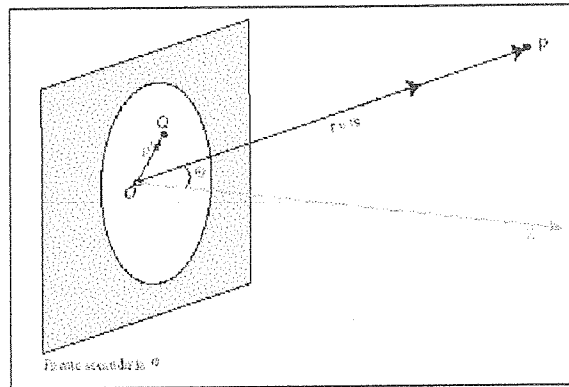


FIGURA 2.4.- Notación relacionada a la expresión del espectro en el campo lejano de una fuente secundaria plana cuasi-homogénea.

si además hacemos uso de la expresión (2.18) obtenemos al punto que:

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}; \omega) = \frac{J(\mathbf{s}, \omega)}{r^2} \quad (2.32)$$

y entonces obtenemos de la Ec.(2.31) la siguiente fórmula para el espectro en el campo lejano:

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}; \omega) = \left(\frac{2\pi k}{r^2} \right)^2 \tilde{S}^{(0)}(0, \omega) \tilde{\mu}^{(0)}(k\mathbf{s}_{\perp}; \omega) \cos^2 \theta \quad (2.33)$$

supongamos ahora que el espectro normalizado $s^{(0)}(\omega)$ es el mismo en cada punto de la fuente, i.e. que:

$$S^{(0)}(\rho, \omega) = I^{(0)}(\rho) s^{(0)}(\omega) \quad (2.34)$$

donde

$$I^{(0)}(\rho) = \int_0^{\infty} S^{(0)}(\rho, \omega) d\omega \quad (2.35)$$

La función $I^{(0)}(\rho)$ representa a la intensidad óptica de la luz en un punto de la fuente. Sustituyendo (2.34) en la fórmula (2.33) obtenemos la siguiente expresión para el espectro en el campo lejano:

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}; \omega) = \left(\frac{2\pi k}{r^2} \right)^2 \tilde{I}^{(0)}(0) s^{(0)}(\omega) \tilde{\mu}^{(0)}(k\mathbf{s}_{\perp}; \omega) \cos^2 \theta \quad (2.36)$$

donde

$$\tilde{I}^{(0)}(0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\sigma} I(\rho) d^2 \rho \quad (2.37)$$

La fórmula (2.36) muestra que aparte de simples factores geométricos, *el espectro de la luz en el campo lejano difiere, en general, del espectro de la fuente* por dos razones:

(a) Debido a la presencia del factor de proporcionalidad $k^2 = (\omega/c)^2$, que recuerda al factor de proporcionalidad que aparece en las fórmulas que describen el efecto de difracción de luz en una apertura.

(b) Debido a la presencia del factor para cada frecuencia efectiva $\tilde{\mu}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp; \omega)$, que depende de las propiedades de correlación de la luz en el plano de la fuente.

Sobresale el hecho de que los cambios en el estado de coherencia espacial de la fuente pueden producir apreciables cambios en el espectro del campo radiado.

2.3.2 Espectro radiado por una fuente gaussiana

Correlaciones del campo a través de una fuente secundaria plana cuasi-homogénea pueden producir cambios en el espectro del campo radiado, y éstos cambios pueden aparecer esencialmente como un corrimiento de las líneas espectrales. Como un ejemplo consideremos la situación cuando el espectro normalizado de la fuente secundaria es sólo una línea de perfil Gaussiano, esto es:

$$s^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\delta_0 \sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\delta_0^2} \quad (2.38)$$

donde δ_0 y ω_0 son constantes positivas. Supondremos que para cada frecuencia efectiva ω , el grado de coherencia espectral de la luz en el plano de la fuente está dado por una función Gaussiana, es decir que:

$$\mu^{(0)}(\rho'; \omega) = \exp -\frac{\rho'^2}{2\sigma_g^2} \quad (2.39)$$

y su transformada espacial de Fourier estará dada por:

$$\tilde{\mu}^{(0)}(\mathbf{f}; \omega) = \frac{\sigma_g^2}{2\pi} \exp -\frac{\sigma_g^2 \cdot f^2}{2} \quad (2.40)$$

Si sustituimos el espectro normalizado de la fuente y la transformada de Fourier del grado de coherencia espectral, en la expresión para el espectro generado en el campo lejano, y además utilizamos el hecho de que $k = \omega/c$ y de que $\mathbf{s}_\perp^2 = \sin^2(\theta)$,

obtenemos la siguiente expresión:

$$S^{(\infty)}(rs; \omega) = \frac{A}{r^2} \omega^2 \exp^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\delta_0^2}} \exp^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2(\theta)}} \cos^2(\theta) \quad (2.41)$$

donde

$$A = \frac{\sqrt{(2\pi) \sigma_g^2(0)}}{\delta_0 c^2} \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{\alpha^2(\theta)} = \frac{\sigma_g^2}{c^2} \sin^2(\theta) \quad (2.43)$$

El producto de dos funciones Gaussianas en el lado derecho de la Ec.(2.41) puede ser expresado como una sólo función Gaussiana, ésto, utilizando el teorema del producto para funciones Gaussianas [5], por lo que:

$$\exp^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\delta_0^2}} \exp^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2(\theta)}} = \exp^{-\frac{\omega_0^2}{2(\delta_0^2 + \alpha^2(\theta))}} \exp^{-\frac{[\omega - \tilde{\omega}(\theta)]^2}{2\tilde{\delta}^2(\theta)}} \quad (2.44)$$

donde

$$\tilde{\omega}(\theta) = \frac{\omega_0 \alpha^2(\theta)}{\delta_0^2 + \alpha^2(\theta)} \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{\tilde{\delta}^2(\theta)} = \frac{1}{\delta_0^2} + \frac{1}{\alpha^2(\theta)} \quad (2.46)$$

Sustituyendo la Ec.(2.44) en la Ec.(2.41) obtenemos finalmente la siguiente expresión para el espectro en el campo lejano de una fuente con correlación Gaussiana:

$$S^{(\infty)}(rs; \omega) = \left[\frac{A}{r^2} \exp^{-\frac{\omega_0^2}{2(\delta_0^2 + \alpha^2(\theta))}} \right] \omega^2 \exp^{-\frac{[\omega - \tilde{\omega}(\theta)]^2}{2\tilde{\delta}^2(\theta)}} \cos^2(\theta) \quad (2.47)$$

La fórmula anterior muestra que el espectro en el campo lejano es proporcional al producto de ω^2 y una distribución Gaussiana. El factor ω^2 produce una ligera distorsión de la Gaussiana. Exepto cuando $\theta = 0$, ésta Gaussiana no está centrado en la frecuencia media de la fuente, sino en una frecuencia menor $\tilde{\omega}(\theta)$, por lo que se dice que un fuente con correlación gaussiana, presenta cambios espectrales por propagación. Algunas muestras de los cambios espectrales calculados apartir de la expresión (2.47) pueden ser observados en la figura (2.5).

2.3. ESPECTRO DEL CAMPO LEJANO GENERADO POR UNA FUENTE CUASI-HOMOGÉNEA 20

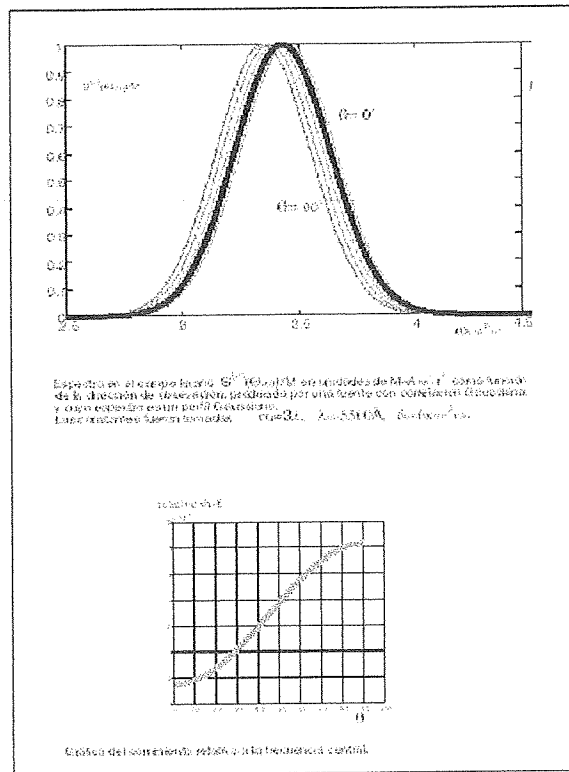


FIGURA 2.5.- Cambios espectrales como función de la dirección de observación en el campo lejano.

2.3.3 Espectro radiado por una fuente lambertiana

Como un ejemplo en donde no se presentan cambios espectrales consideraremos la situación cuando para cada frecuencia efectiva ω , el grado de coherencia espectral de la luz en el plano de la fuente estará dado por una función Lambertiana, es decir que:

$$\mu^{(0)}(\rho'; \omega) = \frac{\sin(k\rho')}{k\rho'} \quad (2.48)$$

y su transformada espacial de Fourier será:

$$\tilde{\mu}^{(0)}(\theta; \omega) = \frac{1}{k^2} \text{rect}\left(\frac{k \sin(\theta)}{k}\right) \quad (2.49)$$

Si sustituimos el espectro normalizado de la fuente, que al igual que en el ejemplo anterior también es una línea de perfil Gaussiano Ec.(2.38) y la transformada de Fourier del grado de coherencia espectral Ec.(2.49) en la Ec.(2.36), obtenemos la

2.3. ESPECTRO DEL CAMPO LEJANO GENERADO POR UNA FUENTE CUASI-HOMOGÉNEA 21

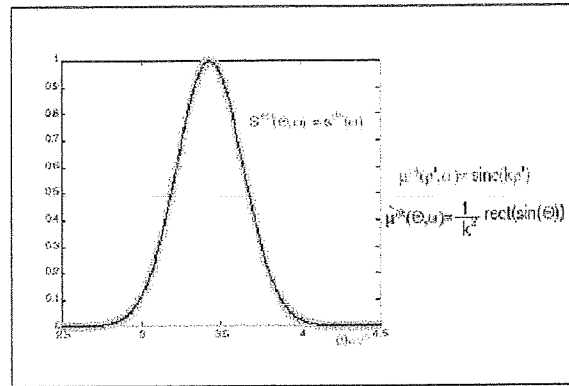


FIGURA 2.6.- Invarianza espectral de una fuente con correlación Lambertiana.

expresión para el espectro del campo lejano generado por una fuente con correlación Lambertiana:

$$S^{(\infty)}(rs; \omega) = \frac{1}{k^2} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\delta\omega_0^2}\right) \text{rect}(\sin(\theta)) \cos^2\theta \quad (2.50)$$

Como podemos observar en la gráfica de la expresión anterior, figura (2.6), el espectro normalizado de la luz generado por una fuente de éste tipo, es el mismo que el del campo lejano, es decir que:

$$s^{(\infty)}(\omega) = s^{(0)}(\omega) \quad (2.51)$$

por lo que se dice que una fuente con correlación Lambertiana presenta invarianza espectral por propagación.

Capítulo 3

ESPECTRO DEL CAMPO ESPARCIDO POR UNA SUPERFICIE RUGOSA

En la sección anterior básicamente se buscó la manera de representar el campo generado por una fuente en términos de los valores de frontera. A partir de ahí, se encontró una expresión válida para representar al espectro generado en un punto y se comparó con el espectro en el plano de la fuente. De una manera similar, en éste capítulo, considerando una superficie rugosa como una fuente secundaria, buscaremos la manera de representar el campo producido en un punto arbitrario para poder calcular su espectro, con el fin de compararlo con el espectro de la fuente, y poder así detectar posibles cambios espectrales debido a esparcimiento.

3.1 Formulación del Problema de Esparcimiento.

El objetivo principal de ésta sección consistirá en encontrar una expresión exacta para describir una perturbación óptica en cualquier punto del espacio en términos de su valor en la frontera. Lo anterior se llevará a cabo basandose en el segundo teorema integral de Green, el cuál expresa la solución de la ecuación de onda homogénea en un punto arbitrario, en términos de la solución y su primera derivada evaluadas en una superficie que encierra al punto.

3.1.1 La ecuación de Helmholtz y el teorema de Green

Una perturbación de luz monocromática en la posición y al tiempo (P, t) puede ser descrita explícitamente por la función escalar real:

$$U(P; t) = U(P) \cos(2\pi\nu t + \phi(P)) \quad (3.1)$$

donde $U(P)$ y $\phi(P)$ son respectivamente la amplitud y fase de la onda en la posición P , mientras que ν es la frecuencia óptica. Si la perturbación real $U(P; t)$ representa

una onda óptica debe satisfacer al igual que su señal analítica asociada la ecuación de onda escalar:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2)$$

Podemos suponer que conocemos la dependencia temporal de ésta señal analítica y establecer una función compleja $E(P) = U(P) \exp(\phi(P))$ para darle una descripción adecuada a nuestra perturbación óptica, de aquí que $E(P)$ obedece una ecuación independiente del tiempo:

$$(\nabla^2 + k^2) E = 0 \quad (3.3)$$

ésta relación con $k = w/c$ es conocida como la *Ecuación de Helmholtz* y en adelante se supondrá que toda amplitud compleja de una perturbación óptica propagandose a través del espacio libre debe satisfacerla.

El cálculo de una perturbación compleja E en un punto de observación arbitrario en el espacio, puede llevarse a cabo con la ayuda de una relación matemática conocida como *El Teorema Integral de Green* el cuál es en gran parte fundador de la *teoría escalar de difracción* y puede enunciarse como:

Sean $E(P)$ y $G(P)$ dos funciones complejas de la posición y sea S una superficie arbitraria encerrando un volumen V . Si $E(P)$, $G(P)$ sus primera y segunda derivadas parciales, son continuas dentro y sobre S , entonces:

$$\iiint_V (G \nabla^2 E - E \nabla^2 G) dv = \iint_S \left(G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right) ds \quad (3.4)$$

donde $\partial/\partial N$ es una derivada parcial con respecto a la normal de cada punto en la superficie S .

En la siguiente sección seguiremos la formulación de Kirchhoff basada en el teorema integral de Green, para encontrar la solución de la ecuación de onda en cualquier punto del espacio.

3.1.2 El método de la ecuación integral

Denotemos un punto de observación P_0 y una superficie arbitraria S encerrando al punto. El problema consiste en encontrar una expresión para describir a una perturbación óptica en el punto P_0 en términos de los valores que ésta tenga en la superficie S . Para resolver éste problema aplicamos el teorema de Green, donde escogemos como función de Green G a una representación de ondas esféricas de

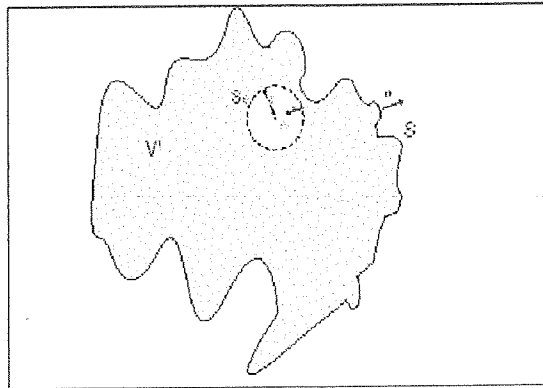


FIGURA 3.1.- Superficie de integración.

amplitud unitaria expandiéndose desde el punto P_0 . es decir, suponemos que el valor de G en un punto arbitrario P_1 estará dado por:

$$G(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}$$

donde la notación indica que r_{01} es la logitud del vector \vec{r}_{01} que va de P_0 a P_1 .

La función G debe ser continua dentro de todo el volumen encerrado V , para excluir la discontinuidad causada por el factor $\frac{1}{r_{01}}$ se encierra al punto P_0 con una superficie esférica S_ϵ de radio ϵ como se muestra en la figura (3.1), y se aplica el teorema de Green dentro del volumen V' que es el que queda limitado por las superficies S_ϵ y S . La superficie de integración será entonces la superficie compuesta por:

$$S' = S + S_\epsilon \quad (3.5)$$

Dentro del volumen V' la perturbación G , que son ondas esféricas expandiéndose, satisface la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)G = 0 \quad (3.6)$$

Ahora podemos utilizar las dos ecuaciones de Helmholtz para E y G Ec.(3.3) y (3.6) respectivamente, sustituyendolas en el lado izquierdo del teorema de Green donde encontramos que:

$$\iiint_{V'} (G\nabla^2 E - E\nabla^2 G) dV' = - \iiint_{V'} (GEk^2 - EGk^2) dV' = 0 \quad (3.7)$$

aplicando el teorema integral obtenemos:

$$\iint_{S'} \left(G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right) dS' = 0 \quad (3.8)$$

ó bien, utilizando la Ec.(3.5) el teorema se reduce a:

$$-\iint_{S_\epsilon} \left(G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right) dS_\epsilon = \iint_S \left(G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right) dS \quad (3.9)$$

Ahora veamos que para un punto general P_1 en S' , la función de Green y su derivada normal pueden expresarse explícitamente por:

$$G(P_1) = \frac{\exp^{jk\epsilon}}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial N} = \frac{\exp^{jk\epsilon}}{\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} - jk \right)$$

dejando que ϵ sea arbitrariamente pequeño la continuidad de E y de sus derivadas nos permite escribir:

$$\iint_{S_\epsilon} \left(G \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial G}{\partial N} \right) dS_\epsilon = 4\pi\epsilon^2 \left[\frac{\partial E(P_0)}{\partial N} \frac{\exp^{jk\epsilon}}{\epsilon} - E(P_0) \frac{\exp^{jk\epsilon}}{\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} - jk \right) \right] \quad (3.10)$$

$$= -4\pi E(P_0) \quad (3.11)$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

sutituyendo éste resultado en el lado izquierdo de la Ec.(3.9) llegamos a lo que se conoce como el *Teorema Integral de Helmholtz y Kirchhoff* que juega un papel muy importante en el desarrollo de la teoría escalar de difracción:

$$E(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial E}{\partial N} G - E \frac{\partial G}{\partial N} \right) dS \quad (3.13)$$

ésta relación nos permite expresar el campo ó perturbación óptica en cualquier punto del espacio, en términos de los valores que éste tenga en la frontera, es decir, en función de los valores que tome el campo y su derivada sobre una superficie que encierre a éste punto.

3.2 El Campo Incidente

Debido a que la ecuación anterior Ec.(3.13) necesita conocer el valor que tome el campo sobre una superficie, en ésta sección derivaremos en forma analítica una expresión para describir el valor que toma una perturbación óptica a una longitud de onda dada, sobre una superficie arbitraria unidimensional en 'x', en el caso en

que la perturbación sea generada por una fuente de espectro espacial Gaussiano y se propage en la dirección 'xz'. Para ésto, utilizaremos una técnica matemática muy útil basada en cierta representación integral conocida como espectro angular de ondas planas.

Comenzaremos derivando la representación del espectro angular de una perturbación óptica en el espacio $z \geq 0$. Considere una perturbación óptica escalar monocromática generada por una fuente, en el que la parte espacial satisface la ecuación de Helmholtz y además es representada como una transformada de Fourier en un plano arbitrario z constante, esto es:

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(K, z) \exp(iKx) dK \quad (3.14)$$

sustituyendo en la ecuación de Helmholtz que $E(x, z)$ debe satisfacer Ec.(3.3), e intercambiando el orden de los operadores de integración y diferenciación obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\nabla^2 + k^2] [\phi(K, z) \exp(iKx)] dK = 0 \quad (3.15)$$

después de efectuar la diferenciación bajo el signo de la integral encontramos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(-K^2 + k^2) \phi(K, z) + \frac{\partial^2 \phi(K, z)}{\partial z^2} \right] \exp(iKx) dK = 0 \quad (3.16)$$

debido a que la ecuación anterior es válida para cualquier valor de x , el término entre paréntesis debe ser igual a cero por lo que la función $\phi(K, z)$ satisface la ecuación diferencia parcial:

$$\frac{\partial^2 \phi(K, z)}{\partial z^2} + \alpha^2 \phi(K, z) = 0 \quad (3.17)$$

donde $\alpha^2 = (-K^2 + k^2)$. La solución de ésta ecuación tiene la forma general:

$$\phi(K, z) = \Phi(K) \exp^{-i\alpha z} + \Upsilon(K) \exp^{i\alpha z}$$

como estamos en busca de una solución físicamente aceptable en el espacio positivo como modos convergentes a un plano arbitrario fijo, descartamos el segundo término que son los modos divergentes, por lo que la solución de la ecuación diferencial (3.17) tiene la forma:

$$\phi(K, z) = \Phi(K) \exp^{-i\alpha z} \quad (3.18)$$

sustituyendo en la ecuación (3.14) obtenemos la expresión para una perturbación óptica en cualquier plano arbitrario z .

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(K) \exp(-i\alpha z) \exp(iKx) dK \quad (3.19)$$

donde

$$\alpha(k, K) = \begin{cases} \sqrt{k^2 - K^2} & K^2 < k^2 \\ i\sqrt{K^2 - k^2} & K^2 > k^2 \end{cases} \quad (3.20)$$

debido al significado físico de éstos modos como ondas planas, se dice que la Ec.(3.19) es la representación del espectro angular de ondas planas del campo en cualquier punto arbitrario. Por otro lado, la forma del campo generado en plano conjugado de la fuente, como condición de frontera tiene una forma Gaussiana:

$$E(x, 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \quad (3.21)$$

como sabemos, la superficie arbitraria presenta variaciones de altura en el eje z fuera del plano conjugado y necesitamos una expresión válida en éstos puntos del espacio $E(x, z)$.

Para determinar la función apropiada utilizaremos la expresión del campo generado por una fuente cuyas condiciones de frontera son la Ec.(3.21) en su representación del espectro angular de ondas planas dada por la Ec.(3.19), i.e.:

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(K) \exp(iKx - i\alpha z) dK \quad (3.22)$$

por lo que primero debemos determinar la función de amplitud espectral $\Phi(K)$. Para ésto, reconocemos a $\Phi(K)$ en la Ec.(3.22) como la amplitud espectral del campo cuando $z = 0$. Suponiendo que existe y que además la Ec.(3.22) es válida cuando $z \rightarrow 0$ la igualamos con la Ec.(3.21) para obtener:

$$\exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(K) \exp(iKx) dK \quad (3.23)$$

aplicando una transformada inversa de Fourier e integrando podemos conocer la función amplitud espectral, esto es:

$$\begin{aligned} \Phi(K) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \exp(-iKx) dx \\ &= \frac{w}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{K^2 w^2}{4}\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

así, la densidad espectral de la luz incidente $S_o(K)$, estará también descrita por una forma Gaussiana. Sustituyendo la expresión anterior en la Ec.(3.22) obtenemos:

$$E(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{K^2 w^2}{4}\right) * \exp(iKx - i\alpha z) dK \quad (3.25)$$

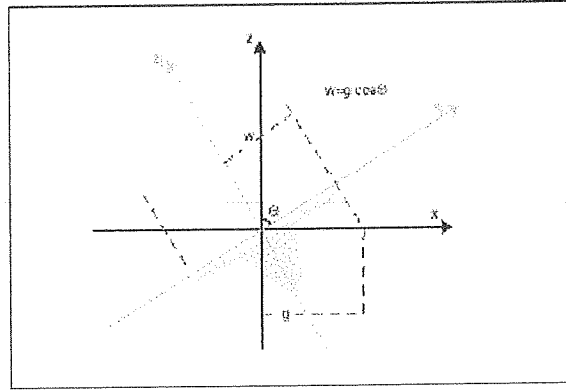


FIGURA 3.2.- Representación esquemática del campo incidente.

Utilizando un desarrollo en series de Taylor a segundo orden para la función α tenemos que:

$$\alpha(k, K) \approx k \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{K}{k} \right)^2 \right] \quad (3.26)$$

sustituyendo este resultado en la Ec.(3.25) podemos integrar de acuerdo a una fórmula conocida (Abramowitz [53]) para obtener:

$$E(x, z) = \left(1 - i \frac{2z}{w^2 k} \right)^{-1/2} \exp(-ikz) \exp \left[-\frac{x^2}{w^2} \left(1 - i \frac{2z}{w^2 k} \right)^{-1} \right] \quad (3.27)$$

con el sentido de obtener una expresión analítica más simple aplicamos el logaritmo a la ecuación anterior, expandemos en series a segundo orden y de la misma manera nos regresamos para obtener por fin una expresión aproximada para el campo incidente sobre una superficie:

$$E(x, z) \cong \exp[-ikz(1 + \Omega)] * \exp \left(-\frac{x^2}{w^2} \right) \quad (3.28)$$

donde

$$\Omega(x, z) = \frac{1}{k^2 w^2} \left[\frac{2x^2}{w^2} - 1 \right] \quad (3.29)$$

Como se observa en la figura (3.2), podemos introducir una matriz de transformación de coordenadas que nos da la libertad de tener un haz Gaussiano incidiendo de forma más general a un ángulo θ_{inc} sobre una superficie arbitraria.

$$\begin{aligned} x &= x \cos \theta_{inc} + z \sin \theta_{inc} \\ z &= -x \sin \theta_{inc} + z \cos \theta_{inc} \end{aligned} \quad (3.30)$$

La expresión (3.28) nos permite describir el valor que toma una perturbación ó campo óptico sobre una superficie arbitraria unidimensional $z = \zeta(x)$, en el caso en que la perturbación es generada por una fuente espacialmente Gaussiana. En otras palabras, es el campo incidente a la frecuencia ω , evaluado sobre la superficie.

3.3 Generación Numérica de la Superficie

Dos superficies rugosas nunca son idénticas, aún aquellas formadas por procesos muy bien controlados. En general, no es posible predecir el perfil de cualquier parte de la superficie conociendo el perfil de partes adyacentes. Por lo tanto tales superficies podrán ser consideradas como un proceso aleatorio, es decir, un proceso que no tiene memoria. Para describir tales superficies se requieren técnicas estadísticas.

Las superficies rugosas que se conocen en la naturaleza son descritas por una distribución estadística de la altura que puede tomar el perfil desde un cierto nivel medio. Sin embargo ésta distribución no describe completamente a la superficie, ya que no nos dice si los picos y valles de la superficie están muy cercanos ó si están muy apartados. Una segunda función, la función de correlación ó coeficiente de autocorrelación, describe éste aspecto de la superficie.

El objetivo de éste capítulo es generar superficies con una rugosidad aleatoria predeterminada, se llevará a cabo mediante la aplicación del método de la transformada de Fourier que utiliza a la función de densidad de potencia espectral, ya que ésta nos proporciona información acerca de las frecuencias espaciales presentes en la función que define el perfil de la superficie. De tal manera que se describirá la manera en que numéricamente se tienen en cuenta las propiedades estadísticas que caracterizan a las fluctuaciones de un proceso estocástico, siendo en éste caso la representación de las variaciones aleatorias de altura de una superficie rugosa.

Función dieléctrica de la superficie

El sistema físico consistirá de una interface $z = \zeta(x)$ que divide dos medios, vacío en la región $z > \zeta(x)$, y en la región $z < \zeta(x)$ tendremos un material caracterizado por una constante compleja dieléctrica :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega) \quad (3.31)$$

ésta constante es isotrópica y depende de la frecuencia ω de la luz incidente. Isotrópica significa que la rugosidad será la misma si vemos el perfil en cualquier dirección.

imación de la distancia media que existe entre picos y valles consecutivos sobre la superficie.

La desviación de la altura desde un plano de referencia ó la función perfil de superficie $\zeta(x)$ define a la superficie del medio a través de la ecuación:

$$z = \zeta(x) \quad (3.32)$$

es función de sólo una de las coordenadas del plano xy , es decir, es unidimensional y podremos también llamarla rejilla aleatoria.

Supondremos que la función $\zeta(x)$ corresponderá a un proceso estocástico, estacionario y Gaussiano, éste tipo de proceso se define con las propiedades de valor medio, *rms* y correlación de la siguiente manera:

$$\langle \zeta(x) \rangle = 0 \quad (3.33)$$

$$\langle \zeta^2(x) \rangle^{1/2} = \delta \quad (3.34)$$

$$\langle \zeta(x) \zeta(x+x') \rangle = \delta^2 \Gamma(x') = \langle \zeta^2(x) \rangle \Gamma(x') \quad (3.35)$$

la notación significa que el promedio se hace sobre el ensamble de superficies y δ es la *rms* de la rugosidad ó alturas. Por estacionario se entiende que la función de correlación depende sólo de la diferencia de posiciones y no de su posición absoluta. Además por un proceso Gaussiano se entiende que la función de correlación tiene forma Gaussiana con longitud de correlación transversal a , es decir:

$$\Gamma(x') = \exp\left(-\frac{x'^2}{a^2}\right) \quad (3.36)$$

Un parametro que seguido aparece en la teoría de espercimiento de luz por superficies rugosas es la *rms* de la derivada ó gradiente de la rejilla aleatoria. Para superficies isotrópicas con función de correlación Gaussiana éste toma el valor de:

$$\langle (\zeta'(x))^2 \rangle = \sqrt{2} \frac{\delta}{a} \quad (3.37)$$

3.3.2 Implementación en computadora

Para describir el método numérico empleado para generar superficies con una estadística definida por las ecuaciones (3.33), (3.34) y (3.35), empezaremos por definir a un conjunto de puntos $\{\xi_n\}$ que se encuentran a través del eje- x de nuestro marco de referencia:

$$\xi_n = n\Delta x = x_n \quad (3.38)$$

El perfil de superficie será equivalente a la superposición de una serie de estructuras periódicas, cada una con diferente amplitud, periodo y orientación. Por definición expresaremos a la función del perfil de superficie $\zeta(x)$ en los puntos $x = \xi_n$ para $(n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots)$ en la siguiente forma considerando puntos discretos de medición igualmente espaciados a través de la superficie de referencia plana L :

$$\zeta(\xi_k) = \delta \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j X_{j+k} \quad (3.39)$$

en la notación el conjunto $\{X_n\}$ representa a una secuencia de variables independientes Gaussianas con media cero y desviación estandar igual a la unidad, es decir:

$$\langle X_i \rangle = 0 \quad (3.40)$$

$$\langle X_i X_j \rangle = \delta_{ij} \quad (3.41)$$

mientras que $\{w_n\}$ es un conjunto de pesos que aún no han sido determinados y que se representarán por medio de su transformada inversa de Fourier.

Utilizando las propiedades de una variable independiente Gaussiana eqs.(3.40) y (3.41) encontramos que la media y la autocorrelación de nuestra superficie definida por la Ec.(3.39), estarán dadas por:

$$\langle \zeta(\xi_k) \rangle = \delta \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j \langle X_{j+k} \rangle = 0 \quad (3.42)$$

$$\langle \zeta(\xi_k) \zeta(\xi_{k+l}) \rangle = \delta^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_j w_m \langle X_{j+k} X_{m+k+l} \rangle = \delta^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j w_{j-l} \quad (3.43)$$

Un resultado general conocido nos dice que en el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\xi_j) = \frac{1}{\Delta x} \int f(\xi) d\xi \quad (3.44)$$

Suponiendo que w es real, el lado derecho de la Ec.(3.43) puede ser reescrito en su forma integral de la siguiente manera:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j w_{j-l} = \frac{1}{\Delta x} \int w(\xi) w^*(\xi - \xi') d\xi = \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{2\pi} \int \hat{w}(u) \hat{w}(-u) e^{iu\xi_l} du \quad (3.45)$$

donde se ha reconocido la autocorrelación de la variable w y expresado en términos de su par transformado de Fourier. De ésta manera la Ec.(3.43) que es la autocorrelación de la función del perfil nos queda finalmente como:

$$\langle \zeta(\xi_k) \zeta(\xi_{k+l}) \rangle = \delta^2 \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{2\pi} \int \hat{w}(u) \hat{w}(-u) e^{iu\xi_l} du \quad (3.46)$$

Aparte recordamos a la Ec.(3.35) como una de las expresiones en donde se suponen las propiedades estadísticas que debe satisfacer nuestra superficie, y la expresamos en función de su transformada inversa de Fourier de la forma:

$$\langle \zeta(\xi_k) \zeta(\xi_{k+l}) \rangle = \delta^2 \Gamma(\xi_l) = \delta^2 \frac{1}{2\pi} \int W(u) e^{iu\xi_l} du \quad (3.47)$$

donde $W(u)$ es el factor de estructura de la superficie (Densidad de Potencia Espectral) y par transformado de la correlación, i.e.:

$$\Gamma(\xi_l) \Leftrightarrow W(u) \quad (3.48)$$

De aquí que al igualar las anteriores expresiones Ecs. (3.46) y (3.47) observamos que:

$$\hat{w}(u) = \Delta x^{1/2} W^{1/2}(u) \quad (3.49)$$

y finalmente podemos concluir que:

$$w_j = \Delta x^{1/2} \frac{1}{2\pi} \int W^{1/2}(u) e^{iu\xi_j} du \quad (3.50)$$

Modificaciones para utilizar la transformada rápida de Fourier

Aunque $\zeta(\xi_k)$ puede ser calculado utilizando la Ec.(3.39) y ésta última Ec.(3.50), se han probado las ventajas de hacer modificaciones que explotan la velocidad de la Transformada Rápida de Fourier. Estas modificaciones consisten en suponer que $\zeta(\xi_k)$ es una función periódica de k , con un periodo de $2M$, i.e.:

$$\zeta(\xi_{k+2M}) = \zeta(\xi_k)$$

Podemos obtener una representación de $\zeta(\xi_k)$ con ésta propiedad, requiriendo que w_j y X_j también posean ésta periodicidad, entonces la Ec.(3.39) modificada queda como:

$$\zeta(\xi_k) \simeq \delta \sum_{j=-M}^{M-1} w_j X_{j+k} \quad (3.51)$$

reconociendo una correlación podemos escribirla en términos de su transformada inversa de Fourier de la siguiente manera:

$$\zeta(\xi_k) = \delta \sum_{l=-M}^{M-1} \hat{w}_l \hat{X}_l e^{i(\frac{2\pi l k}{2M})} = \zeta(\xi_{k+2M}) \quad (3.52)$$

en donde

$$\hat{w}_l = \frac{1}{\sqrt{2M}} \sum_{j=-M}^{M-1} w_j e^{-i\left(\frac{2\pi lj}{2M}\right)} \quad (3.53)$$

es la transformada de Fourier discreta de w_j . Utilizando el resultado general Ec.(3.44) en el límite cuando $M \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$ y $\mathcal{L} = 2M\Delta x$, podemos escribir en forma integral:

$$\hat{w}_l = \frac{1}{\sqrt{2M\Delta x}} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{-i\left(\frac{2\pi lx}{\mathcal{L}}\right)} dx \quad (3.54)$$

sustituyendo la Ec.(3.50) para $w(x)$ llegamos finalmente a que:

$$\hat{w}_l = \frac{1}{\sqrt{2M\Delta x}} W^{1/2}(q_l) \quad (3.55)$$

donde $q_l = \frac{2\pi l}{\mathcal{L}}$.

Ahora, por definición \hat{X}_l puede ser representado como la transformada de Fourier de un número complejo aleatorio:

$$\hat{X}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (M_l + iN_l) \quad (3.56)$$

en donde

$$M_l = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-M}^{M-1} X_j \cos\left(\frac{2\pi lj}{2M}\right) = M_{-l} \quad (3.57)$$

$$N_l = -\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=-M}^{M-1} X_j \sin\left(\frac{2\pi lj}{2M}\right) = -N_{-l} \quad (3.58)$$

Sustituyendo el resultado de la Ec.(3.55) y éste último Ec.(3.56) en la Ec.(3.52), llegamos finalmente a la expresión para función perfil de la superficie y a sus primeras dos derivadas:

$$\zeta(\xi_k) = \frac{\delta}{2\sqrt{M\Delta x}} \sum_{l=-M}^{M-1} (M_l + iN_l) W^{1/2}(q_l) e^{iq_l \xi_k} \quad (3.59)$$

$$\zeta'(\xi_k) = \frac{\delta}{2\sqrt{M\Delta x}} \sum_{l=-M}^{M-1} (M_l + iN_l) i q_l W^{1/2}(q_l) e^{iq_l \xi_k} \quad (3.60)$$

$$\zeta''(\xi_k) = -\frac{\delta}{2\sqrt{M\Delta x}} \sum_{l=-M}^{M-1} (M_l + iN_l) q_l^2 W^{1/2}(q_l) e^{iq_l \xi_k} \quad (3.61)$$

La representación para $\zeta(\xi_k)$ dada por la Ec.(3.59), es conveniente no sólo por que en ésta forma puede ser evaluada por la transformada rápida de Fourier, sino

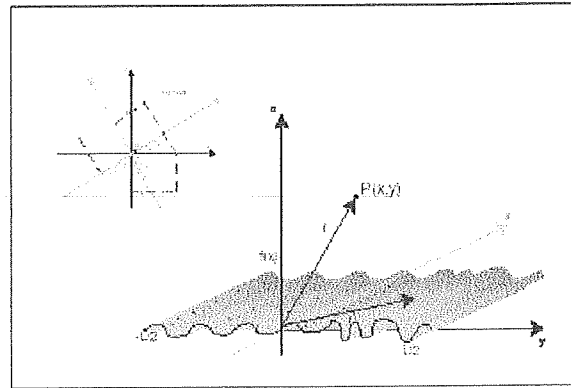


FIGURA 3.4.- Rayo óptico incidiendo sobre una superficie unidimensional

también porque de las definiciones (3.57) y (3.58) y las propiedades (3.40) y (3.41), se sigue que $\{M_l\}$ y $\{N_l\}$ son variables independientes, Gaussianas, con media cero y desviación estandar igual a la unidad. es decir $X_l = G(0, 1) + i \cdot G(0, 1)$.

Finalmente, para el caso de una correlación Gaussiana, tenemos de la Ec.(3.36) y la Ec.(3.48) que la función de densidad de potencia espectral es representada por:

$$W(k) = a\sqrt{\pi} * \exp\left(-(\pi a)^2 k^2\right) \quad (3.62)$$

de esta manera contamos con una forma de representar una superficie con rugosidad Gaussiana.

3.4 El Campo Esparcido.

Utilizando el resultado de la sección 3.1 se buscará una expresión exacta para el campo eléctrico esparcido producido por un rayo óptico *s*-polarizado de ancho finito que incide desde el vacío sobre una superficie rugosa unidimensional de material perfectamente conductor.

Como hemos visto, el campo esparcido será expresado en términos de su valor en la frontera, siendo éste, el valor del campo incidente y de su derivada normal evaluados sobre la superficie que se acaba de generar.

3.4.1 Polarización *s*.

En ésta sección nos enfocaremos al esparcimiento de un campo electrico *s*-polarizado incidiendo desde el vacío sobre una superficie definida por la ecuación $z = \zeta(x)$,

ver figura (3.4). Para éste tipo de polarización el campo eléctrico incidente tiene la forma:

$$U(x, t) = (0, E(x, z), 0) \exp(-i\omega t) \quad (3.63)$$

y como la teoría electromagnética señala, en la región $z > \zeta(x)$ el campo $E(x, z)$ es solución a la ecuación:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E^>(x, z; \omega) = 0 \quad (3.64)$$

mientras que en la región $z < \zeta(x)$ es la solución de:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) E^<(x, z; \omega) = 0 \quad (3.65)$$

Además, las condiciones de frontera satisfechas por $E^>(x, z; \omega)$ y $E^<(x, z; \omega)$ en la interface $z = \zeta(x)$ son:

$$E^>(x, z; \omega) = E^<(x, z; \omega) \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial E^>(x, z; \omega)}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon(\omega)} \frac{\partial E^<(x, z; \omega)}{\partial n} \quad (3.67)$$

Introduciremos ahora, dos funciones de Green $G_0(x, z; x'z')$ y $G_\varepsilon(x, z; x'z')$ que son las soluciones de:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_0(x, z; x'z') = -4\pi\delta(x-x')\delta(z-z') \quad (3.68)$$

en la región $z > \zeta(x)$, y

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_\varepsilon(x, z; x'z') = -4\pi\delta(x-x')\delta(z-z') \quad (3.69)$$

en la región $z < \zeta(x)$. La función de Green $G_0(x, z; x'z')$ satisface en el infinito la condición de una onda divergente, mientras que la función $G_\varepsilon(x, z; x'z')$ desaparece en el infinito. Una representación útil de éstas funciones para nuestro problema con geometría cilíndrica, es la función Hankel de orden cero de primer tipo:

$$G_0(x, z, x', z'; \omega) = i\pi H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} \left[(x-x')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2} \right) \quad (3.70)$$

$$G_\varepsilon(x, z, x', z'; \omega) = i\pi H_0^{(1)} \left(n_c(\omega) \frac{\omega}{c} \left[(x-x')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2} \right) \quad (3.71)$$

3.4.2 Campo esparcido

El punto de partida para derivar una relación exacta que nos exprese al campo esparcido, es requerir que cuando $z \rightarrow +\infty$, $E^>(x, z; w)$ sea la suma del campo incidente y de las ondas esparcidas dadas por la Ec.(3.13), mientras que $E^<(x, z; w)$ cuando $z \rightarrow -\infty$ consista en ondas que decaen exponencialmente. De tal manera que en la región $z > \zeta(x)$, $E = E^>(x, z; w)$ y $G = G_0(x, z; x'z')$. En la región $z < \zeta(x)$, $E = E^<(x, z; w)$ y $G = G_\epsilon(x, z; x'z')$. Utilizamos las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (3.66) y (3.67), y obtenemos dos ecuaciones integrales inhomogeneas acopladas:

$$E^>(x, z; w) = E_{inc}^>(x, z; w) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial G_0(x, z; x'z')}{\partial N} E^>(x', z'; w) - G_0(x, z; x'z') \frac{\partial E^>(x', z'; w)}{\partial N} \right) dx' \quad (3.72)$$

$$E^<(x, z; w) = - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial G_\epsilon(x, z; x'z')}{\partial N} E^<(x', z'; w) - G_\epsilon(x, z; x'z') \frac{\partial E^<(x', z'; w)}{\partial N} \right) dx' \quad (3.73)$$

3.4.3 Conductor perfecto

De la teoría electromagnética sabemos que en el interior de un material conductor perfecto no subsiste ningún campo y por continuidad tampoco en la superficie, es decir que en $z < \zeta(x)$, $E^<(x, z; w) = 0$, por continuidad en la superficie $E^<(x', z'; w) = 0$ y utilizando la condición de frontera (3.66) también $E^>(x', z'; w) = 0$. Observando las Ecs. (3.72) y (3.73), podemos concluir que el campo total en cualquier punto (x, z) en $z > \zeta(x)$ está dado por la expresión:

$$E(x, z; w) = E_{inc}(x, z; w) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, z; x'z') F(x', w) dx' \quad (3.74)$$

donde al escribir ésta ecuación se ha introducido a la función fuente definida por:

$$F(x, w) = \frac{\partial E(x, z; w)}{\partial N} = \left(-\zeta'(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right) E(x, z; w) \quad (3.75)$$

y el campo eléctrico esparcido será entonces:

$$E_{sc}(x, z; w) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, z; x'z') F(x', w) dx' \quad (3.76)$$

En la siguiente sección, se resolverá numéricamente a la función fuente que satisface ésta ecuación integral inhomogenea, ya que cuenta con la información del valor de la derivada normal del campo evaluada en la superficie, y es necesaria para poder conocer el campo esparcido en cualquier punto del espacio.

3.5 Determinación de la Función Fuente

Para calcular el campo s-polarizado esparcido por una superficie rugosa de material conductor perfecto, necesitamos determinar primero la función fuente $F(x, z; w)$ llamada así debido a que se puede interpretar como una pequeña fuente puntual en la superficie que al ser integrada da origen al campo esparcido.

La ecuación que hay que resolver Ec.(3.76) es una ecuación integral inhomogénea de Fredholm de primera clase en la derivada normal del campo, y para resolverla utilizaremos un procedimiento numérico. El problema es en esencia un problema de condiciones de frontera tipo Dirichlet pues conocemos el valor de la función en la frontera Ec.(3.28) pero desconocemos el valor de la derivada normal de la función en la frontera.

3.5.1 La ecuación matricial

El procedimiento numérico utilizado para resolver esta ecuación, que principalmente es encontrar el valor de la función fuente, consiste en evaluar el campo eléctrico total en puntos cada vez más cercanos a la interface, es decir cuando $(x, z) \rightarrow [x_0, \zeta(x_0)]$ debido a que sabemos que el campo total en la superficie de un conductor perfecto es cero. En el límite tendremos:

$$0 = E_{inc}(x_0, \zeta(x_0); w) - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x_0, \zeta(x_0) + \eta; x', z') F(x'; w) dx' \quad (3.77)$$

dicho de otra manera:

$$E_{inc}(x_0; w) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} L_0(x_0, x') F(x'; w) dx' \quad (3.78)$$

donde

$$\begin{aligned} L_0(x_0, x') &= \frac{1}{4\pi} G_0(x_0, \zeta(x_0) + \eta; x', z') \\ &= \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k \left[(x_0 - x')^2 + (\zeta(x_0) + \eta - \zeta(x'))^2 \right]^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Con el objeto de discretizar la integral, suponemos una superficie de longitud finita L e introducimos un conjunto de N puntos igualmente espaciados $\{x_n\}$ para obtener:

$$\begin{aligned} E_{inc}(x_0) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-L/2}^{L/2} L_0(x_0, x') F(x') dx' \\ &= \sum_{n=1}^N \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_n - \frac{\Delta x}{2}}^{x_n + \frac{\Delta x}{2}} L_0(x_0, x') F(x') dx' \end{aligned} \quad (3.80)$$

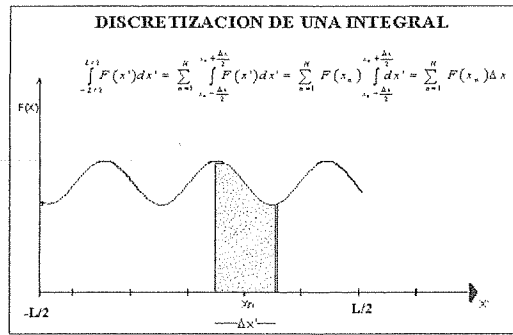


FIGURA 3.5.- Discretización de una integral.

donde se ha introducido la notación $\Delta x = L/N$ y $x_n = -\frac{L}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right) \Delta x$.

De la misma manera, suponemos que la discretización es suficientemente fina, ver figura (3.5), por lo que nos es posible aproximar el valor de la función fuente en todo el intervalo por su valor central, es decir:

$$E_{inc}(x_0, z_0; w) = \sum_{n=1}^N F(x_n) \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_n - \frac{\Delta x}{2}}^{x_n + \frac{\Delta x}{2}} L_0(x_0; x') dx' \quad (3.81)$$

Si repetimos el proceso para todos los puntos de la superficie, es decir para todos los $x_0 = x_m$ donde $(m = 0, 1, 2, \dots, N)$ tendremos la ecuación matricial:

$$E_{inc}(x_m) = \sum_{n=1}^N F(x_n) L(x_m, x_n) \quad (3.82)$$

$$\vec{E}_{inc} = \vec{F} \times \vec{L} \quad (3.83)$$

donde los elementos de la matriz \vec{L} están dados por la Ec.(3.81) y la Ec.(3.79) como:

$$\begin{aligned} L_{mn} &\equiv L(x_n, x_m) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_n - \frac{\Delta x}{2}}^{x_n + \frac{\Delta x}{2}} L_0(x_m; x') dx' \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x_n - \frac{\Delta x}{2}}^{x_n + \frac{\Delta x}{2}} \frac{j}{4} H_0^{(1)} \left(k \left[(x_m - x_n)^2 + (\zeta(x_m) + \eta - \zeta(x_n))^2 \right]^{1/2} \right) dx' \end{aligned} \quad (3.84)$$

Elementos fuera de la diagonal

Para el caso $n \neq m$ se toma el límite en el integrando y se aproxima la integral por su valor central multiplicado por el intervalo de integración, teniendo entonces como

resultado de la Ec.(3.84) los elementos de matriz:

$$L_{mn} = \left(\frac{i\Delta x}{4}\right) H_0^{(1)} \left(k \left[(x_m - x_n)^2 + (\zeta(x_m) - \zeta(x_n))^2 \right]^{1/2} \right) \quad (3.85)$$

Elementos de la diagonal

El caso $n = m$ presenta una singularidad en el integrando debido a la discontinuidad de las funciones Hankel en el origen, pero es posible integrar haciendo un cambio de variable.

Sea $u = x_n - x_m$ con éste cambio de variable los elementos de la diagonal de la matriz toman la forma:

$$L_{mm} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k \left[u^2 + (\zeta(x_m) - \zeta(x_m + u) + \eta)^2 \right]^{1/2} \right) du \quad (3.86)$$

hacemos un desarrollo en series de Taylor para $\zeta(x_m + u)$ alrededor del punto x_m de la siguiente manera:

$$\zeta(x_m + u) \approx \zeta(x_m) + u\zeta'(x_m) \quad (3.87)$$

tendremos entonces al sustituir en la Ec.(3.86) la expresión:

$$L_{mm} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k \left[u^2 + (-u\zeta'(x_m) + \eta)^2 \right]^{1/2} \right) du \quad (3.88)$$

y al evaluar el límite se obtiene:

$$L_{mm} = \frac{i}{4} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} H_0^{(1)}(k|u|\gamma_m) du \quad (3.89)$$

donde

$$\gamma_m = \sqrt{1 + \zeta'(x_m)} \quad (3.90)$$

además, como en el integrando tenemos una función par, podemos reescribir la Ec.(3.89) de la siguiente manera:

$$L_{mm} = \frac{i}{2} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} H_0^{(1)}(ku\gamma_m) du \quad (3.91)$$

Como se puede observar de la figura (3.6), para integrar analíticamente utilizaremos una aproximación de las funciones Hankel para argumentos pequeños [9]:

$$H_0^{(1)}(z) \approx \frac{2i}{\pi} \ln(z) \quad (3.92)$$

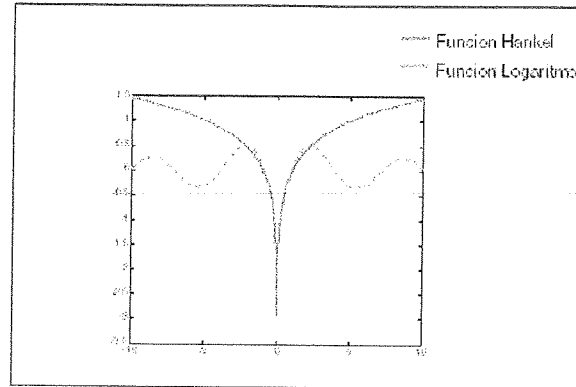


FIGURA 3.6.- Aproximación de la función Hankel para argumentos pequeños.

que al sustituir en la expresión integral de los elementos diagonales de la matriz \vec{L} Ec.(3.91), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 L_{mm} &= -\frac{1}{\pi k \gamma_m} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \ln(z) dz \\
 &= -\frac{1}{\pi k \gamma_m} [z \ln z - z]_0^{\frac{\Delta x}{2}} \\
 &= -\frac{1}{\pi k \gamma_m} [k u \gamma_m \ln(k u \gamma_m) - k u \gamma_m]_0^{\frac{\Delta x}{2}} \\
 &= -\frac{\Delta x}{2\pi} \left[\ln \left(k \frac{\Delta x}{2} \gamma_m \right) - 1 \right] \\
 &= -\frac{\Delta x}{2\pi} \ln \left(\frac{k \gamma_m \Delta x}{2 \exp} \right) \tag{3.93}
 \end{aligned}$$

siendo el resultado una función logaritmo podemos regresar con la misma aproximación Ec.(3.92) para obtener finalmente:

$$L_{mm} = \frac{i \Delta x}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{k \gamma_m \Delta x}{2 \exp} \right) \tag{3.94}$$

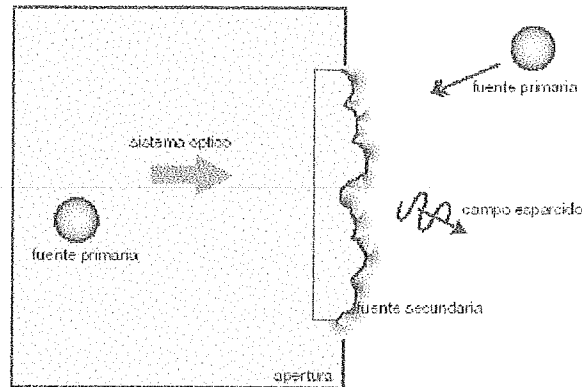


FIGURA 3.7.- El problema de esparcimiento como radiación de una fuente secundaria.

3.5.2 Solución numérica para la función fuente

Reescribiendo los elementos de la matriz L_{mn} que están dados por la Ec.(3.85) y la Ec.(3.94):

$$L_{mn} = \begin{cases} \left(\frac{i\Delta x}{4} \right) H_0^{(1)} \left(k \left[(x_m - x_n)^2 + (\zeta(x_m) - \zeta(x_n))^2 \right]^{1/2} \right) & \text{si } m \neq n \\ \left(\frac{i\Delta x}{4} \right) H_0^{(1)} \left(\frac{k\gamma_m \Delta x}{2 \exp} \right) & \text{si } m = n \end{cases} \quad (3.95)$$

podremos ahora resolver numéricamente la ecuación matricial Ec.(3.83) para el vector incógnita \vec{F} y con ésto conocer los valores de la función fuente $F(x, z; w)$ que contiene las condiciones de frontera del problema.

$$\vec{F} = \vec{L}^{-1} \vec{E}_{inc} \quad (3.96)$$

3.6 El Problema de Esparcimiento como Radiación de Fuente Secundaria.

En ésta sección, utilizando la analogía que existe entre el proceso de radiación y el de esparcimiento, construiremos una fuente secundaria con las funciones fuente encontradas en el problema de esparcimiento de la sección anterior.

Una fuente secundaria es generalmente una apertura iluminada por una fuente primaria, ya sea directamente ó por medio de un sistema óptico. Por otro lado

observando la figura (3.7), podemos considerar que el campo esparcido por una superficie, proviene de una superposición de contribuciones de cada punto de la superficie iluminada. Por lo que una superficie esparcidora resulta ser una fuente secundaria y su radiación será descrita por una función que contenga la información acerca de la interacción de la superficie con la radiación incidente. Concluimos que se trata entonces de la expresión (3.96) que es la función fuente del problema de esparcimiento. En la siguiente sección analizaremos el comportamiento de ésta función en el campo lejano.

3.7 Radiación en el Campo Lejano

3.7.1 La función de Green en el campo lejano

Como hemos visto el campo esparcido en cualquier punto del espacio Ec.(3.76) está expresado en términos de la función fuente $F(x, \zeta(x); w)$ ó fuente secundaria Ec.(3.96) y una función de Green apropiada, es decir por:

$$E_{sc}(x, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, z; x' z') F(x', w) dx' \quad (3.97)$$

donde la función de Green está dada por la ecuación (3.70):

$$G_0(x, z, x', z'; w) = i\pi H_0^{(1)}\left(\frac{w}{c} \left[(x-x')^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}\right) \quad (3.98)$$

de ésta manera, el campo esparcido queda determinado por:

$$E_{sc}(x, z) = -\frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} F(x', \zeta(x')) \times H_0^{(1)}\left(k \left[(x-x')^2 + (\zeta(x) - \zeta(x'))^2\right]^{1/2}\right) dx' \quad (3.99)$$

Para realizar ésta integral recordamos que lo que nos interesa es el campo lejano esparcido, por lo que utilizaremos una expansión asintótica de la función Hankel para argumentos grandes [9], como se muestra en la figura (3.8) en términos vectoriales \mathbf{r} y \mathbf{r}' .

$$H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (3.100)$$

si nos encontramos en un punto lejano $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ el término de amplitud $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ puede ser aproximado por $\frac{1}{r}$. Observando la figura (3.9) también podemos emplear una

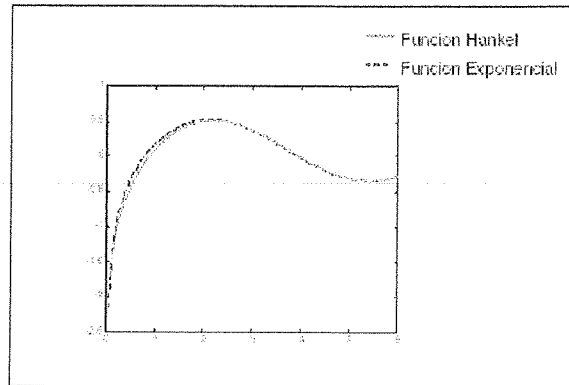


FIGURA 3.8.- Aproximación de la función Hankel para argumentos grandes.

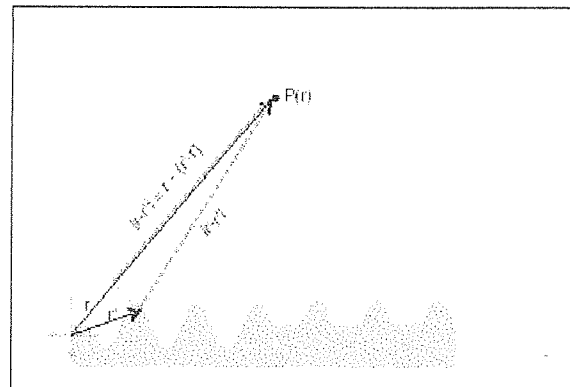


FIGURA 3.9.- Aproximación del argumento $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

aproximación al argumento de la función exponencial la cuál estará dada por:

$$\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \approx \exp\left[ik\left(r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}\right)\right] \quad (3.101)$$

definiendo al vector $\mathbf{k}_s = k\frac{\mathbf{r}}{r}$ podemos reescribir la Ec.(3.100) de forma aproximada de tal manera que contenga la información acerca del comportamiento de la función Hankel en el campo lejano:

$$H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \exp[i(kr - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}')] \quad (3.102)$$

3.7.2 Componente angular del campo lejano

Si sustituimos la expresión de la función Hankel para el campo lejano en la fórmula del campo esparcido Ec.(3.99) obtenemos una nueva expresión donde separamos la

componente radial y angular del campo:

$$E_{sc}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \exp(ikr) \int_C F(\mathbf{r}') \times \exp(-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.103)$$

$$= -\Phi_r \int_{-\infty}^{\infty} F(x', \zeta(x')) \exp(-ik(x' \sin \theta + \zeta(x') \cos \theta)) dx' \quad (3.104)$$

donde el factor Φ_r contiene la dependencia radial y está dado por:

$$\Phi_r = \sqrt{\frac{1}{8\pi kr}} \exp(ikr) \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \quad (3.105)$$

Nuevamente aproximando la integral por una suma, podemos expresar la dependencia angular del campo lejano esparcido $E_{sc}(\theta)$ discretizado como:

$$E_{sc}(\theta) = -\Delta x \sum_{n=1}^N F(x_n) \exp(-ik(x_n \sin \theta + \zeta(x_n) \cos \theta)) \quad (3.106)$$

Finalmente con la información de la función fuente $F(\mathbf{r}')$ se puede evaluar el campo esparcido en una dirección o direcciones determinadas. Dicho de otra manera, la expresión (3.106) nos permite calcular el comportamiento angular de la radiación emitida por una fuente secundaria en el campo lejano.

3.8 Cálculo del espectro de la luz esparcida.

En el capítulo anterior, se llegó a un resultado que indica que el espectro generado en el campo lejano por una fuente de luz, puede en general diferir del espectro en el plano de la fuente. Aprovechando la analogía que existe entre el proceso de radiación y el de esparcimiento, nos propusimos analizar el comportamiento de la distribución espectral de la luz esparcida por una superficie rugosa. Hasta el momento hemos encontrado una forma para describir el comportamiento angular del campo lejano esparcido para una onda monocromática incidente, lo que nos permitirá calcular, por superposición, el campo total esparcido para luz de un ancho de banda espectral finito.

Recordemos que el campo incidente expresado por la ecuación (3.28), sólo representa las variaciones espaciales del campo. La dependencia explícita del tiempo $\exp^{-i\omega t}$, se ha supuesto pero omitido del cálculo. Para ondas no monocromáticas el campo total incidente es una superposición de componentes monocromáticas pesadas por una función de la frecuencia. Escribimos entonces el campo incidente de

la forma:

$$E_{inc}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega, t) E_{inc}(x, z; \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.107)$$

donde $\Phi(\omega, t)$ representa, como función del tiempo, un proceso aleatorio complejo Gaussiano con correlación δ . Es decir:

$$\overline{\Phi(\omega, t) \Phi^*(\omega', t)} = \begin{cases} |\Phi(\omega)|^2 & \text{si } \omega = \omega' \\ 0 & \text{o.c.} \end{cases}, \quad (3.108)$$

donde la barra representa un promedio temporal.

La intensidad total incidente promediada en el tiempo estará entonces dada por:

$$\begin{aligned} \overline{I_{inc}(x, z)} &= \overline{|E_{inc}(x, z)|^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega)|^2 I_{inc}(x, z; \omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.109)$$

En nuestros cálculos, lo más sencillo es tomar a la intensidad incidente como la misma para cada frecuencia. Alternativamente, podemos suponer que el espectro es suficientemente angosto (haz gaussiano) para que la dependencia en ω se pueda despreciar. Entonces

$$\overline{I_{inc}(x, z)} = I_{inc}(x, z; \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\omega)|^2 d\omega \quad (3.110)$$

$$= I_{inc}(x, z; \omega) \int_{-\infty}^{\infty} s_o(\omega) d\omega. \quad (3.111)$$

Esto muestra que el espectro incidente es:

$$s_o(\omega) = |\Phi(\omega)|^2. \quad (3.112)$$

Por otro lado, la relación (3.106) representa el campo esparcido a una frecuencia ω , para un haz incidente de amplitud $E_{inc}(x, z; \omega)$. Si el campo incidente está ahora pesado por $\Phi(\omega)$, debido a la linealidad del problema, el campo esparcido también lo estará. Esto es

$$E_{sc}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) E_{sc}(\theta; \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.113)$$

La intensidad promedio esparcida será entonces

$$\overline{I_{sc}(\theta)} = \int_{-\infty}^{\infty} s_o(\omega) I_{sc}(\theta; \omega) d\omega. \quad (3.114)$$

La ecuación (3.114), muestra de la misma manera que en (3.111), que la densidad espectral de potencia de la luz esparcida está dada por

$$s(\omega) = s_o(\omega) I_{sc}(\theta; \omega). \quad (3.115)$$

sustituyendo el módulo al cuadrado de la Ec.(3.106), obtenemos finalmente la siguiente expresión para el espectro de la luz esparcida

$$s(w) = s_o(w) \cdot \left| \Delta x \sum_{n=1}^N F(x_n) \exp(-ik(x_n \sin \theta + \zeta(x_n) \cos \theta)) \right|^2 \quad (3.116)$$

Capítulo 4

CAMBIOS ESPECTRALES POR ESPARCIMIENTO

4.1 Resultados.

En el capítulo anterior, obtuvimos una relación para describir el comportamiento angular del campo lejano esparcido por una superficie rugosa. Basados en esta expresión se desarrollaron los programas necesarios para el cálculo numérico del módulo al cuadrado del campo esparcido ó lo que es lo mismo, de la intensidad esparcida de una onda monocromática incidente, como función de la dirección de observación.

La figura 4.1, muestra una curva típica de retroesparcimiento, obtenida numéricamente para la intensidad esparcida de una onda monocromática.

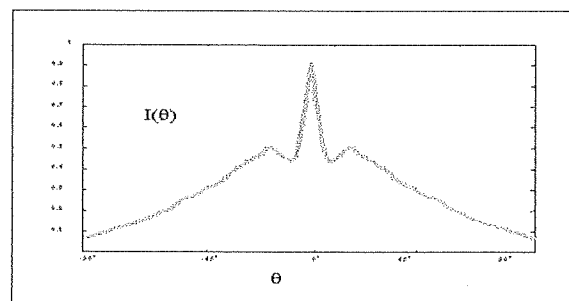


FIGURA 4.1.- Intensidad esparcida de una onda monocromática como función de la dirección de observación, producida por esparcimiento de luz a incidencia normal sobre una superficie con rugosidad estadísticamente gaussiana.

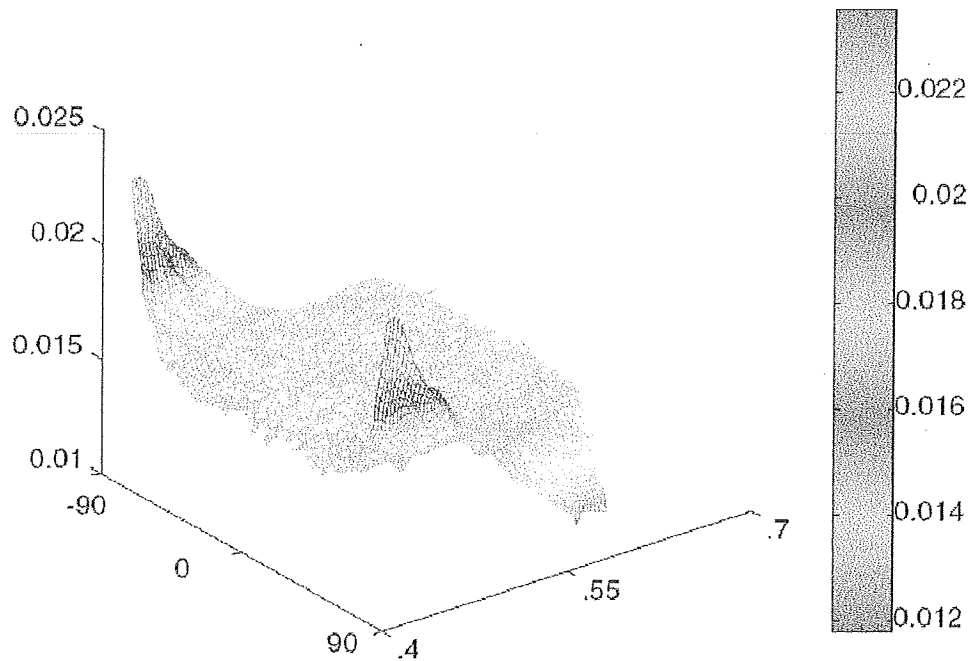


FIGURA 4.2.- Intensidad esparcida de luz con un ancho de banda espectral finito.

Al considerar la dependencia explícita en el tiempo de una onda de luz con un ancho de banda espectral finito, el campo total esparcido resulta ser una superposición de componentes monocromáticas pesadas por una función de la frecuencia. Al hacer un promedio temporal en la intensidad total esparcida, encontramos que el espectro generado por esparcimiento en el campo lejano, resulta como una multiplicación del espectro de la radiación incidente por la intensidad esparcida de cada componente monocromática.

$$s(\omega) = s_o(\omega) I_{sc}(\theta; \omega) \quad (4.1)$$

$I_{sc}(\theta; \omega) = |E_{sc}(\theta; \omega)|^2$ esta dada por la Ec.(3.106) y se calculó numéricamente para un ancho de banda espectral en el visible. La figura 4.2 muestra la cantidad de luz esparcida por cada componente espectral presente en el haz incidente, esto, a varias direcciones de observación. Al multiplicar cada curva a una dirección de observación fija, con el espectro de luz incidente, obtenemos el espectro de la radiación esparcida. Como podemos observar de la figura (4.2) el espectro generado en el campo lejano permanecerá invariante, a excepción de algunos ángulos de observación

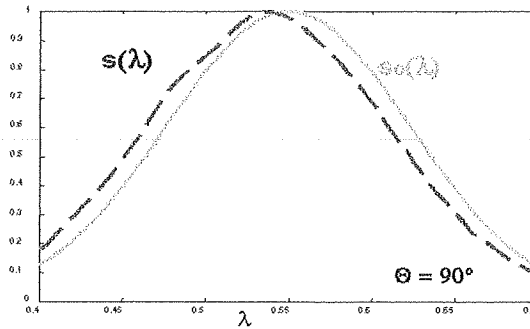


FIGURA 4.3.- Comparación del espectro incidente con el esparcido, observado a $\approx 90^\circ$.

casi rasantes $\approx 90^\circ$, en donde se apreciará una redistribución de energía.

En la figura 4.3, se muestra el valor de la densidad espectral esparcida en una dirección de observación fija $\approx 90^\circ$ comparada con la densidad espectral incidente a $\approx 0^\circ$.

Por lo anterior, concluimos que el espectro normalizado de la radiación incidente presenta, en general, una redistribución de energía al interactuar con un medio esparcador. Esta redistribución es función de la dirección de observación.

Capítulo 5

RESUMEN Y CONCLUSIONES

Todos los campos electromagnéticos encontrados en la naturaleza presentan fluctuaciones de naturaleza aleatoria. Aunque éstas fluctuaciones no pueden ser observadas directamente, se puede deducir su existencia con experimentos que proveen información acerca de la correlación entre las fluctuaciones en dos o más puntos del espacio. En tiempos más recientes, con la disponibilidad de modernos detectores de luz, se han empezado a estudiar correlaciones de orden mayor. Con lo que se conoce ahora como la teoría de coherencia óptica se establece un importante resultado: en el espacio libre la función de correlación de segundo orden obedece leyes de propagación. La manera de determinar la función de coherencia mutua en cualquier par de puntos, consiste en resolver la ecuación de Helmholtz para la función de densidad espectral-cruzada en términos de sus valores en la frontera. Esta solución describe cambios por propagación en las propiedades de correlación de segundo orden. Así, con éste resultado, es posible estudiar la radiación generada en el campo lejano por una fuente secundaria de cualquier estado de coherencia, ya que la naturaleza del campo óptico generado en un punto lejano estará determinado por su densidad espectral en el plano de la fuente, y por la propagación hasta el campo lejano de sus propiedades de coherencia. De ésta manera, considerando la radiación de una fuente plana secundaria cuasi-homogénea, hemos visto cómo las propiedades de correlación afectan la distribución espacial y espectral de la energía radiada, sobresaliendo el hecho de que los cambios en el estado de coherencia espacial de la fuente pueden producir apreciables cambios en el espectro del campo radiado. Esta redistribución del espectro puede asemejar un corrimiento de líneas espectrales. Ilustrando lo anterior, hemos considerado ejemplos con dos tipos de fuentes. Con la primera, con un grado de coherencia espectral Gaussiano, se observa que el espectro del campo lejano difiere del espectro de la fuente. Con la segunda, con un grado de coherencia espectral Lambertiano, se observa que la radiación presenta una invarianza espectral ante la propagación. Podemos concluir que, aparte de simples factores geométricos y de proporcionalidad, el espectro de la luz en el campo lejano difiere en general

del espectro de la fuente que lo genera, y que esto depende principalmente de las propiedades de correlación de la luz en el plano de la fuente y de la dirección de observación.

Basados en este principio nos dimos a la tarea de detectar numéricamente cambios espectrales en problemas de esparcimiento.

Debido a que el campo esparcido por una superficie puede construirse al superponer la contribución proveniente de cada punto de la superficie iluminada, esta se puede considerar como una fuente secundaria. En este último caso, los elementos responsables de las fluctuaciones asociadas a la fuente serán las fluctuaciones que presente la superficie esparcidora. De ésta manera, buscar una expresión para el campo lejano de una fuente, se resume ahora a resolver el problema de esparcimiento para una superficie rugosa. Al realizar este trabajo, nuestro interés principal fué estudiar el comportamiento de la distribución espectral asociado a una onda óptica *invariante*, que viaja a través del espacio libre e interactúa con un medio esparcidor estadísticamente conocido.

El problema fue resuelto numéricamente y de una manera rigurosa utilizando el segundo teorema integral de Green. En esta formulación el campo esparcido queda expresado en términos de sus valores de frontera. Para el caso de un campo con polarización 's' incidiendo sobre un material perfectamente conductor, la condición de frontera relevante está representada por el valor que toma la derivada normal del campo sobre cada punto de la superficie. A la función derivada normal del campo evaluado sobre la superficie se le conoce también como función fuente, debido a que puede interpretarse como una pequeña fuente puntual en la superficie que al ser integrada da origen al campo esparcido, ya que contiene la información tanto del campo incidente como de la superficie.

El campo generado en el plano conjugado de la fuente, que es un plano promedio en la superficie, tiene una forma Gaussiana para cada frecuencia presente, pero como sabemos, la superficie esparcidora presenta variaciones aleatorias de altura fuera del plano, y se necesitó una expresión válida para describir el valor que toma el campo incidente en éstos puntos del espacio sobre el perfil de la superficie. Para lograrlo se utilizó una técnica matemática basada en la propagación del espectro espacial angular del campo incidente.

La generación de una superficie con rugosidad aleatoria predeterminada, se llevó a cabo mediante la aplicación del método numérico que genera la superficie en el espacio de las frecuencias, utilizando como función de peso la función de densidad espectral de potencia de la superficie, y regresando a coordenadas espaciales mediante

una transformada de Fourier. De esta manera, se tomaron en cuenta las propiedades estadísticas que caracterizan a las fluctuaciones de un proceso aleatorio, que en este caso son, la desviación estandar de las alturas y la longitud de correlación de una superficie rugosa.

Para calcular el campo con polarización 's' esparcido por una superficie rugosa de material conductor perfecto, determinamos primero a la función fuente, ya que es la que cuenta con la información del problema. Para esto, se resolvió una ecuación integral inhomogénea para la derivada normal del campo utilizando un procedimiento numérico.

Como vimos, el campo esparcido en cualquier punto del espacio queda expresado en términos de la función fuente y una función de Green apropiada, y que, considerando la geometría del problema, resultó ser una función de Hankel. Recordando que nos interesa el comportamiento de estas funciones en el campo lejano y su dependencia en la dirección de observación, obtuvimos una expresión para describir el comportamiento angular del campo lejano esparcido por una superficie rugosa. De esta manera se desarrollaron los programas necesarios para el cálculo numérico del módulo al cuadrado del campo esparcido ó, lo que es lo mismo, de la intensidad esparcida como función de la longitud de onda incidente y de la dirección de observación.

Al considerar la dependencia explícita en el tiempo de una onda de luz con un ancho de banda espectral finito, el campo total esparcido resulta ser una superposición de componentes monocromáticas pesadas por una función de la frecuencia. Al hacer un promedio temporal en la intensidad total esparcida, encontramos que el espectro generado por esparcimiento en el campo lejano resulta de la multiplicación del espectro de la radiación incidente por la intensidad esparcida de cada componente monocromática. Como se pudo observar, el espectro generado en el campo lejano permanece invariante a excepción de algunos ángulos de observación casi rasantes, en donde se aprecia una considerable redistribución de energía.

Por lo anterior, concluimos que el espectro normalizado de la radiación incidente presenta, en general, una redistribución de energía al interactuar con un medio esparcidor. Esta redistribución es función de la dirección de observación.

Bibliografía

- [1] Beckmann and Spizzichino, *The Scattering of Electromagnetic Wave from Rough Surfaces*.
- [2] F.G. Bass and I.M. Fuks, *Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces*.
- [3] E. Wolf, *Physical Review Letters* **56**, No.13, 1370 (1986).
- [4] E.Wolf, *Letters to Nature* **326**, 363 (1987).
- [5] L.Mandel and E.Wolf, *Optical Coherence and quantum optics* (Cambridge University Press,1995), 1th ed.
- [6] E.Wolf and D.James, *Rep. Prog. Phys.* **59** (1996).
- [7] A.Lagendijk, *Physsics Letters A*, **147**, 7 (1990).
- [8] T.A.Leskova, A.A.Maradudin and E.R.Méndez, *Physical Review Letters* **79**, No.6, 1010 (1997).
- [9] Abramowitz, Stegun, *Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas*, pag.364, (19).