

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS E INGENIERÍA  
MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA



“DETECCION DE LA VARIABILIDAD CARDIACA  
UTILIZANDO ANALISIS ESPECTRAL MODERNO”

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

PRESENTA

JOSE GUILLERMO RODRIGUEZ ORTIZ

DIRECTOR:

M. C. JOSÉ JAIME ESQUEDA ELIZONDO

CO-DIRECTOR:

DR. MARCO ANTONIO REYNA CARRANZA

TIJUANA B. C., MARZO DE 2009

# CONTENIDO

Resumen .....	1
Abstract .....	2
Contenido .....	3
Lista de figuras .....	4
Lista de tablas .....	7
Lista de símbolos y acrónimos .....	7
INTRODUCCION .....	9

## CAPITULO I. EL MODELO AUTOREGRESIVO

Introducción .....	I-1
I.1 Procesos aleatorios y estimadores .....	I-1
I.2 Matriz de autocorrelaciones .....	I-4
I.3 Estimación espectral usando el modelo AR.....	I-7
I.4 Estimación del orden de un modelo AR .....	I-17

## CAPITULO II. ALGORITMO LEVINSON-DURBIN

Introducción .....	II-1
II.1 Algoritmo recursivo .....	II-2
II.2 Propiedades del algoritmo .....	II-13

## CAPITULO III. ESTIMACION ESPECTRAL DE LA VARIABILIDAD CARDIACA

Introducción .....	III-1
III.1 Introducción al electrocardiograma .....	III-1

---

III.2 Ondas e intervalos del electrocardiograma.....	III-6
III.3 Variabilidad cardiaca .....	III-8
III.4 Aplicación en un procesador digital de señales .....	III-15
<b>CAPITULO IV. RESULTADOS Y CONCLUSIONES</b>	
Introducción .....	IV-1
IV.1 Resultados.....	IV-2
IV.2 Conclusiones .....	IV-13
REFERENCIAS .....	i
Anexo I. Comunicación anfitrión destino.....	A.1
Anexo II. Densidad espectral de potencia de los algoritmos.....	A.5

## Lista de Figuras

Fig. I.1. Concentración de la potencia en las bajas frecuencias para $0 < a(1) < 1$ .....	I-14
Fig. I.2. Concentración de la potencia en las altas frecuencias para $-1 < a(1) < 0$ .....	I-15
Fig. I.3. Concentración de la potencia en $w_0$ para $0 < r < 1$ .....	I-17
Fig. II.1 Comportamiento del error residual .....	II-9
Fig. II.2. Densidad espectral de potencia de la ecuación.....	II-12
Fig. III.1. Cavidades y válvulas cardiacas .....	III-2
Fig. III.2. Potencial de acción en la célula cardiaca.....	III-3
Fig. III.3. Sistema de Conducción de la actividad eléctrica .....	III-4
Fig. III.4. Ciclo cardiaco.....	III-5
Fig. III.5. Trazo Electrocardiográfico .....	III-8
Fig. III.6. La variabilidad cardiaca en función del sistema nervioso expresado como respuesta de un sistema de control.....	III-9

Fig. III.7. Estimación del intervalo RR .....	III-10
Fig. III.8. Muestras obtenidas de un voluntario sano por 5 minutos en posición de clinostatismo .....	III-12
Fig. III.9. Estimación espectral del sujeto #1 utilizando un modelo AR(3) y sus bandas de interés .....	III-13
Fig. III.10. Estimación espectral del sujeto #1 usando la FFT de la secuencia de autocorrelación de la variabilidad cardiaca .....	III-14
Fig. III.11. Prototipo desarrollado.....	III-15
Fig. III.12. Interfaz de usuario y sus componentes .....	III-16
Fig. III.13. Trayectoria de los datos en el DSK .....	III-16
Fig. III.14. Esquema de estimación espectral por medio de un detector adaptable .....	III-17
Fig. III.15. Pesos del detector adaptable.....	III-18
Fig. III.16. Densidad espectral de potencia de los pesos del detector.....	III-19
Fig. IV.1. Aumento del coeficiente FB/FA usando diferentes algoritmos .....	IV-5
Fig. IV.2. Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FB en clinostatismo .....	IV-6
Fig. IV.3. Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FA en clinostatismo .....	IV-7
Fig. IV.4. Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FB/FA en clinostatismo .....	IV-7
Fig. IV.5. Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FB en ortostatismo .....	IV-8
Fig. IV.6. Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FA en ortostatismo .....	IV-9
Fig. IV.7. Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FB/FA en ortostatismo.....	IV-9
Fig. A.1.1. Diagrama de comunicación entre el sistema destino y el anfitrión .....	A.1
Fig. A.2.1. Sujeto #1 Clinostatismo .....	A.5
Fig. A.2.2. Sujeto #1 Ortostatismo.....	A.6
Fig. A.2.3. Sujeto #2 Clinostatismo .....	A.6
Fig. A.2.4. Sujeto #2 Ortostatismo.....	A.7

---

Fig. A.2.5. Sujeto #3 Clinostatismo .....	A.7
Fig. A.2.6. Sujeto #3 Ortostatismo .....	A.8
Fig. A.2.7. Sujeto #4 Clinostatismo .....	A.8
Fig. A.2.8. Sujeto #4 Ortostatismo .....	A.9
Fig. A.2.9. Sujeto #5 Clinostatismo .....	A.9
Fig. A.2.10. Sujeto #5 Ortostatismo .....	A.10
Fig. A.2.11. Sujeto #6 Clinostatismo .....	A.10
Fig. A.2.12. Sujeto #6 Ortostatismo .....	A.11
Fig. A.2.13. Sujeto #7 Clinostatismo .....	A.11
Fig. A.2.14. Sujeto #7 Ortostatismo .....	A.12
Fig. A.2.15. Sujeto #8 Clinostatismo .....	A.12
Fig. A.2.16. Sujeto #8 Ortostatismo .....	A.13
Fig. A.2.17. Sujeto #9 Clinostatismo .....	A.13
Fig. A.2.18. Sujeto #9 Ortostatismo .....	A.14
Fig. A.2.19. Sujeto #10 Clinostatismo .....	A.14
Fig. A.2.20. Sujeto #10 Ortostatismo .....	A.15
Fig. A.2.21. Sujeto #11 Clinostatismo .....	A.15
Fig. A.2.22. Sujeto #11 Ortostatismo .....	A.16
Fig. A.2.23. Sujeto #12 Clinostatismo .....	A.16
Fig. A.2.24. Sujeto #12 Ortostatismo .....	A.17
Fig. A.2.25. Sujeto #13 Clinostatismo .....	A.17
Fig. A.2.26. Sujeto #13 Ortostatismo .....	A.18
Fig. A.2.27. Sujeto #14 Clinostatismo .....	A.18
Fig. A.2.28. Sujeto #14 Ortostatismo .....	A.19
Fig. A.2.29. Sujeto #15 Clinostatismo .....	A.19
Fig. A.2.30. Sujeto #15 Ortostatismo .....	A.20

## Lista de Tablas

Tabla. I.1. Diferencias entre autocorrelaciones .....	I-11
Tabla. II.1. Algoritmo de Levinson-Durbin .....	II-9
Tabla. III.1. Descripción de las ondas e intervalos en el ECG .....	III-7
Tabla. III.2. Algunas mediciones de la variabilidad cardiaca en el dominio del tiempo .....	III-11
Tabla. III.3. Indicadores espectrales del sujeto # 1 .....	III-14
Tabla. IV.1. Resultados obtenidos en el dominio del tiempo .....	IV-2
Tabla. IV.2. Resultados en ms <sup>2</sup> .....	IV-3
Tabla. IV.3. Resultados en unidades normalizadas .....	IV-4
Tabla. IV.4. Significancia entre posiciones para cada algoritmo en n.u y ms <sup>2</sup> .....	IV-5
Tabla. IV.5. Valores de significancia de los modelos AR contra FFT .....	IV-10
Tabla. IV.6. Coeficientes resultantes de los modelos AR .....	IV-11

## Lista de símbolos y acrónimos

$\alpha$	Coficiente de convergencia del algoritmo LMS
$\beta_i$	Parámetro usado en la recursión de Levinson-Durbin
$\gamma_x(n)$	Autocorrelación verdadera de una secuencia de datos
$\delta(n)$	Delta de Dirac
$\theta$	Valor real de un proceso aleatorio
$\hat{\theta}$	Valor estimado
$\lambda$	Raíz del denominador de un modelo autorregresivo
$\lambda_i$	Eigen valor de una matriz de autocorrelación
$\mu_x$	Media de un proceso aleatorio

$\hat{\sigma}_{wp}^2$	Varianza del ruido blanco de excitación
$\phi$	Matriz de rango completo
$a_p(k), \bar{a}_i,$	Vector de coeficientes del modelo autorregresivo de orden p
$\mathbf{a}_p$	Vector de coeficientes del modelo de puros polos.
AIC	Criterio de Información de Akaike, criterio para estimar el orden optimo
AR	Autorregresivo
$AR(p)$	Proceso autorregresivo
$a_p(k)$	Vector de coeficientes del modelo autorregresivo de orden p
$A(z)$	Polinomio de la función de transferencia del sistema
ARMA	Autorregresivo promedio móvil
$\mathbf{b}$	Vector resultado del método Yule-Walker
$B$	Valor de la polarización
$b_k$	Coefficientes del modelo promedio móvil
$b(0)$	Factor de atenuación de un modelo Autorregresivo, raíz cuadrada del error de predicción.
$B(z)$	Polinomio del numerador de la función de transferencia del sistema
CAT	Criterio de Transferencia Regresiva, criterio para estimar el orden optimo
DFT	Transformada Discreta de Fourier
$E_i, \varepsilon_i$	Error de predicción residual
ECG	Electrocardiograma

ESA	Estacionario en Sentido Amplio
FA	Coficiente de Frecuencias Altas del espectro de la VFC
FB	Coficiente de Frecuencias Bajas del espectro de la VFC
FB/FA	Coficiente de balance simpático-parasimpático
FMB	Coficiente de Frecuencias Muy Bajas del espectro de la VFC
FPE	Error final de predicción, criterio para estimar el orden ideal
$ H(f) ^2$	Densidad espectral de potencia del modelo estimado
$H(z)$	Función de transferencia del sistema
$k_0$	Periodo de la autocorrelación
LMS	Algoritmo Mínimos Cuadrados Promedio (en ingles Least Mean Square)
MA	Promedio móvil
MDL	Mínimo de la Longitud de Descripción, criterio para estimar el orden optimo
$P()$	Función de densidad de probabilidad
$P_x(w)$	Densidad espectral de potencia por el método indirecto en función de w
$P_T$	Potencia total del espectro
$P_x$	Potencia del buffer de entrada del algoritmo LMS
$r_h(n)$	Autocorrelación de la respuesta al impulso de un sistema
$r_x(k)$	Estimador de la autocorrelación
$\mathbf{R}_x$	Matriz de autocorrelaciones

---

SNA	Sistema Nervioso Autónomo
$T_{xx}(f)$	Densidad espectral de potencia de la salida del sistema
$T_{yy}(f)$	Densidad espectral de potencia de la entrada del sistema
VFC	Variabilidad de la Frecuencia Cardíaca
$w(n)$	Entrada de datos al sistema, secuencia aleatoria de ruido blanco Gaussiano
$\mathbf{x}$	Vector de valores de un proceso aleatorio
$\mathbf{x}^H$	Vector Hermitiano de valores de un proceso aleatorio
$x(n)$	Secuencia de datos observados
$X(f)$	Transformada de Fourier de $x(n)$
$X(n)$	Proceso aleatorio
$\Delta$	Coefficiente de reflexión
$\Lambda$	Vector de coeficientes de reflexión

---

# Introducción

El procesamiento digital de señales es la rama de la ingeniería que está encargada de la manipulación, representación y transformación de señales que se encuentran en el dominio discreto o digital. En el área de la medicina, la medición y monitoreo de signos vitales es de suma importancia ya que permiten establecer las condiciones en que se encuentra un paciente en un momento determinado y de acuerdo a ello, establecer los procedimientos médicos a seguir. Muchas de estas señales ya pueden ser medidas y digitalizadas por equipos que cuentan con su propio acondicionamiento de señal, una interfaz de usuario que despliega valores estadísticos, formas de onda y muchos otros parámetros. En este trabajo se pretende explicar el funcionamiento de una aplicación que detecta la variación de la frecuencia cardiaca o VFC, y analiza dicha variación mediante diferentes algoritmos.

La variabilidad de la frecuencia cardiaca, también conocida por sus siglas en inglés HRV (“Heart Rate Variability”) se refiere a la alteración del ritmo cardiaco. Esta terminología se empezó a usar clínicamente en 1965 cuando los doctores Hon y Lee detectaron que el sufrimiento fetal va de la mano con cambios en la variación del ritmo cardiaco del feto. En 1977 el Dr. Wolf publica en un estudio que a pacientes en los cuales disminuía la VFC después de sufrir un infarto al miocardio tenían alta probabilidad de muerte, por lo anterior la VFC es considerada como un indicador de arritmias ventriculares fatales. En la figura 1 se presentan las muestras obtenidas de la VFC de una señal producida por el generador de electrocardiograma (ECG) estimando en la separación en tiempo entre ondas R sucesivas del ECG, la derivación utilizada para esta estimación es la V4.

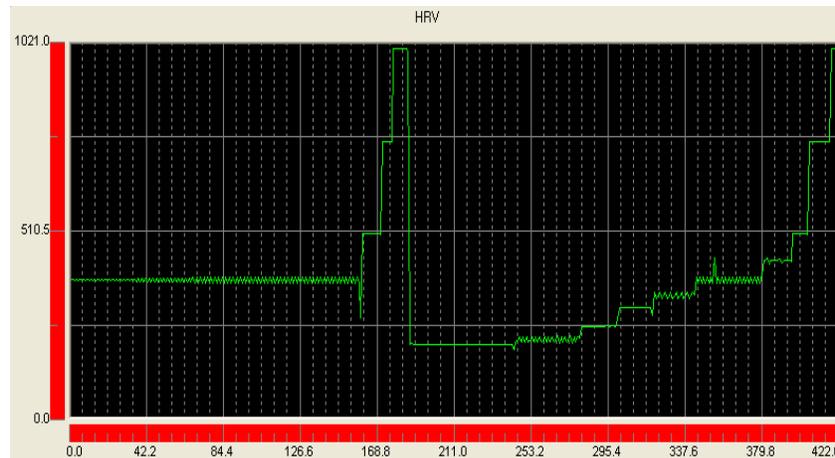


Fig.1- Variabilidad Cardíaca (Eje Y: muestras de separación R-R, Eje X: latido, derivación V4, Generador Cardiax PC)

Antes de la llegada de los microprocesadores, los estándares de medición de la VFC se hacían en el dominio del tiempo, ya que estos son más sencillos de desarrollar. Desde la década de los 60's se ha empezado a utilizar el dominio de la frecuencia para analizar la VFC. En el dominio de la frecuencia se puede observar la distribución de la potencia de la VFC en función de la frecuencia (Densidad Espectral de Potencia).

La densidad espectral de potencia de la VFC se puede estimar por medio de la transformada de Fourier de su autocorrelación (método indirecto), este tipo de aproximaciones no provee un espectro confiable ni de alta resolución ya que la VFC proviene de un proceso aleatorio. Otra alternativa es usar métodos paramétricos para modelar el proceso de la VFC y estimar su densidad espectral de potencia. Esta última alternativa forma parte de los métodos modernos de análisis espectral.

Este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: En el capítulo I, se exponen los diferentes estimadores y sus propiedades, se presentan los modelos estocásticos diferentes que sirven para caracterizar procesos aleatorios y algunos criterios que sirven para estimar el orden óptimo de un modelo.

En el capítulo II se presenta el algoritmo recursivo de Levinson-Durbin, sus propiedades y ventajas en la implementación.

En el capítulo III se presenta la estimación espectral de la VFC, se expone una breve introducción al ECG y el significado de sus ondas, y por último se presenta una aplicación implementada en el procesador digital de señales TMS320C6713, que es capaz

de estimar la densidad espectral de potencia de la VFC usando diferentes tipos de algoritmos.

Finalmente, en el capítulo IV se presentan los resultados y conclusiones de utilizar los métodos clásicos de análisis espectral contra métodos modernos con las muestras obtenidas por el sistema descrito en [9] utilizando la aplicación que se presenta en el capítulo III y por último se exponen los análisis de concordancia entre los resultados obtenidos por los dos métodos en la prueba del reto ortostático realizada a los 15 sujetos en [9].

# RESUMEN

En este trabajo se implementan algoritmos para estimar la densidad espectral de potencia de la variabilidad de la frecuencia cardiaca en un procesador digital de señales. Se emplearon tres algoritmos para estimar la densidad espectral de potencia: (1) *Densidad espectral de potencia de un predictor adaptable*, (2) *Transformada rápida de Fourier de la autocorrelación de la variabilidad de la frecuencia cardiaca* y (3) *Densidad espectral de potencia de un modelo autorregresivo*.

En la sección introductoria se presentan las ventajas y desventajas de usar métodos paramétricos contra métodos no paramétricos en la estimación de la densidad espectral de potencia de procesos aleatorios. Se presentan las propiedades y ventajas del algoritmo recursivo de Levinson-Durbin en la estimación de los pesos de un modelo autorregresivo en base a una secuencia de autocorrelación de entrada. En la aplicación se implementaron dos criterios diferentes para estimar el orden óptimo del modelo autorregresivo: (1) *Criterio de Información de Akaike* y (2) *Mínimo de la Longitud de Descripción*.

Posteriormente se emplean tales algoritmos para analizar la variabilidad de la frecuencia cardiaca de 15 sujetos que fueron sometidos a la prueba del reto ortostático, se estiman valores de concordancia y significancia entre los resultados obtenidos por los algoritmos.

# ABSTRACT

This work implements algorithms to estimate the power spectral density of the heart rate variability in a digital signal processor. Three algorithms were used for the power spectral density estimation: (1) *Power spectral density of the weights of an adaptive predictor*, (2) *Fast Fourier Transform of the heart rate variability autocorrelation sequence* and (3) *Power spectral density of an autoregressive model*.

In the introduction section a discussion of the advantages and disadvantages of using parametric and nonparametric methods for the estimation of the power spectral density of random processes is presented. Properties and advantages of the Levinson-Durbin recursive algorithm when the weights of an autoregressive model are estimated based on the autocorrelation input sequence. Two different criteria were implemented in the application so as to obtain the optimum order of the autoregressive model based on the residual error of the Levinson-Durbin algorithm: (1) *Akaike Informational Criteria* and (2) *Minimum Description Length*.

The three algorithms described were used to analyze the heart rate variability of 15 people during a tilt test. Agreement and significance measurements were estimated using the results of the algorithms.

## CAPITULO

## I

**EL MODELO  
AUTOREGRESIVO****Introducción**

El espectro de señales provenientes de procesos aleatorios puede ser estimado de diferentes maneras, una de ellas es la de utilizar un estimador adecuado para extraer las características del proceso y una vez obtenidas, construir un modelo estadístico. Existen diferentes modelos estadísticos como el modelo autorregresivo promedio móvil (ARMA), promedio móvil (MA) y autorregresivo (AR) que ayudan a modelar los procesos aleatorios. En este capítulo se exponen las características y ventajas del modelo AR contra los métodos clásicos de análisis espectral, sus estimadores y propiedades, el método de Yule-Walker como la solución a la obtención de sus parámetros y algunos criterios para obtener el orden ideal del modelo.

**I.1 Procesos Aleatorios y Estimadores**

Muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza pueden ser caracterizados estadísticamente como procesos aleatorios. Estos fenómenos por ejemplo son las fluctuaciones de temperatura, presión, variabilidad cardíaca entre otros. A diferencia de las señales determinísticas, los procesos aleatorios son un conjunto de señales que solo pueden ser definidas por las propiedades estadísticas que el conjunto posee.

Un proceso aleatorio se dice que es estacionario en sentido amplio (ESA) si se cumplen las siguientes condiciones [1] [5]:

1. La media del proceso es constante, es decir si  $X(n)$  es un proceso aleatorio, entonces será ESA si:

$$E[X(n)] = \sum_{n=1}^N x_n P(x_n) = \mu_x \quad (\text{I.1.1})$$

Donde  $\mu_x$  es constante,  $P(x_n)$  es la función de probabilidad de la variable,  $x_n$  son los posibles valores del proceso aleatorio y  $E[.]$  es el operador estadístico o estimador [5].

2. La autocorrelación solo depende del sesgo, es decir si se define función de autocorrelación como:

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*(n)x(n+m) \quad (\text{I.1.2})$$

El sesgo sería  $n - m$

3. La varianza del proceso es finita.

Existen muchas aplicaciones de procesamiento digital de señales donde se tiene que usar el estimador de la propiedad 1  $E[.]$ . Si existe alguna diferencia entre el valor estimado y el valor real, entonces se dice que el estimador es polarizado.

$$B = \theta - E[\hat{\theta}] \quad (\text{I.1.3})$$

Donde  $B$  es el valor de la polarización,  $\theta$  es el valor real y  $\hat{\theta}$  su estimación. Si  $B = 0$  entonces el valor de la estimación o esperado es igual al real, y se dice que el estimador es no polarizado.

$$\theta = E[\hat{\theta}] \quad (\text{I.1.4})$$

Pero si  $B \neq 0$  y conforme incrementan las observaciones ( $N \rightarrow \infty$ ),  $B$  tiende a cero entonces se tiene:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \theta \quad (\text{I.1.5})$$

Al estimador de la ecuación (I.1.5) se le llama estimador asintóticamente no polarizado. En otras palabras el estimador converge si la varianza de la estimación tiende a cero conforme  $N$  incrementa (I.1.6), a esto también se le llama consistencia del estimador.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{\theta}] = \lim_{N \rightarrow \infty} E[|\hat{\theta} - E[\hat{\theta}]|^2] = 0 \quad (\text{I.1.6})$$

En general es deseable que un estimador sea no polarizado a asintóticamente no polarizado.

Para estimar la autocorrelación de una secuencia de datos se utiliza la ecuación expresada en (I.1.2) para valores de  $m \geq 0$ , tomando el valor esperado en ambos lados de la ecuación (I.1.2) se tiene:

$$E[r_x(m)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} E[x^*(n)x(n+m)] = \frac{N-m}{N} \gamma_x(m) = \left(1 - \frac{m}{N}\right) \gamma_x(m) \quad (\text{I.1.7})$$

Donde  $\gamma_x(n)$  es la verdadera autocorrelación de la secuencia de datos. Obteniendo el valor esperado de la ecuación (I.1.2) podemos observar una polarización de  $m\gamma_x(n)/N$  como lo muestra la ecuación (I.1.7). Obteniendo la varianza del estimador de la autocorrelación representado en la ecuación (I.1.2) se puede verificar su consistencia.

$$\text{var}[r_x(m)] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [|\gamma_x(n)|^2 + \gamma_x^*(n-m)\gamma_x(n+m)] \quad (\text{I.1.8})$$

Jenkins y Watts llegaron al resultado de la ecuación (I.1.8) [2]. El resultado de la ecuación (I.1.8) representa la varianza del estimador de la ecuación (I.1.2). Nótese que la

varianza representada en la ecuación (I.1.8) converge a cero cuando  $N \rightarrow \infty$ , por lo tanto se dice que la ecuación (I.1.2) es un estimador consistente.

## I.2 Matriz de autocorrelaciones

La autocorrelación de un proceso aleatorio es la representación estadística que concierne a la caracterización de la señal aleatoria en el dominio del tiempo, también se dice que mide el grado de parentesco entre dos señales del mismo proceso, en otras literaturas se dice que mide el grado de envejecimiento o deterioro de un proceso [6]. La autocorrelación de un proceso aleatorio ESA tiene las siguientes propiedades [1] [2] [6].

- **Propiedad 1.- Simetría.** Para un proceso real, la secuencia de autocorrelación es simétrica, es decir:

$$r_x(k) = r_x(-k) \quad (\text{I.2.1})$$

Para secuencias complejas sería:

$$r_x(k) = r_x^*(-k) \quad (\text{I.2.2})$$

- **Propiedad 2.- Valor cuadrático medio.** El valor de la secuencia de autocorrelación cuando  $k = 0$ , es igual al valor esperado cuadrático medio, es decir:

$$r_x(0) = E\{|x(n)|^2\} \geq 0 \quad (\text{I.2.3})$$

- **Propiedad 3.- Valor máximo.** El valor de la secuencia de autocorrelación cuando  $k = 0$  será el valor máximo de toda la secuencia, es decir:

$$r_x(0) \geq |r_x(k)| \quad (\text{I.2.4})$$

- **Propiedad 4.- Periodicidad.** Si la secuencia de autocorrelación fue obtenida de  $x(n)$  que tiene periodo  $k_0$ , entonces  $r_x(k)$  tendrá periodo  $k_0$ .

La transformada de Fourier de la autocorrelación provee la transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia dando como resultado la densidad espectral de potencia, como se muestra en la ecuación (I.2.5) [2] [3] [6].

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(m) e^{-j2\pi f m} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f n} \right|^2 = \frac{1}{N} |X(f)|^2 \quad (\text{I.2.5})$$

Donde  $X(f)$  es la transformada de Fourier de la secuencia  $x(n)$ . Este algoritmo de estimación espectral es muy conocido como periodograma, que fue originalmente introducido por Schuster (1898) con el objetivo de medir y detectar periodicidades sumergidas en secuencias numéricas.

La densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio ESA también tiene algunas propiedades que son heredadas por las de la autocorrelación [1] [2] [6].

- **Propiedad 1.- Simetría.** Si  $x(n)$  es real, entonces la densidad espectral de potencia es par, por lo tanto

$$P_x(\omega) = P_x(-\omega) \quad (\text{I.2.6})$$

- **Propiedad 2.- Positivo.** La densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio ESA es siempre positivo, es decir:

$$P_x(\omega) \geq 0 \quad (\text{I.2.7})$$

- **Propiedad 3.- Potencia total.** La potencia total de la densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio ESA de media igual a cero es igual al área bajo la curva del espectro.

$$P_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x(\omega) d\omega \quad (\text{I.2.8})$$

- **Propiedad 4.- Valor extremo del Eigen valor.** Los Eigen valores de una matriz de autocorrelación están acotados por el mínimo y máximo absoluto de la densidad espectral de potencia.

$$\min P_x(\omega) \leq \lambda_i \leq \max P_x(\omega) \quad (\text{I.2.9})$$

La matriz de autocorrelaciones que especifica la propiedad 4 de la densidad espectral de potencia no es más que otra manera de representar la autocorrelación. Supóngase que

se tiene un vector  $\mathbf{x}$  de longitud  $p+1$  compuesto de valores de un proceso aleatorio  $x(n)$ :

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(p)]^T \quad (I.2.10)$$

Si se toma el producto cruz entre  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{x}^H$  se tiene:

$$\mathbf{xx}^H = \begin{bmatrix} x(0)x^*(0) & x(0)x^*(1) & \dots & x(0)x^*(p) \\ x(1)x^*(0) & x(1)x^*(1) & \dots & x(1)x^*(p) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x(p)x^*(0) & x(p)x^*(1) & \dots & x(p)x^*(p) \end{bmatrix}$$

Ahora tomando el valor esperado del resultado del producto cruz:

$$E[\mathbf{xx}^H] = \begin{bmatrix} E[x(0)x^*(0)] & E[x(0)x^*(1)] & \dots & E[x(0)x^*(p)] \\ E[x(1)x^*(0)] & E[x(1)x^*(1)] & \dots & E[x(1)x^*(p)] \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ E[x(p)x^*(0)] & E[x(p)x^*(1)] & \dots & E[x(p)x^*(p)] \end{bmatrix}$$

Sintetizando el resultado del valor esperado del producto cruz se tiene:

$$E[\mathbf{xx}^H] = \mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & r_x^*(2) & \dots & r_x^*(p) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x^*(1) & \dots & r_x^*(p-1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x^*(p-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r_x(p) & r_x(p-1) & r_x(p-2) & \dots & r_x(p) \end{bmatrix} \quad (I.2.11)$$

Como se observa en la ecuación (I.2.11), el resultado del valor esperado del producto cruz resulta en una matriz de autocorrelaciones. Si esta matriz de autocorrelaciones proviene de un proceso aleatorio ESA deberá cumplir con las siguientes propiedades [1]:

- **Propiedad 1.-** Si la matriz contiene valores complejos de autocorrelación entonces sería del tipo Hermitiana-Toeplitz, si la secuencia de autocorrelación solo posee valores reales entonces la matriz será simétrica Toeplitz.
- **Propiedad 2.-** La matriz de autocorrelaciones es no negativa. Todos sus elementos son mayores o igual a cero.
- **Propiedad 3.-** Los eigenvalores  $\lambda_k$  de la matriz de autocorrelaciones son reales y positivos.

Cuando la correlación no varía sensiblemente se dice que los procesos están altamente correlacionados, y es un indicador que en promedio la señal no varía mucho en el dominio del tiempo y viceversa. Esta relación entre la correlación y la frecuencia está dada por el teorema Wiener-Khinchine, este teorema es válido para procesos estacionarios y no estacionarios [6].

### I.3 Estimación espectral usando el modelo AR

Las secuencias de datos finitas son una gran limitación para tener una buena estimación espectral. Uno de los problemas que se encuentran en los algoritmos clásicos de estimación espectral, es la distorsión del espectro que se obtiene de una secuencia de datos finita. Este problema ocurre en ambos casos, tanto cuando se tiene una fuente de datos determinísticas, como una fuente de datos aleatoria [2].

Los métodos que estiman la densidad espectral de potencia tienen una larga historia, pero los métodos basados en modelado o también conocidos como paramétricos se originaron con el trabajo de Yule en 1927, después fueron continuados por Bartlett en 1948, Parzen 1957, Burg 1967 y otros.

Los métodos clásicos de estimación espectral son fáciles de computar, ya que utilizan el algoritmo de la transformada rápida de Fourier. Para poder dar una buena resolución espectral usando estos métodos (depende de la aplicación) se requiere que la secuencia numérica sea lo suficientemente grande. Aun así la estimación sufrirá del efecto de fuga “leakage” debido al ventaneo ya que la secuencia será de duración finita. Estos métodos también asumen que la autocorrelación  $r_{xx}(m)$  es cero para  $|m| \geq N$ . Este criterio y el de asumir periodicidad fuera del intervalo de observación son los que comprometen la resolución y la calidad del espectro resultante. Los métodos paramétricos no necesitan asumir estos criterios, de hecho con estos métodos se pueden extrapolar valores de  $r_{xx}(m)$  para valores  $m \geq N$  si se tiene información a priori de cómo fueron generados los datos. Si se sabe como fueron generados los datos, entonces se puede construir un modelo en base a los datos obtenidos y estimar con ellos los parámetros que construyen dicho modelo. Ya con el modelo adecuado y los parámetros estimados podemos obtener una estimación del espectro del modelo. Estos métodos presentan superioridad a los clásicos en cuestión de resolución ya que no presentan efecto de fuga.

Los métodos paramétricos se basan en el modelado de una secuencia  $x(n)$  como la salida de un sistema lineal caracterizado por la siguiente función racional.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}} \quad (\text{I.3.1})$$

La ecuación en diferencias correspondiente a la ecuación (I.3.1) es:

$$x(n) = -\sum_{k=1}^p a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^q b_k w(n-k) \quad (\text{I.3.2})$$

Donde  $w(n)$  en la ecuación (I.3.2) representa la entrada al sistema. Siendo que nos interesa el espectro de los datos observados  $x(n)$ , por lo anterior su densidad espectral de potencia podría ser expresada de la siguiente manera:

$$T_{xx}(f) = |H(f)|^2 T_{yy}(f) \quad (I.3.3)$$

Donde  $T_{yy}(f)$  en la ecuación (I.3.3) representa la densidad espectral de potencia de la entrada al sistema,  $T_{xx}(f)$  representa la densidad espectral de la salida del sistema. Como ya se mencionó, el interés es estimar  $T_{xx}(f)$ , entonces considérese la entrada  $w(n)$  como una secuencia de ruido blanco con media igual a cero. Por lo anterior la autocorrelación de la entrada sería igual a su varianza  $\sigma^2 = E[w(n)^2]$ . Entonces la ecuación (I.3.3) podría reescribirse de la siguiente manera:

$$T_{xx}(f) = |H(f)|^2 T_{yy}(f) = \sigma^2 |H(f)|^2 = \sigma^2 \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2} \quad (I.3.4)$$

La secuencia de la salida del sistema  $x(n)$  puede ser generada por los siguientes modelos:

- **Modelo autorregresivo promedio móvil (ARMA) de orden  $(q, p)$ .**- Este tipo de modelo tiene polos y ceros, como se muestra en la ecuación (I.3.1).
- **Modelo autorregresivo (AR) de orden  $p$ .**- Si se hace  $q = 0$  en la ecuación (I.3.1), la función resultante de puros polos queda de la siguiente manera:

$$H(z) = \frac{b(z)}{A(z)} = \frac{b(z)}{1 + \sum_{k=1}^p a_p(k)z^{-k}} \quad (I.3.5)$$

- **Modelo promedio móvil (MA) de orden  $q$ .**- Si se hace el polinomio del denominador  $A(z) = 1$  de la ecuación (I.3.1), la función resultante de puros ceros queda de la siguiente manera:

$$H(z) = B(z) = \sum_{k=0}^q b_q(k)z^{-k} \quad (\text{I.3.6})$$

De estos tres tipos de modelos, el AR es el más usado por estas dos razones:

1. Puede representar espectros de señales de banda angosta mejor que los modelos ARMA y MA, ya que MA necesita demasiados coeficientes para poder representar un espectro angosto, y ARMA aunque puede dar una buena estimación espectral, requiere de la solución de ecuaciones no lineales, de los cuales no se garantiza convergencia [1] [2] [4] [6].
2. La estimación de sus parámetros se hace resolviendo un sistema de ecuaciones lineales [1] [2] [4].

Un proceso  $AR(p)$  debe satisfacer las ecuaciones de Yule-Walker representadas por la ecuación (I.3.7):

$$r_x(k) + \sum_{l=1}^p a_p(l)r_x(k-l) = |b(0)|^2 \delta(k) \quad ; \quad k \geq 0 \quad (\text{I.3.7})$$

Si se expande la ecuación (I.3.7) en forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & r_x(-2) & \cdot & \cdot & r_x(-p) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x(-1) & \cdot & \cdot & r_x(-p+1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \cdot & \cdot & r_x(-p+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_x(p) & r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdot & \cdot & r_x(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ a_p(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ a_p(p) \end{pmatrix} = \sigma_{wp}^2 |b(0)|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3.8})$$

Tomando en cuenta la propiedad de la autocorrelación  $r_x(-k) = r_x(k)$ , nótese que las ecuaciones representadas en la ecuación (I.3.8) son lineales y es fácil de encontrar los

coeficientes  $a_p(k)$  una vez que se conoce la secuencia de autocorrelación  $r_x(k)$ . En las ecuaciones de Yule-Walker se aconseja mejor utilizar la versión polarizada de la autocorrelación representada por la ecuación (I.1.2), ya que asegura una matriz de autocorrelaciones positiva. El resultado será un modelo AR estable, que represente mejor los datos.

La ecuación (I.3.8) es exactamente la misma que se utilizaría para un modelo de puros polos de una señal determinística por el algoritmo de Prony, la única diferencia es la estimación de la autocorrelación. En Prony la autocorrelación es determinística, y en Yule-Walker la autocorrelación debe ser estadística [1]. La diferencia en los criterios se puede observar en la siguiente tabla.

Tabla I.1 Diferencias entre autocorrelaciones.

Autocorrelación para Prony	Autocorrelación para Yule-Walker
$r_x(k) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)x^*(n-k)$	$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-k)$

Supóngase que se tiene un vector de autocorrelaciones  $R_{xx} = [r_0, r_1, r_2]$  obtenido de un proceso aleatorio ESA y que  $\sigma_{wp}^2 = 1$ , la matriz de autocorrelaciones para estimar los coeficientes de un modelo AR(2) sería:

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & r_0 & r_1 \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_2(1) \\ a_2(2) \end{pmatrix} = |b(0)|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución para la matriz utilizando algún método algebraico dado sería:

$$a_2(1) = \frac{r_1(r_2 - r_0)}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)}$$

$$a_2(2) = \frac{r_1^2 - r_0 r_2}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)}$$

$$|b(0)|^2 = r_0 + \frac{r_1^2(r_2 - r_0)}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)} + \frac{r_1^2 r_2 - r_0 r_2^2}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)}$$

Una vez obtenidas las estimaciones de los coeficientes  $a_p$ , la función del sistema con respecto a  $z$  quedaría

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + a_2(1)z^{-1} + a_2(2)z^{-2}} = \frac{\sqrt{r_0 + \frac{r_1^2(r_2 - r_0)}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)} + \frac{r_1^2 r_2 - r_0 r_2^2}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)}}}{1 + \frac{r_1(r_2 - r_0)}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)}z^{-1} + \frac{r_1^2 - r_0 r_2}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)}z^{-2}}$$

La densidad espectral de potencia en función de  $w$  para un proceso AR se estima utilizando la ecuación (I.3.8).

$$P_x(w) = \frac{|b(0)|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p(k) e^{-jwk} \right|^2} \quad (\text{I.3.8})$$

Para este caso entonces se tiene:

$$P_x(w) = \frac{r_0 + \frac{r_1^2(r_2 - r_0)}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)} + \frac{r_1^2 r_2 - r_0 r_2^2}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)}}{\left| 1 + \frac{r_1(r_2 - r_0)}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)} e^{-jw} + \frac{r_1^2 - r_0 r_2}{(r_0 + r_1)(r_0 - r_1)} e^{-2jw} \right|^2}$$

Existen ya algoritmos que resuelven las ecuaciones lineales y estiman los coeficientes  $a_p$ , entre los métodos más comunes están eliminación Gaussiana, inversión,

etc. Pero podemos tomar ventaja de la estructura de la matriz y utilizar la recursión de Levinson-Durbin para estimar los coeficientes  $a_p$  que se expone en el capítulo II.

Una vez obtenidos los coeficientes, podemos observar la distribución de la potencia a lo largo del espectro, por ejemplo si se tiene el siguiente proceso AR(1)

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 - a(1)z^{-1}}$$

Utilizando la identidad de Euler y algunas trigonométricas, la densidad espectral de potencia sería:

$$P_x(\omega) = \frac{b(0)^2}{[1 - a(1)e^{-j\omega}][1 - a(1)e^{j\omega}]} = \frac{b(0)^2}{1 - a(1)[e^{-j\omega} + e^{j\omega}] + a(1)^2 e^{-j\omega} e^{j\omega}}$$

$$P_x(\omega) = \frac{b(0)^2}{1 - a(1)[\cos \omega - j \sin \omega + \cos \omega + j \sin \omega] + a(1)^2}$$

$$P_x(\omega) = \frac{b(0)^2}{1 - 2a(1)\cos \omega + a(1)^2} \quad (\text{I.3.9})$$

Dependiendo del valor del coeficiente  $a(1)$  el contenido espectral en las bandas varía, esto se puede observar en las figuras I.1 y I.2.

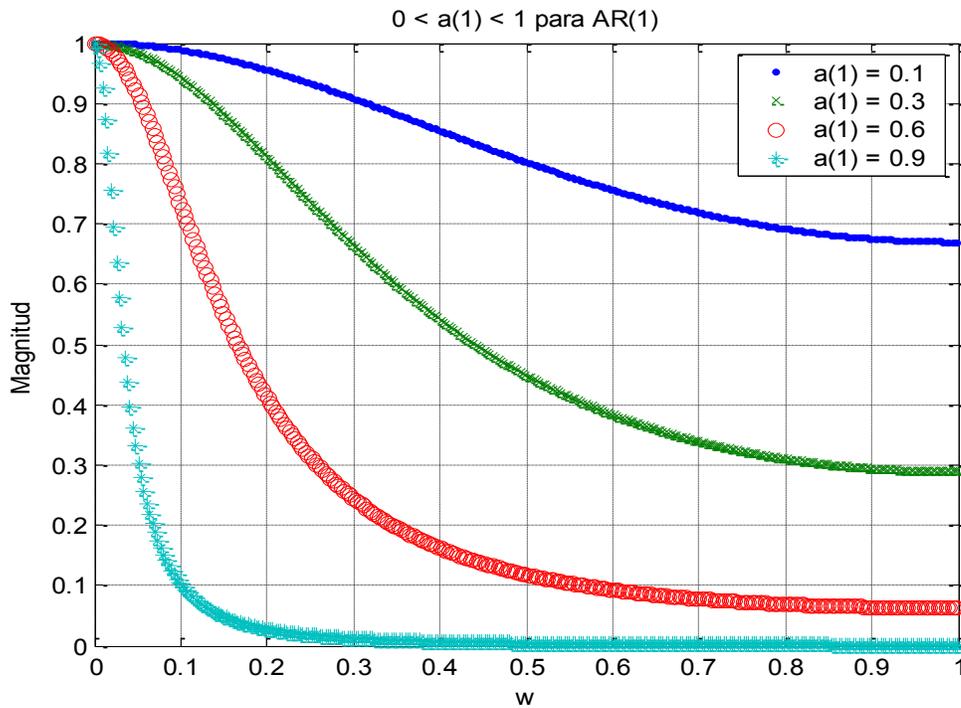


Fig. I.1- Concentración de la potencia en las bajas frecuencias para  $0 < a(1) < 1$

Para  $0 < a(1) < 1$  la concentración de la potencia se da en las frecuencias bajas, como si fuera un filtro IIR pasa bajas (Fig. I.1).

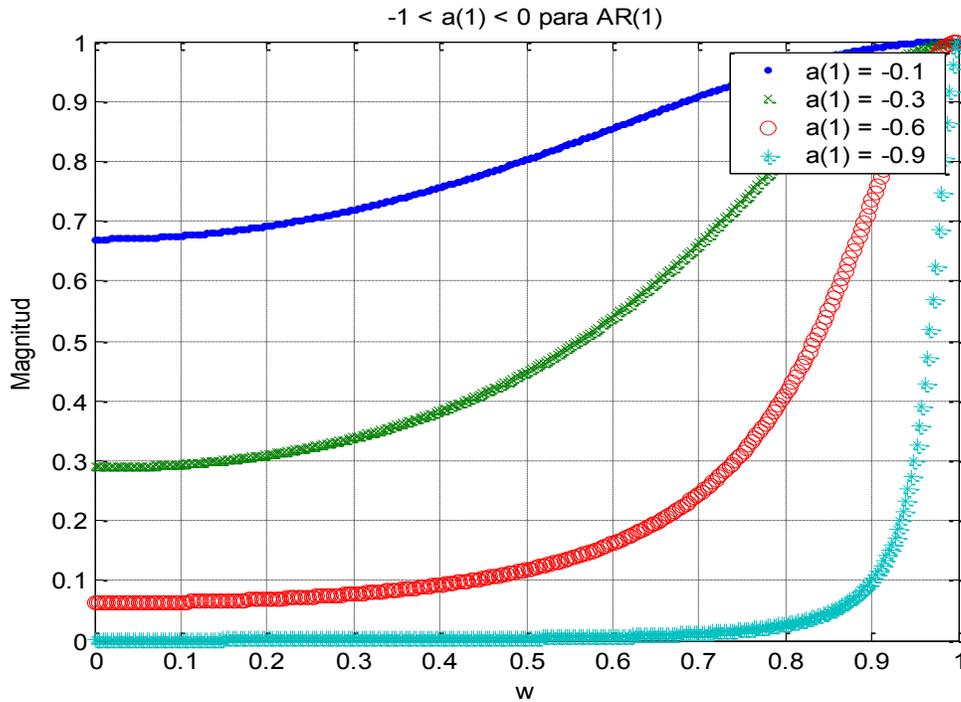


Fig. I.2- Concentración de la potencia en las altas frecuencias para  $-1 < a(1) < 0$

En el caso de  $-1 < a(1) < 0$  la potencia del espectro se concentra en las frecuencias altas como un filtro IIR pasa altas (Fig. I.2).

Ahora supóngase el siguiente modelo AR(2):

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + a_2(1)z^{-1} + a_2(2)z^{-2}} \quad (\text{I.3.10})$$

Factorizando el polinomio  $A(z)$  de la ecuación (I.3.10) queda:

$$H(z) = \frac{b(0)}{[1 - cz^{-1}][1 - c^*z^{-1}]} \quad (\text{I.3.11})$$

Donde  $c = re^{jw_0}$ , la ecuación (I.3.11) se podría expresar en términos de  $w$  como:

$$H(w) = \frac{b(0)}{1 - re^{-jw_0} e^{-jw} - re^{jw_0} e^{-jw} + r^2 e^{-2jw}} = \frac{b(0)}{1 - re^{-j(w_0+w)} - re^{j(w_0-w)} + r^2 e^{-2jw}} \quad (\text{I.3.12})$$

Utilizando la identidad de Euler e identidades trigonométricas la ecuación (I.3.12) se podría expresar como:

$$H(w) = \frac{b(0)}{1 - 2r \cos w_0 \cos w + r^2 \cos 2w + j[2r \cos w_0 \sin w - r^2 \sin 2w]} \quad (\text{I.3.13})$$

Supóngase  $w_0 = \frac{\pi}{2}$ , entonces la ecuación (I.3.13) se simplifica a:

$$H(w) = \frac{b(0)}{1 + r^2 \cos 2w + jr^2 \sin 2w} = \frac{b(0)}{1 + r^2 e^{2jw}} \quad (\text{I.3.14})$$

Haciendo uso de la identidad de los números complejos  $|z|^2 = zz^*$  la densidad espectral de potencia  $|H(w)|^2$  de la ecuación (I.3.14) queda:

$$|H(w)|^2 = \frac{|b(0)|^2}{|1 + r^2 e^{2jw}|^2} = \frac{|b(0)|^2}{1 + 2r^2 \cos 2w + r^4} \quad (\text{I.3.15})$$

La densidad espectral de potencia de la ecuación (I.3.15) se puede observar en la figura I.3.

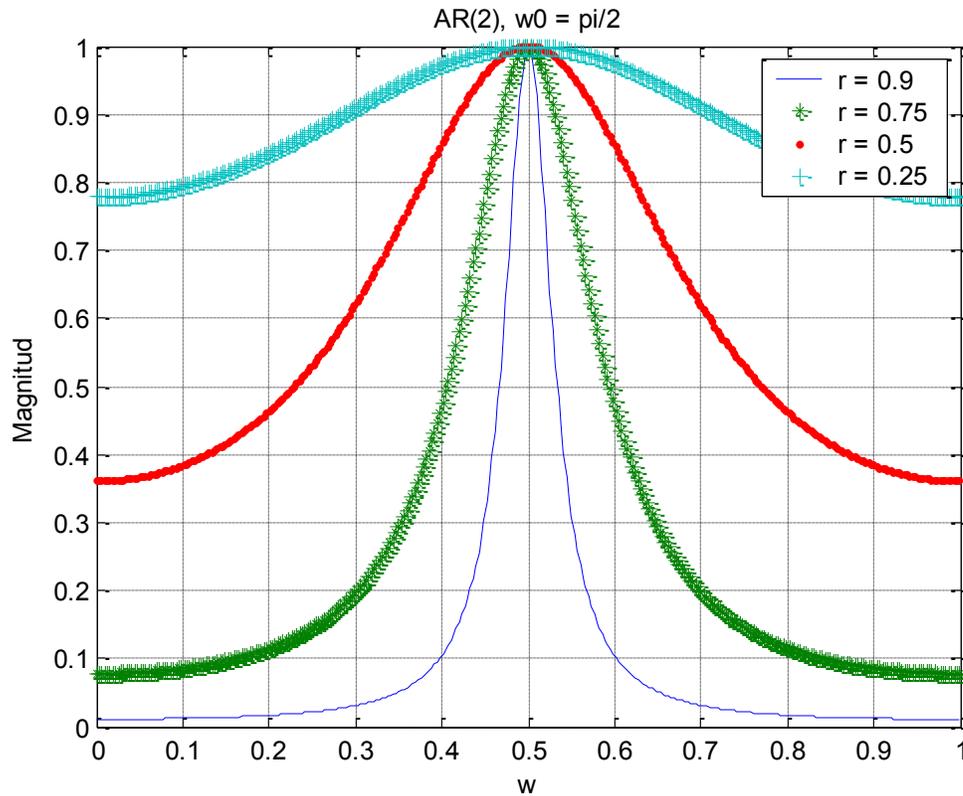


Fig. I.3- Concentración de la potencia en  $w_0$  para  $0 < r < 1$

Nótese como la concentración máxima de potencia se encuentra en  $w_0 = \frac{\pi}{2}$  (Fig. I.3).

#### I.4 Estimación del orden de un modelo AR

Como regla general, si el orden de un modelo AR es muy chico, el espectro estimado tendrá un aspecto suavizado. Si sucede lo contrario, es decir si el orden es muy grande, existe un riesgo de que aparezcan picos esporádicos en la estimación del espectro. Una de las características del error residual de un modelo AR es que decrece monótonicamente conforme el orden del modelo aumenta. Se sabe que se ha llegado al orden óptimo cuando se detecta que la tasa del error residual no disminuye significativamente. Existen ya criterios que ayudan a estimar el orden óptimo del modelo AR en base al comportamiento del error residual, entre ellos están:

- Error Final de Predicción (FPE)

$$FPE(p) = \hat{\sigma}_{wp}^2 \left( \frac{N + p + 1}{N - p - 1} \right) \quad (\text{I.4.1})$$

- Criterio de Información de Akaike (AIC)

$$AIC(p) = N \ln(\hat{\sigma}_{wp}^2) + 2p \quad (\text{I.4.2})$$

FPE y AIC fueron propuestos por Akaike, otra alternativa es el criterio MDL propuesto por Rissanen [1] [2] [5] [6]:

- Mínimo de la Longitud de Descripción (MDL)

$$MDL(p) = N \ln \hat{\sigma}_{wp}^2 + p \ln N \quad (\text{I.4.3})$$

Otro criterio fue propuesto por Parzen:

- Criterio de Transferencia Regresiva (CAT)

$$CAT(p) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\hat{\sigma}_{wp}^2} \right] - \frac{1}{\hat{\sigma}_{wp}^2} \quad (\text{I.4.4})$$

Donde  $\hat{\sigma}_{wp}^2 = \varepsilon_p$ . El orden óptimo se encuentra obteniendo el mínimo absoluto de cualquiera de los criterios que se seleccione para la aplicación. Se ha observado que AIC regresa un orden  $p$  muy pequeño cuando se intenta modelar un proceso que no es autorregresivo, y un orden  $p$  muy grande cuando  $N$  aumenta por lo tanto no es estadísticamente consistente [1]. Por otro lado MDL contiene el término  $p \ln N$  que

incrementa cuando  $p$  y  $N$  incrementan. Se ha encontrado que MDL converge al orden óptimo cuando el número de observaciones  $N$  aumenta [1].

En el siguiente capítulo se explica el algoritmo recursivo de Levinson-Durbin que sirve para obtener los coeficientes de un modelo de polos puros en base a la secuencia de autocorrelación de una señal determinística o de un proceso aleatorio ESA.

# CAPITULO II

## ALGORITMO LEVINSON-DURBIN

### Introducción

En varios algoritmos de modelado de señales, se necesita resolver el sistema lineal de ecuaciones producido por las ecuaciones normales para llegar a la solución del modelo.

$$\mathbf{R}_x \mathbf{a}_p = \mathbf{b} \quad (\text{II.1})$$

Este sistema de ecuaciones como se mencionó el capítulo 1, surge cuando se requiere construir un modelo que contenga únicamente polos, ya sea para señales determinísticas usando el algoritmo de Prony, o para procesos aleatorios ESA (Estacionario en Sentido Amplio) se emplea el método de Yule-Walker, para este último el modelo resultante sería Autorregresivo. En la ecuación (II.1) para cualquiera de los dos casos,  $\mathbf{R}_x$  es una matriz Toeplitz Hermitiana formada por la secuencia de autocorrelaciones ya sea de la señal determinística o del proceso aleatorio ESA,  $\mathbf{a}_p$  es el vector de coeficientes del modelo que contiene únicamente polos o Autorregresivo y  $\mathbf{b}$  es el vector resultado. En 1947 Levinson presentó un algoritmo recursivo que resolvía el sistema de ecuaciones propuesto por la ecuación (II.1), en 1961 Durbin reestructuró el algoritmo de tal manera que  $\mathbf{b}$  fuera un vector unitario.

En este capítulo se discute la recursión del algoritmo de Levinson-Durbin que aprovecha la estructura de la matriz  $\mathbf{R}_x$  para resolver el sistema lineal de ecuaciones en un número reducido de operaciones empezando con un modelo de orden 1. También se

discutirán las propiedades que de alguna manera pasan desapercibidas de este algoritmo, que en la implementación deben tomarse en cuenta.

## II.1 Algoritmo recursivo

Las ecuaciones normales para un modelo de orden  $P$  pueden representarse en forma de predictor hacia adelante:

$$x(k) = \sum_{m=1}^P a_m x(k-m) + \varepsilon(k); \quad k=1,2,\dots,P \quad (\text{II.1.1})$$

O bien en su forma compacta:

$$x(k) + \sum_{m=1}^P a_m x(k-m) = \varepsilon(k); \quad k=1,2,\dots,P \quad (\text{II.1.2})$$

Donde el error de modelado o de predicción hacia adelante está dado por:

$$\varepsilon(k) = x(k) + \sum_{m=1}^P a_m x(k-m) \quad (\text{II.1.3})$$

Combinando las ecuaciones (II.1.2) y (II.1.3) se obtienen las ecuaciones de Yule-Walker.

Si se toma la ecuación (I.3.7) y se hace  $\sigma_{wp}^2 = 1$ ,  $|h(0)|^2 = \varepsilon_p$  en forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix}
 x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_p \\
 x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{p-1} \\
 x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{p-2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 x_{p-1} & x_{p-1} & x_{p-2} & \dots & x_0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 1 \\
 \beta_1 \\
 \beta_2 \\
 \vdots \\
 \beta_p
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \hat{1} \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{pmatrix}
 \tag{II.1.4}$$

Los valores  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  y  $\varepsilon_p$  de la ecuación (II.1.4) son las incógnitas del sistema de ecuaciones. El algoritmo de Levinson Durbin es recursivo en orden, es decir los coeficientes de un orden  $i+1$  quedan en función de los coeficientes del orden anterior  $i$ . Para ilustrar el concepto del algoritmo supóngase que la solución para un orden  $i$  es el vector  $\mathbf{a}_i$ , como lo muestra la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix}
 x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_i \\
 x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{i-1} \\
 x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{i-2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 x_{i-1} & x_{i-1} & x_{i-2} & \dots & x_0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 1 \\
 \beta_1 \\
 \beta_2 \\
 \vdots \\
 \beta_i
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \hat{\varepsilon} \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{pmatrix}
 \tag{II.1.5}$$

Si quisiéramos obtener  $\mathbf{a}_{i+1}$  en función de  $\mathbf{a}_i$ , el procedimiento es:

- Agregar un cero al final del vector  $\mathbf{a}_i$
- Agregar un nuevo término  $\beta_i$  al final del vector unitario donde está el error de predicción.
- Aumentar la matriz en un renglón con el vector de autocorrelaciones  $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_i]$  de la señal determinística o del proceso aleatorio ESA y una columna con  $\mathbf{c}_i^{T*}$ .

La matriz aumentada en un orden quedaría en notación matricial expresada como:

$$\mathbf{R}_{i+1} = \begin{pmatrix} R_i & \xi_i^* \\ \xi_i & r_x \mathbf{O} \end{pmatrix} \tag{II.1.6}$$

Donde  $R_i$  es la matriz del orden previo. Nuestro nuevo sistema de ecuaciones en forma expandida queda:

$$\begin{pmatrix} r_x \mathbf{O} & r_x \mathbf{1} & r_x \mathbf{0} & \dots & r_x^* \mathbf{0} & r_x^* (\xi_i + \mathbf{1}) \\ r_x \mathbf{1} & r_x \mathbf{O} & r_x \mathbf{1} & \dots & r_x^* (\xi_i - \mathbf{1}) & r_x^* \mathbf{0} \\ r_x \mathbf{0} & r_x \mathbf{1} & r_x \mathbf{O} & \dots & r_x^* (\xi_i - \mathbf{2}) & r_x^* (\xi_i - \mathbf{1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_x \mathbf{0} & r_x (\xi_i - \mathbf{1}) & r_x (\xi_i - \mathbf{2}) & \dots & r_x \mathbf{O} & r_x^* \mathbf{1} \\ r_x (\xi_i + \mathbf{1}) & r_x \mathbf{0} & r_x (\xi_i - \mathbf{1}) & \dots & r_x \mathbf{1} & r_x \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \beta_i \end{pmatrix} \tag{II.1.7}$$

Expresado en notación matricial:

$$\mathbf{R}_{i+1} \begin{bmatrix} \bar{a}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{0} \\ \beta_i \end{bmatrix} \tag{II.1.8}$$

Se puede notar que el valor nuevo término  $\beta_i$  introducido se puede determinar por la siguiente ecuación:

$$\beta_i = \bar{E}_i - \bar{a}_i^T \bar{E}_i \tag{II.1.9}$$

Si  $\beta_i = 0$  entonces se dice que  $\bar{a}_i$  sería la solución para el orden  $i + 1$ , de lo contrario si  $\beta_i \neq 0$  se dice que la solución no es  $\bar{a}_i$  [1]. Reescribiendo la ecuación (II.1.7) se tiene

$$\begin{pmatrix}
 r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) & \dots & r_x(i-1) & r_x(i) \\
 r_x(1) & r_x(0) & r_x(1) & \dots & r_x(i-1) & r_x(i) \\
 r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(i-2) & r_x(i-1) \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 r_x(i) & r_x(i-1) & r_x(i-2) & \dots & r_x(0) & r_x(1) \\
 r_x(i+1) & r_x(i) & r_x(i-1) & \dots & r_x(1) & r_x(0)
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 a_1 \\
 \vdots \\
 a_i \\
 1
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \beta \\
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0 \\
 \epsilon
 \end{pmatrix}
 \tag{II.1.10}$$

El vector de coeficientes de un filtro predictor hacia adelante puede ser actualizado para un orden  $i + 1$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{a}_i \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta_{i+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{a}_i^{B*} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_i \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta_{i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ a_1^* \\ \vdots \\ \vdots \\ a_i^* \\ a_{i+1}^* \\ 1 \end{pmatrix}
 \tag{II.1.11}$$

La ecuación (II.1.11) es conocida como ecuación de actualización, ya que el resultado es la actualización del vector de coeficientes del modelo y del orden. En la ecuación (II.1.1) la variable  $\Delta_{i+1}$  es una constante,  $\bar{a}_i$  es el vector de coeficientes del orden previo y  $\mathbf{a}_{i+1}$  es el vector de coeficientes que serán estimados. Para validar que la constante  $\Delta_i$  satisface la condición de actualización, supóngase que el orden actual en el algoritmo es  $i$ . Para hacer la validación, la ecuación (II.1.11) será multiplicada en ambos lados de la igualdad por la matriz  $\mathbf{R}_{i+1}$  de la ecuación (II.1.6), dado lo anterior entonces se tiene:

$$\mathbf{R}_{i+1} \mathbf{a}_i = \mathbf{R}_{i+1} \left( \begin{bmatrix} \bar{a}_i \\ 0 \end{bmatrix} + \Delta_{i+1} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{a}_i^{B*} \end{bmatrix} \right)
 \tag{II.1.12}$$

De antemano el término de la izquierda de la ecuación (II.1.12) es igual a:

$$\mathbf{R}_{i+1} \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.13})$$

Si se desarrolla el primer término del resultado de la ecuación (II.1.12) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} R_i^T & \bar{a}_i \\ \Gamma_i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i^T & \bar{a}_i \\ \Gamma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.14})$$

Del primer elemento del vector resultado de la ecuación (II.1.14) se obtiene:

$$R_i^T \bar{a}_i = \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.15})$$

Del segundo elemento del vector resultado de la ecuación (II.1.14) se puede apreciar que es una constante (II.1.16).

$$\Gamma_i \bar{a}_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i \bar{a}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.16})$$

Por los resultados de las ecuaciones (II.1.15) y (II.1.16) se puede reescribir el resultado de la ecuación (II.1.13) como la ecuación (II.1.17).

$$\mathbf{R}_{i+1} \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{i-1} \\ 0 \\ \Gamma_{i-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.17})$$

Para desarrollar el segundo término del vector resultado de la ecuación (II.1.12), se reescribe la matriz de la ecuación (II.1.6) de la siguiente manera [4]:

$$\mathbf{R}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{c}_i^T \\ \mathbf{c}_i & \mathbf{R}_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.18})$$

Por lo tanto se tiene:

$$\mathbf{R}_{i+1} \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{R}_i \mathbf{c}_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.19})$$

Del primer elemento del vector resultado de la ecuación (II.1.19) se tiene:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad (\text{II.1.20})$$

Al igual que la ecuación (II.1.16), la ecuación (II.1.20) da como resultado una constante.

Del segundo elemento del vector resultado de la ecuación (II.1.19) se tiene:

$$\mathbf{R}_i \mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.21})$$

Ahora sustituyendo los resultados de las ecuaciones (II.1.20) y (II.1.19) en (II.1.19) se tiene:

$$\mathbf{R}_{i+1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.22})$$

Sustituyendo los resultados de las ecuaciones (II.1.17) y (II.1.22) en la ecuación original (II.1.12) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{i-1} \\ \mathbf{0} \\ \Gamma_{i-1} \end{bmatrix} + \Delta \begin{bmatrix} \Gamma_{m+1}^* \\ \mathbf{0} \\ \bar{E}_{i-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1.23})$$

De la ecuación (II.1.23) se puede deducir que el vector del error  $\bar{E}_i$  es igual a

$$\bar{E}_i = \bar{E}_{i-1} + \Delta \Gamma_{i-1}^* \quad (\text{II.1.24})$$

También de la ecuación (II.1.23) se puede deducir que:

$$\mathbf{0} \Gamma_{i-1} + \Delta \Gamma_{i-1}^* = \bar{E}_i \quad (\text{II.1.25})$$

Sustituyendo en la ecuación (II.1.25) en (II.1.24) se tiene

$$\bar{E}_i = \bar{E}_{i-1} (1 + \Delta^2) \quad (\text{II.1.26})$$

De la ecuación (II.1.26) se puede deducir la relación del error de predicción residual del orden  $i$  está en función del error residual del orden  $i-1$ . Conforme el orden incrementa el error de predicción deberá decrementar monótonamente, pero nunca deberá ser negativo, dicho lo anterior entonces se puede expresar en la desigualdad (II.1.27).

$$\mathbf{0} \leq \bar{E}_i \leq \bar{E}_{i-1} \leq \dots \leq \bar{E}_0 \quad (\text{II.1.27})$$

Donde  $\bar{E}_0 = r_x(\mathbf{0})$  se toma como criterio de inicialización del algoritmo. El comportamiento del error residual al tratar de modelar una secuencia de datos con un modelo que contenga únicamente polos expresado por la desigualdad (II.1.27) se puede apreciar en la figura II.1, nótese como decrementa monótonamente.

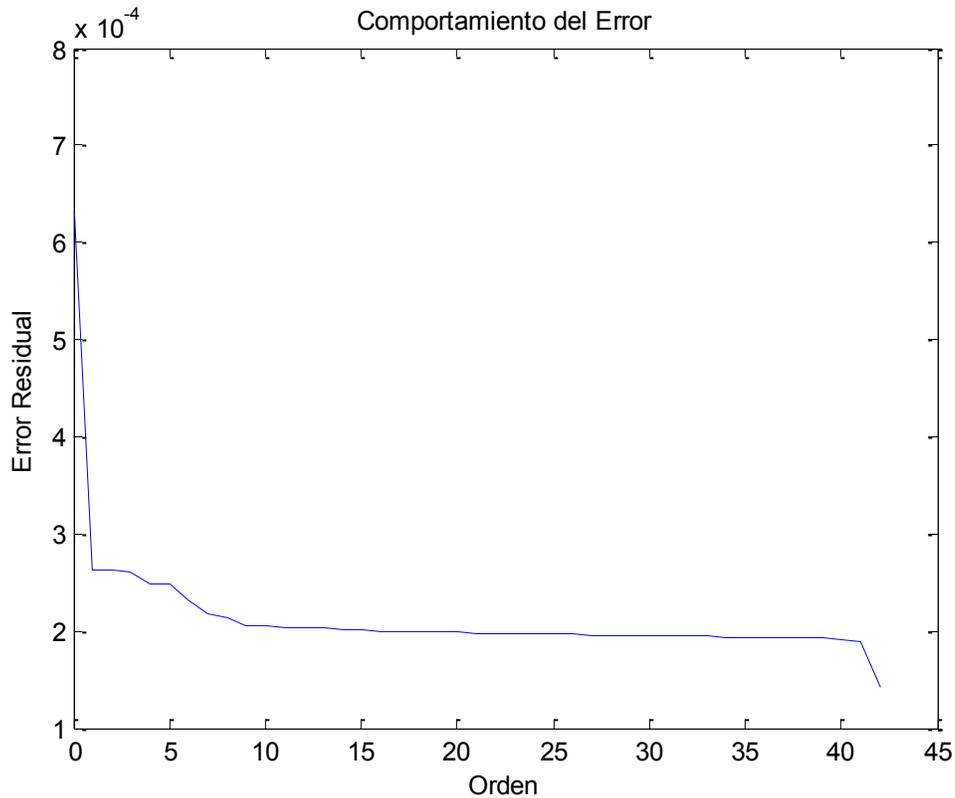


Fig. II.1 Comportamiento del error residual

Se puede deducir que si se utiliza la ecuación (II.1.11) para actualizar el orden y los coeficientes, entonces las ecuaciones (II.1.24) y (II.1.25) se cumplirán. A los valores  $\Delta_i$  de cada iteración se les llama coeficientes de reflexión; el uso de este término viene de la teoría de transmisión de línea, donde  $\Delta_i$  se considera un coeficiente de reflexión en el límite de de dos secciones unidas con diferentes características de impedancia [4].

En la Tabla II.1 se resumen todas las ecuaciones del algoritmo de Levinson Durbin y el orden en que se deben ejecutar para obtener los coeficientes de un modelo que contenga únicamente polos en cada iteración.

**Tabla II.1 Algoritmo de Levinson-Durbin**

<b>1. Inicialización</b>	$a_0(0) = 1$
	$\varepsilon_0 = r_x(0)$

<b>2. Recursión</b>	For $i = 0; i < p; ++i$
<b>2.1 Estimación de <math>\beta_i</math></b>	$B_i = \frac{\sum_{j=0}^i \beta_j \epsilon_{i-j}}{\epsilon_i}$
<b>2.2 Estimación del coeficiente de reflexión</b>	$\Delta_{i+1} = \frac{\beta_i}{\epsilon_i}$
<b>2.3 Actualizar el orden y coeficientes</b>	For $j = 1; j \leq i; ++j$
<b>2.4 Actualizar coeficiente de reflexión</b>	$a_{i+1}(i+1) = \Delta_{i+1}$
<b>2.5 Actualizar error residual</b>	$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i \sqrt{1 -  \Delta_{i+1} ^2}$
<b>3. Estimación de <math>b(0)</math></b>	$b(0) = \sqrt{\epsilon_p}$

Para ilustrar el uso de los pasos expuestos en la Tabla II.1, supóngase la siguiente secuencia de autocorrelación  $r_x = [1, 0.8, 0.65, 0.40]$  para obtener los coeficientes de un modelo AR(3) usando el algoritmo Levinson Durbin. Por medio de las ecuaciones normales (II.1.2) en forma expandida para  $p = 3$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.65 \\ 0.40 \end{bmatrix}$$

Como lo menciona la Tabla II.1, las variables  $a_0(0)$  y  $\epsilon_0$  deben de estar inicializados a los valores especificados en el paso 1 de la tabla. Dicho lo anterior para  $i = 0$  y siguiendo el orden de los pasos en la Tabla II.1 se tiene:

$$B_0 = \frac{\sum_{j=0}^0 \beta_j \epsilon_{0-j}}{\epsilon_0} = \frac{\beta_0 \epsilon_0}{\epsilon_0} = \beta_0$$

$$\Delta_1 = \frac{\beta_0}{\epsilon_0} = \beta_0$$

$$a_1(1) = \Delta_1$$

$$\xi = [1 | \Delta^2 | 0]$$

Como resultado de la primera iteración el vector de coeficientes es  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix}$ , para  $i = 1$  y volviendo a seguir los pasos de la Tabla II.1 se tiene:



$$\Delta_2 = \frac{B}{\xi} = 0.2$$



$$a_2(2) = \Delta_2$$

$$\xi = [1 | \Delta^2 | 0]$$

Los coeficientes que arroja el algoritmo en esta iteración son  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.777 \\ -0.0278 \end{bmatrix}$ , para

finalizar se necesita una iteración más, donde  $i = 2$ , ya que la condición de la recursión es  $i < p$ , por lo tanto se tiene:



$$\Delta_3 = \frac{B}{\xi} = 0.5$$



$$a_3(3) = \Delta_3$$

$$\xi = [1 | \Delta^2 | 0]$$

Los coeficientes de la iteración final para  $p = 3$  son  $A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.7868 \\ -0.3027 \\ 0.3538 \end{bmatrix}$  y

$\sqrt{\sigma^2} = 0.05$ . Sustituyendo el vector  $A_3$  en la ecuación (I.3.5) se tiene:

$$\frac{1}{1 - 0.7868z^{-1} - 0.3027z^{-2} + 0.3538z^{-3}} \quad (\text{II.1.28})$$

La densidad espectral de potencia del modelo AR(3) estimado se puede observar en la figura II.2.

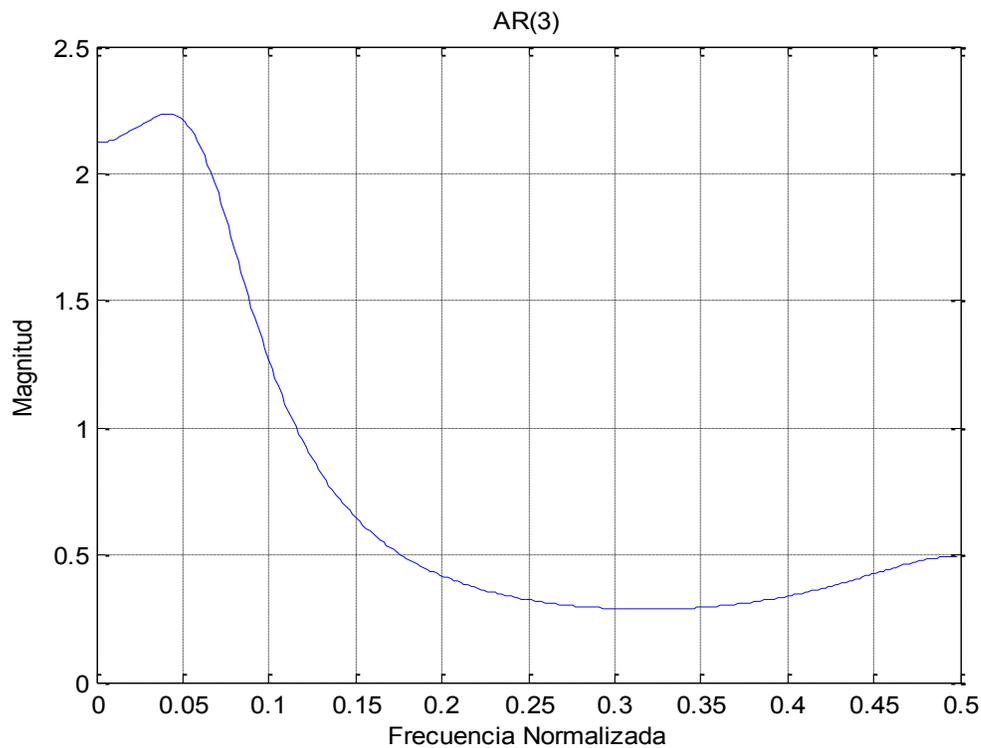


Fig. II.2. Densidad espectral de potencia de la ecuación (II.1.28)

## II.2 Propiedades del algoritmo

Existen varias propiedades que pasan desapercibidas cuando se programa el algoritmo en un procesador digital de señales. Es necesario programar estas condiciones junto con el algoritmo de tal manera que cuando una de estas no se cumpla sea posible poder buscar la consecuencia, de lo contrario los resultados podrían ser erróneos.

- Propiedad 1.- Las magnitudes de los coeficientes de reflexión generados por el algoritmo deben estar acotadas a máximo 1.

$$|\Delta_i| \leq 1 \tag{II.2.1}$$

La propiedad que refleja la ecuación (II.1.27) recae en el hecho de que el error residual es el mínimo del error cuadrático de predicción y nunca será negativo, por lo tanto podemos definir el error residual como

$$e(n) = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} e_k^2} \tag{II.2.2}$$

Donde  $e(n)$  es el error de modelado [1] [2] [4].

- Propiedad 2.- Sea el vector de coeficientes de reflexión  $[\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1}]$  y  $A(z)$  el polinomio generado por el algoritmo de Levinson-Durbin.

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p \Delta_k z^{-k} \tag{II.2.3}$$

Si  $|\Delta[i]| < 1$  para toda  $i$  se dice que los polos de  $A(z)$  están dentro del círculo unitario [1] [2] [4].

- Propiedad 3.- Sea el vector de coeficientes de reflexión  $[\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{p-1}]$  y  $A(z)$  el polinomio generado por el algoritmo de Levinson-Durbin, si  $|\Delta[i]| \leq 1$

para toda  $i$  se dice que las raíces de  $A(z)$  están dentro del círculo unitario o sobre de él. Para demostrar esta propiedad se puede utilizar el principio del argumento, principio de encirculamiento (en las referencias [1] y [4] le llaman “Encirclement Principle”) y el teorema de Rouché de variable compleja. [1] [4].

- Propiedad 4.- Sea  $A_p$  el vector solución a la ecuación (II.1.4) generado por el algoritmo de Levinson-Durbin. El polinomio  $A(z)$  será de mínima fase si la matriz de autocorrelaciones de la ecuación (II.1.4) es positiva. Un modelo AR estable y causal que tiene una función de transferencia racional con todos sus polos dentro del círculo unitario se dice que es un modelo de mínima fase. Para demostrar esta propiedad sea  $A(z)$  el polinomio resultante del algoritmo Levinson-Durbin expresado en la ecuación (II.2.3), factorizando  $A(z)$  se tiene:

~~$$A(z) = \prod_{i=1}^p (1 - \phi_i z^{-1}) \tag{II.2.4}$$~~

En forma matricial sería:

$$\vec{A}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ a_p(2) \\ \vdots \\ a_p(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi_1 & 1 \\ \phi_2 & \phi_1 \\ \phi_3 & \phi_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \phi_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \end{bmatrix} \tag{II.2.5}$$

Dadas las ecuaciones (II.2.4) y (II.2.5) podemos reescribir la ecuación (II.1.4) en notación matricial como:

~~$$B \vec{A}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \end{bmatrix} B_1 \tag{II.2.6}$$~~

Donde  $R_p$  es la matriz de autocorrelaciones,  $\vec{A}_p$  el vector de coeficientes  $a_p$  y  $u_1$  un vector con el primer elemento igual a 1, los demás cero.

Una matriz  $A$  de  $m \times n$  se dice de rango renglón completo si  $rank(A)=m$ . Por otro lado, se dice de rango columna completo si  $rank(A)=n$  [17]. Sea  $A$  una matriz de  $m \times n$  de rango  $r$ . Entonces existen matrices  $B$  de  $m \times r$  y  $C$  de  $r \times n$  tales que  $A=BC$ . Así,  $B$  es de rango columna completo y  $C$  es de rango renglón completo [17]. Dado lo anterior, la matriz  $\phi$  cumple con las características de una matriz de rango completo. Si la matriz  $R_p$  es de  $p \times p$  y positiva, entonces el resultado de  $\phi^H R_p \phi$  también debe ser positivo, es decir:

$$\phi^H R_p \phi > 0 \tag{II.2.8}$$

Si se multiplica la ecuación (II.2.6) por la matriz Hermitiana  $\phi^H$ , entonces se tiene:

$$\phi^H R_p \phi \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{II.2.9}$$

Desarrollando el producto matricial se obtiene:

$$\phi^H R_p \phi \begin{bmatrix} g_0 & g_1 \\ * & g_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{II.2.10}$$

Asumiendo  $|g_0|^2 > |g_1|^2$  y sustituyendo el producto matricial de la ecuación (II.2.10) en la ecuación (II.2.9) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} |g_0|^2 & |g_1|^2 \\ * & |g_0|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{II.2.11}$$

De la ecuación (II.2.11) y del criterio sobre las magnitudes ya definido se puede observar que:

$$\lambda = \frac{g^*}{g}, \quad |\lambda| < 1 \tag{II.2.12}$$

Si se cumple la ecuación (II.2.12) se dice entonces que el polinomio  $A(z)$  es de mínima fase. En caso de no cumplirse la ecuación (II.2.12) entonces se dice que el polinomio no es de fase mínima y la raíz  $\lambda$  estará fuera del círculo unitario [1] [4].

- Propiedad 5.- Si  $b(0) = \sqrt{\varepsilon_p}$ , entonces las secuencias de autocorrelación de la señal que se quiere modelar  $x(n)$  y la respuesta impulso del sistema  $h(n)$  deben ser iguales para  $|i| < p$ . Si obtenemos la ecuación en diferencia de la función de transferencia expresada por la ecuación (I.3.5), se tiene:

$$\sum_{k=0}^p a_k z^{-k} X(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^{-k} H(z) \tag{II.2.13}$$

Si en la ecuación (II.2.13) hacemos  $x(n) = h(n)$ , entonces se obtiene

$$\sum_{k=0}^p a_k z^{-k} X(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^{-k} X(z) \tag{II.2.14}$$

Si la ecuación (II.2.14) se cumple entonces también se cumple

$$\sum_{k=0}^p a_k z^{-k} X(z) = \sum_{k=0}^p a_k z^{-k} X(z) \tag{II.2.15}$$

Donde los valores  $r_h(n)$  son los coeficientes de la autocorrelación de la respuesta impulso del sistema resultante.

En el siguiente capítulo se presenta una breve introducción al electrocardiograma (ECG) y a las formas de onda que lo componen. También se presenta el fenómeno de la variabilidad cardiaca y sus formas de medición, por ultimo se describe una aplicación en un procesador digital de señales que implementa algoritmos clásicos y de análisis espectral moderno para extraer información del fenómeno de la variabilidad cardiaca.

**CAPITULO****III****Introducción****ESTIMACION  
ESPECTRAL DE LA  
VARIABILIDAD  
CARDIACA**

El periodo cardiaco (tiempo entre latidos sucesivos) es un proceso fisiológico que puede variar en respuesta a diversos factores. A ese fenómeno se le llama variabilidad de la frecuencia cardiaca (VFC), y puede medirse a partir de la identificación del tiempo de ocurrencia de cada latido en el electrocardiograma (registro de la actividad eléctrica cardiaca) [13]. Existen varios métodos para analizar la VFC, algunos se aplican en el dominio del tiempo y otros en el dominio de la frecuencia. En el dominio de la frecuencia se pueden analizar diferentes bandas del espectro de potencia para identificar la influencia de algunos factores como la termorregulación y la respiración y la actividad del sistema nervioso autónomo. En este capítulo se presenta una breve introducción al electrocardiograma. Luego se explica el funcionamiento de una aplicación desarrollada en un procesador digital de señales para extraer información estadística de la VFC de un individuo mediante técnicas no invasivas en conjunto con algoritmos de análisis espectral, filtrado adaptable y métodos no paramétricos.

**III.1 Introducción al electrocardiograma**

El corazón es un órgano formado de paredes musculares cuya función principal es la de bombear sangre para que circule por todo el cuerpo a través de los vasos sanguíneos. Anatómicamente el corazón está dividido en lado izquierdo y derecho, la separación entre los dos lados es una pared muscular llamada septum. Ambos lados bombean la sangre en una forma sincronizada y rítmica, y contienen dos cámaras, la

ventricular y la auricular. El flujo sanguíneo está controlado por cuatro diferentes válvulas (Fig. III.1), dos localizadas entre aurículas y ventrículos (válvula mitral y válvula tricúspide) y otras dos entre ventrículos y arterias (válvula pulmonar y válvula aórtica).

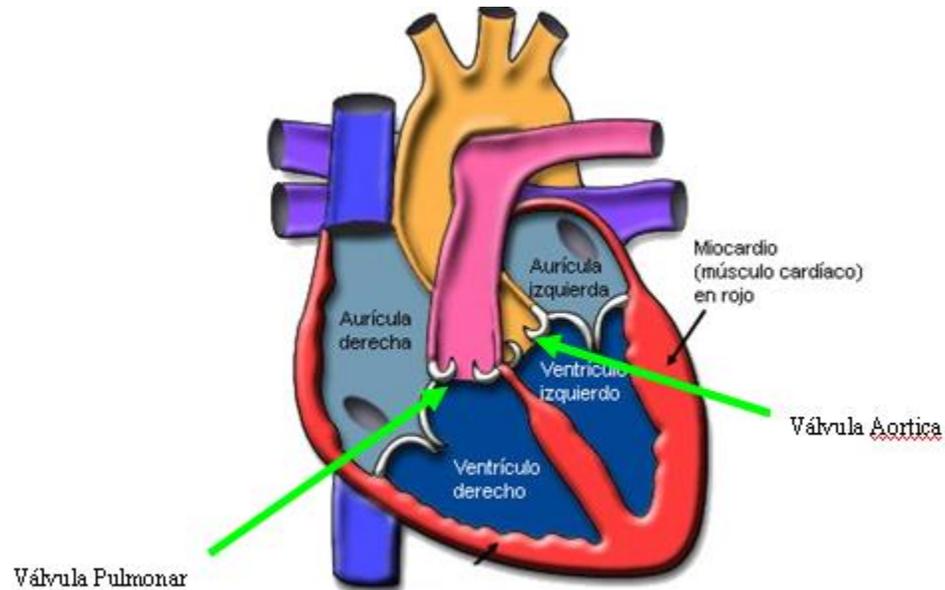


Fig. III.1. Cavidades y válvulas cardíacas [20]

El principal tipo de tejido muscular del corazón se llama miocardio (Fig. III.1), que está constituido principalmente por fibras musculares cardíacas que a su vez están compuestas por muchas células individuales conectadas en serie y separadas por discos intercalares. A través de los discos viajan los potenciales de acción o impulso eléctrico de cada célula que en conjunto producen la contracción del corazón. Un potencial de acción es el mecanismo por el que se logra la transmisión de información entre un sistema nervioso y un músculo, en este caso la activación eléctrica cardíaca se realiza mediante el potencial de acción cardíaco (Fig. III.2).

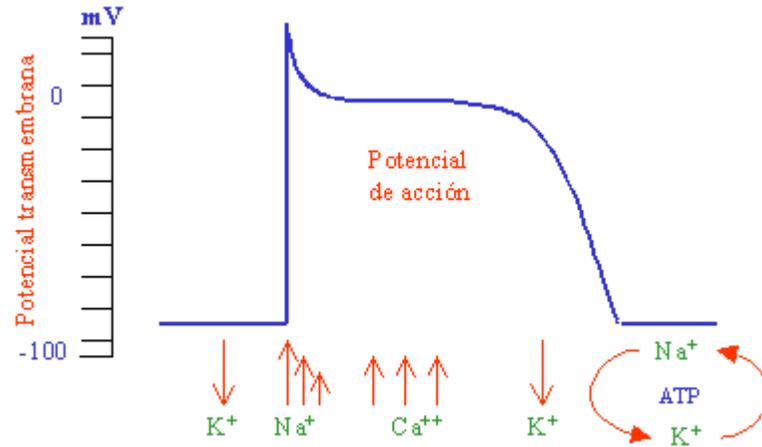


Fig. III.2. Potencial de acción en la célula cardíaca [18].

Para la generación de este potencial de acción son necesarios varios tipos de canales que permiten el paso de iones a través de la membrana celular (canales iónicos). El potencial de acción se inicia cuando se activan los canales de sodio, que permiten la entrada masiva de iones de sodio y con ello la polaridad de la membrana cambia rápidamente de negativa (-90 mV) a positiva (20 mV). A este cambio se le llama *despolarización*. El cierre en los canales de sodio y la activación de algunos canales que sacan potasio hacen que la polaridad empiece a regresar a el estado de reposo, pero la apertura de canales de calcio que introducen calcio a la célula mantiene un periodo de despolarización prolongado y produce la meseta del potencial de acción (Fig. III.2). La apertura de más canales de corrientes salientes de potasio hace que finalmente el voltaje regrese al potencial de reposo. Todo el proceso para regresar al potencial de reposo se llama *repolarización*. Ya durante la fase de reposo se activan otros canales que restablecen el equilibrio de potasio y sodio de la célula mediante moléculas que actúan como bombas intercambiadoras de potasio y sodio y que requieren el gasto de energía en forma de adenin-trifosfato (ATP).

La actividad mecánica de cada ciclo cardíaco requiere de la generación de un impulso eléctrico que se propaga a través del sistema de conducción especializado y al resto de las células, que están interconectadas entre sí, hasta alcanzar todo el miocardio (Fig. III.3). [7]

Mediante esta activación eléctrica secuencial que se origina en el nodo sinusal o sinoauricular (también denominado como el marcapaso natural del corazón), todas las otras células siguen su sincronía. El ritmo del nodo sinusal no es solo determinado por su propia descarga sino también por el sistema nervioso autónomo (en sus ramas simpático y parasimpático). El impulso que nace en el nodo sinoauricular se propaga a las aurículas con lo que induce la contracción auricular. Después la señal pasa por el nódulo auriculoventricular, que es el único paso del estímulo eléctrico hacia los ventrículos. En esta parte el impulso es retrasado para permitir la contracción auricular y aumentar el volumen de sangre en los ventrículos. Después el impulso se dirige hacia la rama fascicular derecha y la rama fascicular izquierda para llegar finalmente a las fibras de Purkinje de cada ventrículo del corazón con la finalidad de producir su contracción y así expulsar la sangre al resto del cuerpo. La velocidad de conducción en el corazón varía desde 0.05 m/s en el nodo auriculoventricular hasta 4m/s en las fibras de Purkinje. [7]

Las células tipo marcapaso (como el nodo sinusal y el nodo auriculoventricular) tienen un potencial de acción diferente (Fig. III.3), en estas no existen canales rápidos de sodio. El cambio en el potencial de membrana está en combinación de flujos menores de salida de potasio y de ingreso de sodio y calcio por medio de canales especializados. Esto les confiere la propiedad de auto-despolarizarse lentamente y con ello la generación automática y periódica de impulsos. El ritmo cardiaco normal lo dirige el nodo sinusal por tener una frecuencia de disparo mayor.

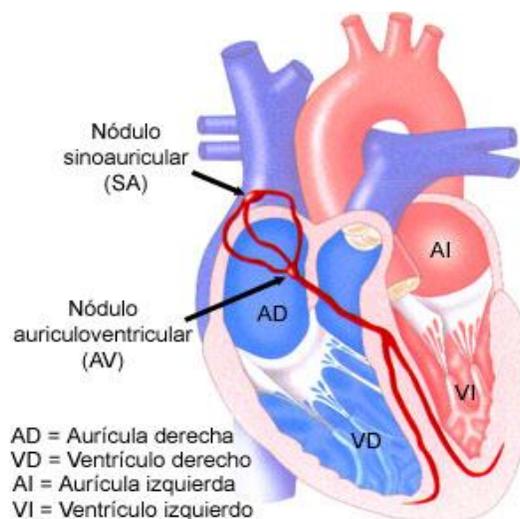


Fig. III.3. Sistema de Conducción de la actividad eléctrica [24].

El ciclo cardiaco se define como los hechos que ocurren desde el comienzo de un latido hasta el comienzo del siguiente. Consta de un periodo de relajación denominado diástole, cuya finalidad es que el corazón se llene de sangre, y otro periodo de contracción denominado sístole, cuya finalidad es expulsar la sangre del corazón a todo el cuerpo [19].

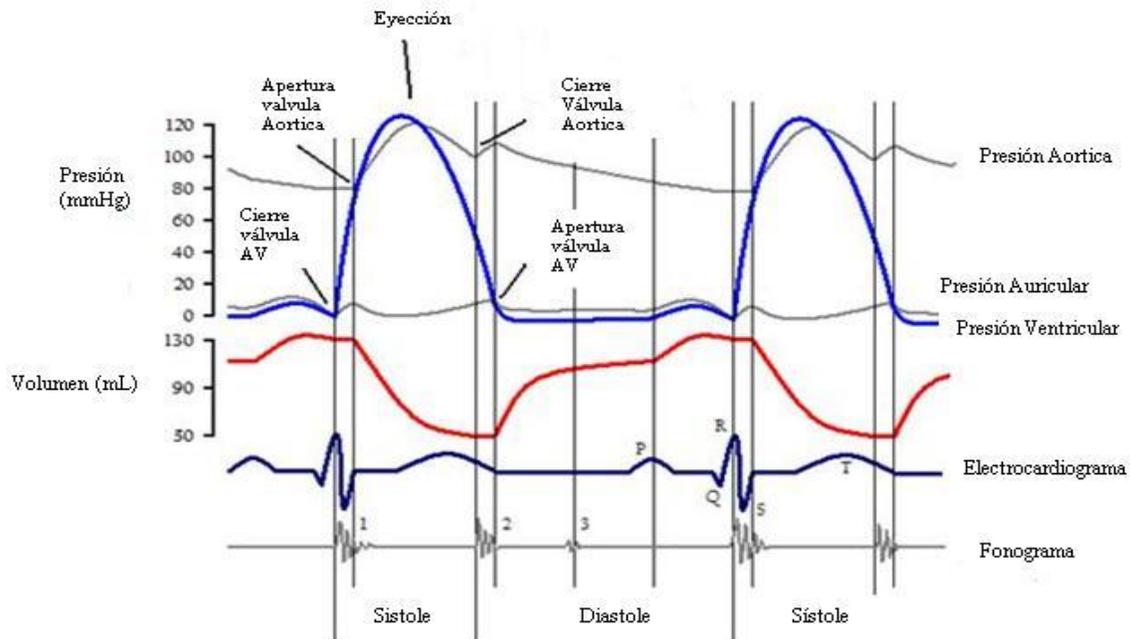


Fig. III.4. Ciclo Cardíaco [21]

Los hechos que ocurren hemodinámicamente en aproximadamente 0.8 segundos y constan de las siguientes fases:

**Fase de llenado:** Las válvulas aórtica y pulmonar se encuentran cerradas, y las válvulas auriculoventriculares abiertas. En esta fase la sangre pasa de la aurícula al ventrículo, es el principio de la diástole donde los ventrículos se encuentran en estado de relajación.

**Fase de contracción isométrica ventricular:** Comienza la contracción ventricular y se cierran las válvulas auriculoventriculares. Esta fase también es conocida como el inicio de la sístole.

**Fase de expulsión:** Hay una contracción ventricular provocando la apertura de las válvulas aórtica y pulmonar.

**Fase de relajación ventricular:** Las válvulas pulmonar y aórtica se cierran, las válvulas auriculoventriculares se abren y los ventrículos entran en estado de relajación.

Como se mencionó antes, la actividad mecánica del corazón requiere de la actividad eléctrica. El electrocardiograma (ECG) describe la actividad eléctrica del corazón mediante electrodos localizados en la superficie del cuerpo registrando los potenciales eléctricos generados por una corriente eléctrica que representan proyecciones frontales y horizontales del músculo cardiaco. Dependiendo del tipo de información requerida el número de electrodos difiere, pero en la clínica tradicionalmente se utilizan 10 electrodos, con los que se obtienen 12 proyecciones distintas (derivaciones). El resultado de cada derivación queda plasmado en una serie de ondas cuya morfología y duración contiene información que es usada para el diagnóstico de enfermedades.

El ECG estándar se registra durante sólo unos segundos, pero actualmente ya hay tecnología que permite registrar durante periodos mas largos (por ejemplo 24 horas) y en forma ambulatoria. A estos sistemas se les llama Holter. Para analizar el ECG de larga duración se requiere de algoritmos de procesamiento automático que permitan la extracción de información confiable.

El papel del ECG es describir las diferentes fases eléctricas del ciclo cardiaco y representa la sumatoria en tiempo y espacio de los potenciales de acción generados por las millones de células cardiacas. El ECG no refleja directamente los cambios en el potencial de acción de cada membrana celular, sino una medida de las corrientes eléctricas generadas en los fluidos extracelulares por los cambios de potencial [19].

### **III.2 Ondas e Intervalos del electrocardiograma**

La descripción de las ondas e intervalos de tiempo obtenidos en un ECG se describen en la Tabla III.1.

Tabla III.1. Descripción de las ondas e intervalos en el ECG

Onda	Características
<b>Onda P</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa la despolarización de las aurículas, tanto izquierda como derecha [19].</li> <li>• Amplitud: Su detección es difícil debido a la suavidad de su forma de onda y su baja amplitud que aproximadamente es menor a los 300 <math>\mu\text{V}</math> [7].</li> <li>• Frecuencia: aproximadamente 10-50Hz [7].</li> </ul>
<b>Complejo QRS</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa la despolarización de los ventrículos.</li> <li>• Duración: 70-110 ms (en un corazón normal).</li> <li>• Amplitud: La mayor de toda la señal algunas veces puede llegar hasta 3mV.</li> <li>• Frecuencia: aproximadamente 10-50Hz [7] [19].</li> </ul>
<b>Onda T</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se genera cuando los ventrículos se recuperan de la despolarización, es aproximadamente 0.25 s después de la despolarización (onda de repolarización) [7].</li> <li>• La cercanía de la onda T al QRS depende de los latidos por minuto, entre más rápidos sean más cercana y angosta es la onda [7].</li> <li>• En latidos rápidos la onda P se fusiona con la onda T, por lo que se vuelve extremadamente difícil determinar el punto final de la onda [7] [19].</li> </ul>
<b>Segmento ST</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Segmento que representa el intervalo donde los ventrículos están en estado de despolarización.</li> <li>• Los cambios en el segmento ST indican diferentes condiciones cardiacas [7] [19].</li> </ul>
<b>Intervalo RR</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa la longitud del ciclo ventricular cardiaco, es medido entre R y R sucesivas, es la representación del ritmo ventricular.</li> <li>• Es usado para identificar diferentes arritmias y el estudio de la variabilidad de la frecuencia cardiaca [7].</li> </ul>
<b>Intervalo PQ</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es el tiempo entre la despolarización auricular y la despolarización ventricular.</li> <li>• Representa el tiempo requerido para que se propague del nodo sinusal a los ventrículos, aproximadamente 0.16 s.</li> </ul>
<b>Intervalo QT</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Representa el tiempo desde la despolarización ventricular hasta que se completa su repolarización.</li> <li>• Prolongación en el intervalo QT está asociada con un aumento en el riesgo de muerte súbita.</li> <li>• La duración es de aproximadamente 0.35s.</li> </ul>

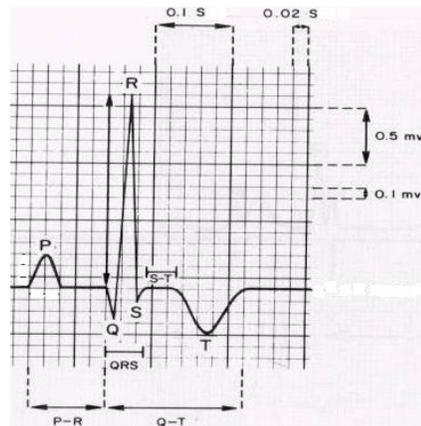


Fig. III.5. Trazo Electrocardiográfico [22]

Tradicionalmente, los trazos del ECG (Fig. III.5) se obtienen sobre papel de registro calibrado. Las líneas horizontales están dispuestas de tal modo que cada 5 divisiones corresponden a 0.5 milivoltios. Las líneas verticales son calibración del tiempo, cada 5 divisiones corresponde a 1 segundo. En los electrocardiógrafos clínicos más modernos, se utiliza una pluma inscriptora que traza directamente sobre una tira de papel móvil. A medida que avanza el papel, se registra el electrocardiograma. El desplazamiento de la pluma, a su vez, es controlado por amplificadores electrónicos adecuados que están conectados a los electrodos del electrocardiógrafo que se aplican al paciente [19]. De hecho en la actualidad existen ya algunos dispositivos que cuentan con interfaz para computadora y algoritmos de diagnósticos automatizados como es el caso del Cardiax PC-ECG [23].

### III.3 Variabilidad Cardíaca

Variabilidad de la frecuencia cardíaca (VFC) es la variación del tiempo entre los intervalos RR en el ECG, y depende de fluctuaciones en la estimulación del sistema nervioso autónomo (SNA) sobre el corazón [15], que inducen a su vez cambios en la frecuencia cardíaca. Este mecanismo de regulación de la frecuencia cardíaca funciona como un circuito de control retroalimentado [10]. El sistema nervioso central recibe

diversos estímulos y utiliza al sistema nervioso autónomo para dar una respuesta. Esta respuesta altera la frecuencia cardiaca y otros parámetros cardiovasculares. Los receptores de presión o barorreceptores retroalimentan al sistema nervioso central sobre el efecto en la presión arterial y con ello se inicia una nueva respuesta (Fig. III.6) [10].

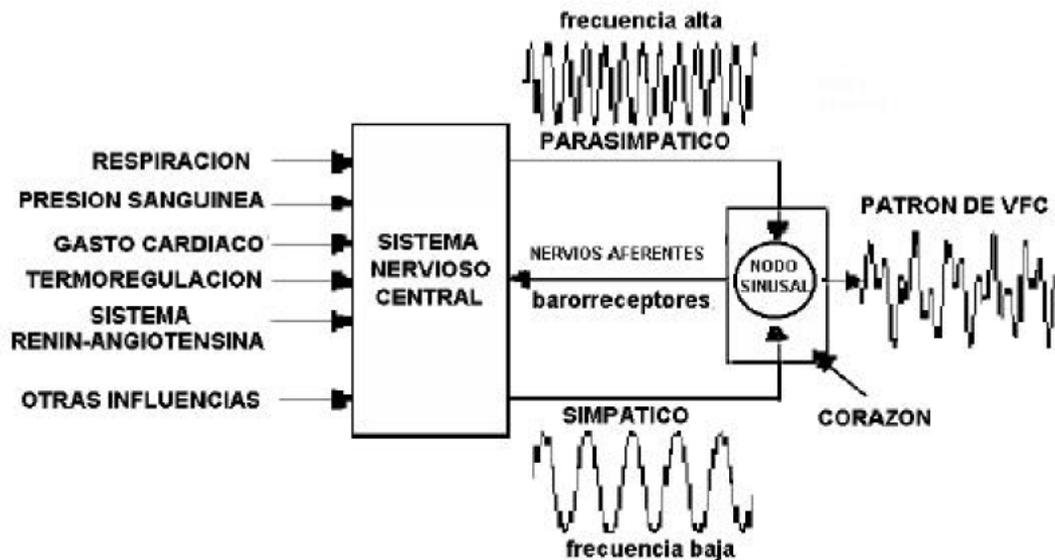


Fig. III.6.- La variabilidad cardiaca en función del sistema nervioso expresado como respuesta de un sistema de control [10]

El patrón de la VFC de la figura III.6 es de carácter irregular, se dice que refleja el equilibrio dinámico entre una tendencia aceleradora (inducida por el sistema nervioso simpático) y una tendencia desaceleradora (inducida por el sistema nervioso parasimpático) [19]. La diferencia de tiempo entre ondas sucesivas R, también conocido como intervalo RR representa la longitud de un ciclo ventricular cardiaco en segundos. El intervalo RR es usado como tasa ventricular, permite detectar anomalías en el ritmo (arritmias) se usa también para el análisis de la VFC. [7]. El análisis de la VFC está basado en las series de tiempo  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_N$ , producidas por un detector del complejo QRS, donde  $\tau_n$  representa la diferencia de tiempo entre la onda R pasada y la presente. Por lo descrito anteriormente, se puede resumir que la medición de la VFC depende de la detección de la onda R de cada latido, a partir de un ECG usando electrodos superficiales, y por lo tanto la VFC se puede estudiar de una manera no invasiva.

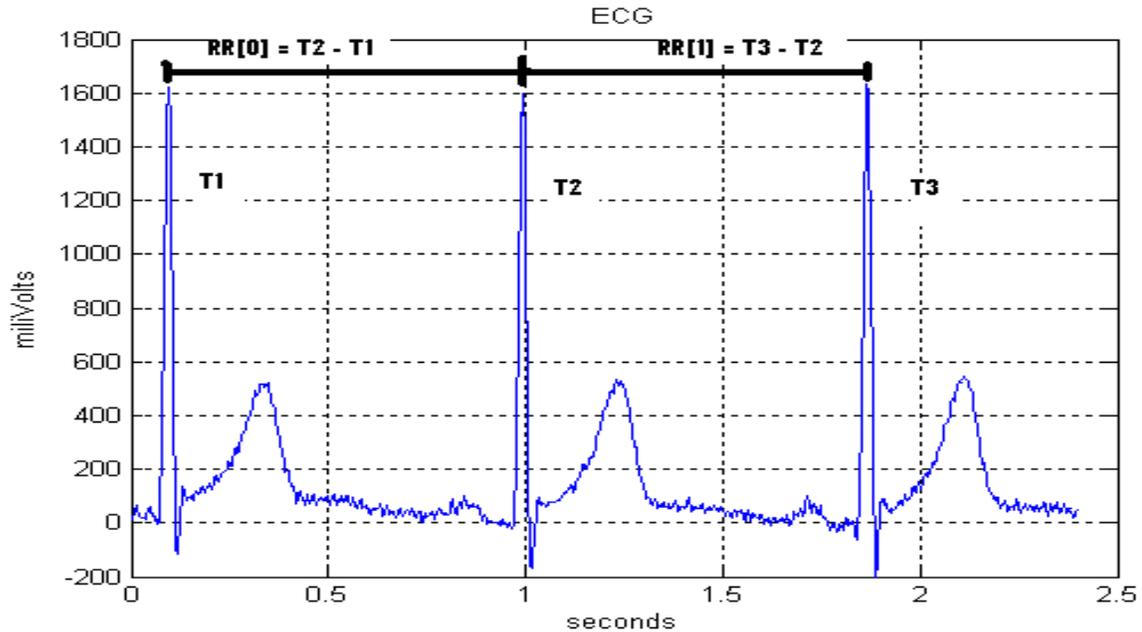


Fig. III.7.- Estimación del intervalo RR

Los valores  $\tau_n$  se guardan en un arreglo  $RR[]$ , para después utilizar métodos estadísticos o análisis espectral sobre el arreglo sobre la secuencia numérica. La estimación de cada elemento del arreglo  $RR[]$  a partir de un electrocardiograma se puede observar en la figura III.7.

El análisis de la señal RR debe ser robusta a la presencia de artefactos (detección defectuosa de complejos QRS) y debe averiguar si hay algún sistema que tenga mal funcionamiento [14]. En presencia de ruido es muy probable que el detector de complejos QRS pueda arrojar una estimación errónea, por lo que se recomienda que se apliquen técnicas de acondicionamiento y filtrado antes de detectar las ondas R. Si aún así hay errores en la detección por la ocurrencia de ruido o la presencia de arritmias aisladas (condiciones que no se puedan controlar en la medición), se recomienda que se acondicionen los valores del arreglo  $RR[]$ . Una manera simple de editar el arreglo es el de desechar los valores que se desvíen más del 20% de la media de los valores anteriores [7]. A los valores del arreglo editado se les llama intervalo normal-normal (NN). Los análisis de VFC se realizan sobre los intervalos NN.

La tabla III.2 muestra algunas de las mediciones que se aplican a la variabilidad cardiaca en el dominio del tiempo, donde  $r_k$  representa el k-esimo intervalo NN,  $r_i$  representa el intervalo previo a  $r_k$ ,  $y_k$  representa el k-esimo promedio de intervalos NN en 5 minutos,  $\bar{y}$  es la media de los promedios de los intervalos de 5 minutos en un ECG,  $D(t)$  es la función de densidad de la distribución de los intervalos NN y  $q(t)$  es una función que sobre un intervalo de tiempo definido  $[a, b]$  ( $b > a$ ) se aproxima a  $D(t)$  en el mismo intervalo.

Tabla III.2 Algunas mediciones de la variabilidad cardiaca en el dominio del tiempo [7].

Medición	Ecuación	Definición
SDNN	$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (r_k - \bar{r})^2}$	Desviación estándar de todos los intervalos NN (ms).
SDANN	$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2}$	Desviación estándar de los promedios de los intervalos NN en segmentos de 5 minutos de una lectura de ECG (ms).
rMSSD	$\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=2}^M (r_k - r_{i-1})^2}; i = k - 1$	Raíz cuadrática media de las diferencias sucesivas de intervalos NN adyacentes (%).
pNN50	$\frac{1}{M} \sum_{k=2}^M i = i + 1 \leftrightarrow  r_k - r_{i-1}  > 50ms; i = k - 1$	Porcentaje de pares de intervalos NN adyacentes que difieran por más de 50ms (ms).
TINN	$TINN = b - a \leftrightarrow \int_0^{\infty} (D(t) - q(t))^2 dt$ min	Interpolación triangular de índices (ms).

Una buena razón para analizar la variabilidad cardiaca es que permite estimar la probabilidad de que una persona podrá sobrevivir después de cierto tiempo de haber tenido un infarto [13]. La VFC también se puede usar para estimar el riesgo a padecer arritmias ventriculares fatales [16].

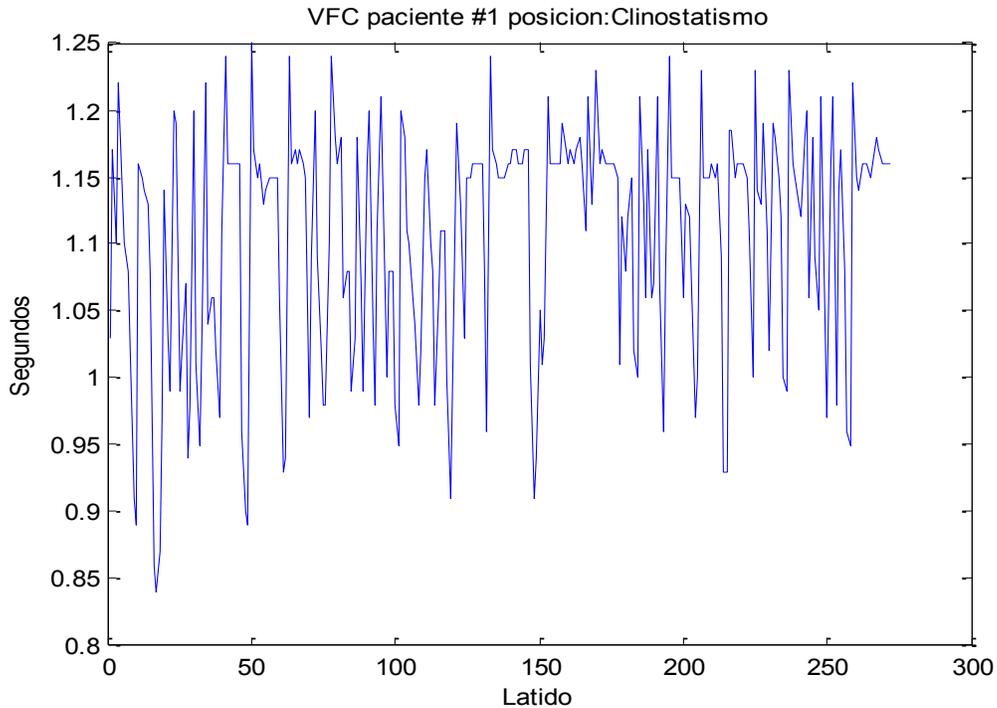


Fig. III.8. Muestras obtenidas de un voluntario sano por 5 minutos en posición de clinostatismo [9].

La figura III.8 muestra la variabilidad cardíaca medida por un periodo de 5 minutos en un sujeto sano en posición de clinostatismo (acostado) [9]. Se puede observar que la secuencia numérica graficada en la figura III.8 es aleatoria con media diferente de cero, una vez sustrayendo la media se pueden usar métodos de análisis espectral para cuantificar su espectro de potencia. El análisis espectral de la variabilidad cardíaca es de suma importancia, ya que puede mostrar oscilaciones embebidas en el ritmo cardíaco, inducidas por ejemplo por la respiración o por cambios en la presión sanguínea que pueden ser cuantificadas con la magnitud de sus bandas de frecuencias correspondientes en el espectro estimado [7].

Los rangos de frecuencia de interés son: potencia total (PT, de 0.003 a 0.4 Hertz), potencia de frecuencias muy bajas (FMB, de 0.003 a 0.05 Hertz), potencia de frecuencias bajas (FB, de 0.05 a 0.15 Hertz), potencia de frecuencias altas (FA, de 0.15 a 0.4 Hertz) y la relación FB entre FA (FB/FA) [9].

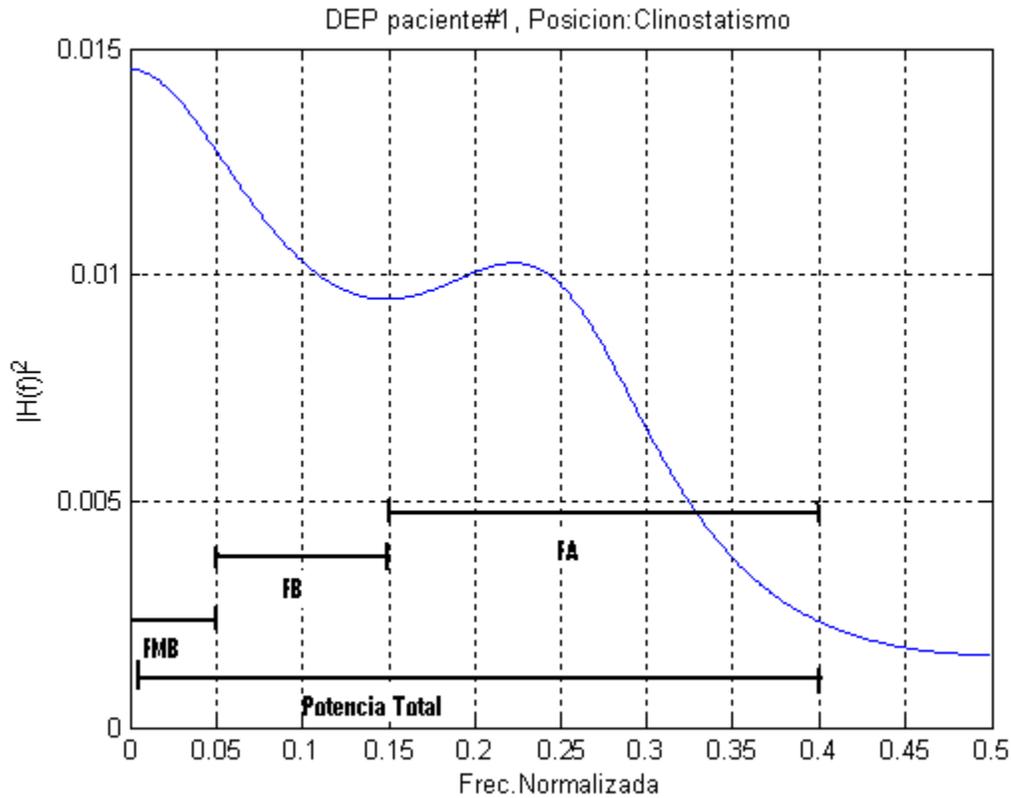


Fig. III.9. Estimación espectral del sujeto #1 utilizando un modelo AR(3) y sus bandas de interés.

El indicador de FB corresponde a actividad del sistema nervioso simpático con modulación del sistema nervioso parasimpático, el indicador de FA corresponde a actividad del sistema nervioso parasimpático y el indicador FB/FA corresponde al balance simpático-parasimpático [9]. El espectro de la figura III.9 se cuantificó modelando la variabilidad cardiaca como un proceso AR, el orden óptimo estimado por AIC y MDL fue  $p = 3$ .

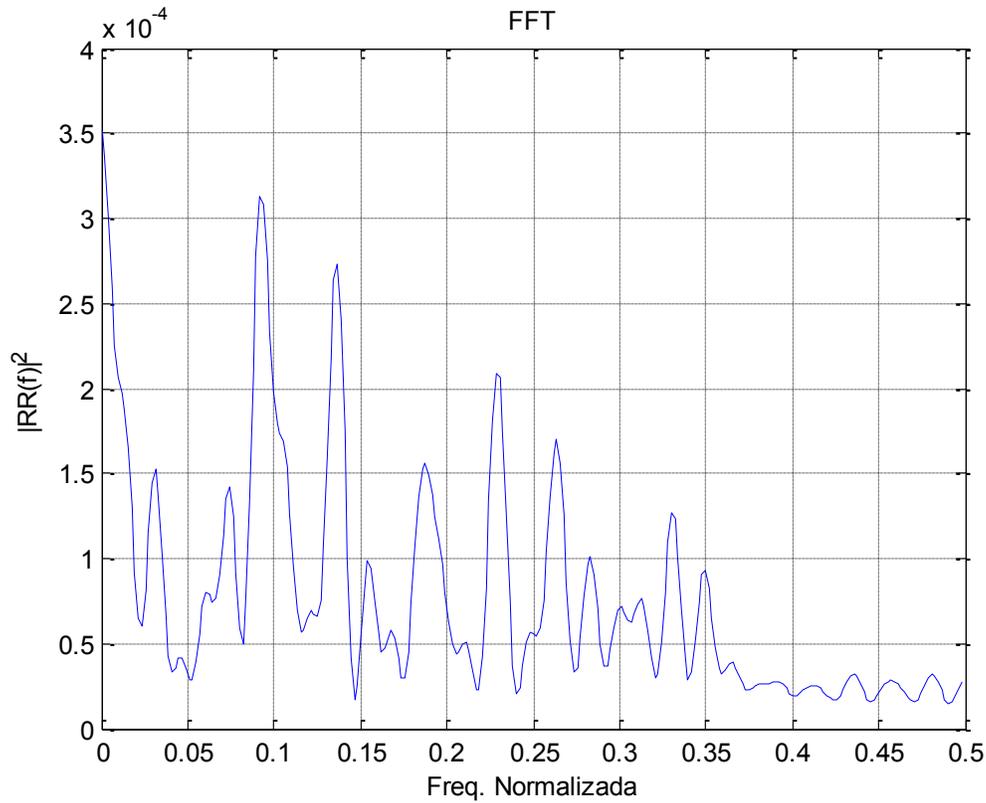


Fig. III.10. Estimación espectral del sujeto #1 usando la FFT de la secuencia de autocorrelación de la variabilidad cardiaca.

La figura III.10 muestra el resultado de la cuantificación del espectro de la variabilidad cardiaca del sujeto #1 utilizando un método clásico.

Tabla III.3 Indicadores espectrales del sujeto #1

Método	FB	FA	FB/FA	Potencia Total
AR(3)	0.6188	0.9363	0.6609	1.8141
FFT de Rxx	0.0066	0.0088	0.75	0.0185

La tabla III.3 contiene los resultados de los indicadores de los espectros estimados en las figuras III.9 y III.10.

### III.4. Aplicación en un procesador digital de señales

El prototipo consiste en detectar los complejos QRS mediante la captura y registro del ECG utilizando el sistema Cardiax PC. El mismo prototipo puede analizar datos grabados previamente. La detección de los intervalos RR se lleva a cabo por medio de un umbral configurable. Posteriormente dicha señal es acondicionada a través de una etapa de amplificación y filtrado analógico. Una vez acondicionada la señal, se lleva a cabo un filtrado digital en un procesador digital de señales (DSP) TMS320C6713, para que finalmente, la señal procesada resultante se envíe a la computadora personal (PC) a través del puerto USB y se despliegue en la pantalla. En la Fig. III.11 se muestra el diagrama a bloques del prototipo

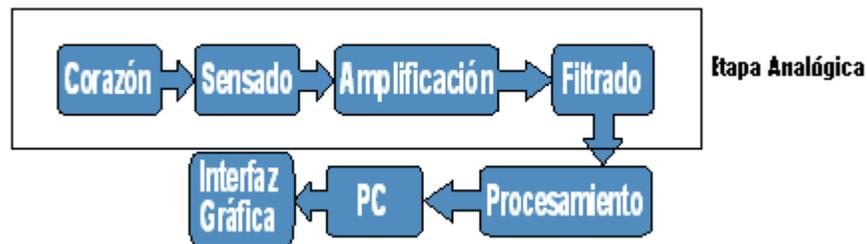


Fig. III.11. Prototipo desarrollado [11]

La parte analógica de la aplicación (Fig. III.11) se describe a detalle en [11]. La etapa de procesamiento consiste en ejecutar algoritmos matemáticos de análisis espectral clásico, filtrado adaptable y análisis espectral moderno para obtener una estimación del espectro de la señal capturada y hacer comparaciones.

Se desarrolló una interfaz de usuario (Fig. III.12) en Visual C++ usando controles Active X. Para lograr la comunicación entre el procesador digital de señales y el anfitrión se utilizó una instancia de la clase RTDX que provee el fabricante del DSK. Mediante el uso de la interfaz de usuario se pueden variar parámetros usados en la detección de la VFC. Asimismo, el sistema permite al usuario decidir ver la VFC en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia. Si el dominio de la frecuencia es seleccionado, entonces el usuario puede escoger que algoritmo utilizar. Con esto, se envían los parámetros

necesarios al DSK por medio de las funciones síncronas exportadas de RTDX para que realice el procesamiento correspondiente.

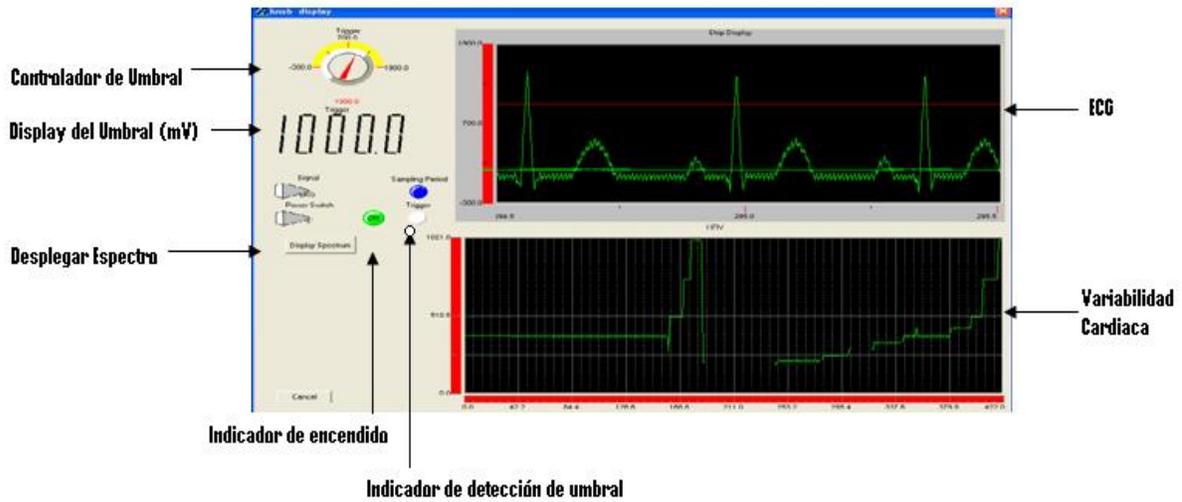


Fig. III.12. Interfaz de usuario y sus componentes

El estimado de la diferencia de tiempo transcurrido entre cada pico R de la medición del ECG (derivación V4) se realiza por medio de un umbral adaptable en forma de perilla en la interfaz de usuario, esta técnica de detección del complejo QRS pudiera ser sustituida por un mejor algoritmo como los basados en wavelets. Las diferencias de tiempo son guardadas para la estimación espectral al finalizar el periodo de medición, que para este caso es de 5 min.

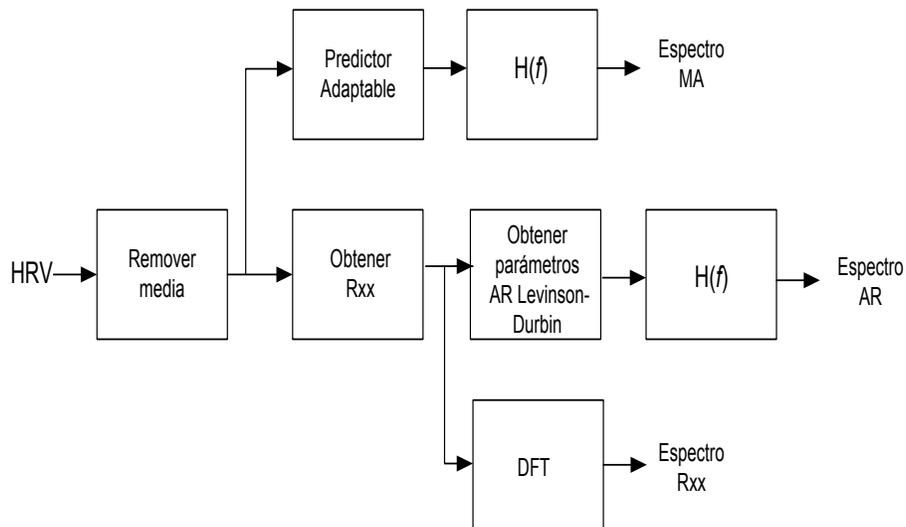


Fig. III.13. Trayectoria de los datos en el DSK

Una vez concluidos los 5 minutos de medición, los datos siguen la trayectoria que se muestra en la figura III.13.

La señal de entrada al predictor (pre-filtro) adaptable en este caso es el vector de intervalos RR y no la secuencia de autocorrelación. El detector adaptable mostrado en la Fig. III.14 utiliza el algoritmo LMS (por sus siglas en inglés Least Mean Square) o mínimos cuadrados para actualizar los pesos del filtro transversal con cada muestra de entrada.

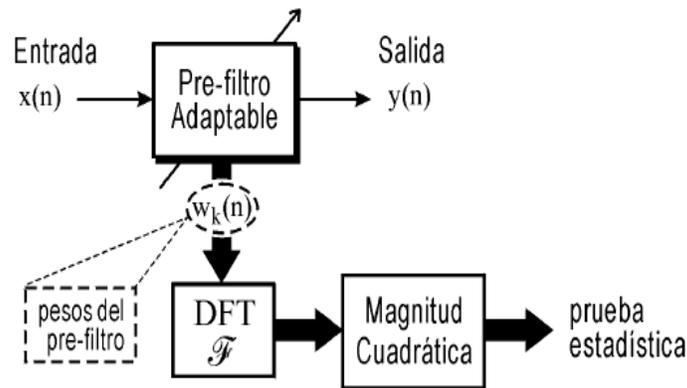


Fig. III.14 Esquema de estimación espectral por medio de un detector adaptable [8]

La secuencia de los pesos del pre-filtro es lo que se ingresa al proceso de la DFT; también la magnitud correspondiente es elevada al cuadrado para obtener el estadístico necesario para la detección [8]. Del mismo modo el factor de convergencia  $\alpha$  del algoritmo LMS es adaptado por la potencia del buffer de entrada  $P_x$  y la longitud del filtro  $N$ , esto se hace para minimizar más rápido el error cuadrático medio y lograr una convergencia más rápida [8]. El valor de  $\alpha$  debe estar acotado como lo muestra la ecuación (III.3.1):

$$0 < \alpha < \frac{1}{P_x(N+1)} \quad (\text{III.3.1})$$

La potencia se estima con la ecuación (III.3.2):

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N x(n)^2 \quad (\text{III.3.2})$$

Una vez que los pesos convergen y el error cuadrático medio es mínimo, se calcula la magnitud cuadrática de la DFT de los pesos. En la Fig. III.15 se presentan los pesos del detector adaptable y se puede apreciar la convergencia. En la Fig. III.16 se muestra la DEP de los pesos encontrados, referidos a frecuencia normalizada.

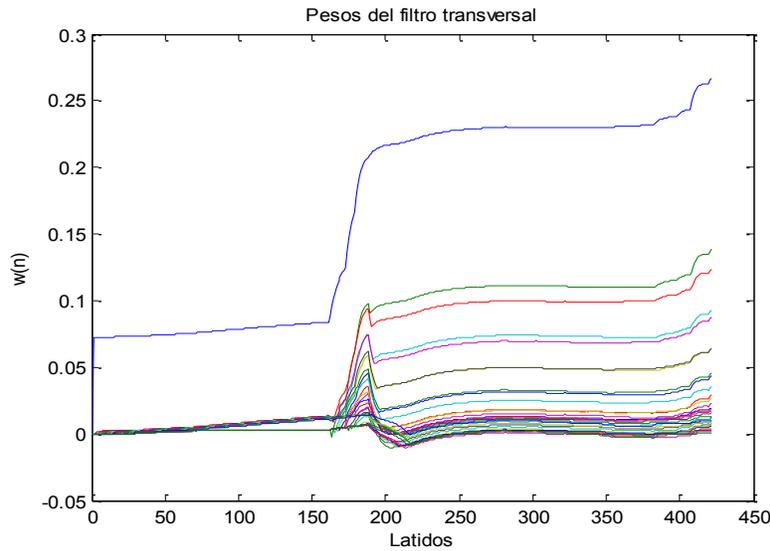


Fig. III.15. Pesos del detector adaptable

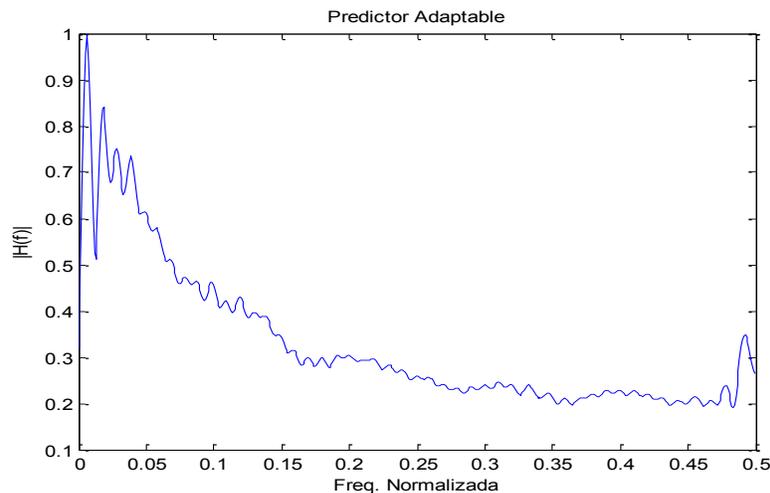


Fig. III.16. Densidad espectral de potencia de los pesos del detector

# CAPITULO IV

# RESULTADOS Y CONCLUSIONES

## Introducción

Para validar los algoritmos desarrollados en este trabajo se utilizaron los datos obtenidos con el sistema descrito en la referencia [9]. Los datos son secuencias RR extraídas de electrocardiogramas de 15 voluntarios sanos durante el reto ortostático, que consiste en cambiar de la posición de clinostatismo (acostado) a ortostatismo (de pie). Para analizar la VFC se usaron registros de 6 minutos en clinostatismo y 6 minutos en ortostatismo (se permitió un periodo de estabilización hemodinámica de 3 minutos antes del registro de cada posición). En el dominio del tiempo los resultados que se analizan son la media y la desviación estándar, de la estimación espectral se analiza la potencia total, el coeficiente de frecuencias bajas (FB) que representa la actividad del sistema nervioso simpático con modulación del sistema parasimpático [9, 13], el coeficiente de frecuencias altas (FA) que representa la actividad del sistema nervioso parasimpático [9, 13], y el coeficiente del balance simpático-parasimpático (FB/FA).

En este capítulo también se presentan las estimaciones de la densidad espectral de potencia de cada una de las secuencias RR usando los siguientes algoritmos:

- Transformada de Fourier de la autocorrelación de la secuencia RR.
- Densidad espectral de los pesos de un predictor adaptable.
- Densidad espectral de potencia de un modelo AR.

Todos los detalles del sistema utilizado para la captura del ECG y extracción de las secuencias RR que se utilizan para la validación se explican a detalle en las referencias [9] y [10].

## IV.1 Resultados

La Tabla IV.1 muestra los resultados obtenidos en el dominio del tiempo con las secuencias RR obtenidas por la referencia [9], todos los resultados están dados en segundos.

Tabla IV.1 Resultados obtenidos en el dominio del tiempo

Sujeto	Clinostatismo		Ortostatismo	
	NN Media (s)	SDNN (s)	NN Media (s)	SDNN (s)
1	1.106	0.087	0.688	0.039
2	0.964	0.041	0.678	0.037
3	0.928	0.073	0.849	0.080
4	0.905	0.038	0.785	0.051
5	0.903	0.048	0.794	0.051
6	0.749	0.036	0.619	0.025
7	0.743	0.036	0.641	0.033
8	0.985	0.061	0.672	0.026
9	0.856	0.025	0.745	0.033
10	0.718	0.051	0.508	0.028
11	1.002	0.090	0.857	0.049
12	1.109	0.104	0.991	0.065
13	0.658	0.062	0.572	0.027
14	0.900	0.064	0.721	0.031
15	0.929	0.052	0.785	0.047
<b>Promedio</b>	<b>0.897</b>	<b>0.058</b>	<b>0.727</b>	<b>0.041</b>
<b>Desv. Est.</b>	<b>0.134</b>	<b>0.023</b>	<b>0.123</b>	<b>0.016</b>

Las medidas de resumen en la tabla IV.1 (promedio y desviación estándar) de los índices en el dominio del tiempo muestran que la NN media disminuyó al estar los sujetos de pie. En contraste, el SDNN tuvo una tendencia no significativa a disminuir. La SDNN refleja todas las componentes cíclicas responsables de la variación durante la medición [13]. Conforme el periodo de la medición aumenta, la varianza también aumenta [13]. Se calculó el valor de significancia usando la prueba t de Student para datos pareados de cada medida en ambas posiciones de la tabla IV.1. Para la NN Media se obtuvo una significancia de  $p=0.000005$  entre los datos obtenidos en las posiciones de clinostatismo y ortostatismo. Para la SDNN se obtuvo un valor de significancia de

$p = 0.008$ . En ambos casos se puede comprobar que el cambio de posición tuvo un impacto en ambas mediciones. En este tipo de pruebas como el reto ortostático se utilizan en personas que sufren de mareos o desmayos constantes cuando se encuentran de pie por periodos largos, la prueba ayuda a diagnosticar las fallas en el sistema nervioso autónomo que controla la presión arterial. Fisiológicamente lo que sucede es que la presión tiende a disminuir cuando una persona se pone de pie debido a la gravedad, esto hace que la cantidad de sangre bombeada por el corazón disminuya, para contrarrestar el efecto de la baja presión y evitar desmayos el sistema nervioso autónomo produce mecanismos de compensación que hacen que la frecuencia cardiaca aumente para mantener el flujo sanguíneo.

Existe mas experiencia y teoría que respaldan la interpretación del los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia que los resultados obtenidos en del dominio de tiempo cuando se analizan secuencias RR obtenidas en un periodo de tiempo de medición relativamente corto [13]. Sin embargo es difícil interpretar los resultados obtenidos en el dominio de la frecuencia cuando el periodo de medición es largo (24Hrs). En la tabla IV.2 se pueden observar los resultados en  $ms^2$  de las secuencias RR obtenidas por el sistema descrito en [9].

Tabla IV.2 Resultados en  $ms^2$

Coeficiente	Clinostatismo		Ortostatismo	
	AR	FFT	AR	FFT
<b>FB</b>	$0.26 \pm 0.29$	$0.004 \pm 0.009$	$0.13 \pm 0.12$	$0.002 \pm 0.003$
<b>FA</b>	$0.29 \pm 0.25$	$0.003 \pm 0.004$	$0.05 \pm 0.05$	$0.001 \pm 0.001$
<b>FB/FA</b>	$1.29 \pm 1.07$	$1.63 \pm 1.20$	$3.94 \pm 2.92$	$3.86 \pm 2.46$

Las mediciones de FB y FA se pueden normalizar con respecto a al resultado de la potencia total menos la componente de frecuencias muy bajas. Los coeficientes FB y FA expresados en unidades normalizadas (n.u.) enfatizan el comportamiento del balance y control del sistema nervioso autónomo [13]. La normalización también permite minimizar los valores absolutos de los coeficientes FB y FA con respecto a los cambios en la potencia total [13]. La tabla IV.3 los resultados obtenidos en unidades normalizadas.



Tabla IV.3 Resultados en unidades normalizadas

Sujetos	AR								FFT							
	CLINOSTATISMO				ORTOSTATISMO				CLINOSTATISMO				ORTOSTATISMO			
	FB	FA	FB/FA	Potencia Total	FB	FA	FB/FA	Potencia Total	FB	FA	FB/FA	Potencia Total	FB	FA	FB/FA	Potencia Total
1	0.40	0.61	0.66	1.81	0.91	0.09	10.22	0.39	0.43	0.57	0.75	0.019	0.79	0.20	3.95	0.004
2	0.33	0.67	0.50	0.40	0.74	0.27	2.79	0.34	0.27	0.73	0.37	0.002	0.68	0.33	2.06	0.002
3	0.53	0.47	1.12	1.31	0.82	0.18	4.51	1.58	0.61	0.39	1.56	0.024	0.80	0.21	3.82	0.057
4	0.21	0.79	0.26	0.35	0.87	0.13	6.74	0.66	0.39	0.61	0.64	0.003	0.80	0.20	3.93	0.008
5	0.17	0.83	0.21	0.54	0.48	0.53	0.90	0.62	0.22	0.79	0.27	0.005	0.67	0.34	1.99	0.009
6	0.78	0.22	3.48	0.32	0.85	0.15	5.72	0.15	0.80	0.20	3.93	0.003	0.82	0.18	4.44	0.001
7	0.78	0.22	3.48	0.32	0.82	0.19	4.37	0.27	0.80	0.21	3.88	0.003	0.86	0.15	5.91	0.001
8	0.59	0.41	1.43	0.91	0.74	0.26	2.82	0.16	0.68	0.32	2.12	0.007	0.81	0.19	4.26	0.001
9	0.61	0.39	1.55	0.15	0.78	0.22	3.57	0.27	0.68	0.32	2.08	0.000	0.78	0.22	3.53	0.004
10	0.60	0.41	1.47	0.63	0.82	0.18	4.61	0.19	0.63	0.38	1.66	0.006	0.83	0.17	4.94	0.002
11	0.43	0.57	0.76	1.92	0.51	0.50	1.03	0.59	0.55	0.46	1.20	0.064	0.40	0.63	0.63	0.004
12	0.69	0.31	2.22	2.61	0.76	0.24	3.11	1.01	0.74	0.26	2.82	0.084	0.78	0.23	3.40	0.015
13	0.61	0.40	1.55	0.94	0.76	0.24	3.11	0.18	0.67	0.34	1.99	0.026	0.73	0.27	2.74	0.001
14	0.16	0.84	0.19	0.94	0.38	0.62	0.62	0.22	0.13	0.87	0.15	0.008	0.54	0.46	1.16	0.001
15	0.35	0.65	0.53	0.65	0.78	0.23	3.41	0.52	0.50	0.50	1.01	0.004	0.79	0.21	3.68	0.005
Media	0.48	0.52	1.29	0.92	0.74	0.27	3.84	0.48	0.54	0.46	1.63	0.017	0.74	0.27	3.36	0.008
Desv. Est.	0.21	0.21	1.07	0.71	0.15	0.16	2.46	0.39	0.21	0.21	1.20	0.025	0.12	0.13	1.42	0.014

Nótese que en la tabla IV.3 para el caso del modelo AR, el coeficiente FB/FA incrementa en todos los sujetos al ponerse de pie, para el caso de la transformada rápida de Fourier sucede lo mismo con la excepción del sujeto 11. La figura IV.1 muestra el aumento del coeficiente FB/FA usando la FFT y el modelo AR para cada sujeto.

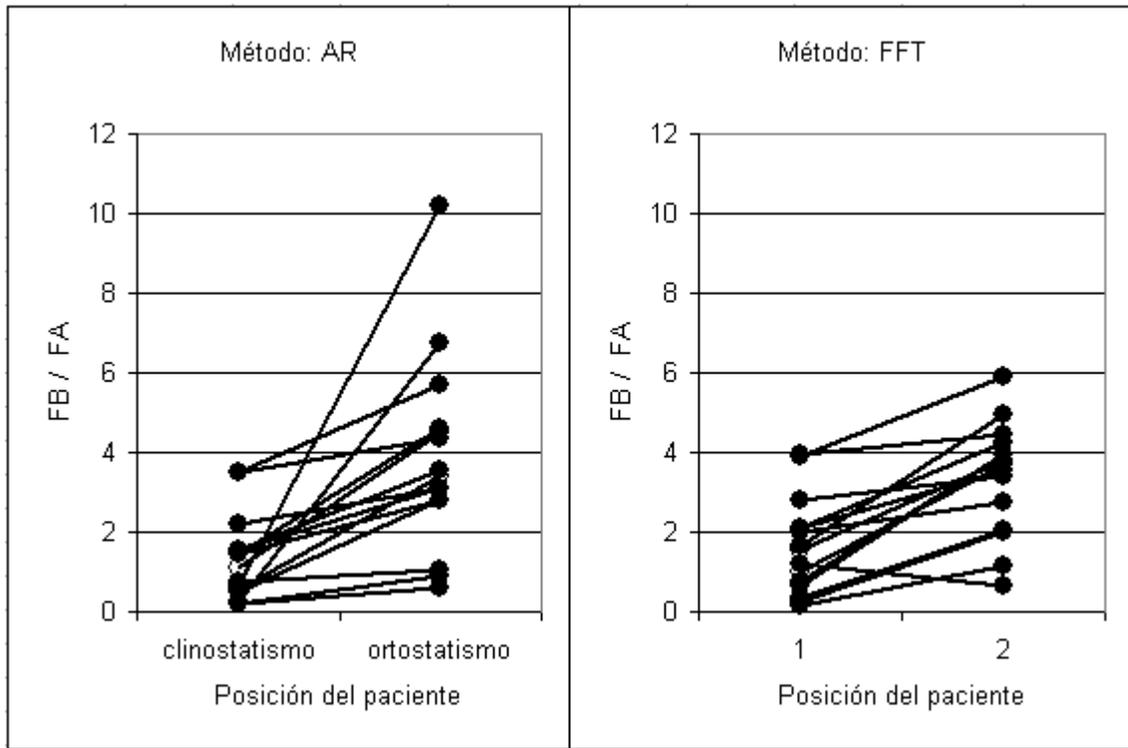


Fig. IV.1 Aumento del coeficiente FB/FA usando diferentes algoritmos.

Se calculo el valor de significancia usando la prueba t de Student para datos para los resultados obtenidos de la tabla IV.2 y de la tabla IV.3 al igual que como se hizo con los resultados de la tabla IV.1, es decir se calculo el valor de significancia entre el coeficiente FB de clinostatismo y el coeficiente FB de ortostatismo, de FA de clinostatismo y de FA de ortostatismo, así también para el coeficiente FB/FA y para la potencia total estimada de cada algoritmo utilizado tal y como se muestra en la tabla IV.4.

Tabla IV.4 Significancia entre posiciones para cada algoritmo en n.u y ms<sup>2</sup>

Unidades	Algoritmo	Clinostatismo contra Ortostatismo			
		FB	FA	FB/FA	Potencia
ms <sup>2</sup>	AR	0.081	0.002	0.003	0.006
	FFT	0.234	0.022	0	0.171
n.u.	AR	0	0	0.003	0.006
	FFT	0.001	0.001	0	0.171

De la tabla IV.4 se puede observar que los valores de significancia disminuyen casi a cero para ambos algoritmos cuando las unidades son normalizadas, esto quiere decir que es más notorio el efecto fisiológico de la tendencia aceleradora inducida por el sistema nervioso parasimpático de las dos posiciones cuando las mediciones son normalizadas.

Se realizaron pruebas de concordancia entre los resultados de la transformada rápida de Fourier de la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del modelo AR. Para la posición de clinostatismo el 93% los resultados de FB, FA y FB/FA mostraron estar dentro del intervalo de confianza, esto se puede observar en las figuras IV.2, IV.3 y IV.4.

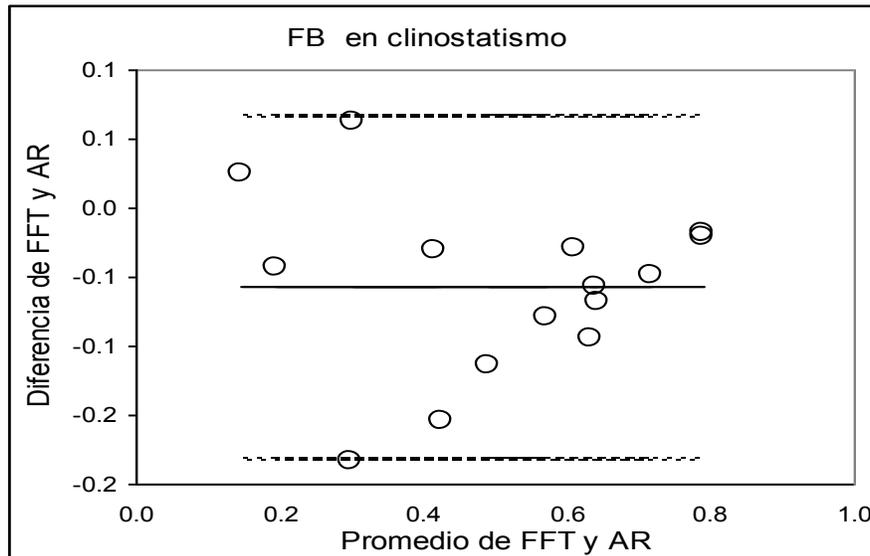


Fig. IV.2 Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FB en clinostatismo.

En la figura IV.2 se puede apreciar que los resultados del coeficiente FB para el sujeto #4 se encuentran fuera del intervalo de confianza.

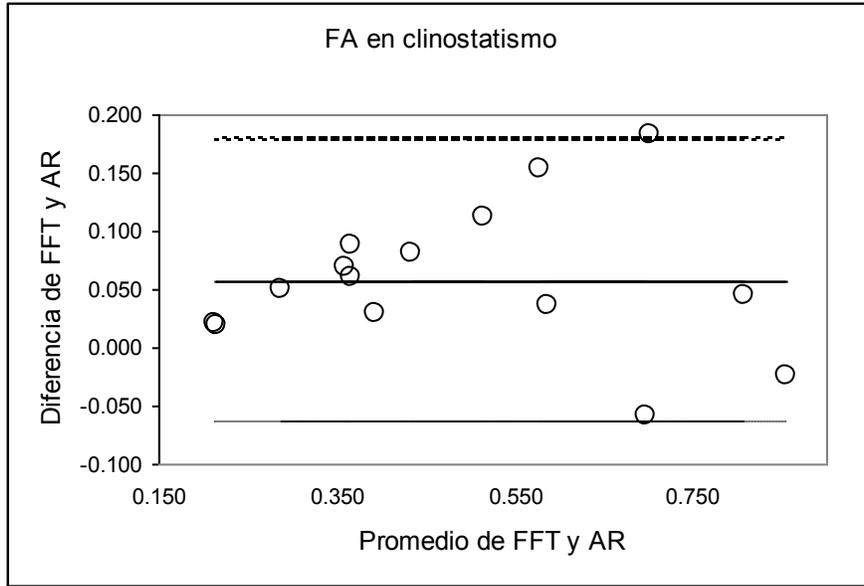


Fig. IV.3 Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FA en clinostatismo.

Al igual que el los resultados expuestos en la figura IV.2, en le figura IV.3 el sujeto #4 es el que se encuentra fuera del intervalo de confianza.

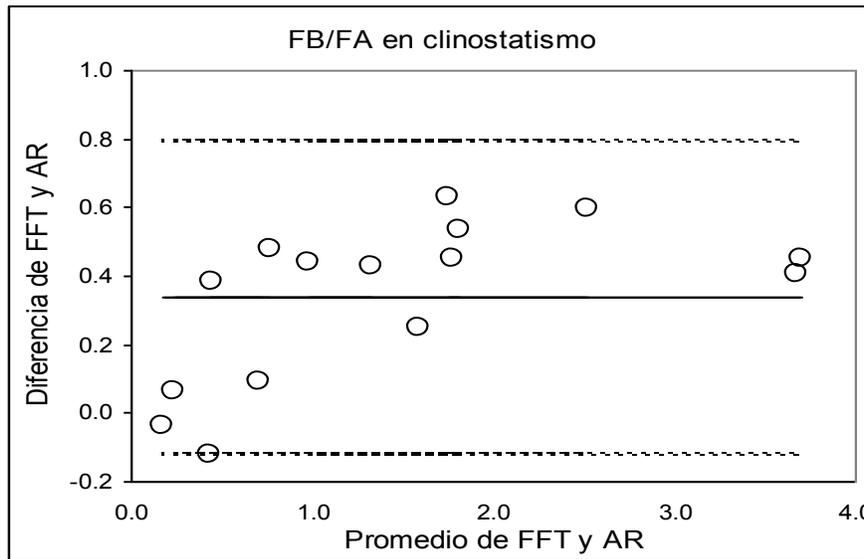


Fig. IV.4 Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FB/FA en clinostatismo.

Para el caso del análisis de concordancia de las estimaciones del coeficiente FB/FA, el sujeto #2 es el que se encuentra fuera del intervalo de confianza en la figura IV.4.

Las pruebas de concordancia también se realizaron para la posición de ortostatismo. El 93% los resultados de FB, FA y FB/FA mostraron estar dentro del intervalo de confianza, esto se puede observar en las figuras IV.5, IV.6 y IV.7.

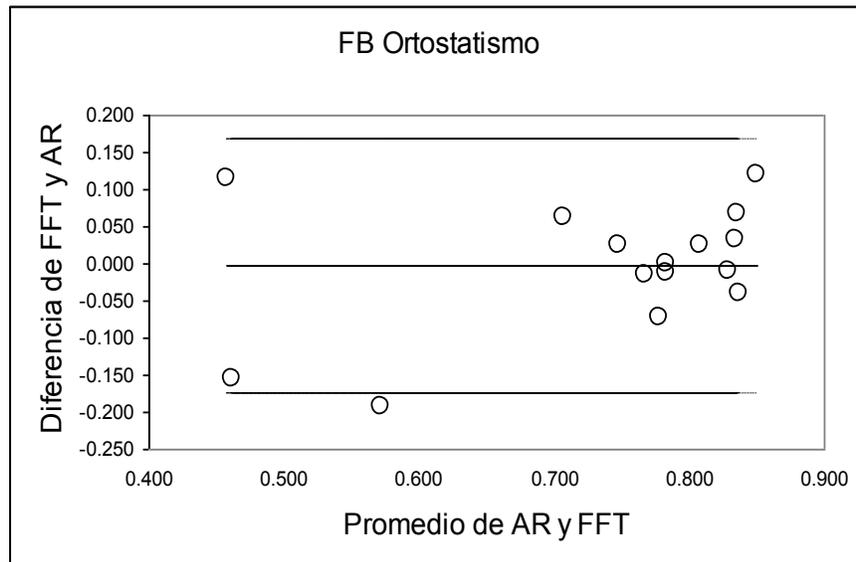


Fig. IV.5 Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FB en ortostatismo.

En la figura IV.5 los resultados del coeficiente FB que se encuentran fuera del intervalo de confianza pertenecen al sujeto #5.

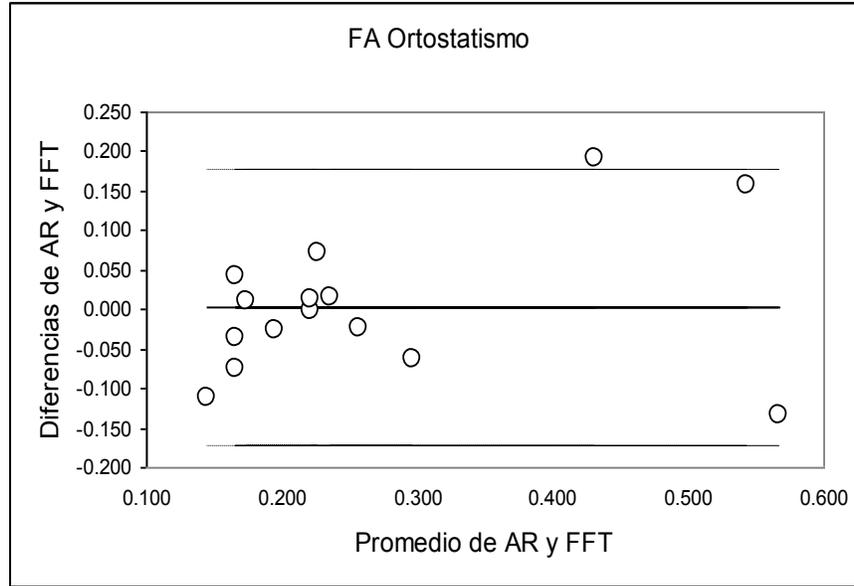


Fig. IV.6 Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FA en ortostatismo.

Al igual que el los resultados expuestos en la figura IV.5, en la figura IV.6 los resultados estimados para el coeficiente FA del sujeto #5 son los que se encuentran fuera del intervalo de confianza.

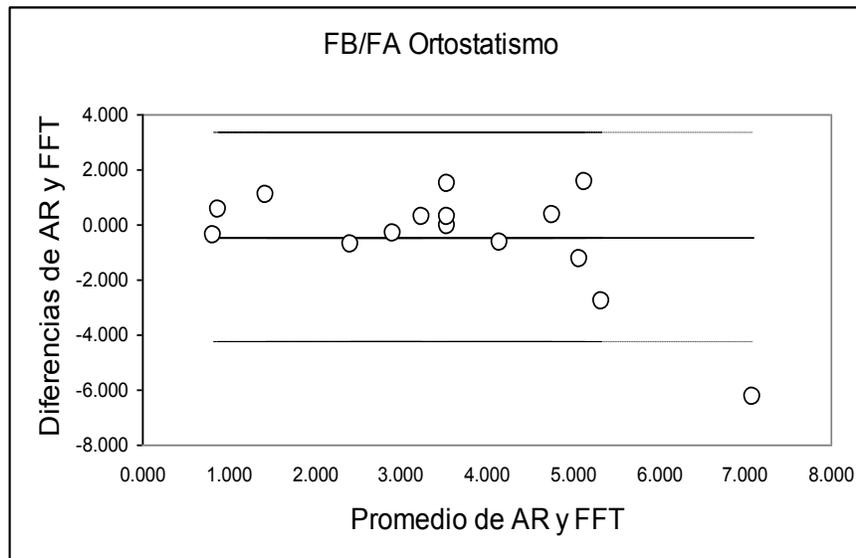


Fig. IV.7 Grafica de análisis de concordancia para el coeficiente FB/FA en ortostatismo.

Para el caso del coeficiente FB/FA, los resultados estimados para el sujeto#1 se encontraron fuera del intervalo de confianza como se puede observar en la figura IV.7.

Por ultimo se realizaron pruebas de significancia sobre los resultados estimados (normalizados) por cada algoritmo, los resultados de las pruebas se pueden observar en la tabla IV.5.

Tabla IV.5 Valores de significancia de los modelos AR contra FFT

Posición	AR contra FFT		
	FB	FA	FB/FA
Clinostatismo	0.462	0.457	0.425
Ortostatismo	0.949	0.97	0.524

Para la posición de clinostatismo se obtuvo una correlación lineal entre los valores estimados entre el modelo AR y el algoritmo de la transformada rápida de Fourier de aproximadamente 0.9 para FB, FA y FB/FA, pero los valores de significancia obtenidos resultaron relativamente bajos en comparación con los valores de significancia obtenidos en la posición de ortostatismo, donde se obtuvieron valores de correlación lineal de aproximadamente 0.67 para FA y FB, y de 0.34 para FB/FA.

El anexo II muestra las densidades espectrales de potencia de los 15 sujetos que se sometieron a la prueba del reto ortostático en la referencia [9], estas densidades espectrales se utilizaron para los análisis de concordancia ya mencionados. En la Tabla IV.6 se pueden observar los coeficientes resultantes de los modelos AR para cada secuencia RR de cada paciente usando el algoritmo de Levinson-Durbin junto con el criterio MDL.

Tabla IV.6 Coeficientes resultantes de los modelos AR

Sujeto	Posición	b(0)	a(k)
1	Clinostatismo	0.077388	a = [1.000000; -0.486939; 0.283347; -0.160059]
	Ortostatismo	0.01286	a = [1.000000; -1.120402; -0.072791; 0.430785; -0.154148]
2	Clinostatismo	0.029475	a = [1.000000; -0.254331; -0.095231; -0.606129; 0.031470; 0.271129]
	Ortostatismo	0.023162	a = [1.000000; -0.781976]
3	Clinostatismo	0.041261	a = [1.000000; -0.997094; 0.472093; -0.144081; -0.309390; 0.154148]
	Ortostatismo	0.029947	a = [1.000000; -1.178719; 0.367150; -0.049733; -0.220054; 0.189988]
4	Clinostatismo	0.02382	a = [1.000000; -0.384318; 0.213891; -0.687499]
	Ortostatismo	0.024048	a = [1.000000; -0.981275; 0.083964; -0.141316; 0.177331; 0.252228; -0.237681]
5	Clinostatismo	0.031473	a = [1.000000; -0.284476; 0.174264; -0.707662]
	Ortostatismo	0.023845	a = [1.000000; -0.744275; -0.027336; 0.133487; -0.542986; 0.038310; 0.393828; -0.136062]
6	Clinostatismo	0.016385	a = [1.000000; -0.890910]
	Ortostatismo	0.010729	a = [1.000000; -0.880744; -0.101850; 0.146546; -0.215870; 0.154280; 0.071729; 0.089747; 0.045095; -0.210474]
7	Clinostatismo	0.016385	a = [1.000000; -0.890910]
	Ortostatismo	0.017233	a = [1.000000; -1.028693; 0.216643]
8	Clinostatismo	0.047526	a = [1.000000; -0.620671; 0.179042; -0.229412; -0.078633; 0.228402]
	Ortostatismo	0.013102	a = [1.000000; -0.757353; -0.117265]
9	Clinostatismo	0.014341	a = [1.000000; -0.678984; -0.115230; 0.021218; -0.111666; -0.161800; 0.080635; 0.329402; 0.026834; -0.213652]
	Ortostatismo	0.013867	a = [1.000000; -0.908657]
10	Clinostatismo	0.030837	a = [1.000000; -0.889678; 0.378415; -0.337575; -0.094033; 0.348608; -0.203909]
	Ortostatismo	0.012133	a = [1.000000; -0.770151; -0.257105; 0.020807; 0.116691]
11	Clinostatismo	0.064338	a = [1.000000; -0.560214; 0.068300; -0.070986; -0.240374]
	Ortostatismo	0.030952	a = [1.000000; -0.901317; 0.307641; 0.068765; -0.100285; -0.161977]
12	Clinostatismo	0.07464	a = [1.000000; -0.692497]
	Ortostatismo	0.035695	a = [1.000000; -0.831215]
13	Clinostatismo	0.031282	a = [1.000000; -1.056772; 0.438701; -0.096592; -0.160888]
	Ortostatismo	0.015189	a = [1.000000; -0.830060]

---

---

<b>14</b>	Clinostatismo	0.052351	a = [1.000000; -0.002722; 0.049149; -0.524567; -0.175248]
	Ortostatismo	0.02164	a = [1.000000; -0.483559; -0.002836; -0.014076; -0.192533; -0.145881]
<b>15</b>	Clinostatismo	0.038366	a = [1.000000; -0.503237; 0.226614; -0.486742]
	Ortostatismo	0.021973	a = [1.000000; -0.879513]

## IV.2 Conclusiones

Las ventajas de usar métodos no paramétricos para estimaciones espectrales es la simplicidad del algoritmo, ya que son basados en la transformada de Fourier y son fáciles de implementar. Las desventajas son significativas si la estimación se trata de un proceso aleatorio ya que los conceptos clásicos no aplican para estimaciones de este tipo y empeora aun más cuando el número de muestras es pequeño.

En este trabajo, como se observa en la figura III.13 se remueve la media de la secuencia RR antes de implementar algún algoritmo. El remover la media o la tendencia lineal afecta las componentes de frecuencias bajas del espectro. Se aconseja verificar que las componentes de interés no se vean afectadas con la respuesta a la frecuencia del filtro resultante [13].

El efecto alias también puede ser una fuente de error para la transformada discreta de Fourier si la frecuencia de muestreo no satisface el teorema de Shannon, es decir la frecuencia de muestreo debe ser mayor al doble del ancho de banda de la señal. Para garantizar que se cumpla el teorema de Shannon el numero de muestras deberá ser mayor al cociente del doble del ancho de banda entre la frecuencia de resolución como se muestra en la ecuación IV.2.1 [3] [6].

$$N = \frac{f_{\max}}{f_{res}} \geq \frac{2 * AB}{f_{res}} \quad (\text{IV.2.1})$$

Donde  $f_{\max}$  es la frecuencia de máxima,  $f_{res}$  es la frecuencia de resolución,  $AB$  es el ancho de banda y  $N$  el número de muestras necesarias. De la ecuación IV.2.1 también se puede deducir que  $f_{res}$  disminuye si se aumenta  $N$  lo cual nos da una mejor resolución del espectro de la transformada discreta de Fourier. Para los métodos de análisis espectral moderno  $N$  como lo es el caso del modelo AR, aun con número de muestras  $N$  reducido se puede obtener una buena estimación ( $N < 100$ ) [6]. En [13] se recomienda que el rango de la frecuencia de muestreo se encuentre entre 250 Hz y 500 Hz.

Otra de las limitaciones de los métodos clásicos es el efecto de fuga. Este efecto es consecuencia al número finito de muestras a la hora de estimar la transformada discreta de Fourier ya que el algoritmo asume periodicidad [6]. El proceso de obtener la transformada discreta de Fourier de un número finito de muestras equivale a pasar la secuencia numérica por una ventana rectangular. Existen otras ventanas que se pueden utilizar y ayudan a eliminar la fuga espectral como la ventana de Hanning, Hamming, Bartlett entre otras más, y pueden ser usadas para obtener una mejor estimación espectral con el método indirecto.

Las ventajas de los métodos paramétricos son la suavidad en las componentes espectrales y mejor resolución sin necesidad de usar ventanas, y se puede realizar un mejor post-procesamiento en el espectro resultante [13].

Una de las desventajas que presentan los métodos paramétricos es que la mayoría de las veces el tipo de proceso que generó las muestras no se conoce a priori, por lo general se tiene que asumir el tipo de modelo. Si la secuencia de datos no es del tipo del proceso asumido, la estimación espectral será errónea, como es en el caso del predictor adaptable en la variabilidad cardiaca. Otro problema surge cuando se necesita asignar un orden al modelo, es necesario introducir criterios que ayuden a estimar el orden óptimo del proceso. Por lo tanto se necesitan varias iteraciones de prueba y error para encontrar el tipo de modelo y su orden óptimo.

Se realizaron varias pruebas con las secuencias RR de la referencia [9] y con las muestras obtenidas con el generador Cardiax-PC para obtener el orden óptimo del modelo AR de la variabilidad cardiaca utilizando el criterio de información de Akaike (AIC) y el criterio mínimo de la longitud de descripción (MDL) propuesto por Parzen. Los resultados siempre fueron similares ya que las secuencias de datos nunca fueron tan largas, y según las referencias [1] y [2] si el número de muestras es grande, el criterio de información de Akaike se vuelve inestable por lo tanto su estimación no será la correcta. En base a lo anterior la aplicación utiliza el criterio MDL.

Para comparar los algoritmos AR contra la técnica que usa la FFT, se utilizaron datos registrados a partir de 15 voluntarios sanos durante una maniobra fisiológica conocida: el reto ortostático. En nuestras pruebas se demostró que ambos métodos son capaces de detectar el efecto del reto ortostático sobre la VFC (con la excepción del

sujeto 11 para el método indirecto): disminución de la media y de las frecuencias altas (FA) y aumento de las frecuencias bajas (FB) y del balance simpato-vagal (FB/FA). La combinación de maniobras fisiológicas con la VFC permite analizar de manera no invasiva la modulación del sistema nervioso autónomo sobre la actividad cardiaca. Por lo tanto, éstas técnicas son la ventana para una amplia variedad de aplicaciones para la investigación y la evaluación y tratamiento de diversas patologías.

De los resultados obtenidos por la prueba t de Student (Tabla IV.5) podemos afirmar que los promedios de FB, FA y FB/FA no son diferentes en ambos algoritmos ya que todos son mayores a 0.05.

El método de Bland-Altman sugiere que al menos el 95% de los casos deben estar dentro del intervalo de confianza para poder asumir que ambos métodos son concordantes [25]. En este trabajo solo se obtuvo el 93% para la mayoría de los casos (Fig. IV.2, Fig. IV.3, Fig. IV.4, Fig. IV.5, Fig. IV.6, Fig. IV.7), no por esto se debe descartar el algoritmo de Levinson-Durbin ya que el número de casos no fue muy grande y quizás con un número de casos más grande se pueda apreciar mejor concordancia.

## Anexo I. Comunicación Anfitrión – Destino

La comunicación entre el anfitrión y el sistema destino se lleva a cabo usando una construyendo una instancia de la clase RTDX (Real Time Data Exchange) en el lado del anfitrión o cliente. El objeto de RTDX expone funciones que permiten la transferencia de datos por medio de canales unidireccionales sin interferir en la aplicación que corre en el sistema destino. Aplicaciones desarrolladas en ambientes de desarrollo como Visual C++ son capaces de utilizar interfases COM (component object model). La figura A.I.1 muestra un diagrama a bloques del flujo de datos usando RTDX.

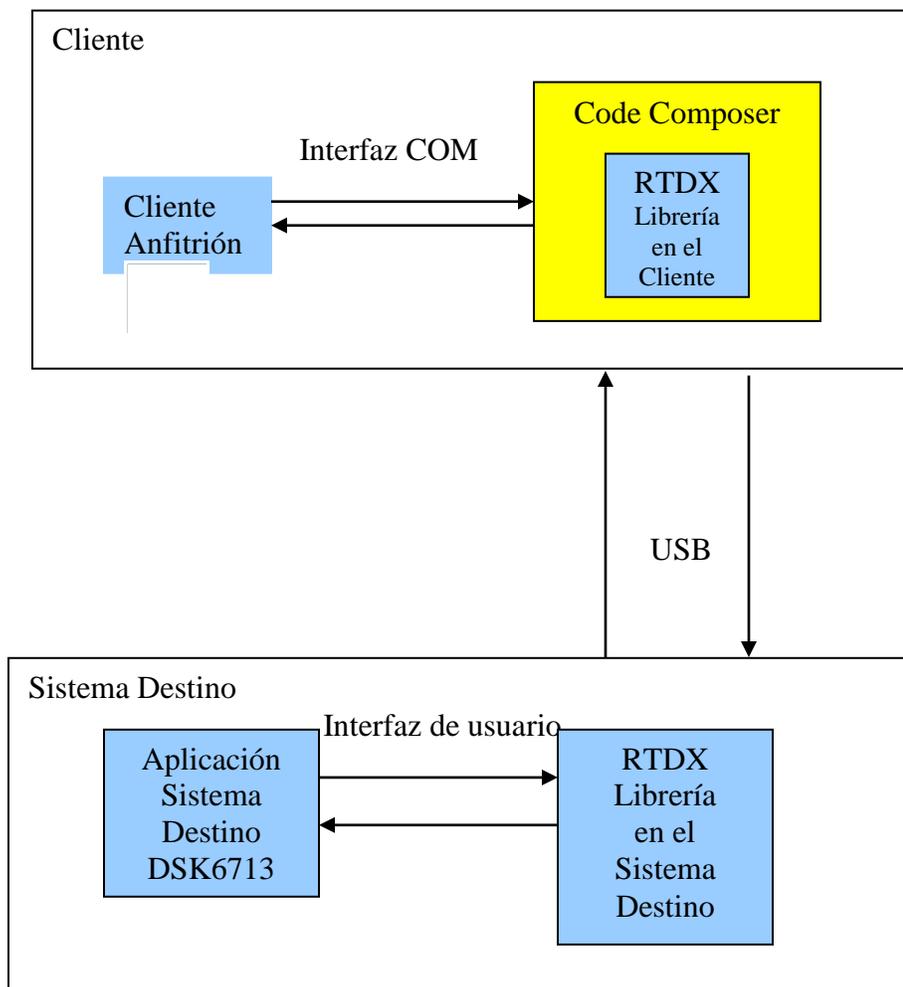


Fig. A.I.1 Diagrama de comunicación entre el sistema destino y el anfitrión.

La siguiente lista describe las funciones utilizadas en el sistema destino para la transferencia de datos en la aplicación:

- **void RTDX\_CreateOutputChannel( Canal\_Salida )**  
*Descripción.-* Crea un canal de salida.  
*Argumentos:*  
Canal\_Salida - Un identificador para el canal creado.
- **void RTDX\_CreateInputChannel( Canal\_Entrada )**  
*Descripción.-* Crea un canal de entrada.  
*Argumentos:*  
Canal\_Entrada - Un identificador para el canal creado.
- **void RTDX\_enableInput(RTDX\_inputChannel \*Canal\_Entrada )**  
*Descripción.-* Habilita un canal de entrada.  
*Argumentos:*  
Canal\_Entrada - Identificador de un canal de entrada
- **void RTDX\_enableOutput( RTDX\_outputChannel \*Canal\_Salida)**  
*Descripción.-* Habilita un canal de salida.  
*Argumentos:*  
Canal\_Salida - Identificador de un canal de salida.
- **void RTDX\_disableOutput(RTDX\_outputChannel \*Canal\_Salida)**  
*Descripción.-* Deshabilita un canal de salida.  
*Argumentos:*  
Canal\_Salida - Identificador de un canal de salida.
- **int RTDX\_read(RTDX\_inputChannel \*Canal\_Entrada, void \*Buffer, int Longitud )**  
*Descripción.-* Hace una petición de lectura a la librería RTDX del anfitrión por medio de un canal de entrada específico (Canal\_Entrada). Si el canal de entrada está habilitado, el apuntador del programa se queda en la función hasta que los datos lleguen y sean copiados al Buffer especificado en los argumentos. En caso de que el canal este ocupado o deshabilitado la función regresa RTDX\_READ\_ERROR (0), de lo contrario regresa el número de direcciones de datos leídas.

**Argumentos:**

Canal\_Entrada – Identificador de un canal de entrada.

Buffer – Apuntador al contenedor de los datos.

Longitud – Tamaño del buffer en unidades de dirección.

- **int RTDX\_write(RTDX\_outputChannel \*Canal\_Salida, void \*Buffer, int Longitud )**

**Descripción.-** Escribe los datos contenidos en el buffer a un canal de salida específico. Si los datos fueron copiados exitosamente del buffer a la librería RTDX del sistema destino, la función regresará un número distinto de cero. Si la función regresa cero significa que ocurrió una falla.

**Argumentos:**

Canal\_Salida – Identificador de un canal de salida.

Buffer – Apuntador al contenedor de los datos.

Longitud – Tamaño del buffer en unidades de dirección.

En la aplicación del sistema anfitrión se deben de seguir los siguientes pasos para poder hacer uso de la interfaz RTDX.

1. Declarar un apuntador a RTDX

```
IRtdxExpPtr rtdx;
```

2. Inicializa la librería COM en el proceso actual

```
::CoInitialize(NULL);
```

3. Crea una instancia de RTDX

```
hRes = rtdx.CreateInstance(L"RTDX");
```

hRes es una variable del tipo **HRESULT**.

4. Abre el canal de entrada o de salida que se vaya a usar en el sistema destino. Nótese que se tienen que usar los mismos identificadores.

```
Estado = rtdx->Open("Canal_Entrada","W");
```

```
Estado = rtdx->Open("Canal_Salida","R");
```

La variable Estado es del tipo Long. Si los canales se abren exitosamente Estado deberá ser igual a cero, de lo contrario ocurrió una falla en la función.

5. Una vez que el canal de interés esta abierto, se pueden hacer peticiones de lectura a la librería RTDX del sistema anfitrión o se puede escribir en el canal.

```
Estado = rtdx->ReadSAF4( VARIANT *Buffer );
```

```
Estado = rtdx->Write(VARIANT *Buffer, Estado_Buffer);
```

Ambas funciones trabajan con apuntadores del tipo VARIANT, estos apuntadores apuntan a contenedores del tipo SAFEARRAY flotantes.

6. Cuando el canal ya no sea necesario debe cerrarse

```
Estado = rtdx->Close();
```

7. Antes de terminar la aplicación la instancia de RTDX debe ser liberada para evitar fugas de memoria.

```
rtdx.Release();
```

## Anexo II. Densidad Espectral de Potencia de los algoritmos

Las siguientes figuras muestran las estimaciones de las densidades espectrales de los 15 sujetos que se sometieron a la prueba del reto ortostático empleando el sistema de la referencia [9] con la aplicación descrita en el capítulo IV. Las magnitudes fueron normalizadas a 1, esto para poder hacer una mejor comparación sobre resolución, fuga y distribución del espectro estimado por los diferentes algoritmos.

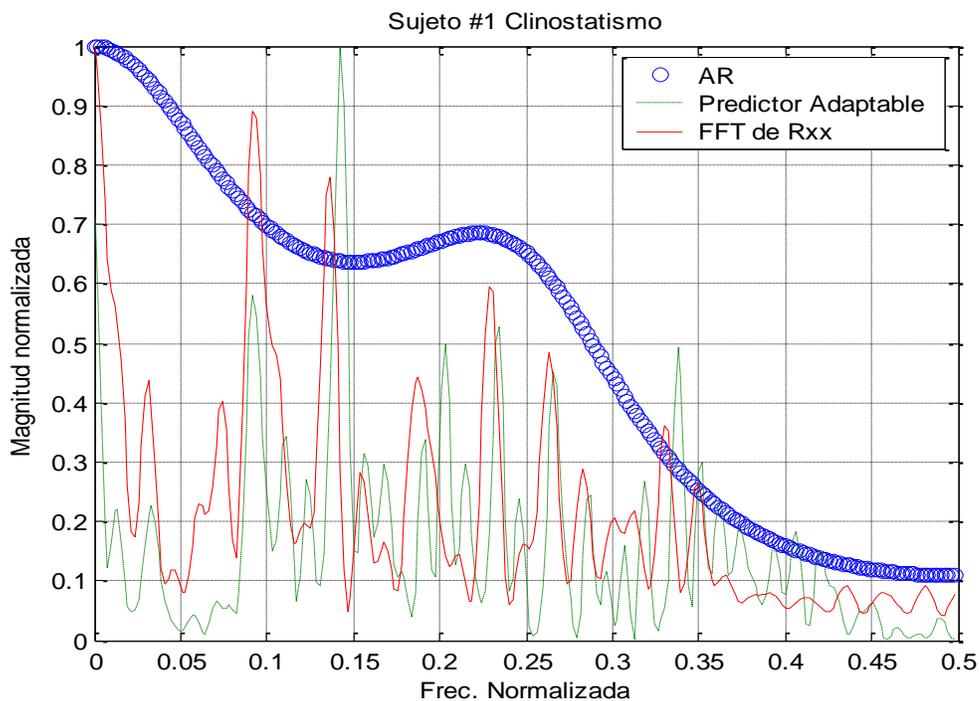


Fig. A.2.1 Sujeto #1 Clinostatismo.

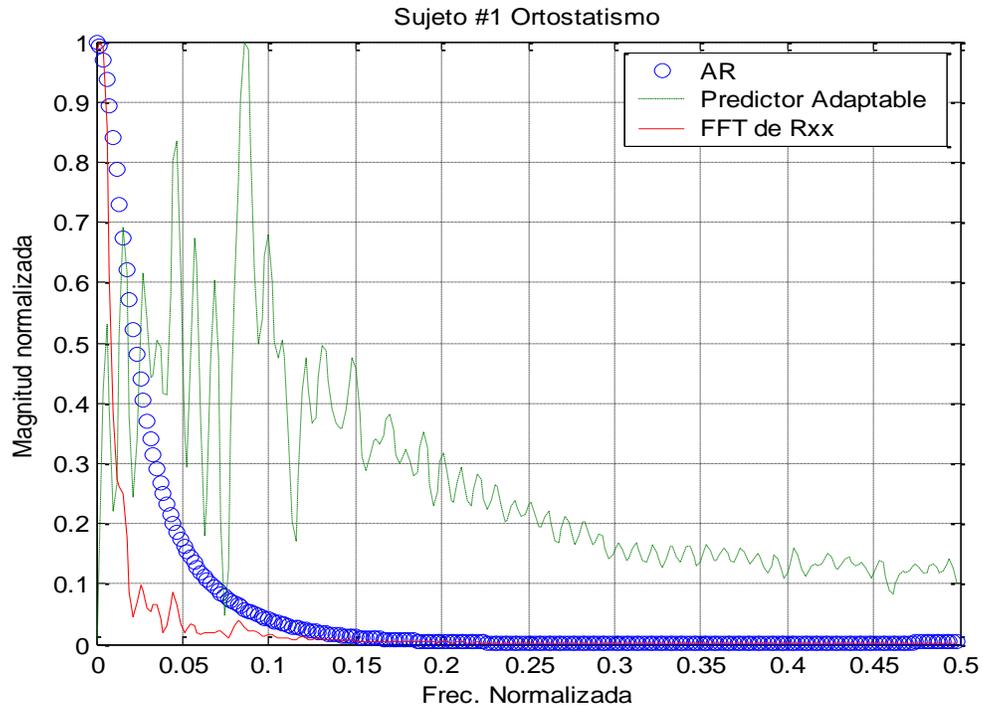


Fig. A.2.2 Sujeto #1 Ortostatismo.

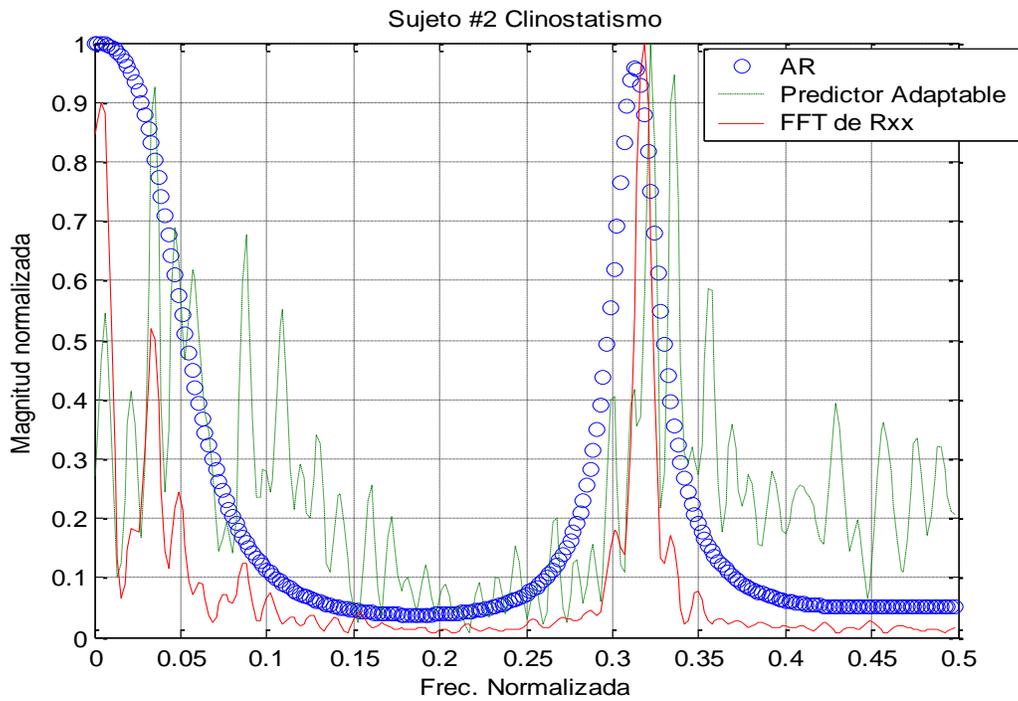


Fig. A.2.3 Sujeto #2 Clinostatismo.

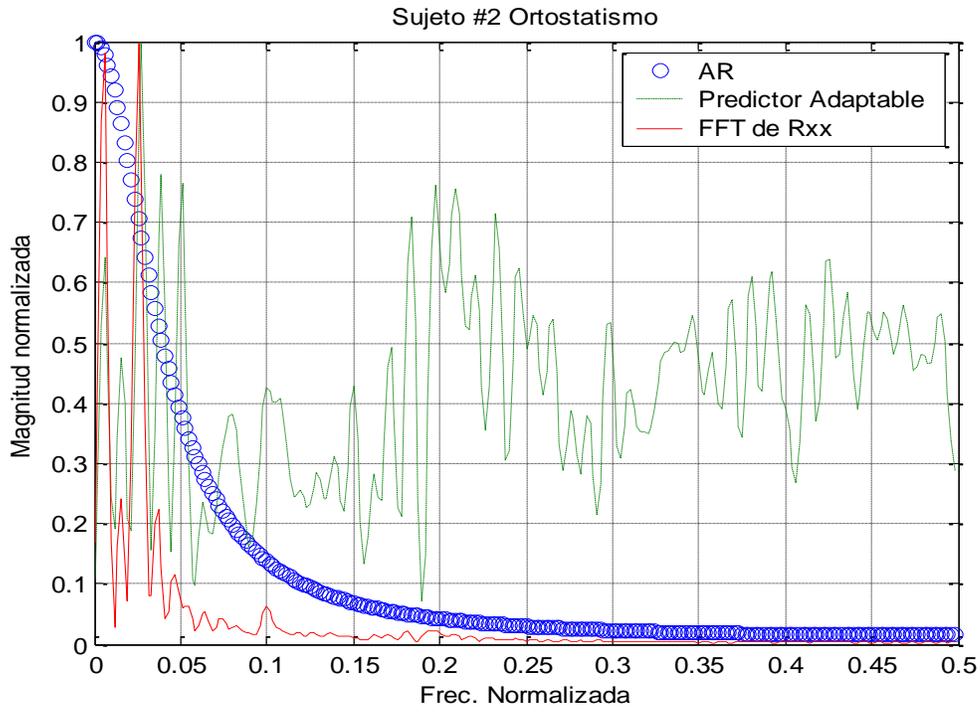


Fig. A.2.4 Sujeto #2 Ortostatismo.

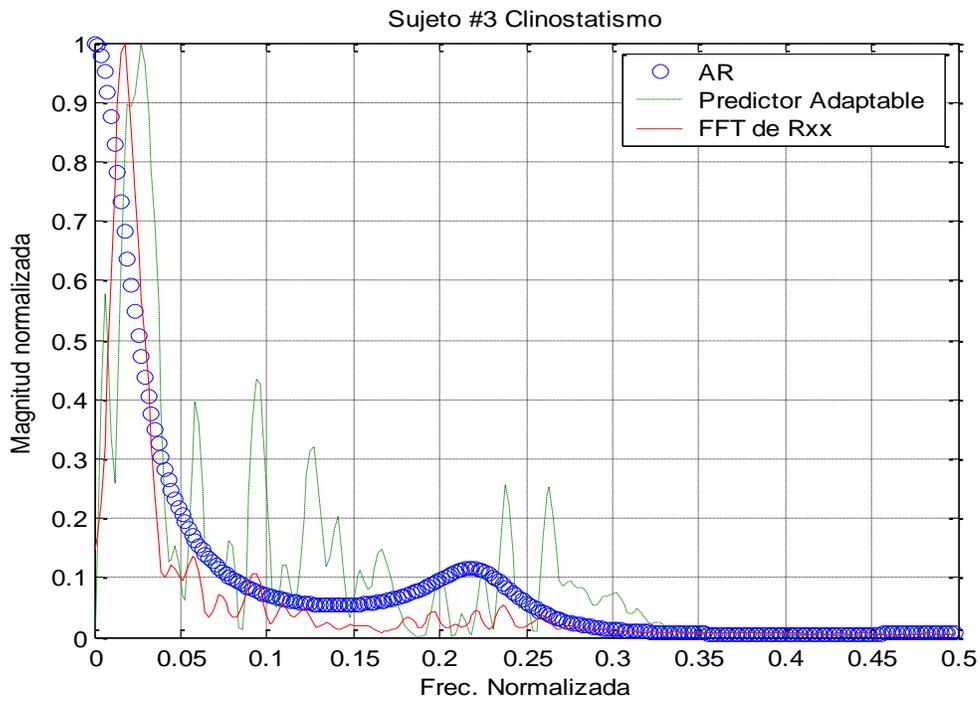


Fig. A.2.5 Sujeto #3 Clinostatismo.

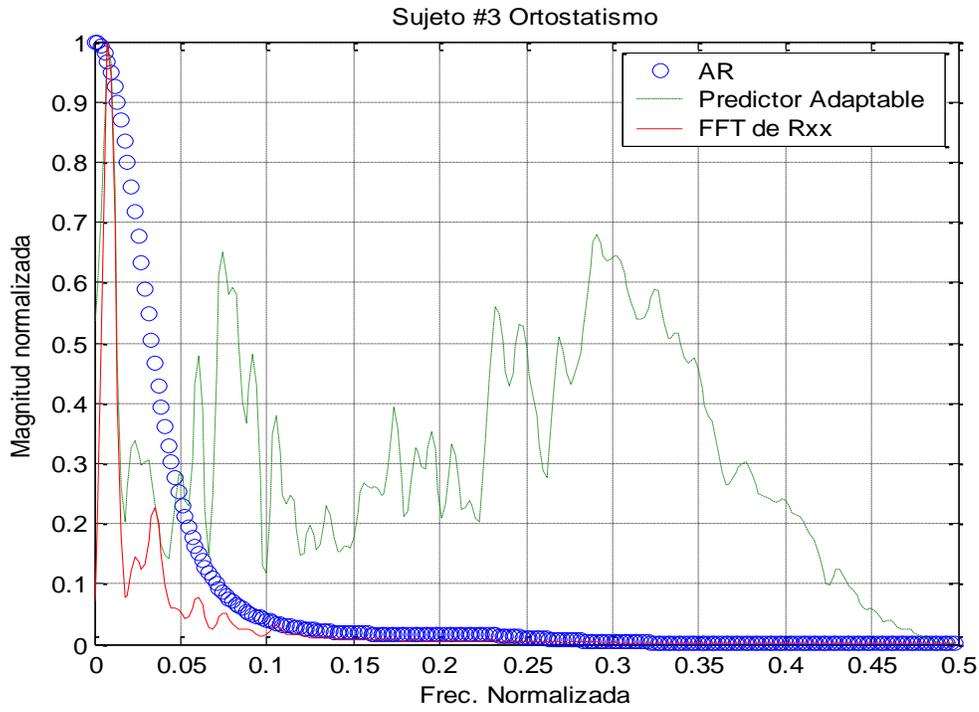


Fig. A.2.6 Sujeto #3 Ortostatismo.

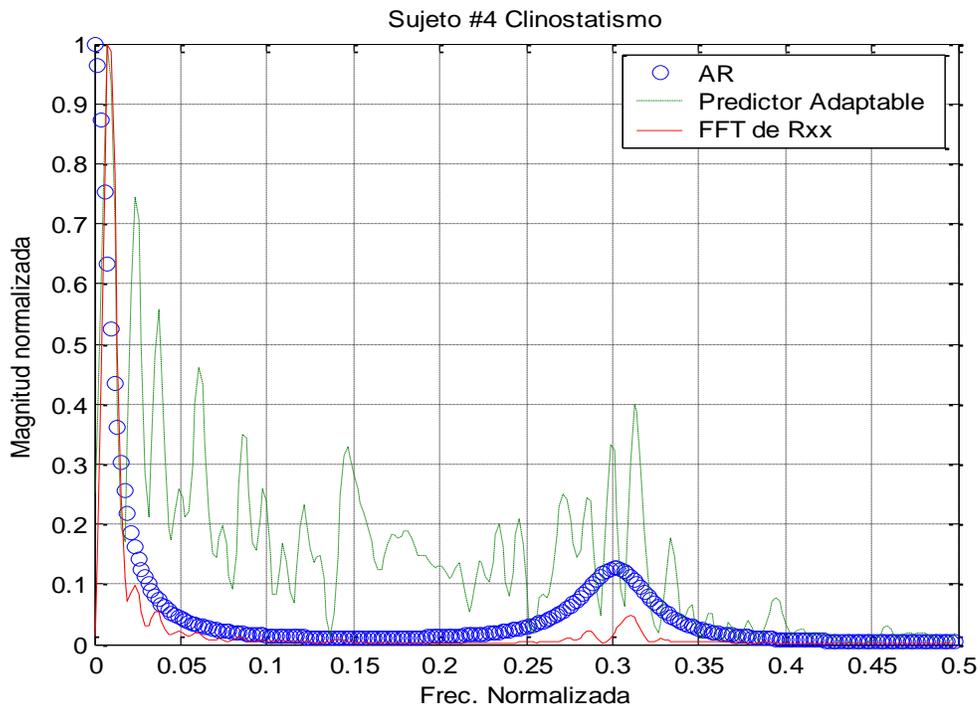


Fig. A.2.7 Sujeto #4 Clinostatismo.

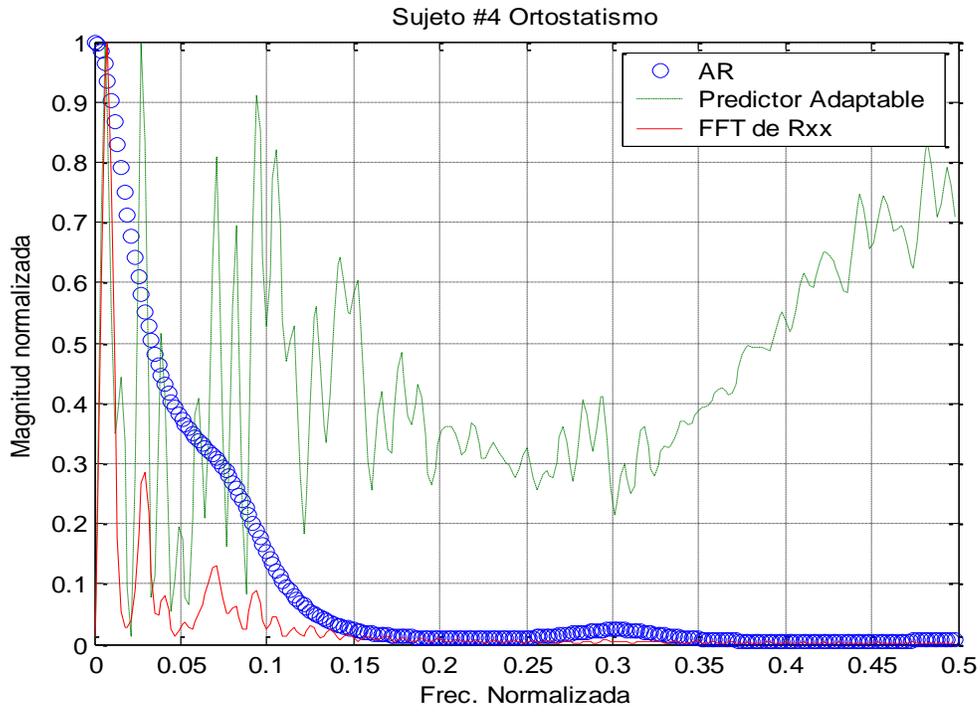


Fig. A.2.8 Sujeto #4 Ortostatismo.

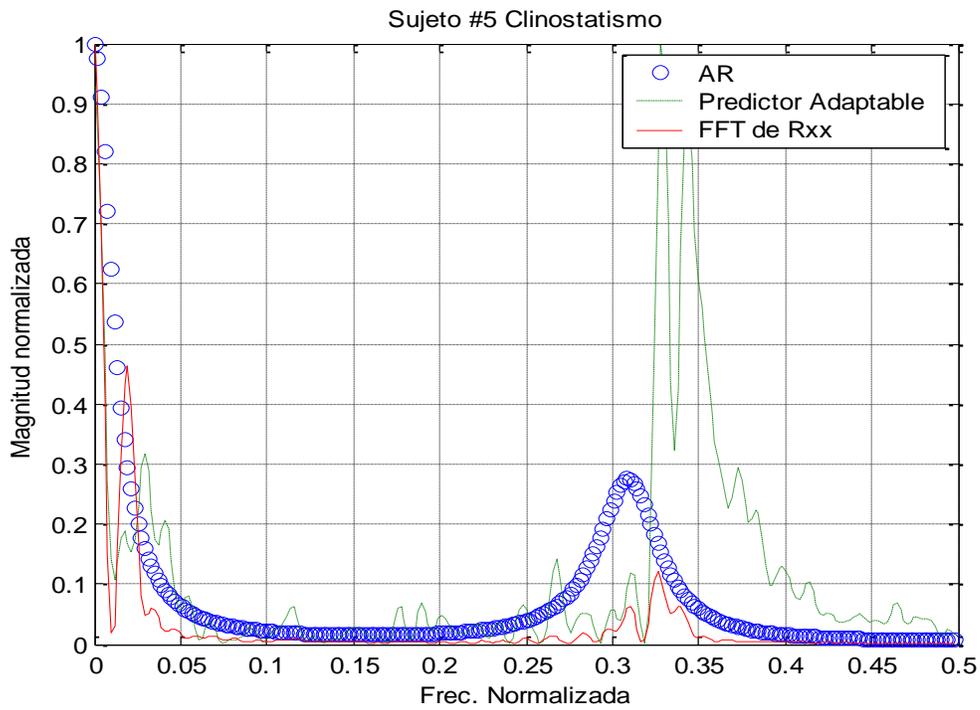


Fig. A.2.9 Sujeto #5 Clinostatismo.

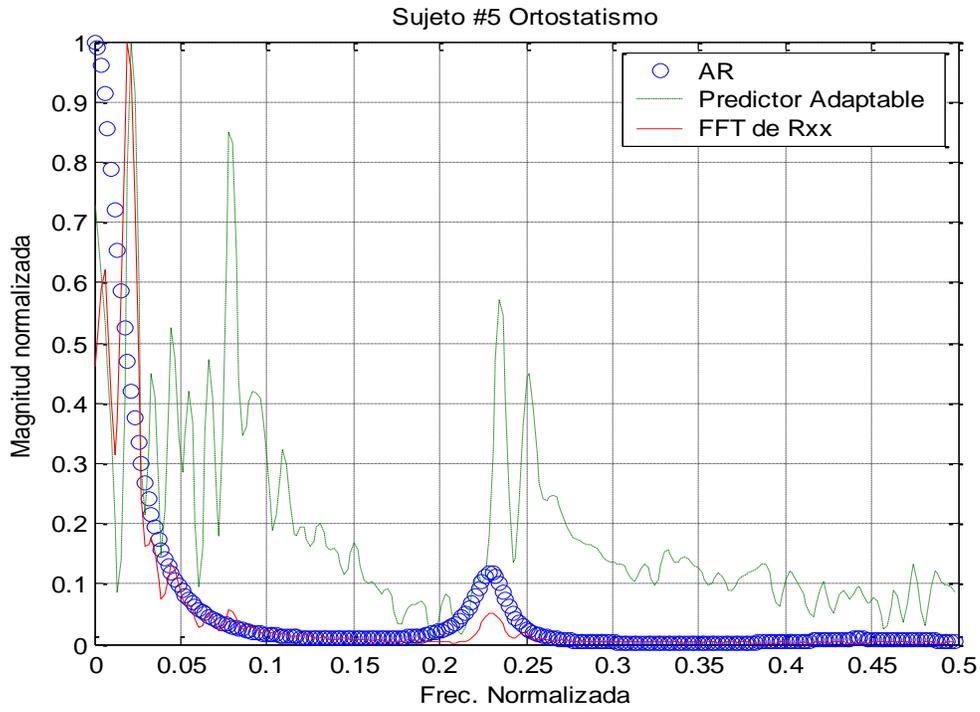


Fig. A.2.10 Sujeto #5 Ortostatismo.

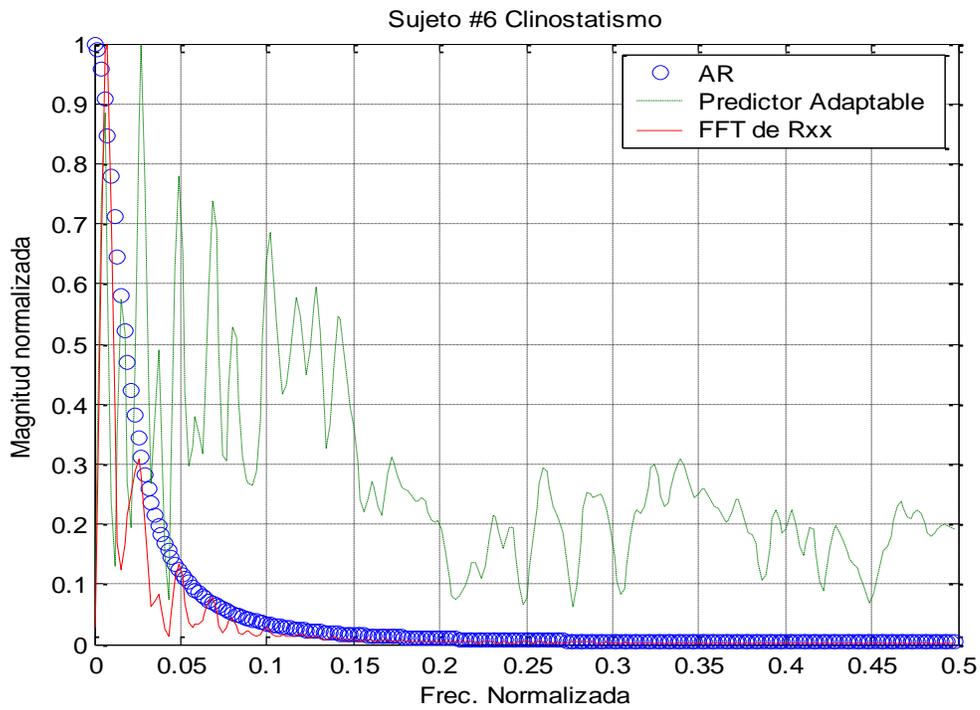


Fig. A.2.11 Sujeto #6 Clinostatismo.

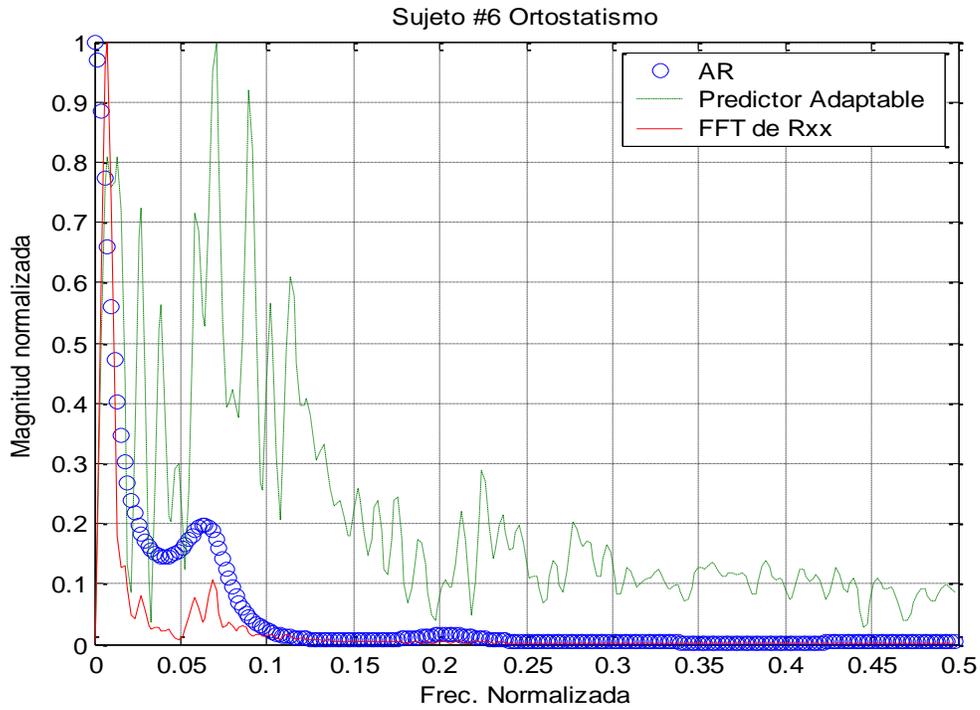


Fig. A.2.12 Sujeto #6 Ortostatismo.

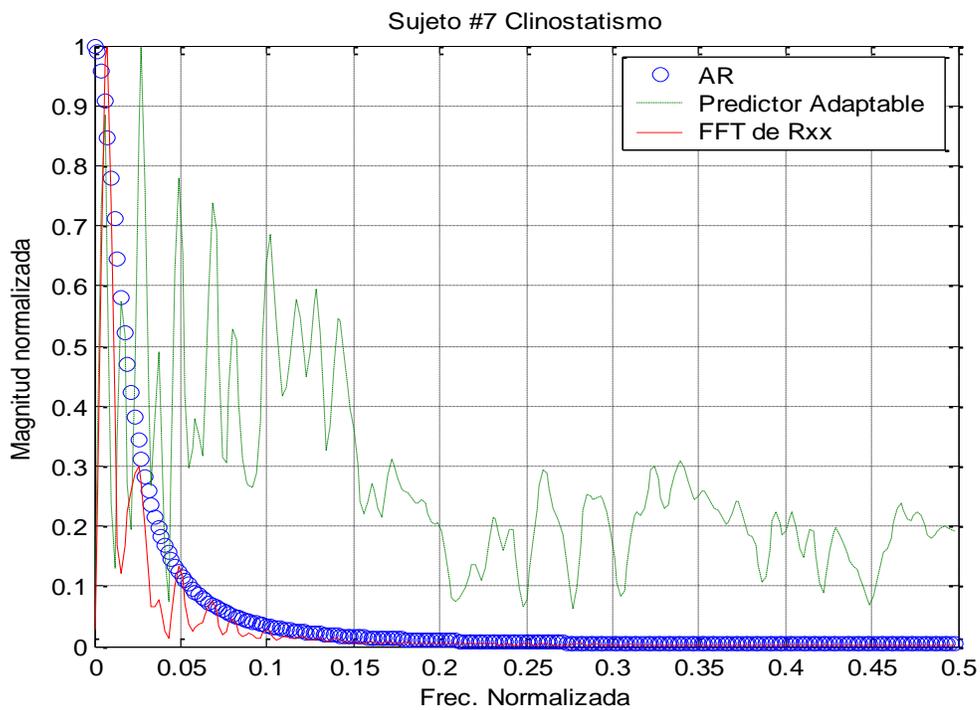


Fig. A.2.13 Sujeto #7 Clinostatismo.

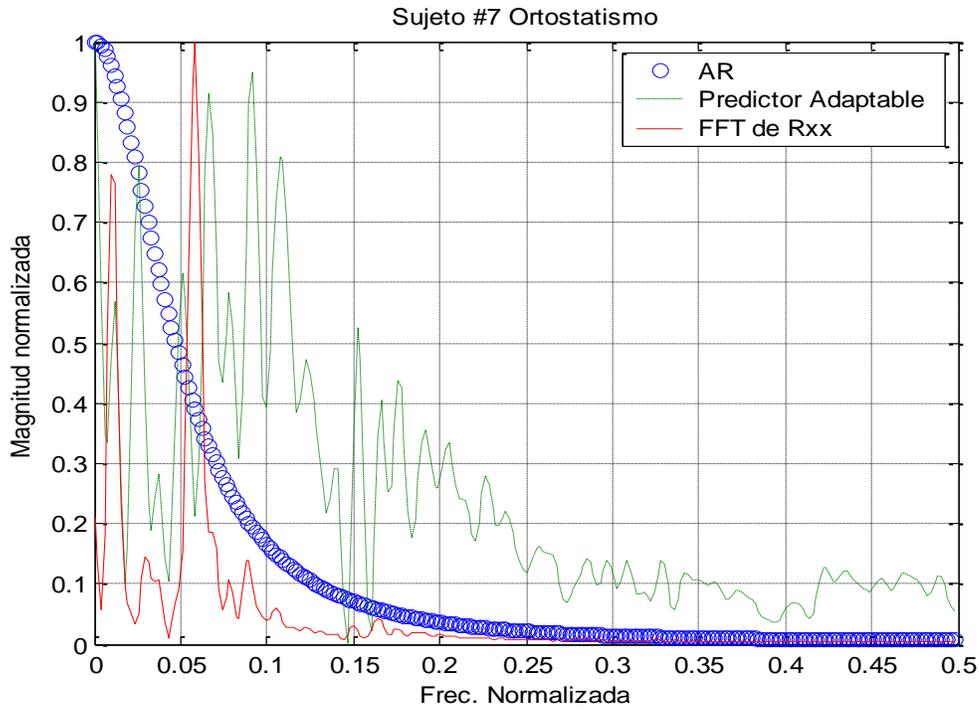


Fig. A.2.14 Sujeto #7 Ortostatismo.

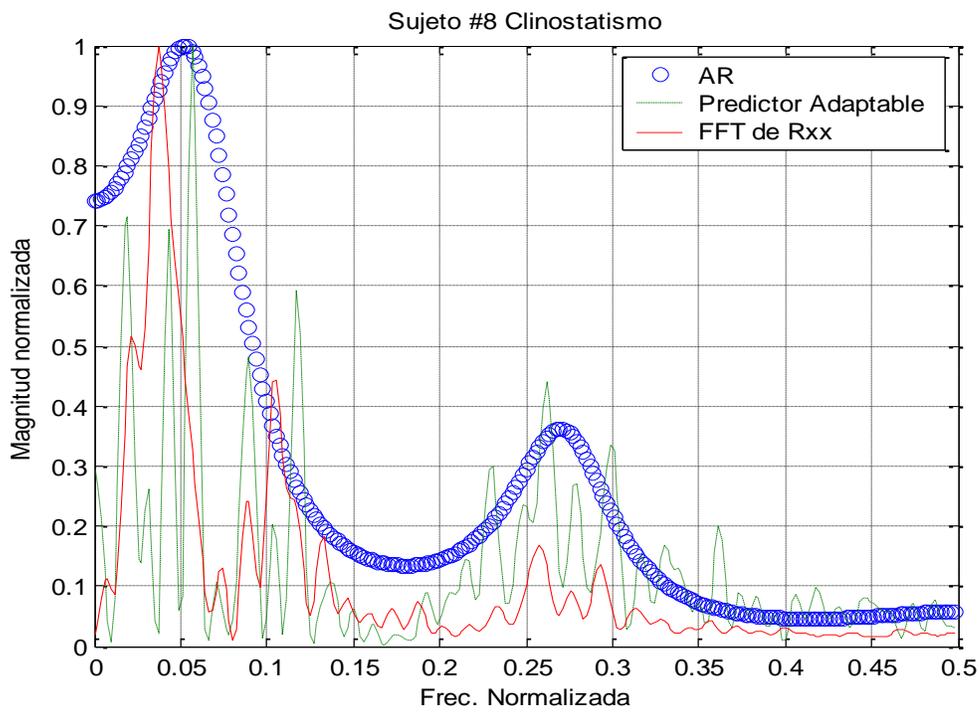


Fig. A.2.15 Sujeto #8 Clinostatismo.

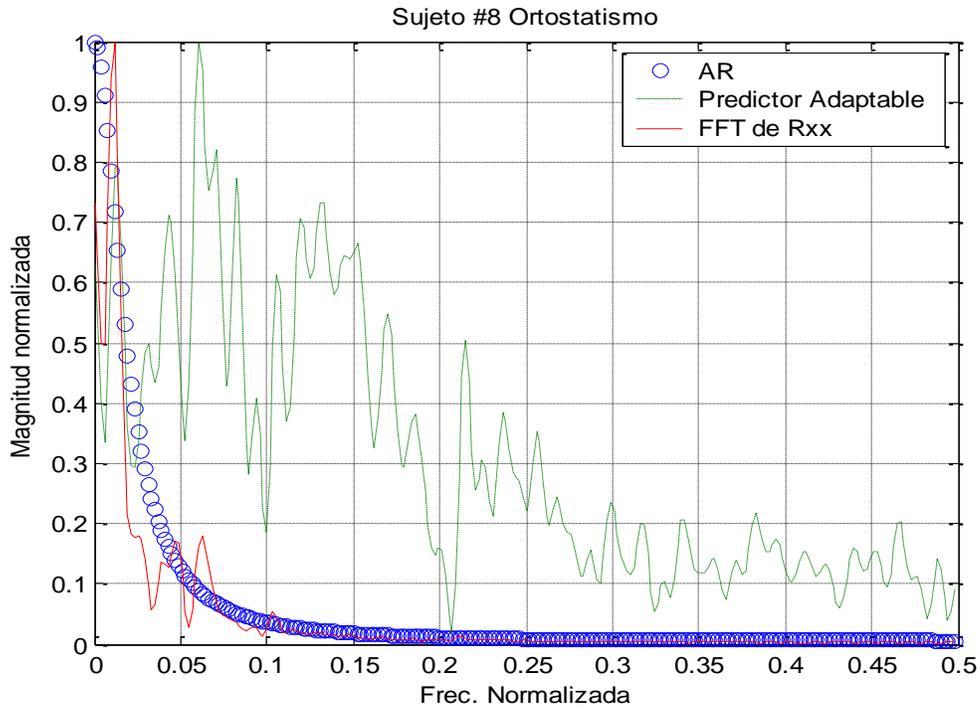


Fig. A.2.16 Sujeto #8 Ortostatismo.

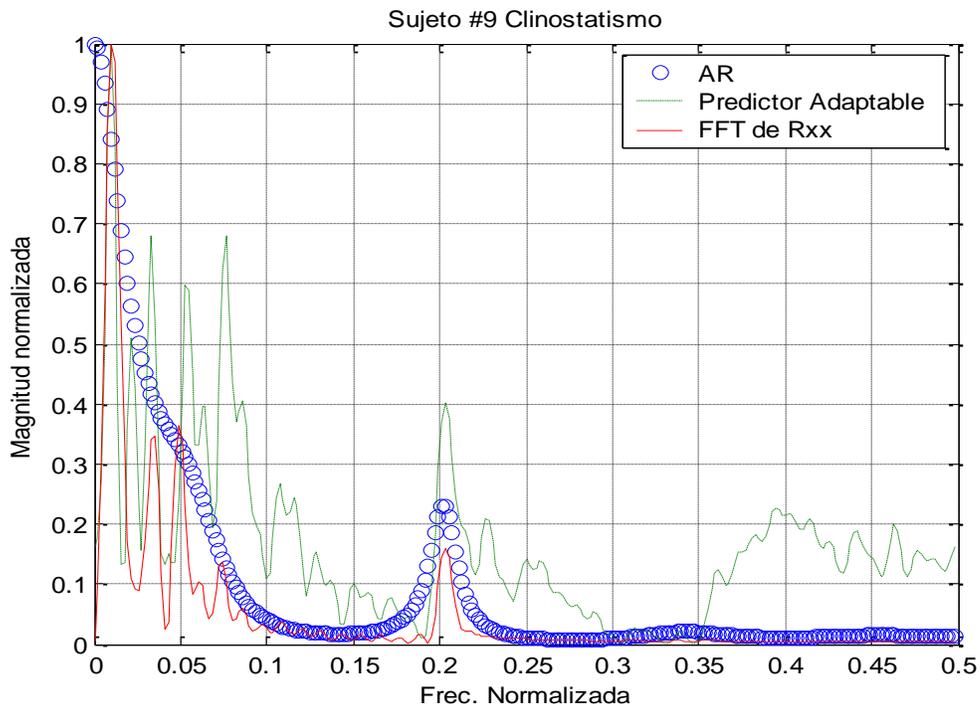


Fig. A.2.17 Sujeto #9 Clinostatismo.

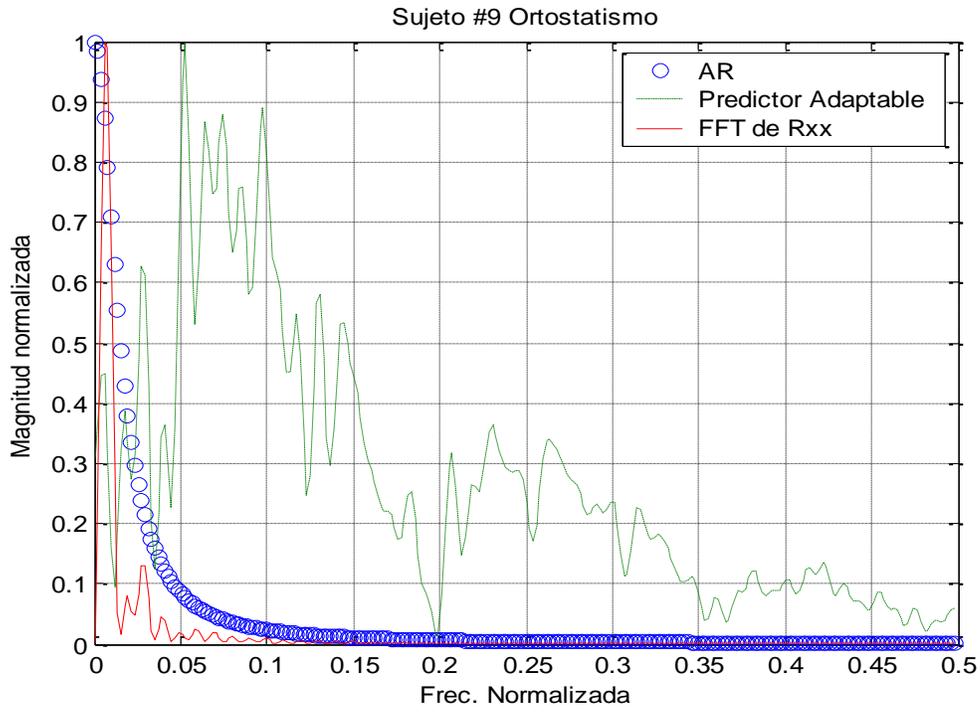


Fig. A.2.18 Sujeto #9 Ortostatismo.

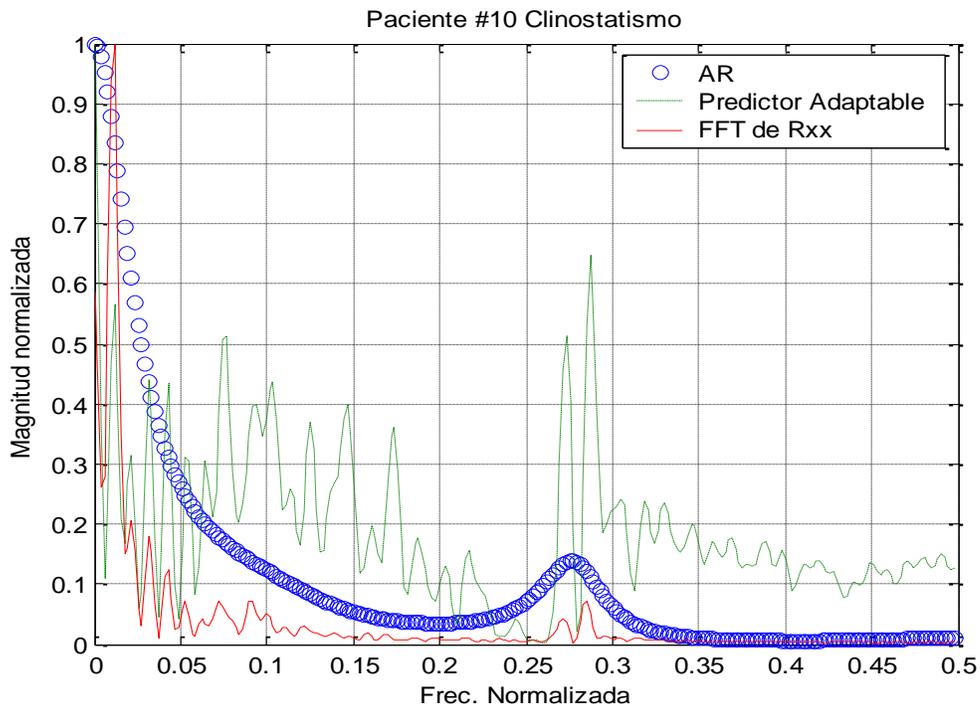


Fig. A.2.19 Sujeto #10 Clinostatismo.

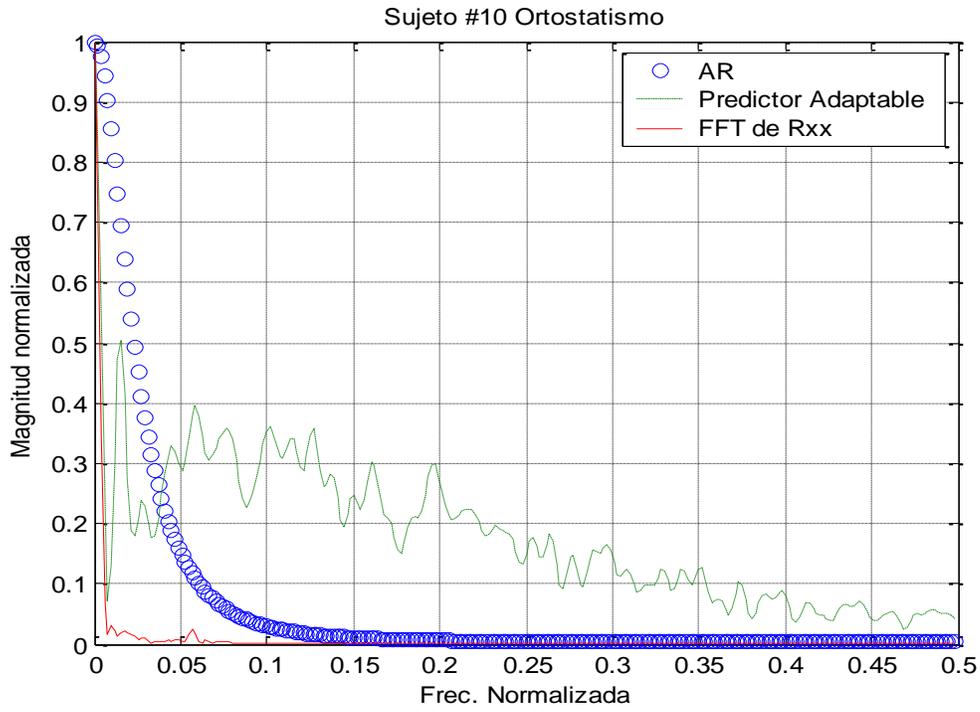


Fig. A.2.20 Sujeto #10 Ortostatismo.

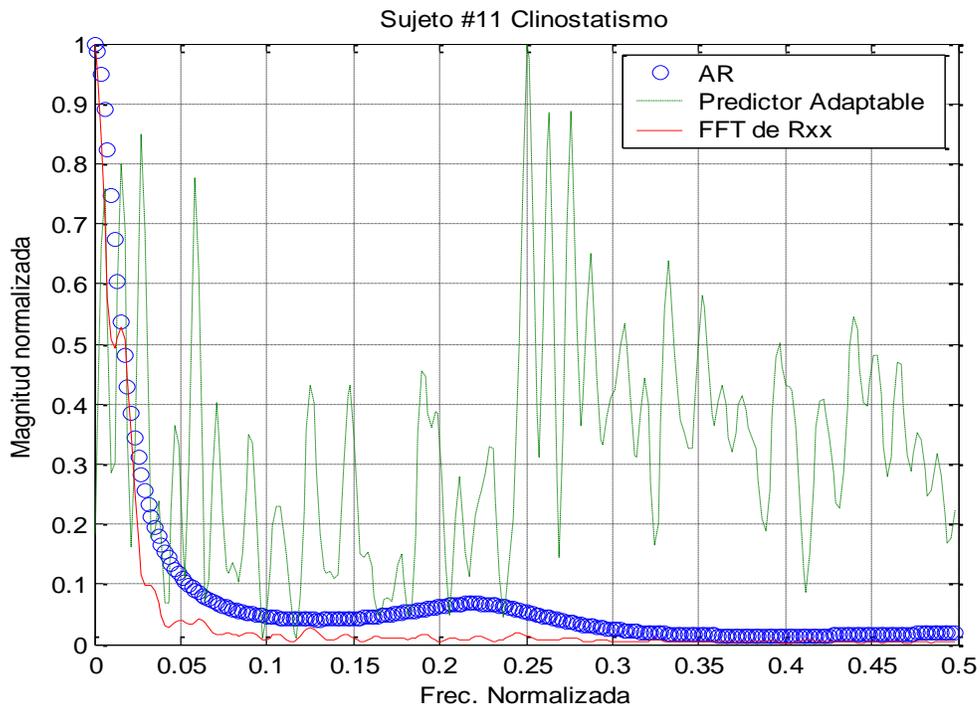


Fig. A.2.21 Sujeto #11 Clinostatismo.

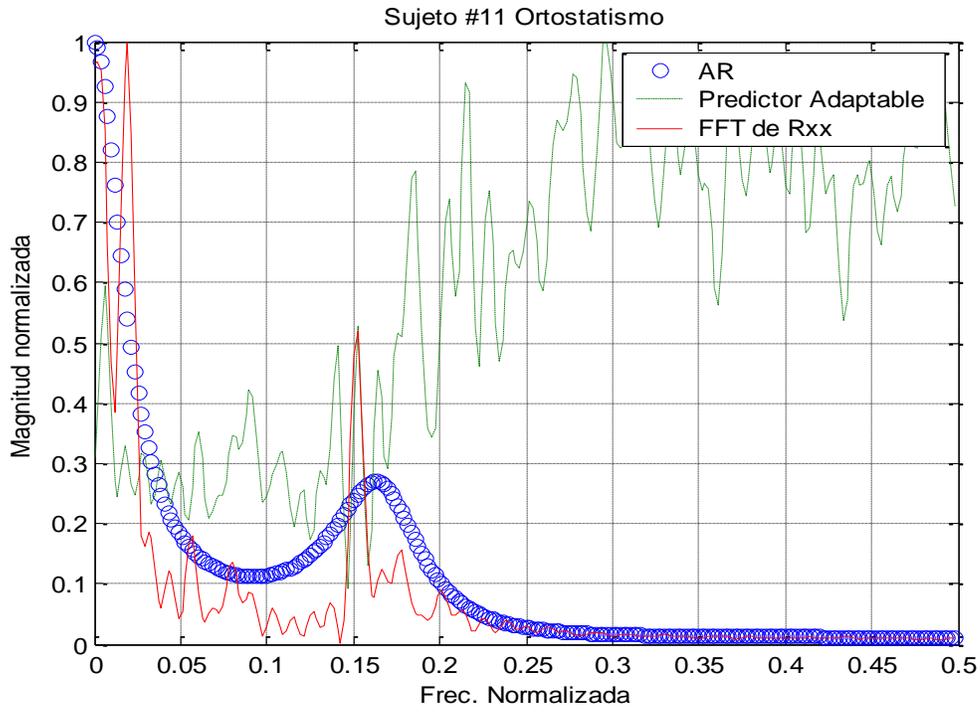


Fig. A.2.22 Sujeto #11 Ortostatismo.

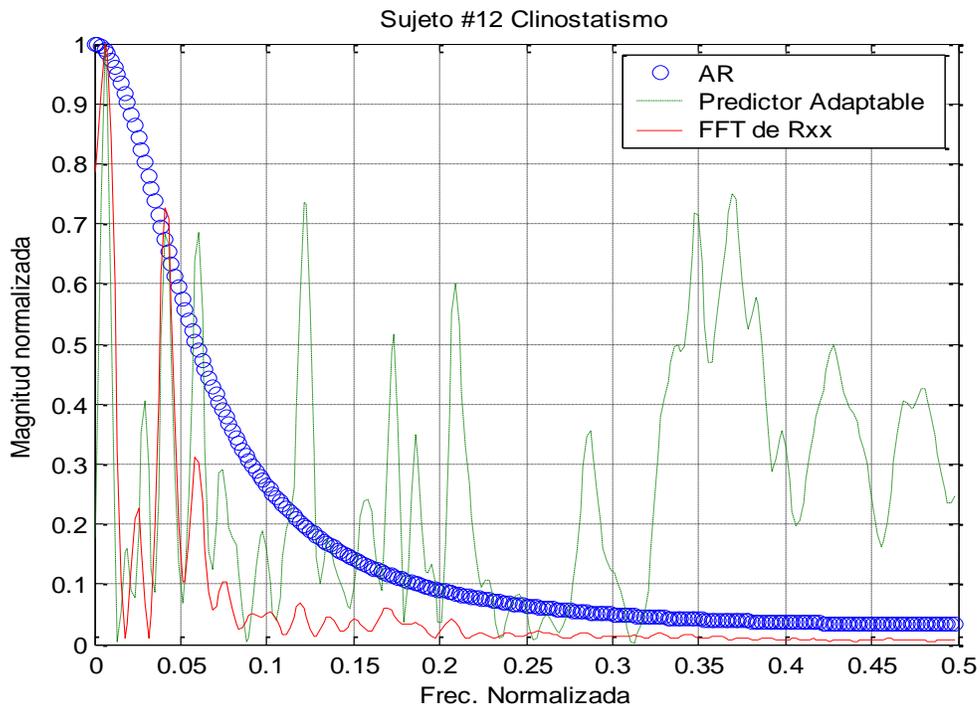


Fig. A.2.23 Sujeto #12 Clinostatismo.

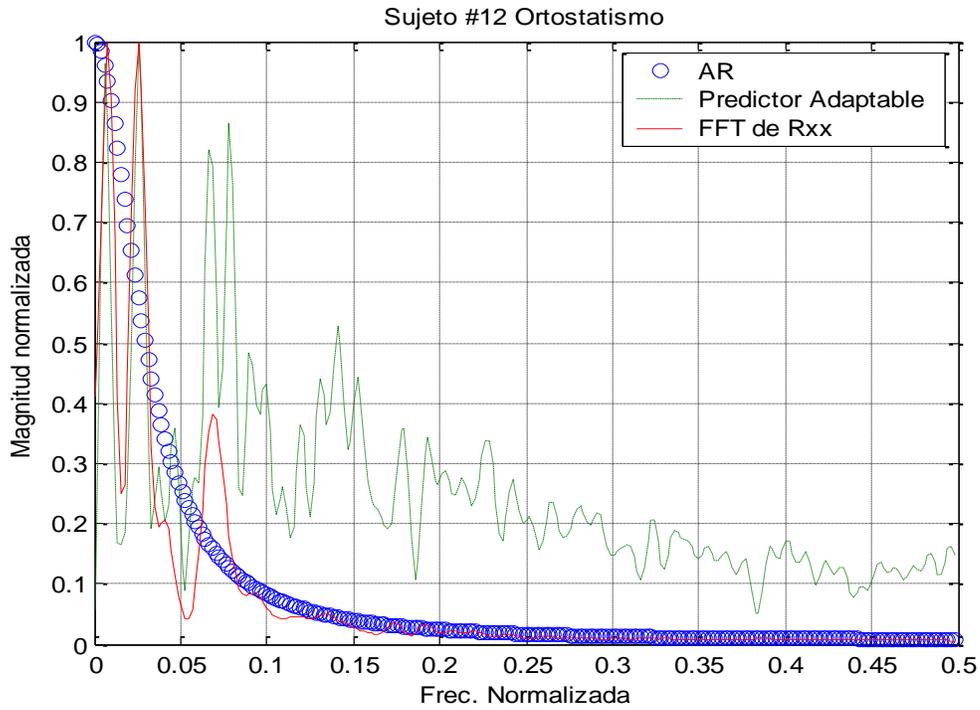


Fig. A.2.24 Sujeto #12 Ortostatismo

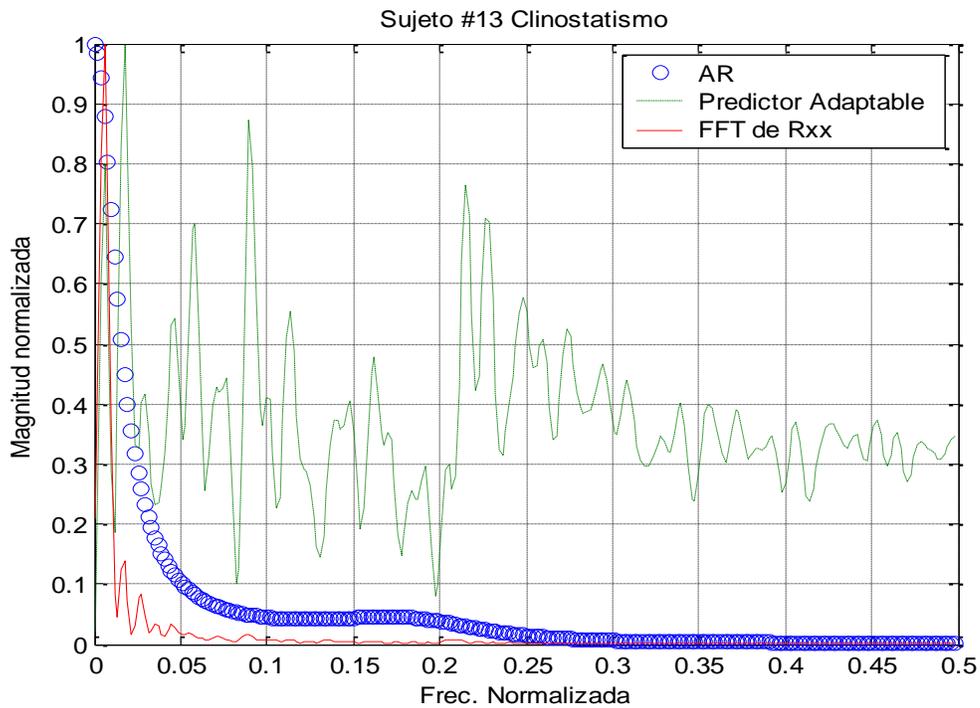


Fig. A.2.25 Sujeto #13 Clinostatismo.

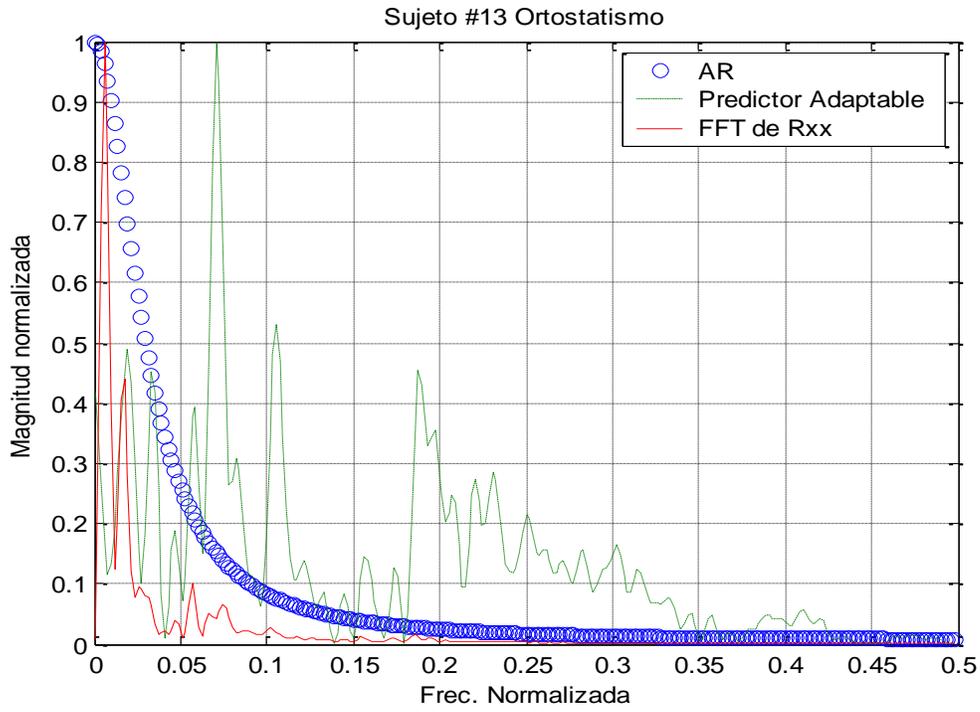


Fig. A.2.26 Sujeto #13 Ortostatismo

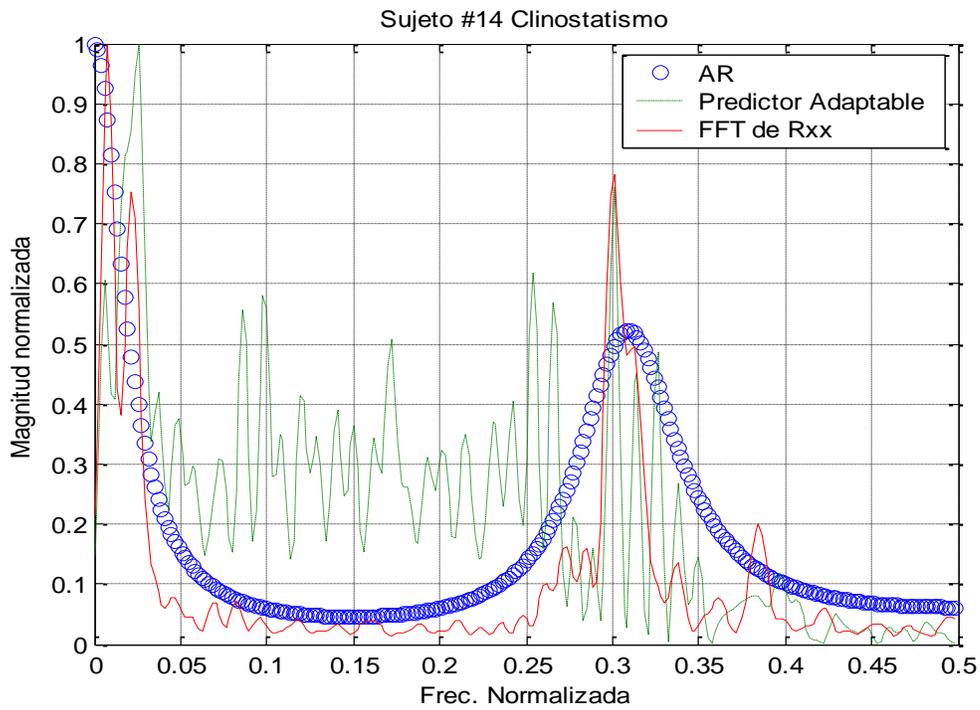


Fig. A.2.27 Sujeto #14 Clinostatismo.

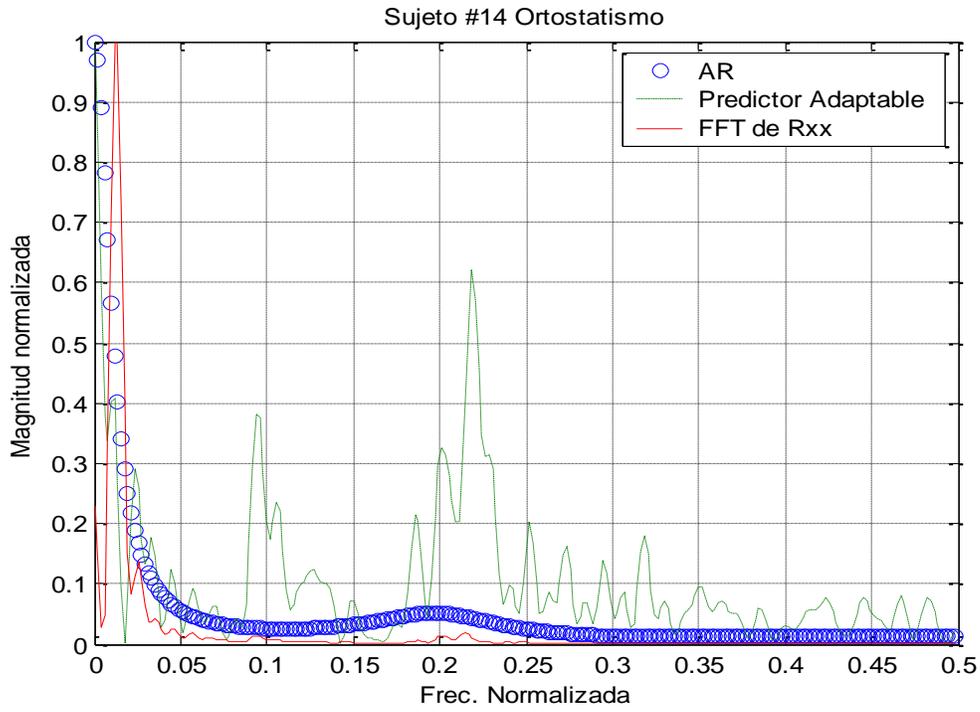


Fig. A.2.28 Sujeto #14 Ortostatismo.

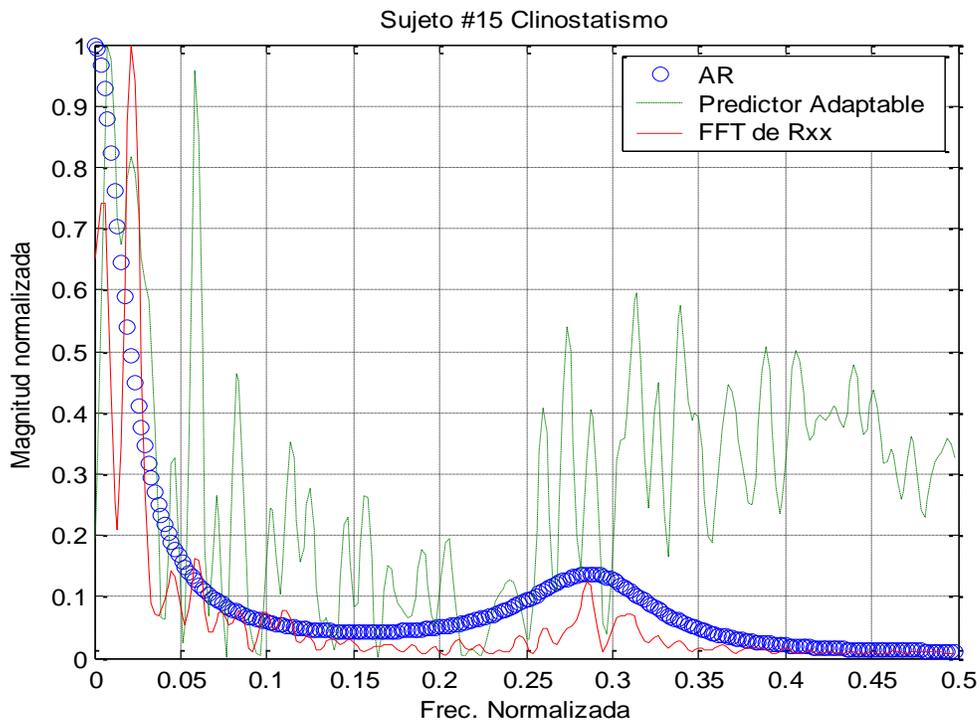


Fig. A.2.29 Sujeto #15 Clinostatismo.

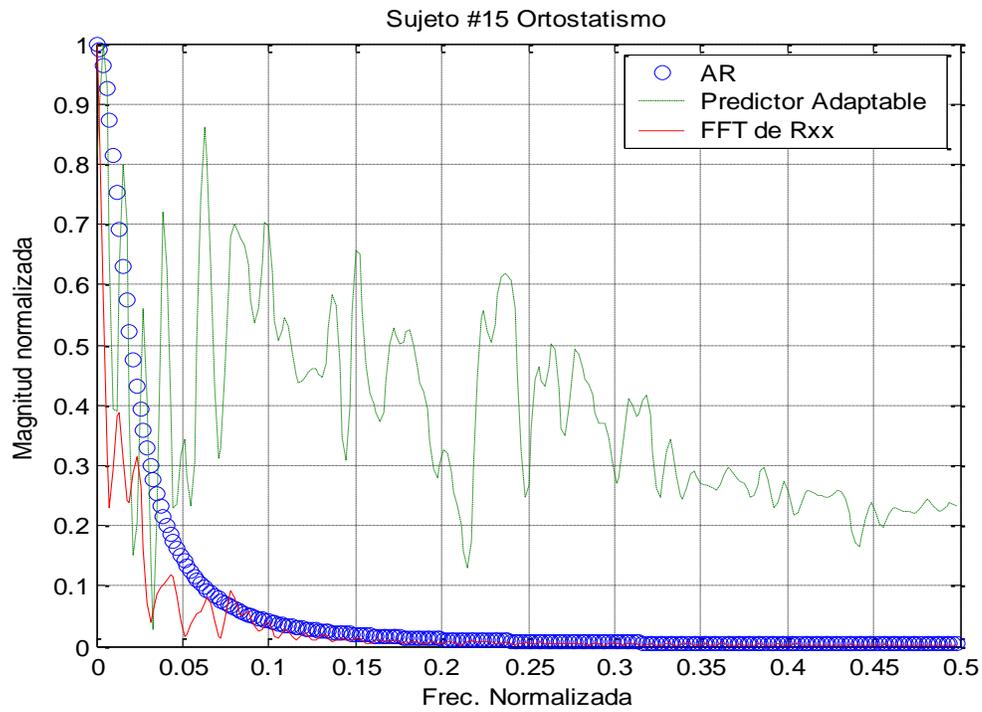


Fig. A.2.30 Sujeto #15 Ortostatismo

**Referencias y Bibliografías.**

- [1] Monson Hayes, **Statistical Signal Processing and Modeling**, Prentice Hall,
- [2] John G. Proakis, Charles M. Rader, Fuyun Ling, Chrysostomos L. Nikias, Marc Mooner, Ian K. Proudler, **Algorithms for Statistical Signal Processing**, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [3] Sen M. Kuo, Bob H. Lee, and Wenshun Tian, **Real-Time Digital Signal Processing: Implementations and Applications**, Wiley
- [4] Simon Haykin, **Adaptive filter Theory**, Prentice Hall
- [5] Cristhian Quiroz, **Aplicaciones del Modelo Autorregresivo y del Algoritmo Prony**, Tesis de Maestría en Ciencias, CITEDI, 2002.
- [6] Juan García López, **Procesamiento Digital de Señales**, Colección CITEDI
- [7] Leif Sörnmo y Pablo Laguna, **Bioelectrical Signal Processing in Cardiac and Neurological Applications**, Elsevier Academic Press, 2005.
- [8] Cesar Ortega, **Aplicaciones de Filtrado Digital Adaptable**, Tesis de Maestría en Ciencias, CITEDI, 2001.
- [9] Claudia Lerma González, Oscar Infante Vázquez y Marco V. José, “**Sistema de Captura Y Análisis de la Onda del Pulso Arterial Y de la Frecuencia Cardíaca**” Grupo de Biología Teórica, Instituto de Investigaciones Biomédicas, UNAM. Departamento de Instrumentación Electromecánica, Instituto Nacional de Cardiología “Ignacio Chávez”.ELECTRO 2002.
- [10] Claudia Lerma González, Oscar Infante Vázquez y Marco V. José, “**Sistema de Análisis de la Variabilidad de la Frecuencia Cardíaca**” Grupo de Biología Teórica, Instituto de Investigaciones Biomédicas, UNAM. Departamento de Instrumentación Electromecánica, Instituto Nacional de Cardiología “Ignacio Chávez”.
- [11] José Jaime Esqueda, “**Sistema de monitoreo cardíaco experimental**”, ENINVIE 2007, Zacatecas.
- [12] G. E. P. Box and G. M. Jenkins, “**Time series Analysis Forecasting and Control**”, Oakland: Holden-Day Inc., 1976, pp. 23-45
- [13] Task Force of The European Society of Cardiology and The North American Society of Pacing and Electrophysiology, “**Heart Rate Variability. Standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use**”. European Heart Journal, 1996; 17:354-381.

[14] Miguel Ángel García González, **Estudio de la Variabilidad del Ritmo Cardíaco Mediante Técnicas Estadísticas, Espectrales y No Lineales**, Tesis Doctoral, UPC, 1998

[15] Iliana Cabrera Rojo, Anastasio Cabrera Santos y Gerardo Gallardo Montes de Oca **“Variabilidad de la frecuencia cardíaca en el joven normal”**, Hospital Universitario "General Calixto García". Instituto de Cardiología y Cirugía Cardiovascular.

[16] John D. and Catherine T. Mac Arthur Research Network on Socioeconomic Status and Health **“Heart Rate Variability”**.

[17] Departamento de Matemáticas, CSI/ITESM, **“Rango de una Matriz”**, 2008.

[18] Dr. Luis Higgins, **Grafica del Potencial de Acción de la Célula Contráctil Miocárdica Ventricular**.

<http://www.anestesia.com.mx/pav.gif>

[19] Guyton y Hall, **Tratado de Fisiología Medica**, 10ma Edicion, McGraw Hill

[20] Texas Heart Institute, Centro de Información Cardiovascular, **Imagen de las Aurículas y Ventrículos del Corazón**.

[http://www.texasheartinstitute.org/HIC/Topics\\_Esp/Cond/myocard\\_sp.cfm](http://www.texasheartinstitute.org/HIC/Topics_Esp/Cond/myocard_sp.cfm)

[21] Wikipedia.org, **Imagen del Ciclo Cardíaco**

[http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Cardiac\\_Cycle\\_Left\\_Ventricle.PNG](http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Cardiac_Cycle_Left_Ventricle.PNG)

Licencia de distribución: <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/>

[22] [www.cladead.org](http://www.cladead.org), Análisis del Electrocardiograma, **Traza del ECG en papel de registro eletrocardiográfico**

<http://www.cladead.com/cursos/MVETE/MVETE-000005/images/electr2.jpg>

[23] PC-ECG Cardiax

<http://www.mesamed.de/en/pc-ekg.php>

[24] Texas Heart Institute, Centro de Información Cardiovascular,

[http://www.texasheartinstitute.org/HIC/Anatomy\\_Esp/images/cond\\_sp.jpg](http://www.texasheartinstitute.org/HIC/Anatomy_Esp/images/cond_sp.jpg)