

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS



**EFFECTOS DE LAS INTERACCIONES FONÓNICAS Y EL
DEFASAMIENTO EN LA COHERENCIA DE ESTADOS OSCUROS
EN SISTEMAS CUÁDRUPLES DE PUNTOS CUÁNTICOS**

TESIS

que para obtener el título de

FÍSICO

Presenta:

RAÚL ANTONIO ALVARADO AGUILERA

Ensenada, Baja California, México, 30 de marzo de 2023



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS,
CAMPUS ENSENADA.



“Efectos de las interacciones fonónicas y el desfaseamiento en la coherencia de estados oscuros en sistemas cuádruples de puntos cuánticos”

TESIS

PARA CUBRIR LOS REQUISITOS NECESARIOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Licenciado en Física


PRESENTA


Raúl Antonio Alvarado Aguilera



337958

A quien el Comité de Tesis autoriza el trabajo terminal y de acuerdo con el Art. 19 del R.G.E.P.E.P, emite los siguientes votos aprobatorios mediante rubrica:


Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar
DIRECTOR


Dr. Roberto Romo Martínez
SINODAL


Dr. Ramón Carrillo Bastos
SINODAL


Dr. Fernando Rojas Íñiguez
CODIRECTOR

Dra. Priscilla Elizabeth Iglesias Vázquez
SINODAL

“Por la Realización Plena del Ser”

RESUMEN de la tesis que como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Física presenta **RAÚL ANTONIO ALVARADO AGUILERA**. Ensenada, Baja California, México, 30 de marzo de 2023.

**EFFECTOS DE LAS INTERACCIONES FONÓNICAS Y EL
DESFAZAMIENTO EN LA COHERENCIA DE ESTADOS OSCUROS
EN SISTEMAS CUÁDRUPLES DE PUNTOS CUÁNTICOS**

Resumen aprobado por:

Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar

Codirector de Tesis

Dr. Fernando Rojas Íñiguez

Codirector de Tesis

Con base en el enfoque de la ecuación maestra de Lindblad en el régimen estacionario, exploramos y clasificamos los estados oscuros para un sistema de cuatro puntos cuánticos en una configuración cuadrangular que incluye tuneleos en paralelo. En particular, demostramos que existen diversas combinaciones específicas de las energías de los sitios y los tuneleos que dan lugar a configuraciones en las que ocurre un *estado oscuro*, esto mediante un análisis de las propiedades del espectro del hamiltoniano y la ecuación estacionaria para el Lindbladiano del sistema. También obtenemos expresiones analíticas para la corriente electrónica en sistemas de tres y cuatro puntos cuánticos abiertos, y el estudio de ésta revela que la coherencia de los estados oscuros se destruye por el desfase aplicado en los puntos y entre los sitios de estos esto si se toman las interacciones como casos separados. Sin embargo, descubrimos que una combinación específica de interacciones por desfase, tanto aplicadas a los puntos cuánticos como entre los sitios, restaura la coherencia del sistema. Lo anterior permite la existencia de un estado oscuro. Además, se investigó el comportamiento de la corriente en los sistemas previamente mencionados con $N - 1$ interacciones fonónicas con un medio térmico disipativo. Este análisis permitió encontrar las condiciones específicas que los parámetros de intensidad fonónica deben cumplir para garantizar la preservación del estado oscuro. En este caso, la transformación de polarón y las trazas en los estados de oscilador simplifican enormemente la solución del problema. Todo esto permite encontrar los parámetros necesarios para garantizar la existencia del estado oscuro en sistemas de tres y cuatro puntos cuánticos, con desfase in situ y entre sitios, sin considerar explícitamente la intersección fonónica en el problema.

Palabras Clave: Estados oscuros, desfase, cuádruple punto cuántico.

ABSTRACT of the thesis that as a partial fulfillment for obtaining the B.S. in Physics presents **RAÚL ANTONIO ALVARADO AGUILERA**. Ensenada, Baja California, México, March 30, 2023.

**EFFECTS OF PHONONIC INTERACTIONS AND DEPHASING ON
THE COHERENCE OF DARK STATES IN QUADRUPLE QUANTUM
DOT SYSTEMS**

Approved by:

Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar

Thesis Advisor

Dr. Fernando Rojas Íñiguez

Thesis Advisor

Based on the Lindblad master equation approach in the stationary regime, we explore and classify the dark states for a system of four quantum dots in a quadrangular configuration that includes parallel tunneling. In particular, by studying the properties of the Hamiltonian spectrum and the stationary equation for the Lindbladian of the system, we show that specific combinations of the site energies and tunnelings yield configurations where a dark state occurs. Also, we obtain analytical expressions for the electronic current in the quadruple quantum dot open system, and the study reveals that the coherence of dark states is destroyed by localized dephasing in the dots and between the dot sites, assuming the interactions are considered as separate cases. However, we discovered that a specific combination of dephasing interactions, applied both to the quantum dots and between their sites, restores the system's coherence. This, in turn, allows the existence of a dark state. Furthermore, we investigated the behavior of the current in the aforementioned systems under $N - 1$ phononic interactions with a dissipative thermal bath. This analysis enabled us to identify the specific conditions that the phonon intensity parameters must meet to ensure the preservation of the dark state. In the latter, the polaron transformation and the traces on oscillator states greatly simplify the solution to the problem. All of this enables the finding of the required parameters to guarantee the existence of the dark state in systems of three and four quantum dots, with on-site dephasing and between sites, without explicitly considering the phononic intersection in the problem.

Keywords: dark states, entanglement, quadruple quantum dots

A mis padres, Sergio y María, por proveerme con su esfuerzo y dedicación de las herramientas necesarias para forjar mi propio camino y a mi compañera de vida, Michelle, por recorrer a mi lado solemnemente dicho camino.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar al Centro de Nanociencias y Nanotecnologías (CNyN, México) por la ayuda económica brindada para la realización del proyecto presentado en la presente tesis.

Así mismo quisiera agradecer a mis directores de tesis, Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar y Dr. Fernando Rojas Íñiguez por todas y cada una de las pláticas, que con todos sus conocimientos, consejos y correcciones dieron vida a la presente tesis.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
I. INTRODUCCIÓN	1
II. MARCO TEÓRICO	13
II.1 Matriz de densidad	13
II.2 Representaciones de la Mecánica Cuántica	15
II.2.1 Representación de Schrödinger y Heisenberg	15
II.2.2 Esquema de Interacción	17
II.3 Sistemas Abiertos	18
II.3.1 Ecuación Maestra	19
III. RESULTADOS	25
III.1 Aspectos Generales de los Puntos Cuánticos	26
III.2 Aspectos generales de los Estados Oscuros	28
III.2.1 Aspectos generales del Desfasamiento	29
III.2.2 Aspectos generales sobre interacción <i>electrón-fonón</i> en puntos cuánticos	29
III.2.3 Estados oscuros en el sistema de tres puntos cuánticos	30
III.2.4 Configuración de Cuatro Puntos Cuánticos	36
III.2.5 Configuración de Cuatro Puntos Cuánticos sin tuneleo en par- alelo	38
III.2.6 Cuatro puntos cuánticos con tuneleos generalizados sin tuneleo en paralelo ($t_p = 0$)	40
III.2.7 Detuning $\Delta = \omega \neq 0$	44
III.2.8 Configuración con Tuneleo en Paralelo	49
III.2.9 Detuning $\Delta = \omega$	54
III.2.10 Desfasamiento	58
III.2.11 Interacción Fonónica	62
IV. CONCLUSIONES	69

Contenido (continuación)

	Página
REFERENCIAS	71
A. Sistemas abiertos	74
B. Transformación de Polarón	77

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Ley de Moore	2
2	Esquematación de un punto cuántico conectado a una fuente y un sumidero	4
3	Forma esquematizada de un punto cuántico.	5
4	Puntos cuánticos laterales definidos de manera electrostática	6
5	Imagen AFM de un doble punto cuántico conectado en serie	7
6	Triple punto cuántico lateral	9
7	Cuádruple punto cuántico lateral	11
8	Sistema de tres puntos cuánticos en configuración triangular	27
9	Sistema de triple punto cuántico acoplado a una fuente y un sumidero con energías de sitio	31
10	Corriente estacionaria en un sistema de TPC en una configuración triangular para distintos valores de los tuneleos t_{ij}	32
11	Corriente estacionaria en un sistema de tres puntos cuánticos para distintos valores de la intensidad de interacción fonónica	33
12	Esquema de las distintas configuraciones simétricas de los tuneleos para la búsqueda de las condiciones para la formación de los estados oscuros en un CPC.	37
13	Configuración del sistema para el caso de Sheng	38
14	Corriente Caso Sheng	39
15	Corriente con simetrías laterales	42
16	Corriente con simetría en tuneleos superiores e inferiores	43
17	Corriente estacionaria con simetría en las diagonales	44
18	Corriente estacionaria con las energías de sitio relacionadas y simetría en tuneleos laterales	46
19	Corriente estacionaria con simetría en tuneleos superior e inferior	47
20	Esquema con tuneleo diagonal nulo	48

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
21	Corriente estacionaria con las energías de sitio relacionadas en simetría de tuneleos diagonales	49
22	Configuración de punto cuántico colgante obtenida haciendo $t_D = 0$. .	52
23	Corriente estacionaria en configuración de simetría en tuneleos superior e inferior en paralelo	53
24	Corriente como función de ω para una configuración de simetrías en diagonal y tuneleo en paralelo	54
25	Corriente estacionaria con tuneleos laterales	56
26	Corriente en simetría superior e inferior	58
27	Corriente estacionaria como función de ω en configuración de simetría en tuneleos diagonales	59
28	Destrucción de la coherencia debido a las distintas configuraciones de desfaseamiento	62
29	Recuperación de la coherencia utilizando la configuración propuesta de desfaseamientos en sitio e interdot, se utilizó $t_L = 0.6$, $t_R = 0.7$ y $t_p = 0.4$, el estado oscuro se recupera con $\omega = -t_p$	63
30	Corriente estacionaria como función del parámetro de sitio $\epsilon_2 = \omega$. . .	66
31	Corriente estacionaria como función del parámetro de sitio $\epsilon_2 = \omega$	68

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

La electrónica basa sus principios en implementar circuitos que manejan información mediante bits. Los bits definen una unidad fundamental, y son representados por ceros y unos asociados a la ausencia o existencia de carga eléctrica. Con base en esto, el poder de la electrónica radica en el uso de una mayor cantidad de portadores de carga en el menor espacio posible. De este modo es posible realizar un mayor número de operaciones binarias al mismo tiempo. Desde mediados del siglo pasado, la tendencia del crecimiento del poder de los dispositivos electrónicos ha sido dictada por la ley de Moore, la cual establece que el poder de los microprocesadores se duplicará cada dos años (ver figura 1). Además, los transistores tienen una propiedad muy peculiar, que se basa en que a medida de que se reduce su tamaño, estos resultan ser más eficientes, debido a que se requiere menor energía para mantenerlos encendidos. Es es decir, con la misma cantidad de energía es posible mantener encendidos una mayor cantidad de transistores más pequeños. Sin embargo, la Ley de Moore está llegando a una saturación debido a que la miniaturización de los dispositivos electrónicos y de sus componentes tiene un límite dictado por la nanoescala. Por ejemplo, los transistores del chip *SkyLake* son del orden de 100 átomos, lo que nos da una idea de la pequeñez de estos dispositivos. Entre menos átomos se tengan, resulta más complicada la manipulación de los bits electrónicos. En este sentido, podemos decir que la electrónica convencional está llegando al final de su camino. Es por esto que para incrementar la multifuncionalidad de los dispositivos (por ejemplo, el procesamiento y almacenamiento de la información en el mismo chip) los investigadores se han dado a la tarea de explotar otras propiedades

de los electrones y desarrollar el campo conocido como la *nanoelectrónica* (Mitin *et al.*, 2008b). La *nanoelectrónica* es quien se encarga de utilizar las herramientas necesarias para estudiar las propiedades de los materiales a escalas nanométricas (entre 1 y 100 nanómetros) y las leyes que rigen dichos sistemas son las de la mecánica cuántica.

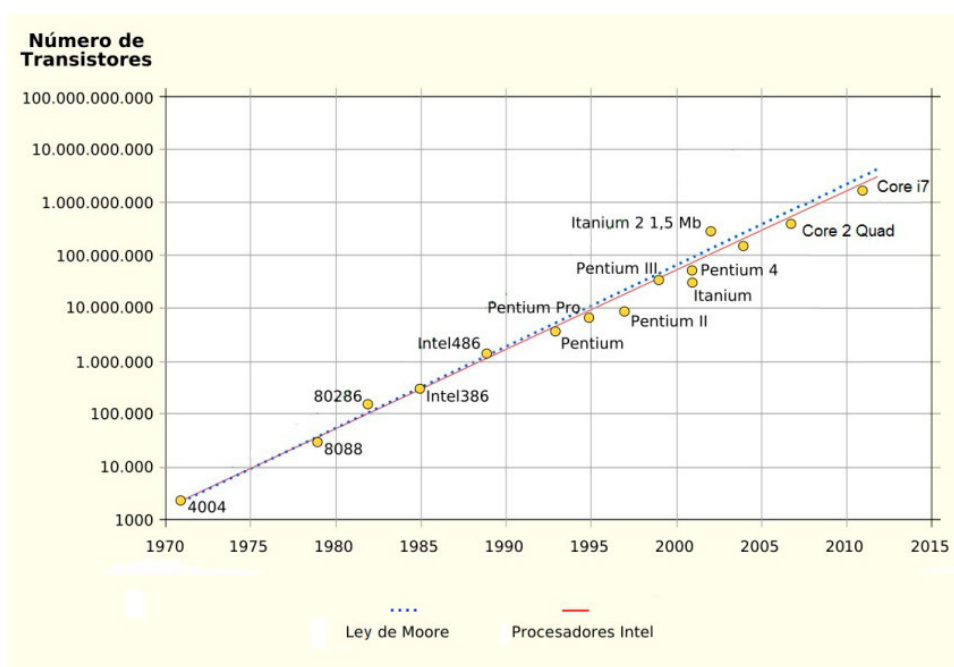


Figura 1: Ley de Moore. El número de transistores se duplica cada dos años.

Los sistemas a escala nanométrica son conocidos como *nanoestructuras* y es indispensable tener conocimiento de éstas para poder realizar aplicaciones *nanotecnológicas*. Existen variedades de nanoestructuras todas ellas con propiedades particulares y distintivas que pueden ser de gran utilidad y tener numerosas aplicaciones en la *nanoelectrónica*, tales como las estructuras de baja dimensionalidad que tienen propiedades únicas de transporte electrónico. Entre ellas se encuentran los pozos cuánticos, que determinan las propiedades electrónicas en dos dimensiones, los alambres cuánticos cuyo transporte electrónico está dirigido en una sola dimensión y los puntos cuánticos cuando

los electrones son confinados a una dimensión nula.

De entre todas estas nanoestructuras, el punto cuántico es el que resulta de mayor interés en el transporte electrónico, pues se trata de un sistema cero-dimensional que cuenta con propiedades que son conocidas en la naturaleza. Esto es, debido al confinamiento de sus dimensiones, cuenta con niveles energéticos discretos tal como los que exhibe un átomo, es por esto que son conocidos como *átomos artificiales* (Ashoori, 1996; Kouwenhoven y Marcus, 1998). Estos átomos pueden ser representados mediante un pozo de potencial unidimensional finito, en donde los niveles de energía, dependen únicamente de la anchura del pozo de potencial. A diferencia de lo que ocurre con los átomos reales, la anchura de los átomos artificiales puede ser manipulada, y con ello los niveles de energía (Shankar, 1994).

Una propiedad importante de los puntos cuánticos es que puede colocárseles contactos de manera similar al esquema de la figura 2, lo cual permite el transporte en un circuito formado por los contactos a izquierda y derecha del punto cuántico que juegan el papel de fuente y sumidero de electrones.

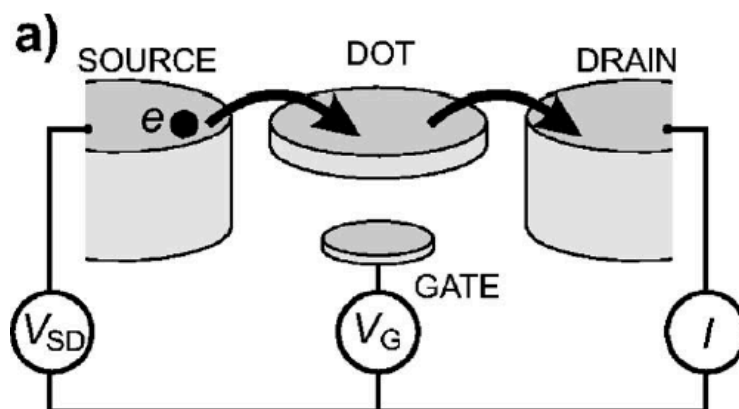


Figura 2: Esquemización de un punto cuántico conectado a una fuente (*Source*) y un sumidero (*Drain*), en donde el transporte se da por tunelaje cuántico de la fuente al punto cuántico y de éste último al sumidero, manipulando el voltaje V_{sd} . Tomado de (Hanson *et al.*, 2007).

Existen diferentes tipos de puntos cuánticos, que se distinguen por los distintos materiales y técnicas utilizadas para su fabricación. Por ejemplo, podemos tener: moléculas atrapadas entre dos electrodos (Park *et al.*, 2002), metales normales (Petta y Ralph, 2001; von Delft y Ralph, 2001), materiales superconductores (von Delft y Ralph, 2001), nanoalambres semiconductores (Björk *et al.*, 2004), granos metálicos o islas oscilantes (Gorelik *et al.*, 1998; Armour y MacKinnon, 2002; Villavicencio *et al.*, 2008), puntos cuánticos semiconductores verticales (Kouwenhoven *et al.*, 2001), puntos cuánticos semiconductores laterales (Kouwenhoven *et al.*, 1997) y nanotubos de carbón (Buitelaar *et al.*, 2002), por mencionar algunos. En particular, analizaremos con más detalle a los puntos cuánticos de materiales semiconductores. Para fabricar este tipo de estructuras se utiliza la técnica de la epitaxia de haces moleculares (*molecular beam epitaxy (MBE)*, por sus siglas en inglés) (Mitin *et al.*, 2008a) para primero formar una estructura consistente en una delgada capa plana de arseniuro de galio dopado con aluminio (AlGaAs)

depositada sobre una capa de arseniuro de galio (GaAs), como se muestra en la figura 3.

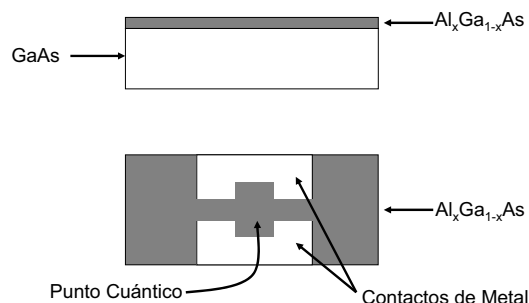


Figura 3: Forma esquematizada de un punto cuántico. Los dos contactos metálicos forman contactos cuánticos puntuales que aíslan al punto cuántico cuando se aplica voltaje. En ese momento los electrones sólo pueden entrar al punto mediante tuneo.

Debido a las diferentes anchuras de banda de cada capa (Ferry y Goodnick, 1997), se produce un confinamiento de electrones en una de las dimensiones (la normal a ambas capas). Dichos electrones se acumulan en la interfaz de la heteroestructura de GaAs/AlGaAs, típicamente 50-100 nm bajo la superficie de los materiales, formando de esta manera un gas de electrones bidimensional (*2D electron gas* (2DEG), por sus siglas en inglés), la cual forma una hoja delgada de 10 nm en donde los electrones se mueven libremente a lo largo de la interfaz. La densidad de electrones en el 2DEG es muy baja, del orden de $2.9 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ (Hanson *et al.*, 2004). A esta estructura se le agregan además unos contactos de metal conocidos como *contactos puntuales cuánticos* (*quantum point contacts* (QPC), por sus siglas en inglés) para confinar, mediante volta-

jes, el movimiento de los electrones en las otras dos dimensiones y así crear al punto cuántico (ver figura 3).

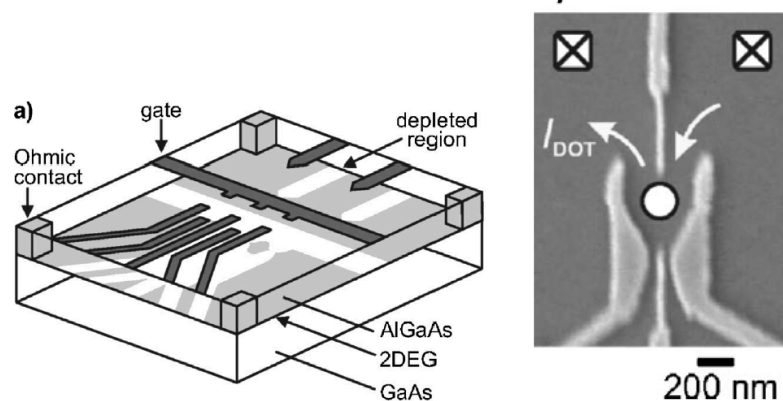


Figura 4: Puntos cuánticos laterales definidos de manera electrostática por electrodos metálicos en la superficie de una heteroestructura de GaAs/AlGaAs. (a) Vista esquemática en donde la aplicación de voltajes negativos en los electrodos metálicos de compuerta (gris oscuro) inducen regiones que presentan un vaciamiento de electrones (blanco) en el 2DEG (gris claro) mediante repulsión electrostática. Los contactos ohmicos (columnas en gris claro) permiten establecer contactos eléctricos con los reservorios del 2DEG mediante alambres (no se muestran en la figura). (b) Micrografía tomada con un microscopio electrónico de barrido de un dispositivo de un solo punto cuántico (posición ubicada con un círculo blanco) en donde se observan los electrodos de compuerta (gris claro) sobre la superficie (gris oscuro). Los contactos ohmicos se indican en las esquinas superiores. Las flechas blancas indican la trayectoria seguida por la corriente electrónica I_{DOT} desde un reservorio de electrones a otro pasando a través del punto cuántico. Tomado de (Hanson *et al.*, 2007).

En la figura 4 podemos ver con mayor detalle un punto cuántico lateral, en donde los electrones libres en el 2DEG pueden ser manipulados mediante un campo eléctrico, el cual se crea mediante un diferencia de potencial negativa en los electrodos metálicos en

la parte superior de la heteroestructura. Por otro lado, la técnica de litografía con haces de electrones permite fabricar estructuras de compuertas con dimensiones del orden de décimas de nanómetros, que permiten controlar a los electrones en el sistema. Esto es, con un diseño adecuado de las estructuras de compuerta es posible crear pequeñas islas o “piscinas” de electrones aisladas del resto del gas de electrones bidimensional, lo que da lugar a los puntos cuánticos mediante un confinamiento electrostático.

Así como los átomos forman moléculas, con los *átomos artificiales* se pueden formar *moléculas artificiales*. Una de las combinaciones básicas de puntos cuánticos comúnmente estudiada es la de la unión de dos de ellos para formar un doble punto cuántico. Esto se ilustra en la figura 5, en donde se muestra a dos puntos cuánticos conectados en serie. Las estructuras de doble punto cuántico han sido estudiadas ampliamente por sus propiedades como sistemas de dos niveles (Sakurai, 1994), así como por ser candidatos para jugar el papel de bloques de construcción para los *cúbits* en los circuitos espintrónicos, con interesantes aplicaciones en el campo de la información cuántica (Hanson *et al.*, 2007).

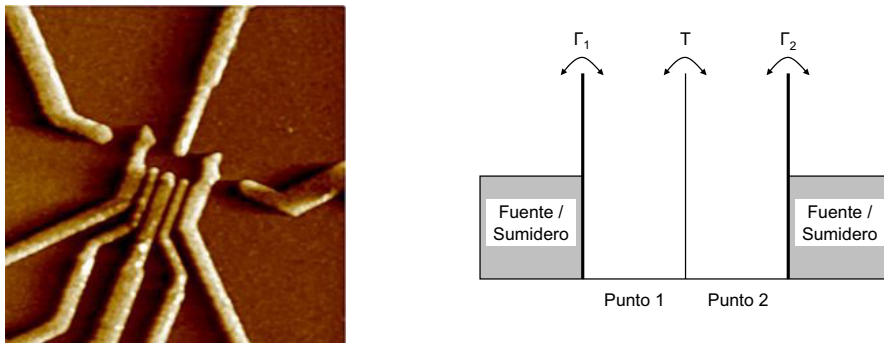


Figura 5: (a) Imagen AFM (*atomic force microscope* (AFM), por su siglas en inglés) de un doble punto cuántico conectado en serie, integrado con contactos cuánticos puntuales a ambos lados. (b) Forma esquemática de un doble punto cuántico conectado en serie.

Las ideas anteriores pueden extenderse a sistemas con un mayor número de puntos cuánticos laterales en distintas configuraciones con un número controlado de electrones. Este es el caso, por ejemplo, de un *triple punto cuántico*. A continuación veamos como se diseñan dichas estructuras. En la figura 6(a) se muestra el perfil de potencial electrostático resultante debido a la configuración de las compuertas metálicas en un triple punto cuántico. Los huecos en la compuerta metálica de color gris oscuro (con un potencial negativo) confinan a los electrones en tres mínimos de potencial en el plano del gas de electrones bidimensional. Las compuertas de color verde se utilizan para ajustar la profundidad del potencial y por lo tanto, los niveles de energía correspondientes a los puntos cuánticos a los cuales están adyacentes. Las compuertas de color azul se utilizan para controlar el tuneo entre los puntos cuánticos vecinos. La figura 6(b) y (d) representan esquemáticamente al triple punto cuántico en las configuraciones en paralelo y en serie, respectivamente. Los círculos rojos representan a los mínimos del potencial electrostático que definen a los puntos cuánticos individuales. La figura 6(c) muestra una micrografía de SEM de las compuertas metálicas sobre GaAs, definiendo una configuración lineal de triple punto cuántico.

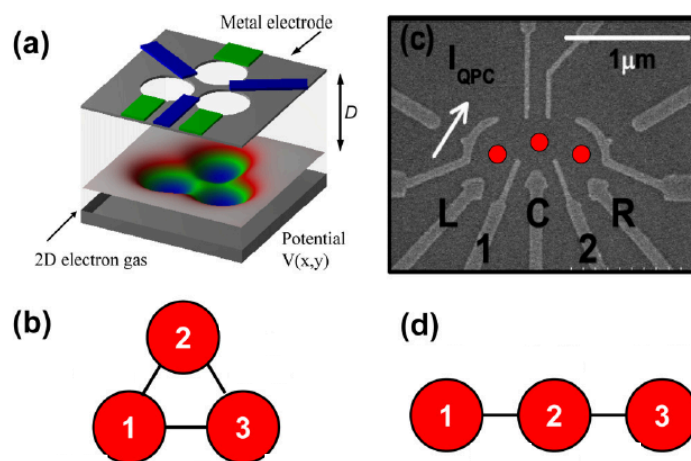


Figura 6: Triple punto cuántico lateral. (a) La placa rectangular gris exhibe tres agujeros circulares, los cuales producen los mínimos del potencial electrostático de confinamiento $V(x, y)$ de los electrones en el gas de electrones bidimensional. (b) Representación esquematizada de un triple punto cuántico en paralelo. (c) Micrografía de SEM en donde se muestran las compuertas metálicas utilizadas para lograr el confinamiento de los electrones. Las etiquetas L , C y R identifican a las compuertas que sintonizan los niveles de energía en los puntos cuánticos ubicados a la izquierda, al centro y a la derecha, respectivamente. Las compuertas etiquetadas con números, sintonizan la intensidad de las barreras de tuneleo entre los puntos izquierdo y central (1) y derecho y central (2), respectivamente. Se utiliza un contacto cuántico puntual (QPC) para monitorear la corriente I_{QPC} . (b) Representación esquematizada de un triple punto cuántico en serie. Tomado de (Hsieh *et al.*, 2012).

Desde la realización experimental del primer *triple punto cuántico* (Gaudreau *et al.*, 2006), el avance en este campo se ha mantenido gracias al interés de diversos grupos de investigación (Schröer *et al.*, 2007; Ihn *et al.*, 2007; Rogge y Haug, 2008; Laird *et al.*,

2010; Granger *et al.*, 2010; Amaha *et al.*, 2012; Busl *et al.*, 2013), quienes han explorado diversos aspectos físicos en estos sistemas (Hsieh *et al.*, 2012), como por ejemplo, control coherente, manipulación de espín e información cuántica, por mencionar algunos, pues se trata de una área de investigación muy amplia. Dentro del gran abanico de fenómenos explorados en estos sistemas, nos llaman la atención el de los *estados oscuros* (Michaelis *et al.*, 2006; Emary, 2007). Los *estados oscuros* (*dark states*, en inglés) en un triple punto cuántico representan el análogo electrónico del fenómeno de la óptica cuántica conocido como *atrapamiento coherente de la población*. Los *estados oscuros* (Michaelis *et al.*, 2006; Emary, 2007) son el resultado de una superposición coherente de los diferentes estados en un punto cuántico, que dan lugar a un bloqueo de la corriente a través del dispositivo. Dichos estados se forman mediante una manipulación de los parámetros de acoplamiento entre los puntos cuánticos. El fenómeno anterior representa una manera alternativa para controlar la corriente electrónica en estos dispositivos.

Recientemente las *configuraciones cuádruples de puntos cuánticos* han sido realizadas experimentalmente, motivadas principalmente por sus aplicaciones en el área de la espintrónica, pues ofrecen la posibilidad de manipular sistemas de cuatro qubits (Takakura *et al.*, 2014). En la figura 7 se muestra una de estas estructuras, en donde cada punto cuántico es etiquetado de la *A* a la *D*.

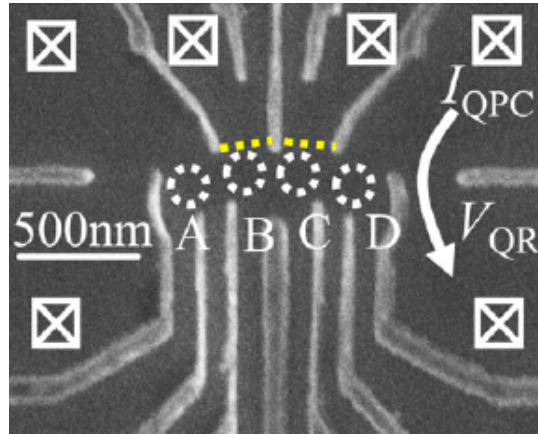


Figura 7: Cuádruple punto cuántico lateral. Micrografía de SEM que muestra un cuádruple punto cuántico. Los contactos ohmicos se indican mediante cuadros blancos y los puntos cuánticos son etiquetados de la A a la D y representados por círculos blancos. Una línea blanca define la corriente que fluye a través del sensor de contacto puntual cuántico (QPC). Tomado de (Takakura *et al.*, 2014).

En este contexto de arreglos de puntos cuánticos, un área de gran interés actual es el estudio de las propiedades de transporte electrónico en los llamados sistemas de transbordador de triple punto cuántico (Gorelik *et al.*, 1998; Armour y MacKinnon, 2002; Villavicencio *et al.*, 2008). Estos sistemas consisten de tres puntos cuánticos conectados en serie con la peculiaridad de que el punto central puede oscilar entre los puntos de los extremos, mientras que estos últimos se encuentran unidos rígidamente a los contactos. La oscilación mecánica del punto central le confiere al sistema nuevas propiedades eléctricas, convirtiéndolo en un sistema *nanoelectromecánico*, esto es, en un sistema en donde los grados de libertad mecánicos y electrónicos se encuentran estrechamente relacionados. Recientemente los sistemas electromecánicos de triple punto cuántico han sido explorados para estudiar el fenómeno del *entrelazamiento* (Mora *et al.*, 2014). El entrelazamiento es un fenómeno puramente cuántico que ha revolucionado las comprensión de las fundamentos de la teoría cuántica y es universalmente aceptada

(Audretsch, 2007). Este fenómeno puede ser utilizado para probar los fundamentos de la teoría cuántica, y ha dado lugar a las áreas de la información y computación cuántica. Actualmente, el entrelazamiento cuántico ha sido verificado experimentalmente en una gran variedad de sistemas en los que se entrelazan distintos grados de libertad (Audretsch, 2007). Lo anterior ha llevado al desarrollo de protocolos como la teleportación y criptografías cuánticas (Ma *et al.*, 2012). Para estudiar los sistemas entrelazados es necesario cuantificar el grado de entrelazamiento de los sistemas. Para este propósito se han desarrollado diferentes indicadores, como lo son el *número de Schmidt* y la *conurrencia*, por mencionar algunos. Los sistemas nanoelectromecánicos han resultado de gran interés para el estudio del entrelazamiento, debido al acoplamiento de los distintos grados de libertad electrónicos y mecánicos que dan lugar a un entrelazamiento híbrido, como fue explorado recientemente por Mora *et al.* (2014). El fenómeno de entrelazamiento híbrido resulta de gran interés para la implementación de dispositivos de computación cuántica, al encontrar relaciones entre las medidas de entrelazamiento híbrido y las propiedades físicas medibles del sistema e.g. la corriente electrónica.

En el presente trabajo de tesis, motivados por los recientes avances en la construcción de dispositivos de arreglos de puntos cuánticos, estamos interesados en explorar la física del transporte de carga, así como bajo que condiciones y mecanismos ocurre el fenómeno de los *estados oscuros* en sistemas de cuádruples de puntos cuánticos en la configuración en paralelo. Se considera también el estudio de acoplamientos de modos fonónicos (modos de oscilador) entre los puntos cuánticos para determinar los efectos sobre la corriente electrónica debidos al acoplamiento híbrido entre los grados de libertad mecánicos y electrónicos. También se explorará el fenómeno de entrelazamiento entre los estados electrónicos y mecánicos del cuádruple punto cuántico en paralelo, con el propósito de estudiar cómo las medidas del entrelazamiento híbrido se relacionan con las propiedades físicas medibles del sistema, como por ejemplo la corriente electrónica.

Capítulo II

MARCO TEÓRICO

Al estudiar sistemas clásicos o cuánticos, es común suponerlos aislados del mundo exterior, es decir, mantener el sistema que se está estudiando dentro de una región confinada, la cual garantice que el sistema no tenga interacciones con su entorno, de modo que su evolución temporal sea independiente del entorno del sistema. Sin embargo, para realizar una descripción completa de un sistema físico, es necesario introducir las interacciones con el mundo exterior, por lo menos de forma aproximada. En este capítulo presentaremos las herramientas necesarias para realizar dicha descripción. Empezaremos por describir la evolución temporal de un sistema cerrado (aislado) a través del operador de densidad para posteriormente introducir las interacciones con el entorno.

Un sistema cerrado es aquél que no tiene ningún tipo de interacción con el entorno que lo rodea, mientras que un sistema abierto es aquel al cual le está permitido interactuar con algún tipo de entorno y este a su vez modifica las propiedades del sistema. Para la resolución del problema es necesario el formalismo de la matriz de densidad y el formalismo de evolución temporal de sistemas abiertos presentados a continuación.

II.1 Matriz de densidad

La evolución temporal de un sistema cuántico puede estudiarse utilizando diversos enfoques. Uno de estos involucra a la ecuación de Schrödinger del vector de estado $|\Psi(t)\rangle$ como sigue:

$$\frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} H(t) |\Psi(t)\rangle, \quad (1)$$

donde $H(t)$ es el hamiltoniano del sistema, y que resulta adecuado para describir la evolución temporal de estados puros. O bien, mediante el formalismo de la matriz de densidad la cual se define como sigue:

$$\rho(t) = |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|, \quad (2)$$

y su evolución temporal dada por:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}[H(t), \rho(t)], \quad (3)$$

donde $[H(t), \rho(t)]$ es el conmutador entre los operadores $H(t)$ y $\rho(t)$. La ecuación anterior es conocida como *Ecuación de Liouville-Von Neumann*, y resulta apropiada para describir la evolución de estados mixtos. Así mismo, el valor esperado de una observable $A(t)$ a un tiempo t se puede escribir en función del operador de densidad como:

$$\langle A(t) \rangle = \text{Tr}[A(t)\rho(t)]. \quad (4)$$

La importancia de este formalismo radica en la posibilidad de trabajar con estados mixtos, es decir, sistemas cuánticos formados por una cantidad de partículas cada una descrita a su vez por ecuaciones de estado que contribuyen mediante un peso estadístico clásico (a diferencia de la probabilidad cuántica en la que podemos obtener interferencias constructivas o destructivas debido a las probabilidades de ocupación de los estados cuánticos). Es decir, que es posible describir un ensemble estadístico en donde una fracción de ellos, ω_i , se encuentre en el estado $|i\rangle$ (donde a su vez los estados $|i\rangle$ son superposiciones de estados cuánticos con probabilidades cuánticas de ocupación de sus respectivos estados, es decir $|i\rangle = \sum a_{in} |n\rangle$). Mediante estas definiciones es posible demostrar que las ecuaciones (3) y (4) siguen siendo válidas en estos sistemas

únicamente haciendo:

$$\rho = \sum_i \omega_i |i\rangle\langle i| = \sum_i \omega_i \rho_i \quad (5)$$

y

$$\langle A \rangle = \sum_i \omega_i A_i, \quad (6)$$

donde los operadores A_i actúan sobre los estados ρ_i .

II.2 Representaciones de la Mecánica Cuántica

En esta sección presentamos los *esquemas* o *representaciones* de la mecánica cuántica, que nos permiten describir la evolución temporal de un sistema cuántico desde diferentes puntos de vista, y que serán de gran utilidad al estudiar la evolución de sistemas cuánticos abiertos. Estas representaciones son: (i) *Esquema de Schrödinger*, (ii) *Esquema de Heisenberg* y el (iii) *Esquema de Interacción*. Estos esquemas pueden representar la evolución del mismo sistema mecánico cuántico, pero la interpretación de esta varía en cada uno de ellos. La necesidad de cada uno de los esquemas radica en la descripción de una observable en la mecánica cuántica. Un ejemplo de esto es el caso del valor esperado de la energía E de un sistema cuántico descrito por el hamiltoniano H denotada como $\langle E \rangle$ y que se encuentra en el estado $|\psi\rangle$, dado por $\langle E \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle$, como lo discutiremos en la siguiente sección.

II.2.1 Representación de Schrödinger y Heisenberg

En la sección II.1, la evolución de sistemas cuánticos descrita por las ecuaciones de la forma (1), (2) y (3) está representada en el esquema de Schrödinger. En este esquema, los estados evolucionan en el tiempo mediante la ecuación

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle, \quad (7)$$

en donde el operador $U(t, t_0)$ es conocido como el operador de evolución temporal, el cual obedece la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. En el caso particular en donde el Hamiltoniano no depende del tiempo, se tiene que

$$U(t, t_0) = \exp \left[\frac{-iH(t - t_0)}{\hbar} \right]. \quad (8)$$

El operador de evolución temporal es unitario *i.e.* $U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = I$, por lo que la evolución de nuestro sistema es unitaria.

Si asumimos que $|\Psi(t)\rangle$ evoluciona de acuerdo con la ecuación (7), y que además los operadores mecánico cuánticos no evolucionan en el tiempo, se tiene que un valor esperado que dependa del tiempo toma la forma:

$$\langle E(t) \rangle = \langle \Psi(t) | H | \Psi(t) \rangle. \quad (9)$$

Por otro lado, si en la expresión anterior sustituimos la ecuación (7), la evolución de un valor esperado resulta ser,

$$\langle E(t) \rangle = \langle \Psi(t_0) | U^\dagger(t, t_0) H U(t, t_0) | \Psi(t_0) \rangle. \quad (10)$$

Podemos asumir que los estados $|\Psi(t_0)\rangle$ en realidad no evolucionan en el tiempo, ya que permanecen fijos en t_0 para todo valor de t , y que son ahora los operadores los que evolucionan en el tiempo, esto es,

$$H(t) = U^\dagger(t, t_0) H U(t, t_0) \quad (11)$$

representa la evolución temporal de un operador. Esta es la descripción de *Heisenberg* de la mecánica cuántica, la cual está basada en la evolución temporal de los operadores de un sistema cuántico. Ahora bien, para describir una ecuación de movimiento, tomamos una observable A y su evolución temporal en el esquema de Heisenberg:

$$A(t) = U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0), \quad (12)$$

y derivamos con respecto del tiempo. Es fácil ver con la ayuda de (12), que la ecuación de movimiento para $A(t)$ es:

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{i}{\hbar} [H(t), A(t)], \quad (13)$$

que es conocida como la *ecuación de Heisenberg*.

II.2.2 Esquema de Interacción

El esquema de interacción es una construcción muy ingeniosa que plantea la descomposición del hamiltoniano del sistema como la suma de dos hamiltonianos

$$H = H_0 + V, \quad (14)$$

donde H_0 es un hamiltoniano cuya solución es conocida y V es una interacción de ese sistema, cuya solución completa es desconocida. Esta construcción tiene su origen en la defición del valor esperado de una observable A a un tiempo t , dada por la ecuación (4). En dicha ecuación, podemos escribir la evolución de $\rho(t)$ cuyo operador de evolución temporal es $U(t, t_0) = \exp[-i(H_0 + H_I)(t - t_0)/\hbar]$, de tal modo que

$$\langle A(t) \rangle = \text{Tr} [A(t)U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)]. \quad (15)$$

Si en la expresión anterior sustituimos las expresiones correspondientes a los operadores de evolución:

$$U_0(t, t_0) = \exp[-iH_0(t - t_0)/\hbar], \quad (16)$$

y

$$U_I(t, t_0) = U_0^\dagger(t, t_0)U(t, t_0), \quad (17)$$

obtenemos entonces,

$$\begin{aligned} \langle A(t) \rangle &= \text{Tr} \left[U_0^\dagger(t, t_0) A(t) U_0(t, t_0) U_I(t, t_0) \rho(t_0) U_I^\dagger(t, t_0) \right] \\ &= \text{Tr} [A_I(t) \rho_I(t)], \end{aligned} \quad (18)$$

en donde:

$$A_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0) A(t) U_0(t, t_0), \quad (19)$$

y

$$\rho_I(t) = U_I(t, t_0) \rho(t_0) U_I^\dagger(t, t_0). \quad (20)$$

Si tomamos la derivada del operador de densidad ρ_I con respecto al tiempo en el esquema de interacción, se sigue que:

$$\frac{d}{dt} \rho_I(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_I(t), \rho_I(t)], \quad (21)$$

cuya forma integral es:

$$\rho_I(t) = \rho_I(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds [H_I(s), \rho_I(s)]. \quad (22)$$

La expresión anterior puede evaluarse en forma iterada, por ejemplo a segundo orden:

$$\rho_I(t) = \rho_I(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t ds [H_I(s), \rho_I(t_0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^s ds' [H_I(s), [H_I(s'), \rho_I(s')]], \quad (23)$$

la cual a su vez puede reescribirse en su forma integro-diferencial:

$$\frac{d}{dt} \rho_I(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_I(t), \rho_I(t_0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t ds [H_I(t), [H_I(s), \rho_I(s)]]. \quad (24)$$

II.3 Sistemas Abiertos

La mayoría de los problemas propuestos en los libros de texto sobre dinámica cuántica son siempre tratados desde el punto de vista de un sistema cerrado. Desde este punto de vista, el sistema no puede interactuar con sus alrededores. Dicha descripción es poco realista en términos prácticos ya que es imposible que un sistema pueda encontrarse de forma perfectamente aislada de sus alrededores. Es por esto que las ecuaciones de la dinámica de sistemas cuánticos en el esquema de Schrödinger y Heisenberg son difíciles de implementar para describir fenómenos en los que interactúan los sistemas abiertos.

Sin embargo, el esquema de interacción permite hacer una muy buena descripción de la dinámica de los sistemas abiertos.

Existen sistemas abiertos particulares, en los que un sistema de interés se encuentra inmerso en un sistema infinito, al cual se le conoce como *reservorio* o *baño*. De este modo, nuestro sistema de interés es afectado por el *reservorio*, pero a su vez este no es perturbado por el sistema. Ejemplos que serán tratados en esta tesis son hamiltonianos asociados al transporte de carga en sistemas de triples y cuádruples puntos cuánticos. En estos sistemas, el hamiltoniano puede interaccionar con un *reservorio* conformado por un sistema de electrones que pueden acceder al sistema de puntos cuánticos uno a uno mediante el tuneo y llegar a un colector de electrones mediante una diferencia de potencial. De este modo podemos obtener una ecuación que describa el paso de esos electrones por el sistema. Es decir podemos expresar la corriente mediante la dinámica de los sistemas abiertos.

Otro ejemplo de sistemas abiertos que serán abordados en este trabajo, es el de un oscilador armónico cuántico cuya frecuencia característica ω_0 se encuentra inmerso en un medio *dissipativo* conformado por un baño de osciladores armónicos descritos más adelante.

II.3.1 Ecuación Maestra

A continuación plantearamos de manera general el formalismo que utilizaremos para describir la dinámica de un sistema abierto inmerso en un reservorio. Dicho formalismo esta basado en la ecuación de evolución temporal de la matriz de densidad y recibe el nombre de Ecuación Maestra.

Partimos de la descripción del sistema en el esquema de interacción

$$H = H_S + H_R + V, \quad (25)$$

donde H_S es nuestro sistema de interés, H_R es el sistema que describe al reservorio y V contiene la interacción entre ellos.

Partiendo de la ecuación de Liouville a segundo orden.

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = -\frac{i}{\hbar} [V_I(t), \rho_I(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t ds [V_I(t), [V_I(s), \rho_I(s)]], \quad (26)$$

donde hemos hecho $t_0 = 0$, y $V_I(t)$ es la interacción entre ellos descrita desde el esquema de interacción.

Asumimos que inicialmente el sistema completo $\rho_I(0)$ se encuentra en el estado $\rho_S(0) \otimes \rho_R(0)$, y de este modo, podemos obtener una ecuación de Liouville integro-diferencial a segundo orden para el sistema reducido S realizando la traza sobre los estados del reservorio.

$$\frac{d}{dt}\rho_{S,I}(t) = -\frac{i}{\hbar} Tr_R\{[V_I(t), \rho_S(0) \otimes \rho_R(0)]\} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t ds Tr_R\{[V_I(t), [V_I(s), \rho_I(s)]]\}. \quad (27)$$

En los ejemplos que serán tratados en la presente tesis (reservorio electrónico y reservorio térmico), la interacción V puede escribirse en la forma:

$$V = \sum_i s_i r_i, \quad (28)$$

que además en el esquema de interacción toman la forma:

$$V_I(t) = \sum_i s_i(t) r_i(t). \quad (29)$$

Sustituyendo $V_I(t)$ y utilizando algunas propiedades de la traza parcial sobre los estados del reservorio es posible obtener una ecuación que aún sigue siendo integro-diferencial,

en donde además se tiene que el argumento de la parte integral, es no local en el tiempo. Para el tratamiento es necesario hacer unas aproximaciones. Suponemos primero que el reservorio no evoluciona en el tiempo (este argumento es plausible dado que las interacciones con nuestro sistema son lo suficientemente débiles como para que haya alguna perturbación). Así mismo, suponemos que en la parte integral, el argumento sigue siendo local en el tiempo. Esta suposición nos permite hacer un cambio de variable en la integral $s = t - s$ y hacemos que t tienda a ∞ . Lo anterior en conjunto es lo que se conoce como la *Aproximación de Born-Markov*, y permite obtener una ecuación integro-diferencial que recibe el nombre de *Ecuación Maestra de Born-Markov* y tiene la forma:

$$\frac{d}{dt}\rho_{S,I} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \int_0^\infty ds \{ [s_i(t), s_j(t-s)\rho_{S,I}(t)] \langle r_i(s)r_j \rangle - [s_i(t), \rho_{S,I}(t)s_j(t-s) \langle r_j r_i(s) \rangle] \}, \quad (30)$$

donde los operadores s_i y r_i evolucionan en el tiempo de acuerdo al esquema de interacción, y dado que los Hamiltonianos H_S y H_R conmutan, las evoluciones de los operadores s_i y r_i evolucionan conforme a:

$$s_i(t) = e^{iH_S t/\hbar} s_i e^{-iH_S t/\hbar}, \quad (31)$$

$$r_i(t) = e^{iH_R t/\hbar} r_i e^{-iH_R t/\hbar}, \quad (32)$$

el término $\langle r_i(t)r_j(s) \rangle$ de la ecuación (30) es la traza parcial tomada con respecto a los estados del reservorio ρ_R .

Basándonos en esta descripción y bajo ciertas características de cada reservorio (Ver apéndice A), es posible definir la física detrás de los sistemas abiertos mediante las

ecuaciones de evolución de la matriz de densidad en el esquema de Schrödinger en forma de *operadores de Lindblad* (Rivas y Huelga, 2011), que tienen la forma:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t). \quad (33)$$

Para el caso del transporte electrónico, la Ecuación Maestra es:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R, \quad (34)$$

con:

$$\mathcal{L}_c\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_{QD} + H_{Tun}, \rho(t)]; \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_L\rho(t) = \frac{\Gamma_L}{2}(2d_1^\dagger\rho(t)d_1 - \{d_1d_1^\dagger, \rho(t)\}); \quad (36)$$

$$\mathcal{L}_R\rho(t) = \frac{\Gamma_R}{2}(2d_3\rho(t)d_3^\dagger - \{d_3^\dagger d_3, \rho(t)\}), \quad (37)$$

el término \mathcal{L}_c representa la parte coherente *sistema cerrado sin interacciones* mientras que los términos extras $\mathcal{L}_{L/R}$ representan a la interacción del sistema con el medio. Vemos que de acuerdo con el esquema, los reservorios electrónicos se encuentran conectados a los sitios 1 y 3. Esto se hizo intencionalmente para aprovechar las estructuras de las ecuaciones ya descritas para sistemas de tres puntos cuánticos como en el caso (Emary, 2007) y (Domínguez *et al.*, 2011).

Por otra parte, si nuestro sistema de interés es el sistema de un *fonón* con modo localizado ω_0 que interactúa con un baño de *fonones disipativos* vía la ecuación (139). Entonces la Ecuación Maestra para dicho sistema es:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t), \quad (38)$$

con el lindbladiano \mathcal{L} dado por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{Dis}, \quad (39)$$

en donde \mathcal{L}_c

$$\mathcal{L}_c \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_0, \rho(t)], \quad (40)$$

representa la parte coherente, y \mathcal{L}_{Dis}

$$\mathcal{L}_{\text{Dis}} \rho(t) = \frac{\gamma}{2} (\bar{n}_0 + 1) (2a\rho(t)a^\dagger - \{a^\dagger a, \rho(t)\}) + \frac{\gamma}{2} \bar{n}_0 (2a^\dagger \rho(t)a - \{aa^\dagger, \rho(t)\}), \quad (41)$$

describe el comportamiento debido a la interacción con el reservorio. Ahora que los sistemas de interés han sido descritos, es posible definir un sistema aún más interesante del cual podemos obtener algunas propiedades con todo lo anterior establecido. El sistema en cuestión consiste de un arreglo de puntos cuánticos cuádruple (y triple) conectado con geometría de rombo (y geometría triangular en el caso del triple). Este sistema se encuentra conectado a contactos electrónicos que suministrarán la corriente al sistema. A su vez, el sistema se encuentra con interacción directa electrón-fonón con modo localizado y disipativo. Es decir, que hemos combinado los dos sistemas abiertos anteriores con la finalidad de estudiar los efectos que tiene esta interacción electrón-fonón con el comportamiento de la corriente. Así mismo, podemos describir los *estados oscuros* del sistema electrónico (ver la siguiente subsección donde se describe el comportamiento de un estado oscuro) y ver cómo afecta a dichos estados la interacción entre los sistemas. Dicha interacción que vincula los sistemas electrónicos y fonónicos es:

$$V_{ep} = (a^\dagger + a) (\xi n_1 + \lambda n_2 + g n_4), \quad (42)$$

para la configuración cuádruple y

$$V_{ep} = (a^\dagger + a) (\eta n_1 + \lambda n_2), \quad (43)$$

para la configuración triple. Por lo que la ecuación de Lindblad que estudiaremos es:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{\text{Dis}}, \quad (44)$$

con:

$$\mathcal{L}_c \rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_{QD} + H_{ph} + V_{ep}, \rho(t)], \quad (45)$$

donde los operadores lindbladianos ya han sido definidos previamente, y nuestro sistema consta de una matriz de densidad reducida que aún es un sistema compuesto cuyas bases son las de los estados de los puntos cuánticos y la base del oscilador armónico que describe al fonón que interactúa con los puntos cuánticos.

Capítulo III

RESULTADOS

A continuación se presentan una serie de aspectos generales de los resultados obtenidos en el presente trabajo de tesis. En la sección III.1 se presentan los aspectos generales de los puntos cuánticos y su estructura geométrica. En la sección III.2 se presentan los aspectos generales de los estados oscuros. En la sección III.2.1 se presentan algunos aspectos del desfaseamiento y su efecto en los estados oscuros de un sistema de puntos cuánticos. En la sección III.2.2 se presentan algunos aspectos generales de la interacción electrón-fonón que son los de mayor interés en la presente tesis. En la sección III.2.3 se presenta toda la información relevante sobre un sistema triangular de tres puntos cuánticos y su relación con los temas tratados en las sub secciones anteriores. Además, se introduce el concepto de *transformación de polarón*, misma que será de gran utilidad para abordar algunos de los problemas de la presente tesis. En la sección III.2.4. Se establece de forma genérica el hamiltoniano de un sistema cuádruple de puntos cuánticos y se establece la nomenclatura utilizada para las energías de sitio y los tuneleos, considerando tres casos de interés en cada uno de los dos sistemas energéticos: simetría de tuneleos laterales, simetría de tuneleos superior e inferior, y simetría de los tuneleos en las diagonales, todo lo anterior tomando en cuenta la existencia o no existencia del tuneleo en paralelo ($t_{24} = 0, t_p$) dando lugar a doce casos de interés relacionados a la búsqueda de estados oscuros. En la sección III.2.5 se toma como punto de partida un sistema resuelto de cuatro puntos cuánticos sin tuneleo en paralelo y con todos los tuneleos simétricos, $t_{ij} = t$ (Wang *et al.*, 2011). De la sección III.2.6 a la sección III.2.9 se exploran todos los casos de simetría anteriormente mencionados, con el propósito

de encontrar las condiciones bajo las cuales aparecen los estados oscuros de cada sistema. En la sección III.2.10 se estudia el efecto que tiene el desfaseamiento sobre los estados oscuros y una forma manual, y poco natural de remover dicha interacción, encontrando una configuración con desfaseamiento y que a su vez preserva el estado oscuro. En la sección III.2.11 se explora la doble interacción en sitios para el sistema triple y la triple interacción en sitios para el sistema cuádruple, todo esto con ayuda de la *transformación de polarón*.

III.1 Aspectos Generales de los Puntos Cuánticos

De forma general, se puede escribir el hamiltoniano de cualquier sistema geométrico de puntos cuánticos de la siguiente manera:

$$H_{NQD} = H_{QD} + H_{Tun} = \sum_i^N \epsilon_i n_i + \sum_{i>j}^N t_{ij} (d_i^\dagger d_j + h.c), \quad (46)$$

donde H_{NQD} representa al hamiltoniano de N puntos cuánticos conectados, para el cual H_{QD} describe las energías de sitio de cada punto cuántico. El hamiltoniano H_{Tun} se encarga de describir la geometría del sistema y las posibles transiciones entre los puntos cuánticos a través de los tuneleos t_{ij} que describen la probabilidad de transición entre el i -ésimo punto cuántico y el j -ésimo punto cuántico. Operacionalmente, esto último se logra mediante el uso de los operadores de creación (aniquilación) de electrones $d^\dagger = |i\rangle\langle 0|$ ($d = |0\rangle\langle i|$). Con ayuda de los tuneleos t_{ij} , partimos de la suposición de que todos ellos son distintos de cero, esto es, todas las transiciones son posibles. A partir de esta suposición, podemos remover cualquier transición para obtener la configuración deseada. Para la presente tesis, se han utilizado dos configuraciones. La primera configuración consiste en un sistema de tres puntos cuánticos para la cual todas las transiciones son posibles. La única configuración que permite esto, es una

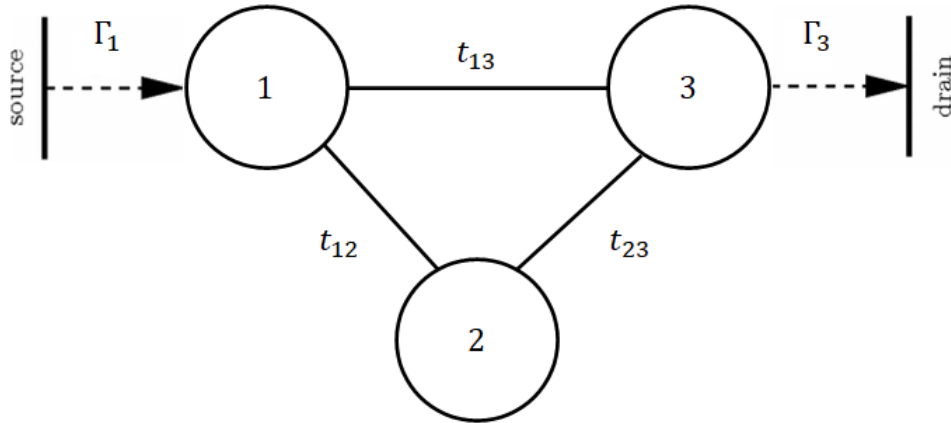


Figura 8: Sistema de tres puntos cuánticos en configuración triangular

configuración triangular como la que se muestra en la figura 8. En ella se observa al sistema conectado a los contactos eléctricos de tal manera que la corriente entra al sistema a través del sitio $|1\rangle$ y sale del sistema a través del sitio $|3\rangle$. Un sistema muy similar ha sido explorado por *Emary* (2007), en donde se han estudiado los efectos de las interacciones magnéticas y el desfaseamiento. En el trabajo anterior se ha encontrado una periodicidad en los estados oscuros en el caso de la interacción magnética, así como la destrucción del mismo debido al desfaseamiento. El objetivo de la presente tesis es estudiar el comportamiento de dicho sistema con interacción de desfaseamiento localizado en sitios, y agregar una interacción de forma artificial que ayude a recuperar el estado oscuro. Por otro lado se desea estudiar el efecto que tendrá sobre los estados oscuros del sistema, una interacción de tipo *electrón-fonón*. Una investigación muy similar se encuentra en el trabajo de Domínguez *et al.* (2011), en la que se estudia una interacción *electrón-fonón* en el sitio $|2\rangle$. En dicho estudio se encuentra que debido a la interacción fonónica, el estado del sistema pasa de estar en un estado oscuro en el que la corriente del sistema es nula, a un estado en el que la corriente vuelve a circular por el sistema, destruyendo con esto la posibilidad de volver a mantener dicho estado

oscuro. La diferencia con la presente tesis y el trabajo anteriormente mencionado, es la adición de una interacción extra de tipo *electrón-fonón* que actúa sobre el sitio $|1\rangle$ para el sistema de tres puntos cuánticos en configuración triangular. Así mismo se explora una configuración de cuatro puntos cuánticos con tres interacciones del mismo tipo en tres sitios, excluyendo al sitio conectado al sumidero de electrones.

III.2 Aspectos generales de los Estados Oscuros

Los estados oscuros son estados de un sistema cuántico en el que analizando el transporte, este es nulo debido a interferencias coherentes en el sistema. Estos se pueden manifestar en la óptica cuántica y en moléculas artificiales (puntos cuánticos conectados) en los que analizando el transporte electrónico, los diferentes caminos que puede tomar un electrón interfieren destructivamente. Un ejemplo de esto se encuentra en el trabajo de Emary (2007), en el que se analiza la corriente en un interferómetro constituido por tres puntos cuánticos en configuración triangular, en el que el sitio $|3\rangle$ se encuentra conectado al sumidero. Bajo cierta configuración de los tuneleos, el electrón queda confinado en la superposición coherente:

$$|\Psi_{\text{dark}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle), \quad (47)$$

puesto que el sistema se encuentra en este estado oscuro, queda completamente desacoplado del sitio $|3\rangle$, y es imposible poder obtener corriente en el colector de electrones. El estado oscuro de la ecuación (47) permite determinar las dos condiciones que debe cumplir un estado oscuro:

1. Un estado oscuro debe ser eigenestado del hamiltoniano. Es decir que debe cumplir con la ecuación de eigenvalores. Esto nos permite encontrar la forma del estado oscuro mediante

$$H_{QD} |\Psi_{Dark}\rangle = E_{Dark} |\Psi_{Dark}\rangle. \quad (48)$$

2. Un estado oscuro es un estado estacionario de la ecuación de Lindblad. Esto nos permite encontrar la forma de la corriente:

$$\frac{d}{dt} \rho_{\text{dark}} = \mathcal{L} \rho_{\text{dark}} = 0. \quad (49)$$

III.2.1 Aspectos generales del Desfasamiento

El *desfasamiento* es una forma de ruido ambiental que permite entender la respuesta del sistema ante un intercambio de temperatura con el exterior donde normalmente se consideraría que el sistema se encuentra aislado. Dicha interacción puede modelarse matemáticamente introduciendo en el operador de Lindblad, los siguientes operadores:

$$D(\gamma_i) = \sqrt{\gamma_i} |i\rangle\langle i|, \quad (50)$$

donde γ_i representa la intensidad de interacción del ruido ambiental o desfasamiento, con el sitio $|i\rangle$.

Se ha demostrado que si el desfasamiento es uniforme ($\gamma_i = \gamma$, $i = 1, 2, \dots, N$) rompe la coherencia del estado oscuro haciendo imposible su recuperación, obteniendo así un estado en el que la corriente es distinta de cero.

III.2.2 Aspectos generales sobre interacción *electrón-fonón* en puntos cuánticos

De forma generalizada un electrón en el sitio $|i\rangle$ interactúa linealmente con un fonón con modo localizado de acuerdo a la ecuación:

$$H_{\text{ph}} = \hbar\omega_0 a^\dagger a, \quad (51)$$

$$V_{\text{e-ph}} = \lambda d_i^\dagger d_i (a^\dagger + a), \quad (52)$$

donde H_{ph} representa al hamiltoniano fonónico sin interacción y $V_{\text{e-ph}}$ representa la interacción electrón-fonón. Similarmente, se puede agregar más de una interacción con distintas intensidades. Un sistema triple con una interacción conectada en el sitio $|2\rangle$ ha sido estudiada previamente (Domínguez *et al.*, 2011). Motivados por dicha investigación, es que se propone para la presente tesis, investigar el efecto que tiene sobre el sistema triple, dos interacciones en los sitios $|1\rangle$ y $|2\rangle$ con distintas intensidades. Del mismo modo se desea estudiar el efecto que tendrían tres interacciones en los sitios $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|4\rangle$ con distintas intensidades para el sistema cuádruple.

III.2.3 Estados oscuros en el sistema de tres puntos cuánticos

En la presente sección discutiremos el fenómeno de los *estados oscuros* para un sistema de triple punto cuántico, así como los efectos producidos en este tipo de estados debido a una interacción fonónica (modo vibracional) aplicada en los sitios, basados en el modelo de Domínguez *et al.* (2011). En el trabajo antes mencionado, se consideran solo los efectos de una interacción fonónica en uno de los puntos cuánticos, mientras que en nuestro trabajo consideraremos el caso dos interacciones fonónicas. Como veremos a continuación, la simplicidad del sistema de triple punto cuántico nos permitirá investigar si es posible manipular las interacciones fonónicas para controlar los estados oscuros. Los resultados obtenidos para este modelo particular podrán ser generalizados al caso de sistemas más complejos, como lo es el caso del sistema cuádruple de puntos cuánticos que se estudiará en el presente trabajo de tesis.

Iniciamos nuestra discusión con un sistema de *Triple Punto Cuántico* (TPC por sus siglas) inspirado en el modelo de Domínguez *et al.* (2011) que se muestra en la figura 9, solo que en nuestro estudio consideraremos un caso más general que incluye distintos

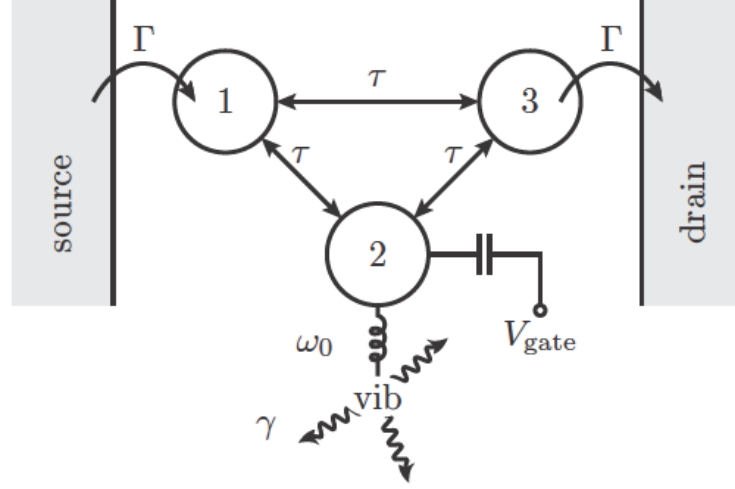


Figura 9: Sistema de triple punto cuántico acoplado a una fuente y un sumidero con energías de sitio ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 , y tuneleos entre los los puntos cuánticos dados por τ . El punto cuántico 2 interacciona con un modo vibracional de frecuencia ω_0 . Tomado de Domínguez *et al.* (2011).

valores para los tuneleos, t_{ij} , entre los puntos cuánticos i y j del sistema. En dicha configuración de TPC es posible obtener un estado oscuro considerando los siguientes valores de las energías de sitio: $\epsilon_3 = 0$, $\epsilon_1 = \Delta$ y $\epsilon_2 = -\Delta$. Dichos estados se obtienen siempre que se cumpla la condición

$$\Delta \equiv \Delta_0 = \frac{t_{12}}{2t_{13}t_{23}} (t_{13}^2 - t_{23}^2), \quad (53)$$

que nos conduce a un estado de la forma,

$$|\Psi_{\text{dark}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{t_{13}^2 + t_{23}^2}} (t_{23} |1\rangle - t_{13} |2\rangle). \quad (54)$$

Los estados oscuros se manifiestan como ceros de la corriente electrónica promedio $\langle I \rangle$ como función del detuning Δ . Ver la figura 10. Estos estados ocurren para valores de $\Delta = \Delta_0$, los cuales determinan el valor mínimo de la corriente electrónica, $\langle I \rangle \equiv \langle I \rangle_0 = 0$. Además, se ha demostrado (Domínguez *et al.*, 2011) que la aplicación de una interacción fonónica caracterizada por un solo modo de oscilación con intensidad

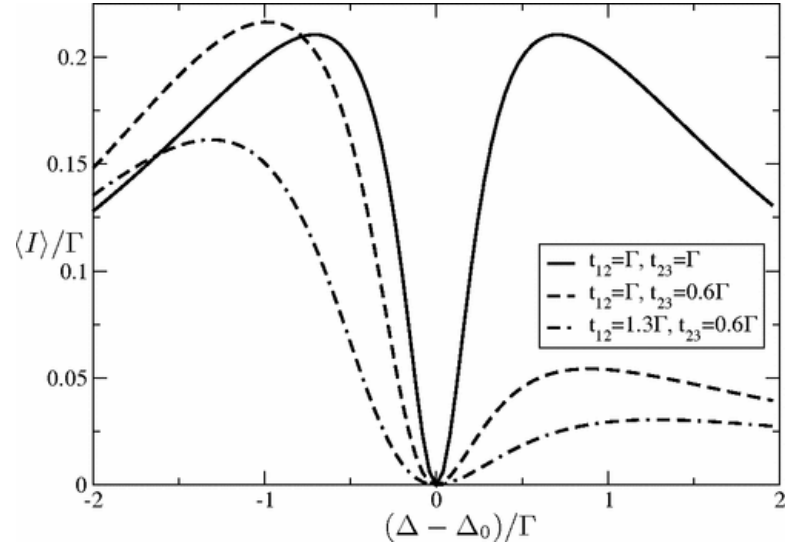


Figura 10: Corriente estacionaria en un sistema de TPC en una configuración triangular para distintos valores de los tuneleos t_{ij} .

$\lambda = \omega_0$ (ver ecuación (43) con $\eta = 0$), tiene la propiedad de destruir el estado oscuro. Dicha destrucción se manifiesta como un incremento en el valor mínimo de la corriente, $\langle I \rangle_0 \rightarrow \langle I \rangle_0 + \varepsilon$, el cual ocurre ahora en $\Delta = \Delta_0 + \delta$, en donde $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ son pequeños corrimientos en la corriente y en el detuning, respectivamente,. En el caso particular de tuneleos simétricos $t_{ij} = t$, el mínimo de corriente ocurre en $\varepsilon_2 = \lambda^2 / \hbar \omega_0$ a su vez que ocurre un levantamiento de la cantidad mínima que puede alcanzar la corriente del sistema. Por un lado, el corrimiento en la posición del mínimo puede explicarse mediante la *Transformación de Polarón* (TP por sus siglas). Los detalles sobre la TP se discuten en el apéndice B. La TP permite hacer una descripción del sistema de puntos cuánticos removiendo la interacción fonónica. Por otro lado, el “levantamiento” del mínimo de la corriente puede ser explicado con ayuda de la ecuación de Lindblad transformada a la base de Polarón. Para esto, partimos de una transformación unitaria del operador de Lindblad en el cual sea posible remover la interacción fonónica de la ecuación (43 con $\eta = 0$). Dicho operador tiene la forma:

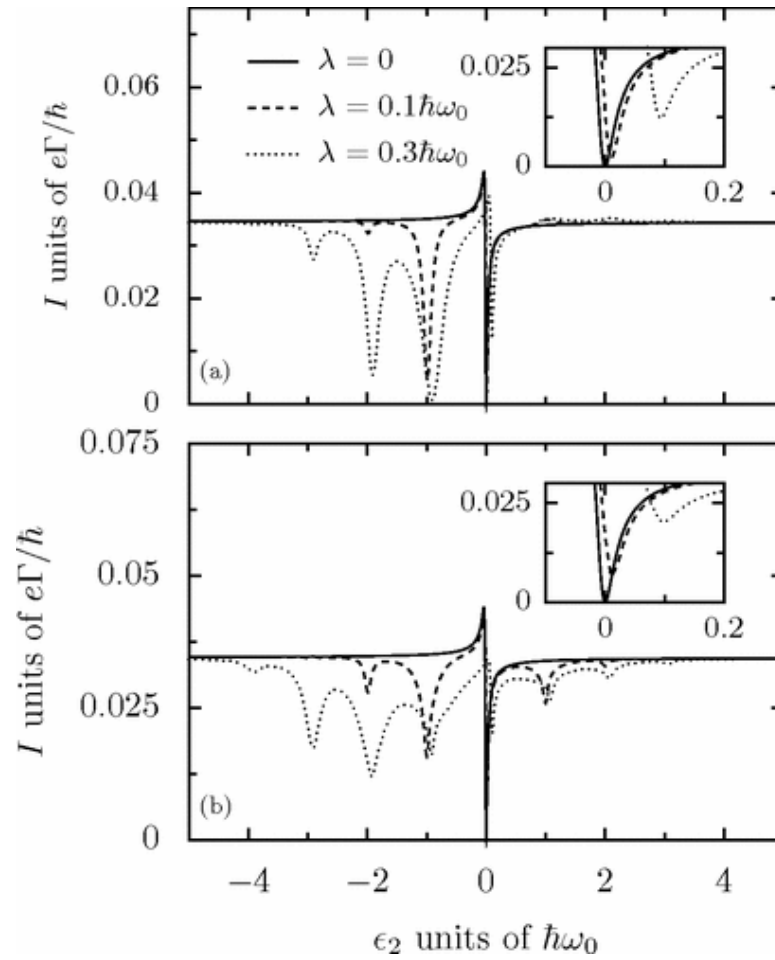


Figura 11: Corriente estacionaria en un sistema de tres puntos cuánticos para distintos valores de la intensidad de interacción fonónica, la corriente muestra picos de emisión y absorción debido a la interacción electrón-fonón y el mínimo de corriente se desplaza cuando varía la intensidad de la interacción además de que hay un levantamiento en la corriente. Tomado de Domínguez *et al.* (2011).

$$S = \exp \left[\frac{\lambda n_2}{\hbar \omega_0} (a^\dagger - a) \right]. \quad (55)$$

Definiendo $\alpha = \lambda n_2 / \hbar \omega_0$ la aplicación de dicha transformación resulta en el reemplazo de los operadores:

$$a \rightarrow \bar{a} = a - \alpha, \quad (56)$$

y para los operadores electrónicos:

$$d_2^\dagger \rightarrow \bar{d}_2^\dagger = d_2^\dagger X_\lambda, \quad (57)$$

donde

$$X_\lambda = \exp \left[\frac{\lambda}{\hbar \omega_0} (a^\dagger - a) \right]. \quad (58)$$

Los detalles de dicha transformación y su generalización para distintas interacciones y configuración de cuatro puntos cuánticos se presentan en el apéndice B.

El punto crucial es que como resultado de dicha transformación, la ecuación de Lindblad exhibe una serie de términos que tienen la misma estructura que la de un *desfasamiento*, (Michaelis *et al.*, 2006) localizado en el sitio en donde inicialmente se aplicó la interacción fonónica, esto es, tenemos un término de la forma

$$\mathcal{L}_{\text{dec} \rho_e} = \frac{\gamma}{2} (1 + 2\bar{n}) \left(\frac{\lambda}{\hbar \omega_0} \right)^2 (2n_2 \rho_e n_2 - \{n_2, \rho_e\}). \quad (59)$$

donde γ es el parámetro de interacción entre el sistema y el medio disipativo, λ es la interacción entre el sistema electrónico y el modo fonónico de oscilación y \bar{n} representa el número de ocupación térmica determinado por:

$$\bar{n} = [\exp(\hbar \omega_0 / k_B T) - 1]^{-1}. \quad (60)$$

Si redefinimos el término

$$\Gamma_{Dec} = \frac{\gamma}{2} (1 + 2\bar{n}) \left(\frac{\lambda}{\hbar \omega_0} \right)^2, \quad (61)$$

la ecuación (59) se escribe en una forma más simple en la que es posible identificar la forma decoherente del desfaseamiento. Este desfaseamiento localizado, tiene la capacidad de destruir el estado oscuro y el mecanismo por el cual lo consigue, es rompiendo la segunda propiedad de un estado oscuro, es decir que:

$$\frac{d}{dt}\rho \neq 0. \quad (62)$$

En términos generales el desfaseamiento, es como se conoce al ruido ambiental que puede ser modelado introduciendo en la ecuación de Lindblad para sistemas abiertos, los operadores de desfaseamiento

$$D(\gamma_i) = \sqrt{\gamma_i} |i\rangle \langle i|, i = 1, 2, 3, 4. \quad (63)$$

En la figura 11 se muestran los efectos de una interacción fonónica de intensidad λ en un sistema de TPC, en donde se muestran varias curvas de corriente como función de la energía. Observe los corrimientos, tanto en el mínimo de la corriente como en la posición del mismo, al variar el valor de la intensidad λ .

Uno de los resultados importantes que se desprende del estudio de este sistema de TPC con interacción fonónica, es que hemos encontrado que la aplicación de un *desfaseamiento* en solo uno de los sitios, es una condición suficiente para destruir un *estado oscuro* del sistema. Sin embargo, hemos encontrado que una interacción de *desfaseamiento* del tipo:

$$\mathcal{L}_{def-i}\rho = \gamma_i (2n_i\rho n_i - \{n_i, \rho\}), \quad (64)$$

puede ser removida introduciendo un nuevo operador de desfaseamiento en el espacio de Liouville de la forma:

$$\mathcal{L}_{def(i,j)}\rho = 2\gamma_{ij} (n_i\rho n_j + n_j\rho n_i). \quad (65)$$

El término anterior tiene la propiedad de remover una combinación de desfaseamientos en los sitios de la forma $(\mathcal{L}_{def-i} + \mathcal{L}_{def-j})\rho$, con la condición $2\gamma_{ij} = \gamma_i + \gamma_j$. Es un ejemplo de

dicha destrucción de la coherencia y su posterior recuperación mediante desfasamiento localizado y desfasamiento interdó. Es por ello que motivados por dicha condición, hemos decidido explorar el efecto de una doble interacción fonónica en los sitios $|1\rangle$ y $|2\rangle$ con intensidad η y λ respectivamente, estudiando los términos que preceden de la transformación de polarón que remueve dichas interacciones, encontrando que dicha interacción puede contener un estado oscuro, es decir, poder recuperar la coherencia del sistema, así como poder extrapolar los resultados obtenidos a un sistema de cuatro puntos cuánticos con tres interacciones η , λ y ζ respectivamente en los sitios $|1\rangle$, $|2\rangle$ y $|4\rangle$.

III.2.4 Configuración de Cuatro Puntos Cuánticos

En esta sección se presenta el estudio de los *estados oscuros* en distintas configuraciones del sistema de cuádruple punto cuántico (CPC). La caracterización de los estados oscuros se basa en un estudio sistemático en donde se exploran las distintas propiedades de simetría del sistema, y que involucra el manejo de distintas configuraciones de las energías de sitio ϵ_i , así como de los tuneleos t_{ij} . El propósito es obtener expresiones analíticas como función de los parámetros anteriores que nos permitan determinar bajo que condiciones es posible obtener los *estados oscuros* del sistema. Además, para todos los casos analizados, se resuelve la ecuación de Lindblad en equilibrio para calcular la corriente promedio, sin considerar las interacciones bosónicas en una primera instancia. Lo anterior se complementa con la solución de la ecuación de eigenvalores para el hamiltoniano del sistema, dicho eigenestado debe ser tal que su componente asociada al sitio conectado al sumidero (sitio n_3) sea nula. Nuestras fórmulas analíticas para determinar los estados oscuros serán contrastadas con las gráficas de corriente como función de los parámetros de interés.

La estructura de esta sección es la siguiente. Se analizan los tres casos de simetría

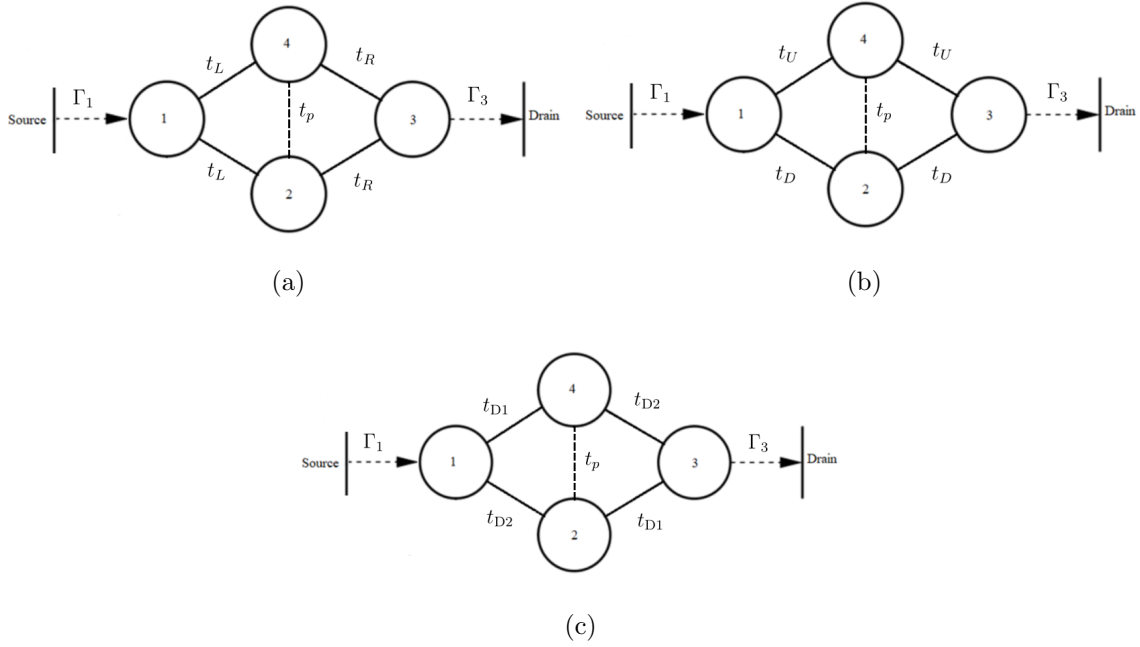


Figura 12: Esquema de las distintas configuraciones simétricas de los tuneleos para la búsqueda de las condiciones para la formación de los estados oscuros en un CPC.

en la configuración de tuneleos para cuatro casos de interés. Identificamos estos casos con la siguiente notación: $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$ para las energías de sitio, mientras que para los tuneleos $\{t_{14}, t_{12}, t_{23}, t_{34}, t_p\}$. En general elegimos las energías de sitio: $\epsilon_1 = \Delta$, $\epsilon_3 = 0$, $\epsilon_2 = -\omega$ y $\epsilon_4 = \omega$. Los casos de simetría analizados son: simetría en tuneleos laterales $\{t_L, t_L, t_R, t_R, t_p\}$, simetría en tuneleos superior e inferior $\{t_U, t_D, t_D, t_U, t_p\}$ y simetría en tuneleos diagonales $\{t_{D1}, t_{D2}, t_{D1}, t_{D2}, t_p\}$. Ver la figura 12. Para estos casos que involucran configuraciones simétricas, se exploran los estados oscuros para los casos en los que $t_p = 0$ con $\Delta = 0$ y $\Delta = \omega$. El análisis de simetrías se realiza nuevamente para el caso en donde $t_p \neq 0$ y para los mismos espectros de energías $\Delta = 0$ y $\Delta = \omega$.

III.2.5 Configuración de Cuatro Puntos Cuánticos sin tuneleo en paralelo

La configuración más simple de un CPC es aquella en donde $t_p = 0$ y todos los tuneleos son iguales *i.e.* $t_{ij} = t$. Esta configuración ya ha sido estudiada por (Wang *et al.*, 2011) En su estudio, utilizan la configuración de las energías de sitio $\epsilon_1 = \Delta$, $\epsilon_2 = -\omega$, $\epsilon_4 = \omega$ y $\epsilon_3 = 0$. En este caso se tiene que los electrones pueden entrar al sistema mediante un reservorio acoplado al primer sitio como se aprecia en la figura 13. Una de las ventajas que ofrece el modelo es que nos permite obtener una fórmula analítica simple para la corriente electrónica, la cual podemos inspeccionar para determinar los estados oscuros. Con los parámetros del sistema mencionados anteriormente, el cálculo de la corriente

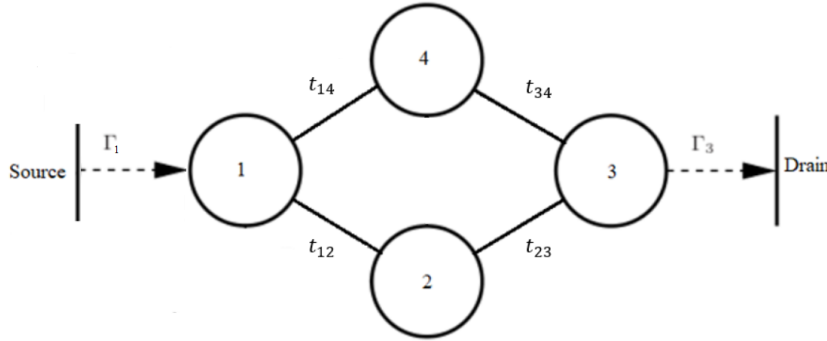


Figura 13: Configuración del sistema para el caso estudiado en (Wang *et al.*, 2011). Se realiza una generalización en la cual los tuneleos pueden ser diferentes entre ellos

en el régimen estacionario toma la siguiente forma:

$$I = \frac{16\Gamma t^4 \Delta^2}{A}; \quad (66)$$

$$A = 16t^2 \Delta^2 \omega^2 + 4\Gamma^2 t^2 \Delta^2 + 16t^2 \Delta^4 + 64t^4 \Delta^2 + 4\Gamma^2 t^4 + 4\Gamma^2 t^2 \omega^2 + 4\Delta^6 \\ + \Gamma^2 \Delta^4 - 8\Delta^4 \omega^2 - 2\Gamma^2 \Delta^2 \omega^2 + 4\Delta^2 \omega^4 + \Gamma^2 \omega^4. \quad (67)$$

Vemos que cuando $\Delta = 0$ la corriente es nula, la cual es una de las propiedades que definen a los *estados oscuros*. Otra propiedad que deben cumplir los estados oscuros es que estos deben ser eigenestados del hamiltoniano cuya componente asociada al sitio del sumidero, sea nula.

Calculando este eigenestado al cual denotaremos como $|\Psi_{dark}\rangle$ obtenemos:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 2t^2}}(\omega |1\rangle + t |2\rangle - t |4\rangle). \quad (68)$$

Observamos en la ecuación anterior que ω puede tomar cualquier valor siempre que Δ sea igual a cero.

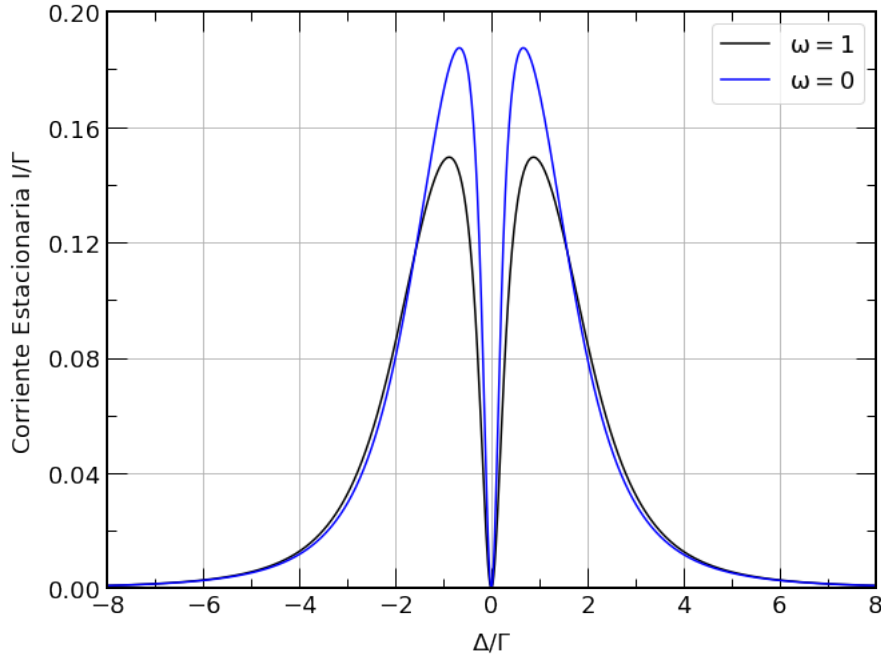


Figura 14: Comportamiento de la corriente estacionaria. La configuración utilizada es: $t_{ij} = t = 1$ y $\{\Delta, -\omega, 0, \omega\}$. El estado oscuro se forma cuando $\Delta = 0$, sin importar el valor que tome ω .

En la figura 14 se muestra el comportamiento de la corriente, donde esta tiene una caída drástica donde el parámetro Δ tiende a cero, esto sin importar el valor que pueda tomar ω .

III.2.6 Cuatro puntos cuánticos con tuneleos generalizados sin tuneleo en paralelo ($t_p = 0$)

Tomamos en cuenta que los tuneleos son distintos entre ellos. Realizando un cálculo de la corriente estacionaria obtenemos la siguiente expresión para la corriente:

$$I = B/C, \quad (69)$$

donde

$$B = 4(t_{34}t_{12}(2t_{23}^2(\omega(\Delta - \omega) - t_{14}^2) + t_{14}^2t_{34}^2) + t_{14}t_{23}t_{34}^2(2\omega(\Delta + \omega) - t_{14}^2) + t_{23}^2t_{34}t_{12}^3 - t_{14}t_{23}(t_{23}^2 - 2t_{34}^2)t_{12}^2)^2 \quad (70)$$

y para la cual, el denominador C cuenta con una cantidad lo suficientemente grande de términos tal que no pueden ser incluidos en la presente tesis. Tal como en el caso estudiado por Wang *et al.* (2011), el estado oscuro de forma particular se forma cuando $\Delta = 0$, por lo que haciendo esto podremos ver si en general con este valor para la energía de sitio $\epsilon_1 = \Delta = 0$, se puede obtener alguna condición para ω . El numerador de la expresión para la corriente $I = B/C$ se simplifica como:

$$B = 4(t_{12}t_{34}t_{23}^2(t_{12}^2 - 2(t_{14}^2 + \omega^2)) + t_{14}t_{34}^2t_{23}(2(t_{12}^2 + \omega^2) - t_{14}^2) - t_{12}^2t_{14}t_{23}^3 + t_{12}t_{14}^2t_{34}^3)^2. \quad (71)$$

Vemos que esta ecuación es nula cuando toma cualesquiera de los siguientes dos valores:

$$\omega_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{t_{14}t_{23} - t_{12}t_{34}}(t_{12}t_{23} + t_{14}t_{34})}{\sqrt{2t_{14}t_{23}t_{34}^2 - 2t_{12}t_{23}^2t_{34}}}. \quad (72)$$

De aquí vemos que no es posible ver la forma que adquiere ω cuando los tuneleos son iguales, debido a la indeterminación de la ecuación. Sin embargo, esto nos permite explorar los siguientes tres casos con las siguientes simetrías:

Caso 1.- Simetría en Tuneleos Laterales y $\Delta = 0$

En este caso los tuneleos $t_{14} = t_{12} = t_L$ y $t_{23} = t_{34} = t_R$ nos conducen al siguiente estado oscuro como parte del sistema de eigenestados del hamiltoniano:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 2t_L^2}}(\omega |1\rangle + t_L |2\rangle - t_L |4\rangle). \quad (73)$$

Vemos que en este estado, al igual que el caso más sencillo resuelto anteriormente en el que los tuneleos son iguales entre ellos, ω puede tomar cualquier valor siempre que $\Delta = 0$. En este caso, es posible obtener una superposición entre los sitios 2 y 4 haciendo $\omega = 0$ y el estado resultante será el mismo. Además, es imposible obtener una superposición entre los sitios $|1\rangle$ y $|4\rangle$ o $|1\rangle$ y $|2\rangle$ ya que el sistema aísla al estado $|1\rangle$ del resto. Podemos visualizar la formación de este estado oscuro partiendo de la configuración de los tuneleos, y ver la forma que adopta la corriente. Esto es, a partir de la ecuación (70) para la corriente con $\Delta \neq 0$ se tiene que:

$$B = 16\Delta^2 t_L^2 t_R^2, \quad (74)$$

en donde claramente el estado oscuro se crea con $\Delta = 0$, como habíamos previsto, y queda esquematizado en la figura 15.

Caso 2.- Simetría en Tuneleos Superior e Inferior y $\Delta = 0$

En este caso consideramos los tuneleos $t_{14} = t_{34} = t_U$ y $t_{12} = t_{23} = t_D$, manteniendo $t_p = 0$. Vemos que con esto, la corriente estacionaria adquiere un valor que es distinto de cero aún cuando $\Delta = 0$:

$$B = 4\omega^2 (t_D^2 - t_U^2)^2. \quad (75)$$

Para este caso, el parámetro ω no puede tomar cualquier valor, sino que debe

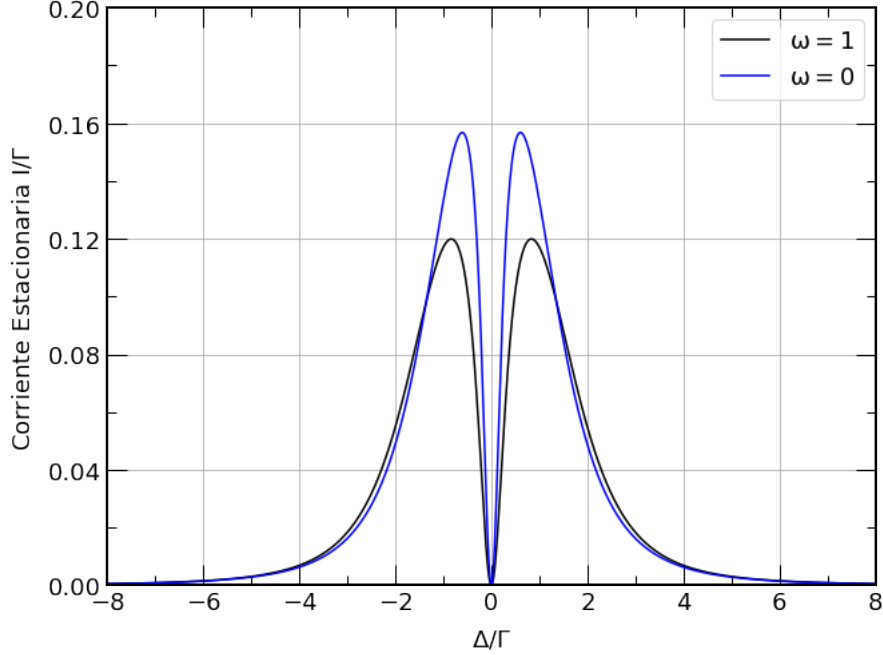


Figura 15: Corriente estacionaria en función del parámetro Δ para la configuración $\{t_L, t_L, t_R, t_R, 0\}$ y $\{\Delta, -\omega, 0, \omega\}$. El estado oscuro se forma nuevamente cuando $\Delta = 0$ sin importar el valor de ω . Se utilizaron los parámetros $t_L = 0.9$ y $t_R = 0.8$.

cumplirse que $\omega = 0$ para garantizar la existencia de un estado oscuro, el cual toma la forma:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{t_U^2 + t_D^2}}(t_U |2\rangle - t_D |4\rangle). \quad (76)$$

De esto podemos ver que la superposición de estados se da únicamente entre los sitios $|2\rangle$ y $|4\rangle$, esto dado que según la forma del estado en superposición de los 3 sitios, el sitio $|1\rangle$ está acompañado por el valor de la energía de los sitios restantes ω y dado que para la existencia del estado oscuro, ω forzosamente debe ser igual a cero, es entendible que no haya contribución por parte del estado $|1\rangle$. Debido a esto, es de interés conocer una configuración que permita una superposición de los tres sitios.

En la figura 16 se aprecia como aún cuando $\Delta = 0$ se tiene que la corriente es en general distinta de cero, excepto cuando $\omega = 0$.

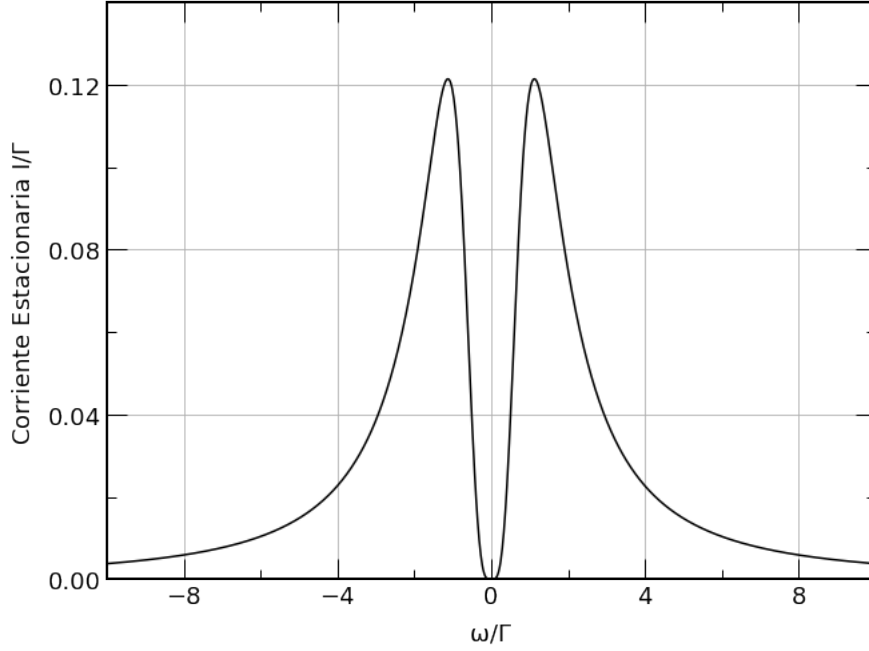


Figura 16: Comportamiento de la corriente como función del parámetro ω una vez que se ha definido al valor Δ en cero, para este caso se tiene que $t_U = 0.5$ y $t_D = 0.9$.

Caso 3.- Simetría en Tuneleos de las Diagonales del Sistema y $\Delta = 0$

En este caso hacemos $t_{14} = t_{23} = t_{D1}$ y $t_{12} = t_{34} = t_{D2}$; y a diferencia del caso anterior, esta configuración no tiene solución para encontrar un estado oscuro. Esto es claramente visible por la forma del numerador en la ecuación para la corriente estacionaria:

$$B = 16t_{D2}^2 (\Delta\omega - t_{D1}^2 + t_{D2}^2)^2, \quad (77)$$

por lo que otra configuración de las energías de sitio pudiera ser necesaria para encontrar un estado oscuro. Claramente la condición $\Delta = 0$ elimina la contribución de ω en el numerador de la corriente y dada la suma de los tuneleos de las diagonales, la corriente nunca será nula bajo esta configuración.

En la figura 17 se presenta la corriente como función de ω cuando $\Delta = 0$, y vemos que la corriente no tiende a cero de ningún modo.

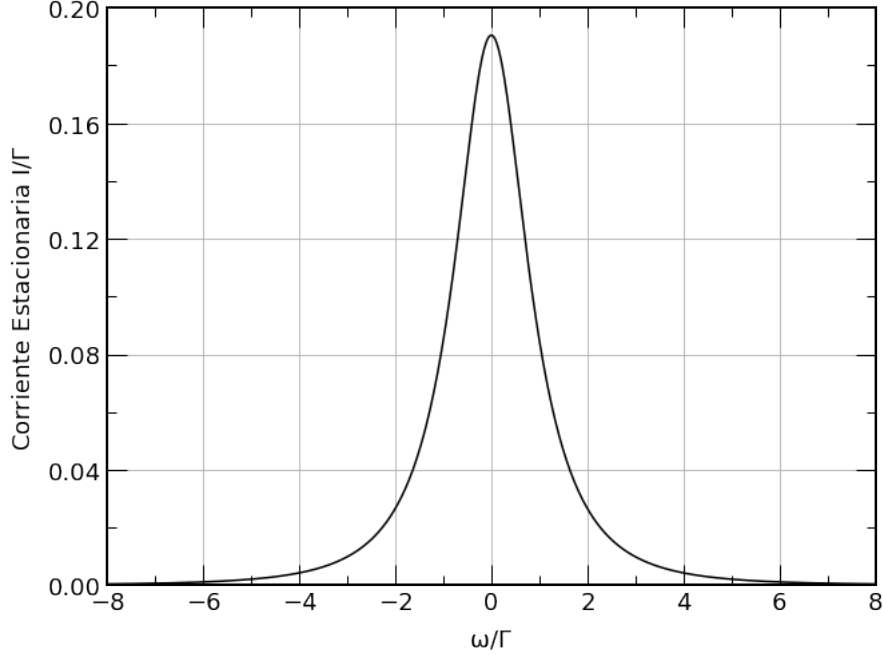


Figura 17: Corriente estacionaria como función de ω con una configuración de simetría en los tuneos de las diagonales, no hay posibilidad de obtener un estado oscuro. En la gráfica se utilizaron los parámetros $t_{D1} = 0.9$ y $t_{D2} = 0.5$.

III.2.7 Detuning $\Delta = \omega \neq 0$

Cuando realizamos esta configuración, la forma de la corriente, se ve modificada, y tomamos el numerador como se ha realizado hasta ahora:

$$B = 2 \left(-t_{14}t_{23}t_{34}^2 (t_{14}^2 - 4\omega^2) + t_{23}^2t_{34}t_{12}^3 - t_{14}t_{23} (t_{23}^2 - 2t_{34}^2) t_{12}^2 + t_{14}^2t_{34} (t_{34}^2 - 2t_{23}^2) t_{12} \right)^2. \quad (78)$$

las condiciones necesarias para que la corriente se anule son:

$$\omega_{\pm} = \pm \frac{(t_{12}t_{23} + t_{14}t_{34}) \sqrt{(t_{14}t_{23} - t_{12}t_{34})}}{2t_{34}\sqrt{t_{14}t_{23}}}. \quad (79)$$

Con ayuda de esta expresión, nos resulta muy útil realizar el mismo procedimiento con los tres casos mencionados, ya que en esta ocasión ω puede tomar únicamente dos

valores.

Caso 1.- Simetría en Tuneleos Laterales

Adoptando la misma nomenclatura para los tuneleos, vemos que la corriente estacionaria es:

$$I = \frac{4\omega^2 t_L^2 t_R^2}{2\omega^2 t_L^2 (\Gamma^2 + 2t_R^2 + 4\omega^2) + (\Gamma^2 + 8\omega^2) t_L^4 + 4\omega^2 t_R^4}. \quad (80)$$

Se sigue de la ecuación anterior y la ecuación para ω_{\pm} con los tuneleos seleccionados que $\omega_+ = \omega_- = 0$. Sustituyendo estos resultados para el cálculo de eigenvectores de H , vemos que el estado oscuro adopta la forma más simple posible:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |4\rangle). \quad (81)$$

En la figura 18 podemos ver la corriente asociada a dicho estado oscuro y a la ecuación (80), vemos que cuando $t_R > t_L$ la corriente es mayor que en el caso en el cual $t_L > t_R$.

Caso 2.- Simetría en Tuneleos Superiores e Inferiores

La corriente es de la forma:

$$I = \frac{16\omega^2 t_U^4}{(\Gamma^2 + 4\omega^2) t_D^4 + 2(\Gamma^2 - 4\omega^2) t_D^2 t_U^2 + t_U^2 (8\omega^2 (\Gamma^2 + 4\omega^2) + (\Gamma^2 + 68\omega^2) t_U^2)}, \quad (82)$$

donde nuevamente de esta ecuación y de la ecuación para ω_{\pm} se tiene que ambos valores son nulos y además, el cálculo de eigenvectores del hamiltoniano, nos indica que el estado oscuro bajo estas condiciones toma la forma:

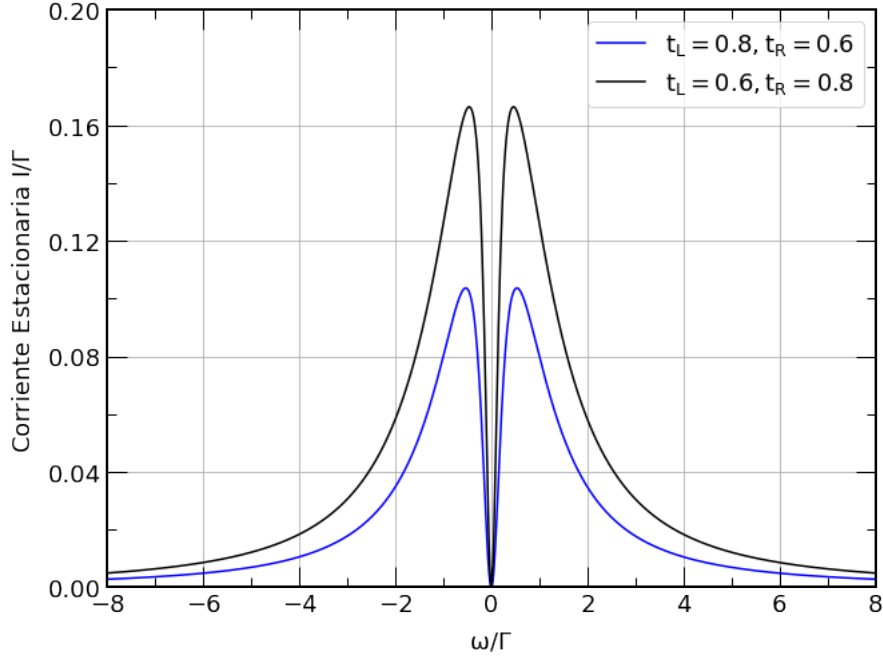


Figura 18: Corriente estacionaria en función del parámetro ω , para distintos valores de los tuneleos t_L y t_R . El estado oscuro se forma únicamente cuando ω tiende a cero.

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{t_U^2 + t_D^2}}(t_U |2\rangle - t_D |4\rangle). \quad (83)$$

Dicho estado es el mismo que en el caso en el cual el detuning Δ es igual a cero ya que para esta configuración, ω es estrictamente igual a cero, es decir que hemos recuperado el mismo resultado porque los parámetros deben ser estrictamente los mismos, aunque la forma de la corriente tome una forma inicial diferente. La información que pueda extraerse del estado oscuro obtenido en esta configuración, es la misma que en la sección a la que se hace mención.

Al igual que en la figura 18, en la figura 19 se tiene un comportamiento similar en el comportamiento de la corriente, en la cual la corriente es mayor cuando se tiene una configuración en la que $t_U > t_D$.

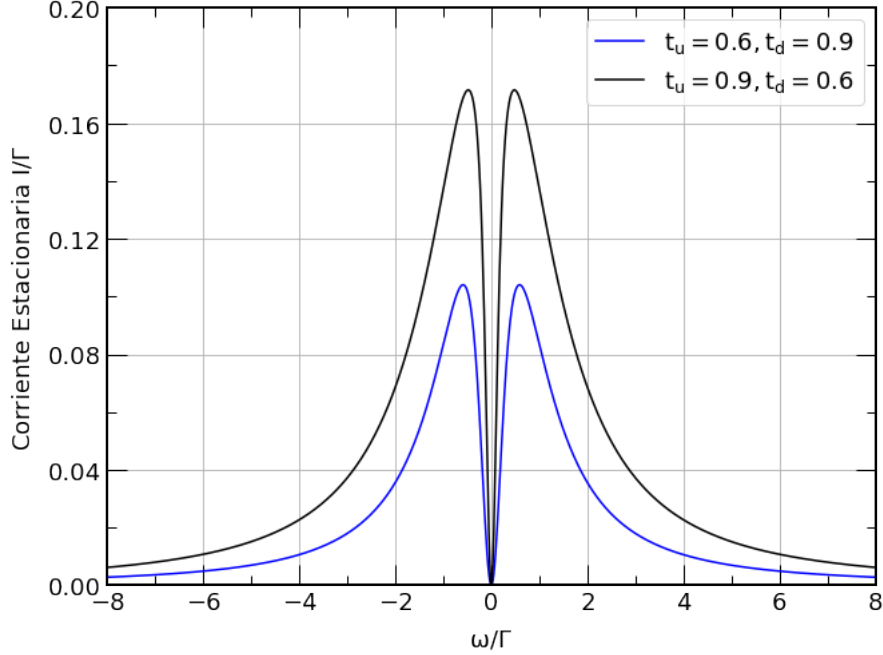


Figura 19: Gráfica de la corriente estacionaria como función del parámetro ω para la configuración de tuneles con simetría superior e inferior. Las gráficas son indicadas para dos configuraciones de tuneles diferentes.

Caso 3.- Simetría en Tuneles Diagonales

Bajo esta configuración, el sistema presenta el siguiente numerador B para la corriente estacionaria:

$$B = 8t_{D1}^2 t_{D2}^2 (-t_{D1}^2 + t_{D2}^2 + \omega^2)^2, \quad (84)$$

mediante el cual es posible obtener una expresión para ω , que nos permita encontrar en un estado oscuro:

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{t_{D1}^2 - t_{D2}^2}, \quad (85)$$

y

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\omega_{\pm}^2 + t_{D1}^2 + t_{D2}^2}}(\omega_{\pm}|1\rangle + t_{D2}|2\rangle - t_{D1}|4\rangle). \quad (86)$$

de las ecuaciones (85) y (86) se podría argumentar que si se quiere una superposición coherente, basta con hacer $t_{D1} = 0$ y de este modo obtener una superposición entre el sitio $|1\rangle$ y $|4\rangle$ o bien haciendo $t_{D2} = 0$ obteniendo así la superposición de los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$. Sin embargo esto no es posible, ya que esta proposición, aísla los sistemas de forma que se rompe la conducción de la fuente con el sumidero de electrones como se ve en la figura 20 para el caso en el que $t_{D2} = 0$. Esto es, el sistema $|1\rangle$ y $|4\rangle$ queda aislado del sistema $|2\rangle$ y $|3\rangle$ por lo cual no es posible afirmar que se trate de un estado oscuro.

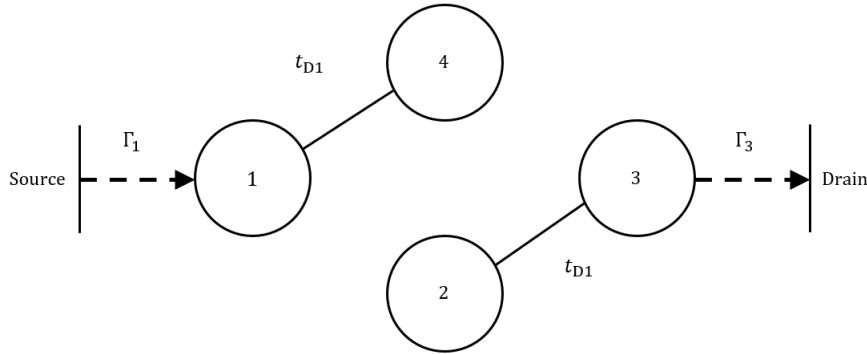


Figura 20: Sistema para el cual se ha establecido que el tunelamiento $t_{D2} = 0$. Existe superposición de estado oscuro entre los sitios $|1\rangle$ y $|4\rangle$ pero este es debido a la interrupción de la corriente en el sistema.

En la figura 21 la corriente presenta un comportamiento distinto al observado hasta el momento. Ésta presenta dos estados oscuros según sea el valor de ω (ver ecuación 86), se tiene además que de la ecuación (86), el valor de ω se indetermina cuando $t_{D2} > t_{D1}$ y esto se muestra en la figura 21, en la cual se ve que para esa configuración, no es posible obtener un estado oscuro.

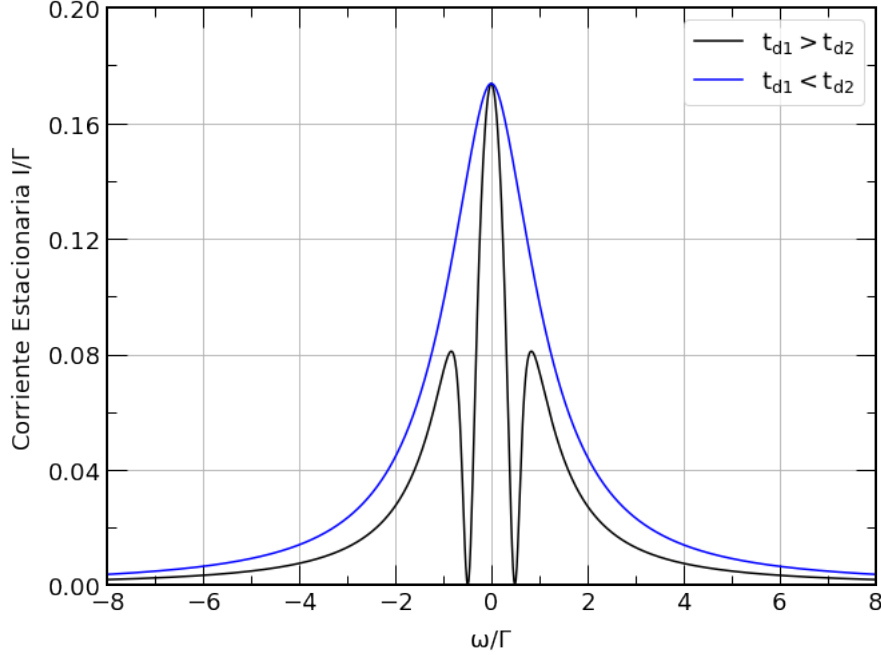


Figura 21: Gráfica de la corriente estacionaria como función de las energías de sitio para la configuración de tuneleos simétricos en diagonal, se presentan dos estados oscuros dependiendo del valor de ω , el estado oscuro se destruye cuando $t_{D2} > t_{D1}$, (Se utilizó para la gráfica un valor de 0.7 para el tuneleo mayor y 0.5 para el tuneleo menor)

III.2.8 Configuración con Tuneleo en Paralelo

Tomando como referencia la figura en la que un electrón puede pasar del sitio 4 al sitio 2 vía $t_{24} = t_p$, un análisis similar al mencionado anteriormente nos muestra las siguientes propiedades comenzando por la corriente y el valor de ω :

$$\begin{aligned}
 B = & 4(t_{12}(t_{23}^3(\Delta - \omega)t_p + t_{34}t_{23}^2(2\omega(\Delta - \omega) + t_p^2 - 2t_{14}^2) - t_{34}^2t_{23}(\Delta - 3\omega)t_p \\
 & + t_{34}^3(t_{14}^2 - t_p^2)) + t_{14}(t_{34}t_{23}^2(\Delta + 3\omega)t_p + t_{34}^2t_{23}(2\omega(\Delta + \omega) - t_p^2 - t_{14}^2) \quad (87) \\
 & - t_{34}^3(\Delta + \omega)t_p + t_{23}^3t_p^2) + t_{23}^2t_{34}t_{12}^3 - t_{14}t_{23}(t_{23}^2 - 2t_{34}^2)t_{12}^2)^2.
 \end{aligned}$$

De aquí es fácil intuir que el camino a seguir es el mismo que en los casos anteriores realizando casos de simetría diferentes entre ellos.

Caso 1.-Tuneleos Laterales y $\Delta = 0$

En el caso en que $\Delta = 0$ se puede obtener una expresión para ω :

$$\omega_{\pm} = \frac{\alpha \pm \beta}{4t_{23}t_{34}(t_{14}t_{34} - t_{12}t_{23})}, \quad (88)$$

donde

$$\alpha = [t_{14}t_{34}(t_{34}^2 - 3t_{23}^2) + t_{12}(t_{23}^3 - 3t_{23}t_{34}^2)] t_p, \quad (89)$$

y

$$\beta = (t_{12}t_{23} + t_{14}t_{34}) \sqrt{(t_{23}^2 + t_{34}^2)^2 t_p^2 + 8t_{34}t_{23}(t_{14}t_{34} - t_{12}t_{23})(t_{14}t_{23} - t_{12}t_{34})}. \quad (90)$$

Esta expresión se indetermina cuando $t_{14}t_{34} - t_{12}t_{23} = 0$, es decir, en el caso en el que $t_{14} = t_{12}$ y a su vez $t_{34} = t_{23}$ *i. e.* en el caso de simetría en tuneleos laterales. Sin embargo, también se puede dar en el caso en el que $t_{14} = t_{23}$ y a su vez $t_{12} = t_{34}$, es decir en el caso de simetría de los tuneleos en diagonal.

Por consiguiente tomamos el caso de simetría en tuneleos laterales y vemos que:

$$I = \frac{16t_L^2 t_p^2 t_R^2}{\Gamma^2 \omega^4 + 4t_L^2 (\Gamma^2 \omega^2 + t_p^2 (\Gamma^2 + 4t_R^2)) + 4t_L^4 (\Gamma^2 + 12t_p^2) + 2t_p^2 (\Gamma^2 \omega^2 + 8t_R^4) + \Gamma^2 t_p^4}, \quad (91)$$

donde ω no contribuye en la formación de un estado oscuro y la corriente es nula únicamente cuando alguno de los tuneleos sea nulo.

Caso 2.-Tuneleos Superiores e Inferiores y $\Delta = 0$

Este caso es el único que no se indetermina cuando se realiza un análisis de simetrías y la corriente toma el valor:

$$I = \frac{4 [2t_D t_p t_U + \omega (t_U^2 - t_D^2)]^2}{D}, \quad (92)$$

con

$$D = 2t_D^2 [\Gamma^2(t_p^2 + \omega^2) + t_U^2(\Gamma^2 + 40t_p^2 - 20\omega^2)] - 80\omega t_D^3 t_p t_U + 80\omega t_D t_p t_U^3 + (\Gamma^2 + 20\omega^2)t_D^4 + \Gamma^2(t_p^2 + \omega^2)^2 + 2\Gamma^2 t_U^2(t_p^2 + \omega^2) + (\Gamma^2 + 20\omega^2)t_U^4 \quad (93)$$

y de la ecuación para ω y de la corriente vemos que el estado oscuro se forma cuando:

$$\omega = \frac{2t_D t_p t_U}{t_D^2 - t_U^2}, \quad (94)$$

que sustituyéndolo en el hamiltoniano, conduce a un estado oscuro (no normalizado) de la forma:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{t_p(t_D^2 + t_U^2)}{t_D^2 - t_U^2} |1\rangle + t_U |2\rangle - t_D |4\rangle. \quad (95)$$

observamos del estado (95) que cuando $t_p = 0$ se recupera el estado oscuro de la ecuación (76), sin embargo, este estado guarda una peculiaridad, y es que permite que tanto $t_U = 0$ como $t_D = 0$ ya que tanto ω (que claramente en ambos casos toma el valor $\omega = 0$) como $|\Psi_{dark}\rangle$ no se indeterminan y toman los siguientes valores cuando $t_U = 0$:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{t_p^2 + t_D^2}} (t_p |1\rangle - t_D |4\rangle), \quad (96)$$

y si $t_D = 0$

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{t_p^2 + t_U^2}} (t_p |1\rangle - t_U |2\rangle). \quad (97)$$

Finalmente analizando el caso en el que $t_p = 0$ se recupera que:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{t_U^2 + t_D^2}} (t_U |2\rangle - t_D |4\rangle). \quad (98)$$

De la figura 22, es fácil ver que todas estas configuraciones son completamente válidas, la primera y la segunda, representa una configuración idéntica de punto colgante donde

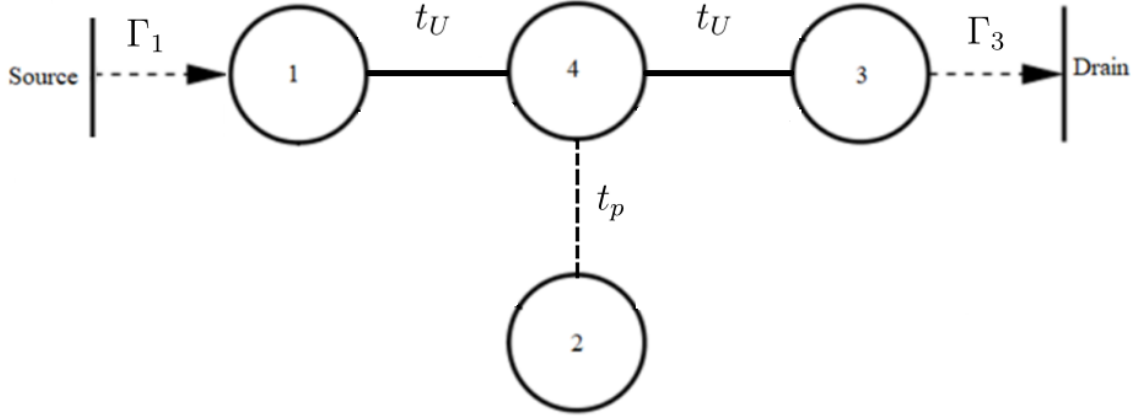


Figura 22: Configuración de punto cuántico colgante obtenida haciendo $t_D = 0$

todas las energías de sitio son iguales a cero ($\Delta = \omega = \epsilon = 0$) donde lo único que estamos cambiando es la etiqueta del tuneleo y el estado que contribuye a la energía. Es decir que es indistinto decir que se trata del estado $|2\rangle$ con tuneleo t_U o si se trata del estado $|4\rangle$ con tuneleos t_D . El último caso claramente representa al sistema sin probabilidades de transición del estado $|2\rangle$ al estado $|4\rangle$. En la figura 23 se muestra la corriente como función de ω para esta configuración. En la figura 23 a) vemos que el valor de ω varía según sea la configuración y cambia de signo dependiendo de qué tuneleo sea mayor en magnitud (ver ecuación (94))

Caso 3.-Tuneleos en las Diagonales y $\Delta = 0$

Para este sistema, el numerador de la corriente estacionaria B toma la forma:

$$B = 4 \left(2\omega t_{D1} t_{D2} t_p (t_{D1}^2 + t_{D2}^2) + t_p^2 (t_{D1}^4 - t_{D2}^4) - 4t_{D1}^4 t_{D2}^2 + 4t_{D1}^2 t_{D2}^4 \right)^2, \quad (99)$$

del cual podemos obtener una expresión analítica para ω de tal modo que se obtenga un estado oscuro

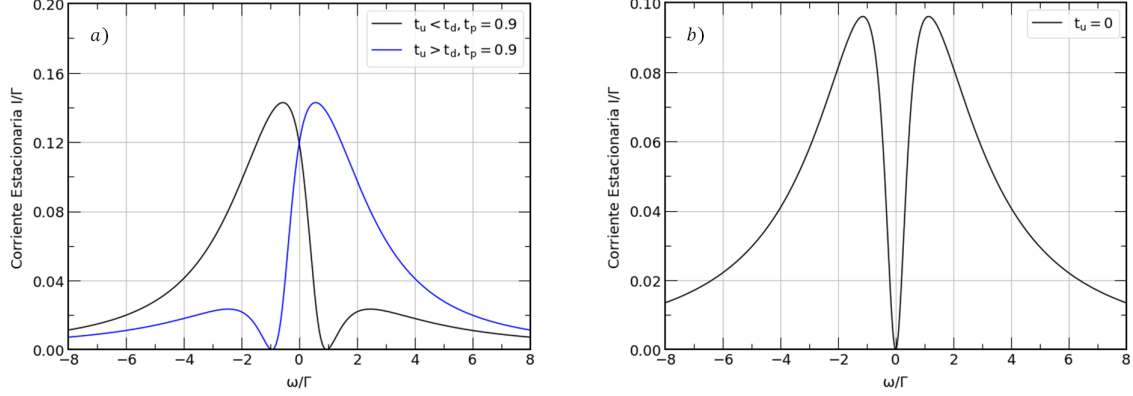


Figura 23: Corriente estacionaria como función de ω para detectar estados oscuros con la configuración en paralelo $t_p = 0.9$ y $\Delta = 0$. a) Se tiene una simetría de reflexión con respecto a los tuneleos mayores y menores (con valor de 0.7 y 0.3 respectivamente), el cero de la corriente varía según sea la configuración del sistema alternando de signo, cuando $t_U > t_D$, entonces $\omega > 0$ y si $t_U < t_D$ entonces $\omega < 0$. b) Sistema de punto colgante $t_U = 0$ y $t_D = 0.7$, este sistema muestra un estado oscuro único similar al caso en el que $\omega = 0$ para los casos anteriores.

$$\omega = \frac{2t_{D1}t_{D2}(t_{D1}^2 - t_{D2}^2)}{t_p(t_{D1}^2 + t_{D2}^2)} + \frac{t_p(t_{D2}^2 - t_{D1}^2)}{2t_{D1}t_{D2}}, \quad (100)$$

con el cual se obtiene un estado oscuro (no normalizado) con la forma:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{2t_{D1}t_{D2}(t_{D1}^2 - t_{D2}^2)}{t_p(t_{D1}^2 + t_{D2}^2)} |1\rangle + t_{D2} |2\rangle - t_{D1} |4\rangle. \quad (101)$$

De aquí vemos que si deseamos construir una superposición coherente como la que se realizó en el caso anterior, esto no es posible debido a que el sistema con $t_{D1} = 0$ o $t_{D2} = 0$ pasa a ser uno de cuatro puntos cuánticos conectados todos en serie. Al resolver este sistema, vemos que no tiene como solución un estado oscuro para algún valor de ω .

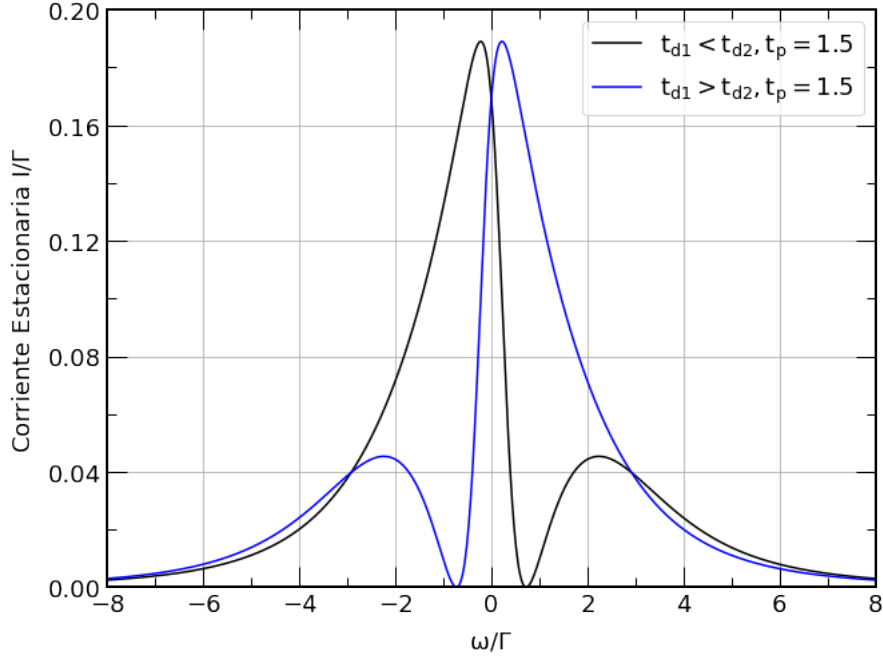


Figura 24: Corriente estacionaria con tuneleo en paralelo $t_p = 1.5$ como función del parámetro ω . Se tiene una simetría de reflexión con respecto a los tuneleos mayores y menores (con valor de 1 y 0.5 respectivamente). El estado oscuro se forma con $\omega > 0$ o $\omega < 0$ según sea la configuración de los tuneleos de las diagonales.

De la figura 24 se tiene un comportamiento similar al de la figura 23 a) en la que el estado oscuro depende de si ω toma un valor positivo o negativo según sea la elección de los parámetros de tuneleo, manteniendo además una simetría intercambiando los valores de los tuneleos.

III.2.9 Detuning $\Delta = \omega$

Cuando las energías de sitio están relacionadas entre ellas, se tiene una ecuación general que garantiza la existencia de un estado oscuro con los tuneleos todos distintos entre ellos:

$$\omega_{\pm} = \frac{(t_{14}(t_{34}^2 - 2t_{23}^2) - t_{12}t_{23}t_{34})t_p \pm (t_{12}t_{23} + t_{14}t_{34})\sqrt{t_{34}^2t_p^2 + 4t_{14}t_{23}(t_{14}t_{23} - t_{12}t_{34})}}{4t_{14}t_{23}t_{34}}. \quad (102)$$

Esta ecuación, nos indica que los casos de simetría analizados hasta ahora, también son de interés en esta configuración, como lo discutimos a continuación.

Caso 1.-Tuneleos Laterales

Vemos que bajo esta configuración, la corriente es proporcional a la siguiente expresión:

$$I \propto 16t_L^2 t_R^2 (t_p + \omega)^2, \quad (103)$$

de aquí o de la ecuación para ω_{\pm} se sigue que

$$\omega = -t_p, \quad (104)$$

con el cual se obtiene el siguiente eigenestado oscuro:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{t_p^2 + 2t_L^2}}(-t_p |1\rangle + t_L |2\rangle - t_L |4\rangle); \quad (105)$$

lo destacable de este estado es que en el sitio $|1\rangle$ participa el valor de ω .

En la figura 25 se muestra la corriente como función de ω donde vemos que se rompe la simetría de reflexión cuando alternamos los tuneleos mayores. Esto es claro pues ω ya no tiene un valor simétrico con respecto a los tuneleos t_R y t_L

Caso 2.-Tuneleos Superiores e Inferiores

De manera similar, en esta configuración podemos obtener una ecuación para ω que hasta este momento es única:

$$\omega = -\frac{t_D t_p}{t_U}. \quad (106)$$

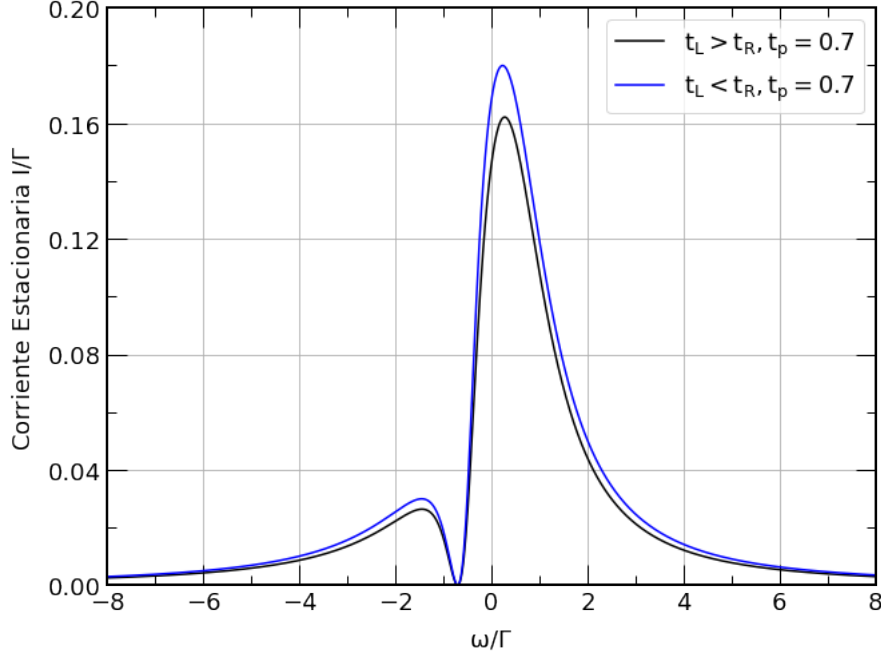


Figura 25: Corriente como función de ω para la configuración de tuneles laterales, se rompe la simetría de reflexión al alternar los tuneles mayores y menores (con valor de 0.65 y 0.6 respectivamente). El cero de corriente se forma en $\omega = -t_p = 0.7$

Del cual es posible obtener un estado oscuro de la forma:

$$|\Psi_{dark}\rangle = \frac{1}{\sqrt{t_p^2 + t_U^2 + t_D^2}}(-t_p |1\rangle + t_U |2\rangle - t_D |4\rangle). \quad (107)$$

Este resultado es de particular interés, pues si hacemos $t_D = 0$, se obtiene una superposición coherente de los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$, y si $t_U = 0$ (aunque pareciera que el valor de ω no lo permite, se puede demostrar que sí) se obtiene una superposición coherente entre el sitio $|1\rangle$ y $|4\rangle$. El sistema resultante de esta configuración, resulta ser el sistema de punto cuántico colgante. Es decir, que este sistema tiene como solución particular el sistema de punto cuántico colgante y dicho sistema también cuenta con estados oscuros. Este sistema se analizará con mayor detalle, pues resulta de mucho interés, ya que los dos casos son completamente diferentes. Si elegimos $t_p = 0$, como ya se ha tratado,

este sistema tiene solución y su estado es el ya conocido para el caso en el que todas las energías de sitio son iguales a cero.

Volviendo al punto colgante, aunque ya se había obtenido un resultado similar para el caso en el que $\Delta = 0$, este resultado, a diferencia del mencionado anteriormente, permite a las energías de sitio de los puntos cuánticos $|2\rangle$ y $|4\rangle$ ser distintas de cero. Dada la forma de ω nos indica que el análisis de cada caso debe realizarse por separado, ya que claramente si $t_D = 0$ se tiene que $\omega = 0$ y por tanto se recupera el caso mencionado, sin embargo si se soluciona el sistema en el que $t_U = 0$, esto no supone ninguna restricción para el valor de ω , de hecho el valor de la corriente es:

$$I = \frac{16t_U^2 (t_D t_p + \omega t_U)^2}{D}, \quad (108)$$

en donde

$$D = (\Gamma^2 + 4\omega^2)(t_D^2 + t_p^2)^2 + 2t_U^2(t_D^2(\Gamma^2 + 40t_p^2 - 4\omega^2) + (\Gamma^2 + 4\omega^2)(t_p^2 + 4\omega^2)) \\ + 8\omega t_D t_p t_U(\Gamma^2 - 2t_D^2 + 4\omega^2) + 144\omega t_D t_p t_U^3 + (\Gamma^2 + 68\omega^2)t_U^4. \quad (109)$$

De este resultado se sigue que cuando $t_U = 0$ la corriente es nula sin importar el valor que tome ω .

Caso 3.-Tuneleos en las Diagonales

El último caso de interés es en el que la configuración de tuneleos es tal que podemos definir los tuneleos en las diagonales. Dicha configuración es especialmente interesante porque nos permite obtener dos valores para ω :

$$\omega_{\pm} = \frac{-t_{D1}^2 t_p \pm t_{D2} \sqrt{4t_{D1}^2 (t_{D1}^2 - t_{D2}^2) + t_{D2}^2 t_p^2}}{2t_{D1} t_{D2}}. \quad (110)$$

Sustituyendo el valor de ω_{\pm} se obtiene un estado oscuro de la forma:

$$|\Psi_{dark}(\omega_{\pm})\rangle = -\frac{t_{D2} t_p \mp \sqrt{-4t_{D1}^2 t_{D2}^2 + 4t_{D1}^4 + t_{D2}^2 t_p^2}}{2t_{D1}} |1\rangle + t_{D2} |2\rangle - t_{D1} |4\rangle. \quad (111)$$

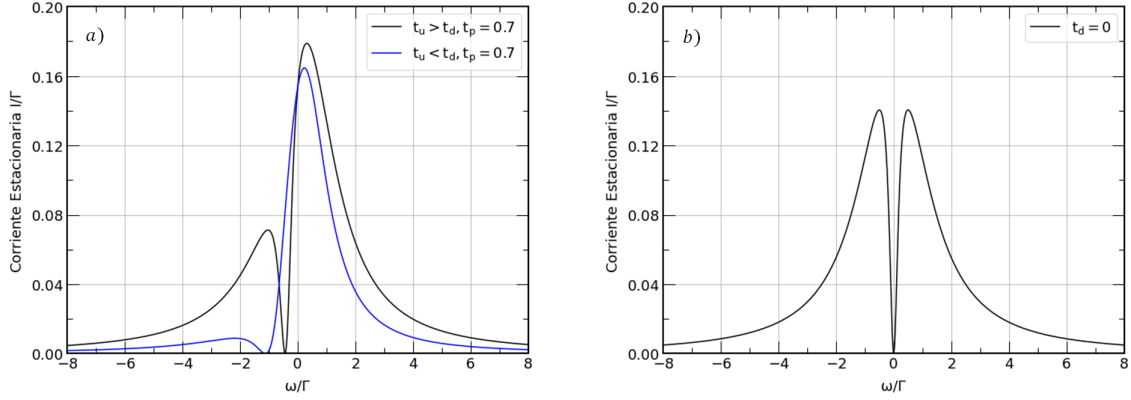


Figura 26: Corriente estacionaria con tuneleo en paralelo $t_p = 0.7$ como función de ω para una configuración de tuneleos superiores e inferiores. a) Alternando los tuneleos (Con valores de 0.8 y 0.5) cambia la distribución de la corriente y el origen del estado oscuro (ver ecuación (106)). b) Haciendo $t_U = 0$, la configuración es la de un sistema de tres puntos cuánticos conectados en serie con un punto cuántico colgante adicional, se presenta un estado oscuro cuando $\omega = 0$. En un caso diferente en el que $t_U = 0$ y $t_D = 0.8$, se tiene que la corriente se anula sin importar el valor que tome ω

Debido a la forma de ω_{\pm} , es imposible obtener una configuración para la cual $t_{D1} = 0$ o $t_{D2} = 0$, y que tal configuración contenga un estado oscuro como eigenestado del hamiltoniano.

En la figura 27 se muestra el comportamiento de la corriente y la formación de los estados oscuros para ω_{\pm} , y vemos que en todo momento los dos estados persisten aunque se trate de distintos valores para ω_{\pm} donde ya no forman una simetría en sus respectivos valores.

III.2.10 Desfasamiento

Partiendo de la suposición de que $|\Psi_{\text{dark}}\rangle$ adopta una forma generalizada tal que el estado oscuro esté únicamente desacoplado al sumidero, por lo tanto asumimos que

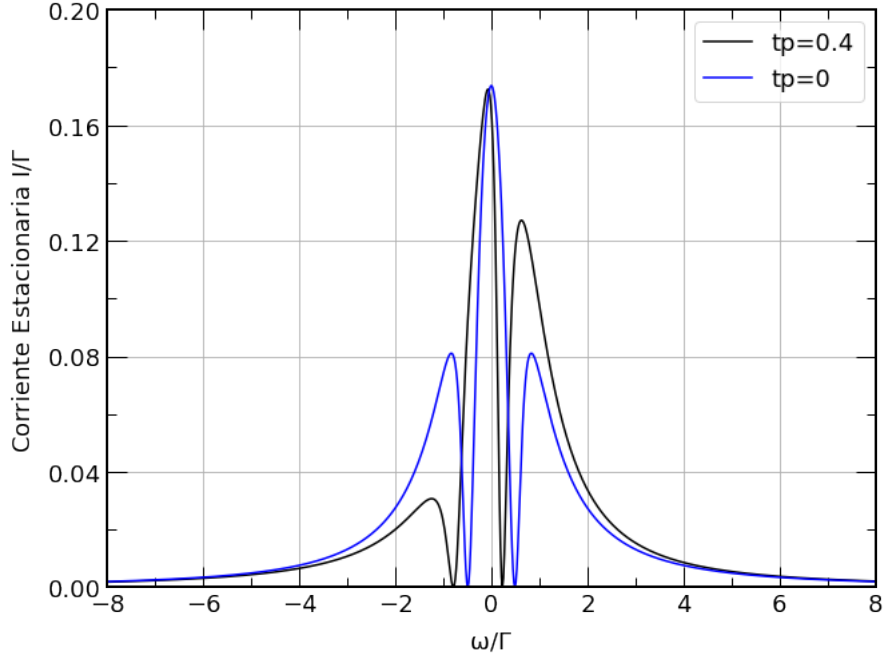


Figura 27: Corriente estacionaria como función del parámetro ω para una configuración de simetría en tuneleos diagonales. Para $t_p = 0$ se recupera el caso de la figura 21; cuando $t_p \neq 0$, se rompe la simetría de la distribución de la corriente, y la posición de los ceros de la corriente se recorre de acuerdo a la ecuación (110), se han utilizado para la gráfica los valores de $t_{D1} = 0.7$ y $t_{D2} = 0.5$ en ambos casos.

$|\Psi_{\text{dark}}\rangle$ es de la forma:

$$|\Psi_{\text{dark}}\rangle = \sum_{i \neq s}^N a_i |i\rangle, \quad (112)$$

donde el subíndice s representa el sitio al cual está conectado el sumidero electrónico y N es el número de puntos cuánticos del sistema. Es claro que el operador de densidad asociado (ρ_{dark}) tiene la forma:

$$\rho_{\text{dark}} = \sum_{i,j \neq s}^N a_i a_j^* |i\rangle\langle j|. \quad (113)$$

El desfaseamiento o *dephasing* es el nombre con el que se le conoce al ruido ambiental

que puede perturbar a un sistema cuántico. La forma en la que podemos modelar dicha interacción es introduciendo unos nuevos operadores en la ecuación de Lindblad del sistema. Dichos operadores toman la forma:

$$D(\gamma_i) = \sqrt{\gamma_i} |i\rangle\langle i|, \quad (114)$$

donde γ_i representa la intensidad de interacción localizada en el sitio n_i . Del mismo modo en que podemos definir un desfaseamiento localizado, podemos definir un desfaseamiento que interactúe entre los sitios n_i y n_j con intensidad γ_{ij} . Si bien es difícil determinar la forma que tendría un operador que entre en la ecuación de Lindblad, sí podemos decir qué forma adquiere una vez que se ha aplicado el operador de Lindblad (denotado como \mathcal{L} con estas decoherencias entre sitios en el operador de densidad, ρ

Adoptamos la notación $\{\gamma_1, \gamma_2, 0, \gamma_4\}$ para denotar a los desfaseamientos en sitio y $\{\gamma_{12}, \gamma_{14}, \gamma_{24}\}$ para denotar el desfaseamiento entre puntos, y para esto tomamos el caso de simetría en tuneleos laterales con tuneleo en paralelo. Podemos explorar varios casos de interés como los siguientes: $\{\gamma, \gamma, 0, \gamma\}$ con desfaseamiento entre puntos nulo ($\{0, 0, 0\}$), la configuración con desfaseamiento en un punto cuántico sin desfaseamiento entre puntos ($\{\gamma, 0, 0, 0\}$ y $\{0, 0, 0\}$), desfaseamiento en dos sitios con desfaseamiento entre puntos en los sitios participantes ($\{\gamma, \gamma, 0, 0\}$ y $\{\gamma, 0, 0\}$) y finalmente la configuración con todas las interacciones de desfaseamiento aplicables ($\{\gamma_1, \gamma_2, 0, \gamma_4\}$ y $\{\gamma_{12}, \gamma_{14}, \gamma_{24}\}$), para mostrar que los primeros tres casos destruyen el estado oscuro y el último caso lo mantiene siempre y cuando se cumpla la ecuación (120).

Partiendo de la suposición de que $|\Psi_{\text{dark}}\rangle$ es un estado oscuro del sistema. Su operador de densidad asociado ρ_{dark} toma la forma:

$$\rho_{\text{dark}} = \sum_{i,j \neq 3}^4 a_i a_j^* |i\rangle\langle j|. \quad (115)$$

Si aplicamos el operador de desfaseamiento en el estado oscuro y pedimos que sea un estado estacionario *i.e.* $\mathcal{L}_{\text{Def-}k}\rho_{\text{dark}} = 0$, obtenemos

$$\mathcal{L}_{\text{Def-}k}\rho_{\text{dark}} = -\frac{\gamma_k}{2} (a_k |k\rangle (a_l^* \langle l| + a_m^* \langle m|)) + \text{h.c.} \quad (116)$$

donde $k, l, m \neq 3$. Con el objetivo de recuperar la coherencia, se establecen los términos necesarios de forma artificial que logren eliminar las contribuciones del operador de Lindblad que destruyen al estado oscuro. Esto es, agregamos los términos de la forma:

$$\mathcal{L}_{\text{Def (i,j)}}\rho = \gamma_{ij}(n_i\rho n_j + n_j\rho n_i), \quad (117)$$

y con esto es claro que aplicado en ρ_{dark} se obtiene

$$\mathcal{L}_{\text{Def(i,j)}}\rho_{\text{dark}} = \gamma_{ij}a_i a_j^* |i\rangle \langle j| + \text{h.c.} \quad (118)$$

Por lo que para eliminar las contribuciones, es necesario agregar los términos de la siguiente manera

$$\mathcal{L}_{\text{Def}} = \mathcal{L}_{\text{Def-1}} + \mathcal{L}_{\text{Def-2}} + \mathcal{L}_{\text{Def-4}} + \mathcal{L}_{\text{Def(1,2)}} + \mathcal{L}_{\text{Def(1,4)}} + \mathcal{L}_{\text{Def(2,4)}} \quad (119)$$

de esta manera las intensidades deben cumplir la relación:

$$\gamma_{ij} = \frac{\gamma_i}{2} + \frac{\gamma_j}{2}. \quad (120)$$

Destrucción de la Coherencia

Iniciamos con los primeros tres casos con desfaseamiento, los cuales destruyen la coherencia en un estado oscuro. En los tres casos, encontramos que para un valor pequeño de desfaseamiento, el estado oscuro se destruye y la corriente vuelve a ser diferente de cero en el circuito. Es decir, que el estado ya no se encuentra en la superposición coherente descrita por la ecuación 105 y el sistema vuelve a estar acoplado al sitio 3.

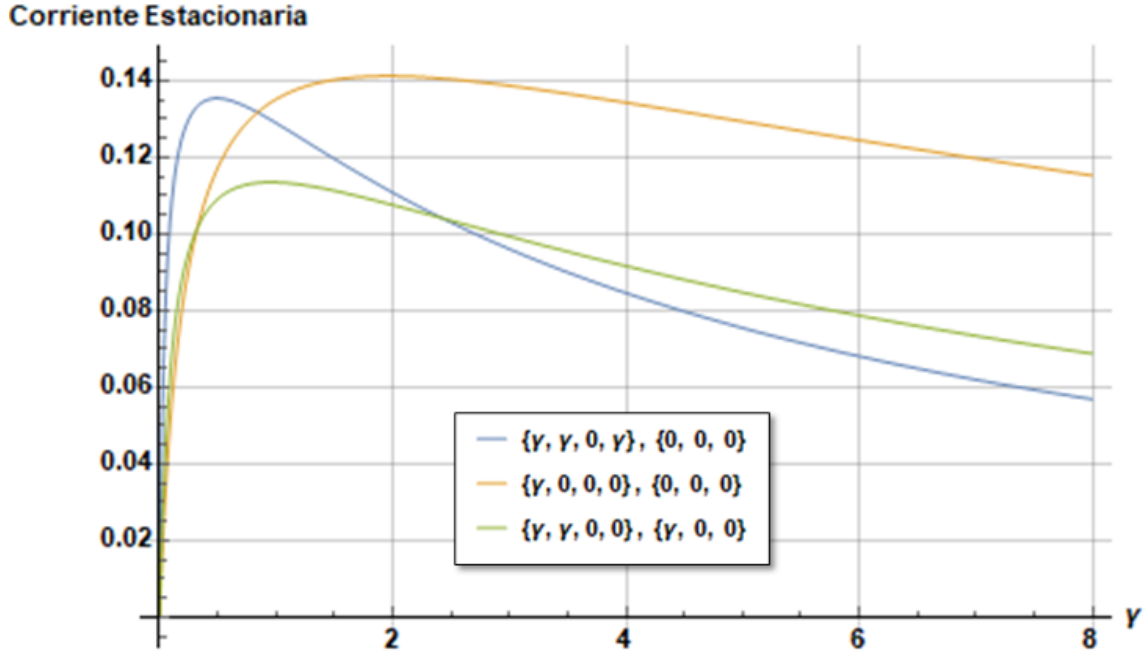


Figura 28: Destrucción de la coherencia debido a las distintas configuraciones de desfasamiento propuestas para las gráficas. Se utilizaron los parámetros $t_L = 0.6$, $t_R = 0.7$ y $t_p = 0.4$.

Configuración de Estado Oscuro

Para este caso en el que hacemos que se cumpla la condición de estado coherente, el estado oscuro es claramente recuperable en comparación con las figuras anteriores. Vemos que es posible obtener un estado oscuro si hacemos $\omega = -t_p$.

III.2.11 Interacción Fonónica

En esta sección trabajamos nuevamente con el sistema cuádruple de puntos cuánticos, y a su vez que trabajamos con el sistema triple estudiado por G. Platero, en los cuales estudiamos los efectos de interacción fonónica localizada en los sitios no asociados con el sumidero de electrones (dos interacciones en los sitios n_1 y n_2 con intensidades η y λ en el sistema triple y tres interacciones en los sitios n_1 , n_2 y n_4 con intensidades η , λ

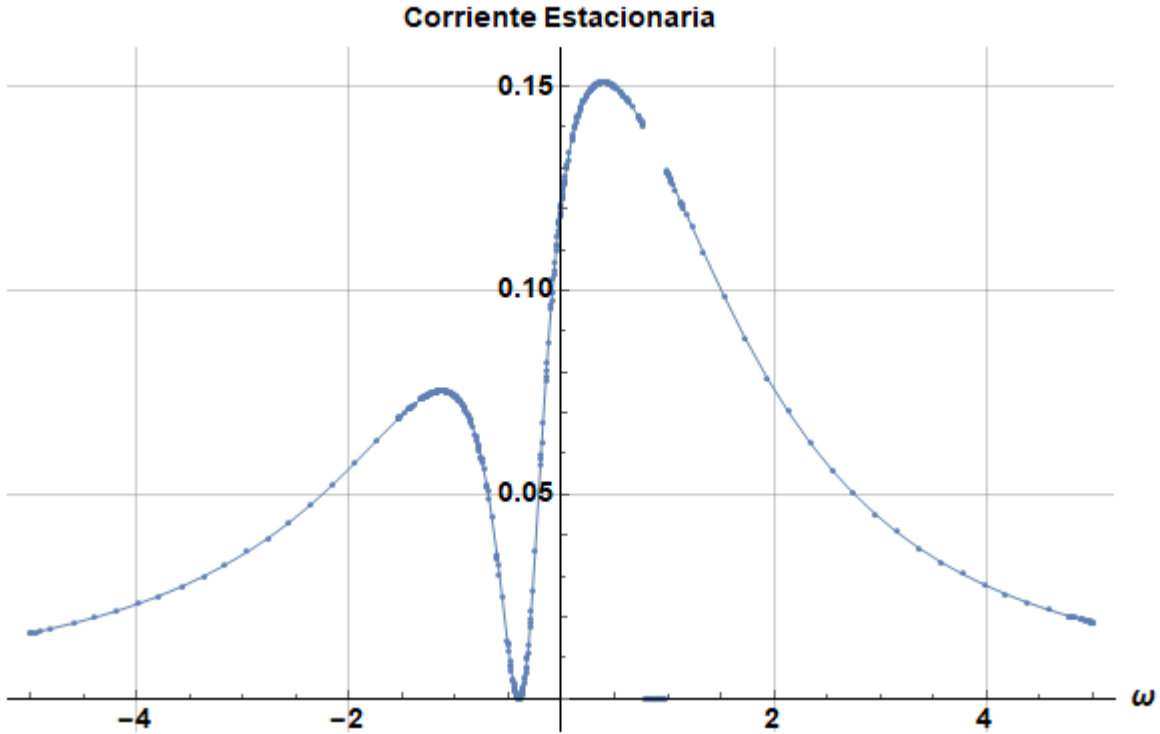


Figura 29: Recuperación de la coherencia utilizando la configuración propuesta de desfaseamientos en sitio e interdot, se utilizó $t_L = 0.6$, $t_R = 0.7$ y $t_p = 0.4$, el estado oscuro se recupera con $\omega = -t_p$.

y g respectivamente en el sistema cuádruple). Todo esto con el objetivo de estudiar si existe una configuración que contenga un estado oscuro. Por simplicidad se trabaja en una configuración en la cual todos los tuneleos son iguales entre ellos y la configuración energética utilizada es $\{0, \omega, 0\}$ siguiendo la línea de investigación de (Domínguez *et al.*, 2011) en el triple y $\{0, 0, 0, \omega\}$ para el sistema cuádruple. La elección de esta configuración nace del estudio analítico de las ecuaciones resultantes de la Transformación de Polarón de la ecuación de Lindblad (ver apéndice B para más detalle acerca de la derivación de dichos resultados analíticos). Dichas ecuaciones permiten encontrar el mínimo de corriente (cuando resultan términos decoherentes) o el estado oscuro (cuando el análisis resulta en términos coherentes).

Interacción en triple punto cuántico

Dado que estamos trabajando en la configuración de tuneleos $\{t, t, t\}$ y la configuración energética $\{\omega, -\omega, 0\}$, contiene un estado oscuro cuando $\omega = 0$. Por lo que la configuración trabajada en esta sección $\{0, \omega, 0\}$ también contiene dicho estado cuando $\omega = 0$. Cuando se tiene una configuración más general $\{t_{12}, t_{23}, t_{13}\}$ y las configuraciones energéticas $\{\omega, -\omega, 0\}$ el estado se forma en

$$\omega = \frac{t_{12}}{2t_{13}t_{23}}(t_{13}^2 - t_{23}^2). \quad (121)$$

Sin embargo, es más sencillo de analizar en términos de la diferencia de energías $\epsilon_1 - \epsilon_2$:

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = \frac{t_{12}}{t_{13}t_{23}}(t_{13}^2 - t_{23}^2), \quad (122)$$

en donde con esta diferencia de energías podemos determinar la condición necesaria para la existencia del estado oscuro sin importar la configuración energética por lo que podemos establecer a la ecuación anterior como la primera condición que debe cumplir el sistema para obtener el estado oscuro. La TP y su posterior traza sobre los estados de oscilador para un sistema de tres puntos cuánticos conectados en configuración triangular resulta en una serie de operadores Lindbladianos de la forma:

$$\mathcal{L}\rho = \mathcal{L}_c(\tau_{ij})\rho + \mathcal{L}_{cont}\rho + \mathcal{L}_{Dec}\rho, \quad (123)$$

en donde τ_{ij} representa los tuneleos renormalizados debido a la interacción (ver apéndice B ecuación (182)), \mathcal{L}_{cont} representa al Lindbladiano debido a los contactos, el cual permanece invariante ante la transformación de Polarón y \mathcal{L}_{Dec} es un término que resulta de la transformación del término inicial disipativo (\mathcal{L}_{Dis}) y tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{Dec}\rho = \mathcal{L}_{deph-1}\rho + \mathcal{L}_{deph-2}\rho + \mathcal{L}_{deph-int(1,2)}, \quad (124)$$

donde \mathcal{L}_{deph-i} tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{deph-i}\rho = \Gamma(\xi_i^2)(2n_i\rho n_i - \{n_i, \rho\}) \quad (125)$$

y el término $\mathcal{L}_{deph-int(1,2)}$

$$\mathcal{L}_{deph-int(1,2)}\rho = 2\Gamma(\eta\lambda)(n_1\rho n_2 + n_2\rho n_1), \quad (126)$$

donde

$$\Gamma(\xi_i\xi_j) = \frac{\gamma}{2\omega_0^2}(2\bar{n} + 1)\xi_i\xi_j, \quad (127)$$

en donde ξ_i son las intensidades de las interacciones fonónicas. Analizando los terminos de la decoherencia $\mathcal{L}_{dec}\rho$ vemos que los efectos en el sistema, son los mismos que los de un desfaseamiento localizado en los sitios n_1 y n_2 con intensidades $\gamma(2\bar{n} + 1)\eta^2/2\omega_0$ y $\gamma(2\bar{n} + 1)\lambda^2/2\omega_0$ respectivamente a su vez que aparece un termino que relaciona a los dos sitios $\mathcal{L}_{deph-int(1,2)}\rho$ que tiene la forma de un desfaseamiento entre sitios con intensidad $\gamma(2\bar{n} + 1)\eta\lambda/2\omega_0$ (ver subsección anterior para más información sobre los efectos de los desfaseamientos y los desfaseamientos entre sitios). Estas tres intensidades juegan un papel muy importante en la búsqueda de un estado oscuro ya que los términos $\Gamma(\xi^2)$ cumplen con la condición necesaria para recuperar la coherencia cuando $\eta = \lambda$.

Así mismo, las energías renormalizadas permiten la formación de un estado oscuro de acuerdo a la ecuación (122). En la figura 30 se muestra el comportamiento de la corriente en función del parámetro de la energía de sitio ϵ_2 (sin normalizar) el estado oscuro se forma en $\omega = 0$, el cálculo numérico fue realizado tomando en cuenta la

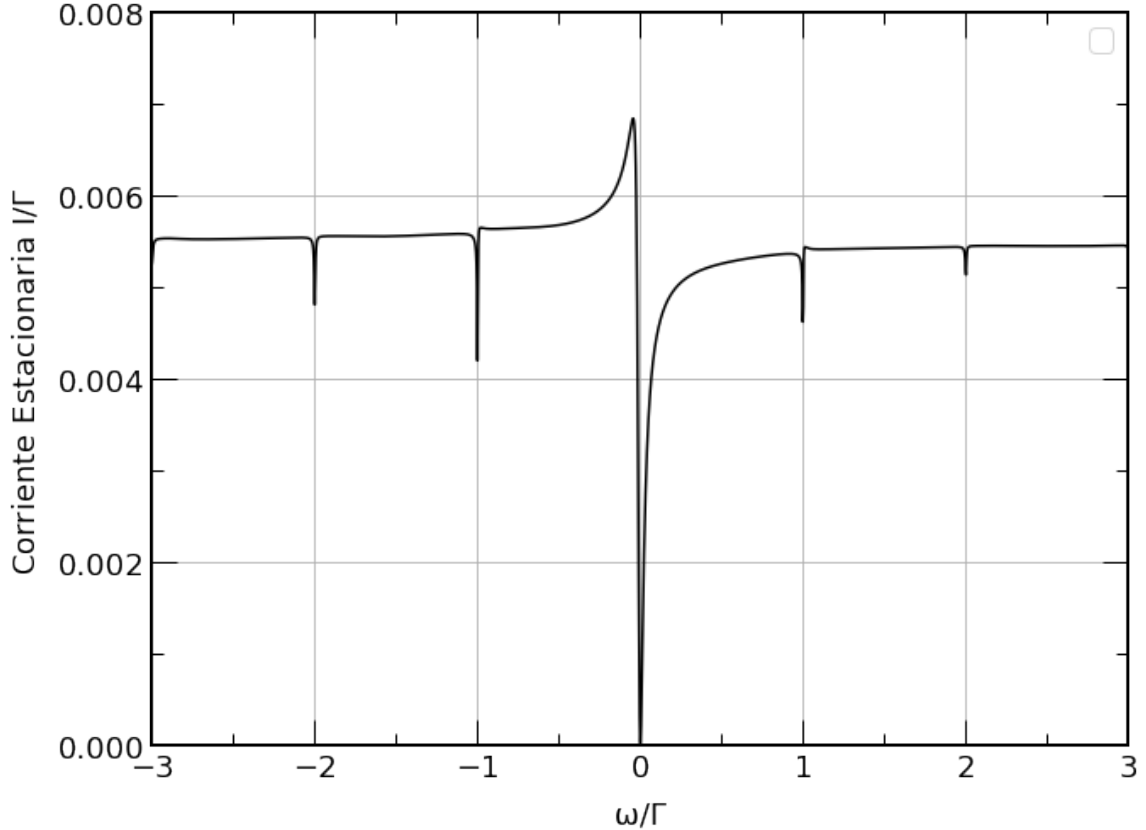


Figura 30: Corriente estacionaria como función del parámetro de sitio $\epsilon_2 = \omega$ el valor de los tuneles y el valor de la interacción de los contactos con los electrones son $\Gamma = 0.1\hbar\omega_0$ y $t = 0.01\hbar\omega_0$ el valor del parámetro de disipación es $\gamma = 0.0025\hbar\omega_0$ y el valor de la interacción fonónica en cada sitio es $\eta = \lambda = 0.3\hbar\omega_0$. Esta configuración se forma cuando $\omega = 0$ de acuerdo con las predicciones realizadas con ayuda de la TP.

ecuación de Lindblad en el espacio sin transformar. Si bien la TP nos permite hacer predicciones acerca de la formación del estado oscuro, los términos presentados en la presente tesis, no permiten predecir los picos de absorción o emisión debidos a la interacción electrón-fonón que se muestran en la figura. Esto se debe a que la TP la hemos realizado sobre la ecuación de Lindblad. Para una TP que reproduzca los resultados de la figura 30 es necesario realizar la transformación de sobre la ecuación maestra de Born-Markov (ecuación (128)). Esto lleva a términos incoherentes correspondientes a

los picos mostrados en las posiciones $n\hbar\omega_0$.

Interacción en Cuádruple punto cuántico

Extrapolando los resultados y la metodología del triple punto cuántico al cuádruple punto cuántico. La TP sobre la ecuación de Lindblad y todos los términos de forma explícita se encuentran en el Apéndice B. Al igual que en el caso del triple punto cuántico, la configuración que recupera la coherencia se da cuando $\eta = \lambda = g$ esto permite cumplir con las dos condiciones necesarias para la formación del estado oscuro, es decir, se recupera la coherencia con el sistema de ecuaciones de los términos de desfaseamiento a su vez que las diferencias de energía se mantienen invariantes. En la figura 31 se muestra una gráfica de la corriente estacionaria en términos del parámetro asociado a la energía de sitio ϵ_2 el estado oscuro se forma nuevamente en $\omega = 0$ a diferencia del sistema triple, los picos de absorción y emisión muestran un desdoblamiento en las posiciones $n\hbar\omega_0$.

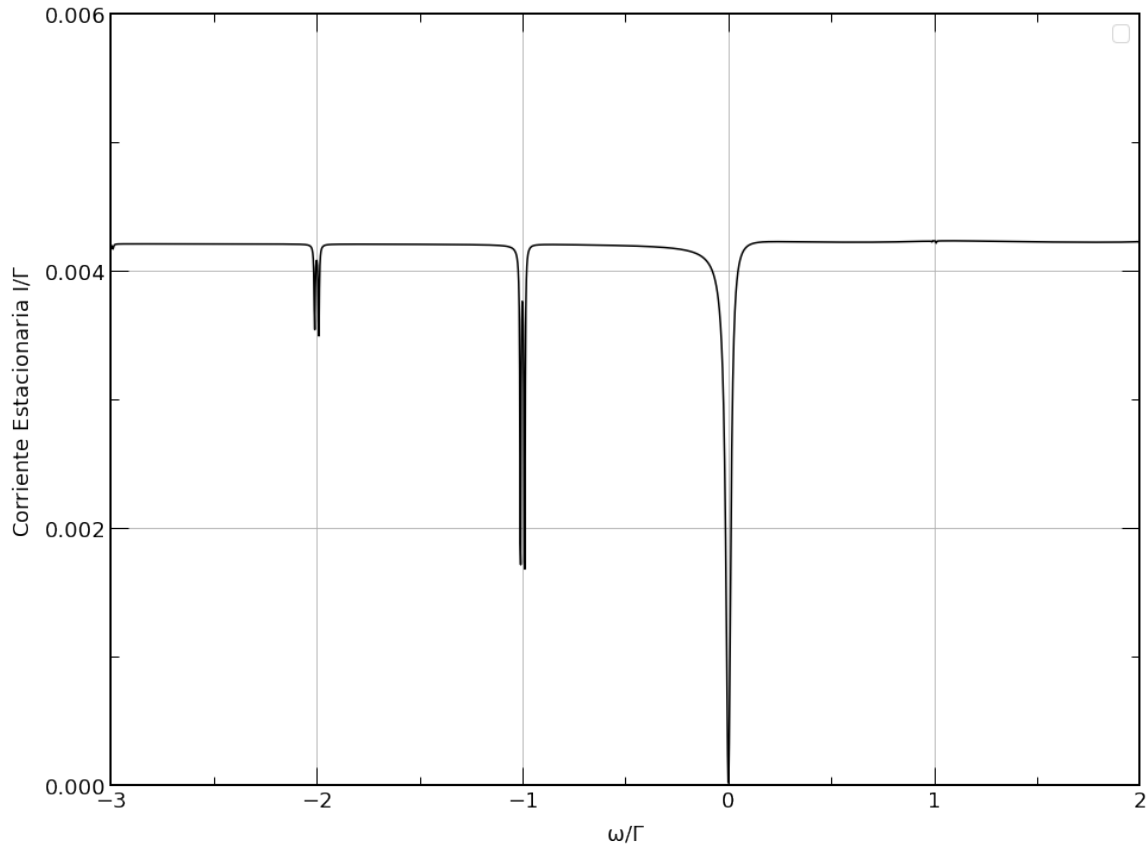


Figura 31: Corriente estacionaria como función del parámetro de sitio $\epsilon_2 = \omega$. El valor de los tuneleos y el valor de la interacción de los contactos con los electrones son $\Gamma = 0.1\hbar\omega_0$ y $t = 0.01\hbar\omega_0$, el valor del parámetro de disipación es $\gamma = 0.0025\hbar\omega_0$ y los parámetros de interacción fonónica son $\eta = \lambda = g = 0.3\hbar\omega_0$. Esta configuración permite la formación de un estado oscuro cuando $\omega = 0$ de acuerdo con las predicciones realizadas con ayuda de la TP.

Capítulo IV

CONCLUSIONES

Se exploraron y clasificaron los estados oscuros en el régimen estacionario de un sistema de cuatro puntos cuánticos en configuración cuadrangular con tuneleos en paralelo con distintas configuraciones de simetría en los tuneleos inferiores y superiores, laterales y en las diagonales por separado, así como dos casos de simetría en las diferencias entre las energías de sitio. Se analizaron un total de doce casos de simetría encontrando 10 configuraciones en las que es posible obtener un estado oscuro encontrando además configuraciones de punto colgante como casos particulares de la simetría de tuneleos superior e inferior con tuneleo en paralelo. Para esto se resolvió la ecuación maestra de Lindblad en el caso estacionario, de esta manera el sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a un sistema de ecuaciones lineales, obteniendo las poblaciones del sitio conectado al sumidero de electrones. Se analizó el efecto del desfaseamiento localizado en sitios, introduciendo nuevos operadores diagonales asociados a cada interacción en sitio, en la ecuación de Lindblad, encontrando que la coherencia del estado oscuro es destruida. Se analizó el efecto de desfaseamientos localizados en sitio y entre sitios introduciendo nuevos operadores a la ecuación de Lindblad, encontrando la condición necesaria para recuperar la coherencia del estado oscuro. Se analizó el efecto de una interacción fonónica localizada en todos los sitios a excepción del sitio conectado al sumidero de electrones en un sistema de tres (cuatro) puntos cuánticos en configuración triangular (cuadrangular) encontrando que dicha configuración puede contener un estado oscuro. En ambas configuraciones, por simplificación, se utilizó una configuración de simetría con los tuneleos idénticos entre sí. El análisis de las ecuaciones

maestras de los sistemas abiertos fue posible gracias a la transformación de polarón y una traza sobre los estados del oscilador, que permitió remover la interacción fonónica y estudiar el sistema reducido con los tuneleos y energías de sitio renormalizados así como la aparición de términos de desfaseamiento en sitios y entre sitios. Lo anterior nos permitió encontrar de forma teórica, la combinación de parámetros que garantizar la existencia del estado oscuro a partir de los sistemas de tres y cuatro puntos cuánticos en configuración triangular y cuadrangular con desfaseamiento en sitios y entre sitios sin interacción fonónica.

Bibliografía

- Amaha, S., Hatano, T., Tamura, H., Teraoka, S., Kubo, T., Tokura, Y., Austing, D. G., y Tarucha, S. (2012). Resonance-hybrid states in a triple quantum dot. *Phys. Rev. B*, **85**: 081301.
- Armour, A. D. y MacKinnon, A. (2002). Transport via a quantum shuttle. *Phys. Rev. B*, **66**: 035333–1–035333–10.
- Ashoori, R. C. (1996). Electrons in artificial atoms. *Nature*, **379**(6564): 413–419.
- Audretsch, J. (2007). *Entangled systems, new directions in quantum physics*. Wiley-VCH.
- Björk, M. T., Thelander, C., Hansen, A. E., Jensen, L. E., Larsson, M. W., Wallenberg, L. R., y Samuelson, L. (2004). Few-electron quantum dots in nanowires. *Nano Letters*, **4**(9): 1621–1625.
- Buitelaar, M. R., Bachtold, A., Nussbaumer, T., Iqbal, M., y Schönenberger, C. (2002). Multiwall carbon nanotubes as quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, **88**: 156801.
- Busl, M., Granger, G., Gaudreau, L., Sanchez, R., Kam, A., Pioro-Ladriere, M., Studenikin, S. A., Zawadzki, P., Wasilewski, Z. R., Sachrajda, A. S., y Platero, G. (2013). Bipolar spin blockade and coherent state superpositions in a triple quantum dot. *Nat Nano*, **8**(4): 261–265.
- Domínguez, F., Kohler, S., y Platero, G. (2011). Phonon-mediated decoherence in triple quantum dot interferometers. *Physical Review B*, **83**(23): 235319.
- Domínguez, F., Kohler, S., y Platero, G. (2011). Phonon-mediated decoherence in triple quantum dot interferometers. *Phys. Rev. B*, **83**: 235319.
- Emary, C. (2007). Dark states in the magnetotransport through triple quantum dots. *Phys. Rev. B*, **76**: 245319.
- Ferry, D. K. y Goodnick, S. M. (1997). *Transport in Nanostructures*. Cambridge University Press, United Kingdom. Capítulo 2.
- Gaudreau, L., Studenikin, S. A., Sachrajda, A. S., Zawadzki, P., Kam, A., Lapointe, J., Korkusinski, M., y Hawrylak, P. (2006). Stability diagram of a few-electron triple dot. *Phys. Rev. Lett.*, **97**: 036807.
- Gorelik, L. Y., Isacsson, A., Voinova, M. V., Kasemo, B., Shekhter, R. I., y Jonson, M. (1998). Shuttle mechanism for charge transfer in coulomb blockade nanostructures. *Phys. Rev. Lett.*, **80**: 4526–4529.

- Granger, G., Gaudreau, L., Kam, A., Pioro-Ladrière, M., Studenikin, S. A., Wasilewski, Z. R., Zawadzki, P., y Sachrajda, A. S. (2010). Three-dimensional transport diagram of a triple quantum dot. *Phys. Rev. B*, **82**: 075304.
- Hanson, R., Vandersypen, L. M. K., van Beveren, L. H. W., Elzerman, J. M., Vink, I. T., y Kouwenhoven, L. P. (2004). Semiconductor few-electron quantum dot operated as a bipolar spin filter. *Physical Review B*, **70**: 241304(R).
- Hanson, R., Kouwenhoven, L. P., Petta, J. R., Tarucha, S., y Vandersypen, L. M. K. (2007). Spins in few-electron quantum dots. *Rev. Mod. Phys.*, **79**: 1217–1265.
- Hsieh, C.-Y., Shim, Y.-P., Korkusinski, M., y Hawrylak, P. (2012). Physics of lateral triple quantum-dot molecules with controlled electron numbers. *Reports on Progress in Physics*, **75**(11): 114501.
- Ihn, T., Sigrist, M., Ensslin, K., Wegscheider, W., y Reinwald, M. (2007). Interference in a quantum dot molecule embedded in a ring interferometer. *New Journal of Physics*, **9**(5): 111.
- Kouwenhoven, L. y Marcus, C. (1998). Quantum dots. *Physics World*, **11**(6): 35.
- Kouwenhoven, L. P., Schön, G., y Sohn, L. L. (1997). *Introduction to Mesoscopic Electron Transport*, páginas 1–44. Springer Netherlands, Dordrecht. ISBN 978-94-015-8839-3.
- Kouwenhoven, L. P., Austing, D. G., y Tarucha, S. (2001). Few-electron quantum dots. *Reports on Progress in Physics*, **64**(6): 701.
- Laird, E. A., Taylor, J. M., DiVincenzo, D. P., Marcus, C. M., Hanson, M. P., y Gossard, A. C. (2010). Coherent spin manipulation in an exchange-only qubit. *Phys. Rev. B*, **82**: 075403.
- Ma, X.-S., Herbst, T., Scheidl, T., Wang, D., Kropatschek, S., Naylor, W., Wittmann, B., Mech, A., Kofler, J., Anisimova, E., Makarov, V., Jennewein, T., Ursin, R., y Zeilinger, A. (2012). Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward. *Nature*, **489**(7415): 269–273.
- Michaelis, B., Emary, C., y Beenakker, C. W. J. (2006). All-electronic coherent population trapping in quantum dots. *EPL (Europhysics Letters)*, **73**(5): 677.
- Mitin, V. V., Kochelap, V. A., y Stroschio, M. A. (2008a). *Introduction to Nanoelectronics*. Cambridge University Press, United Kingdom. Capítulo 5.
- Mitin, V. V., Kochelap, V. A., y Stroschio, M. A. (2008b). *Introduction to Nanoelectronics*. Cambridge University Press, United Kingdom. Capítulo 1.
- Mora, J., Cota, E., y Rojas, F. (2014). Hybrid entanglement in a triple-quantum-dot shuttle device. *Phys. Rev. A*, **90**: 042323.

- Park, J., Pasupathy, A. N., Goldsmith, J. I., Chang, C., Yaish, Y., Petta, J. R., Rinkoski, M., Sethna, J. P., Abruna, H. D., McEuen, P. L., y Ralph, D. C. (2002). Coulomb blockade and the kondo effect in single-atom transistors. *Nature*, **417**(6890): 722–725.
- Petta, J. R. y Ralph, D. C. (2001). Studies of spin-orbit scattering in noble-metal nanoparticles using energy-level tunneling spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, **87**: 266801.
- Rivas, Á. y Huelga, S. (2011). *Open Quantum Systems: An Introduction*. SpringerBriefs in Physics. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 9783642233548.
- Rogge, M. C. y Haug, R. J. (2008). Noninvasive detection of molecular bonds in quantum dots. *Phys. Rev. B*, **78**: 153310.
- Sakurai, J. J. (1994). *Modern Quantum Mechanics. Revised Edition*. Adison-Wesley Publishing Company, Inc.
- Schröer, D., Greentree, A. D., Gaudreau, L., Eberl, K., Hollenberg, L. C. L., Kotthaus, J. P., y Ludwig, S. (2007). Electrostatically defined serial triple quantum dot charged with few electrons. *Phys. Rev. B*, **76**: 075306.
- Shankar, R. (1994). *Principles of Quantum Mechanics. Second Edition*. Plenum Press.
- Takakura, T., Noiri, A., Obata, T., Otsuka, T., Yoneda, J., Yoshida, K., y Tarucha, S. (2014). Single to quadruple quantum dots with tunable tunnel couplings. *Applied Physics Letters*, **104**(11).
- Villavicencio, J., Maldonado, I., Sánchez, R., Cota, E., y Platero, G. (2008). Tunnel spectroscopy in ac-driven quantum dot nanoresonators. *App. Phys. Lett.*, **92**: 192102–1,192102–3.
- von Delft, J. y Ralph, D. (2001). Spectroscopy of discrete energy levels in ultrasmall metallic grains. *Physics Reports*, **345**(2-3): 61 – 173.
- Wang, Q., Liu, J., Tang, N., y Zeng, H.-S. (2011). Dark states and aharonov—bohm oscillations in multi-quantum-dot systems. *Chinese Physics B*, **20**(2): 020303.

Apéndice A

Sistemas abiertos

Partimos de la Ecuación Maestra de Born-Markov en términos de los operadores del sistema s_i y del reservorio r_i del hamiltoniano de interacción entre los sistemas

$$\frac{d}{dt}\rho_{S,I} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{i,j} \int_0^\infty ds \{ [s_i(t), s_j(t-s)\rho_{S,I}(t)] \langle r_i(s)r_j \rangle - [s_i(t), \rho_{S,I}(t)s_j(t-s) \langle r_j r_i(s) \rangle] \}, \quad (128)$$

Contactos Eléctricos

Para este sistema, la descripción de interacción recae en los contactos eléctricos que hacen de fuente y sumidero de electrones, los cuales quedan denotados como L y R por la posición en la que se ubican en el esquema.

Para ello tomamos como sistema H_0 a la suma de los hamiltonianos sin interacción, en este caso el hamiltoniano que describe alguna configuración geométrica de puntos cuánticos y el hamiltoniano que describe los contactos eléctricos cuyo hamiltoniano está descrito por:

$$H_{\text{leads}} = \sum_{l,k} \epsilon_{lk} c_{lk}^\dagger c_{lk}, \quad (129)$$

y el hamiltoniano de interacción como:

$$V = H_{\text{dot-leads}} = \sum_k \left(V_{Lk} c_{Lk}^\dagger d_1 + V_{Rk} c_{Rk}^\dagger d_3 + \text{H.c.} \right), \quad (130)$$

Donde c_{lk}^\dagger y c_{lk} , $l = L, R$, crea y aniquila un electrón en la fuente y sumidero respectivamente. Los elementos de matriz V_{lk} tienen un rol muy importante, sin embargo, su importancia radica en la densidad espectral definida como:

$$\Gamma_l = 2\pi \sum_l |V_{lk}|^2 \delta(\epsilon - \epsilon_{lk}). \quad (131)$$

Donde la dependencia cuadrática viene de la estructura de la ecuación Maestra de Born-Markov en la cual los operadores aparecen como producto doble. De este modo es posible llegar a la *Ecuación Maestra en forma de Ecuación de Lindblad* para la descripción de los contactos electricos que hacen de fuente y sumidero electrónicos cuya forma final es:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t). \quad (132)$$

Para el caso del transporte electrónico, la Ecuación Maestra es:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R, \quad (133)$$

con:

$$\mathcal{L}_c\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}[H_{QD} + H_{Tun}, \rho(t)]; \quad (134)$$

$$\mathcal{L}_L\rho(t) = \frac{\Gamma_L}{2}(2d_1^\dagger\rho(t)d_1 - \{d_1d_1^\dagger, \rho(t)\}); \quad (135)$$

$$\mathcal{L}_R\rho(t) = \frac{\Gamma_R}{2}(2d_3\rho(t)d_3^\dagger - \{d_3^\dagger d_3, \rho(t)\}), \quad (136)$$

el término \mathcal{L}_c representa la parte coherente *sistema cerrado sin interacciones* mientras que los términos extras $\mathcal{L}_{L/R}$ representan a la interacción del sistema con el medio. Vemos que de acuerdo con el esquema, los reservorios electrónicos se encuentran conectados a los sitios 1 y 3.

Medios Disipativos.- Oscilador en un baño de osciladores

De forma similar, otro sistema de gran interés es el de un oscilador armónico con frecuencia característica ω_0 que se encuentra en contacto con un *baño de osciladores*.

De esta manera, los hamiltonianos sin interacción $H_0 = H_S + H_R$ donde

$$H_S = \hbar\omega_0 a^\dagger a; \quad (137)$$

$$H_R = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}; \quad (138)$$

y el hamiltoniano de interacción lineal entre estos dos sistemas, está dado por:

$$V = (a^\dagger + a) \sum_{\lambda} g_{\lambda} (a_{\lambda}^{\dagger} + a_{\lambda}), \quad (139)$$

donde a^\dagger y a son los operadores de creación y aniquilación de oscilador armónico con frecuencia ω_0 y los operadores a_{λ}^{\dagger} y a_{λ} son los operadores de creación y aniquilación del medio disipativo consistente en un baó de osciladores con modos de oscilación con frecuencia ω_{λ} .

Identificando los operadores del hamiltoniano de interacción s_i y r_i que actúan sobre el sistema cerrado y el reservorio respectivamente e introduciendolos en la ecuación de Born-Markov es posible obtener una expresión de la dinámica del sistema reducido en forma de operadores de Lindblad cuya forma está dada por:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}\rho(t), \quad (140)$$

donde:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{\text{Dis}} \quad (141)$$

$$\mathcal{L}_c\rho(t) = -\frac{i}{\hbar} [H_0, \rho(t)] \quad (142)$$

representa la parte coherente y

$$\mathcal{L}_{\text{Dis}}\rho(t) = \frac{\gamma}{2}(\bar{n}_0 + 1)(2a\rho(t)a^\dagger - \{a^\dagger a, \rho(t)\}) + \frac{\gamma}{2}\bar{n}_0(2a^\dagger\rho(t)a - \{aa^\dagger, \rho(t)\}), \quad (143)$$

representa el efecto de la dinámica debido al medio disipativo y para la cual $n_0 = [\exp(\hbar\omega_0/k_B T) - 1]^{-1}$. y γ es un valor conocido como *effective damping rate* que aparece debido a la densidad espectral de tipo ohmica $I(\omega) = \pi \sum_{\nu} |\lambda_{\nu}|^2 \delta(\omega - \omega_{\nu}) = \gamma\omega$.

Apéndice B

Transformación de Polarón

El hamiltoniano:

$$H = H_{QQD} + H_{ph} + V_{ep}, \quad (144)$$

donde:

$$H_{QQD} = \sum_i^4 \epsilon_i n_i + \sum_{i \geq j}^4 t_{ij} (d_i^\dagger d_j + H.c); \quad (145)$$

$$H_{ph} = \omega_0 a^\dagger a; \quad (146)$$

$$V_{ep} = (\xi n_1 + \lambda n_2 + g n_4) (a^\dagger + a). \quad (147)$$

Este hamiltoniano entra en la ecuación de Lindblad:

$$\mathcal{L}\rho = \frac{d}{dt}\rho = -i[H, \rho] + \mathcal{L}_{Cont}\rho + \mathcal{L}_{Dis}\rho, \quad (148)$$

donde:

$$\mathcal{L}_{Cont}\rho = \frac{\Gamma_S}{2} (2d_1\rho d_1^\dagger - \{d_1^\dagger d_1, \rho\}) + \frac{\Gamma_D}{2} (2d_3^\dagger\rho d_3 - \{d_3 d_3^\dagger, \rho\}), \quad (149)$$

y

$$\mathcal{L}_{Dis}\rho = \frac{\gamma}{2} (\bar{n} + 1) (2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + \frac{\gamma}{2} \bar{n} (2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger). \quad (150)$$

La transformación de Polarón sobre un operador O es una transformación unitaria SOS^\dagger donde:

$$S = \exp\left[\frac{\xi n_1 + \lambda n_2 + g n_4}{\omega_0}(a^\dagger - a)\right]. \quad (151)$$

Definimos $\alpha = (\xi n_1 + \lambda n_2 + g n_4)/\omega_0$ de tal modo que:

$$S = \exp[\alpha(a^\dagger - a)]. \quad (152)$$

Hemos realizado la transformación de Polarón sobre la ecuación de Lindblad. Es claro que el término $\mathcal{L}_{Cont}\rho$ permanece invariante, por lo que falta transformar el término del conmutador y el término disipativo.

Transformación de $\mathcal{L}_{Dis}\rho$

Recordando que la transformación de los operadores de ascenso y descenso de oscilador armónico

$$\begin{aligned} a &\rightarrow a - \alpha, \\ a^\dagger &\rightarrow a^\dagger - \alpha. \end{aligned} \quad (153)$$

Con ayuda de esta transformación es facil llegar a la siguiente expresión para el operador

$\mathcal{L}_{Dis}\rho$

$$\mathcal{L}_{Dis}\rho \rightarrow \overline{\mathcal{L}_{Dis}\rho} = \mathcal{L}_{Dis}\rho + \mathcal{L}_{Dec}\rho + \frac{\gamma}{2}(2\bar{n}+1)\{\alpha(a^\dagger+a), \rho\} - \gamma(\bar{n}+1)[a\rho\alpha + \alpha\rho a^\dagger] - \gamma\bar{n}[\alpha\rho a + a^\dagger\rho\alpha], \quad (154)$$

donde

$$\mathcal{L}_{Dec}\rho = \frac{\gamma}{2}(2\bar{n}+1)(2\alpha\rho\alpha - \{\alpha^2, \rho\}). \quad (155)$$

Recordando que $\alpha^2 = (\xi^2 n_1 + \lambda^2 n_2 + g^2 n_4)/\omega_0^2$ es claro que podemos separar a $\mathcal{L}_{Dec}\rho$ en dos categorías diferentes pero similares:

$$\mathcal{L}_{Dec}\rho = \mathcal{L}_{Def}\rho + \mathcal{L}_{Def-int}\rho, \quad (156)$$

donde

$$\mathcal{L}_{Def}\rho = \mathcal{L}_{Def-1}\rho + \mathcal{L}_{Def-2}\rho + \mathcal{L}_{Def-4}\rho; \quad (157)$$

$$\mathcal{L}_{Def-int}\rho = \mathcal{L}_{Def(1,2)}\rho + \mathcal{L}_{Def(1,4)}\rho + \mathcal{L}_{Def(2,4)}\rho. \quad (158)$$

Si ahora definimos:

$$\Gamma(\beta\eta) = \frac{\gamma}{2\omega_0^2}(2\bar{n} + 1)\beta\eta, \quad (159)$$

obtenemos las siguientes expresiones para los operadores

$$\mathcal{L}_{Def-1}\rho = \Gamma(\xi^2)(2n_1\rho n_1 - \{n_1, \rho\}), \quad (160)$$

$$\mathcal{L}_{Def-2}\rho = \Gamma(\lambda^2)(2n_2\rho n_2 - \{n_2, \rho\}), \quad (161)$$

$$\mathcal{L}_{Def-4}\rho = \Gamma(g^2)(2n_4\rho n_4 - \{n_4, \rho\}); \quad (162)$$

y

$$\mathcal{L}_{Def(1,2)}\rho = 2\Gamma(\xi\lambda)(n_1\rho n_2 + n_2\rho n_1), \quad (163)$$

$$\mathcal{L}_{Def(1,4)}\rho = 2\Gamma(\xi g)(n_1\rho n_4 + n_4\rho n_1), \quad (164)$$

$$\mathcal{L}_{Def(2,4)}\rho = 2\Gamma(\lambda g)(n_2\rho n_4 + n_4\rho n_2). \quad (165)$$

Lo anterior se puede resumir si definimos al conjunto $\{\xi, \lambda, g\}$ como $\{\alpha_i\}$ entonces

$$\mathcal{L}_{Def-i}\rho = \Gamma(\alpha_i^2)(2n_i\rho n_i - \{n_i, \rho\}), \quad (166)$$

y

$$\mathcal{L}_{Def(i,j)} = 2\Gamma(\alpha_i\alpha_j)(n_i\rho n_j + n_j\rho n_i). \quad (167)$$

Transformación del Conmutador

Para obtener una ecuación del conmutador transformado en el esquema de Polarón basta con transformar al hamiltoniano del sistema, el cual consta de las 3 partes mencionadas anteriormente. Transformamos primero a los operadores $H_{ph} + V_{ep}$, es claro que los operadores de creación y aniquilación de los puntos cuánticos se transforman como:

$$d_i^\dagger \rightarrow d_i^\dagger X_{\alpha_i}, \quad (168)$$

y

$$d_i \rightarrow d_i X_{\alpha_i}^\dagger, \quad (169)$$

(donde $\alpha_3 = 0$) con $X_S = \exp[\frac{S}{\omega_0}(a^\dagger - a)]$, además $X_S^\dagger = X_{-S}$ y claramente $X_S X_T = X_{S+T}$ con lo cual:

$$d_i^\dagger d_j \rightarrow d_i^\dagger d_j X_{\alpha_i - \alpha_j}, \quad (170)$$

y vemos que:

$$H_{ph} + V_{ep} \rightarrow \overline{H_{ph}} + \overline{V_{ep}} = H_{ph} - \left(\frac{\xi^2}{\omega_0} n_1 + \frac{\lambda^2}{\omega_0} n_2 + \frac{g^2}{\omega_0} n_4 \right) \quad (171)$$

y

$$\begin{aligned} H_{QQD} \rightarrow \overline{H_{QQD}} = & \sum_i^4 \epsilon_i n_i + t_{12}(d_2^\dagger d_1 X_\lambda + H.c) + t_{23}(d_3^\dagger d_2 X_\lambda^\dagger + H.c) \\ & + t_{34}(d_4^\dagger d_3 X_g + H.c) + t_{41}(d_1^\dagger d_4 X_g^\dagger + H.c) + t_p(d_2^\dagger d_4 X_{\lambda-g} + d_4^\dagger d_2 X_{\lambda-g}^\dagger). \end{aligned} \quad (172)$$

Por lo que sumando los hamiltonianos transformados, basta con renormalizar las energías de sitio en los que la interacción bosónica está actuando ($\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1 - \frac{\xi^2}{\omega_0}$, $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_2 - \frac{\lambda^2}{\omega_0}$ y $\epsilon_4 \rightarrow \epsilon_4 - \frac{g^2}{\omega_0}$).

Transformación de $\mathcal{L}_{Cont}\rho$

Es claro que los únicos afectados en la transformación son los términos del primer sitio

$$\overline{\mathcal{L}_{Cont}\rho} = \frac{\Gamma_S}{2}(2X_{\alpha_1}^\dagger d_1 \rho d_1^\dagger X_{\alpha_1} - \{d_1^\dagger d_1, \rho\}) + \frac{\Gamma_D}{2}(2d_3^\dagger \rho d_3 - \{d_3 d_3^\dagger, \rho\}) \quad (173)$$

Sin embargo esto puede extenderse para el caso en el que se conectan entradas de corriente a los sitios 2 y 4.

Traza Sobre Estados de Oscilador

Asumimos $\rho = \rho_e \otimes \rho_{ph}$ donde:

$$\rho_{ph} = \frac{e^{-\omega_0 a^\dagger a / k_B T}}{\text{Tr}_{ph}[e^{-\omega_0 a^\dagger a / k_B T}]}, \quad (174)$$

y realizamos la traza sobre los estados de oscilador a la ecuación de Lindblad, es decir que debemos realizar la Traza de cada uno de los elementos obtenidos en el desarrollo (Ecuaciones)

Traza sobre $\overline{\mathcal{L}_{Dis}\rho}$

Iniciamos con el cálculo de la traza sobre el operador $\mathcal{L}_{Dis}\rho$ sin transformar, que aparece en la ecuación transformada

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{ph}[\mathcal{L}_{Dis}\rho] &= \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)\text{Tr}_{ph}[2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a] \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\bar{n}(\text{Tr}_{ph}[2a^\dagger \rho a - a a^\dagger \rho - \rho a a^\dagger]) \\ &= \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1)(2\text{Tr}_{ph}[a\rho a^\dagger] - \text{Tr}_{ph}[a^\dagger a\rho] - \text{Tr}_{ph}[\rho a^\dagger a]) \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}\bar{n}(2\text{Tr}_{ph}[a^\dagger \rho a] - \text{Tr}_{ph}[a a^\dagger \rho] - \text{Tr}_{ph}[\rho a a^\dagger]) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (175)$$

lo último se sigue de la permutación cíclica de la traza $\text{Tr}_{\text{ph}}[ABC] = \text{Tr}_{\text{ph}}[CAB] = \text{Tr}_{\text{ph}}[BCA]$. De los términos \mathcal{L}_{Def} basta con reemplazar ρ por ρ_e

$$\text{Tr}_{\text{ph}}[\mathcal{L}_{Dec}\rho] = \mathcal{L}_{Dec}\rho_e. \quad (176)$$

Finalmente del hecho de que $\text{Tr}_{\text{ph}}[a\rho_{\text{ph}}] = \text{Tr}_{\text{ph}}[a^\dagger\rho_{\text{ph}}] = 0$ se puede concluir que:

$$\text{Tr}_{\text{ph}}[\overline{\mathcal{L}_{Dis}\rho}] = \mathcal{L}_{Dec}\rho_e. \quad (177)$$

Traza sobre $\overline{\mathcal{L}_{Cont}\rho}$

Es claro que debemos centrar nuestra atención en el primer término cuya traza parcial sobre los estados de oscilador es:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{ph}}[X_{\alpha_1}^\dagger d_1 \rho d_1^\dagger X_{\alpha_1}] &= \text{Tr}_{\text{ph}}[X_{\alpha_1}^\dagger d_1 \rho d_1^\dagger X_{\alpha_1}] \\ &= \text{Tr}_{\text{ph}}[X_{\alpha_1}^\dagger d_1 (\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}) d_1^\dagger X_{\alpha_1}] \\ &= \text{Tr}_{\text{ph}}[X_{\alpha_1} X_{\alpha_1}^\dagger d_1 (\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}) d_1^\dagger] \\ &= \text{Tr}_{\text{ph}}[1 d_1 (\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}) d_1^\dagger] \\ &= \text{Tr}_{\text{ph}}[d_1 (\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}) d_1^\dagger] \\ &= d_1 \text{Tr}_{\text{ph}}[\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}] d_1^\dagger \\ &= d_1 \rho_e d_1^\dagger. \end{aligned} \quad (178)$$

Por lo que vemos que luego de calcular la traza el término queda invariante, y esto puede extenderse para el caso en el que los contactos entran desde el sitio 2, 4 o cualquier combinación de ellos.

Traza Sobre el Conmutador

Recordando que en el hamiltoniano Transformado aparece nuevamente el término H_{ph} calculamos la traza sobre el conmutador con este hamiltoniano, es decir:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\text{ph}}[H_{\text{ph}}\rho - \rho H_{\text{ph}}] &= \text{Tr}_{\text{ph}}[H_{\text{ph}}(\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}})] - \text{Tr}_{\text{ph}}[(\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}})H_{\text{ph}}] \\
&= \text{Tr}_{\text{ph}}[\rho_e \otimes (H_{\text{ph}}\rho_{\text{ph}})] - \text{Tr}_{\text{ph}}[\rho_e \otimes (\rho_{\text{ph}}H_{\text{ph}})] \\
&= \rho_e(\text{Tr}_{\text{ph}}[H_{\text{ph}}, \rho_{\text{ph}}]) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{179}$$

Esto último debido a que ρ_{ph} es eigenestado de H_{ph} . Para el resto de elementos del hamiltoniano, basta con observar dos de ellos, los que se encuentran con los operadores de sitio y uno de los elementos de los tuneleos, puesto que el resto de ellos se puede deducir de la siguiente observación:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\text{ph}}\left(\left[\sum_i^4 \epsilon_i n_i, \rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}\right]\right) &= \text{Tr}_{\text{ph}}\left(\sum_i^4 \epsilon_i n_i (\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}) - (\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}) \sum_i^4 \epsilon_i n_i\right) \\
&= \sum_i^4 \epsilon_i n_i \rho_e \text{Tr}_{\text{ph}}(\rho_{\text{ph}}) - \rho_e \text{Tr}_{\text{ph}}(\rho_{\text{ph}}) \sum_i^4 \epsilon_i n_i \\
&= \sum_i^4 \epsilon_i n_i \rho_e - \rho_e \sum_i^4 \epsilon_i n_i \\
&= \sum_i^4 [\epsilon_i n_i, \rho_e].
\end{aligned} \tag{180}$$

Finalmente tomamos un elemento de tuneleo cualquiera y calculamos la traza del conmutador de este elemento con el operador de densidad:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\text{ph}}[t_{ij}d_i^\dagger d_j X_{\alpha_i-\alpha_j}, \rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}] &= t_{ij} \left(\text{Tr}_{\text{ph}}[d_i^\dagger d_j X_{\alpha_i-\alpha_j} (\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}})] - \text{Tr}_{\text{ph}}[(\rho_e \otimes \rho_{\text{ph}}) d_i^\dagger d_j X_{\alpha_i-\alpha_j}] \right) \\
&= t_{ij} \left(\text{Tr}_{\text{ph}}[(d_i^\dagger d_j \rho_e) \otimes (X_{\alpha_i-\alpha_j} \rho_{\text{ph}})] - \text{Tr}_{\text{ph}}[(\rho_e d_i^\dagger d_j) \otimes (\rho_{\text{ph}} X_{\alpha_i-\alpha_j})] \right) \\
&= t_{ij} \left(d_i^\dagger d_j \rho_e \text{Tr}_{\text{ph}}[X_{\alpha_i-\alpha_j} \rho_{\text{ph}}] - \rho_e d_i^\dagger d_j \text{Tr}_{\text{ph}}[\rho_{\text{ph}} X_{\alpha_i-\alpha_j}] \right) \\
&= t_{ij} \left(d_i^\dagger d_j \rho_e - \rho_e d_i^\dagger d_j \right) \text{Tr}_{\text{ph}}[X_{\alpha_i-\alpha_j} \rho_{\text{ph}}] \\
&= \tau_{ij} [d_i^\dagger d_j, \rho_e] \\
&= [\tau_{ij} d_i^\dagger d_j, \rho_e].
\end{aligned} \tag{181}$$

donde:

$$\tau_{ij} = t_{ij} \text{Tr}_{\text{ph}}[X_{\alpha_i-\alpha_j} \rho_{\text{ph}}] = t_{ij} \langle X_{\alpha_i-\alpha_j} \rangle_{\text{ph}}. \tag{182}$$

Juntando todos los términos se obtiene $\overline{H_{\text{QQD}}}$, con lo cual podemos concluir que realizando la traza sobre los estados de oscilador armónico, se obtiene que la dinámica del sistema electrónico está determinada por:

$$\frac{d}{dt} \rho_e = -i[H_{\text{QQD,eff}}, \rho_e] + \mathcal{L}_{\text{Cont}} \rho_e + \mathcal{L}_{\text{Dec}} \rho_e, \tag{183}$$

en donde

$$H_{\text{QQD,eff}} = \epsilon_3 n_3 + \sum_{i \neq 3} \epsilon'_i n_i + \sum_{i \geq j} \tau_{ij} (d_i^\dagger d_j + H.c) \tag{184}$$

con: $\epsilon'_1 = \epsilon_1 - \frac{\xi^2}{\omega_0}$, $\epsilon'_2 = \epsilon_2 - \frac{\lambda^2}{\omega_0}$ y $\epsilon'_4 = \epsilon_4 - \frac{g^2}{\omega_0}$, y los tuneleos renormalizados $\tau_{ij} = t_{ij} \langle X_{\alpha_i-\alpha_j} \rangle$.