

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
BAJA CALIFORNIA**

FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS



***ANALISIS OPTICO DE UNA IMAGEN SIMULADA
DE LA SUPERFICIE DEL MAR QUE CONTIENE
EL ESPECTRO DE ROLL-FISCHER***

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

O C E A N O L O G O

P R E S E N T A :

HECTOR VALENZUELA RODRIGUEZ

Ensenada, Baja California, Noviembre de 1988

RESUMEN

Por medio de un modelo numérico implementado en computadora se generaron cinco superficies marinas, cada una de ellas conteniendo el espectro de Roll-Fischer. Se reconstruyeron las imágenes de dos superficies marinas en película fotográfica por medio de un microdensitómetro en su forma de escritura.

Se efectuaron cálculos estadísticos de las superficies marinas.

Para obtener el espectro de potencia bidimensional de la imagen simulada se utilizó un sistema óptico coherente. Este espectro de potencia tiene información sobre las frecuencias energéticas y la dirección que tiene el oleaje a un tiempo específico.

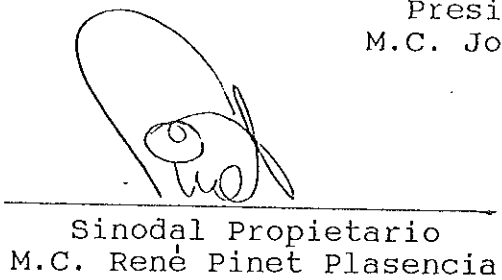
Se comparó el espectro de potencia de Roll-Fischer, usado en la generación de la superficie marina y el espectro de potencia bidimensional obtenido mediante el sistema óptico coherente. Se efectuaron autocorrelaciones ópticas con dos imágenes simuladas.

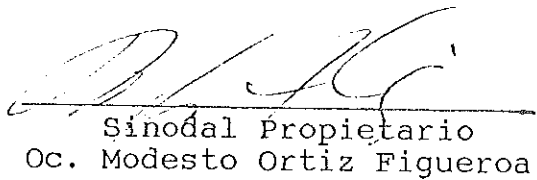
ANALISIS OPTICO DE UNA IMAGEN SIMULADA DE LA SUPERFICIE DEL MAR
QUE CONTIENE EL ESPECTRO DE ROLL-FISCHER

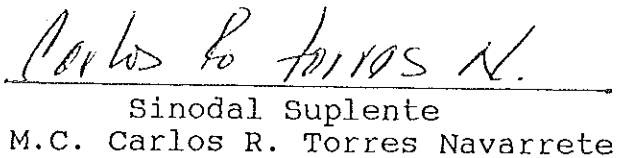
T E S I S
QUE PRESENTA:
HECTOR VALENZUELA RODRIGUEZ

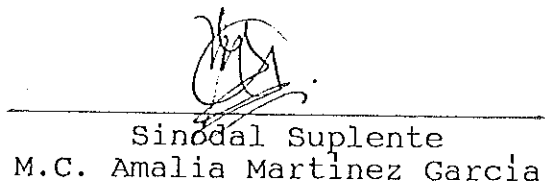
Aprobada por:


Presidente del Jurado
M.C. Josue Alvarez Borrego


Sinodal Propietario
M.C. René Pinet Plasencia


Sinodal Propietario
Oc. Modesto Ortiz Figueroa


Sinodal Suplente
M.C. Carlos R. Torres Navarrete


Sinodal Suplente
M.C. Amalia Martínez García

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirme completar esta etapa tan bonita de mi vida.

A mis padres, Ing. Fco. Valenzuela Navarro y Lic. Yolanda Rodríguez de Valenzuela por todo el amor y apoyo que me brindaron desde aquel día en que partí de mi casa. También a mis familiares que siempre me han motivado a seguir adelante.

Al director de mi tesis, M. en C. Josue Alvarez Borrego por hacerme partícipe de su proyecto, ya que sus explicaciones, sugerencias, consejos, etc. fueron determinantes en la guía de este trabajo.

Al M. en C. Ricardo Villagómez al proporcionarme y enseñarme a utilizar un programa de grabación de datos para el microdensitómetro. A su esposa Adriana López por la ayuda en el laboratorio de fotografía.

A la M. en C. Diana Tentori por colaborar con equipo para el laboratorio de interferometría y por su ayuda tan activa.

A la P. B. Patricia Alemán por su valiosa colaboración en la grabación de imágenes mediante el microdensitómetro.

A la genial dibujante Ma. Eugenia Navas, por dar el toque refinado a las figuras de ésta tesis.

A las atentas secretarias de Optica Ofelia P. de Méndez y Rosa Ma. R. de Corona, por los escritos y tablas realizados.

A todo el personal tan agradable y equipo del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (C.I.C.E.S.E.) que de una u otra manera me ayudaron.

A CONACyT, por su patrocinio en éste proyecto, con clave PCCNCNA-050000.

A mis queridos amigos del grupo de tesis en Optica Marina: Oc. Ricardo Peón, P. O. Pedro Negrete y P. O. Ma. del Pilar Roldan, por su gran colaboración.

A mi gran amigo P. O. Carlos Gutierrez, con quien compartí la mayor parte de bastantes agradables y pocos malos momentos de mi vida de estudiante.

A mi novia Margie, por su linda compañía y la ayuda que me brindó en los detalles finales de este trabajo.

A la Sra. Juana de Hale por brindarme todo su apoyo y amistad en mi estancia en Ensenada.

A todos mis buenos amigos y amigas que me alentaron con sus consejos para seguir adelante. En especial a los de mi XXV generación de oceanólogos.

INDICE GENERAL

Pág.

1	INTRODUCCION.....	1
1.1	Antecedentes.....	1
1.2	Objetivos.....	3
2	MODELADO DE LA SUPERFICIE MARINA Y SU OBTENCION EN PELICULA FOTO- GRAFICA.....	5
2.1	Parámetros y propiedades estadísticas que caracterizan a la su- perficie.....	6
2.2	Modelado de mares con distribución de alturas aleatorias y espec- tro direccional específico.....	9
2.3	El espectro teórico de Roll-Fischer.....	15
2.4	Características de las superficies marinas simuladas.....	22
2.5	Obtención de la imagen del mar simulado en película fotográfica..	23
3	TRANSFORMADA OPTICA BIDIMENSIONAL DE FOURIER DE UNA IMAGEN EN FE- LICULA FOTOGRAFICA.....	26
3.1	Teoría básica.....	26
3.2	Transformada de Fourier de una imagen, vía sistema óptico.....	32
4	AUTOCORRELACION DE UNA IMAGEN EN PELICULA FOTOGRAFICA.....	40
4.1	Teoría básica.....	40
4.2	Autocorrelación de una imagen, vía sistema óptico.....	41
5	ALINEACION Y MONTAJE DE UN SISTEMA OPTICO.....	45
6	RESULTADOS.....	48
7	DISCUSIONES.....	66
8	CONCLUSIONES.....	72
9	LITERATURA CITADA.....	75

LISTA DE TABLAS

Féq.

Tabla I.- Características y estadística de las superficies marinas- generadas.....	51
Tabla II.- Estadística del oleaje de las superficies marinas genera- das.....	54
Tabla III.- Resultado de la medición de intensidad o espectro de po- tencia.....	59
Tabla IV.- Localización de los números de onda en el plano de Fou- rier.....	61
Tabla V.- Autocorrelaciones de MAR1 con MAR2 en dirección perpendi- cular y paralela al viento.....	65

LISTA DE FIGURAS

Fig.	Descripción	Pág.
1	Espectro teórico de Roll-Fischer, para velocidad de viento de 5m/seg.....	16
2	Comparación de los espectros normalizados Pierson-Neumann (PN), Pierson-Moskowitz (PM) y Roll-Fischer (RF). Todos generados con velocidad del viento de 5m/seg.....	17
3	Espectro de Roll-Fischer en función de las componentes del vector número de onda. Generado con viento de 5m/seg.....	21
4	Respuesta a los valores de densidad de la película TECHNICAL-PAN 2415 de KODAK.....	25
5	Geometría de difracción.....	27
6	Configuraciones para efectuar la transformada de Fourier.....	33
7	Sistema óptico coherente para efectuar la transformada de Fourier.....	39
8	Sistema óptico coherente para efectuar la correlación de dos imágenes.....	42
9	Fracción de la superficie marina generada MAR1 (100x100 datos)-obtenida para viento de 5m/seg.....	49
10	Distribuciones de frecuencia de las elevaciones de las superficies marinas generadas.....	52,53
11	Fotografías de las superficies marinas generadas.....	55
12	Fotografía del espectro de potencia bidimensional de MAR1.....	57
13	Resultado de la medición del espectro de potencia.....	58
14	Comparación del espectro de potencia promedio medido y el teórico de Roll-Fischer.....	62
15	Resultado de las autocorrelaciones promedio de MAR1 con MAR2...	64

ANALISIS OPTICO DE UNA IMAGEN SIMULADA DE LA SUPERFICIE DEL MAR

QUE CONTIENE EL ESPECTRO DE ROLL-FISCHER

1 INTRODUCCION

1.1 ANTECEDENTES

Es de mucha importancia el conocimiento de la superficie marina en una localidad. La importancia radica en la determinación de los parámetros del oleaje como son: altura, periodo, longitud de onda, energía y dirección, lo cual es prioritario para la buena planeación portuaria.

Para obtener dichos parámetros existen técnicas oceanográficas y ópticas. Las ventajas de los métodos ópticos son la sencillez y rapidez con que nos proporcionan la dirección del oleaje (Barber, 1954). En oceanografía, para determinar una dirección confiable se requiere de un arreglo de tres sensores de presión para obtener series de tiempo de altura del oleaje, lo cual es costoso.

Con el mismo objetivo que Barber (1954), Denzil en 1969 determinó mediante un método óptico el espectro direccional de unas imágenes de la superficie del mar, obtenidas por fotografía aérea de la superficie del mar. Otra ventaja de estos métodos es que se requieren únicamente fotografías aéreas de la superficie marina y así se pueden aplicar para estudiar oleaje en aguas profundas y someras.

Sugimori (1975), también en la determinación de espectros direccionales de superficies marinas utilizó un método similar al usado por Denzil en 1969.

En los métodos ópticos mencionados se utilizan fotografías reales de la superficie del mar, entonces hay limitaciones en la fotografía, ya que es necesario un día soleado y de iluminación uniforme (Alvarez, 1983).

Quizá la manera más conveniente de caracterizar una superficie es mediante el conocimiento estadístico básico.

En este trabajo se utiliza una superficie marina con el espectro direccional de Roll-Fischer (generada numéricamente y reconstruida en película fotográfica), lo cual permite realizar un análisis detallado de la metodología óptica y comparar el espectro de Roll-Fischer con el obtenido ópticamente.

En 1985 Alvarez y Machado implementaron un modelo numérico en computadora, con el cual generaron superficies marinas que tenían el espectro teórico de Pierson-Neumann. De estas superficies reconstruyeron imágenes por medio de un microdensitómetro (en su modo de escritura). Obtuvieron ópticamente el espectro de potencia bidimensional e hicieron autocorrelaciones. Describieron la metodología utilizada y compararon el espectro óptico con el de Pierson-Neumann.

Villarreal (1987), utilizando la metodología del trabajo anterior usó el espectro teórico de Pierson-Moskowitz en las superficies marinas que generó, solo que él no obtuvo las autocorrelaciones.

1.2 OBJETIVOS

Objetivo General:

Utilizar métodos ópticos para el análisis de una imagen simulada de la superficie marina que contiene el espectro de Roll-Fischer.

Objetivos Particulares:

Implementar un modelo numérico en computadora para generar superficies marinas estocásticas con distribución de alturas Gaussiana, que tendrán información del espectro de Roll-Fischer.

A partir de los datos generados por el modelo, reconstruir la imagen fotográfica de la superficie marina.

Por medio de arreglos ópticos obtener el espectro de potencia y autocorrelaciones de las imágenes del mar.

Comparar el espectro obtenido ópticamente con el teórico de Roll-Fischer.

Analizar el comportamiento de la curva de autocorrelación en la dirección del viento y perpendicular a ella.

2 MODELADO DE LA SUPERFICIE MARINA Y SU OBTENCION EN PELICULA FOTOGRAFICA

Al generar numéricamente una superficie rugosa, aleatoria que posee un espectro direccional específico podemos analizar las propiedades estadísticas de la superficie.

En el presente trabajo se utilizará la técnica desarrollada por Caruthers y Novarini (1971) para generar superficies marinas que tengan el espectro direccional de Roll-Fischer.

En términos generales, la manera más simple de generar superficies rugosas al azar con un espectro direccional específico, es sumar un conjunto de senosoidales en dos dimensiones, considerando que cada una de ellas posee amplitud compleja, fase al azar y magnitud igual a la raíz cuadrada del espectro direccional. Sin embargo, este procedimiento genera un conjunto limitado de elevaciones independientes de la superficie, la razón es que el método es básicamente la transformada de Fourier de un espectro de número de onda limitado. La técnica de filtrado propuesta por Bruno y Novarini (1976) no tiene esta limitación, ya que se basa en la

extensión de la teoría de sistemas lineales (teoría de filtros) de una a dos dimensiones.

2.1 PARAMETROS Y PROPIEDADES ESTADISTICAS QUE CARACTERIZAN LA SUPERFICIE

Se presentan a continuación los parámetros que caracterizan la superficie y las propiedades estadísticas de la misma.

Sea $Z(i,j)$, $i=0,1,2,\dots,M$, $j=0,1,2,\dots,N$ la representación del conjunto de puntos (o elevaciones) de una superficie rugosa al azar con un espectro direccional específico definida como una malla rectangular. Mediante los índices i,j se localiza un punto en la superficie, teniendo coordenadas (x,y) , las cuales están dadas por $x=i\Delta x$ e $y=j\Delta y$, Δx y Δy son los incrementos espaciales en las direcciones x e y respectivamente.

Si la media de las elevaciones que conforman la superficie es cero, entonces la varianza se calcula así

$$\sigma_z^2 = [1/(M-1)(N-1)] \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N Z^2(i,j) \quad (2-1)$$

La función de autocovarianza normalizada (FAN) se estima en esta manera

$$C_Z(r,s) = \{1/[(M-1-r)(N-1-s)\sigma_Z^2]\} \sum_{i=0}^{M-r} \sum_{j=0}^{N-s} Z(i,j) Z(i+r,j+s) \quad (2-2)$$

$$C_Z(r,-s) = \{1/[(M-1-r)(N-1-s)\sigma_Z^2]\} \sum_{i=0}^{M-r} \sum_{j=0}^{N-s} Z(i,j+s) Z(i+r,j)$$

donde r y s son los corrimientos enteros positivos dados por $r=0,1,2,\dots,m$ y $s=0,1,2,\dots,n$, cuando $r=m$ y $s=n$ se tienen los máximos corrimientos de espaciamiento. La FAN esta dada por $m+1$ corrimientos en r y por $2n+1$ corrimientos positivos y negativos en s .

Una propiedad de la FAN es que para cualquier superficie real se cumple

$$C_Z(r,s) = C_Z(-r,-s) \quad (2-3)$$

El espectro direccional se obtiene de la transformada de Fourier (que se representará con el operador $\mathcal{F}$) de la función de autocovarianza no normalizada, es decir

$$E_Z(g,h) = \frac{\sigma_Z^2 \Delta x \Delta y}{2\pi^2} \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n \delta r \delta s [C_Z(r,s) \cos\left(\frac{\pi r g}{m} + \frac{\pi s h}{n}\right) + C_Z(r,-s) \cos\left(\frac{\pi r g}{m} - \frac{\pi s h}{n}\right)] \quad (2-4)$$

las integrales se aproximan mediante sumas, al aplicar el método trapezoidal con

$$\begin{array}{llll} \delta r = \frac{1}{2} & r=0, m & \delta s = \frac{1}{2} & s=0, n \\ \delta r = 1 & 0 < r < m & \delta s = 1 & 0 < s < n \end{array}$$

los índices $g=0, 1, 2, \dots, m$ y $h=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ definen las componentes del vector número de onda $\vec{K}$, esto es

$$\begin{aligned} K_x &= g \Delta K_x \\ K_y &= h \Delta K_y \end{aligned} \quad (2-5)$$

$$\vec{K} = K_x \hat{e}_x + K_y \hat{e}_y \quad (2-6)$$

donde $\hat{e}_x$ y $\hat{e}_y$ son los vectores unitarios en las direcciones x e y respectivamente. Además, los anchos de banda de las componentes del vector número de onda se relacionan con los incrementos espaciales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Delta K_x &= \pi / m \Delta x \\ \Delta K_y &= \pi / n \Delta y \end{aligned} \quad (2-7)$$

De ecs. (2-5) se observa que los máximos valores de K_x y K_y ocurren cuando $K_x = m \Delta K_x$ y $K_y = n \Delta K_y$.

La FAN, ec. (2-2) se puede escribir en función de x e y esto es $C_z(x, y)$ y el espectro direccional, ec. (2-4) en función de K_x y K_y esto es $E_z(K_x, K_y)$, lo cual hace resaltar el paso de $Z(x, y)$ en el dominio espacial (x, y) a $E_z(K_x, K_y)$ en el dominio de las componentes del vector número de onda (K_x, K_y) .

2.2 MODELADO DE MARES CON DISTRIBUCION DE ALTURAS ALEATORIA Y ESPECTRO DIRECCIONAL ESPECIFICO

La idea esencial para modelar tal superficie rugosa, aleatoria, con un espectro direccional específico es que al suavizado de un arreglo de números generados al azar, no correlacionados, $X(i,j)$ al aplicarle un conveniente filtro bidimensional $W(p,q)$ (conocido como función de peso), producirá otro arreglo de números $Z(i,j)$ con el espectro direccional deseado, $E_z(g,h)$.

Para obtener esta función de peso, Bruno y Novarini (1976) extendieron la teoría de sistemas lineales de una a dos dimensiones.

A continuación se hará una revisión de los conceptos básicos de esta teoría y de su extensión a dos dimensiones.

En series de tiempo, la salida $y(t)$ de un sistema (o filtro) está completamente determinada por la entrada $u(t)$ y las características del sistema, lo cual se puede expresar en la siguiente forma

$$y(t)=L[u(t)] \quad (2-8)$$

donde L es un operador diferencial lineal el cual transforma la señal de entrada a una señal de salida. Entonces ec. (2-8) en

una forma funcional se puede tomar como la convolución de la respuesta del sistema a la función impulso con la señal de entrada lo cual produce la señal de salida, esto es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t') U(t-t') dt' \quad (2-9)$$

donde $H(t)$ es la respuesta del sistema a la función impulso y se obtiene de la transformada de Fourier inversa de la función de transferencia $F(w)$

$$H(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(w) e^{iwt} dw \quad (2-10)$$

por el teorema de la convolución en el dominio del tiempo la ec. (2-9) equivale a una multiplicación en el dominio de la frecuencia,

$$Y(w) = F(w) U(w) \quad (2-11)$$

donde $Y(w) = \mathcal{F}[y(t)]$ y $U(w) = \mathcal{F}[u(t)]$.

De esta manera, $|F(w)|$ se determina por el espectro de potencia de la entrada $\phi_u(w)$ y el espectro de potencia de salida $\phi_y(w)$

$$|F(w)| = \left[\frac{\phi_y(w)}{\phi_u(w)} \right]^{1/2} \quad (2-12)$$

En la siguiente extensión a dos dimensiones en lugar del tiempo se utilizan las componentes espaciales (x, y) y en lugar de la frecuencia, las componentes del vector número de onda: (K_x, K_y) .

Entonces, la función de transferencia es

$$|F(K_x, K_y)| = \left[\frac{E_z(K_x, K_y)}{E_x(K_x, K_y)} \right]^{1/2} \quad (2-13)$$

donde $E_x(K_x, K_y)$ y $E_z(K_x, K_y)$ son los espectros direccionales de las superficies de entrada $X(i, j)$ y salida $Z(i, j)$ respectivamente.

La respuesta del sistema a la función impulso es

$$H(\xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(K_x, K_y) e^{i(K_x \xi + K_y \eta)} dK_x dK_y \quad (2-14)$$

donde ξ y η tienen que estar relacionadas con el espacio (x, y) , la relación es $\xi = p\Delta x$, $p = 0, 1, 2, \dots, m$, $\eta = q\Delta y$, $q = 0, 1, 2, \dots, n$.

Ahora, para modelar un mar con espectro direccional de Roll-Fischer se requiere tomar el eje x positivo a lo largo de la dirección del viento e igualar $E_z(K_x, K_y)$ a la mitad del valor espectral del espectro teórico de Roll-Fischer para cada valor positivo de K_x y para cada valor positivo o negativo de K_y .

Esta consideración es debida a que el espectro de Roll-Fischer es unilateral, es decir, no se propaga energía en la componente negativa del viento, estas ecuaciones se han desarrollado para espectros simétricos, entonces se toma en cuenta que la mitad de la energía se propaga en la dirección positiva y por simetría la otra mitad en la dirección negativa. Además definir $E_z(K_x, K_y) = E_z(-K_x, K_y)$ para cada valor negativo de K_x . De acuerdo con las consideraciones anteriores, un mar en el cual existen ondas de leva cruzadas no puede ser modelado por las fórmulas a desarrollar. De lo anterior resulta que

$$F(K_x, K_y) = F(-K_x, K_y) = F(K_x, -K_y) = F(-K_x, -K_y) \quad (2-15)$$

Por inspección de los límites de integración y tomando en cuenta que $F(K_x, K_y)$, $\cos(K_x \xi + K_y \eta)$ son funciones pares y $\sin(K_x \xi + K_y \eta)$ es función impar la ec. (2-14) se simplifica a

$$H(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} F(K_x, K_y) \cos(K_x \xi) \cos(K_y \eta) dK_x dK_y \quad (2-16)$$

donde es notorio que $H(\xi, \eta)$ es función par.

Utilizando el método de integración trapezoidal en la ec. (2-16) se obtiene

$$H(p, q) = \frac{\Delta K_x \Delta K_y}{\pi^2} \sum_{g=0}^m \sum_{h=0}^n \delta g \delta h F(g, h) \cos\left(\frac{\pi p g}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi q h}{n}\right) \quad (2-17)$$

donde δg y δh tienen el mismo significado que las deltas presentes en la ec. (2-4).

Se ha considerado que $F(K_x, K_y) = 0$ para todo $K_x > m\Delta K_x$ o $K_y > n\Delta K_y$. Debido a las consideraciones hechas se obtiene que

$$H(p, q) = H(-p, q) = H(p, -q) = H(-p, -q) \quad (2-18)$$

Ahora, el espectro de potencia de la superficie de entrada $E_x(g, h)$ se elige tomando en cuenta que la superficie $X(i, j)$ tenga un espectro simple, con varianza unitaria y toda la energía debe estar contenida en el dominio $[|K_x| \leq m\Delta K_x, |K_y| \leq n\Delta K_y]$ un espectro constante reúne estas características, por conveniencia en simplificación de cálculos

$$E_x(g, h) = E_x(-g, h) = E_x(g, -h) = E_x(-g, -h) = \Delta x \Delta y / 4\pi^2 \quad (2-19)$$

donde $g = 0, 1, 2, \dots, m$, $h = 0, 1, 2, \dots, n$.

La superficie de entrada $X(i, j)$, $i = 0, 1, 2, \dots, K$, $j = 0, 1, 2, \dots, L$ es simplemente generar un conjunto de números al azar, no correlacionados, con varianza uno y promedio cero.

Sustitución de ecs. (2-7) y (2-19) en la (2-17) da

$$H(p, q) = \frac{2\pi}{mn(\Delta x \Delta y)^{3/2}} \sum_{g=0}^m \sum_{h=0}^n \delta g \delta h \sqrt{E_z(g, h)} \cos\left(\frac{\pi p g}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi q h}{n}\right) \quad (2-20)$$

Entonces, para calcular la superficie de salida que tendrá el espectro de potencia que se desee (en este caso de Roll-Fischer) hay que convolucionar la respuesta del sistema a la función impulso ec. (2-20) con la superficie de entrada, según la ec. (2-9) pero en forma discreta de dos dimensiones

es

$$Z(i,j) = \sum_{p=-m}^m \sum_{q=-n}^n \delta p \delta q H(p,q) X(i+p,j+q) \Delta x \Delta y \quad (2-21)$$

donde $i=m, m+1, m+2, \dots, K-m$, $j=n, n+1, n+2, \dots, L-n$ [para la superficie $X(i,j)$], $i=0, 1, 2, \dots, M$, $j=0, 1, 2, \dots, N$ [para la superficie $Z(i,j)$] y por utilizarse el método trapezoidal de integración

$$\begin{array}{llll} \delta p = \frac{1}{2} & p = -m, m & \delta q = \frac{1}{2} & q = -n, n \\ \delta p = 1 & -m < p < m & \delta q = 1 & -n < q < n \end{array}$$

las dimensiones de $Z(i,j)$ son $(M,N) = [K+2(m-1), L+2(n-1)]$.

La función de peso $W(p,q)$ es definir

$$W(p,q) = \delta p \delta q H(p,q) \Delta x \Delta y \quad (2-22)$$

sustituyendo ec. (2-22) en la ec. (2-21) se obtiene la superficie de salida deseada, que posee un espectro direccional específico.

$$Z(i,j) = \sum_{p=-m}^m \sum_{q=-n}^n W(p,q) X(i+p,j+q) \quad (2-23)$$

2.3 EL ESPECTRO TEORICO DE ROLL-FISCHER

Como se vio anteriormente, para modelar la superficie marina que contenga un espectro teórico hay que calcular valores de tal espectro. Para esta tesis se escogió el espectro teórico de Roll-Fischer (Fig. 1) debido a que aún no se ha trabajado con él en este tipo de análisis.

Los tres espectros teóricos de potencia estudiados con más anterioridad son Pierson-Neumann, Pierson-Moskowitz y Roll-Fischer (Fig. 2). Todos ellos consideran al viento como agente generador del oleaje.

El espectro de potencia de Roll-Fischer, en función del período esta definido de la siguiente manera (Silvester, 1974),

$$A^2(T) = \frac{\phi g^2 T^4}{(2\pi)^2} \text{Exp}[-2(gT/2\pi U)^2] \quad (2-24)$$

La relación entre el período y la frecuencia angular es $T = \frac{2\pi}{\omega}$, sustituyendo en ec. (2-24) se obtiene el espectro en función de la frecuencia angular.

$$A^2(\omega) = \frac{\phi g^2 (2\pi)^2}{\omega^4} \text{Exp} \left[-\frac{2g^2}{\omega^2 U^2} \right] \quad (2-25)$$

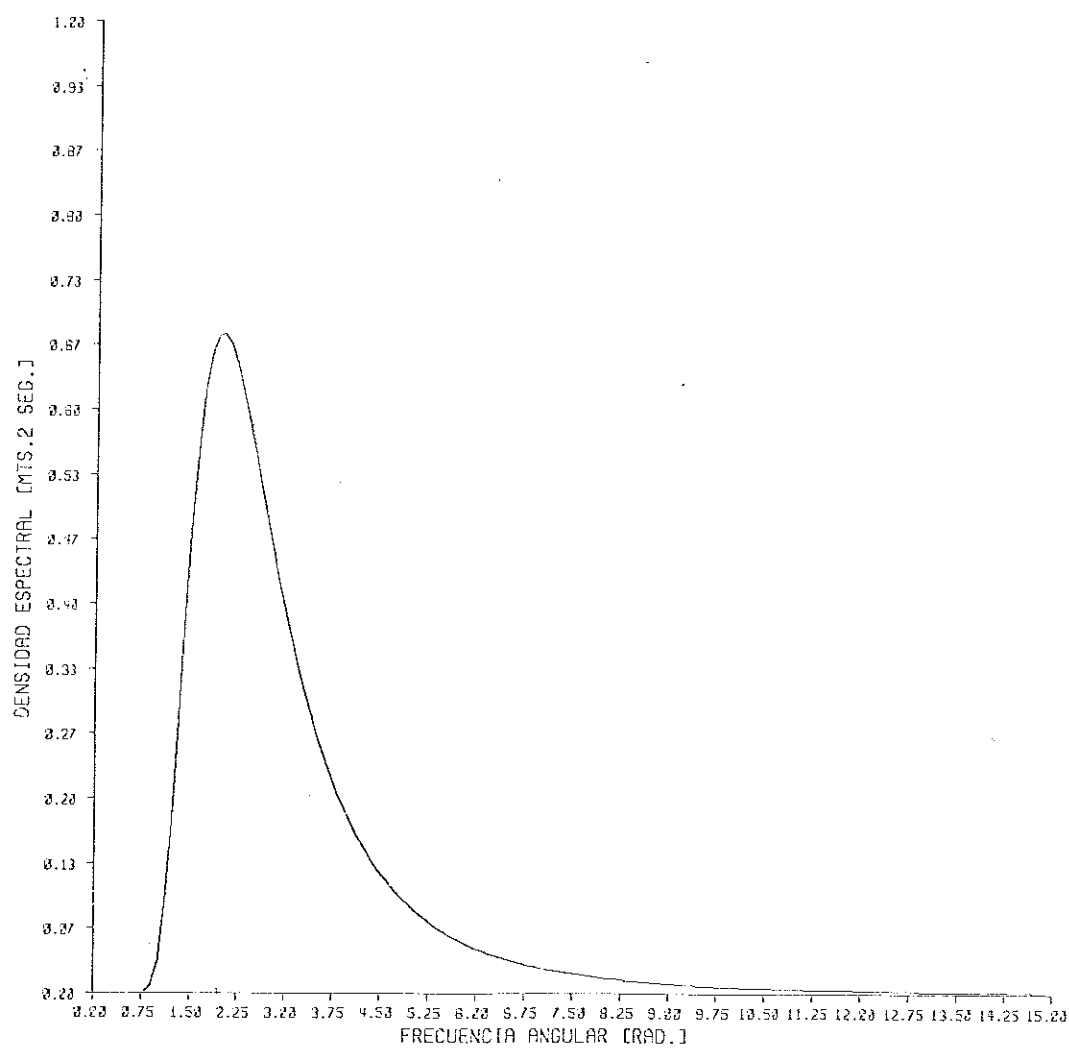


Figura 1.- Espectro teórico de Roll-Fischer, para velocidad de viento de 5m/seg.

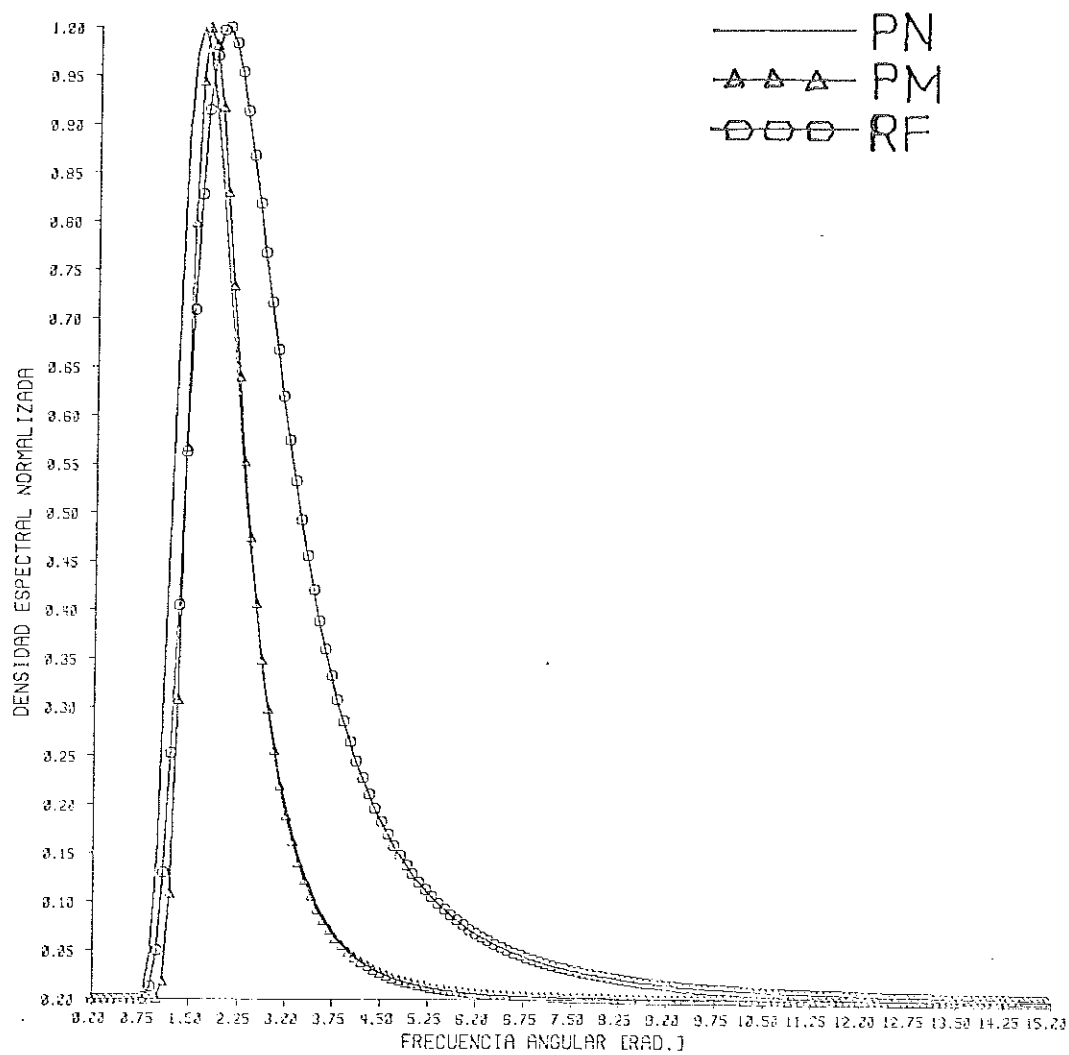


Figura 2.- Comparación de los espectros normalizados Pierson-Neumann (PN), Pierson-Moskowitz (PM) y Roll-Fischer (RF). Todos generados con velocidad del viento de 5m/seg.

Al multiplicar ec. (2-25) por una función direccional $(\cos^2 \theta)$, el espectro estará en función de la frecuencia angular y de la dirección

$$A^2(w, \theta) = \frac{\phi g^2 (2\pi)^2}{w^4} \exp \left[-\frac{2g^2}{w^2 U^2} \right] \cos^2 \theta \quad (2-26)$$

donde

ϕ = constante adimensional = 0.0196

g = aceleración debido a la gravedad = 9.8 m/s^2

w = frecuencia angular del oleaje (rad/s).

θ = dirección del oleaje (rad).

U = velocidad del viento (m/s), con dirección predominante $\theta=0$.

$A^2(w, \theta)$ = densidad del espectro de energía ($\text{m}^2 \text{s/rad}$).

Las superficies marinas simuladas con la técnica que presentamos en este trabajo corresponden a mares totalmente desarrollados en aguas profundas (un mar está totalmente desarrollado para una velocidad de viento conocida cuando en el espectro están presentes todas las frecuencias, desde frecuencia cero hasta infinito con la máxima cantidad de energía espectral, encontrándose el mar en el área donde sopla el viento).

Para estimar la energía total (e), se calcula la varianza de las elevaciones de la superficie mediante la integración de la ec. (2-26)

$$e = \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A^2(w, \theta) d\theta dw$$

El espectro de potencia, ec. (2-26) se puede expresar en función de las componentes (K_x, K_y) del vector número de onda $\vec{K}$ mediante ciertas transformaciones que a continuación se presentan.

La relación de dispersión es $W^2 = gK \tanh(Kh)$, en aguas profundas $\tanh(Kh) \rightarrow 1$ entonces $W = (gK)^{1/2}$ donde $K = (K_x^2 + K_y^2)^{1/2}$ es la magnitud del vector número de onda. Además $\theta = \arctan(K_y/K_x)$.

Entonces, las transformaciones son

$$\begin{aligned} W &= (gK)^{1/2} \\ K &= (K_x^2 + K_y^2)^{1/2} \\ \theta &= \text{Arctan}(K_y/K_x) \end{aligned} \quad (2-27)$$

Sustituyendo ecs. (2-27) en la (2-26) resulta

$$\begin{aligned} A^2(K_x, K_y) &= \frac{\Phi(2\pi)^2}{K_x^2 + K_y^2} \text{Exp} \left[- \frac{2g}{(K_x^2 + K_y^2)^{1/2} U^2} \right] \\ &\quad \text{Cos}^2 [\text{Arctan}(K_y/K_x)] \end{aligned} \quad (2-28)$$

El correspondiente Jacobiano de la transformación es

$$J = \left(\frac{W, \theta}{K_x, K_y} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial K_x} & \frac{\partial W}{\partial K_y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial K_x} & \frac{\partial \theta}{\partial K_y} \end{bmatrix} = \frac{g^{1/2} (K_x^2 + K_y^2)^{-3/4}}{2} \quad (2-29)$$

Entonces, el espectro de potencia que contendrá la superficie marina generada se obtiene del producto de ecs. (2-28) y (2-29)

$$E_z(K_x, K_y) = J \left(\frac{W, \theta}{K_x, K_y} \right) A^2 [W(K_x, K_y), \theta(K_x, K_y)]$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} E_z(K_x, K_y) &= \frac{\Phi g^{1/2} 2\pi^2}{(K_x^2 + K_y^2)^{7/4}} \text{Exp} \left[- \frac{2g}{(K_x^2 + K_y^2)^{1/2} U^2} \right] \\ &\quad \text{Cos}^2 [\text{Arctan}(K_y/K_x)] \end{aligned} \quad (2-30)$$

La Fig. 3 muestra la gráfica del espectro de Roll-Fischer en función de las componentes del vector número de onda.

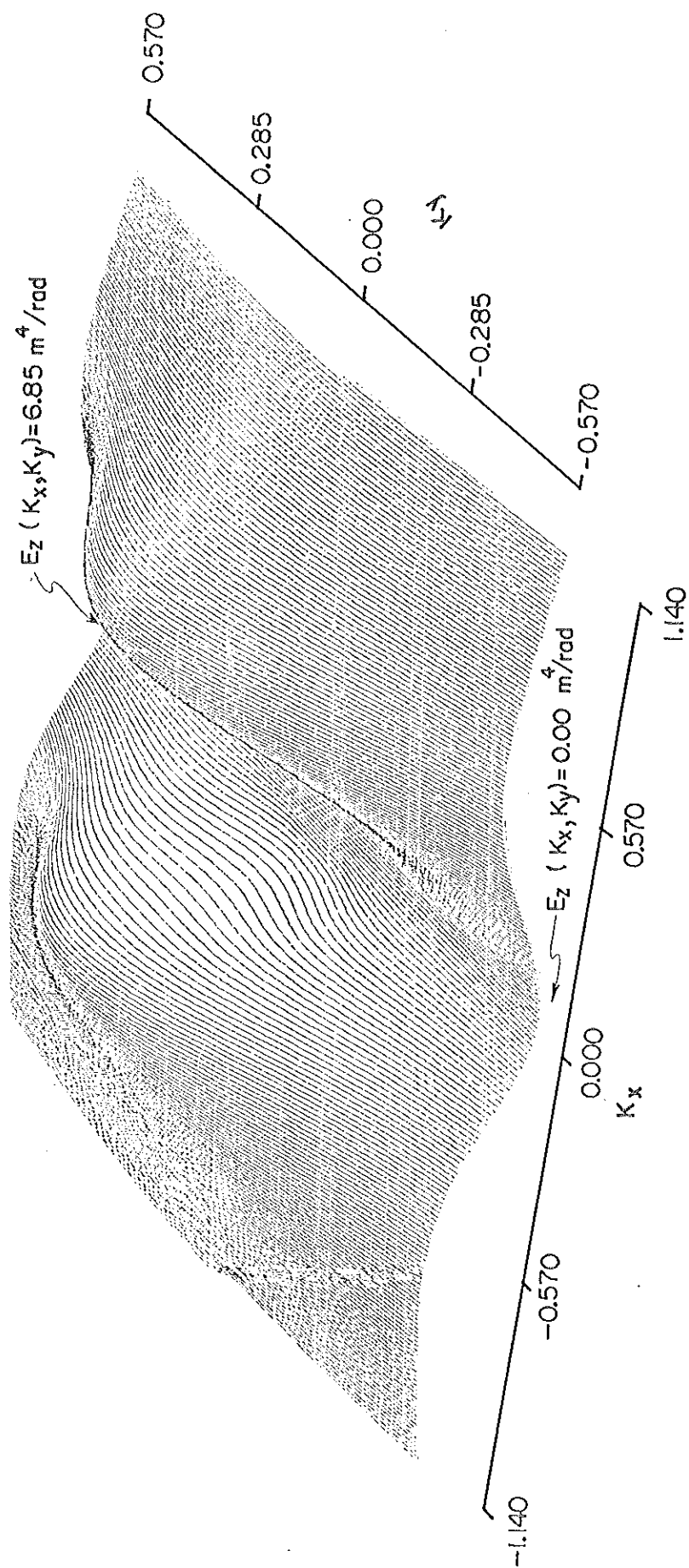


Figura 3.- Espectro de Roll-Fischer en función de las componentes del vector número de onda. Generado con viento de 5m/seg.

2.4 CARACTERISTICAS DE LAS SUPERFICIES MARINAS SIMULADAS

La tarea de generar superficies marinas con un espectro direccional específico, hecha inicialmente por Caruthers y Novarini (1971) considera propagación del oleaje solo en la dirección del viento, con el fin de simplificar las ecuaciones del modelo.

En este trabajo las superficies generadas han sido ampliadas a áreas mucho mayores (113 veces más) y la implementación del modelo fue hecha en la PRIME 750 de CICESE en lenguaje FORTRAN.

Los resultados de la simulación de la superficie, consisten en un arreglo matricial de números enteros que en este caso indican la elevación en decímetros de la superficie sobre un promedio.

La matriz de resultados consta de 208 por 160 números y se ha utilizado un $\Delta x = 2.74\text{m.}$, $\Delta y = 5.45\text{m.}$ por lo que la superficie mide 569.92m. en el eje x y 872m. en el eje y, el área entonces es de 497005.12m^2 . La dirección del viento es paralela al eje x.

Como se acaba de explicar en este capítulo, para obtener la superficie marina hay que generar primero una superficie con números aleatorios, el inicio de éstos números es a partir de uno solo, conocido como semilla, entonces cada una de las cinco superficies marinas simuladas ha sido creada con diferente semilla.

2.5 OBTENCION DE LA IMAGEN DEL MAR SIMULADO EN PELICULA FOTOGRAFICA

Una vez generados los datos numéricos que conforman la superficie marina se encontraron los valores mínimo y máximo de las elevaciones de la superficie, con estos se paso a escoger los valores mínimo y máximo en densidad (el término densidad en este caso representa solo un número). Ya establecido el rango de densidad, se le hizo corresponder a cada elevación un valor es decir un tono de gris. De esta manera es como se utilizó el microdensitómetro MICRO 10 PERKIN-ELMER para grabar en película fotográfica los tonos de grises que se hizo corresponder a las elevaciones.

Anteriormente se han hecho pruebas para conocer como responden algunas películas fotográficas a los valores de densidad que se le proporcionan al microdensitómetro. Se ha encontrado que la película TECHNICAL PAN 2415 de KODAK es la más apropiada, ya que tiene un comportamiento casi lineal entre los valores de densidad (1.5-3.1) que se le dan al microdensitómetro para que grabe y los valores que lee después en la película, ver Fig. 4.

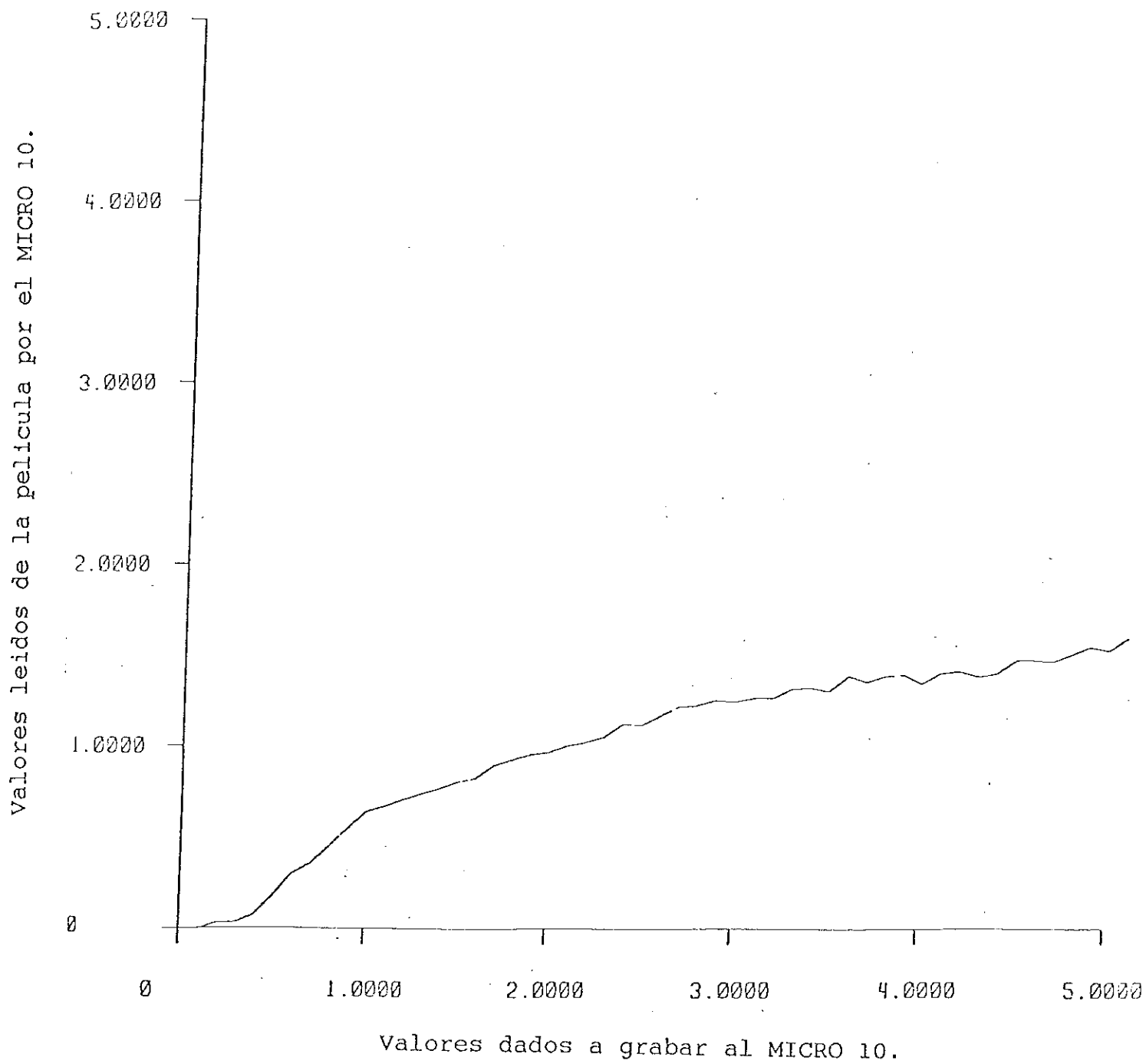


Figura 4.- Respuesta a los valores de densidad de la película TECHNICAL PAN 2415 de KODAK.

3 TRANSFORMADA OPTICA BIDIMENSIONAL DE FOURIER DE UNA IMAGEN EN PELICULA FOTOGRAFICA

3.1 TEORIA BASICA

Una propiedad muy valiosa que tienen las lentes convergentes consiste en realizar la transformada bidimensional de Fourier de la información que se encuentra en película fotográfica. La demostración de esta propiedad se basa en las ecuaciones que describen la difracción de la luz (toda cantidad de luz desviada que no es reflejada o refractada) y de los cambios de fase que sufre la luz (onda) al pasar por una lente.

Para entender la obtención de la ecuación de difracción (Goodman, 1968) hay que considerar los efectos sobre una perturbación ondulatoria monocromática debido a una abertura finita, de área Σ (Fig. 5) que se encuentra en una pantalla opaca, plana y de área infinita, a la cual se le asocia un sistema de coordenadas rectangulares (x_1, y_1) .

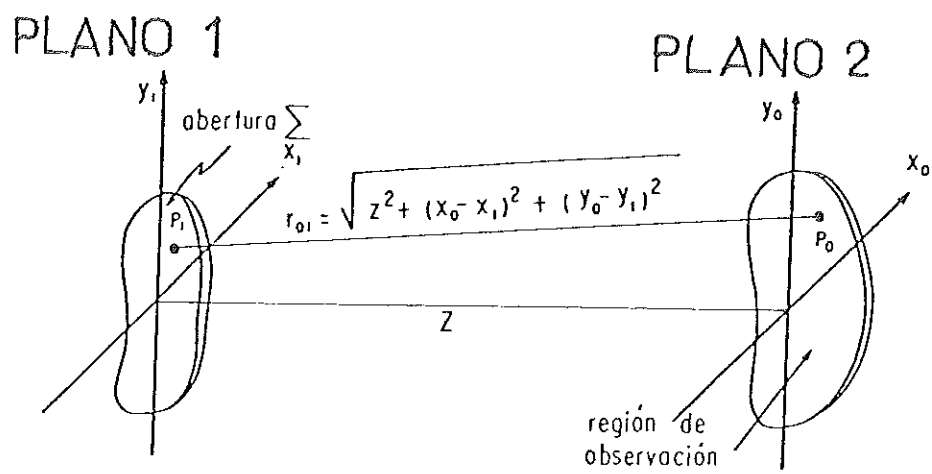


Figura 5.- Geometría de difracción.

La región de observación también se considera plana y paralela a la pantalla, separadas por una distancia normal z , en esta región se utiliza un sistema coordenado (x_0, y_0) paralelos a (x_1, y_1) respectivamente.

La luz difractada por la pantalla (plano 1) llega al plano de observación (plano 2) y según Huygens-Fresnel el campo de amplitud en un punto (x_0, y_0) está dado por

$$U(x_0, y_0) = \iint_{\Sigma} h(x_0, y_0; x_1, y_1) U(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (3-1)$$

donde

$U(P_0)$ es la perturbación ondulatoria que llega al punto P_0 .

$U(P_1)$ es la perturbación ondulatoria que se presenta en el punto P_1 .

$h(x_0, y_0; x_1, y_1)$ es una función de peso definida de la siguiente forma

$$h(x_0, y_0; x_1, y_1) = \frac{1}{jK} \frac{\text{Exp}(jKY_{01})}{Y_{01}} \text{Cos}(\bar{n}, \bar{Y}_{01}) \quad (3-2)$$

y

$\overline{Y_{01}}$ es el vector de posición relativa entre P_0 y P_1 .

Y_{01} es la magnitud del vector anterior.

λ es la longitud de onda de la luz.

K es el número de onda ($K=2\pi/\lambda$).

j es el número imaginario $(-1)^{1/2}$

$\bar{n}$ vector normal a la superficie en P_1 .

De aquí en adelante la integral de superficie será escrita con límites infinitos, en el entendido a las condiciones de frontera de Kirchhoff, $U(x_1, y_1)=0$ fuera de la abertura Σ .

Considerando que $z \gg \Sigma$ entonces $\cos(\bar{n}, \overline{Y_{01}}) \cong 1$ debido a que el ángulo entre $\bar{n}$ y $\overline{Y_{01}}$ es casi cero entonces ec. (3-2) será

$$h(x_0, y_0; x_1, y_1) \cong \frac{1}{jK} \frac{\exp(jKY_{01})}{z} \quad (3-3)$$

Aquí Y_{01} no se puede aproximar a z como en el denominador, ya que se tendrían errores en la fase mayores de 2π radianes.

Expandiendo los términos cuadráticos en el exponente

$$U(x_0, y_0) = \frac{\text{Exp}(jKZ)}{j\lambda Z} \text{Exp}\left[j\frac{K}{2Z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x_1, y_1) \text{Exp}\left[j\frac{K}{2Z}(x_1^2 + y_1^2)\right] \text{Exp}\left[-j\frac{2\pi}{\lambda Z}(x_0 x_1 + y_0 y_1)\right] dx_1 dy_1 \quad (3-8)$$

De esta manera, $U(x_0, y_0)$ puede encontrarse de la transformada de Fourier de $U(x_1, y_1)\text{Exp}[j(K/2z)(x_1^2 + y_1^2)]$, los términos fuera de la integral son una amplitud y factor de fase respectivamente, que no dependen de (x_1, y_1) . La transformación debe ser evaluada en frecuencias $(f_x = x_0/\lambda z, f_y = y_0/\lambda z)$ para asegurar un escalamiento correcto de coordenadas en el plano de observación. La ec. (3-8) es llamada ec. de difracción de Fresnel.

3.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA IMAGEN, VIA SISTEMA OPTICO

A continuación se hará la descripción de dos arreglos ópticos para obtener el espectro de potencia de una imagen.

El primer arreglo (Fig. 6a) muestra un objeto plano con una transmitancia de amplitud $t_o(x,y)$, el cual está colocado frente a una lente convergente de longitud focal f . Se considera que el objeto (transparencia que contiene la imagen) está siendo iluminado uniformemente y a incidencia normal por una onda plana monocromática de amplitud A . La perturbación incidente sobre la lente es

$$U_1(x,y) = A t_o(x,y) \quad (3-9)$$

La extensión finita de la abertura de la lente, puede ser calculada asociando a la lente una función de pupila $P(x,y)$ definida por

$$P(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dentro de la abertura de la lente.} \\ 0 & \text{en otro lugar.} \end{cases}$$

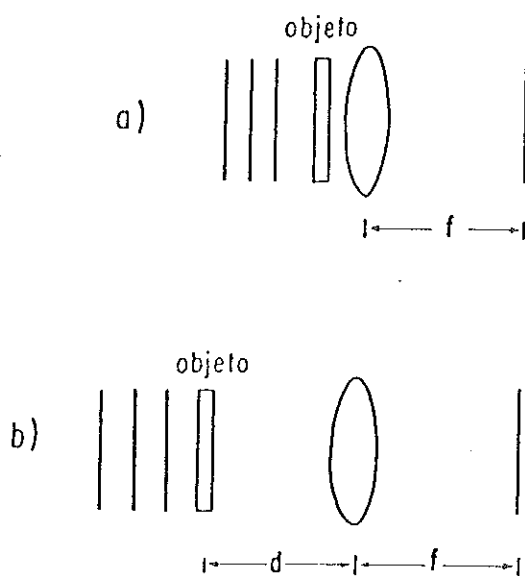


Figura 6.- Configuraciones para efectuar la Transformada de Fourier.

- a) Objeto colocado frente a la lente.
- b) Objeto colocado a una distancia d frente a la lente.

De esta manera, la distribución de amplitud detrás de la lente es,

$$U_1^1(x,y) = U_1(x,y)P(x,y)t_1(x,y) \quad (3-10)$$

donde $t_1(x,y)$ es una transformación de fase que sufre la onda al pasar por una lente delgada (Goodman, 1968) y está dada por,

$$t_1(x,y) = K \text{Exp} [(-jk/2f)(x^2+y^2)] \quad (3-11)$$

recordando que f es la longitud focal, K es una constante de fase la cual se omitirá por su poca contribución en el resultado.

Así, ec. (3-10) se reescribe como

$$U_1^1(x,y) = U_1(x,y)P(x,y) \text{Exp} [(-jk/2f)(x^2+y^2)] \quad (3-12)$$

Para conocer la distribución de la amplitud del campo $U_f(x_f, y_f)$ a través del plano focal de la lente, se utiliza la ec. de difracción de Fresnel, ec. (3-8). Haciendo $z=f$ resulta

$$U_f(X_f, Y_f) = \text{Exp} \left[j \frac{K}{2f} (X_f^2 + Y_f^2) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1^1(X, Y) \text{Exp} \left[j \frac{K}{2f} (X^2 + Y^2) \right] \text{Exp} \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (XX_f + YY_f) \right] dXdY \quad (3-13)$$

donde se ha omitido un factor constante de fase. Sustituyendo ec. (3-12) en la ec. (3-13) resulta,

$$U_f(X_f, Y_f) = \frac{\text{Exp} \left[j \frac{K}{2f} (X_f^2 + Y_f^2) \right]}{j\lambda f} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(X, Y) P(X, Y) \text{Exp} \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (XX_f + YY_f) \right] dXdY \quad (3-14)$$

Entonces, la distribución del campo U_f es proporcional a la transformada de Fourier bidimensional de la porción del campo incidente sobre el área contenida por la abertura de la lente. Cuando la extensión física del objeto es más pequeña que la lente, el factor $P(x,y)$ puede ser despreciado, quedando

$$U_f(X_f, Y_f) = A \exp \left[j \frac{k}{2f} (X_f^2 + Y_f^2) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_0(X, Y) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (XX_f + YY_f) \right] dX dY \quad (3-15)$$

Claramente la amplitud y fase de la luz en las coordenadas (x_f, y_f) , están determinadas por la amplitud y fase de las componentes de Fourier del objeto en frecuencias $(f_x = x_f/\lambda f, f_y = y_f/\lambda f)$.

Hay que notar que la transformada de Fourier entre el objeto y la distribución de amplitud en el plano focal no es exacta, debido a la presencia del factor de fase cuadrático que antecede a la integral.

Sin embargo en muchos casos (como lo es en éste) es la intensidad a través del plano focal lo que interesa. La medición de la distribución de intensidad nos dá conocimiento del espectro de potencia del objeto, la distribución de fase no tiene consecuencia en la medición. Ya que la intensidad es el módulo cuadrado de la transformada de Fourier, entonces

$$I_f(X_f, Y_f) = \frac{A^2}{\lambda^2 f^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_0(X, Y) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (XX_f + YY_f) \right] dXdY \right|^2 \quad (3-16)$$

En el segundo arreglo (Fig. 6b), el objeto está colocado a una distancia d frente a la lente y es iluminado por una onda plana, de incidencia normal y de amplitud A . La transmitancia de amplitud del objeto se representará otra vez por t_0 .

Si $F_0(f_x, f_y)$ representa la transformada de Fourier ($\mathcal{F}$) de la luz transmitida por el objeto y $F_1(f_x, f_y)$ de la luz transmitida que incide sobre la lente, es decir $F_0(f_x, f_y) = \mathcal{F}[At_0]$, $F_1(f_x, f_y) = \mathcal{F}[U_1]$ y considerando que la aproximación de Fresnel es válida para la propagación en la distancia d , entonces F_0 y F_1 están relacionadas por una función de transferencia $H(f_x, f_y)$, es decir

$$F_1(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) F_0(f_x, f_y) \quad (3-17)$$

donde

$$H(f_x, f_y) = \exp(jkz) \exp[-j\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2)]$$

Omitiendo el factor de fase constante y sustituyendo $z=d$ al reescribir la ec. (3-17) da

$$F_1(f_x, f_y) = F_0(f_x, f_y) \exp[-j\pi\lambda d(f_x^2 + f_y^2)] \quad (3-18)$$

Si $P(x, y)=1$, la ec. (3-14) es ahora

$$U_f(X_f, Y_f) = \frac{\exp\left[j\frac{K}{2f}(X_f^2 + Y_f^2)\right]}{j\lambda f} F_1\left(\frac{X_f}{\lambda f}, \frac{Y_f}{\lambda f}\right) \quad (3-19)$$

Sustituyendo ec. (3-18) en (3-19) tenemos que

$$U_f(X_f, Y_f) = \frac{\exp\left[j\frac{K}{2f}(X_f^2 + Y_f^2)\left(1 - \frac{d}{f}\right)\right]}{j\lambda f} F_0\left(\frac{X_f}{\lambda f}, \frac{Y_f}{\lambda f}\right) \quad (3-20)$$

o

$$U_f(X_f, Y_f) = A \exp\left[j\frac{K}{2f}\left(1 - \frac{d}{f}\right)(X_f^2 + Y_f^2)\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_0(X_0, Y_0) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda f}(X_0 X_f + Y_0 Y_f)\right] dX_0 dY_0 \quad (3-21)$$

Así la amplitud y fase de la luz en coordenadas (x_f, y_f) esta relacionada con la amplitud y fase del espectro del objeto en frecuencias $(x_f/\lambda f, y_f/\lambda f)$. Hay que notar que el factor de fase que antecede a la integral se anula si $d=f$. De ésta manera, cuando el objeto es colocado en el plano focal frente a la lente, desaparece tal factor, quedando de la ec. (3-21) una relación de transformada de Fourier exacta.

Para la obtención del espectro de potencia de la imagen simulada se utilizó el arreglo mostrado en la Fig. 7 en el cual la distancia de la transparencia frente a la lente convergente (la cual lleva a cabo la transformada de Fourier) coincide con la distancia focal de ésta, esto es, d es igual a f (Fig. 6b). El sistema óptico que se muestra en la Fig. 7 consta de una fuente de luz láser Helio-Neon de 7 mW (1) la cual emite luz monocromática (de una sola longitud de onda), en (2) un filtro espacial el cual limpia y expande la luz, en (3) la lente colimadora L_0 la cual cambia el frente de onda esférico de la luz por frente de onda plano, ésta se encuentra a una distancia f_0 (longitud focal de L_0) del filtro espacial, en (4) un diafragma circular con el cual se controla el área de iluminación de la transparencia que se encuentra en (5), en (6) está la lente convergente L_1 la cual realiza la transformada de Fourier de la imagen, colocada a una distancia f_1 (longitud focal de L_1) de la transparencia y en (7) se encuentra el detector, el cual es una cámara fotográfica o un fotomultiplicador. Cuando se coloca la cámara es para obtener la fotografía del espectro de potencia y cuando se coloca el fotomultiplicador es para medir la distribución de intensidad de la luz, es decir la medición del espectro de potencia. Esta medición se hace recorriendo el fotomultiplicador con un micrómetro en el eje x_f para registrar la intensidad en cada punto.

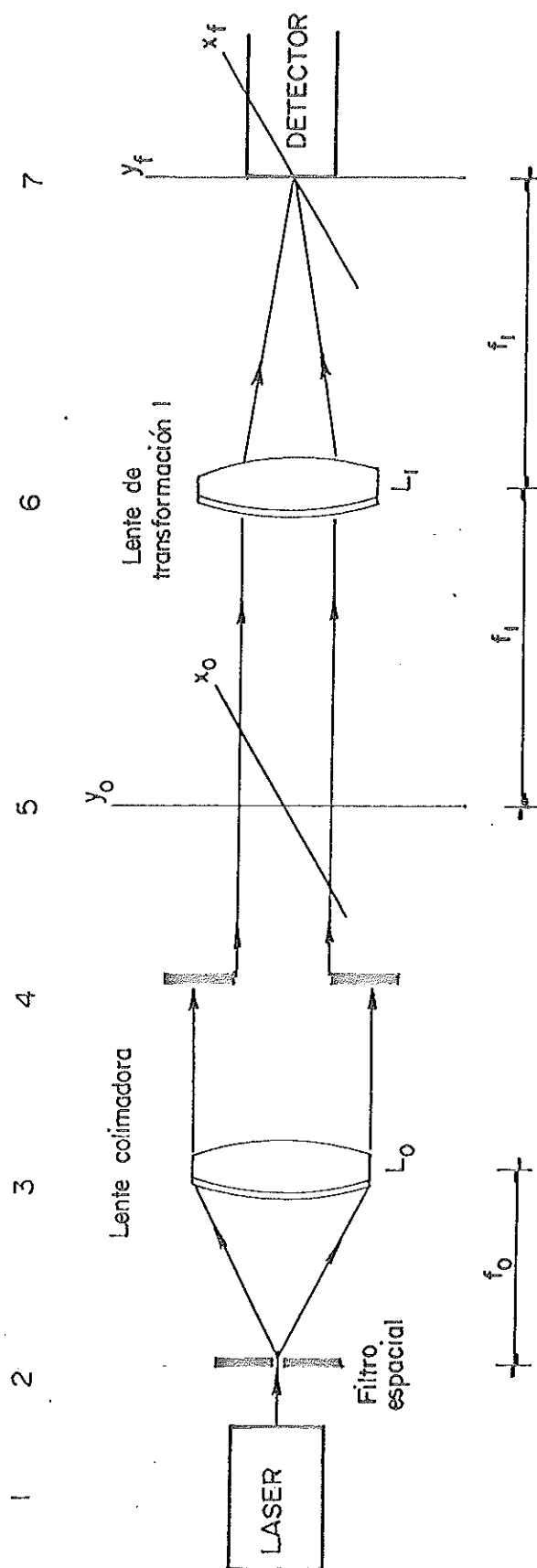


Figura 7.- Sistema óptico coherente para efectuar la transformada de Fourier.

4 AUTOCORRELACION DE UNA IMAGEN EN PELICULA FOTOGRAFICA

4.1 TEORIA BASICA

La operación matemática de correlación es la comparación de dos senales para determinar el grado de correspondencia entre ellas (Shulman, 1970).

Cuando las senales son diferentes, la función de correlación es llamada correlación cruzada (la cual no es conmutativa). Para el caso especial de dos senales iguales la correlación es denominada autocorrelación.

Al igual que la transformada de Fourier y muchas otras operaciones matemáticas, la correlación (en este caso autocorrelación) puede llevarse a cabo mediante un sistema óptico.

4.2 AUTOCORRELACION DE UNA IMAGEN, VIA SISTEMA OPTICO

La demostración de lo anterior parte del hecho de aceptar que una lente convergente realiza la transformada de Fourier de una imagen. Para esto hay que ver la configuración del sistema óptico mostrado en la Fig. 8, por simplicidad solo se tomará en cuenta una señal unidimensional, considerando la incidencia de ondas planas cuya amplitud constante sobre el plano del objeto T_1 (transparencia) situado en (5) es A_0 . La luz transmitida por el plano del objeto T_1 es entonces el producto $A_0 f_1(x)$, donde $f_1(x)$ es la función de transmisión en el plano del objeto T_1 . Por lo tanto la amplitud A , de la luz incidente en el plano donde se encuentra la segunda transparencia T_2 , situada en (8) es

$$A = A_0 f_1(x) \quad (4-1)$$

Ahora, como para el caso del plano del objeto T_1 , la luz transmitida por el plano del objeto T_2 será el producto de la amplitud de la luz incidente $A_0 f_1(x)$ y la función de transmisión $f_2(x)$ del plano del objeto T_2 . La expresión para la luz transmitida del plano del objeto T_2 será $[A_0 f_1(x)] [f_2(x)]$. De ésta última expresión es aparente que la luz presente más allá del plano del objeto T_2 es la misma a que si la luz incidente original, de amplitud A_0 estuviera afectada

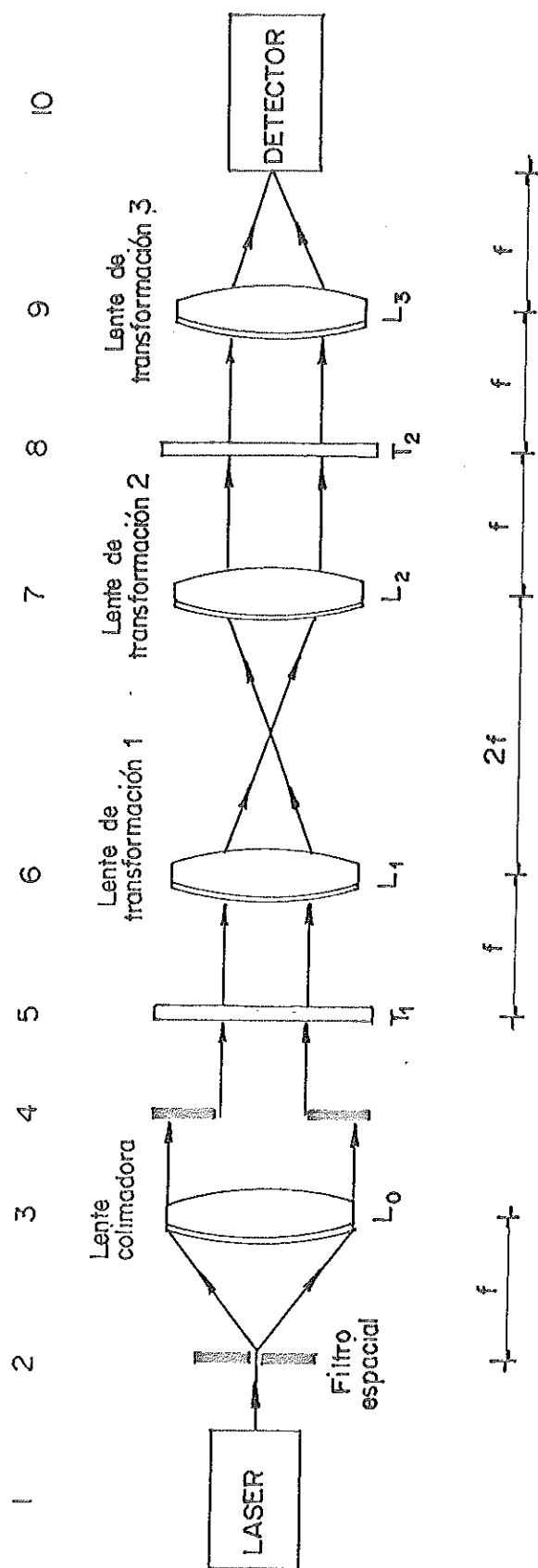


Figura 8.- Sistema optico coherente para efectuar la correlacion de dos imágenes.

por una función de transmisión dada por el producto de $f_1(x)f_2(x)$.

Regresando al correlacionador mostrado en la Fig. 8, la lente de transformación 3 está localizada a la longitud focal del plano del objeto T_2 y por lo tanto produce la transformada de Fourier de la luz transmitida por el objeto T_2 . La amplitud de la luz en el plano de salida (donde se localiza el detector o fotomultiplicador) que se encuentra detrás de la lente 3 (a su distancia focal) es dada por la transformada de Fourier del producto $A_0 f_1(x)f_2(x)$ o

$$\mathcal{F}\left[A_0 f_1(x)f_2(x)\right] = A_0 \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)f_2(x)e^{-jwx}dx \quad (4-2)$$

Mediante un cambio de variable y reescribiendo ec. (4-2)

$$\mathcal{F}\left[A_0 f_2(x)f_1(x+\tau)\right] = A_0 \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)f_1(x+\tau)e^{-jwx}dx \quad (4-3)$$

La constante A_0 que antecede a la integral será considerada unitaria debido a que solo representa un factor de escala con respecto a la intensidad. La exponencial en la transformada de Fourier de ec. (4-3) es igual a uno si w es igual a cero. De esto entonces resulta que

$$\mathcal{F}\left[f_2(x)f_1(x+\tau)\right]_{w=0} = \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)f_1(x+\tau)dx \quad (4-4)$$

El hecho de igualar $w=0$ es equivalente a eliminar todos los términos en el plano de salida, excepto el término de orden cero, la ec. (4-4) establece que el término espectral de orden cero en el plano de salida es la función de correlación de las funciones de transmisión en el objeto T_1 y el T_2 . Si $f_2(x)=f_1(x)$ en ec. (4-4) se tiene una autocorrelación

$$\int_{w=0}^{\infty} \left[f_1(x) f_1(x+\tau) \right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) f_1(x+\tau) dx \quad (4-5)$$

Es decir, la medición de la variación de la intensidad de la componente directa al hacer el corrimiento de la transparencia T_2 (aunque como es autocorrelación es indiferente la transparencia a correr, es preferible hacer el corrimiento de la transparencia T_2 , debido a que esta más cerca del fotomultiplicador) nos da la autocorrelación del objeto T_1 con el T_2 .

El arreglo mostrado en la Fig. 8 es el que se utilizó para hacer la autocorrelación de dos imágenes simuladas de la superficie marina. La descripción de lo que realiza cada componente del sistema está en el capítulo 3, sección 3.2. Cabe agregar que en este caso el detector es un fotomultiplicador y se encuentra fijo, ya que es la transparencia T_2 la que se desplaza con un micrómetro.

5 ALINEACION Y MONTAJE DE UN SISTEMA OPTICO

Para obtener el arreglo mostrado en la Fig. 7 (para efectuar la transformada de Fourier) hay que hacer lo siguiente: Se coloca un vástago (tubo delgado cilíndrico que sirve de soporte de algunos elementos del sistema óptico) sobre el riel donde se situarán posteriormente las componentes del sistema óptico, la luz (sin expandir, ya que no debe haber nada sobre el riel) del láser hay que alinearla de tal forma que le llegue al vástago en un solo punto, en cualquier parte del riel que se vaya colocando éste.

Para la colocación de las lentes se debe situar primero la que estará más lejos del láser, en este caso (Fig. 7) es la lente L_1 y moverla (con unos tornillos) de tal manera que la luz pase por el eje óptico de la lente, para verificar que esto sucede hay que poner enfrente de la lente L_1 una hoja de papel con una pequeña perforación que deje pasar la luz (enfrente significa hacia donde está el láser) y observar que no exista reflexión por parte de L_1 fuera del eje óptico (donde está el rayo de luz).

La colocación de la lente colimadora L_0 se hace de igual forma. A continuación se incorpora al sistema el filtro espacial, el cual expandirá la luz, para comprobar que la luz está siendo expandida correctamente hay que colocar una hoja de papel entre el filtro espacial y la lente colimadora y observar en la hoja que la luz incidente forme un círculo bien definido y uniforme. También puede pasarse un detector para comprobar que en toda el área llegue igual intensidad de luz.

Para lograr la colimación de la luz hay que colocar una hoja de papel entre las lentes L_0 y L_1 , la luz que llegue a la hoja formará un círculo, el cual debe conservar su diámetro al ir desplazando la hoja. De no ser así se mueve la lente L_0 y se vuelve a alinear hasta conseguir la colimación. Algo más correcto sería colocar un espejo frente a la lente colimadora y observar si enfrente del filtro espacial se refleja el mismo punto que éste está produciendo.

Ahora hay que colocar la transparencia a la distancia requerida (dependiendo de la longitud-focal de la lente L_1 que se utilice). Posteriormente se coloca el diafragma (componente 4 de la Fig. 7) entre la lente L_0 y la transparencia, con el cual se regula el área deseada a iluminar en la transparencia.

Para encontrar el plano focal de la lente L_1 (donde irá situado el detector) hay que colocar una hoja de papel lo más cerca de la distancia focal y observar con una lupa cuando se vea el mayor número de puntos claros del espectro de potencia. Esto es muy aproximado. Lo más correcto es seguir el método usado por Alvarez en 1983. El colocó una superficie metálica (el detector) y observó la reflexión de la luz en ésta pantalla, cuando el diámetro del punto que se refleja alcanza un máximo podemos decir que se ha encontrado el punto focal con un error menor de 200 micras. Más detallado está en la cita mencionada antes.

El sistema óptico para la obtención de la autocorrelación (Fig. 8) se alinea y monta en forma similar.

6 RESULTADOS

Los valores obtenidos en la generación de cada una de las 5 superficies marinas simuladas mediante el modelo numérico consta de una matriz de 208 por 160 números enteros, los cuales representan elevaciones (amplitudes) en dm. sobre un promedio. En cada superficie marina simulada se utilizó $\Delta x = 2.74\text{m.}$, $\Delta y = 5.45\text{m.}$ (por lo que el área generada es 497005.12m^2) y la velocidad de viento de 5m/s. Por comodidad a cada uno de los mares simulados se les denominará MAR1, MAR2, ..., MAR5.

Debido a la gran cantidad de amplitudes (33280) obtenidas en cada mar, no fue posible graficar toda la superficie en este papel, pero a manera ilustrativa se graficó parte del MAR1, el cual esta en la Fig. 9.

En la generación de cada uno de los 5 mares se tomó como variable la semilla aleatoria (ver tabla I).

Los valores de amplitud mínimo y máximo entre los 5 mares fueron -57 dm. , 56 dm. , a los cuales se les asignaron los valores de densidad de 1.95, 2.51 respectivamente (tabla I).

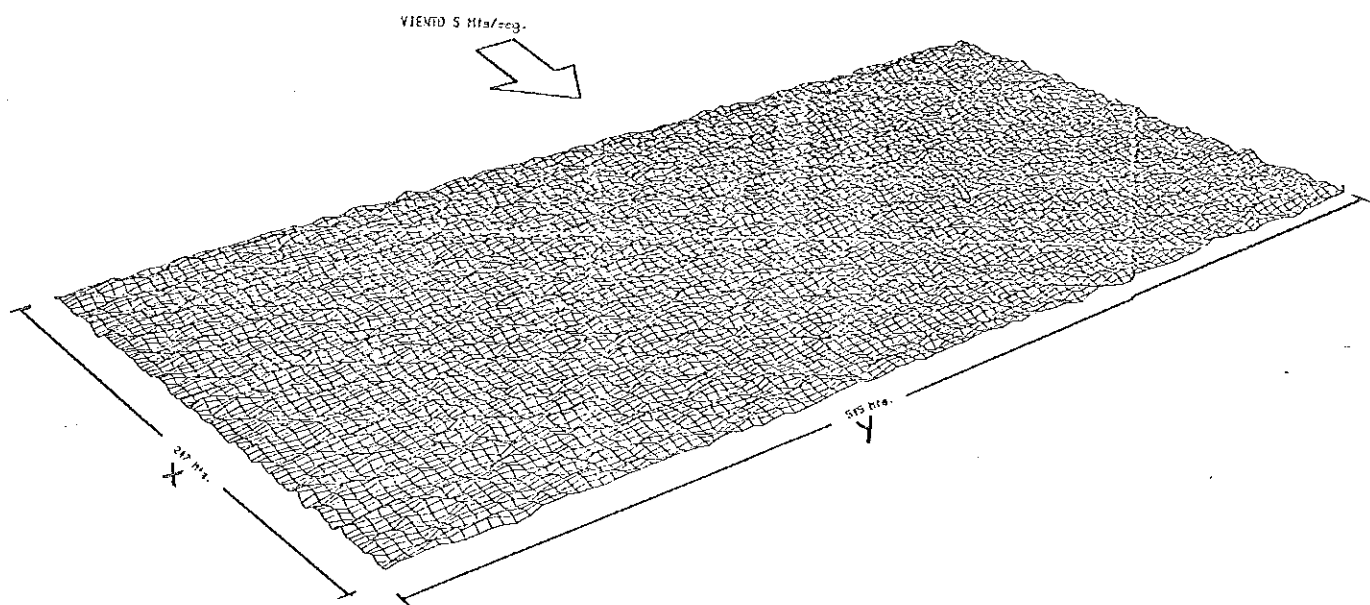


Figura 9.- Fracción de la superficie marina generada MAR1 (100X100 datos). Obtenida para viento de 5m/seg.

Con el fin de obtener parámetros estadísticos de las 5 superficies simuladas se calcularon promedio, varianza y desviación estandar los cuales se muestran en la tabla I.

Se hizo una distribución de frecuencias de las elevaciones (en dm.) de cada mar y se generó una distribución de frecuencias normal o Gaussiana con el objeto de sobreponer éstas curvas, las cuales se muestran en la Fig. 10a (amplificada), 10b, 10c, 10d y 10e.

También con la implementación de programas se calculó estadística del oleaje, altura promedio ($\bar{H}$), altura significativa o altura un tercio ($H_{1/3}$) y altura un décimo ($H_{1/10}$), la cual aparece en la tabla II.

Se grabó 9 veces los valores de densidad de MAR1, las grabaciones quedaron seguidas una de otra (no superpuestas), formando 3 bloques de 3 imágenes idénticas de MAR1 sobre la película fotográfica (negativo), lo mismo se hizo para MAR2, para el resto de los mares el proceso se tuvo que suspender debido a una falla mecánica en el microdensitómetro.

Las 9 imágenes unidas de MAR1 y 9 de MAR2 se observan en la Fig. 11a y 11b respectivamente.

Tabla I.- Características y estadística de las superficies marinas generadas.

Mar	SemiIla	Amplitudes (dm.)		Densidad		Promedio (dm.)	Varianza (dm ²)	Desviación Estandar (dm.)
		Mínima	Máxima	Mínima	Máxima			
MAR1	2100	-53	47	1.97	2.47	-0.0250	114.9258	10.7203
MAR2	9372	-57	56	1.95	2.51	-0.0227	117.2394	10.8277
MAR3	5129	-49	54	1.99	2.50	-0.0354	113.3092	10.6446
MAR4	6236	-54	47	1.96	2.47	-0.0310	116.0856	10.7743
MAR5	7418	-48	55	1.99	2.51	-0.0276	116.3311	10.7856

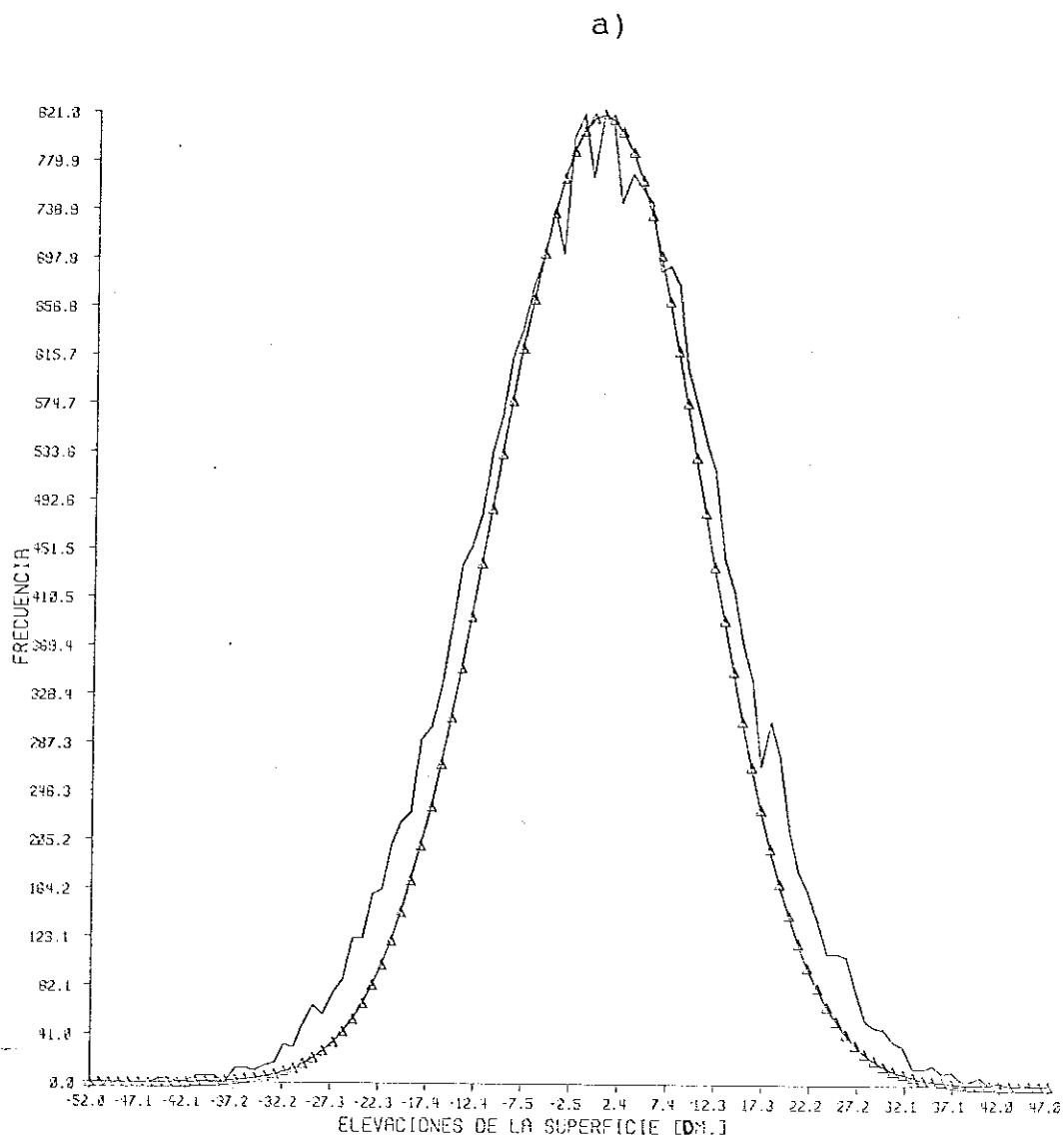
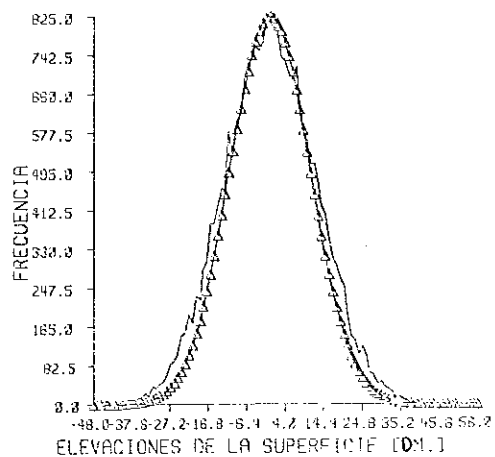
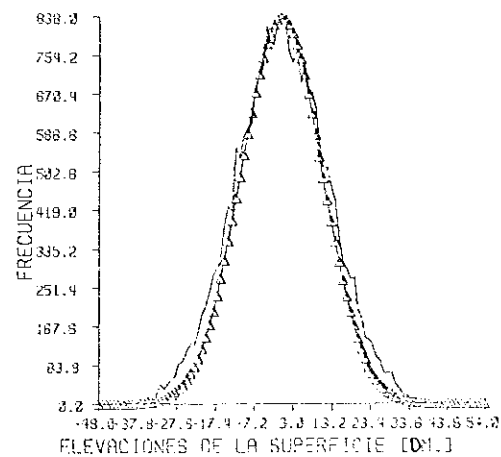


Figura 10.- Distribuciones de frecuencia de las elevaciones de las superficies marinas generadas, la línea con triángulos forma la distribución Normal.

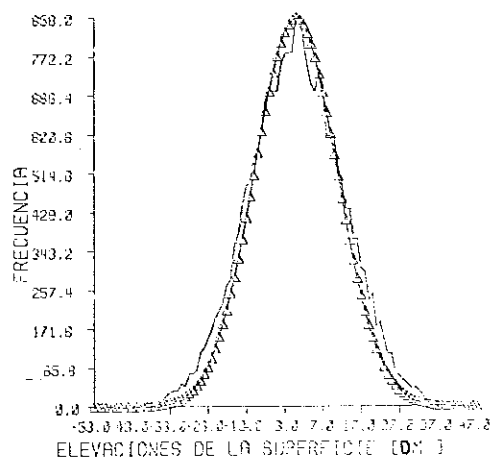
- a) Distribución de frecuencia de las elevaciones de MAR1.
- b) Distribución de frecuencia de las elevaciones de MAR2.
- c) Distribución de frecuencia de las elevaciones de MAR3.
- d) Distribución de frecuencia de las elevaciones de MAR4.
- e) Distribución de frecuencia de las elevaciones de MAR5



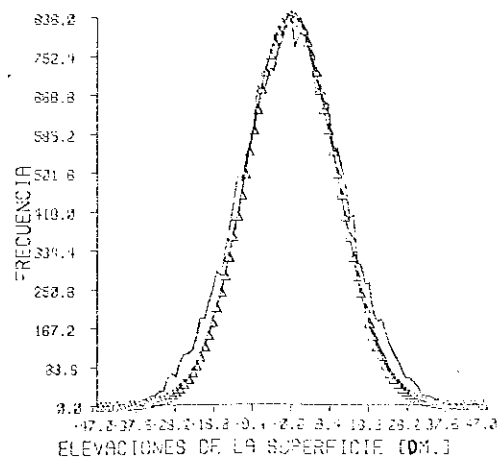
b)



c)



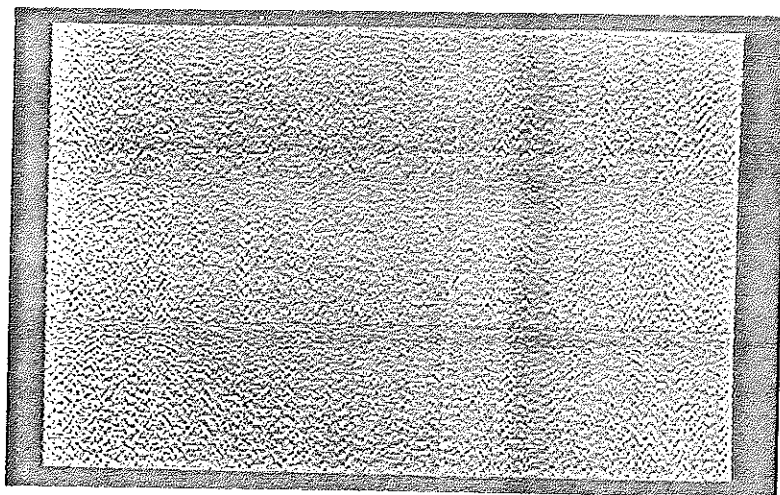
d)



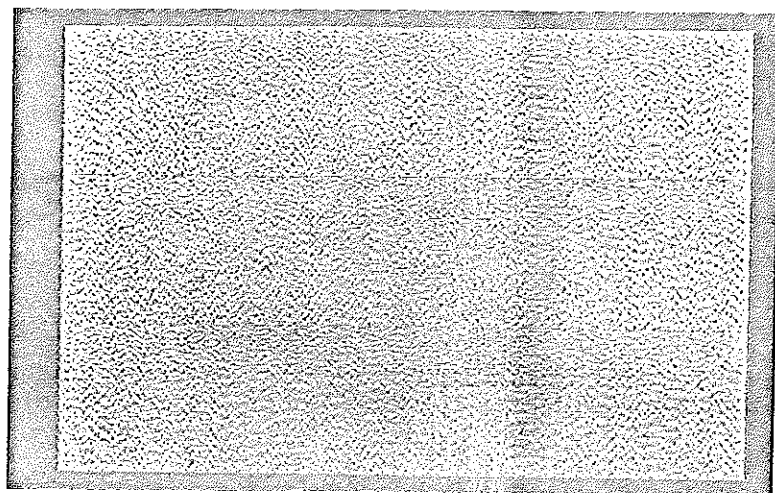
e)

Tabla II.- Estadística del oleaje de las superficies
marinas generadas.

Mar	$\bar{H}$ (dm.)	H1/3(dm.)	H1/10(dm.)
MAR1	19.170	36.763	50.719
MAR2	19.353	38.139	51.082
MAR3	19.106	43.262	50.872
MAR4	19.265	36.998	51.189
MAR5	19.280	37.083	51.361



a)



b)

Figura 11.- Fotografías de las superficies marinas generadas. La repetición de las superficies aumenta la razón señal/ruido en el procesado óptico. cada una de las 9 superficies unidas tiene área de 497005.12m^2 .

- a) Fotografía de MAR1.
- b) Fotografía de MAR2.

La Fig. 12 muestra la fotografía del espectro de potencia de MAR1, obtenido con el sistema óptico de la Fig. 7.

Se efectuaron 5 mediciones de la intensidad de la luz (con el fotomultiplicador) en el eje x_f de uno de los lóbulos del espectro de potencia de MAR1. En la medición se excluyó a la componente directa (concentración de luz que se ve en el centro de la Fig. 12) y a sus vecindades.

Esas 5 mediciones de intensidad se promediaron y se obtuvo un solo registro, el cual aparece en la Fig. 13. Los intervalos se obtuvieron tomando de las 5 series el mínimo y el máximo para cada punto en el eje x_f (donde se presenta el espectro de potencia, a x_f , y_f se le conoce como plano de Fourier). El promedio, el mínimo y el máximo de intensidad a lo largo del eje x_f se muestran en la tabla III.

Mediante la teoría lineal de primer orden (Kinsman, 1965) se calculó la longitud de onda de las olas presentes en los mares generados, la ec. para aguas profundas es $L=1.56T^2$ donde T es el período en seg. y L longitud de onda en mts. En el microdensitómetro se utilizó un pixel de $20\mu=2.74m$ en el eje x del mar, mediante la relación del pixel se calculó la longitud de onda del oleaje presente en la película fotográfica. También se calcularon los números de onda para algunas longitudes de onda presentes en la superficie marina.

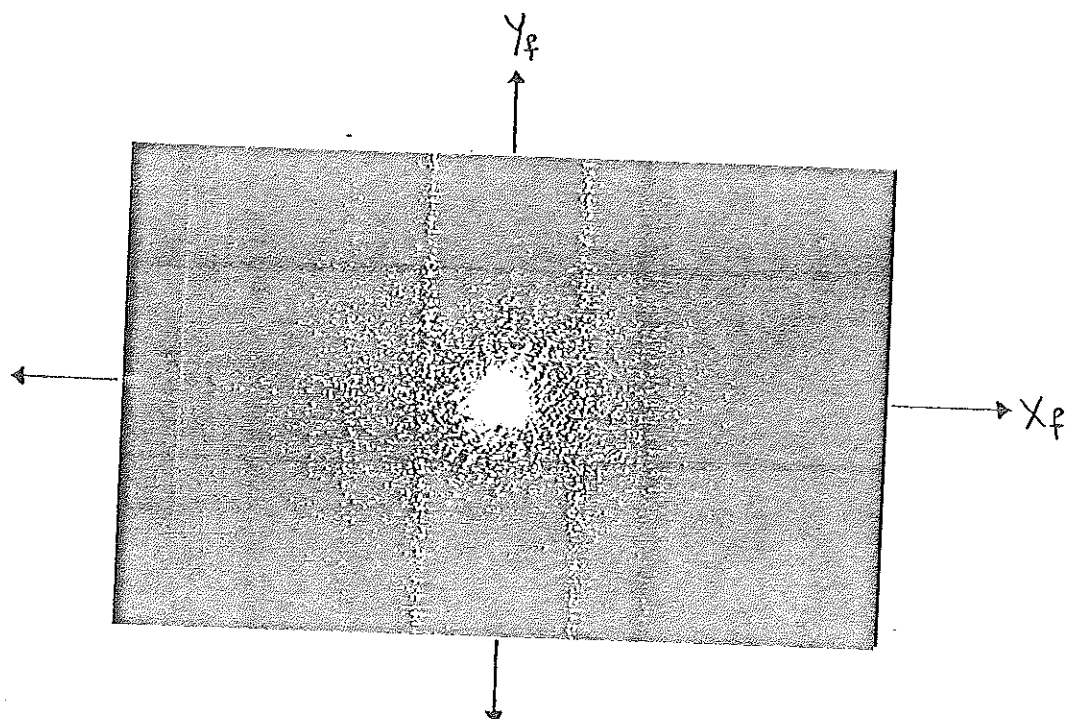


Figura 12.- Fotografía del espectro de potencia bidimensional de MAR1, obtenido con el arreglo de la Fig. 7.

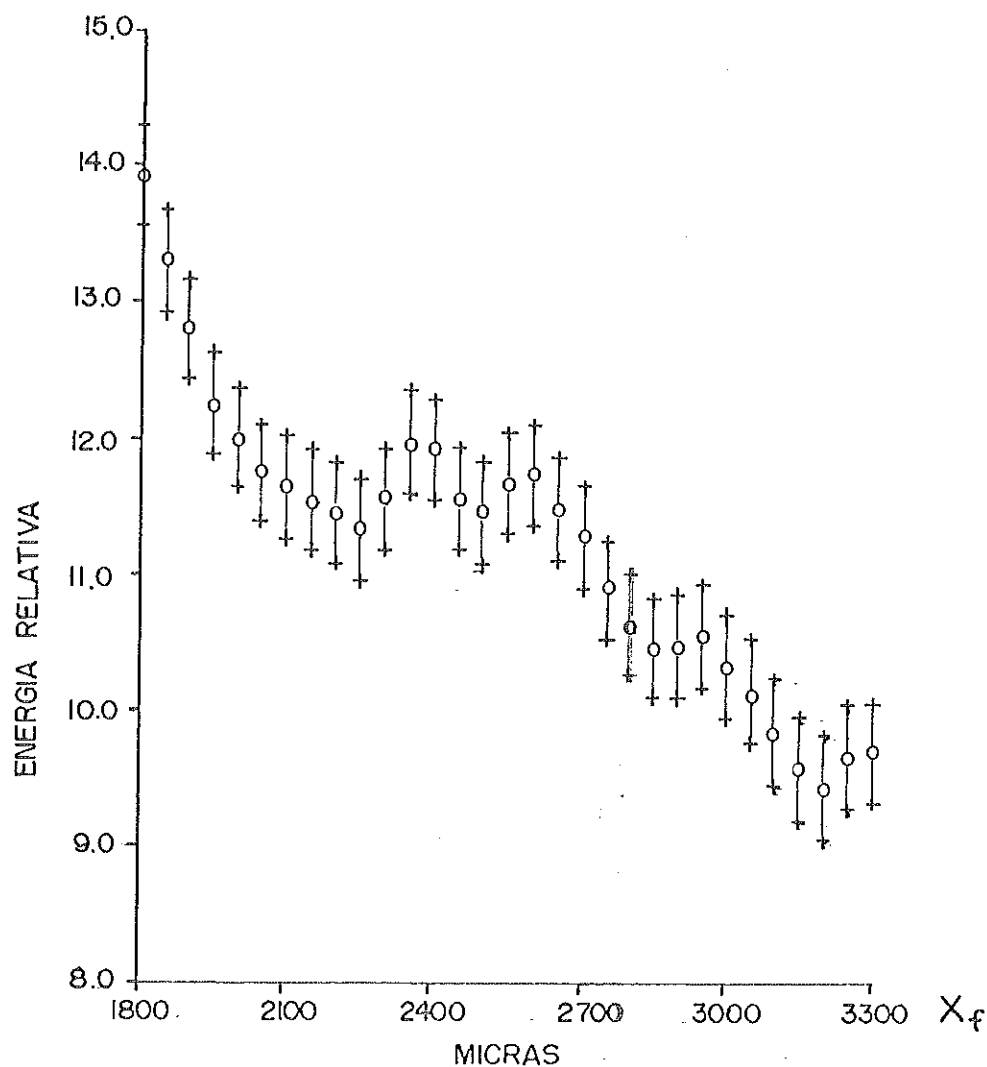


Figura 13.- Resultado de la medición del espectro de potencia (Fig. 12), obtenido con el sistema óptico de la Fig. 7. Los círculos indican la medición promedio de 5 registros, las cruces son el mínimo y el máximo de tales registros.

Tabla III.- Resultado de la medición de intensidad o espectro de potencia.

X _f (del plano de Fourier)(μ)	Intensidad medida o energía relativa.		
	Promedio	Mínimo	Máximo
1800	13.93	13.56	14.30
1850	13.30	12.92	13.68
1900	12.80	12.43	13.17
1950	12.25	11.87	12.63
2000	12.00	11.62	12.36
2050	11.76	11.38	12.10
2100	11.64	11.26	12.02
2150	11.54	11.17	11.92
2200	11.45	11.07	11.82
2250	11.33	10.95	11.71
2300	11.56	11.18	11.92
2350	11.97	11.59	12.34
2400	11.92	11.55	12.28
2450	11.56	11.18	11.92
2500	11.44	11.06	11.83
2550	11.67	11.30	12.04
2600	11.74	11.36	12.10
2650	11.49	11.11	11.86
2700	11.28	10.91	11.64
2750	10.90	10.53	11.26
2800	10.63	10.25	11.01
2850	10.46	10.09	10.83
2900	10.48	10.10	10.87
2950	10.55	10.18	10.94
3000	10.34	9.95	10.72
3050	10.16	9.77	10.54
3100	9.86	9.47	10.25
3150	9.59	9.20	9.97
3200	9.45	9.06	9.83
3250	9.68	9.29	10.05
3300	9.71	9.33	10.08

Como se vió anteriormente, la transformada de Fourier debe ser evaluada en frecuencias ($f_x = x_f / \lambda f$, $f_y = y_f / \lambda f$). De la primera coordenada, f_x se obtiene del cociente del número de líneas que graba el microdensitómetro en la película fotográfica en el eje x , entre una longitud de onda del oleaje presente en la película fotográfica, x_f es la distancia a un punto en el plano de observación (donde se presenta el espectro de potencia y se hace la medición de la intensidad), λ es la longitud de onda del láser (0.006328μ) y f es la longitud focal de la lente transformadora utilizada (en este caso $1000,000\lambda$).

Despejando de la primer coordenada resulta $x_f = \lambda f f_x$, mediante esa relación se localiza un punto en ese eje, el cual tiene asociada cierta energía.

La tabla IV presenta las longitudes de onda obtenidas para varios periodos, los números de onda y los valores de x_f calculados. La Fig. 14 muestra la comparación del espectro de potencia obtenido ópticamente con el de Roll-Fischer, el eje inferior corresponde a la longitud de onda del oleaje de la superficie simulada (no de la contenida en el negativo).

TABLA IV.- Localización de los números de onda en el plano de Fourier.

T(Seg.)	Longitud de onda del oleaje en la superficie marina (m.)	Longitud de onda del oleaje en la película fotográfica (μ)	No. de onda $K=2\pi/L$	Xf (del plano de Fourier)(μ)
2.50	9.75	71.16	0.6444	8892.1
3.00	14.04	102.48	0.4475	61174.7
3.22	16.17	118.06	0.3885	5359.8
3.50	19.11	139.48	0.3287	4536.5
4.00	24.96	182.18	0.2517	3473.3

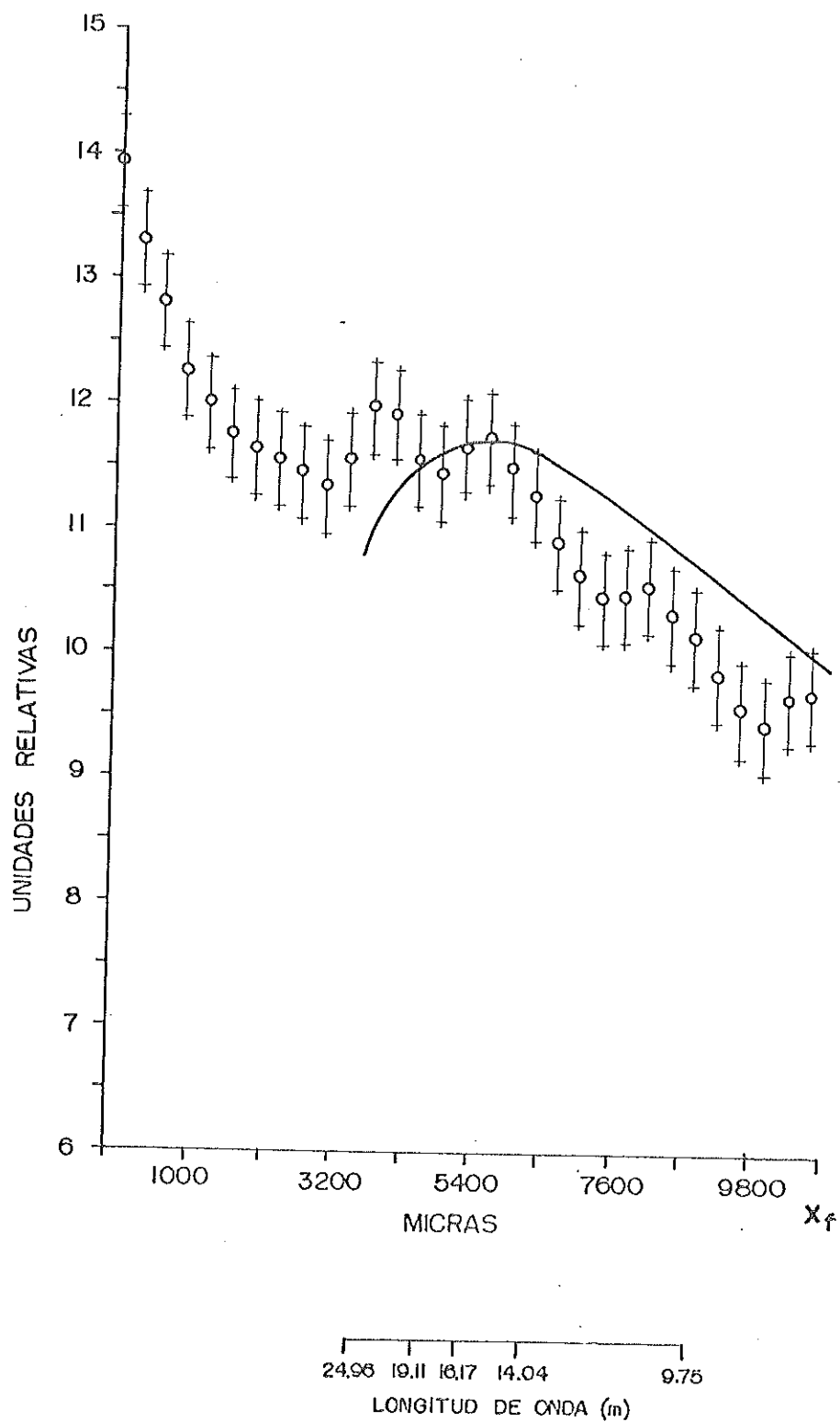
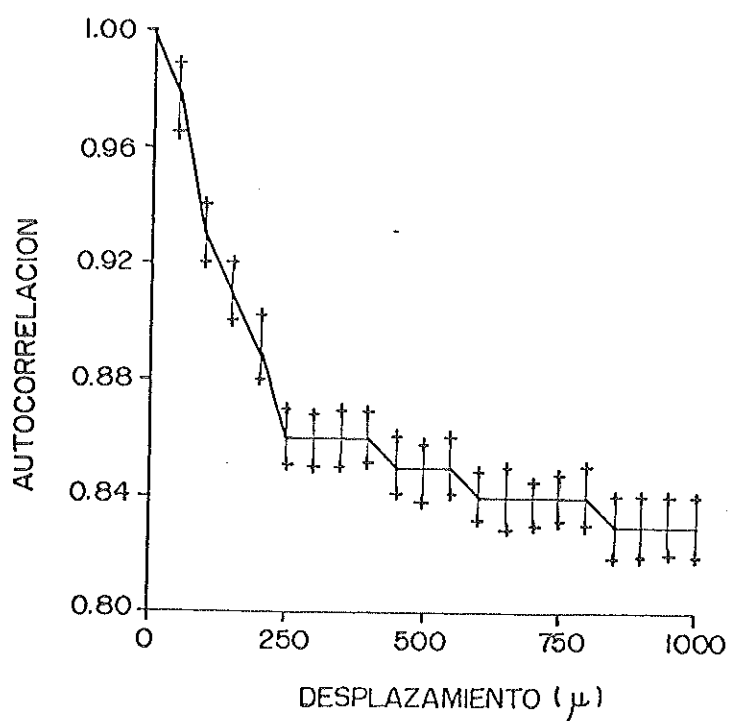


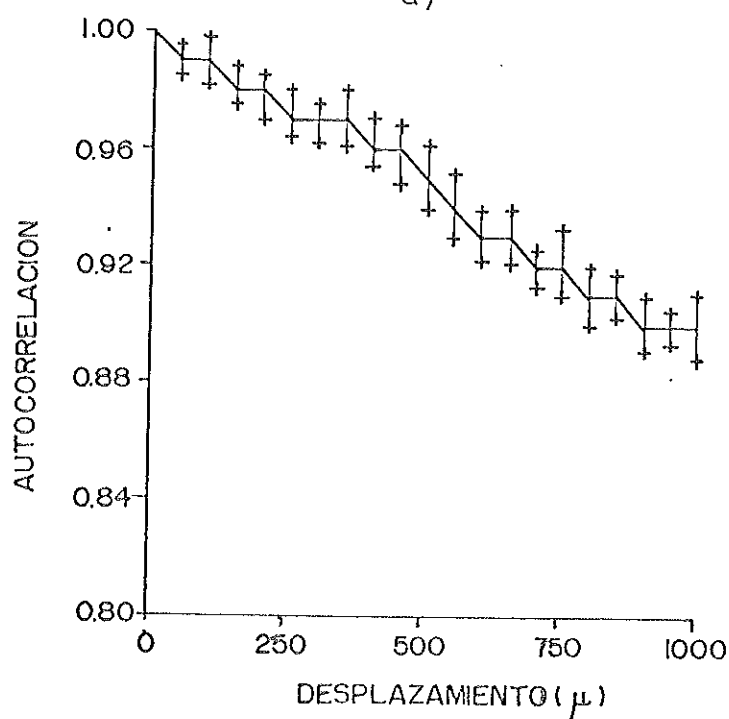
Figura 14.- Comparación del espectro de potencia promedio medido (formado por círculos, las cruces indican el mínimo y el máximo de 5 registros) y el teórico de Roll-Fischer (línea continua).

Un resúmen de los cálculos anteriores es, localizar el período pico del espectro de Roll-Fischer que está en función de la frecuencia angular, en base a este período calcular las longitudes de onda del oleaje de la superficie marina simulada y del negativo, mediante la longitud de onda del oleaje en el negativo obtener x_f . Este cálculo se hace para períodos cercanos a éste, ya que son los más representativos.

Se llevó a cabo la autocorrelación de MAR1 con MAR2 en la dirección paralela (Fig. 15a) y perpendicular (Fig. 15b) a la dirección del viento. De manera análoga a la Fig. 13, se promediaron 5 series y los intervalos significan el mínimo y el máximo a lo largo del eje x_f (ver tabla V). Las unidades de la ordenada son relativas, ya que los valores leídos en el fotomultiplicador se normalizaron.



a)



b)

Figura 15.- Resultado de las autocorrelaciones promedio (línea continua) de MAR1 con MAR2, obtenidas con el sistema óptico de la Fig. 8. Las cruces indican el mínimo y el máximo de 5 registros.

a) Autocorrelación paralela a la dirección del viento.

b) Autocorrelación perpendicular a la dirección del viento.

7 DISCUSIONES

De la Fig. 1 se puede observar que el rango de períodos energéticos es de 2 a 5 seg. es decir el rango de longitudes de onda del oleaje es 6.24m. y 39.0m. respectivamente (según la teoría lineal a primer orden).

Se generaron los espectros Pierson-Neumann (PN), Pierson-Moskowitz (PM) y Roll-Fischer (RF) para velocidad de viento de 5m/s. (Fig. 2), como los 3 están normalizados no es notorio que el pico espectral de PN es aproximadamente 10 veces menor al de PM y éste a su vez 10 veces al de RF, pero si se observa que RF contiene mayor número de frecuencias. Esto es debido a que cada uno de estos espectros teóricos considera la velocidad del viento (en este caso 5m/s.) a diferente altura sobre la superficie del mar.

Con anterioridad se ha generado el espectro PN (para viento de 5m/s) en función de las componentes del vector número de onda y además mares que contienen este espectro (Alvarez y Machado, 1985), de manera similar (Villarreal, 1987) pero con el espectro PM, en base a esta información se observa que el oleaje es mayor en mares RF que en PM y más aún que en PN, lo

mismo sucede con la energía de los espectros en función del vector número de onda. Esto también es explicado por la consideración de la altura a la que se presenta la velocidad del viento.

El análisis de la tabla I muestra que los rangos de amplitudes y los parámetros estadísticos de los mares son consistentes.

El comportamiento de la distribución de amplitudes de los mares es casi Gaussiano, esto es notorio en la Fig. 10a, 10b, 10c, 10d y 10e. Esta figura y la tabla anterior implican que no hay influencia del uso de una semilla aleatoria en la simulación de los mares y por lo tanto que el modelado es bastante aceptable.

Los valores de la estadística del oleaje de los mares también son bastante homogéneos y resultan como lo indica la teoría, o sea $H_{1/10} > H_{1/3} > \bar{H}$.

La grabación de densidad de los mares en película fotográfica se suspendió debido a una falla mecánica en el microdensitómetro. El motivo de grabar 9 veces los valores de densidad de MAR1 y 9 los de MAR2 en película fotográfica es el de aumentar la razón señal/ruido en el procesado óptico, es decir al momento de medir la intensidad en el plano de Fourier.

Esto se debe a la propiedad de traslación de la transformada de Fourier, ya que se obtienen superpuestos los 9 espectros de potencia idénticos de las 9 imágenes de MAR1 grabadas en forma unida. De ésta manera, se mejora la señal de intensidad.

En las imágenes de los mares simulados (Fig. 11a y 11b) se observa claramente que la dirección preferencial del oleaje es en la dirección del viento (eje x). Sin embargo, éstas imágenes no quedaron del todo bien grabadas en la película, ya que existe ruido introducido por el microdensitómetro, el cual por esas fechas era reparado frecuentemente. El principal objetivo de incrementar el área de la superficie marina simulada 113 veces más que Caruthers y Novarini es el de tener una zona de "estudio" mayor, ya que si se lleva a la práctica el experimento de tomar una fotografía aérea del mar y analizarla mediante métodos ópticos se pueden comparar resultados, solo que hay que tomar en cuenta que la superficie simulada no contempla la luz reflejada del sol como sucede en una fotografía real. La razón de simular con viento de 5m/s. es por ser el más común (en condiciones atmosféricas normales), en esta zona de Ensenada B. C.

El mal funcionamiento del microdensitómetro al grabar la imagen del mar trajo consecuencias en la obtención de la fotografía del espectro (Fig. 12), en el cual se observan 2 franjas perpendiculares al eje x_f (dirección del oleaje) que no

deberían aparecer, ya que estas franjas dan la impresión de ser energía del oleaje, lo cual es falso, ya que casi toda la energía está distribuida a lo largo del eje x_f . Los lóbulos no aparecen muy marcados, la razón principal es que el rango de densidad no fué el adecuado, se tomó un rango pequeño (1.95-2.51) el cual cae dentro de la linealidad de la película fotográfica que se utilizó para grabar en el microdensitómetro (ver Fig. 4), pero como el rango de elevaciones es mayor que en los mares PN y PM se debió escoger un rango más amplio en densidad, así que por experiencia si se desea realizar el trabajo con otro espectro teórico hay que observar que rango de elevaciones presenta el mar para así darle valores de densidad contenidos de 0.0 a 5.11 (rango del microdensitómetro). Si se le da un rango más amplio en densidad hay que hacer pruebas de otras películas fotográficas al grabar y elegir la que presente mayor linealidad al rango establecido. Sin embargo la información del espectro óptico bidimensional está presente aunque con menor intensidad.

Para la medición del espectro de potencia (Fig. 13) se omitieron datos que estaban cerca de la componente directa, ya que ésta crea ruido en las vecindades de los lóbulos del espectro produciendo una medición de intensidad más alta, de lo que en la realidad se debería de obtener. Además el espectro teórico a comparar no se encuentra cerca de la componente directa. Los valores graficados se muestran en la tabla III.

La Fig. 14 es la principal de este trabajo, ya que es donde se observa la comparación del espectro obtenido con el sistema óptico y el espectro teórico de Roll-Fischer. Hay una atenuación de energía para altas frecuencias del oleaje, problema que también se le presentó a Alvarez (1983). Aquí, la primer razón es de nuevo el microdensitómetro y segundo el rango pequeño de valores de densidad. En la tabla IV se muestran los valores calculados de x_f , con los cuales se hizo la localización del espectro teórico de Roll-Fischer para la Fig. 14.

La Fig. 15a y 15b da a conocer el resultado de la "autocorrelación" de MAR1 con MAR2. En el sentido estricto no podemos hablar de una autocorrelación pura, ya que los mares no son idénticos, aunque posean el mismo espectro de potencia y parámetros estadísticos muy similares.

Alvarez (1988, comunicación personal) encontró que la autocorrelación entre dos mares PN generados con diferente semilla a cero de corrimiento era de 0.6, la autocorrelación la efectuó numéricamente, mediante computadora.

Regresando a la Fig. 15a y 15b, se obtuvo una mayor autocorrelación perpendicular que paralela al viento, la razón es que al efectuarla perpendicularmente al viento las crestas de MAR1 coinciden aproximadamente con las crestas de MAR2.

Con lo cual, de manera cualitativa se observa que el sistema óptico es confiable.

Los valores leídos de intensidad en el fotomultiplicador fueron normalizados, para observar los decaimientos en la autocorrelación. Si se hubiese hecho un mayor corrimiento, se esperaría que la curva decayera un poco más.

Los programas que generan superficies marinas con espectro direccional de PN y PM ya estaban disponibles en el proyecto, entonces aplicando la ecuación del espectro de RF fué como generé los mares. Estos programas poseen el inconveniente de que se requiere demasiado tiempo de CPU (Unidad Central de Proceso), ya que no están optimizados.

8 CONCLUSIONES

El cálculo de los parámetros estadísticos, la distribución de elevaciones y la estadística del oleaje obtenida de las superficies marinas nos llevan a inferir que el modelo numérico con el que se generan es confiable, ya que todos estos resultados son satisfactorios.

Otro hecho importante que apoya al modelo fueron los resultados de la autocorrelación, ya que es perpendicular al viento cuando la curva decrece menos. Hubiera sido interesante obtener la réplica de una imagen de algún mar y efectuar una autocorrelación hablando en el sentido estricto.

Debido principalmente a la mala grabación de los valores de densidad de los mares, por parte del microdensitómetro, la fotografía del espectro de potencia presenta dos franjas anchas perpendiculares al eje x_f .

La atenuación de energía en las altas frecuencias del espectro obtenido ópticamente al compararlo con el teórico de Roll-Fischer también le ocurrió a Alvarez en 1983, entonces hay que ver la posibilidad de llevar a cabo el experimento con más control aún en las mediciones, para comparar la resolución.

La autocorrelación en dirección perpendicular al viento es mayor que en la dirección paralela. Este resultado concuerda con la autocorrelación numérica obtenida por Bruno y Novarini (1976) y por Alvarez en 1988 (comunicación personal). Lo cual indica que el correlacionador óptico utilizado es confiable, de esta manera se podría usar para fotografías reales de la superficie del mar.

Sería conveniente hacer éste tipo de análisis óptico a superficies marinas simuladas con espectros de potencia derivados recientemente, con la finalidad de hacer comparaciones.

Hay que tomar muy en cuenta el rango de las elevaciones que se obtengan al simular un mar con cierto espectro específico, con el fin de establecer un rango adecuado de valores de densidad y hacer pruebas con ciertas películas fotográficas para escoger la que presente mayor linealidad entre los valores dados y los leídos por el microdensitómetro en el rango de densidad que se establezca para trabajar.

Si se desea efectuar este experimento con una fotografía real de la superficie marina hay que tomar en cuenta el ángulo de incidencia del sol. Por comunicación personal (Alvarez, 1988) está considerando la incidencia de la luz solar cuando se toma una fotografía aérea del mar, ya que parte de la luz es reflejada por las pendientes del oleaje. Lo que pretende encontrar es una relación de la pendiente a la altura del oleaje mediante la cantidad de luz reflejada, esto sería de mucha ayuda, ya que así se tendría mayor información.

Además sería muy importante delimitar una zona de estudio para analizar el oleaje presente mediante oceanografía óptica, de satélite y la no menos importante oceanografía clásica que utiliza básicamente la colocación de instrumentos in situ. De esta manera se podría llevar a cabo una comparación bastante amplia y satisfactoria.

9 LITERATURA CITADA

Alvarez, B. J. 1983. Análisis óptico de una imagen simulada de la superficie del mar. Tesis de Maestría. C.I.C.E.S.E.

Alvarez, B. J. y M. A. Machado. 1985. Optical analysis of a simulated image of the sea surface. Applied optics. 24(7).

Alvarez, B. J. 1988. Comunicación personal.

Barber, N. E. 1954. Finding the Direction of Travel of Sea Waves, Nature London. 154, 1048.

Bruno, D. y J. Novarini. 1976. Análisis comparativo de superficies modeladas numéricamente con distintos espectros de potencia. República Argentina, Servicio de Hidrografía Naval.

Caruthers, J. W. y J. C. Novarini. 1971. Numerical modeling of randomly rough surfaces with application to sea surfaces. Texas A. and M. research foundation. Reference 71-13-T.

- Denzil, S. Jr. 1969. Directional energy spectra of the sea from photographs, J. Geophysical Research, 74, No. 8.
- Goodman, W. J. 1968. Introduction to Fourier Optics. McGraw-Hill Inc., U.S.A.
- Kinsman, B. 1965. Wind Waves. Their Generation and Propagation on the Ocean Surface. Dover publications. Inc. New York. Ed. 1984.
- Shulman, A. R. 1970. Optical Data Processing. John Wiley and Sons, Inc.
- Silvester, R. 1974. Coastal Engineering, 1. Elsevier Scientific Publishing Company. Amsterdam.
- Sugimori, Y. 1975. A study of the application of the holographic method of the determination of the directional spectrum of ocean waves, Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts, 22(5), May.
- Villarreal, B. J. 1987. Análisis óptico de una imagen simulada de la superficie marina con el espectro teórico de Pierson-Moskowitz. Tesis de licenciatura. U.A.N.L.