UNIVERIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA DE LA PALABRA EN EL GRUPO DE TRENZAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M Á T I C O A P L I C A D O

PRESENTA

SANDY GUADALUPE AGUILAR ROJAS

Ensenada, B.C. Octubre del 2018

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

EL PROBLEMA DE LA PALABRA EN EL GRUPO DE TRENZAS

T E S I S P R O F E S I O N A L

QUE PRESENTA

SANDY GUADALUPE AGUILAR ROJAS

APROBADO POR:

Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña
Presidente del jurado

Dra. Brenda Leticia De La Rosa Navarro
S E C R E T A R I O

M. C. Adina Jordan Aramburo
1ER. V O C A L

Agradecimientos

Quiero aprovechar este espacio para agradecer a quienes hicieron posible la elaboración de este trabajo.

A la Universidad Autónoma de Baja California, por ser un segundo hogar y darme la oportunidad de crecer de manera académica y personal.

A mis profesores, por su paciencia, su dedicación e interés en mi formación. Cada uno de ellos se lleva mi cariño y respeto.

A mis asesores de tesis, Brenda De La Rosa y Luis Jorge Sánchez, por su apoyo en cada etapa de la elaboración de este trabajo, por invitarme a dar más de mi y por ayudarme a crecer.

A mis amigos, por compartir mi pasión por las matemáticas, por jamás dejarme renunciar a mis sueños y creer siempre en mi.

A mis abuelos, que me dan fortaleza y que me enseñaron que puedo lograr lo que sea que me proponga; a mis padres, a quienes les debo todo lo que soy; a mis hermanos, por siempre estar ahí para mi y por ayudarme, sin darse cuenta, en mis momentos de mayor estrés. A cada uno de mis familiares, por siempre creer en mi y por hacerme sentir que estoy haciendo las cosas bien.

Resumen

El presente trabajo da una solución al problema de la palabra en el grupo de trenzas. Para esto, se comienza por estudiar el grupo de trenzas y diversas definiciones de este, así como el problema de la palabra, para posteriormente proceder a atacarlo en dicho grupo.

A lo largo del trabajo se encontrarán diferentes definiciones y resultados referentes a Teoría de Grupos, Topología Algebraica, Teoría Combinatoria de Grupos, entre otras.

La solución al problema de la palabra que se presenta en este trabajo hace uso de tres definiciones del grupo de trenzas, estas son, de manera geométrica, como grupo fundamental del espacio de configuraciones en el plano complejo y mediante su presentación de Artin.

Resumen de la tesis de Sandy Guadalupe Aguilar Rojas como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Ensenada, Baja California, México. Octubre del 2018.

El problema de la palabra en el grupo de trenzas.

Resumen aprobado:

Luis ...

Dr. Luis Jorge Sánchez Saldaña
DIRECTOR

Leticia De la Rosa

Dra. Brenda Leticia De La Rosa Navarro
CO-DIRECTOR

Índice general

Índice de figuras

Introducción

Uno de los problemas más típicos a los que se enfrenta un matemático al trabajar con cualquier tipo de objetos, es decidir cuando dos de éstos son iguales, o, de manera más específica y aterrizando un poco a grupos, cuando el elemento de un grupo es, o no, la identidad de éste. Éste problema, que aparenta ser tan simple es, básicamente, lo que se estudia mediante el problema de la palabra.

El matemático alemán Max Dehn fue quien formuló este problema, publicándolo en 1912, en conjunto con el problema de la conjugación y el del isomorfismo [4]. La inspiración para la formulación del problema de la palabra provino del estudio de nudos; se dice que Dehn se encontraba tratando de decidir si dos nudos dados eran iguales, lo que lo llevó al caso especial de cómo decidir si un nudo era o no el trivial [27].

De esta manera, se originó el problema de la palabra, el cual enunciaremos a continuación.

Sea G un grupo dado por una presentación finita. ¿Existe un algoritmo capaz de decidir si una palabra cualquiera, expresada como producto de los generadores de G, es la palabra vacía? (ver [23]).

El problema de la palabra ha sido resuelto ya para diferentes tipos de presentaciones de grupos, tales como presentaciones con una única relación o ninguna, entre otras; sin embargo, se ha probado también la existencia de grupos con problema de la palabra no soluble. De manera que, en general, el problema de la palabra no es sobluble (para más información consultar [12]).

Ahora bien, la definición de trenzas fue introducida, por primera vez, en 1925 en el artículo "Theorie der Zöpfe"(ver [1]), en el cuarto volumen de la revista de matemáticas Hamburger Abhandlugen, escrito por Emil Artin, quien no sólo las presenta sino que les asocia una estructura algebraica de grupo y prueba que tiene una cantidad finita de generadores, entre otras propiedades. Sin embargo, se cree que podrían haberse conocido desde un siglo anterior a ésto, puesto que se han encontrado algunos dibujos de trenzas en las notas de Gauss [25].

Dentro de las propiedades que cumple el grupo de trenzas tenemos que el problema de la palabra es soluble para éste. La primera persona en demostrar que esto se cumplía fue, precisamente, Artin en [1]; y, posteriormente, por Garside en 1969, Thurston en 1992, Birman, Ko y Lee en 2001, entre otros [11]. Durante este trabajo nos dedicaremos a dar una demostración de ésto.

En el primer capítulo, se presentan las definiciones y resultados necesarios para empezar a atacar el problema de la palabra en el grupo de trenzas, tales como grupos libres, presentaciones, sucesiones exactas, homotopía, grupos de homotopía, espacio de configuraciones, entre otros.

El segundo capítulo aborda tres diferentes definiciones del grupo de trenzas, estas son, de manera geométrica, como grupo fundamental del espacio de configuraciones y con su presentación de grupo; además, se comprueba que, efectivamente, las definiciones son equivalentes. Lo visto en este capítulo será de suma importancia al momento de dar solución al problema de la palabra en el grupo de trenzas.

En el trecer capítulo se habla sobre la definición del problema de la palabra de manera general, algunas maneras en las que se puede abordar y se dan algunos ejemplos sencillos de grupos con problema de la palabra soluble.

Por último, en el cuarto capítulo, se presenta una solución al problema de la palabra de manera explícita, así como un ejemplo del algoritmo empleado en una trenza dada.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo, se planea dar a conocer los conceptos y resultados necesarios para que el lector comprenda la manera en la que se construye y comporta el grupo de trenzas.

1.1. Variedades y espacio de configuraciones

A continuación se introducirá el concepto de espacio de configuraciones, el cual nos será de gran utilidad en los capítulos posteriores. Las definiciones de esta sección pueden ser consultadas en [16], [19] y [26].

Definición 1 *Una variedad (topológica) de dimensión n es un espacio topológico de Haussdorff, con base numerable, tal que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Definición 2 *Sea M una variedad conexa de dimensión mayor o igual a 2 y sea n un entero positivo. Definimos el conjunto*

$$\mathcal{F}_n(M) \colon = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M \times \cdots \times M \colon x_i \neq x_j \text{ para todo } i \neq j\}.$$

A $\mathcal{F}_n(M)$ se le pude asociar la topología inducida por el producto $M \times \cdots \times M$. Al espacio $\mathcal{F}_n(M)$ se le conoce como espacio de configuraciones de un conjunto de n puntos ordenados en M.

Consideremos ahora la acción

$$\begin{array}{rccc} \mu\colon & S_n \times \mathcal{F}_n(M) & \longrightarrow & \mathcal{F}_n(M) \\ & (\sigma,(x_1,\ldots,x_n)) & \mapsto & (x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}), \end{array}$$

donde S_n denota al grupo simétrico en las n letras $\{1,\ldots,n\}$, esto es, el grupo formado por todas las funciones biyectivas del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ a sí mismo.

Definición 3 *El espacio cociente*

$$\mathcal{C}_n(M) := \mathcal{F}_n(M)/S_n,$$

definido por la acción μ, es llamado espacio de configuraciones de n puntos no ordenados en M.

Notemos que el hecho de llamar a este espacio de configuraciones no ordenado, hace referencia a la acción que se está aplicando en éste. Dicha acción hace que, en el cociente, las clases de equivalencia de las n-tuplas sean iguales si sus representantes contienen las mismas entradas, sin importar el orden en el que se encuentren. Por ejemplo, si consideramos $\mathcal{C}_5(\mathbb{R}^2)$, se tiene que

$$\big[(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\big] = \big[(a_5,a_4,a_3,a_1,a_2)\big],$$

donde $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 \in \mathbb{R}^2$. De esta manera, tenemos que si podemos llegar de un representante a otro mediante alguna permutación, las clases de equivalencia son iguales.

Ejemplo 4 *Consideremos $M = \mathbb{R}^2$. Si $n = 1$, tenemos que*

$$\mathcal{F}_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 = \mathcal{C}_1(\mathbb{R}^2).$$

Ejemplo 5 *Sean $M = \mathbb{R}^2$ y $n = 2$. Entonces tenemos que*

$$\mathcal{F}_2(\mathbb{R}^2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \colon x \neq y\}$$

$$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}^2) = \{[(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)})] \colon x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)} \in \mathbb{R}^2, x_{\sigma(1)} \neq x_{\sigma(2)}, \sigma \in S_2\}$$

1.2. Homotopías

En esta sección introduciremos el concepto de homotopía, el cual será de suma importancia a lo largo de este trabajo, pues nos ayudará a definir los grupos de homotopía, que se verán más adelante y nos permitirá realizar comparaciones de trenzas. Para más información sobre el tema ver [15].

Consideremos los espacios topológicos X y Y y procedamos a definir el concepto de homotopía.

Definición 6 *Definimos como homotopía a una familia de funciones* $\{f_t : X \to Y\}_{t\in[0,1]}$ *tal que la función asociada* $H : X \times [0, 1] \to Y$ *dada por* $H(x, t) = f_t(x)$ *es continua.*

Decimos que dos funciones $f_0, f_1 : X \to Y$ son **homotópicas** si existe una homotopía

$$F : X \times [0, 1] \to Y$$

tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$. Denotamos que f_0 y f_1 son homotópicas como $f_0 \simeq f_1$.

Definición 7 *Una función* $f : X \to Y$ *es una equivalencia homotópica si existe una función* $g : Y \to X$ *tal que* $f \circ g \simeq Id_Y$ *y* $g \circ f \simeq Id_X$. *Se dice que los espacios* X *y* Y *son homotópicamente equivalentes o tienen el mismo tipo de homotopía si existe una equivalencia homotópica entre ellos, y se donota como* $X \simeq Y$.

Definición 8 *Dos funciones* $f_0, f_1 : X \to Y$ *son homotópicas relativamente a un subconjunto* A *de* X *si y sólo si existe una homotopía* $F : X \times [0, 1] \to Y$ *entre* f_0 *y* f_1 *tal que*

$$F(x, t) = f_0(x) = f_1(x),$$

para toda $x \in A$ *y todo* $t \in [0, 1]$. *Denotamos que* f_0 *y* f_1 *son homotópicas relativamente por* $f_0 \simeq_{rel\ A} f_1$.

Observemos que si $A = \emptyset$, entonces una homotopía relativa es lo mismo que una homotopía.

Definición 9 *Sean* α *y* $\beta : [0, 1] \to X$ *dos caminos en* X *tales que* $\alpha(0) = \beta(0)$ *y* $\alpha(1) = \beta(1)$, *se dice que son equivalentes si son homotópicos relativamente a* $\{0, 1\}$ *y se denota como* $\alpha \sim \beta$.

Ésto es, los caminos $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ son equivalentes si existe una función continua

$$F : [0,1] \times [0,1] \to X$$

tal que

$$F(t,0) = \alpha(t),\ F(t,1) = \beta(t),$$

para todo $t \in [0,1]$, y

$$F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0),\ F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1),$$

para todo $s \in [0,1]$.

Ejemplo 10 *Consideremos los caminos*

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t,t), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \beta\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t,t^2). \end{array}$$

Observemos que $\alpha(0) = (0,0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = (1,1) = \beta(1)$. Luego, definimos la función

$$\begin{array}{rccc} F\colon & [0,1] \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (t,s) & \mapsto & (t,t^{1+s}). \end{array}$$

Notemos que F es continua y satisface

$$\begin{array}{cc} F(0,s) = (0,0) = \alpha(0) = \beta(0) & F(1,s) = (1,1) = \alpha(1) = \beta(1) \\ F(t,0) = (t,t) = \alpha(t) & F(t,1) = (t,t^2) = \beta(t). \end{array}$$

De ésto, tenemos que α y β son equivalentes.

Veamos ahora un ejemplo en el que dos caminos no son equivalentes.

Ejemplo 11 *Consideremos $\mathbb{R}^2 - \{(0.1, 1.5)\}$ y los caminos*

$$\begin{array}{rccc} a\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 - \{(0.1, 1.5)\} \\ & t & \mapsto & (0, t+1), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} b\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 - \{(0.1, 1.5)\} \\ & t & \mapsto & \big((1-t)t, t+1\big). \end{array}$$

Tenemos que $a(0) = (0,1) = b(0)$ *y* $a(1) = (0,2) = b(1)$*. Notemos que dichos caminos se ven como en la figura 1.1.*

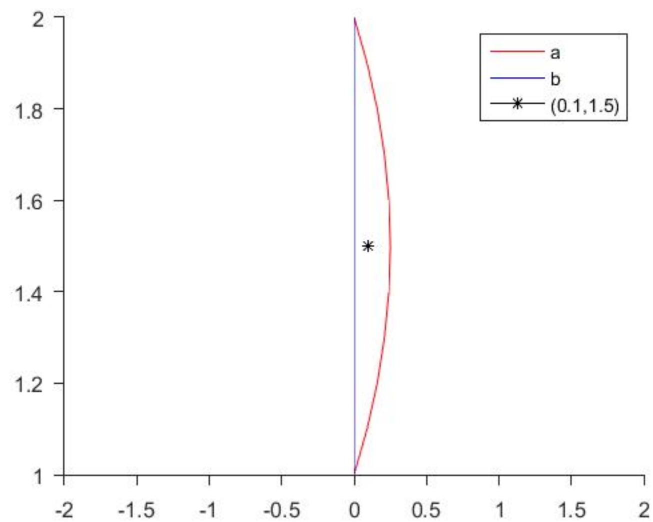


Figura 1.1: Ejemplo de caminos no equivalentes

Observemos que no podemos deformar un lazo en el otro sin pasar por el punto $(0.1, 1.5)$*, el cual ha sido removido del plano. De esto, se tiene que los caminos* a *y* b *no son equivalentes.*

1.3. Grupos de homotopía

A continuación veremos los grupos de homotopía, comenzando con el grupo de fundamental y posteriormente, con los grupos de homotopía de orden superior.

1.3.1. Grupo fundamental

Esta subsección tiene como objetivo construir el grupo fundamental, el cual nos ayudará, más adelante, a dar una definición del grupo de trenzas. Las definiciones y resultado de ésta pueden consultarse en [8], [9], [15] y [18].

Definición 12 *Sean X un espacio topológico y $x_0 \in X$ fijo, definimos un lazo f como una trayectoria tal que el punto inicial coincide con el punto final, i.e. $f : [0,1] \to X$ es continua y $f(0) = f(1) = x_0 \in X$, denotemos por $\Omega(X, x_0)$ al conjunto de los lazos cuyo punto inicial o base es x_0.*

Proposición 13 *La relación de homotopía por caminos define una relación de equivalencia en $\Omega(X, x_0)$, $x_0 \in X$.*

Demostración. Sean $f, g, h \in \Omega(X, x_0)$. Tenemos que $f \sim f$ mediante la homotopía $f_t = f$ para todo $t \in [0,1]$.
Supongamos que $f \sim g$ mediante f_t, entonces $g \sim f$ mediante la homotopía inversa f_{1-t}. Ahora, si $f \sim g$ mediante f_t y $g \sim h$ mediante g_t. Definimos

$$h_t = \begin{cases} f_{2t} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_{2t-1} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

así $f \sim h$ mediante h_t si $H(x,t) = h_t(x)$ es continua. Recordemos que una función definida en la unión de dos conjuntos cerrados es continua si es continua al restringirla en cada uno de los conjuntos cerrados y como

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

donde F y G son las funciones asociadas de f_t y g_t respectivamente y coinciden en $t = \frac{1}{2}$, se tiene que H es continua. Así $f \sim h$. Por tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia. ■

Dadas dos trayectorias $f, g : [0,1] \to X$ tal que $f(1) = g(0)$ definimos la trayectoria producto $f \cdot g$ mediante

$$f \cdot g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Proposición 14 *El producto anterior respeta las clases de homotopías.*

Demostración. Supongamos que $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$ mediante f_t y g_t respectivamente, tenemos que

$$f_0(1) = g_0(0) \quad \text{y} \quad f_1(1) = g_1(0).$$

Así $f_t \cdot g_t$ define una homotopía $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$. ∎

Definición 15 *Denotamos por $\pi_1(X, x_0)$ al conjunto de las clases de equivalencia, con la relación de homotopía, de caminos cerrados con punto base $x_0 \in X$.*

En la siguiente proposición veremos que el conjunto $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo, al cual se le conoce como el **grupo fundamental** de X con punto base x_0.

Proposición 16 *El conjunto $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo con respecto al producto $[f][g] = [f \cdot g]$, donde $\pi_1(X, x_0)$ es el conjunto de las clases de homotopías $[f]$ de lazos con punto base x_0.*

Demostración. Tenemos, por construcción, que el producto dado por $[f][g] = [f \cdot g]$ está bien definido. Ahora, sean $[f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$, tenemos que

$$[f]([g][h]) = [f(gh)],$$

y

$$([f][g])[h] = [(fg)h].$$

Donde, por definición del producto de lazos con punto base x_0,

$$f(gh) = \begin{cases} f(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$(fg)h = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la siguiente homotopía,

$$H(t,s)=\begin{cases} f(\frac{4t}{s+1}) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{s+1}{4}\\ g(4t-s-1) & \text{si } \frac{s+1}{4}\leq t\leq \frac{s+2}{4}\\ h(1-\frac{4(t-1)}{s-2}) & \text{si } \frac{s+2}{4}\leq t\leq 1\end{cases}$$

Notemos que

$$H(t,0)=\begin{cases} f(4t) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{4},\\ g(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4}\leq t\leq \frac{1}{2},\\ h(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

$$H(t,1)=\begin{cases} f(2t) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{2},\\ g(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq \frac{3}{4},\\ h(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

$$H(0,s)=(fg)h(0)=f(gh)(0),$$

$$H(1,s)=(fg)h(1)=f(gh)(1).$$

De ésto, $f(gh)$ y $(fg)h$ son equivalentes, lo que implica que

$$[f(gh)]=[(fg)h],$$

tanto, la operación es asociativa.

El elemento neutro de dicha operación es el lazo

$$\begin{array}{rccc} 1_{\pi_1(X,x_0)}: & [0,1] & \to & X\\ & t & \mapsto & x_0\end{array}$$

Sea $[\tilde{f}]\in\pi_1(X,x_0)$, tenemos que

$$[\tilde{f}]1_{\pi_1(X,x_0)}=\begin{cases}\tilde{f}(2t) & \text{si } 0\leq t\leq \frac{1}{2},\\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

$$1_{\pi_1(X,x_0)}[\tilde{f}] = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{f}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos la homotopía

$$\tilde{H}(t,s) = \begin{cases} \tilde{f}(\frac{2t}{2-s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{2-s}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ahora,

$$\tilde{H}(t,0) = \begin{cases} \tilde{f}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ x_0 & \text{si } 1 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$\tilde{H}(t,1) = \begin{cases} \tilde{f}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$\tilde{H}(0,s) = \tilde{f}(0) = \big(\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}\big)(0),$$

$$\tilde{H}(1,s) = \tilde{f}(1) = \big(\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}\big)(1).$$

De ésto, $[\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}] = [\tilde{f}]$. Luego, consideremos la homotopía

$$G(t,s) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2}, \\ \tilde{f}(\frac{2t}{2-s}) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que

$$G(t,0) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq 0, \\ \tilde{f}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$G(t,1) = \begin{cases} x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{f}(2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$G(0,s) = \tilde{f}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f})(0),$$

$$G(1,s) = \tilde{f}(1) = (1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f})(1).$$

De ésto, $[1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f}] = [\tilde{f}]$. Así,

$$[1_{\pi_1(X,x_0)}\tilde{f}] = [\tilde{f}] = [\tilde{f}1_{\pi_1(X,x_0)}].$$

Luego, sea $\tilde{g} \in \pi_1(X,x_0)$, definimos su elemento inverso $\tilde{g}$ como

$$\tilde{g}^{-1}(t) = \tilde{g}(1-t).$$

Entonces,

$$\tilde{g}\tilde{g}^{-1} = \begin{cases} \tilde{g}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$\tilde{g}^{-1}\tilde{g} = \begin{cases} \tilde{g}(1-2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ahora, consideremos la siguiente homotopía

$$F(t,s) = \begin{cases} \tilde{g}(2ts) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2s(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que

$$F(t,s) = \begin{cases} \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \tilde{g}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

y

$$F(0,s) = \tilde{g}\tilde{g}^{-1}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(0) = x_0,$$

$$F(1,s) = \tilde{g}\tilde{g}^{-1}(0) = (1_{\pi_1(X,x_0)})(1) = x_0.$$

De ésto, $[\tilde{g}\tilde{g}^{-1}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}]$. Luego, consideremos la homotopía

$$\tilde{F}(t,s) = \begin{cases} \tilde{g}(s(1-2t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(s(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$\tilde{F}(t,0) = \begin{cases} \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(0) = x_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$\tilde{F}(t,1) = \begin{cases} \tilde{g}(1-2t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{g}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Además,

$$F(0,s) = \tilde{g}^{-1}(0)\tilde{g} = (1_{\pi_1(X,x_0)})(0) = x_0,$$

$$F(1,s) = \tilde{g}^{-1}(0)\tilde{g} = (1_{\pi_1(X,x_0)})(1) = x_0.$$

De ésto, $[\tilde{g}^{-1}\tilde{g}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}]$. Así,

$$[\tilde{g}^{-1}\tilde{g}] = [1_{\pi_1(X,x_0)}] = [\tilde{g}\tilde{g}^{-1}].$$

Por lo tanto, $\pi_1(X,x_0)$ es un grupo. ■

Ahora, veamos algunos ejemplos de grupo fundamental de ciertos espacios.

Ejemplo 17 *Consideremos el espacio que tiene solamente un punto. Denotemos al espacio como P y al punto que lo compone como p. Es fácil ver que, como este espacio tiene un único punto, cualquier lazo que quisieramos formar en él sería el lazo constante en p, de manera que su grupo fundamental es el trivial, esto es,*

$$\pi_1(P,p) = \{1_{\pi_1(P,p)}\}.$$

Para el siguiente ejemplo, consideremos el siguiente resultado.

Teorema 18 *Sean X y Y espacios topológicos con el mismo tipo de homotopía. Entonces, se tiene que sus grupos fundamentales son isomorfos.*

Demostración. Como X y Y tienen el mismo tipo de homotopía, tenemos que existen dos funciones $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ tales que $f \circ g \simeq Id_Y$ y $g \circ f \simeq Id_X$. Ahora, sea $x \in X$, probaremos que

$$\begin{array}{rccc} \psi_f\colon & \pi_1(X,x) & \to & \pi_1(Y,f(x)) \\ & [\alpha] & \mapsto & [f(\alpha)] \end{array}$$

es un isomorfismo. Es fácil ver que ψ está bien definida. Ahora, sean $[\alpha],[\beta] \in \pi_1(X,x)$ tales que son iguales, tenemos que $\psi_f([\alpha]) = [f(\alpha)]$ y $\psi_f([\beta]) = [f(\beta)]$. Luego, como $[\alpha] = [\beta]$, tenemos que existe una homotopía entre α y β, esto es, existe una función continua $F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que $F(t,0) = \alpha(t)$ y $F(t,1) = \beta(t)$ para toda $t \in [0,1]$; más aún, $F(0,s) = \alpha(0) = \beta(0)$ y $F(1,s) = \alpha(1) = \beta(1)$. De ésto, tenemos que la función

$$\begin{array}{rccc} T\colon & [0,1]\times[0,1] & \to & Y \\ & (t,s) & \mapsto & f(F(t,s)) \end{array}$$

es continua, por ser la composición de dos funciones continuas. Más aún,

$$T(t,0) = f(F(t,0)) = f(\alpha(t)) \text{ y } T(t,1) = f(F(t,1)) = f(\beta(t))$$

para toda $t \in [0,1]$; además,

$$T(0,s) = f(F(0,s)) = f(\alpha(0)) = f(\beta(0)) \text{ y } T(1,s) = f(F(1,s)) = f(\alpha(1)) = f(\beta(1))$$

para toda $s \in [0,1]$. De ésto, T es una homotopía, y por tanto $[f(\alpha)] = [f(\beta)]$. Ası, ψ_f es función.

Ahora, sean $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(X,x)$, tenemos que

$$\psi_f([\gamma_1]\cdot[\gamma_2]) = \psi_f([\gamma_1\gamma_2]) = [f(\gamma_1\gamma_2)],$$

$$\psi_f([\gamma_1])\psi_f([\gamma_2]) = [f(\gamma_1)]\cdot[f(\gamma_2)] = [(f(\gamma_1))(f(\gamma_2))]$$

.

Notemos que

$$f(\gamma_1\gamma_2) = \begin{cases} f(\gamma_1(2t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(\gamma_2(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y

$$f(\gamma_1)f(\gamma_2) = \begin{cases} f(\gamma_1(2t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(\gamma_2(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

De ésto, $f(\gamma_1\gamma_2) = f(\gamma_1)f(\gamma_2)$ y, por tanto, $\psi_f([\gamma_1] \cdot [\gamma_2]) = \psi_f([\gamma_1])\psi_f([\gamma_2])$. Así ψ_f es un homomorfismo de grupos.

Ahora, consideremos la siguiente asignación

$$\begin{array}{rccc} \psi_g\colon & \pi_1(Y, f(x)) & \to & \pi_1(X, x) \\ & [\beta] & \mapsto & [g(\beta)]. \end{array}$$

De manera similar a lo anterior, podemos probar que ψ_g es una función y, más aún, un homomorfismo de grupos. Ahora, sea $\omega \in \pi_1(X, x)$, notemos que

$$\psi_g(\psi_f([\omega])) = \psi_g([f(\omega)]) = [g(f(\omega))] = [\omega],$$

dado que $gf \simeq Id_X$; además, sea $\delta \in \pi_1(Y, f(x))$

$$\psi_f(\psi_g([\delta])) = \psi_f([g(\delta)]) = [f(g(\delta))] = [\delta],$$

dado que $fg \simeq Id_Y$. Por tanto, tenemos que ψ_f es biyectiva, implicando que sea un isomorfismo. Así,

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(Y, f(x)).$$

■

De la demostración del teorema 18, tenemos el siguiente resultado.

Lema 19 *Sea $f\colon X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Tenemos que f induce una función $f_*\colon \pi_1\big(X, x_0\big) \to \pi_1\big(Y, f(x_0)\big)$; más aún, la identidad induce a la identidad y para dos funciones g y $h\colon X \to Y$, se tiene que $(g \circ h)_* = g_* \circ h_*$.*

Continuemos con algunos ejemplos de grupo fundamental.

Ejemplo 20 *Todo espacio topológico homotópicamente equivalente al espacio de un único punto, tiene grupo fundamental trivial. Esto se sigue del teorema y ejemplo anterior.*

Como último ejemplo de grupos de homotopía, veamos uno donde el resultado no sea el trivial. Para esto, haremos algunas observaciones y veremos ciertas definiciones y resultados necesarios para proceder a entender el ejemplo que viene a continuación.

Consideremos la función exponencial

$$\begin{array}{rccc} exp\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & e^{2\pi i t}. \end{array}$$

Dado que, para $s, t \in \mathbb{R}$, $e^{2\pi i(t+s)} = e^{2\pi i t}e^{2\pi i s}$, tenemos que la función exp es un homomorfismo del grupo aditivo de $\mathbb{R}$; además, sabemos que es continua, sobreyectiva y abierta.

Lema 21 (Lema de levantamiento de caminos) *Para todo camino*

$$\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1,$$

con $\sigma(0) = exp(0) = 1$, existe un único camino $\tilde{\sigma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{\sigma}(0) = 0$ y $exp \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.

Al camino $\tilde{\sigma}$ se le conoce como **levantamiento** de σ.

Demostración. La prueba a este resultado puede encontrarse en la página 39 de [18]. ■

Lema 22 (Lema de levantamiento de homotopías) *Sean $\alpha, \beta\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ dos caminos tales que $\alpha(0) = \beta(0) = 1 \in \mathbb{S}^1$ y $H\colon \alpha \sim \beta$. Existe una única aplicación $\tilde{H}$ tal que $H = exp \circ \tilde{H}$ y $\tilde{H}\colon \tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$, donde $exp \circ \tilde{\beta} = \beta$ y $exp \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.*

Demostración. La demostración a éste resultado puede encontrarse en [18], página 40. ■

Definición 23 *Sea $\sigma\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ un camino cerrado con base en 1. Se define el grado de σ como $deg(\sigma) = \tilde{\sigma}(1)$, donde $\tilde{\sigma}$ es el único levantamiento de σ con $\tilde{\sigma}(0) = 0$.*

Notemos que, de manera intuitiva, el grado de un camino cerrado representa el número de vueltas que este da al rededor de $\mathbb{S}^1$, considerando su signo como el sentido de éstas.

Ejemplo 24 *Consideremos* $\mathbb{S}^1$, *con punto base en la coordenada* 1.

Tomemos en cuenta la siguiente asignación

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) & \to & \mathbb{Z} \\ & [\sigma] & \mapsto & deg(\sigma). \end{array}$$

Por el lema anterior, tenemos que φ *es función. Ahora, sean* $\alpha,\beta \in \pi_1(\mathbb{S}^1,1)$. *Consideremos el camino en* $\mathbb{R}$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}$, *donde* $\tilde{\alpha}$ *y* $\tilde{\beta}$ *son los únicos levantamientos de* α *y* β, *respectivamente, tales que* $\tilde{\alpha}(0) = 0$ *y* $\tilde{\beta}(0) = 0$. *Notemos que*

$$exp \circ \tilde{\gamma} = exp \circ \tilde{\alpha}\tilde{\beta} = (exp \circ \tilde{\alpha})(exp \circ \tilde{\beta}) = \alpha\beta,$$

de esto, $\tilde{\gamma}$ *es un levantemiento de* $\alpha\beta$. *Luego,*

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(0) = 0.$$

De esto,

$$\varphi([\alpha][\beta]) = \varphi([\alpha\beta]) = deg(\alpha\beta) = \tilde{\gamma}(1).$$

Por otro lado,

$$\varphi([\alpha])\varphi([\beta]) = deg(\alpha)deg(\beta) = \tilde{\alpha}(1)\tilde{\beta}(1) = \tilde{\omega}(1).$$

Así, φ *es homomorfismo de grupos. Ahora, sean* $m \in \mathbb{Z}$, *notemos que el camino* σ *definido por* $\sigma(t) = exp(mt)$ *cumple que* $deg(\sigma) = m$. *De ésto, tenemos que* φ *es sobreyectiva.*

Luego, sea $\omega \in \pi_1(\mathbb{S}^1,1)$ *tal que* $\varphi(\omega) = 0$, *tenemos que* $\tilde{\omega} = 0$, *implicando que* $\tilde{\omega}$ *es un camino cerrado en* $\mathbb{R}$ *con punto base en* 0. *De esto,* ω *es homotópico al lazo trivial. Así,* φ *es inyectiva.*

Por tanto, el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}$.

1.3.2. Grupos de homotopía de orden superior

Esta subsección aborda definiciones y resultados que pueden ser consultados en [15]; el contenido de ésta es clave para el entendimiento de una de las definiciones que se darán del grupo de trenzas y algunos resultados claves para la solución del problema de la palabra en éstas, que se dará como resultado principal de este trabajo.

Consideremos $I^n = \underbrace{I \times I \ \times \cdots \times I}_{n \text{ veces}}$, donde $n \in \mathbb{N}$ e $I = [0,1]$, es el intervalo cerrado unitario y denotemos por δI^n a la frontera de dicho conjunto.

Definición 25 *Sea X un espacio topológico con punto base $x_0 \in X$. Definimos el conjunto Ω_n como el conjunto de funciones $f\colon I^n \to X$, donde $f(\delta I^n) = x_0$. Las cuales denotaremos como*

$$f\colon (I^n, \delta I^n) \to (X, x_0).$$

Consideremos la relación de homotopía dentro del conjunto Ω_n, de manera que $f, g \in \Omega_n$ están relacionadas si existe una función $H\colon \big(I^n \times I, \delta I^n \times I\big) \to \big(X, x_0\big)$ tal que $H(s,0) = f(s)$ y $H(s,1) = g(s)$ para toda $s \in I^n$; además, para toda $t \in I$ y toda $a \in \delta I^n$, $H(a,t) = x_0$. Notemos que dicha relación define una relación de equivalencia en Ω_n.

Denotemos por $\pi_n(X, x_0)$ al conjunto de clases de equivalencia en Ω_n. Al conjunto $\pi_n(X, x_0)$ se le conoce como **grupo de homotopía de orden n**. El hecho de que tenga estructura de grupo se demostrará más adelante. Observemos que cuando $n = 1$, la definición coincide con el grupo fundamental.

Dadas dos funciones $f, g \in \Omega_n$. Definimos su suma como

$$f \cdot g(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & \text{si } 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Observemos que el producto anterior respeta las clases de homotopía.

Proposición 26 *El conjunto $\pi_n(X, x_0)$ tiene estructura de grupo con la operación dada por*

$$[f][g] = [f \cdot g],$$

donde $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$.

Demostración. La demostración es totalmente análoga a la de grupo fundamental, dada en la proposición 16.

■

1.4. Grupos libres, presentaciones y relaciones

El problema de la palabra está asociado, por definición, con presentaciones de grupos, por lo que resulta necesario definir lo que son. Para esto, es importante entender conceptos tales como grupo libre, alfabeto, palabras, entre otros. Esta sección se encarga de realizar eso mediante reultados y definiones que pueden ser consultados en [26].

Definición 27 *Sea F un grupo y S un subconjunto de este. Se dice que F es un grupo libre con base S si, para cada grupo G y cada función (entre conjuntos) $f : S \to G$, existe un único homomorfismo $\varphi : F \to G$ con $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in S$. De manera que tenemos el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, "\varphi"] & \\ S \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

Definición 28 *Sea S un conjunto. Se dice que S^{-1} es una réplica disjunta de S si son disjuntos y existe una biyección entre S y S^{-1} la cual denotamos por $x \mapsto x^{-1}$.*

$$S^{-1} := \{x^{-1} : x \in S\}.$$

Al conjunto $S \cup S^{-1}$ se le llama alfabeto.

Definición 29 *Sea n un entero positivo. Definimos una palabra en S de longitud $n \geq 1$ como una función $w : \{1, 2, \dots n\} \to S \cup S^{-1}$.*

Generalmente, una palara w de longitud n tal que $w(i) = x_i^{e_i}$, con $i = 1, 2, \dots, n, e_i \in \{+1, -1\}$, se denota como

$$w = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n},$$

donde $x_i \in S$. La longitud n de la palabra w se denota como $|w|$.

Denotamos como **palabra vacía** a la palabra de longitud 0, la cual escribimos con el símbolo 1.

Escribiremos como $\mathcal{W}(S)$ al conjunto de todas las palabras en S. Si $S = \emptyset$, entonces $\mathcal{W}(S)$ tiene como único elemento a la palabra vacía.

Definición 30 *Sean*

$$u = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} \quad y \quad w = y_1^{e_1} \cdots y_m^{e_m}$$

palabras, donde $x_i, y_j \in S$ *para todo* $i = 1, ..., n$ *y todo* $j = 1, ..., m$. *Decimos que* $u = w$ *si y sólo si* $n = m, x_i = y_i$ *y* $e_i = d_i$ *para todo* i.

Definición 31 *Si* $u = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ *y* $w = y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m}$ *son palabras en* S, *entonces definimos su yuxtaposición*

$$uw = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m}.$$

Si 1 es la palabra vacía, entonces $1u = u = u1$ *y* $1w = w = w1$.

Definición 32 *Una subpalabra de una palabra* $w = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ *es la palabra vacía o una palabra de la forma* $u = x_r^{e_r} \cdots x_s^{e_s}$, *donde* $1 \leq r \leq s \leq n$. *El inverso de una palabra* $w = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ *es* $w^{-1} = x_n^{-e_n} \cdots x_1^{-e_1}$.

Notemos que $(w^{-1})^{-1} = w$ para toda palabra w.

Definición 33 *Una palabra* w *en* S *es reducida si* $w = 1$ *o* w *no tiene subpalabras de la forma* xx^{-1} *o* $x^{-1}x$, *con* $x \in X$.

Definición 34 *Sean* u *y* v *palabras en* S *y sea* $w = uv$. *Una* ***operación elemental*** *es una* ***inserción***, *ésto es, cambiar* $w = uv$ *por* $w = uaa^{-1}v$ *o* $w = ua^{-1}av$ *para algún* $a \in S$, *o una* ***eliminación*** *de una subpalabra de* w *de la forma* aa^{-1} *o* $a^{-1}a$, *es decir, cambiando* $w = uaa^{-1}v$, *o* $w = ua^{-1}av$, *por* $w = uv$.

Escribimos $w \to w'$ para denotar que w y w' difieren por una operación elemental. Decimos que dos palabras en S, u y v, son **equivalentes** si existen palabras $u = w_1, w_2, \ldots, w_n = v$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$u = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_n = v.$$

Notemos que ésta es una relación de equivalencia. Denotamos la clase de equivalencia de u como $[u]$.

Teorema 35 *Si* S *es un conjunto, entonces el conjunto* F_S *de las clases de equivalencia de las palabras en* S, *con la relación dada por las operaciones elementales, es un grupo libre con base* $\{[x] : x \in S\}$ *con la operación* $[u][v] = [uv]$.

Demostración. Si $S = \emptyset$, entonces $W(\emptyset) = \{1\}$ lo que implica que $F_S = \{1\}$, que claramente es un grupo libre.

Si $S \neq \emptyset$, comenzaremos por probar que F_S es un grupo con la operación

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & F_s \times F_s & \to & F_s \\ & \big([u],[v]\big) & \mapsto & [u][v] = [uv], \end{array}$$

con $[u], [v] \in F_S$. Por construcción, tenemos que la asignación es correcta, esto es, que la imagen de la operación está contenida en el contradominio de la misma. Ahora, sean $[u_1], [v_1], [u_2], [v_2] \in F_S$ tales que $[u_1] = [u_2]$ y $[v_1] = [v_2]$. Sabemos que u_1 está relacionada con u_2, de ésto, tenemos que existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in W(S)$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$u_1 = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_n = u_2,$$

de ésto,

$$u_1v_1 = w_1v_1 \to w_2v_1 \to \cdots \to w_nv_1 = u_2v_1,$$

lo cual implica que u_1v_1 está relacionado con u_2v_1. Además, como v_1 está relacionado con v_2, tenemos que existen $z_1, z_2, \ldots, z_m \in W(S)$, con $m \in \mathbb{N}$, tales que

$$v_1 = z_1 \to z_2 \to \cdots \to z_m = v_2,$$

de ésto,

$$u_2v_1 = u_2z_1 \to u_2z_2 \to \cdots \to u_2z_m = u_2v_2,$$

es decir, u_2v_1 está relacionado con u_2v_2, lo cual implica, por transitividad, que u_1v_1 está relacionado con u_2v_2, ésto es, $[u_1v_1] = [u_2v_2]$. Por lo tanto, la operación está bien definida.
Ahora, sean $[y_1][y_2][y_3] \in F_S$, tenemos que

$$([y_1][y_2])[y_3] = [y_1y_2][y_3] = [(y_1y_2)y_3],$$

$$[y_1]([y_2][y_3]) = [y_1][y_2y_3] = [y_1(y_2y_3)].$$

Como la yuxtaposición de palabras es asociativa, debido a que preserva el orden de éstas, tenemos que $(y_1y_2)y_3 = y_1(y_2y_3)$, lo cual implica que están relacionadas, por tanto

$$[(y_1y_2)y_3] = [y_1(y_2y_3)].$$

Así, la operación es asociativa.

Podemos ver que el neutro de la operación es la clase de equivalencia de la palabra vacía,

$$[w][1] = [w1] = [w] = [1w] = [1][w],$$

para todo $[w] \in F_S$. Además, sea $[u] \in F_S$, tenemos que $[u]^{-1} = [u^{-1}]$ pues

$$[u][u]^{-1} = [u][u^{-1}] = [uu^{-1}] = [1] = [u^{-1}u] = [u^{-1}][u] = [u]^{-1}[u].$$

Así, F_S es un grupo con dicha operación.

Luego, sea $[g] \in F_S$, tenemos que $g = x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdots x_r^{e_r}$ para ciertos $x_i \in S$ y $e_i \in \{+1, -1\}$, con $i = 1, 2, \ldots, r$ y $r \in \mathbb{N}$, de ésto,

$$[g] = [x_1^{e_1}x_2^{e_2}\cdots x_r^{e_r}] = [x_1^{e_1}][x_2^{e_2}]\cdots[x_r^{e_r}].$$

Así, F_S es generado por las clases de equivalencia de los elementos de X. Ahora, sea G un grupo y sea $f : S \to G$ una función. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & F_S & \longrightarrow & G \\ & [w] = [x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}] & \mapsto & f(x_1)^{e_1}\cdots f(x_n)^{e_n} \end{array}$$

Tenemos, por construcción, que la asignación es correcta. Luego, sean

$$[v] = [x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}], [w] = [y_1^{d_1}\cdots y_m^{d_m}] \in F$$

tales que $[v] = [w]$, tenemos que v está relacionada con w. Ahora, sin pérdida de generalidad podemos suponer que v y w difieren por una operación elemental, ésto es, si $v = x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}$ entonces

$w = x_1^{e_1} \cdots x_r^{e_r} a a^{-1} x_{r+1}^{e_{r+1}} \cdots x_n^{e_n}$, para cierto $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq n$ y algún $a \in S$. De ésto,

$$\begin{aligned} \varphi([v]) &= f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_n)^{e_n} \\ &= f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_r)^{e_r} f(a) f(a)^{-1} f(x_{r+1})^{e_{r+1}} \cdots f(x_n)^{e_n} \\ &= f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_r)^{e_r} f(x_{r+1})^{e_{r+1}} \cdots f(x_n)^{e_n} \\ &= \varphi([w]) \end{aligned}.$$

Por tanto, φ está bien definida. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi([v][w]) &= \varphi([vw]) \\ &= \varphi([x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m}]) \\ &= f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_n)^{e_n} f(y_1)^{d_1} \cdots f(y_m)^{d_m} \\ &= (f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_n)^{e_n})(f(y_1)^{d_1} \cdots f(y_m)^{d_m}) \\ &= \varphi([x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}])\varphi([y_1^{d_1} \cdots y_m^{d_m}]) \\ &= \varphi([v])\varphi([w]). \end{aligned}$$

De ésto, φ es un homomorfismo de grupos. Ahora sea $\psi : F_S \to G$ un homomorfismo tal que $\psi(x) = f(x)$ para toda $x \in S$, tenemos que $\varphi = \psi$, porque coinciden en sus generadores. De ésto, existe un único homomorfismo φ entre F_S y G tal que $\varphi(x) = f(x)$ para toda $x \in S$. Por lo tanto, F_S es un grupo libre. ■

Ejemplo 36 *Consideremos $F = \mathbb{Z}$ y $S = \{1_{\mathbb{Z}}\}$.*

Sea G un grupo y $f : S \to G$ una función. Definimos la asignación

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & F & \to & G \\ & m = \underbrace{1_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} \cdots +_{\mathbb{Z}} 1_{\mathbb{Z}}}_{m \text{ veces}} & \mapsto & \underbrace{f(1_{\mathbb{Z}}) +_G \cdots +_G f(1_{\mathbb{Z}})}_{m \text{ veces}}. \end{array}$$

Es fácil ver que φ es función y, más aún, un homomorfismo de grupos. Además, $\varphi(x) = f(x)$ para toda $x \in S = \{1_{\mathbb{Z}}\}$. Ahora, supongamos que existe un homomorfismo $\psi\colon F \to G$ tal que $\psi(x) = f(x)$ para toda $x \in S$. Sea $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi(n) &= \psi(\underbrace{1_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} \cdots +_{\mathbb{Z}} 1_{\mathbb{Z}}}_{n \ veces}) \\
&= \underbrace{\psi(1_{\mathbb{Z}}) +_G \cdots +_G \psi(1_{\mathbb{Z}})}_{n \ veces} \\
&= \underbrace{f(1_{\mathbb{Z}}) +_G \cdots +_G f(1_{\mathbb{Z}})}_{n \ veces} \\
&= \underbrace{\varphi(1_{\mathbb{Z}}) +_G \cdots +_G \varphi(1_{\mathbb{Z}})}_{n \ veces}) \\
&= \varphi(\underbrace{1_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} \cdots +_{\mathbb{Z}} 1_{\mathbb{Z}}}_{n \ veces}) \\
&= \varphi(n).
\end{aligned}$$

De ésto, $\varphi = \psi$. Así, φ es único y por tanto, $\mathbb{Z}$ es un grupo libre de un generador.

Una vez introducida la noción de grupo libre, palabras y cómo operar entre ellas, el siguiente paso es definir la presentación de un grupo.

Definición 37 *Sea G un grupo y R un subconjunto de éste, definimos el subgrupo normalmente generado por R como*

$$\langle R\rangle^{\triangleleft} = \{\prod_{i\in I} g^{-1} r_i^{\epsilon_i} g : g \in G, r_i \in R, \epsilon_i = \pm 1\}.$$

Observemos que $\langle R\rangle^{\triangleleft}$ es el subgrupo normal más pequeño que contine a R, pues dado un subgrupo normal N de G que contiene a R, tenemos que

$$g^{-1}Rg \subseteq g^{-1}Ng = N,$$

para todo $g \in G$, implicando que $\langle R\rangle^{\triangleleft} \subseteq N$, para cualquier subgrupo normal N.

Definición 38 *Una presentación de un grupo G es un par ordenado*

$$G = \langle S|R\rangle,$$

donde S es un conjunto, R es un conjunto de palabras en S y $G = F/N$, donde F es el grupo libre de base S y N es el subgrupo normal generado por R. Al conjunto S se le conoce como ***generadores*** *y al conjunto R como* ***relaciones****.*

Proposición 39 *Todo grupo es cociente de un grupo libre.*

Demostración. Consideremos un grupo libre F de base G, el cual existe por el Teorema 28, y la función

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & G \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

Por definición de grupo libre, tenemos que existe un único homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in G$. Notemos que f es sobreyectiva, de ésto y por el primer teorema de isomorfismos, tenemos que

$$F/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi) = G.$$

Así,

$$G \cong F/Ker(\varphi).$$

Por tanto, cada grupo G es cociente de un grupo libre. ■

Corolario 1 *Todo grupo tiene una presentación.*

Ejemplo 40 *Sea $n \in \mathbb{N}$. El grupo $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ se define como el grupo cociente de $\mathbb{Z}$ y la relación de equivalencia dada por la congruencia módulo n. Dicho grupo tiene la siguiente presentación*

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \langle a | a^n \rangle.$$

Para ver ésto, consideremos la siguiente aignación.

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{Z} & \rightarrow & \frac{F_a}{\langle R \rangle^{\triangleleft}} \\ & m & \mapsto & a^m + \langle R \rangle^{\triangleleft}, \end{array}$$

donde F_a es el grupo libremente generado por a y $R = \{a^n\}$. Es fácil ver que φ es función. Ahora, sean $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(m_1 + m_2) &= a^{m_1+m_2} + \langle R \rangle^{\triangleleft} \\ &= (a^{m_1} a^{m_2}) + \langle R \rangle^{\triangleleft} \\ &= (a^{m_1} + \langle R \rangle^{\triangleleft})(a^{m_2} + \langle R \rangle^{\triangleleft}) \\ &= \varphi(m_1)\varphi(m_2). \end{aligned}$$

De ésto, φ es un homomorfismo de grupos. Ahora, procederemos a probar que $Ker(\varphi) = n\mathbb{Z}$. Sea $l \in n\mathbb{Z}$, tenemos que l es de la forma $l = nz$, para cierto $z \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\begin{aligned} \varphi(l) &= \varphi(nz) \\ &= a^{nz} + \langle R \rangle^{\triangleleft} \\ &= (a^n)^z + \langle R \rangle^{\triangleleft} \\ &= (a^n + \langle R \rangle^{\triangleleft})^z \\ &= (1_{F_a} + \langle R \rangle^{\triangleleft})^z \\ &= 1_{F_a} + \langle R \rangle^{\triangleleft}, \end{aligned}$$

pues $a^n \in \langle R \rangle^{\triangleleft}$. Así, $l \in Ker(\varphi)$, implicando que $n\mathbb{Z} \subseteq Ker(\varphi)$. Luego, sea $q \in Ker(\varphi)$, tenemos que $q \in \mathbb{Z}$; además,

$$\varphi(q) = a^q + \langle R \rangle^{\triangleleft} = 1_{F_a} + \langle R \rangle^{\triangleleft},$$

así, $a^q \in \langle R \rangle^{\triangleleft}$. De ésto, a^q tiene la forma

$$a^q = \prod_{i=1}^{t} g^{-1} a^{e_i} g,$$

con $g \in F_a$, $t \in \mathbb{N}$ y $e_i = \pm n$, de ésto,

$$\begin{aligned} a^q &= (g^{-1}a^{e_1}g)(g^{-1}a^{e_2}g)\cdots(g^{-1}a^{e_t}g) \\ &= g^{-1}a^{e_1}(gg^{-1})a^{e_2}(gg^{-1})\cdots(gg^{-1})a^{e_t}g \\ &= g^{-1}a^{e_1}(1_{F_a})a^{e_2}(1_{F_a})\cdots(1_{F_a})a^{e_t}g \\ &= g^{-1}a^{e_1+\cdots+e_t}g \end{aligned}$$

Ahora, como $g \in F_a$, tenemos que g es de la forma $g = a^w$, con $w \in \mathbb{Z}$. Así,

$$\begin{aligned} a^q &= a^{-w}a^{e_1+\cdots+e_t}a^w \\ &= a^{-w+e_1+\cdots+e_t+w}, \end{aligned}$$

de ésto,

$$\begin{aligned} q &= -w + e_1 + \cdots + e_t - w \\ &= e_1 + \cdots + e_t \\ &= \alpha n, \end{aligned}$$

para cierto $\alpha \in \mathbb{Z}$, *pues* $e_i = \pm n$, *con* $i = 1, \ldots, t$. *Ésto implica que* $q \in n\mathbb{Z}$.

Por tando, $Ker(\varphi) \subseteq n\mathbb{Z}$ *y así,* $Ker(\varphi) = n\mathbb{Z}$. *Ahora, sea* $a^k + \langle R \rangle^{\triangleleft} \in \frac{F_a}{\langle R \rangle^{\triangleleft}}$, *tenemos que* $k \in \mathbb{Z}$. *Luego,*

$$\varphi(k) = a^k + \langle R \rangle^{\triangleleft},$$

así, φ *es sobreyectiva. De ésto y por el primer teorema de isomorfismos,*

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong \frac{F_a}{\langle R \rangle^{\triangleleft}}.$$

Por tanto,

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \langle a | a^n \rangle.$$

1.5. Sucesiones exactas y producto semidirecto de grupos

En esta sección daremos la definición de sucesión exacta y producto semidirecto de grupos, así como la manera en la que podemos relacionarlos y sus consecuencias respecto a dichos grupos. La información de ésta puede encontrarse y complementarse en [20] y [24].

Definición 41 *Una sucesión de homomorfismos de grupos*

$$G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3$$

es exacta en G_2 *si* $Im(f_1) = Ker(f_2)$.

Ahora bien, una sucesión

$$\cdots \longrightarrow G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

es exacta si es exacta en G_i *para toda* i.

Sabiendo lo que es una sucesión exacta, procederemos a definir una sucesión exacta corta, noción que será de gran utilidad para secciones posteriores.

Definición 42 *Una sucesión exacta corta es una sucesión exacta de la forma*

$$1 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \longrightarrow 1 \; .$$

A una sucesión exacta corta como la anterior también se le conoce como una extensión de G_3 mediante G_1.

Ahora, una sucesión exacta corta puede constar de diferentes características, una de éstas es se escinda; a continuación, veremos lo que esto significa y sus consecuencias.

Definición 43 *Decimos que una sucesión exacta corta*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & G_1 \arrow[r, "f_1"] & G_2 \arrow[r, "f_2"] & G_3 \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

se escinde si existe un homomorfismo $p : G_3 \to G_2$ *tal que* $f_2 \circ p = Id_{G_3}$.

Proposición 44 *Si la sucesión exacta corta*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "r"] & G \arrow[r, "s"] & Q \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

se escinde, entonces los elemento de Q *normalizan a* H*, esto es,*

$$p(q)r(H)p(q)^{-1} = r(H),$$

para todo $q \in Q$*. Además,* $r(H)p(Q) = G$.

Demostración. Sean $q \in Q$ y $h \in H$. Procederemos a probar que $p(q)r(h)p(q)^{-1} \in r(H)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} s\left(p(q)r(h)p(q)^{-1}\right) &= s\left(p(q)\right) \cdot s\left(r(h)\right) \cdot s\left(p(q)^{-1}\right) \\ &= q \cdot \left(r(h)\right) \cdot q^{-1}, \end{aligned}$$

dado que s es un homomorfismo y $s \circ p = Id_G$. Notemos que $r(h) \in Im(r) = Ker(s)$, de ésto, $s\left(r(h)\right) = 1_Q$. Así,

$$s\left(p(q)r(h)p(q)^{-1}\right) = q1_Qq^{-1} = 1_Q,$$

implicando que $p(q)r(h)p(q)^{-1} \in Ker(s) = Im(r) = r(H)$. Así, $p(q)r(H)p(q)^{-1} \subseteq r(H)$, para toda $q \in Q$.

Luego, sea $h_1 \in H$. Tenemos que $r(h_1) \in Im(r) = Ker(s)$, de esto, $s\left(r(h_1)\right) = 1_Q$. Ahora, sea $q_1 \in Q$. Entonces,

$$1_Q = s\left(p(q_1)^{-1}\right) \cdot s\left(r(h_1)\right) \cdot s\left(p(q_1)\right) = s\left(p(q_1)^{-1} r(h_1) p(q_1)\right),$$

ésto implica que $p(q_1)^{-1} r(h_1) p(q_1) \in Ker(s) = Im(r)$, por tanto, existe un $k \in H$ tal que

$$r(k) = p(q_1)^{-1} r(h_1) p(q_1),$$

de ésto,

$$r(h_1) = p(q_1) r(k) p(q_1)^{-1} \in p(q_1) r(H) p(q_1)^{-1},$$

implicando que $r(H) \subseteq p(q_1) r(H) p(q_1)^{-1}$, para toda $q_1 \in Q$. Así, $r(H) = p(q) r(H) p(q)^{-1}$ para toda $q \in Q$.

Queda entonces probar que $r(H)p(Q) = G$. Es evidente que $r(H)p(Q) \subseteq G$. Ahora, sea $g \in G$. Notemos que

$$s\left(g(p(s(g)^{-1})\right) = s(g) \cdot s\left(p(s(g)^{-1})\right) = s(g) \cdot s(g)^{-1} = 1_Q,$$

de ésto, $g\left(p(s(g)^{-1}\right) \in Ker(s) = Im(r)$. Por tanto, tenemos que existe $h \in H$ tal que

$$r(h) = g\left(p(s(g)^{-1}\right).$$

Por otro lado, observemos que

$$g = g\left(p(s(g)^{-1}\right)\left(p(s(g))\right) = r(h)\left(p(s(g))\right).$$

Ahora bien, $s(g) = q$ para algún $q \in Q$. De manera que

$$g = r(h)\left(p(q)\right) \in r(H)p(Q).$$

De ésto, $G \subseteq r(H)p(Q)$. Así, $G = r(H)p(Q)$. ■

Ahora que sabemos lo que significa que una sucesión exacta corta se escinda, veamos la construcción de producto semidirecto y cómo es que se relaciona con lo visto anteriormente.

Definición 45 *Sean H, Q grupos y $\varphi\colon Q \to Aut(H)$ un homomorfismo de grupos. El producto semidirecto de H y Q, denotado por $H \rtimes_\varphi Q$, se define como el grupo dado por el conjunto $H \times Q$ y el siguiente producto. Sean $(h_1, q_1), (h_2, q_2) \in H \times Q$,*

$$(h_1, q_1) \cdot (h_2, q_2) = (h_1(\varphi_{q_1}(h_2)), q_1q_2)\,,$$

donde $\varphi_{q_1} = \varphi(q_1)$.

Proposición 46 *Sean H, Q grupos y $\varphi\colon Q \to Aut(H)$ un homomorfismo de grupos. Tenemos que $H \rtimes_\varphi Q$ tiene estructura de grupo.*

Demostración. Recordemos que, por definición, la operación en $H \rtimes_\varphi Q$ está dada de la siguiente manera.

$$\begin{array}{rccc} \cdot\colon & (H \rtimes_\varphi Q) \times (H \rtimes_\varphi Q) & \to & H \rtimes_\varphi Q \\ & ((h_1, q_1), (h_2, q_2)) & \mapsto & (h_1(\varphi_{q_1}(h_2)), q_1q_2)\,, \end{array}$$

donde $\varphi_{q_1} = \varphi(q_1)$. Es fácil ver que $\cdot$ es función. Ahora, sean $(h_1, q_1), (h_2, q_2), (h_3, q_3) \in H \rtimes_\varphi Q$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (h_1, q_1) \cdot \big((h_2, q_2) \cdot (h_3, q_3)\big) &= (h_1, q_1) \cdot \big(h_2(\varphi_{q_2}(h_3)), q_2q_3\big) \\ &= \big(h_1(\varphi_{q_1}(h_2(\varphi_{q_2}(h_3)))), q_1q_2q_3\big) \\ &= \big(h_1(\varphi_{q_1}(h_2))(\varphi_{q_1}(\varphi_{q_2}(h_3))), q_1q_2q_3\big). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \big((h_1, q_1) \cdot (h_2, q_2)\big) \cdot (h_3, q_3) &= \big(h_1(\varphi_{q_1}(h_2)), q_1q_2\big) \cdot (h_3, q_3) \\ &= \big(h_1(\varphi_{q_1}(h_2))(\varphi_{q_1q_2}(h_3)), q_1q_2q_3\big) \\ &= \big(h_1(\varphi_{q_1}(h_2))(\varphi_{q_1}(\varphi_{q_2}(h_3))), q_1q_2q_3\big) \\ &= (h_1, q_1) \cdot \big((h_2, q_2) \cdot (h_3, q_3)\big). \end{aligned}$$

Así, tenemos que la operación $\cdot$ es asociativa. Ahora, sea $(h, q) \in H \rtimes_\varphi Q$, notemos que

$$(h, q) \cdot (1_H, 1_Q) = \big(h(\varphi_q(1_H)), q1_Q\big) = \big(h1_H, q\big) = (h, q),$$

$$(1_H, 1_Q) \cdot (h, q) = \big(1_H(\varphi_{1_Q}(h)), 1_Q q\big) = (1_H h, q) = (h, q).$$

De ésto, $(1_H, 1_Q)$ es el neutro de la operación $\cdot$. Ahora, sea $(a, b) \in H \rtimes_\varphi Q$, notemos que $(\varphi_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1}) \in H \rtimes_\varphi Q$; además,

$$(a, b) \cdot (\varphi_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1}) = \big(a(\varphi_b(\varphi_{b^{-1}}(a^{-1}))), bb^{-1}\big) = (aa^{-1}), 1_Q) = (1_H, 1_Q),$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_{b^{-1}}(a^{-1}), b^{-1}) \cdot (a, b) \quad &= \big((\varphi_{b^{-1}}(a^{-1}))(\varphi_{b^{-1}}(a)), b^{-1}b\big) \\
&= \big(\varphi_{b^{-1}}(a^{-1}a), 1_Q\big) \\
&= \big(\varphi_{b^{-1}}(1_H), 1_Q\big) \\
&= (1_H, 1_Q).
\end{aligned}$$

De ésto, tenemos que los elementos de $H \times_\varphi Q$ tienen inversos. Así, $H \times_\varphi Q$ es un grupo con la operación $\cdot$. ■

Observemos que $H \rtimes_\varphi Q$, en general, es no abeliano, pues, dados $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H \rtimes_\varphi Q$, tenemos que

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = \big(a_1(\varphi_{b_1}(a_2)), b_1 b_2\big) \neq \big(a_2(\varphi_{b_2}(a_1)), b_2 b_1\big) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1).$$

Además, si φ está dado como

$$\begin{array}{rccc}
\varphi\colon & Q & \to & Aut(H) \\
& q & \mapsto & Id_H,
\end{array}$$

el producto semidirecto coincide con el producto directo, de manera que podemos decir que es una generalización de éste.

A continuación, veremos como es que el producto semidirecto se relaciona con sucesiones exactas que se escinden mediante algunos resultados.

Teorema 47 *Sean H, G y Q grupos tales que la siguiente sucesión exacta se escinde*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r, "r"] & G \arrow[r, "s"] & Q \arrow[r] \arrow[l, bend left, "p"] & 1 \end{tikzcd}.$$

Entonces, tenemos que la función

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & Q & \to & Aut(r(H)) \\ & q & \mapsto & \varphi_q, \end{array}$$

donde

$$\begin{array}{rccc} \varphi_q\colon & r(H) & \to & r(H) \\ & r(h) & \mapsto & p(q)\cdot r(h)\cdot p(q)^{-1} \end{array}$$

es un homomorfismo y $G \cong r(H) \rtimes_{\varphi} Q$.

Demostración. Es fácil ver que φ es función. Ahora, sean $q_1, q_2 \in Q$, tenemos que

$$\begin{array}{rcccl} \varphi(q_1q_2)\colon & r(h) & \to & r(H) & \\ & r(h) & \mapsto & p(q_1q_2)\cdot r(H)\cdot p(q_1q_2)^{-1} & = p(q_1)\cdot p(q_2)\cdot r(h)\cdot p(q_2)^{-1}\cdot p(q_1)^{-1} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcccl} \varphi(q_1)\circ\varphi(q_2)\colon & r(H) & \to & r(H) & \\ & r(h) & \mapsto & \varphi_{q_1}(p(q_2)\cdot r(h)\cdot p(q_2)^{-1}) & = p(q_1)\cdot p(q_2)\cdot r(h)\cdot p(q_2)^{-1}\cdot p(q_1)^{-1}. \end{array}.$$

De ésto, $\varphi(q_1q_2) = \varphi(q_1)\varphi(q_2)$, por tanto, φ es un homomorfismo de grupos.

Ahora, consideremos la siguiente asignación

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & r(H)\rtimes_{\varphi} Q & \to & G \\ & \big(r(h), q\big) & \mapsto & r(h)\cdot p(q). \end{array}$$

Notemos que la asignación de ψ es correcta y está bien definida, por tanto, es función. Ahora, sean $\big(r(h_1), q_1\big), \big(r(h_2), q_2\big) \in r(H) \rtimes_{\varphi} Q$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\psi\big((r(h_1),q_1)\cdot(r(h_2),q_2)\big) &= \psi\big(r(h_1)\cdot\varphi_{q_1}(r(h_2)),q_1q_2\big)\\
&= \psi\big(r(h_1)\cdot p(q_1)\cdot r(h_2)\cdot p(q_1)^{-1},q_1q_2\big)\\
&= r(h_1)\cdot p(q_1)\cdot r(h_2)\cdot p(q_1)^{-1}\cdot p(q_1)\cdot p(q_2)\\
&= r(h_1)\cdot p(q_1)\cdot r(h_2)\cdot 1_G\cdot p(q_2)\\
&= \big(r(h_1)\cdot p(q_1)\big)\cdot\big(r(h_2)\cdot p(q_2)\big)\\
&= \psi\big(r(h_1),q_1\big)\psi\big(r(h_2),q_2\big).
\end{aligned}
$$

De ésto, ψ es un homomorfismo de grupos. Ahora, sabemos que $\{(1_{r(H)},1_Q)\}\subseteq Ker(\psi)$. Luego, sea $\big(r(h),q\big)\in Ker(\psi)$. Tenemos que

$$1_G=\psi\big(r(h),q\big)=r(h)\cdot p(q),$$

ésto es,

$$r(h)=p(q)^{-1},$$

lo cual implica que

$$s\big(r(h)\big)=s\big(p(q)^{-1}\big)=q^{-1}.$$

Luego, como $r(h)\in Im(r)=Ker(s)$, entonces $s\big(r(h)\big)=1_Q$, implicando que $q^{-1}=1_Q=q$, por lo que $r(h)=p(1_Q)^{-1}=1_G=1_{r(H)}$; de ésto, $\big(r(h),q\big)=(1_{r(H)},1_Q)$. Así $Ker(\psi)=\{(1_{r(H)},1_Q)\}$, por tanto, ψ es inyectiva.

Ahora, sea $g\in G$, por la proposición 44, $g=r(\tilde{h})\cdot p(\tilde{q})$ para ciertos $\tilde{h}\in H$ y $\tilde{q}\in Q$. Notemos que $\big(r(\tilde{h}),\tilde{q}\big)\in r(H)\rtimes_\varphi Q$; además,

$$\psi\big(r(\tilde{h}),\tilde{q}\big)=r(\tilde{h})\cdot\tilde{q}=g.$$

Así, ψ es sobreyectiva. Por lo tanto, $G\cong r(H)\rtimes_\varphi Q$. ■

Teorema 48 *Sea $\varphi\colon Q\to Aut(H)$. Tenemos que la sucesión exacta corta*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H \arrow[r, "r"] & H\rtimes_\varphi Q \arrow[r, "s"] & Q \arrow[r] \arrow[l, bend left, "p"] & 1
\end{tikzcd}
$$

se escince.

Demostración. Consideremos las siguientes funciones

$$\begin{array}{rccc} r\colon & H & \to & H \rtimes_\varphi Q \\ & h & \mapsto & (h, 1_Q)\ , \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} s\colon & H \rtimes_\varphi Q & \to & Q \\ & (h,q) & \mapsto & q\ , \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} p\colon & Q & \to & H \rtimes_\varphi Q \\ & q & \mapsto & (1_H, q). \end{array}$$

Ahora, sean $h_1, h_2 \in H$. Tenemos que

$$r(h_1h_2) = (h_1h_2, 1_Q.)$$

Por otro lado,

$$r(h_1)\cdot r(h_2) = (h_1, 1_Q)\cdot(h_2, 1_Q) = \big(h_1(\varphi_{1_Q}(h_2)), 1_Q\big) = (h_1h_2, 1_Q) = r(h_1h_2).$$

De ésto, r es un homomorfismo de grupos. Ahora, sean $(h_1, q_1), (h_2, q_2) \in H \rtimes_\varphi Q$. Entonces,

$$s\big((h_1, q_1)\cdot(h_2, q_2)\big) = s\big((h_1(\varphi_{q_1}(h_2)), q_1q_2)\big) = q_1q_2,$$

$$s\big((h_1, q_1)\big)s\big((h_2, q_2)\big) = q_1q_2.$$

Así, $s\big((h_1, q_1)\cdot(h_2, q_2)\big) = s\big((h_1, q_1)\big)s\big((h_2, q_2)\big)$, y por tanto, s es un homomorfismo de grupos. Luego, sean $q_1, q_2 \in Q$. Entonces,

$$p(q_1q_2) = (1_H, q_1q_2),$$

por otro lado,

$$p(q_1)\cdot p(q_2) = (1_H, q_1)\cdot(1_H, q_2) = \big(1_H(\varphi_{q_1}(1_H)), q_1q_1\big) = (1_H, q_1q_2).$$

De ésto, $p(q_1q_2) = p(q_1)\cdot p(q_2)$, y por tanto, p es un homomorfismo de grupos.

Ahora, procederemos a demostrar que $Im(r) = Ker(s)$. Sea $r(h) \in Im(r)$. Tenemos que $r(h)$ es de la forma $r(h) = (h, 1_Q)$. Luego,

$$s\big(r(h)\big) = s\big((h, 1_Q)\big) = 1_Q.$$

De ésto, $r(h) \in Ker(s)$, lo cual implica que $Im(r) \subseteq Ker(s)$. Luego, sea $a \in Ker(s)$, tenemos que a es de la forma $a = (h, q)$ para ciertos $h \in H$ y $q \in Q$; además,

$$1_Q = s\big((h, q)\big) = q,$$

lo cual implica que $a = (h, 1_Q) \in Im(r)$, de ésto, $Ker(s) \subseteq Im(r)$. Por lo tanto, $Im(r) = Ker(s)$.

Ahora, sean $h_1, h_2 \in H$ tales que $r(h_1) = r(h_2)$. Tenemos que

$$(h_1, 1_Q) = r(h_1) = r(h_2) = (h_1, 1_Q),$$

de ésto, $h_1 = h_2$ y, por lo tanto, r es inyectiva.

Luego, sea $q \in Q$. Tenemos que $(1_H, q) \in H \rtimes_\varphi Q$; además,

$$s\big((1_H, q)\big) = q.$$

Así, s es sobreyectiva.

De lo anterior, tenemos que la sucesión

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{\ r\ } H \rtimes_\varphi Q \xrightarrow{\ s\ } Q \longrightarrow 1$$

es exacta.

Ahora, notemos que $s \circ p \colon Q \to Q$; además, sea $q \in Q$. Tenemos que

$$s \circ p(q) = s\big(p(q)\big) = s\big((1_H, q)\big) = q,$$

de ésto, $s \circ q = Id_Q$. Así, la sucesión exacta se escinde. ∎

Observación 49 *Notemos que, de la propisición 44 y el teorema 48, tenemos que*

$$H \rtimes_\varphi Q = r(H)p(Q).$$

De ésto, cualquier elemento de $H \rtimes_\varphi Q$ *puede escribirse como el producto de un elemento de* $r(H)$ *y uno de* $p(Q)$ *y, más aún, dicha representación es única.*

Para verificar lo anterior, tomemos $(h, q) \in H \rtimes_\varphi Q$ *y supongamos que* $(h, q) = r(h_1)p(q_1)$ *y* $(h, q) = r(h_2)p(q_2)$*. De ésto,*

$$s\big(r(h_1)p(q_1)\big) = s(h, q) = s\big(r(h_2)p(q_2)\big),$$

considerando que s *es homomorfismo de grupos,* $r(h_1), r(h_2) \in Im(r) = Ker(s)$ *y* $s \circ p = Id_Q$*, tenemos que*

$$q_1 = s(h, q) = q_2,$$

así, $p(q_1) = p(q_2)$*, y dado que* $r(h_1)p(q_1) = r(h_2)p(q_2)$*, tenemos que* $r(h_1) = r(h_2)$*. Lo cual verifica que todo elemento de* $H \rtimes_\varphi Q$ *se puede expresar de manera única como producto de un elemento de* $r(H)$ *y uno de* $p(Q)$*.*

Además, dado que r *y* p *son inyectivas, tenemos que* $r(H) \cong H$ *y* $p(Q) \cong Q$*, por lo que, abusando un poco de la notación, podemos decir que cada elemento en* $H \rtimes_\varphi Q$ *puede expresarse de manera única como el producto de un elemento de* H *y uno de* Q*.*

1.6. Fibraciones

La siguiente sección define lo que es una fibración y presenta algunos resultados que serán claves para la demostración que se dará de la presentación del grupo de trenzas y en la solución al problema de la palabra en el mismo. Para más información al respecto, consultar [15] y [17].

Definición 50 *Sean* $p : Y \to X$ *y* $f : Z \to X$ *funciones. Una levantamiento de* f *relativamente a* p*, es una aplicación* $\hat{f} : Z \to Y$ *tal que* $p \circ \hat{f} = f$*.*

Definición 51 *Una función*

$$p : E \to B$$

satisface la propiedad de levantamiento homotópico con respecto a un espacio topológico X *si, dadas una homotopía* $g_t : X \to B$ *y una función* $\hat{g}_0 : X \to E$ *levantamiento de* g_0 *relativamente a* p*, esto es,* $p \circ \hat{g}_0 = g_0$*, entonces existe una homotopía* $\hat{g}_t : X \to E$ *levantamiento de* g_t *relativamente a* p*.*

Definición 52 *Una fibración es una función $p : E \to B$ tal que satisface la propiedad de levantamiento homotópico para todo espacio topológico X.*

Teorema 53 *Supongamos que $p : E \to B$ satisface la propiedad de levantamiento homotópico con respecto a los discos D^k para toda $k \geq 0$. Escogemos los puntos base $b_0 \in B$ y $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Entonces la función $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$ es un isomorfismo para toda $n \geq 1$. Más aún, si B es arco conexo, existe una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_0(E, x_0) \longrightarrow 1.$$

Demostración. Comenzaremos probando que la función p_* es sobreyectiva.

Sea $[f] \in \pi_n(B, b_0)$, tenemos que f es una función $f \colon (I^n, \delta I^n) \to (B, b_0)$. Notemos que la función constante $\tilde{f} \colon (I^n, \delta I^n) \to (E, x_0)$ dada por $\alpha \mapsto x_0$ es un levantamiento de f, esto es, $p \circ \tilde{f} = f$, implicando que $p_*([\tilde{f}]) = [f]$. Así, tenemos que p_* es sobreyectiva.

Ahora, sean $[f_0], [f_1] \in \pi_n(E, x_0)$ tales que $p_*([f_0]) = p_*([f_1])$. Tenemos que existe una homotopía $H \colon (I^n \times I, \delta I^n \times I) \to (B, b_0)$ tal que $H(s, 0) = (p \circ f_0)(s)$ y $H(s, 1) = (p \circ f_1)(s)$ para toda $s \in I^n$. Además, tenemos un levantamiento parcial $\tilde{H}$ dado por f_0 en $I^n \times \{0\}$, f_1 en $I^n \times \{1\}$ y la función constante cuya imagen es x_0 en $J^{n-1} \times I$, donde $J^{n-1} \subset I^n$. Si permutamos las últimas coordenadas de $I^n \times I$, la propiedad de levantamiento homotópico da una extención a este levantamiento parcial a uno completo $\tilde{G} \colon I^n \times I \to E$. Esto es, una homotopía de f_0 a f_1. Así, $[f_0] = [f_1]$, por tanto p_* es inyectiva.

Luego, conectamos $\pi_n(B, b_0)$ con $\pi_n(E, F, x_0)$ en la sucesión exacta para el par (E, F), ver [15]. La función $\pi_n(E, x_0) \to \pi_n(E, F, x_0)$ en la sucesión exacta se convierte en la composición

$$\pi_n(E, x_0) \longrightarrow \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \ ,$$

donde $p_* \colon \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$. El 1 a la derecha de la suceción es consecuencia de la sobreyectividad de $\pi_0(F, x_0) \to \pi_0(E, x_0)$, la cual se implica de que B sea arco-conexo, pues un camino en E de un punto arbitrario $x \in F$ puede ser obtenido mediante el levantamiento de un camino en B de $p(x)$ a b_0. ■

Capítulo 2

Grupos de trenzas

En este capítulo se presentarán tres diferentes definiciones del grupo de trenzas; cada una de ellas serán utilizadas al momento de dar solución al problema de la palabra en este grupo.

Comenzaremos desde la definición de trenza geométrica, dándole estructura de grupo y, posteriormente probaremos que dicha definición es equivalente a las dadas como grupo fundamental de cierto espacio y como presentación de grupos.

2.1. Trenzas geométricas

A continuación, se verá la primera definición de grupo de trenzas, empezando por el concepto de trenza y procediendo con la manera de operarlas, hasta verificar que, efectivamente, tienen estructura de grupo. Las definiciones y resultados de esta sección pueden ser consultados en [13], [14], [16], [21] y [22].

Definición 54 *Consideremos el espacio Euclideano de dimensión 3, y los planos tales que* $z = 0$ *y* $z = 1$*. Sean* P_i *y* Q_i *los puntos con coordenadas* $(i, 0, 1)$ *y* $(i, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ *respectivamente, donde* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}, n \in \mathbb{N}$*. Una trenza de* n *cuerdas (*n*-trenza) es un sistema de* n *arcos*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$$

tales que a_i *conecta al punto* P_i *con el punto* $Q_{\pi(i)}$*, para alguna permutación* $\pi \in S_n$*; o equivalentemente, una función* $\bigcup_{i=1}^{n} [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ *. Además, debe de cumplirse lo siguiente:*

- *Cada arco a_i intersecta al plano $z = t$ una y sólo una vez, para cualquier $t \in [0, 1]$.*
- *Los arcos $a_1, \ldots, a_n$ intersectan el plano $z = t$ en n puntos distintos para todo $t \in [0, 1]$.*

A los arcos de las trenzas se les conoce como cuerdas de la trenza, y la permutación π se conoce como permutación de la trenza. Si esta permutación es trivial, entonces se dice que es una **trenza pura**. Los cruces de las trenzas se denominan positivos o negativos según el arco que pase sobre el otro. (Véase figura 2.1)

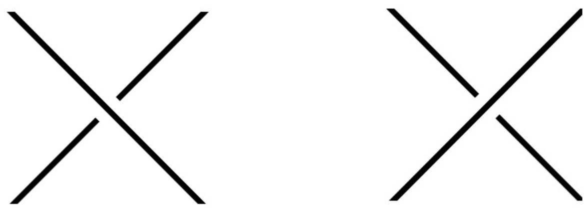


Figura 2.1: Cruces en los diagramas de trenzas

Definición 55 (Equivalencia de trenzas) *Dos n-trenzas β_0 y β_1 con la misma permutación π son equivalentes u homotópicas si existe una homotopía a través de las trenzas β_t, con permutación π, de β_0 a β_1, con $t \in [0, 1]$, es decir, existe una función $H : [0, 1] \times \bigcup_{i=1}^{n} [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ tal que la restricción $\{t\} \times \bigcup_{i=1}^{n} [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ es una trenza, para toda $t \in [0, 1]$.*

Denotaremos por $\mathcal{B}_n$ al cociente del conjunto de n-trenzas por la relación de equivalencia de trenzas. Notemos que los elementos de $\mathcal{B}_n$ son clases de equivalencia; además, $\mathcal{B}_n$ representa al conjunto de n-trenzas no equivalentes. Al conjunto de las clases de equivalencia de trenzas puras, se le denota por $\mathcal{PB}_n$.

Dadas dos n-trenzas, α y β, podemos operarlas al unir la parte inferior de α con la superior de β y escalarlas, para obtener una nueva trenza a la cual denotamos como $\alpha\beta$. Es fácil ver que dicha operación esta bien definida en $\mathcal{B}_n$. Equivalentemente, la composición asocia a cada arco $a_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ de la trenza α y a cada arco $b_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ de la trenza β, un nuevo arco $a_i b_i$ tal que

$$ab_i(t) = \begin{cases} a_i(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ b_i(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dado que las trenzas son sistemas de arcos, la composición de éstas se puede ver como

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A esta operación se le llama **composición**.

Definición 56 *Una trenza elemental σ_i es la n-trenza formada por el cruce de la i-ésima cuerda sobre la $(i+1)$-ésima cuerda. Dicho cruce es el único cruce de la n-trenza, las $n-2$ cuerdas restantes son líneas paralelas (véase figura 2.2).*

El inverso de una trenza elemental, σ_i^{-1}, es la n-trenza formada por el cruce de la $(i+1)$-ésima cuerda sobre la i-ésima cuerda. Dicho cruce es el único cruce de la n-trenza, las $n-2$ cuerdas restantes son líneas paralelas (véase figura 2.3).

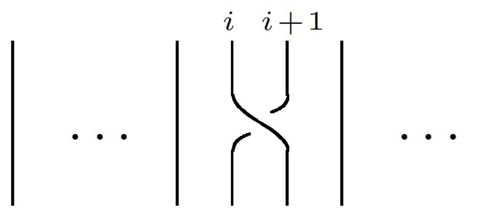


Figura 2.2: Trenza elemental σ_i.

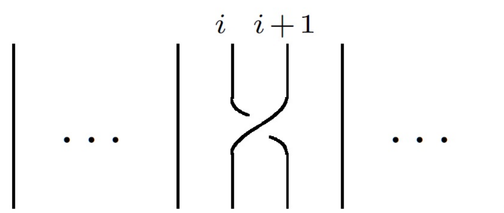


Figura 2.3: Inverso de la trenza elemental σ_i^{-1}.

Proposición 57 *Toda n-trenza puede ser expresada como la composición de trenzas elementales.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre el número de cruces de la n-trenza.

Consideremos una trenza, α, de un sólo cruce. Tenemos que dicho cruce se forma al pasar la j-ésima cuerda sobre la $(j+1)$-ésima cuerda, o al pasar la $(j+1)$-ésima cuerda sobre la j-ésima cuerda, para cierto $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$. De ésto, $\alpha = \sigma_j$ ó $\alpha = \sigma_j^{-1}$. De ésto, toda trenza de un cruce se puede expresar como la composición de una única trenza elemental o el inverso de una trenza elemental.

Supongamos que cualquier trenza de k cruces puede expresarse como composición de trenzas elementales, con $k \in \mathbb{N}$.

Ahora, sea β una n-trenza con $k+1$ cruces. Podemos suponer que β es equivalente a una trenza $\tilde{\beta}$ donde k cruces estan en la parte superior y un cruce se encuentra en la parte inferior, de ésto, β puede escribirse como la composición de una trenza de k cruces con una de un único cruce. Por hipótesis de inducción tenemos que la n-trenza de k cruces puede escribirse como la composición de trenzas elementales; además, como se dijo anteriormente, toda trenza de un único cruce se puede escribir como una trenza elemental. De ésto, β puede escribirse como la composición de trenzas elementales.

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, toda n-trenza puede expresarse como la composición de trenzas elementales. ■

Observemos que $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i-j| > 1$, con $i, j \in \{1, ..., n-1\}$ (véase figura 2.4).

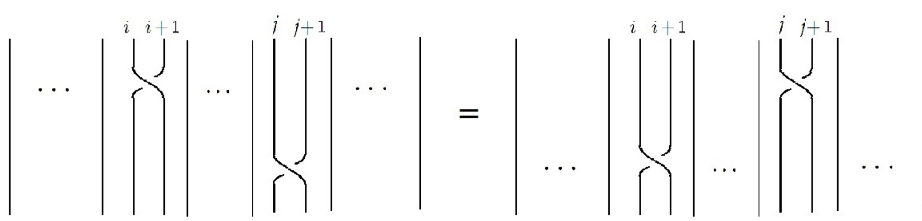


Figura 2.4: $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i-j| > 1$, con $i, j \in \{1, ..., n-1\}$.

Además, $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, con $i \in \{1, ..., n-1\}$ (véase figura 2.5).

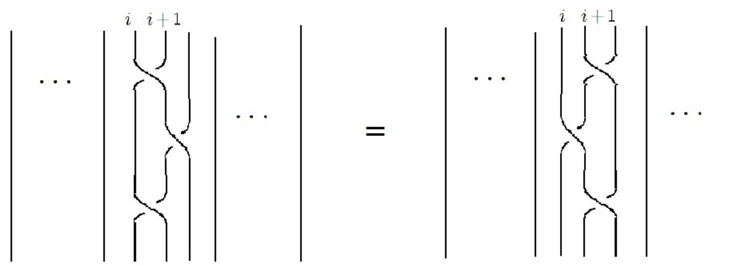


Figura 2.5: $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$, con $i \in \{1, ..., n-1\}$.

Proposición 58 *El conjunto $\mathcal{B}_n$ tiene estructura de grupo.*

Demostración. Consideremos la asignación

$$\begin{array}{rccc} \circ: & \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n & \rightarrow & \mathcal{B}_n \\ & ([\alpha],[\beta]) & \mapsto & [\alpha\beta] \end{array}$$

donde $\alpha\beta$ es la composición de la trenza α con la trenza β, esto es, la trenza resultante de unir la parte inferior de α con la parte superior de β.

Por construcción, tenemos que la asignación es correcta. Ahora, sean

$$([\alpha_1],[\beta_1]),([\alpha_2],[\beta_2]) \in \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n$$

tales que son iguales, ésto es $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ y $[\beta_1] = [\beta_2]$. Tenemos que α_1 está relacionada con α_2 y β_1 está relacionada con β_2, lo que significa, por la definición de equivalencia de trenzas, que existe una homotopía entre ellas por medio de trenzas; ésto es, existen un par de funciones $H_\alpha, H_\beta : \bigcup_{i=1}^{n} [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $H_\alpha(t,0) = \alpha_1, H_\alpha(t,1) = \alpha_2, H_\beta(t,0) = \beta_1$ y $H_\beta(t,1) = \beta_2$. Consideremos la función $G : \bigcup_{i=1}^{n} [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$G(t,s) = \begin{cases} H_\alpha(2t,s) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H_\beta(2t-1,s) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que

$$G(t,0)=\begin{cases} H_\alpha(2t,0)=\alpha_1 & \text{si } 0\le t\le 1/2\\ H_\beta(2t-1,0)=\beta_1 & \text{si } 1/2\le t\le 1\end{cases}$$

esto es, $G(t,0)=\alpha_1\beta_1$. Además,

$$G(t,1)=\begin{cases} H_\alpha(2t,1)=\alpha_2 & \text{si } 0\le t\le 1/2\\ H_\beta(2t-1,1)=\beta_2 & \text{si } 1/2\le t\le 1\end{cases}$$

es decir, $G(t,1)=\alpha_2\beta_2$. De ésto, $\alpha_1\beta_1$ está relacionada con $\alpha_2\beta_2$, esto implica que $[\alpha_1\beta_1]=[\alpha_2\beta_2]$. Por lo tanto, $\circ$ está bien definida.

Ahora, dado de que la composición de trenzas está definida como la concatenación al yutxtaponer las trenzas, es fácil ver que, dadas tres n-trenzas $[\alpha],[\beta],[\theta]\in B_n$, $[\alpha]\circ([\beta]\circ[\theta])=([\alpha]\circ[\beta])\circ[\theta]$. Por tanto, $\circ$ es asociativa.

Observemos que el neutro de la operación $\circ$, $1_{\mathcal{B}_n}$ es la n-trenza que se compone por n líneas paralelas, pues la composición con dicha trenza consiste simplemente en el alargamiento de las cuerdas de la trenza.

Sea $[\gamma]\in\mathcal{B}_n$, sabemos que $[\gamma]$ puede esribirse como la composición de trenzas elementales, ésto es

$$[\gamma]=\sigma_{i_1}^{e_{i_1}}\sigma_{i_2}^{e_{i_2}}\cdots\sigma_{i_r}^{e_{i_r}},$$

donde $r\in\mathbb{N}$, $i_s\in\{1,\dots,n\}$ y $e_{i_s}\in\{+1,-1\}$ para $s\in\{1,\dots,r\}$. Definimos el inverso de $[\gamma]$ como la trenza

$$[\gamma]^{-1}=(\sigma_{i_r}^{e_{i_r}})^{-1}(\sigma_{i_{r-1}}^{e_{i_{r-1}}})^{-1}\cdots(\sigma_{i_1}^{e_{i_1}})^{-1}.$$

Así,

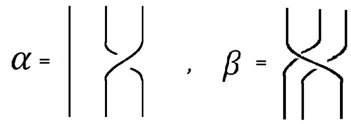
$$[\gamma]\circ[\gamma]^{-1}=\sigma_{i_1}^{e_{i_1}}\cdots\sigma_{i_r}^{e_{i_r}}(\sigma_{i_r}^{e_{i_r}})^{-1}\cdots(\sigma_{i_1}^{e_{i_1}})^{-1}=1_{B_n},$$

$$[\gamma]^{-1}\circ[\gamma]=(\sigma_{i_{r-1}}^{e_{i_{r-1}}})^{-1}\cdots(\sigma_{i_1}^{e_{i_1}})^{-1}\sigma_{i_1}^{e_{i_1}}\cdots\sigma_{i_r}^{e_{i_r}}=1_{B_n}.$$

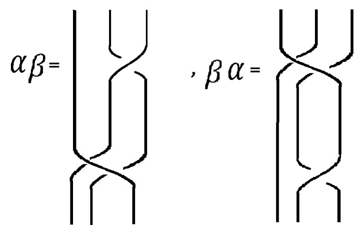
Por lo tanto, $\mathcal{B}_n$ es un grupo con la operación composición. ■

Proposición 59 *El grupo de trenzas $\mathcal{B}_n$ es no abeliano para $n\ge 3$.*

Demostración. Comenzaremos con el caso $n=3$. Consideremos las trenzas siguientes:



Notemos que la composición de dichas trenzas no conmuta, pues la permutación de dichas trenzas son diferentes, como puede notarse en la siguiente imagen.



Así, $\mathcal{B}_3$ es no abeliano. Ahora, para $n > 3$ basta con considerar las trenzas tales que los primeros tres arcos son como las trenzas del caso $n = 3$ y las $n - 3$ cuerdas restantes, son líneas paralelas. Es fácil notar que dichas trenzas no conmutan con la composición. Así, $\mathcal{B}_n$ es no abeliano para $n \geq 3$. ■

Proposición 60 *El grupo de 2-trenzas, $\mathcal{B}_2$, es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Consideremos la función $\varphi\colon \mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que a cada trenza le asigna su número de cruces, ya sean negativos o positivos (véase figura 2.6).

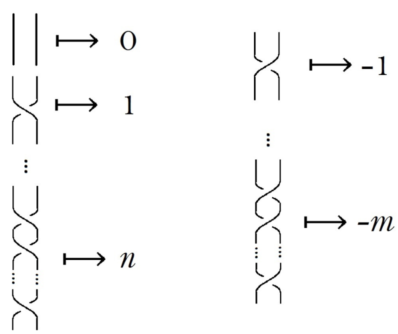


Figura 2.6: Asignación de $\varphi\colon \mathcal{B}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Tenemos, por construcción que la asignación de φ es correcta y está bien definida.

Luego, sean $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_2$, es fácil notar que $\varphi(\alpha \circ \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, puesto que, de tener signos iguales, al realizar la composición, los cruces se suman pues la trenza se enrolla en el mismo sentido;

de tener signos contrarios, la trenza se desenrrollaría hasta tener el número de cruces resultante de la resta de los cruces de las trenzas originales. Además, $\varphi(1_{\mathcal{B}_2}) = 0$ por construcción. Así, φ es un homomorfismo de grupos.

Notemos ahora que $Ker(\varphi) = 1_{\mathcal{B}_2}$ y $Im(\varphi) = \mathbb{Z}$, esto implica que φ es un isomorfismo de grupos. Por lo tanto, $\mathcal{B}_2 \cong \mathbb{Z}$. ■

Proposición 61 *Si $n \geq 2$, el grupo $\mathcal{B}_n$ es infinito.*

Demostración. Consideremos el caso $n = 2$. De la proposición anterior, tenemos que $\mathcal{B}_2 \cong \mathbb{Z}$, lo cual implica que $\mathcal{B}_2$ es infinito.

Ahora, para $n > 2$, notemos que a cada 2-trenza le podemos asociar una n-trenza con las primeras cuerdas igual a la 2-trenza y las $n-2$ cuerdas restantes como líneas paralelas. Así, $\mathcal{B}_n$ es infinito para $n \geq 2$. ■

2.2. Trenzas como grupo fundamental del espacio de configuraciones

A continuación se dará la segunda definición del grupo de trenzas, probando su equivalencia con la vista anteriormente. Los resultados pueden encontrarse también en [14] y [22], junto con información complementaria.

Comencemos con el grupo de trenzas puras y veamos cómo podemos representarlo como el grupo fundamental de cierto espacio.

Proposición 62 *Sea $P_0 = (1, 2, \ldots, n) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$, se tiene que*

$$\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) = \mathcal{PB}_n.$$

Demostración. Consideremos la asignación

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{PB}_n & \to & \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \\ & [\beta] & \mapsto & [\varphi(\beta)] \end{array}$$

con

$$\begin{array}{rccc} \varphi(\beta): & [0,1] & \to & \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \\ & t & \mapsto & (b_1(t), \ldots, b_n(t)), \end{array}$$

donde $b_1, \ldots, b_n$ son los n arcos que conforman a β.

Sea $[\beta] \in \mathcal{PB}_n$, es fácil ver que $\varphi(\beta)$ es un lazo con punto base P_0, de ésto, la asignación es correcta. Notemos que dos trenzas puras α y θ son homotópicas sí y solo si $\varphi(\alpha)$ y $\varphi(\theta)$ son homotópicas, esto es, $[\alpha] = [\theta]$ si y sólo si $[\varphi(\alpha)] = [\varphi(\theta)]$. De ésto, ψ está bien definida y es inyectiva. Además, ψ es homomorfismo de grupos. Ahora, sea $\eta \in \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0)$, sabemos que

$$\begin{array}{rccc} \eta: & [0,1] & \to & \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \\ & t & \mapsto & (a_1(t), \ldots, a_n(t)), \end{array}$$

donde $a_i : [0,1] \to \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$. Observemos que la trenza $\tilde{\alpha}$ de arcos $\tilde{a_1}, \ldots, \tilde{a_n}$, donde el arco $\tilde{a}_i$ se encuentra en $[0,1]$ y es homotópico a a_i para todo $i = 1, \ldots, n$, cumple que $\psi(\tilde{\alpha}) = \eta$. Así, ψ es sobreyectiva. Por tanto,

$$\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \cong \mathcal{PB}_n.$$

■

Antes de pasar a expresar el grupo de trenzas como grupo fundamental de algún espacio, consideremos el siguiente lema.

Lema 63 (Lema de los cinco, versión corta) *Consideremos el siguiente diagrama de grupos y homomorfismos.*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "j_1"'] & B_2 \arrow[r, "j_2"'] & B_3 \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Si cada fila es exacta, cada cuadrado conmuta y f_1 y f_3 son isomorfismos, entonces, f_2 también lo es.

Demostración. Comenzaremos probando la inyectividad de f_2. Sabemos que $1_{A_2} \in Ker(f_2)$; ahora, sea $\alpha \in Ker(f_2)$, notemos que

$$j_2(f_2(\alpha)) = f_3(i_2(\alpha));$$

dado que $\alpha \in Ker(f_2)$, tenemos que $f_2(\alpha) = 1_{B_2}$, por lo que $j_2(f_2(\alpha)) = 1_{B_3}$. De lo anterior, $f_3(i_2(\alpha)) = 1_{B_3}$; además, como f_3 es inyectiva, tenemos que $i_2(\alpha) = 1_{A_3}$. De ésto,

$$\alpha \in Ker(i_2) = Im(i_1),$$

lo cual implica que existe $\beta \in A_1$ tal que $i_1(\beta) = \alpha$. Luego,

$$j_1(f_1(\beta)) = f_2(i_1(\beta)) = f_2(\alpha) = 1_{B_2},$$

pues $\alpha \in Ker(f_2)$. Así, $j_1(f_1(\beta)) = 1_{B_2}$, lo cual imlica que $\beta = 1_{A_1}$, dado que f_1 y j_1 son inyectivas. Luego,

$$\alpha = i_1(\beta) = i_1(1_{A_1}) = 1_{A_2}.$$

Por tanto, $\alpha = 1_{A_2}$, implicando que $Ker(f_2) = \{1_{A_2}\}$ y así, f_2 es inyectiva.

Procedamos ahora a demostrar la sobreyectividad de f_2. Sabemos que $Im(f_2) \subseteq B_2$. Ahora, sea $b \in B_2$. Como j_2, f_3 e i_2 son sobreyectivas, tenemos que existe un $a \in A_2$ tal que

$$j_2(b) = f_3(i_2(a)) = j_2(f_2(a)).$$

Notemos que

$$j_2\big(b(f_2(a))^{-1}\big) = j_2(b)\big(j_2(f_2(a))\big)^{-1} = 1_{B_3},$$

de ésto, $b(f_2(a))^{-1} \in Ker(j_2) = Im(j_1)$, por tanto, existe $c \in B_1$ tal que $j_1(c) = b(f_2(a))^{-1}$. Además, dado que f_1 es sobreyectiva, tenemos que exite $d \in A_1$ tal que $f_1(d) = c$. Así,

$$\begin{aligned}
f_2\big((i_1(d))a\big) &= \big(f_2(i_1(d))\big)\big(f_2(a)\big) \\
&= \big(j_1(f_1(d))\big)\big(f_2(a)\big) \\
&= \big(j_1(c)\big)\big(f_2(a)\big) \\
&= b\big(f_2(a)\big)^{-1}\big(f_2(a)\big) \\
&= b,
\end{aligned}$$

de ésto, $b \in Im(f_2)$, implicando que $Im(f_2) = B_2$. Por tanto, f_2 es sobreyectiva. Así, f_2 es un isomorfismo de grupos. ■

Proposición 64 *Sea* $P_0 = (1, 2, \ldots, n) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$, *se tiene que*

$$\pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), [P_0]) = \mathcal{B}_n,$$

donde $[P_0]$ *está dada por las permutaciones de las coordenadas de* P_0.

Demostración. Consideremos la asignación

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\psi}\colon & \mathcal{B}_n & \to & \pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), [P_0]) \\ & [\alpha] & \mapsto & [\varphi(\alpha)] \end{array}$$

con

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}(\alpha)\colon & [0,1] & \to & \pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), [P_0]) \\ & t & \mapsto & (a_1(t), \ldots, a_n(t)), \end{array}$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son los n arcos que conforman a α.

Observemos que $\tilde{\psi}(\beta)$ es un lazo con punto base $[P_0]$, para toda trenza $\beta \in \mathcal{B}_n$; además, $\tilde{\psi}$ es un homomorfismo de grupos y el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathcal{PB}_n \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & \mathcal{B}_n \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\psi}"'] & S_n \arrow[r] \arrow[d, "Id"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), P_0) \arrow[r] & \pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), [P_0]) \arrow[r] & S_n \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Notemos que tanto la primera como la segunda sucesión son exactas; ahora, por el lema 63, tenemos que $\tilde{\psi}$ es un isomorfismo. Así,

$$\pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), P_0) \cong \mathcal{B}_n.$$

■

2.3. Trenzas como generadores y relaciones

En esta sección le asociaremos al grupo de trenzas su presentación, la cual es indispensable para atacar el problema de la palabra. Los resultados que se verán a continuación pueden encontrarse en [2], [7] y [14].

Para comenzar, conideremos el siguiente resultado.

Lema 65 *Sea $p : \mathcal{PB}_n \to \mathcal{PB}_{n-1}$ la proyección dada al eliminar la n-ésima cuerda de cada trenza. Entonces, p es sobreyectiva y $Ker(p) \cong F_{n-1}$, donde F_{n-1} es el grupo libremente generado por los elementos*

$$\hat{x}_i = (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_i^{-1}(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1}),\ 1 \leq i \leq n-1.$$

Recordemos que los elementos σ_i denotan trenzas elementales.

Más aún, la sucesión exacta corta

$$1 \to F_{n-1} \to \mathcal{PB}_n \to \mathcal{PB}_{n-1} \to 1$$

se escinde y entonces, $\mathcal{PB}_n \cong F_{n-1} \rtimes \mathcal{PB}_{n-1}$. En particular, todo elemento de $\mathcal{PB}_n$ se puede escribir de manera única como el producto de $\hat{x}_i$'s y un elemento en $\mathcal{PB}_{n-1}$. Esto es, sea $w \in \mathcal{PB}_n$, entonces

$$w = \hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_r}^{e_r} \tilde{w},$$

donde $\hat{x}_j \in F_{n-1}, e_j = \pm 1, j = 1, \ldots, r, r \in \mathbb{N}$ y $\tilde{w} \in \mathcal{PB}_{n-1}$.

Antes de comenzar con la demostración de este lema, es importante entender el moviviento definido por los elementos $\hat{x}_i$, para ésto, veamos las figuras 2.7 y 2.8.

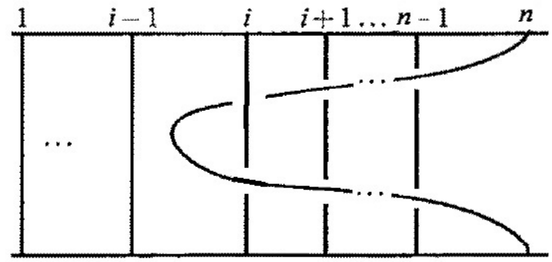


Figura 2.7: Trenza dada por el movimiento $\hat{x}_i$.

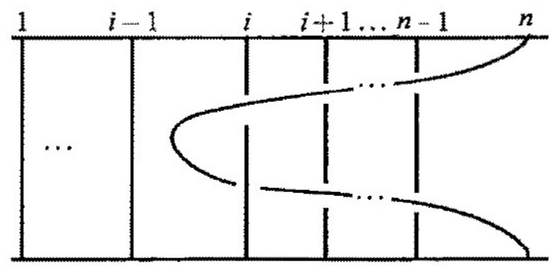


Figura 2.8: Trenza dada por el movimiento $\hat{x}_i^{-1}$.

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{array}{cccc} p: & \mathcal{F}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{C}) \\ & (z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) & \mapsto & (z_1, \ldots, z_{n-1}). \end{array}$$

Notemos que cada fibra $f^{-1}((z_1, \ldots, z_{n-1}))$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^2_{n-1} := \mathbb{R}^2 - \{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$.

Ahora, sean $b_0 \in \mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{C})$ y $x_0 \in f^{-1}(b_0) \cong \mathbb{R}^2_{n-1}$, tenemos por el teorema 53 que la siguiente sucesión es exacta y p_* es un isomorfismo.

$$\cdots \longrightarrow \pi_m(\mathbb{R}^2_{n-1}, x_0) \longrightarrow \pi_m(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), x_0) \longrightarrow \pi_m(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{C}), b_0) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2_{n-1}, x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{C}), b_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow 1.$$

Luego, como p_* es sobreyectiva, tenemos que la siguiente sucesión es exacta

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{C}), b_0) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2_{n-1}, x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{C}), b_0) \longrightarrow 1 \ .$$

Sabemos que $\pi_2(\mathbb{R}^2_n) = \pi_2(\mathbb{C}_n) = 1$ (ver [6]). Ahora, observemos que $\pi_2(\mathcal{F}_1(\mathbb{C})) = \pi_2(\mathbb{C}) = 1$; además, dado que $\pi_2(\mathbb{R}^2_n) = \pi_2(\mathbb{C}_n) = 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por la sucesión exacta anterior tenemos que $\pi_2(\mathcal{F}_2(\mathbb{C})) = 1$. De manera inductiva se tiene que $\pi_2(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{C})) = 1$. De ésto, la siguiente sucesión también es exacta

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2_{n-1}, x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{C}), x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(\mathcal{F}_{n-1}(\mathbb{C}), b_0) \longrightarrow 1 \ .$$

Recordemos que $\pi_1(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}), P_0) \cong \mathcal{PB}_n$, de esto, la siguiente sucesión es exacta

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2_{n-1}, x_0) \longrightarrow \mathcal{PB}_n \xrightarrow{p_*} \mathcal{PB}_{n-1} \longrightarrow 1 \ .$$

Ahora, pensemos a cada $\hat{x}_i = (\sigma_{n-1}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1})\sigma_i^{-1}(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1})$ como el camino dado por la n-ésima cuerda de la trenza resultante de dicho movimiento, de manera que $\hat{x}_i : [0,1] \to \mathbb{R}^3$. Consideremos la función

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & F_{n-1} & \to & \pi_1(\mathbb{R}^2_{n-1}, x_0) \\ & \hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m} & \mapsto & [\tilde{p}(\hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m})], \end{array}$$

donde $\tilde{p} : F_{n-1} \to \mathbb{R}^2$, es la proyección a las primeras dos entradas de la función

$$\hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m} : [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Tomemos $x_0 = (n, 0)$. Notemos que la asignación es correcta, pues, sea $\hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m} \in F_{n-1}$, tenemos que como función, es continua, ya que representa el movimiento de una cuerda; además, la función proyección también es continua, lo que implica que $\psi(\hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m}) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ también lo sea. Luego, sabemos que $\hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m}(0) = (n, 0, 1)$ y $\hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m}(1) = (n, 0, 0)$, dado que la n-ésima cuerda empieza y termina en dichas coordenadas. De ésto, $\psi(\hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m})(0) = (n, 0)$ y $\psi(\hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m})(1) = (n, 0)$. Así, $\psi(\hat{x}_{i_1}^{e_1} \cdots \hat{x}_{i_m}^{e_m}) \in \pi_1(\mathbb{R}^2_{n-1}, x_0)$. Es claro que ψ está bien definida, por tanto, es función. Es fácil ver que es homomorfismo de grupos.

Ahora, sea $\alpha \in \pi_1(\mathbb{R}^2_{n-1}, x_0)$. Consideremos

$$\begin{aligned} y\colon \quad [0,1] \quad &\to \qquad \mathbb{R}^3 \\ t \quad &\mapsto \quad \big(p_1(\alpha(t)), p_2(\alpha(t)), t\big), \end{aligned}$$

donde p_1, p_2 son las proyecciones a la primera y segunda entrada, respectivamente. Observemos que $y \in F_{n-1}$; además, $\psi(y) = \alpha$. Por tanto, ψ es sobreyectiva.

Luego, sabemos que $\{1_{f_{n-1}}\} \subseteq Ker(\psi)$. Sea $\gamma \in Ker(\psi)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(\gamma)\colon \quad [0,1] \quad &\to \quad \mathbb{R}^2 \\ t \quad &\mapsto \quad (n,0), \end{aligned}$$

lo cual implica que la n-ésima cuerda es trivial, de manera que $\gamma = 1_{f_{n-1}}$. Así, ψ es inyectiva y, por lo tanto, $F_{n-1} \cong \pi_1(\mathbb{R}^2_{n-1}, x_0)$.

De ésto,

$$1 \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \mathcal{PB}_n \xrightarrow{p_*} \mathcal{PB}_{n-1} \longrightarrow 1$$

es exacta. Más aún, si consideramos la función $s\colon \mathcal{PB}_{n-1} \to \mathcal{PB}_n$, que agrega un arco que lleva la n-ésima cuerda a la n-ésima posición, tenemos que $s \circ p = Id_{\mathcal{PB}_{n-1}}$. Así, la sucesión exacta se escinde, lo cual, por el teorema 47 y la observación 49, implica que $\mathcal{PB}_n \cong F_{n-1} \rtimes_\varphi \mathcal{PB}$, para φ dado por el teorema 47. Así, cualquier elemento en $\mathcal{PB}_n$ puede expresarse, de manera única, como el producto de un elemento en F_{n-1} y uno de $\mathcal{PB}_{n-1}$. ■

Teorema 66 (Teorema de Artin) *Sea $\mathcal{B}_n$ el grupo de trenzas. Tenemos que*

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} | \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i-j| > 1, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \text{ si } i = 1, \ldots, n-2\rangle.$$

Demostración. Sea G un grupo con presentación

$$\langle y_1, \ldots, y_{n-1} | y_iy_j = y_jy_i \text{ si } |i-j| \geq 2, y_iy_{i+1}y_i = y_{i+1}y_iy_{i+1} \text{ si } i = 1, \ldots, n-2\rangle,$$

probaremos que $G \cong \mathcal{B}_n$. Consideremos la siguiente asignación

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & F_{n-1} & \longrightarrow & \mathcal{B}_n \\ & w = y_{i_1}^{e_1} \cdots y_{i_k}^{e_k} & \mapsto & \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_k}^{e_k}, \end{array}$$

donde F_{n-1} es el grupo libre generado por los elementos $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

Por la propiedad universal de grupos libres, tenemos que φ está bien definida y es un homomorfismo de grupos. Luego, sea $\beta \in \mathcal{B}_n$, sabemos que podemos expresarla por medio de trenzas elementales, esto es,

$$\beta = \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_n}^{e_n},$$

con $i_j \in \mathbb{N}$ y $e_j \in \{+1, -1\}$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Tenemos que existe una palabra en F_{n-1}, $\tilde{w} = y_{i_1}^{e_1} \cdots y_{i_n}^{e_n}$. Además,

$$\varphi(\tilde{w}) = \varphi(y_{i_1}^{e_1} \cdots y_{i_n}^{e_n}) = \sigma_{i_1}^{e_1} \cdots \sigma_{i_n}^{e_n} = \beta$$

Por tanto, φ es sobreyectiva, lo cual implica que $Im(\varphi) = \mathcal{B}_n$.

Denotaremos $\langle R \rangle^{\triangleleft}$ al subgrupo normal generado por las relaciones R de la presentacón, esto es,

$$\langle R \rangle^{\triangleleft} = \{\prod_{i \in I} g^{-1} r_i^{\epsilon_i} g : g \in F_n, r_i \in R, \epsilon_i = \pm 1\}.$$

Ahora, sea $w \in \langle R \rangle^{\triangleleft}$, tenemos que $w = \prod_{i \in I} y_k^{-1} r_i^{\epsilon_i} y_k$, para cierto $y_k \in F_{n-1}$ y cierto cunjunto de índices I. Luego,

$$\varphi(\prod_{i \in I} y_k^{-1} r_i^{\epsilon_i} y_k) = \prod_{i \in I} \varphi(y_k^{-1} r_i^{\epsilon_i} y_k) = \prod_{i \in I} \varphi(y_k^{-1}) \varphi(r_i^{\epsilon_i}) \varphi(y_k).$$

Notemos que $\varphi(r_i) = 1_{\mathcal{B}_n}$, puesto que

$$\varphi(y_i y_j y_i^{-1} y_j^{-1}) = \sigma_i \sigma_j \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} = 1_{\mathcal{B}_n},$$

si $|i - j| \geq 2$. Además, para todo $i = 1, \ldots, n-1$

$$\varphi(y_i y_{i+1} y_i y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i+1}^{-1}) = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} = 1_{B_n}.$$

De ésto,

$$\begin{aligned}
\varphi(\prod_{i\in I} y_k^{-1} r_i^{\epsilon_i} y_k) &= \prod_{i\in I} \varphi(y_k^{-1}) 1_{B_n} \varphi(y_k) \\
&= \prod_{i\in I} \varphi(y_k^{-1}) \varphi(y_k) \\
&= \prod_{i\in I} \sigma_k^{-1} \sigma_k \\
&= \prod_{i\in I} 1_{B_n} \\
&= 1_{B_n}.
\end{aligned}$$

Así, $w \in Ker(\varphi)$. Por tanto, $\langle R \rangle^{\triangleleft} \subseteq Ker(\varphi)$.

Luego, sea $u = y_{j_1}^{d_1} \cdots y_{j_m}^{d_m} \in Ker(\varphi)$, tenemos que

$$\varphi(u) = \varphi(y_{j_1}^{d_1} \cdots y_{j_m}^{d_m}) = \sigma_{j_1}^{d_1} \cdots \sigma_{j_m}^{d_m} = 1_{B_n}.$$

A continuación mostraremos que podemos llevar la palabra u a la forma trivial, por medio de relaciones en la presentación, e inserciones y eliminación de subpalabras de la forma $y_i^{\pm 1} y_i^{\mp 1}$.

Para todo $k = 0, \ldots, m$, definimos a l_k como la posición de la n-ésima cuerda de la n-trenza $\varphi(u)$ al final de el movimiento representado por $\sigma_{l_1}^{d_1} \cdots \sigma_{l_k}^{d_k}$. Observemos que como $\varphi(u) = 1_{\mathcal{B}_n}$, entonces $l_0 = l_m = n$. Ahora, denotemos por

$$\alpha_i = y_i y_{i+1} \cdots y_{n-1},$$

para $i = 1, \ldots, n-1$ y $x_r \in G$; además, $x_n = 1_G$. Observemos que $\varphi(\alpha_i)$ representa a la trenza que envía la i-ésima cuerda a la n-ésima posición.

Ahora, usando inserciones permitidas, tenemos que

$$\begin{aligned}
u &= y_{j_1}^{d_1} \cdots y_{j_m}^{d_m} \\
&= (\alpha_{l_0}^{-1} y_{j_1}^{d_1} \alpha_{l_1})(\alpha_{l_1}^{-1} y_{j_2}^{d_2} \alpha_{l_2}) \cdots (\alpha_{l_{m-1}}^{-1} y_{j_m}^{d_m} \alpha_{l_m})
\end{aligned}$$

Observemos que cada una de las ternas de elementos entre paréntesis tiene alguna de las siguientes formas.

(1) $(y_{n-1}^{-1} \cdots y_i^{-1}) y_i (y_{i+1} \cdots y_{n-1})$

Tenemos que

$$\begin{aligned}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_i(y_{i+1}\cdots y_{n-1}) &= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})(y_iy_{i+1}\cdots y_{n-1})\\ &= (y_i\cdots y_{n-1}^{-1})^{-1}(y_i\cdots y_{n-1})\\ &= 1_G.\end{aligned}$$

De ésto, esta palabra es equivalente a la palabra trivial, por tanto, podemos eliminarla.

(2) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_i^{-1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1})$

Denotaremos esta palabra por x_i.

(3) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_{i-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1})$

Denotaremos esta palabra como x_{i-1}^{-1}.

(4) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_{i-1}^{-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1})$

Notemos que

$$\begin{aligned}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_{i-1}^{-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1}) &= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_{i-1}^{-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1})\\ &= (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1}y_{i-1}^{-1})(y_{i-1}\cdots y_{n-1})\\ &= (y_{i-1}\cdots y_{n-1})^{-1}(y_{i-1}\cdots y_{n-1})\\ &= 1_G.\end{aligned}$$

Ésto implica que la palabra es equivalente a la palabra trivial, por tanto, podemos eliminarla.

(5) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm1}(y_i\cdots y_{n-1})$, con $k < i-1$.

Observemos que, usando las relaciones, podemos conmutar a $y_k^{\pm1}$ con las otras letras, de ésto,

$$\begin{aligned}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm1}(y_i\cdots y_{n-1}) &= y_k^{\pm1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})(y_i\cdots y_{n-1})\\ &= y_k^{\pm1}(y_{n-1}\cdots y_i)^{-1}(y_i\cdots y_{n-1})\\ &= y_k^{\pm1}1_G\\ &= y_k^{\pm1}.\end{aligned}$$

Así, podemos sustituir esta palabra por $y_k^{\pm1}$.

(6) $(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm1}(y_i\cdots y_{n-1})$, con $k > i$

Debido a la relación $y_iy_j = y_jy_i$ si $|i-j| > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} y_k(y_i \cdots y_{n-1}) &= y_i\underline{y_k}y_{i+1}\cdots y_{n-1} \\ &= y_iy_{i+1}\cdots \underline{y_k}y_{k-1}y_ky_{k+1}\cdots y_{n-1}. \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos la relación $y_iy_{i+1}y_i = y_{i+1}y_iy_{i+1}$ y obtenemos

$$\begin{aligned} y_k(y_i \cdots y_{n-1}) &= y_iy_{i+1}\cdots \underline{y_ky_{k-1}y_k}y_{k+1}\cdots y_{n-1} \\ &= y_iy_{i+1}\cdots \underline{y_{k-1}y_ky_{k-1}}y_{k+1}\cdots y_{n-1} \end{aligned}$$

Luego, de nuevo por la relación $y_iy_j = y_jy_i$ si $|i-j| > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} y_k(y_i \cdots y_{n-1}) &= y_iy_{i+1}\cdots y_{k-1}y_k\underline{y_{k-1}}y_{k+1}\cdots y_{n-1} \\ &= y_iy_{i+1}\cdots y_{k-1}y_ky_{k+1}\underline{y_{k-1}}y_{k+2}\cdots y_{n-1} \\ &= y_iy_{i+1}\cdots y_{k-1}y_ky_{k+1}y_{k+2}\cdots y_{n-1}\underline{y_{k-1}} \\ &= (y_i\cdots y_{n-1})y_{k-1}. \end{aligned}$$

Ahora, dado que $y_k(y_i\cdots y_{n-1}) = (y_i\cdots y_{n-1})y_{k-1}$, podemos notar que

$$(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm 1}(y_i\cdots y_{n-1}) = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})(y_i\cdots y_{n-1})y_{k-1}^{\pm 1},$$

de ésto,

$$(y_{n-1}^{-1}\cdots y_i^{-1})y_k^{\pm 1}(y_i\cdots y_{n-1}) = y_{k-1}^{\pm 1}.$$

Notemos que, de esta manera, hemos expresado a la palabra u como el producto de elementos de la forma $y_1,\ldots,y_{n-2},x_1,\ldots,x_n-1$ y sus inversos. Observemos que $y_{n-1}^{\pm 1}$ aparece únicamente como parte de alguna palabra $x_i^{\pm 1}$.

A continuación, probaremos que la palabra $y_i^{-1}x_jy_i$ puede escribirse como producto de $x_1,\ldots,x_{n-1}$ y sus inversos, para $i = 1,\ldots,n-2$ y $j = 1,\ldots,n-1$.

Si $i < j-1$, tenemos, por las relaciones, que

$$\begin{aligned} y_i^{-1}x_jy_i = \quad & y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{j+1}^{-1})y_j(y_j\cdots y_{n-1})y_i \\ & = (y_i^{-1}y_i)(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{j+1}^{-1})y_j(y_j\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{j+1}^{-1})y_j(y_j\cdots y_{n-1}) \\ & = x_j \end{aligned}$$

Si $i = j-1$, esto es, $j = i+1$, entonces

$$\begin{aligned} y_i^{-1}x_jy_i \quad & = y_i^{-1}x_{i+1}y_i \\ & = y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1}) \\ & = y_i^{-1}(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}^2(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_i^{-1}y_{i+1}^2y_i(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_i^{-1}y_{i+1}y_{i+1}y_i(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})(y_i^{-1}y_{i+1}y_i)(y_i^{-1}y_{i+1}y_i)(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})(y_{i+1}y_iy_{i+1}^{-1})(y_{i+1}y_iy_{i+1}^{-1})(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}y_i(y_{i+1}^{-1}y_{i+1}y_i)y_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}y_iy_iy_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1})(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_iy_iy_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1})(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_iy_i(y_{i+1}\cdots y_{n-1}) \\ & (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+2}^{-1})y_{i+1}(y_{i+1}\cdots y_{n-1})(y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_i(y_i\cdots y_{n-1}) \\ & (y_{n-1}^{-1}\cdots y_{i+1}^{-1})y_{i+1}^{-1}(y_{i+2}\cdots y_{n-1}) \\ & = x_{i+1}x_ix_{i+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Si $i = j$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
y_i^{-1} x_j y_i &= y_i^{-1} x_i y_i \\
&= y_i^{-1} (y_{n-1}^{-1} \cdots y_{i+1}^{-}1) y_i (y_i y_{i+1} y_{i+2} \cdots y_{n-1}) y_i \\
&= y_i^{-1} (y_{n-1}^{-1} \cdots y_{i+1}^{-}1) y_i^2 y_{i+1} (y_{i+2} \cdots y_{n-1}) y_i \\
&= y_i^{-1} (y_{n-1}^{-1} \cdots y_{i+1}^{-}1) y_i^2 y_{i+1} y_i (y_{i+2} \cdots y_{n-1}) \\
&= y_i^{-1} (y_{n-1}^{-1} \cdots y_{i+2}^{-1} y_{i+1}^{-}1) y_{i+1} y_i y_{i+1}^2 (y_{i+2} \cdots y_{n-1}) \\
&= y_i^{-1} (y_{n-1}^{-1} \cdots y_{i+2}^{-1}) (y_{i+1}^{-}1 y_{i+1}) y_i y_{i+1}^2 (y_{i+2} \cdots y_{n-1}) \\
&= y_i^{-1} (y_{n-1}^{-1} \cdots y_{i+2}^{-1}) y_i y_{i+1}^2 (y_{i+2} \cdots y_{n-1}) \\
&= y_i^{-1} y_i (y_{n-1}^{-1} \cdots y_{i+2}^{-1}) y_{i+1}^2 (y_{i+2} \cdots y_{n-1}) \\
&= (y_{n-1}^{-1} \cdots y_{i+2}^{-1}) y_{i+1}^2 (y_{i+2} \cdots y_{n-1}) \\
&= x_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Si $i > j$, tenemos que $y_i x_j = x_j y_i$, de ésto,

$$
\begin{aligned}
y_i^{-1} x_j y_i &= y_i^{-1} y_i x_j \\
&= x_j.
\end{aligned}
$$

Así, hemos probado que las palabras de la forma $y_i^{-1} x_j y_i$ pueden ser escritas como palabras con elementos $x_1, \ldots, x_{n-1}$ y sus inversos, lo cual implica que las palabras de la forma $y_i x_j y_i^{-1}$ también pueden expresarse como palabras con dichos elementos, pues, si $i < j - 2$ o $i > j$, entonces

$$y_i x_j y_i^{-1} = x_j,$$

si $i = j - 1$,

$$y_i x_j y_i^{-1} = y_i x_{i+1} y_i^{-1} = x_i,$$

y Si $i = j$, entonces

$$y_i x_j y_i^{-1} = y_i x_i y_i^{-1} = x_i^{-1} x_{i+1} x_i.$$

De ésto, tenemos que la palabra u, una vez escrita en función de

$$y_1, \cdots, y_{n-2}, x_1, \cdots, x_{n-1}$$

y sus inversos, podemos reacomodarla, de manera que los elementos de la forma $y_i^{\pm 1}$ se encuentren a la derecha. Así,

$$\varphi(u) = \varphi(w_1)\varphi(w_2),$$

donde w_1 es una palabra conformada por $x_1, \ldots, x_{n-1}$ y sus inversos, y w_2 es una palabra formada por $y_1, \ldots, y_{n-2}$ y sus inversos.

Ahora, por el lema anterior, tenemos que podemos descomponer a cualquier trenza pura, de manera única, como el producto de elementos de la forma $\hat{x} = (\sigma_{n-1} \ldots \sigma_i^{-1})\sigma_i^{-1}(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{n-1})$ y un elemento en $\mathcal{PB}_{n-1}$. Notemos que los elementos de la forma $(\sigma_{n-1} \ldots \sigma_i^{-1})\sigma_i^{-1}(\sigma_{i+1} \ldots \sigma_{n-1})$ coinciden con $\varphi(x_i)$, con los x_i definidos en ésta demostración y u tiene una única descomposición $w_1 w_2$, lo cual implica que w_1 es el elemento trivial en F_{n-1} y w_2 representa el elemento trivial el $\mathcal{PB}_{n-1}$. Ahora, como F_{n-1} está generado libremente por $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-1}$, tenemos que w_1 puede reducirse a la palabra trivial por medio de eliminaciones permitidas, lo cual implica que $u = w_2$. Recordemos que w_2 es una palabra dada por los elementos $y_1, \ldots, y_{n-2}$ y sus inversos y representa la trenza trivial en $\mathcal{PB}_{n-1}$. Se sigue la prueba de manera inductiva sobre n. Así, $ker(\varphi) \subset \langle R \rangle^{\triangleleft}$, y por tanto, $ker(\varphi) = \langle R \rangle^{\triangle}$.

Luego, por el primer teorema de isomorfismos, tenemos que

$$\mathcal{B}_n \cong \frac{G}{\langle R \rangle^{\triangleleft}}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} | \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i-j| > 1, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ si } i = 1, \ldots, n-2 \rangle.$$

■

Capítulo 3

El problema de la palabra

El matemático alemán Max Dehn, inspirado en una pregunta topológica, postuló tres problemas. Dichos problemas fueron el problema de la palabra, el problema de la conjugación y el problema del isomorfismo. En el presente trabajo nos enfocaremos únicamente en el problema de la palabra. En este capítulo se darán nociones generales de dicho problema, las cuales pueden consultarse en [4], [12] y [23].

3.1. ¿Qué es el problema de la palabra?

Para comenzar a hablar del problema de la palabra, primero es necesario conocer la definición de algoritmo. En esta ocasión, y para fines prácticos, definiremos un **algoritmo** como un proceso dado por un número finito de instrucciones, en el cual se obtiene el resultado después de un número finito de pasos, donde en cada uno de estos no existen dudas sobre el siguiente paso a realizar.

Es necesario recordar también que dado un grupo G con presentación $\langle S|R\rangle$, se dice que G tiene presentación finita si $|S|, |R| < \infty$. Dicho ésto, procederemos a introducir el problema de la palabra.

El problema de la palabra

Sea G un grupo dado por una presentación finita. ¿Existe un algoritmo capaz de decidir si una palabra cualquiera, expresada como producto de los generadores de G, es la palabra vacía?.

Si existe un algortimo para el problema de la palabra en un grupo, se dice que es soluble para este. Existen diferentes maneras de proceder al momento de dar solución al problema de la palabra para cierto grupo. En nuestro caso, para dar solución a éste en el grupo de trenzas, optaremos por dar el algoritmo de manera explícita. Sin embargo, existen otras formas de prodecer; una de ellas es mediante la función de Dehn.

Definición 67 *Sean G un grupo con presentación finita $P = \langle S|R \rangle$ y w una palabra en los generadores de G, el área algebraica de w se define como*

$$Area_a(w) := min\{N|w = \prod_{i=1}^{N} x_i^{-1} r_i x_i, x_i \in F_S, r_i \in R^{\pm 1}\}.$$

La función de Dehn de P, es la función $\delta_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$\delta_P(n) := max\{Area_a(w)|w = 1_G, |w| \leq n\}.$$

La relación entre esta función y el problema de la palabra esta dada por el siguiente resultado..

Proposición 68 *Sea G un grupo con presentación finita. El problema de la palabra es soluble en G si y solo si la función de Dehn de cada presentación finita es computable (véase [4]).*

En la proposición anterior se utiliza el termino función computable, la cual se define como aquella función que puede calcularse por medio de algún algoritmo (para más información al respecto consultar [5]). Otra manera de atacar el problema de la palabra en un grupo es llevándolo a su forma normal, para esto es necesario definir el conjunto de formas normales de un grupo.

Definición 69 *Sea G un grupo con presentación $\langle S|R \rangle$. El conjunto de formas normales de G, con dicha presentación, es el conjunto de palabras en $S \cup S^{-1}$ que incluye una y solo un representante de cada elemento de G.*

Notemos, entonces, que encontrar un algoritmo que lleve cualquier palabra en G a su forma normal, es equivalente a resolver el problema de la palabra en dicho grupo, pues basta con verificar si se trata de la forma normal de la identidad.

Es importante mencionar que basta con resolver el problema de la palabra para cierta presentación de un grupo G, pues existe una manera de llegar de una presentación a otra. El proceso para hacer eso posible es mediante cuatro transformaciones, llamadas **transformaciones de Tietze** y son dadas de la siguiente manera (para más información consultar [12]).

Sea $\langle g_1, g_2, \ldots | r_1, r_2, \ldots \rangle$ una presentación de un grupo G. Tenemos las siguientes transformacione de Tietze:

- Si las palabras $w_1, w_2, \ldots$ pueden ser llevadas a la palabra vacía mediante una cantidad finita de operaciones elementales con $r_1, r_2, \ldots$, entonces añadimos $w_1, w_2, \ldots$ al conjunto de relaciones de la presentación de G

- Si algunas de las relaciones $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots$ pueden ser llevadas a la palabra vacía mediante operaciones elementales con algunas otras relaciones de la presentación, entonces eliminamos $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots$.

- Si $u_1, u_2, \ldots$ son palabras en $g_1, g_2, \ldots$, se agregan los símbolos $h_1, h_2, \ldots$ a los generadores y las relaciones $h_1 = u_1, h_2 = u_2, \ldots$.

- Si algunas de las relaciones de la presentación es de la forma $g_{e_1} = v_1, g_{e_2} = v_2, \ldots$, donde $g_{e_1}, g_{e_2}, \ldots$ son generadores de G y $v_1, v_2, \ldots$ son palabras en las que no aparecen los generadores $g_{e_1}, g_{e_2}, \ldots$. Se eliminan $g_{e_1}, g_{e_2}, \ldots$ de los generadores y $g_{e_1} = v_1, g_{e_2} = v_2, \ldots$ de las relaciones; además, se sustituyen $g_{e_1}, g_{e_2}, \ldots$ por $v_1, v_2, \ldots$ en el resto de las relaciones.

Así, basta con resolver el problema de la palabra para un presentación específica de un grupo, para afirmar que es soluble en éste.

3.2. Ejemplos

Ya que conocemos de qué trata el problema de la palabra, es necesario, para una mayor comprensión de éste, realizar algunos ejemplos que sirvan como preámbulo para nuestro objetivo inicial, el cual, recordemos, es dar solución al problema de la palabra en el grupo de trenzas.

Ejemplo 70 *El problema de la palabra es soluble para el grupo G dado por la presentación*

$$\langle a, b, c | aba^{-1}b^{-1}, bcb^{-1}c^{-1}, aca^{-1}c^{-1}, c^7 \rangle.$$

Observemos que el conjunto de formas normales de G está dado por

$$N = \{a^l b^m c^n | l, m, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq n < 7\},$$

pues cualquier elemento de dicho conjunto está en G, por ser producto de sus generadores; además, si tomamos una palabra w en los generadores de G, por las primeras tres relaciones, tenemos que *los generadores conmutan entre sí, de manera que podemos llevar a w a la forma*

$$w = a^{l_1}a^{l_2}\cdots a^{l_p}b^{m_1}b^{m_2}\cdots b^{m_q}c^{n_1}c^{n_2}\cdots c^{c_r},$$

donde $l_1, \ldots, l_p, m_1, \ldots, m_q, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ y $p, q, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ahora, sean $l = l_1 + \cdots + l_p$, $m = m_1 + \cdots + m_q$ y $n' = n_1 + \cdots + n_r$, tenemos que

$$w = a^l b^m c^{n'};$$

como el orden de c es 7, por la cuarta relación, tenemos que $c^{n'} = c^n$, donde $n = n' \bmod 7$. Así,

$$w = a^l b^m c^n \in N,$$

por lo que $G = N$. Observemos que cada palabra en G puede ser expresada de forma única como elementos de N, de manera de N es, efectivamente, el conjunto de las formas normales de G.

Como se mencionó con anterioridad, encontrar una manera de expresar una palabra en los generadores de G en su forma normal es equivalente a resolver el problema de la palabra en dicho grupo, pues basta con verificar si coincide con la forma normal de la palabra vacía, que en este caso sería $1_G = a^0b^0c^0$. Por lo tanto, tenemos que el problema de la palabra es soluble en G.

Ejemplo 71 *Consideremos el grupo abeliano $\mathbb{Z}^n$. Tenemos que dicho grupo está dado por la presentación*

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \quad &| \alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}, \alpha_1\alpha_3\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1}, \ldots, \alpha_1\alpha_n\alpha_1^{-1}\alpha_n^{-1}, \alpha_2\alpha_3\alpha_2^{-1}\alpha_3^{-1}, \ldots, \alpha_2\alpha_n\alpha_2^{-1}\alpha_n^{-1}, \ldots,\\ &\ldots, \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}^{-1}\alpha_{n-1}^{-1}, \alpha_{n-2}\alpha_n\alpha_{n-2}^{-1}\alpha_n^{-1}, \alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n-1}^{-1}\alpha_n\rangle.\end{aligned}$$

El conjunto de formas normales de $\mathbb{Z}^n$ está dado por el conjunto

$$M = \{\alpha_1^{e_1}\alpha_2^{e_2}\cdots\alpha_n^{e_n} | e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{Z}\},$$

pues cualquier elemento de M se encunetra en $\mathbb{Z}^n$, por ser producto de sus generadores; además, si tomamos una palabra w en los generadores de $\mathbb{Z}^n$, por las primeras tres relaciones, tenemos que los generadores conmutan entre sí, de manera que podemos escribir a w como

$$w = \alpha_1^{d_1}\alpha_2^{d_2}\cdots\alpha_n^{d_n} \in M,$$

donde $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{Z}$*, por lo que* $\mathbb{Z}^n = M$*; además, cualquier palabra en* $\mathbb{Z}^n$ *puede ser expresada de manera única como un elemento en* M*, por lo que se comprueba* M *es el conjunto de formas normales de* $\mathbb{Z}^n$*.*

Ahora, para la solución del problema de la palabra en este grupo, tenemos que dada una palabra en $\mathbb{Z}^n$ *basta verificar si su representación como elemento de* M *coincide con la de la palabra vacía, la cual es* $1_{\mathbb{Z}^n} = \alpha_1^0\alpha_2^0\cdots\alpha_n^0$*. Así, tenemos que el problema de la palabra es soluble en* $\mathbb{Z}^n$*.*

Los ejemplos anteriores muestran de manera explícita como dar solución al problema mediante el conjunto de formas normales de un grupo; acontinuación, daremos un ejemplo en el cual la solución se haga directamente con la presentación del grupo.

Ejemplo 72 *El grupo libre en* n *generadores* F_n*, con* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, tiene problema de la palabra soluble. La prueba se verá a continuación.*

Como F_n *es libre, tiene una presentación de la forma*

$$F_n = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n | \emptyset \rangle.$$

Observemos que no tiene relaciones. Dicho ésto, sea w *una palabra en los generadores de* F_n*, se eliminan las subpalabras de la forma* $x_i x_i^{-1}$ *y* $x_i^{-1}x_i$*; como* w *es una palabra, tenemos que tiene longitud finita, por lo que este proceso se repitirá un número finito de veces. Finalmente, se verifica si la palabra resultante a este proceso es o no la palabra vacía. Notemos que este algoritmo da, efectivamente, solución al problema de la palabra en* F_n*.*

Dado que ya conocemos el problema de la palabra y algunos ejemplos en los que éste es soluble, uno podría preguntarse si realmente existen grupos para los cuales no lo sea; la respuesta a esta pregunta es afirmativa. Los primeros en probar la existencia de grupos con problema de la palabra no soluble fueron P. S. Novikov y W. W. Boone, quienes realizaron sus construcciones de manera independiente. Puede consultarse sobre dichas construcciones y algunos otros ejemplos donde el problema de la palabras es soluble y no soluble en [3], [10] y [27].

Capítulo 4

El problema de la palabra para los grupos de trenzas

En este último capítulo nos concentraremos en tratar de dar solución al problema de la palabra en el grupo de trenzas. Recordemos que en los primeros capítulos definimos dicho grupo y mostramos construcciones equivalentes; una de las cosas importantes vistas, es que el grupo de trenzas tiene una presentación finita dada de la siguiente manera.

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} | \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ si } |i-j| > 1, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \text{ si } i = 1, \ldots, n-2 \rangle$$

La presentación del grupo de trenzas es un tanto más complicada que la de los ejemplos vistos anteriormente, por lo que dar solución al problema de la palabra en dicho grupo, representará un mayor esfuerzo y uso de herramientas.

4.1. El problema de la palabra para los grupos de trenzas clásicos

Es importante resaltar que la solución que se dará a continuación funciona para cualquier trenza, en cualquier número de cuerdas. Además, el algoritmo da una solución tanto para el grupo de trenzas como el de trenzas puras, para ver esto, basta con ignorar el paso 1 para obtener la solución para el grupo de trenzas puras.

Teorema 73 *El problema de la palabra es soluble para el grupo de trenzas.*

Demostración. Sea $\beta \in B_n$ procederemos a verificar si β es, o no, la identidad. Describiremos dicho proceso mediante pasos.

Tenemos que β está dada como producto de sus generadores. Así,

$$\beta = \sigma_{i_1}^{e_1}\sigma_{i_2}^{e_2}\cdots\sigma_{i_m}^{e_m},$$

donde $i_j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $e_j \in \{1, -1\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$ y $m \in \mathbb{N}$.

Paso 1 Si la permutación de la trenza β es no trivial, entonces β no es la identidad. De lo contrario, se procede a realizar los siguientes pasos.

Paso 2 Para cada $k = 0, 1, \ldots, m$ definimos el índice j_k como la posición de la n-ésima cuerda después del movimiento $\sigma_{i_1}^{e_1}\sigma_{i_2}^{e_2}\cdots\sigma_{i_k}^{e_k}$. Ahora, definimos la palabra α_i como

$$\alpha_i = \sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1},$$

para cada $i = 1, \ldots, n-1$. Notemos que, dado que la permutación de la trenza es trivial, entonces $j_0 = j_m = n$ y $\alpha_{j_0} = \alpha_{j_m} = 1_{B_n}$.

Paso 3 Mediante inserciones, llevamos la trenza β a la siguiente forma

$$\beta = (\alpha_{j_0}^{-1}\sigma_{i_1}^{e_1}\alpha_{j_1})(\alpha_{j_1}^{-1}\sigma_{i_2}^{e_2}\alpha_{j_2})\cdots(\alpha_{j_{m-1}}^{-1}\sigma_{i_m}\alpha_{j_m}),$$

donde cada terna de elementos tiene alguna de las siguientes formas.

1 $(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_i(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})$

2 $(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_i^{-1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})$

3 $(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}(\sigma_{i-1}\cdots\sigma_{n-1})$

4 $(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}^{-1}(\sigma_{i-1}\cdots\sigma_{n-1})$

5 $(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k^{\pm 1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})$, $k < i-1$

6 $(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k^{\pm 1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})$, $k > i$

Paso 4 Para las ternas de la forma 1. Tenemos que

$$\begin{aligned}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_i(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= 1_{B_n}.\end{aligned}$$

Así, procedemos a eliminar todas las ternas de la forma 1.

Paso 5 Para las ternas de la forma 2, observemos que

$$(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}(\sigma_{i-1}\cdots\sigma_{n-1}) = \hat{x}_i,$$

donde $\hat{x}_i$ son las definidas en el lema 65, de manera que $\hat{x}_i \in F_{n-1}$.

Entonces, intercambiamos las ternas de esta forma por $\hat{x}_i$.

Paso 6 Para las ternas de la forma 3, observemos que

$$(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}(\sigma_{i-1}\cdots\sigma_{n-1}) = \hat{x}_{i-1}^{-1},$$

donde $\hat{x}_{i-1}^{-1} \in F_{n-1}$. Así, intercambiamos las ternas tipo 3 por $\hat{x}_{i-1}^{-1}$

Paso 7 Para las ternas de la forma 4, tenemos que

$$\begin{aligned}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_{i-1}^{-1}(\sigma_{i-1}\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1}\sigma_{i-1}^{-1})(\sigma_{i-1}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= (\sigma_{i-1}\cdots\sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_{i-1}\cdots\sigma_{n-1})\\ &= 1_{B_n}\end{aligned}$$

Entonces, eliminamos las ternas de la forma 4.

Paso 8 Para las ternas de la forma 5. Recordemos, de las relaciones de la presentación del grupo que trenzas, que $\sigma_r\sigma_s = \sigma_s\sigma_r$ si $|r-s| > 1$, con $r, s \in \{1, \ldots, n-1\}$, lo cual implica que $\sigma_r\sigma_s^{-1} = \sigma_s^{-1}\sigma_r$. De ésto, para $k < i-1$, tenemos que $|i-k| > 1$, y así

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k^{\pm1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_i\sigma_k^{\pm1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})\\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})(\sigma_i\sigma_{i+1})\sigma_k^{\pm1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\\
&\vdots\\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_k^{\pm1}\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_k^{\pm1}\\
&= \sigma_k^{\pm1}.
\end{aligned}
$$

Entonces, sustituimos las ternas de la forma 5 por $\sigma_k^{\pm1}$.

Paso 9 Para las ternas de la forma 6. Para $k > i$.

De la relación $\sigma_r\sigma_s = \sigma_s\sigma_r$ si $|r-s| > 1$, con $r, s \in \{1, \ldots, n-1\}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_i\cdots\sigma_{k-2})\sigma_k(\sigma_{k-1}\sigma_k\cdots\sigma_{n-1})\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_{k-2})(\sigma_k\sigma_{k-1}\sigma_k)(\sigma_{k+1}\cdots\sigma_{n-1})
\end{aligned}
$$

Ahora, de la relación $\sigma_r\sigma_{r+1}\sigma_r = \sigma_{r+1}\sigma_r\sigma_{r+1}$, para $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_i\cdots\sigma_{k-2})(\sigma_{k-1}\sigma_k\sigma_{k-1})(\sigma_{k+1}\cdots\sigma_{n-1})\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_k)\sigma_{k-1}(\sigma_{k+1}\cdots\sigma_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Luego, usando de nuevo la relación $\sigma_r\sigma_s = \sigma_s\sigma_r$ si $|r-s| > 1$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_i\cdots\sigma_k)(\sigma_{k+1}\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1}\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1}.
\end{aligned}
$$

De esto,

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1}\\
&= (\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1}\\
&= \sigma_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) \quad &= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1})(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\\
&= (\sigma_k(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}))^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\\
&= ((\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\sigma_{k-1})^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\\
&= \sigma_{k-1}^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})^{-1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1})\\
&= \sigma_{k-1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_i^{-1})\sigma_k^{\pm1}(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) = \sigma_{k-1}^{\pm1}.$$

Entonces, intercambiamos las ternas de la forma 6 por $\sigma_{k-1}^{\pm1}$.

Paso 10 Notemos que después de los pasos anteriores, reducimos β al producto de términos de la forma $\hat{x_1}, \hat{x_2}, \ldots, \widehat{x_{n-1}}, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-2}$ y sus inversos. Observemos que σ_{n-1} aparece únicamente como parte de algún $\hat{x_i}^{\pm1}$. Ahora, probaremos que para $i = 1, \ldots, n-2$ y $j = 1, \ldots, n-1$, se tiene que $\sigma_i^{-1}x_j\sigma_i$ puede escribirse como producto de $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-1}$ y sus inversos.

Si $i < j-1$, tenemos, por las relaciones, que

$$
\begin{aligned}
\sigma_i^{-1}\hat{x}_j\sigma_i = \quad & \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{j+1}^{-1})\sigma_j(\sigma_j\cdots\sigma_{n-1})\sigma_i\\
&= (\sigma_i^{-1}\sigma_i)(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{j+1}^{-1})\sigma_j(\sigma_j\cdots\sigma_{n-1})\\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{j+1}^{-1})\sigma_j(\sigma_j\cdots\sigma_{n-1})\\
&= \hat{x}_j
\end{aligned}
$$

Si $i = j-1$, esto es, $j = i+1$, entonces

$$
\begin{aligned}
\sigma_i^{-1}\hat{x}_j\sigma_i &= \sigma_i^{-1}\hat{x}_{i+1}\sigma_i \\
&= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^2\sigma_i(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}\sigma_{i+1}\sigma_i(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})(\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}\sigma_i)(\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}\sigma_i)(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1})(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1})(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}\sigma_i(\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_{i+1}\sigma_i)\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_i\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_i\sigma_i(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&\quad(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}(\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{n-1})(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_i(\sigma_i\cdots\sigma_{n-1}) \\
&\quad(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1})\sigma_{i+1}^{-1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= x_{i+1}x_ix_{i+1}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Si $i = j$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sigma_i^{-1}\hat{x}_j\sigma_i &= \sigma_i^{-1}\hat{x}_i\sigma_i \\
&= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-}1)\sigma_i(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\sigma_i \\
&= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-}1)\sigma_i^2\sigma_{i+1}(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1})\sigma_i \\
&= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-}1)\sigma_i^2\sigma_{i+1}\sigma_i(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1}\sigma_{i+1}^{-}1)\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})(\sigma_{i+1}^{-}1\sigma_{i+1})\sigma_i\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= \sigma_i^{-1}(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_i\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= \sigma_i^{-1}\sigma_i(\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= (\sigma_{n-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+2}^{-1})\sigma_{i+1}^2(\sigma_{i+2}\cdots\sigma_{n-1}) \\
&= \hat{x}_{i+1}.
\end{aligned}
$$

Si $i > j$, tenemos que $\sigma_i \hat{x}_j = \hat{x}_j \sigma_i$, de ésto,

$$\begin{aligned} \sigma_i^{-1} \hat{x}_j \sigma_i &= \sigma_i^{-1} \sigma_i \hat{x}_j \\ &= \hat{x}_j. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que las palabras de la forma $\sigma_i^{-1} \hat{x}_j \sigma_i$ pueden ser escritas como palabras con elementos $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-1}$ y sus inversos, lo cual implica que las palabras de la forma $\sigma_i \hat{x}_j \sigma_i^{-1}$ también pueden expresarse como palabras con dichos elementos, pues, si $i < j-2$ o $i > j$, entonces

$$\sigma_i \hat{x}_j \sigma_i^{-1} = x_j,$$

si $i = j-1$,

$$\sigma_i \hat{x}_j \sigma_i^{-1} = \sigma_i \hat{x}_{i+1} \sigma_i^{-1} = \hat{x}_i,$$

y si $i = j$, entonces

$$\sigma_i \hat{x}_j \sigma_i^{-1} = \sigma_i \hat{x}_i \sigma_i^{-1} = \hat{x}_i^{-1} \hat{x}_{i+1} \hat{x}_i.$$

Ahora, utilizando lo anterior, expresamos a β de manera que los elementos de la forma $\sigma_i^{\pm 1}$ se encuentren a la derecha, obteniendo

$$\beta = w_1 w_2,$$

donde w_1 es producto de $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-1}$ y sus inversos, y w_2 es producto de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$ y sus inversos.

Paso 11 Tenemos que $\beta = w_1 w_2$, donde w_1 es producto de $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-1}$ y sus inversos, y w_2 es producto de $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$ y sus inversos. Ahora, del lema 65, tenemos que esta manera de expresar a β como producto de un elemento de F_{n-1} y uno de $\mathcal{PB}_{n-1}$ es única.

Repetimos los pasos 2 a 11 con la palabra w_2 de manera que podamos expresarlo como el producto de un elemento de F_{n-2} y uno de $\mathcal{PB}_{n-2}$. Volvemos a realizar este proceso hasta obtener a β expresada como el producto de elementons en un grupo libre.

Paso 12 Reducimos cada una de las palabras en el grupo libre al igual que en el ejemplo 72. Si obtenemos la palabra vacía, entonces $\beta = 1_{B_n}$, de lo contrario, $\beta \neq 1_{B_n}$.

Este algoritmo demuestra que el problema de la palabra es soluble para el grupo de trenzas. ■

Para ilustrar mejor el funcionamiento de este algoritmo consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 74 *Consideremos la trenza $\gamma \in B_4$ definida por la palabra*

$$\gamma = \sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}.$$

Paso 1 *Tenemos que la trenza tiene la forma dada en la figura 4.1.*

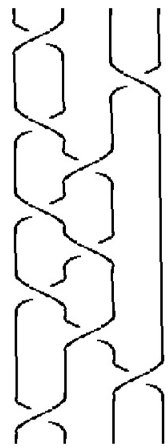


Figura 4.1: Trenza γ. Ejemplo para el algoritmo del problema de la palabra.

Observemos que la trenza no tiene la permutación trivial, de manera que procedemos a realizar los siguientes pasos.

Paso 2 *Tenemos que, para esta trenza, los subíndices j_k están dados de la siguiente manera.*

$$\begin{aligned} &j_0 = 4, \quad j_1 = 4, \quad j_2 = 3, \quad j_3 = 3, \\ &j_4 = 2, \quad j_5 = 1, \quad j_6 = 1, \quad j_7 = 2, \\ &j_8 = 3, \quad j_9 = 4, \quad j_{10} = 4. \end{aligned}$$

Paso 3 *Reescribimos a γ como*

$$\begin{aligned} \gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1) \\ &(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)(\alpha_1^{-1}\sigma_1\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_3^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4) \end{aligned}$$

Paso 4 *Eliminamos las palabras de la forma 1, de manera que*

$$\begin{aligned}
\gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1)\\
&(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\underline{(\alpha_1^{-1}\sigma_1\alpha_2)}(\alpha_2^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_3^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\\
&= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1)\\
&(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)(\alpha_2^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_3^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)
\end{aligned}$$

Paso 5 *Intercambiamos las palabras de la forma 2, por $\hat{x}_1$, de esto*

$$\begin{aligned}
\gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1)\\
&(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\underline{(\alpha_2^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_3^{-1}\alpha_4)}(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\\
&= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1)\\
&(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\underline{\hat{x}_2\hat{x}_3}(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)
\end{aligned}$$

Paso 6 *Intercambiamos las palabras de la forma 3 por $\hat{x}_{i-1}^{-1}$, así*

$$\begin{aligned}
\gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\underline{(\alpha_4^{-1}\sigma_3\alpha_3)}(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)\underline{(\alpha_2^{-1}\sigma_1\alpha_1)}\\
&(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\\
&= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\underline{\hat{x}_3^{-1}}(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)\underline{\hat{x}_1^{-1}}\\
&(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)
\end{aligned}$$

Paso 7 *Eliminamos las palabras de la forma 4, de manera que obtenemos*

$$\begin{aligned}
\gamma \quad &= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\hat{x}_3^{-1}(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)\underline{(\alpha_3^{-1}\sigma_2^{-1}\alpha_2)}\hat{x}_1^{-1}\\
&(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\\
&= (\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)\hat{x}_3^{-1}(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)\hat{x}_1^{-1}\\
&(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)
\end{aligned}$$

Paso 8 *Intercambiamos las palabras de la forma 5 por $\sigma_k^{\pm 1}$, de ésto,*

$$\begin{aligned}
\gamma \quad &= \underline{(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)}\hat{x}_3^{-1}\underline{(\alpha_3^{-1}\sigma_1\alpha_3)}\hat{x}_1^{-1}\\
&(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3\underline{(\alpha_4^{-1}\sigma_1^{-1}\alpha_4)}\\
&= \underline{\sigma_1^{-1}}\hat{x}_3^{-1}\underline{\sigma_1}\hat{x}_1^{-1}(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)\hat{x}_2\hat{x}_3\underline{\sigma_1^{-1}}
\end{aligned}$$

Paso 9 *Intercambiamos las ternas de la forma 6 por $\sigma_{k-1}^{\pm 1}$, así,*

$$\begin{aligned}\gamma &= \sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1\hat{x}_1^{-1}\underline{(\alpha_1^{-1}\sigma_2\alpha_1)}\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1} \\ &= \sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1\hat{x}_1^{-1}\underline{\sigma_1}\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1}\end{aligned}$$

Paso 10 *Tenemos que $\gamma = \sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1}$. Ahora, procederemos a reescribir a γ de manera que los $\hat{x}_i$ se encuentren a la izquierda y los σ_j esten a la derecha.*

Sabemos que $\sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1 = (\sigma_1^{-1}\hat{x}_3\sigma_1)^{-1} = \hat{x}_3^{-1}$, de esto,

$$\begin{aligned}\gamma &= \underline{\sigma_1^{-1}\hat{x}_3^{-1}\sigma_1}\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1} \\ &= \underline{\hat{x}_3^{-1}}\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\gamma &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\hat{x}_3\sigma_1^{-1} \\ &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\sigma_1\hat{x}_2\underline{\sigma_1^{-1}\sigma_1}\hat{x}_3\sigma_1^{-1}.\end{aligned}$$

Recordemos que $\sigma_1\hat{x}_2\sigma_1^{-1} = \hat{x}_1$, de ésto,

$$\begin{aligned}\gamma &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\underline{\sigma_1\hat{x}_2\sigma_1^{-1}}\sigma_1\hat{x}_3\sigma_1^{-1} \\ &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\underline{\hat{x}_1}\sigma_1\hat{x}_3\sigma_1^{-1}.\end{aligned}$$

Además, $\sigma_1\hat{x}_3\sigma_1^{-1} = \hat{x}_3$. Así,

$$\begin{aligned}\gamma &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_1\underline{\sigma_1\hat{x}_3\sigma_1^{-1}} \\ &= \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_1\underline{\hat{x}_3}.\end{aligned}$$

De manera que, al finalizar este paso, obtenemos $\gamma = \hat{x}_3^{-1}\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_1\hat{x}_3$.

Paso 11 *Procedemos a eliminar las palabras de la forma $\hat{x}_i\hat{x}_i^{-1}$ y $\hat{x}_i^{-1}\hat{x}_i$. De manera que obtenemos lo siguiente.*

$$\begin{aligned}\gamma &= \hat{x}_3^{-1}\underline{\hat{x}_1^{-1}\hat{x}_1}\hat{x}_3 \\ &= \underline{\hat{x}_3^{-1}\hat{x}_3} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Al finalizar este paso obtenemos $\gamma = 1$.

Paso 12 *Notemos que representamos a* γ *como la palabra vacía. Así,* $\gamma = 1_{B_4}$.

Bibliografía

[1] Artin,E. (1925). Theorie der Zopfe. *Hamburger Abhandlugen, 4*, 47-72.

[2] Aguilar, J. (2018). *El problema de la palabra en los grupos de trenzas* (Trabajo de fin de grado). Universidad de Sevilla, España.

[3] Boone, W. (1959). The word problem. *Annals of mathematics, 70, (2)*, 207-265.

[4] Bridson, M. The geometry of the word problem. (2004). En Bridson, M. y Salomon, S (Ed.), *Invitations to Geometry and Topology* (pp. 29-91). Nueva York, Estados Unidos: Oxford University Press.

[5] Brookshear, J. (1993). *Teoría de la computación. Lenguajes formales, autómatas y complejidad.* Wilmington, Delaware, Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericana.

[6] Cannon, J., Conner, G. y Zastrow. (2002). One-dimensional sets and planar sets are aspherical. *Topology and its applications, 120.*23-45.

[7] Cerin, L. (2013).*Representación finita del grupo de trenzas puras* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional del Callao, Perú.

[8] Chamizo, F. (2004). Grupo fundamental. Recuperado el 10 de agosto del 2017 de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/to2009/topologian0305/APtopo5.pdf

[9] Cisneros, J. (2001). Grupo fundamental y espacios cubrientes. Recuperado el 10 de agosto del 2017 de http://www.matcuer.unam.mx/ jlcm/Notas/gpfuncub.pdf

[10] Collins, D. (1986). A simple presentation of a group with unsolvable word problem. *Illinois journal of mathematics, 30, (2).*

[11] Feder, E. (2003). *Algorithmic problems in the braid group* (Trabajo de disertación doctoral). Universidad de la ciudad de Nueva York, Estados Unidos.

[12] Fernándezm, I. (2014). *Introducción a la teoría combinatoria de grupos* (Trabajo de fin de máster). Universidad de Oviedo, España.

[13] Glasscock, D. (2012). What it a braid group? Recuperado de https://math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/BraidGroup.pdf

[14] González, J. (2011). Basic results on braid groups. *Annales mathématiques Blaise Pascal, 18*, 15-59.

[15] Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

[16] Jackson, N. (2004). Notes on braid groups. Recuperado de https://homepages.warwick.ac.uk/ maseay/doc/braids.pdf

[17] Macho, M. (2006). Topología algebraica. Recuperado de http://www.ehu.eus/ mtw-mastm/TopoAlg0506.pdf

[18] Macho, M. (2011). Fundamentos de topología. Recuperado el 27 de agosto del 2018 de http://www.ehu.eus/ mtwmastm/FT1011.pdf

[19] Massey, W. (1991). *A basic course in algebraic topology.* Nueva York, Estados Unidos: Springer Verlag New York Inc.

[20] Milne, J. (2017). Group theory. Recuperado el 23 de julio del 2018 de http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/GT.pdf

[21] Navarro, M. (2016). *Trenzas y nudos* (Trabajo de fin de grado). Universidad de Alicante, España.

[22] Paris, L. Braid groups and Artin Groups. (2009). En A. Papadopoulos (Ed.), *Handbook of Teichmüller Theory* (pp. 389-451). Zúrich, Suiza: European Mathematical Society Publishing House.

[23] Peifer, D. (1997). An introduction to combinatorial group theory and the word problem. *Mathematics Magazine, 70, (1)*, 3-10.

[24] Reeder, M. (2015). Notes on group theory. Recuperado el 23 de julio del 2018 de https://www2.bc.edu/mark-reeder/Groups.pdf

[25] Rolfsen, D. (Junio, 2007). *Tutorial on the braid groups.* Trabajo presentado en Summer school and workshop at the Institute for Mathematical Science, National University of Singapore. Resumen recuperado de https://arxiv.org/pdf/1010.4051.pdf

[26] Rotman, J. (2003). *Advanced Modern Algebra*. Estados Unidos: Prentice Hall.

[27] Stillvell, J. (1982). The word problem and the isomorphism problem for groups. *Bulletin pf the american mathematical society, 6, (1)*.