

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

AREA DE POSGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA



TESIS DE MAESTRÍA

QUE PARA CUBRIR PARCIALMENTE LOS REQUISITOS PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS PRESENTA:

“DESARROLLO DE HERRAMIENTA PARA ESTIMACIÓN NUMÉRICA CON VALIDACIÓN EXPERIMENTAL DEL ESTADO DE ESFUERZOS EN MATERIALES COMPUESTOS DE USO AEROESPACIAL”.

TESISTA:

Alejandro Dablantes Camacho

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Emmanuel Santiago Durazo Romero

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. Alejandro Sebastián Ortiz Pérez

Baja California, Mexicali, 09 de Agosto 2023

Agradecimientos

Agradezco a la institución Universidad Autónoma de Baja California por permitirme continuar con mi formación académica y científica a través de estudios de posgrado haciendo uso de sus sistemas e instalaciones, las clases impartidas y el conocimiento que se me aportó durante este proyecto.

Agradezco a la institución CONACYT por permitirme realizar mis estudios de posgrado a través del apoyo que se me otorgó en forma de beca, durante mis estudios de maestría.

Agradezco principalmente a las personas que guiaron mis estudios durante este proyecto. Principalmente agradezco al Profesor Dr. Emmanuel Santiago Durazo Romero por su constante guía en la visión y dirección tanto académica y científica de mi formación y aprendizaje; sus consejos, valiosa retroalimentación, así como por su ardua paciencia. Al Profesor Dr. Alejandro Sebastián Ortiz Pérez por su aporte científico, influencia académica por medio de sus clases y su rigor en la retroalimentación otorgada a lo largo del proyecto. Agradezco igualmente al comité de evaluación por su constante retroalimentación y apoyo durante la realización de mi proyecto, sus valiosos comentarios y consejos que ayudaron en la dirección de mi formación, los profesores Virginia García, Miriam Siqueiros, Luis González e Israel Saucedo.

Agradezco a mis padres, mi madre Lucina Camacho Guillen y mi padre Alejandro Dablantes Camacho, quienes estuvieron de acuerdo, apoyaron y alentaron mi decisión de continuar mis estudios y preparación, al inicio y en el transcurso de ellos. De igual manera agradezco a mi novia Vaneza por su paciencia y apoyo durante estos estudios.

Resumen

El cálculo de la mecánica de materiales y la resistencia de estos es un fenómeno complejo con un extenso historial de aproximaciones, hipótesis y teorías matemáticas que buscan describir de manera completa y segura el comportamiento de una estructura o material. Dicha complejidad se ha incrementado con la transición de los materiales convencionales a los materiales compuestos como lo son los materiales de uso aeroespacial. Entre mayor sea el conocimiento del comportamiento de un material, se facilita el aprovechamiento práctico del mismo y se pueden obtener optimizaciones en el diseño de estructuras. Diferentes configuraciones pueden usarse para construir un laminado de materiales compuestos, lo que implica que con el simple hecho de variar una lámina el comportamiento elástico es diferente, abriendo un sin número de posibilidades en términos de configuraciones de láminas con orientaciones diversas (0,90, ± 45 por citar las orientaciones más convencionales) que deben cumplir con las condiciones de diseño y seguridad.

En el caso de un laminado de materiales compuestos cuya utilización en la industria aeroespacial va en auge, la optimización en su diseño es importantísima en términos de análisis, económicos y de seguridad. Por ejemplo, el obtener una reducción en pesos de estructuras aeroespaciales sin poner en riesgo las capacidades requeridas de seguridad del diseño es fundamental. Entre mayor sea el conocimiento sobre un material compuesto se facilita el analizar o predecir el comportamiento de este a su fallo; el cual puede ser derivado de diversas cargas de operación, defectos en los materiales constituyentes o bien una manufactura deficiente. Hasta el día de hoy la manufactura de un material compuesto se sigue considerando como un proceso artesanal.

Un fallo en un componente estructural puede representar la pérdida de grandes inversiones o la afectación de vidas humanas. A través de este documento se presenta el estudio de la teoría elástica y de laminados en materiales compuestos con el fin de lograr optimizar estructuras por medio de la simulación de diferentes laminados a priori a la construcción del material, lo que representa un ahorro en el periodo de diseño y prueba. Esto se logra a través de la programación de una herramienta auxiliar basada en el cálculo numérico matricial de estados de esfuerzos a los que son sometidos los materiales compuestos y sus teorías de falla. Esta herramienta debe permitir el analizar las potenciales configuraciones de las láminas constituyentes del laminado, al igual que el protocolo de pruebas a seguir basado en las normas pertinentes para validar la propuesta de software de manera experimental. Finalmente, que la propuesta de herramienta suministre información útil para el estudio de daño/fractura en materiales compuestos.

Palabras clave: materiales compuestos, macro-mecánica, micro-mecánica, lámina, laminados, Tsai-Hill, Tsai-Wu, lámina maximum strain, Hoffman criterion, tensor polynomial failure criterion, Hashin criterion, plane stress Hashin criteria.

Abstract.

Mechanics of materials and material resistance calculations are a complex phenomenon with an extensive history of approximations, hypothesis and mathematical theories that try to complete- and safely describe the behavior and structure of materials. Said complexity has incremented with the transition from conventional materials to composite materials as the ones used in the aerospace industry. The greater the knowledge on material behavior, the more its usefulness and practical use is influenced and optimizations in the design of structures can be achieved. Different configurations can be used to build a laminate composed of composite materials, which implies that simply changing the orientation of a single lamina in a laminate will cause a different elastic behavior, opening an extensive array of possibilities of orientations in different laminate configurations (0,90, ± 45 to mention the most conventional orientations), which must achieve all design and component security conditions.

In the case of laminates that are used in the aerospace industry (in which their use has been increased), the optimization of the material during its design is of great importance analysis, economical, and security terms. For example, obtaining a reduction in weight of aerospace structures without compromising security requirements of the materials in use is fundamental. The greater the knowledge in a composite material, the easier its analysis and prediction of behavior will be towards its point of failure, which can be derived from operational loads, defects in constituent materials, or a deficient manufacture. Until today, the manufacture of composite materials is still considered an artisanal process.

A failure in a structural component can represent the loss of great investments or negatively impact human lives. Through this document the study of elastic, and laminates theories are presented with the objective to optimize structures through the simulation of different laminates a priori to the construction of the material, which represent savings in the design and testing phases of a product. This is achieved through the programming of an auxiliary tool based in numerical and matrix calculations of the stress state at which composite materials are subject to, along with its failure theories. This tool will allow the analysis of potential configurations of lamina within a laminate, as well as the validation of results through test data that is based in standard testing protocols for composite materials. Finally, the tool proposal will provide useful information for the study of damage/fractures in composite materials.

Key words: composite materials, macro-mechanics, micro-mechanics, lamina, laminate, Tsai-Hill, Tsai-Wu, lamina maximum strain, Hoffman criterion, tensor polynomial failure criterion, Hashin criterion, plane stress Hashin criteria.

Índice

Resumen.....	III
Abstract.....	IV
Índice.....	V
Índice de Figuras.....	X
Índice de Tablas	XVII
Capítulo 1. Introducción	1
1.0. Introducción	2
1.1. Problemática.....	4
1.2. Justificación.....	5
1.3. Hipótesis.....	5
1.4. Objetivo General	6
1.5. Objetivos específicos	6
Capítulo 2. Antecedentes	7
2.0. Introducción a los antecedentes	8
2.1. Metales, herramientas y máquinas	8
2.2. Materiales y modelos matemáticos	9
2.2.1. Estudio de fallo, concentración de esfuerzo y fractura	11
2.2.2. Desarrollo de elasticidad anisotrópica	14
2.3. Tenacidad y mecánica de fractura.....	16
2.4. Nuevos materiales, fibras de alta resistencia y fabricación.....	18
2.5. Materiales compuestos: antecedentes y medios de aprovechamiento.....	19
2.5.1. Medios de aprovechamiento de materiales compuestos	21
2.5.2. Laminados, defectos y vacíos	22
2.6. Teorías de resistencia y envolventes de fallo.....	23
2.6.1. Teorías de energía aplicables a materiales isotrópicos	24
2.6.2. Teorías de energía aplicables a materiales no isotrópicos	24
Capítulo 3. Marco teórico: Ciencia de materiales compuestos.....	26
3.0. Propiedades mecánicas de los materiales.....	27
3.1. Materiales compuestos	29
3.1.1. Clasificación de los materiales compuestos modernos de uso estructural.....	31
3.1.2. Tipos de fibras en materiales compuestos	31
3.1.3. Tipos de matriz en materiales compuestos	39
3.2. Estudio micromecánico de láminas.....	41

3.2.1.	Fracciones de volumen	41
3.2.2.	Fracciones de volumen con vacíos	43
3.2.3.	Fracciones de volumen, masa y densidad.....	43
3.2.4.	Derivación de módulos elásticos por micromecánica.....	45
3.2.5.	Derivación de módulos elásticos método por resistencia de materiales	45
3.2.6.	Derivación de módulos elásticos método semi-empírico (Halpin-Tsai)	48
3.3.	Influencia del contenido de vacío en laminados compuestos	50
3.4.	Laminación y clasificación de materiales compuestos	53
3.4.1.	Código de laminado.....	54
3.4.2.	Laminados simétricos	55
3.4.3.	Laminados capa cruzada.....	55
3.4.4.	Laminados de capa a ángulo.....	56
3.4.5.	Laminados antisimétricos	56
3.4.6.	Laminados balanceados	56
3.4.7.	Laminados quasi-isotrópico.....	57
3.4.8.	Otros tipos de laminados.....	57
3.5.	Lenguaje y entorno de programación.....	60
Capítulo 4.	Marco teórico: Mecánica de materiales compuestos	61
4.0.	Mecánica de materiales y análisis de sólidos	62
4.1.	Teoría de la elasticidad.....	63
4.1.1.	Ley de Hooke Generalizada.....	66
4.1.2.	Elasticidad anisotrópica en materiales de ingeniería común	69
4.1.3.	Elasticidad monoclinica.....	73
4.1.4.	Elasticidad ortogonalmente ortotrópica.....	73
4.1.5.	Elasticidad isotrópica.....	74
4.2.	Estudio macromecánico de laminados	75
4.2.1.	Lámina ortotrópica plana (2D)	76
4.2.2.	Lámina ortotrópica plana (2D) con ángulos de inclinación.....	78
4.2.3.	Lámina ortotrópica plana (2D) tejida y métodos de estudio.....	83
4.2.4.	Teoría de Laminado Clásica (Classical Laminate Theory)	86
4.3.	Metodologías de descripción de resistencia y fallo en laminados	93
Capítulo 5.	Teorías de resistencia y envolventes de fallo.....	96
5.0.	Teorías de resistencia y envolventes de fallo.....	97
5.1.	Nomenclatura utilizada de deformaciones, esfuerzos y esfuerzos últimos multidireccionales	100

5.2.	Teorías de energía y criterios de fallo aplicables a materiales anisotrópicos y compuestos laminados	103
5.3.	Criterio Máximo Esfuerzo.....	104
5.4.	Criterio Máxima Deformación.....	106
5.5.	Criterio de Tsai-Hill	108
5.6.	Criterio de Hoffman	111
5.7.	Criterio de Tsai-Wu.....	113
5.8.	Criterios de Hashin.....	116
5.9.	Criterios de Puck.....	119
5.10.	Criterios de LaRC02.....	123
Capítulo 6.	Metodología y experimentación.....	126
6.0.	Introducción y planeación a las fases de proyecto	127
6.1.	Fase 1: Conceptos básicos.....	128
6.1.1.	Conceptualización de micromecánica	129
6.1.2.	Conceptualización de macromecánica.....	130
6.1.3.	Conceptos de estudio en materiales compuestos y programación.....	131
6.1.4.	Generación de algoritmos independientes y unificación de código	132
6.1.5.	Codificación de conceptos micromecánicos en fracciones de volumen: Descripción de la estructura de código	134
6.1.6.	Módulos de lámina por micromecánica: Descripción de la estructura de código	136
6.2.	Fase 2: Micromecánica y lámina anisotrópica	138
6.2.1.	Lámina ortotrópica 2D: Descripción de estructura.....	140
6.2.2.	Teorías de fallo: Descripción de estructura	141
6.3.	Fase 3: Macromecánica de laminados.....	142
6.3.1.	Teoría de laminado ABD: Descripción de estructura.....	144
6.3.2.	Degradación por % de vacío.....	148
6.3.3.	Cálculo de Fallo Inicial de 5 teorías (Función auxiliar)	151
6.3.4.	Cálculo de fallo progresivo (Función auxiliar).....	153
6.4.	Fase 4: Comparativa de datos	161
6.4.1.	Método comparativo de resultados: Material analizado	163
6.4.2.	Método comparativo de resultados: Análisis en herramienta generada	164
6.4.3.	Método comparativo de resultados: Análisis en software comercial	166
6.4.4.	Normas ASTM.....	167
Capítulo 7.	Resultados y conclusiones.....	169

7.0.	Resultados de elasticidad-deformación lámina simple	170
7.0.1.	Comparación con literatura Autar K. Kaw: Example 2.6.....	170
7.0.2.	Comparación con literatura Autar K. Kaw: Example 2.7 [6]	171
7.0.3.	Comparación con literatura David Roylance MIT Course Notes: Example 1 172	
7.0.4.	Comparación de parámetros esfuerzo-deformación en una lámina entre programas. Ejemplo utilizando conceptos micromecánicos.....	173
7.1.	Resultados de deformación en elasticidad de conjunto laminado.....	174
7.1.1.	Comparación con literatura Autar K. Kaw: Example 4.2.....	174
7.1.2.	Comparación con literatura: elasticidad de laminado M. Stuart [136]	177
7.2.	Resultados de comparación a Fallo Final de láminas simples	179
7.2.1.	Fallo Final de lámina simple: Pipes & Cole	179
7.2.2.	Fallo Final de lámina simple: Kawai	183
7.2.3.	Fallo Final de lámina simple: Taniguchi	187
7.2.4.	Fallo Final de lámina simple: Análisis De La Iniciación De Grietas En Perfiles Alares De Material Compuesto Por Impactos De Baja Energía.....	190
7.2.5.	Fallo Final de lámina simple: Análisis y Evaluación de Fibras Naturales en Materiales Compuestos de Matriz Polimérica aplicados a Álabes de Aerogeneradores de Baja Capacidad	193
7.3.	Resultados de comparación a Fallo Final e Inicial de laminados	195
7.3.1.	Fallo Final e Inicial de laminado: C. T. Sun y S. G. Zhou	195
7.3.2.	Fallo Final e Inicial de laminado: C. T. Sun FAA – Purdue CML.....	199
7.3.3.	Fallo Final e Inicial de laminado: Ataabadi.....	204
7.3.4.	Fallo Final e Inicial de laminado: Martinez.....	206
7.4.	Comparativa de resultados Fallo Inicial – Fallo Final entre programas	208
7.5.	Conclusiones y discusiones.....	212
	Bibliografía.....	214
	Apéndices.....	222
	Apéndice A – Programa de análisis e interfaz	223
A.1	Uso de submódulo GUIDE	223
A.2	Diseño de iteraciones de interfaz	226
A.3	Submenús de interfaz diseñados	229
A.3.1	Descripción de estructura de código. Funciones de interfaz y análisis de laminados.....	239
A.3.2	Codificación de función botón CALCULAR	242

A.3.3 Codificación de función botón GUARDAR. Descripción de estructura de código	243
A.3.4 Codificación de función botón CALCULAR Y GUARDAR. Descripción de estructura de código	245
A.3.5 Módulos de programa y codificado	246
A.4 Información relativo a entorno de programación utilizado.....	250
A.4.1 Ventana de trabajo	250
A.4.2 Funciones básicas.....	250
A.4.3 Funcionamiento de GUIDE	252
A.5 Función de programas base iniciales	255
.....	259

Índice de Figuras

Figura 2–1 Ilustración de una de las primeras máquinas de tejer. [7]	9
Figura 2–2 Vista simplificada de la estructura de madera a distintas escalas [42].....	15
Figura 2–3 Modos de fallo por grieta en un material.	17
Figura 2–4 Puente de material compuesto Aberfeldy. [61].....	20
Figura 2–5 Uso de material compuesto en Boeing 787 (Boeing). [64]	21
Figura 2–6 Uso de compuestos con fines de resistencia en estructura de ala B787. [65]	21
Figura 2–7 Materiales Compuestos Transparentes Patente US2311613A. [66]	22
Figura 2–8 Variabilidad de dirección de fibras en láminas de material compuesto.	23
Figura 3–1 Tipos de fallo por naturaleza de deformación no elástica: 1. Fallo frágil., 2. Fallo dúctil-frágil, 3. Fallo dúctil.....	27
Figura 3–2 Ilustración ejemplificadora de máquina de pruebas universal.	28
Figura 3–3 Uso de laminado de carbón en Boeing 787 Dreamliner. [84]	29
Figura 3–4 Medio multifase. Representación de material con dos constituyentes distintos.	30
Figura 3–5 Representación gráfica de clasificación de material compuesto.	31
Figura 3–6 Estructura de compuesto de polímero reforzado por fibra (FRP).	31
Figura 3–7 Microscopía electrónica de barrido (SEM) a una fibra de carbono [88].....	32
Figura 3–8 Fibra de carbono con planos basales en orden aleatorio. [90].....	33
Figura 3–9 Fibra de carbono con planos basales en orden radial. [90]	33
Figura 3–10 Fibra de carbono con planos basales en orden cebolla. [90]	33
Figura 3–11 Microscopía electrónica de barrido (SEM) a una fibra de vidrio. [91]	34
Figura 3–12 Microscopía electrónica de barrido (SEM) a una fibra de aramida. [92].....	36
Figura 3–13 Microscopía electrónica de barrido (SEM) a una fibra de Nicalon. [94]	37
Figura 3–14 Microscopía electrónica de barrido (SEM) de la superficie de fibra de Boro. [96].....	38
Figura 3–15 Representación gráfica de un filamento de boro manufacturado. [97]	38
Figura 3–16 Representación gráfica de fracciones de volumen.	42
Figura 3–17 Distribución de carga en derivación micromecánica.	46
Figura 3–18 Deformación transversal en derivación micromecánica. Δ representando la diferencia en deformación por cada uno de los materiales constituyentes del material compuesto.	46
Figura 3–19 Derivación relación de Poisson en derivación micromecánica. ϵ representando la deformación por cada uno de los materiales constituyentes del material compuesto.....	47
Figura 3–20 Deformación cortante transversal en derivación micromecánica. γ representando deformación distorsional para cada uno de los materiales constituyentes del material compuesto.	47
Figura 3–21 Disminución de valores de resistencia en relación con el contenido de vacío por Liu y Zhang [105].....	50
Figura 3–22 Disminución de valores de módulos en relación con el contenido de vacío por Liu y Zhang [105].....	51
Figura 3–23 Representación gráfica de apilamiento de materiales laminados.....	53
Figura 3–24 Representación gráfica de materiales compuestos híbridos.....	53
Figura 3–25 Código de laminado: Orden consecutivo.	54
Figura 3–26 Código de laminado: Subíndice 2 denotando repetitividad de capa.	55
Figura 3–27 Código de laminado: Simetría de laminado y plano medio laminado impar. ...	55

Figura 3–28 Representación gráfica laminado simétrico.	55
Figura 3–29 Representación gráfica laminado capa cruzada.....	56
Figura 3–30 Representación gráfica laminado capa a ángulo.	56
Figura 3–31 Representación gráfica laminado antisimétrico.	56
Figura 3–32 Representación gráfica laminado balanceado.	56
Figura 3–33 Ejemplos de laminados balanceados.	57
Figura 3–34 Construcción de un sándwich honeycomb y tipos de núcleo honeycomb. Estos son unidos mediante distintos medios, típicamente adhesivos[106].	57
Figura 3–35 Tipos de núcleos de materiales sándwich. a) Honeycomb hexagonal, b) Flexicore, c) Overexpanded [106].	58
Figura 3–36 Logo oficial de MathWorks® creador de MATLAB®.....	60
Figura 4–1 Cargas normales y tangenciales en un cubo abstraído de un elemento, donde σ representa los esfuerzos normales (Normal Stress en inglés) y τ representa los esfuerzos cortantes (Shear Stress en inglés).	62
Figura 4–2 Representación 2D de deformaciones extensionales en ejes coordenados, siendo ϵ_1 deformación en dirección 1 y ϵ_2 deformación en dirección 2. Al aplicar una fuerza, l_i es el largo inicial y l_f es el largo final de un elemento deformado.....	63
Figura 4–3 Representación 2D de deformaciones distorsionales en ejes coordenados, siendo α deformación distorsional en respecto al eje 1 y β deformación distorsional en respecto al eje 2, conocidos también como <i>deformación tensorial</i> , o <i>tensorial strain</i>	64
Figura 4–4 Elemento de material cubico cúbico, donde se aprecian las tres direcciones ortogonales entre sí 1, 2 y 3.	65
Figura 4–5 Representación de deformaciones de un material. Donde F representa la fuerza aplicada y los incisos representan: a) Material no deformado, b) Material deformado bajo carga con deformación simétrica por plano de simetría (línea punteada), c) Material deformado bajo carga con deformación no simétrica por plano de simetría (línea punteada).	66
Figura 4–6 Representación 3D de deformación de un elemento de material sin aparentes planos de simetría al aplicar una fuerza.	66
Figura 4–7 Direcciones espaciales de esfuerzos y deformaciones donde se pueden presentar simetrías o no simetrías.....	66
Figura 4–8 Notación de esfuerzos y deformaciones (normales y cortantes) con solo variables sigma σ y épsilon ϵ . Siguiendo esta notación, σ_{31} representa el esfuerzo situado en la cara normal a la dirección 3, con dirección 1 de aplicación de carga.	67
Figura 4–9 Direcciones de esfuerzos en cubo de material. Donde σ representa esfuerzos normales, τ representa esfuerzos cortantes y los subíndices representan la superficie de aplicación y la fuerza aplicada en ella respectivamente.	67
Figura 4–10 Direcciones de deformación en cubo de material. Donde ϵ representa deformaciones longitudinales, γ representa deformaciones cortantes y los subíndices representan la superficie de aplicación y la fuerza aplicada en ella respectivamente.	68
Figura 4–11 Significancia física de la matriz de flexibilidad denotando los tipos de acoplamiento entre esfuerzos y deformación que representan.	71
Figura 4–12 Esfuerzos en anisotropía simplificados debido a simetría, reducidos a solo 3 esfuerzos cortantes (τ) por simetría y 3 esfuerzos normales (σ).	71
Figura 4–13 Deformaciones longitudinales ϵ y tangenciales γ en materiales anisotrópicos.	72

Figura 4–14 Elasticidad monoclinica: Un plano de simetría.....	73
Figura 4–15 Elasticidad ortotrópica ortogonal: Tres planos de simetría.....	73
Figura 4–16 Elasticidad isotrópica: Infinitos planos y direcciones de simetría en material.....	74
Figura 4–17 Representación gráfica de esfuerzo plano (2D). σ representa el esfuerzo y los subíndices indican la dirección de aplicación.....	76
Figura 4–18 Representación gráfica de ángulos de giro a una lámina de fibra unidireccional con coordenadas globales (x, y) y coordenadas locales (1, 2) donde b) y c) los ejes coordenados locales y globales no coinciden y en a) ambos ejes de coordenadas son coincidentes.....	78
Figura 4–19 Dominios de fallo por ángulo de lámina. [110].....	81
Figura 4–20 Representación gráfica de dominio de modos de fallo por ángulo de lámina. La carga aplicada es denotada por una flecha roja y la dirección de la fibra por las líneas negras paralelas. Donde los principales modos de fallo pueden ser divididos en tres principales categorías: En óvalo azul se indica el fallo por fibra, en óvalo verde se indica el fallo por matriz en manera cortante y en óvalo amarillo-naranja el fallo de matriz por tensión.....	82
Figura 4–21 Comparación de la microestructura de laminado unidireccional, tejido biaxial y tejido triaxial.....	83
Figura 4–22 Partes de una capa de lámina tejida y ángulos de giro. θ representa el ángulo de giro y los subíndices y y w indican pertenencia a yarn y warp respectivamente.....	84
Figura 4–23 Aproximación inversa a caracterización de elasticidad de lámina CLT.....	85
Figura 4–24 Esfuerzo plano en laminado compuesto.....	86
Figura 4–25 Lámina plana. A) Esfuerzos representados por σ , b) Momentos representados por M	87
Figura 4–26 Orden y alturas de laminado, donde n es el número de láminas con el cual cuenta el laminado, h es la altura correspondiente a cierta altura, k es un número consecutivo de lámina actualmente analizado, k-1 es el número de lámina anterior y k+1 la lámina siguiente (redibujado de [6]).....	88
Figura 4–27 Interpretación de la matriz ABD.....	91
Figura 4–28 Representación gráfica de acoplamiento (carga-deformación) de la matriz ABD en laminados compuestos.....	92
Figura 4–29 Representación gráfica de “First Ply Failure (FPF)”.....	93
Figura 4–30 Representación gráfica de “Last Ply Failure (LPF)”.....	94
Figura 4–31 Diagrama de secuencia en estudio de laminados de material compuesto.....	94
Figura 4–32 Esquema de escalas y bloques de análisis en un elemento estructural de aeronave, (Redibujado de [117]).....	95
Figura 5–1 Ilustración de elasticidad/resistencia.....	97
Figura 5–2 Comparación de envolvente de fallo Tresca y von Mises. [119].....	98
Figura 5–3 Fallo por planos cristalinos en material inter-metalico.....	98
Figura 5–4 Dependencia de modos de fallo con escala de análisis.....	99
Figura 5–5 Envolvente de fallo típica para el criterio de máximo esfuerzo, donde σ representa el esfuerzo y el superíndice T o C representa si es a tensión o compresión.....	105
Figura 5–6 Envolvente de fallo típica para el criterio de máxima deformación, donde σ representa el esfuerzo y el superíndice T o C representa si es a tensión o compresión.....	107
Figura 5–7 Envolvente de fallo típica para el criterio de Tsai-Hill, donde σ representa el esfuerzo sobre el material.....	110

Figura 5–8 Envolvente de fallo típica para el criterio de Hoffman, donde σ representa el esfuerzo y el superíndice T o C representa si es a tensión o compresión.	112
Figura 5–9 Envolvente de fallo típica para el criterio de Tsai-Wu, donde σ representa el esfuerzo y el superíndice T o C representa si es a tensión o compresión.	115
Figura 5–10 Representación gráfica del modo de fallo de fibra Hashin.	116
Figura 5–11 Representación gráfica del modo de fallo de matriz Hashin.	116
Figura 5–12 Representación gráfica de Fallo de Fibra (FF) por criterios de Puck.	119
Figura 5–13 Representación gráfica de Fallo Inter-Fibra (IFF) por criterios de Puck.	120
Figura 5–14 Representación gráfica de Fallo de Matriz de LaRC02.	123
Figura 5–15 Representación gráfica de Fallo de Fibra de LaRC02.	124
Figura 6–1 Diagrama principal de flujo de estudio de materiales compuestos en proyecto de maestría.	127
Figura 6–2 Entradas conceptuales para el desarrollo de la Fase 1.	128
Figura 6–3 Representación de la estructura micromecánica en un material compuesto. ...	132
Figura 6–4 Representación del contenido de vacío porcentual en un material compuesto.	132
Figura 6–5 Secuencialidad utilizada para la generación de funciones y algoritmos en el proyecto.	133
Figura 6–6 Diagrama de bloques para el cálculo de fracciones de volumen.	135
Figura 6–7 Diagrama de bloques para el cálculo de fracciones de volumen.	135
Figura 6–8 Diagrama de bloques para el cálculo de fracción de masa.	135
Figura 6–9 Diagrama de bloques para el cálculo de fracción de volumen con vacío.	135
Figura 6–10 Diagrama de bloques para la derivación de módulos elásticos en material compuesto. E1, E2, G12 y ν_{12} representan las propiedades de material: módulo de Young, módulo cortante, y relación de Poisson respectivamente. ξ_{G} , η_{G} , ξ_{E} y η_{E} son constantes de ajuste para el cálculo por método micromecánico semiempírico. Dependiendo la sección de código, la relación de Poisson también se almacena sobre la variable ν_{12}	137
Figura 6–11 Entrada conceptual 2 para el desarrollo de la Fase 2.	138
Figura 6–12 Entrada conceptual 3 de análisis iterativo para el desarrollo de la Fase 2.	139
Figura 6–13 Diagrama del estudio de respuesta elástica de una capa de lámina. Donde se tiene inclinación, dimensiones, σ y τ representando los esfuerzos, ϵ y γ representando las deformaciones.	139
Figura 6–14 Diagrama de bloques del estudio macromecánico de lámina simple. V_c , V_f y V_m representan las fracciones de volumen del compuesto, la fibra y la matriz respectivamente. E1, E2, G12 y ν_{12} representan las características de material módulo de Young, módulo cortante, y relación de Poisson respectivamente. $[\sigma]$, ϵ y $[S]$ representan los vectores de esfuerzo y deformación y la matriz de flexibilidad respectivamente.	140
Figura 6–15 Diagrama de bloques del estudio de teorías de resistencia en materiales compuestos. σ representa el esfuerzo normal en el material, τ representa el esfuerzo cortante en el material y la dirección dependerá de los subíndices.	141
Figura 6–16 Entrada conceptual 4 para el desarrollo de la Fase 3.	142
Figura 6–17 Entrada conceptual 3 de análisis iterativo para el desarrollo de la Fase 2.	143
Figura 6–18 Diagrama del estudio de respuesta elástica de laminados de varias capas.	143
Figura 6–19 Diagrama de bloques de estudio macromecánico de laminados. (Diagrama corto).	146
Figura 6–20 Diagrama de bloques de estudio macromecánico de laminados. (Diagrama extendido).	147

Figura 6–21 Diagrama de función menu_optionalcheck y captura de cuadro de selección de interfaz.	148
Figura 6–22 Diagrama de función math_ContVacio() y captura de botón de interfaz.....	149
Figura 6–23 Diagrama de función math_ManipulacionesABD() e inclusión de degradación.	149
Figura 6–24 Diagrama de sección inicial de función math_CriteriosFalla() e inclusión de degradación.....	150
Figura 6–25 Representación de rango de cargas y puntos a solución de Fallo Inicial.	151
Figura 6–26 Diagrama de bloques de la función de análisis de Fallo Inicial.	152
Figura 6–27 Ilustración del proceso de estudio de laminados compuestos.	154
Figura 6–28 Degradación completa de módulos elásticos de lámina. En este modo de degradación se eliminan completamente los módulos elásticos correspondientes a la lámina fallada, influyendo en el recálculo de módulo elástico de laminado, el cual ahora será reducido por la capa de laminado fallada cuya rigidez ya no se toma en consideración....	155
Figura 6–29 No degradación de módulos elásticos de lámina. Este modo de degradación no genera una iterativa degradación de rigidez dentro del material.	155
Figura 6–30 Degradación Parcial Local de módulos elásticos de lámina. En este modo de degradación los módulos locales son degradados correspondientemente al componente que haya fallado (fibra o matriz) en los módulos elásticos locales antes de su transformación a módulos elásticos globales.....	156
Figura 6–31 Degradación Parcial Global de módulos elásticos de lámina. En este modo de degradación los módulos globales son degradados correspondientemente al componente que haya fallado (fibra o matriz) después de haber sido generada la transformación de módulos elásticos locales.....	157
Figura 6–32 Representación gráfica de dominios de fallo por ángulo de lámina. De 0° a 2.9° el Fallo es dominado principalmente por la fibra; De 2.9° a 27.1° el Fallo es dominado por el esfuerzo cortante en la matriz; De 27.1° a 90° el Fallo es dominado por el esfuerzo normal transversal a la matriz. [110]	157
Figura 6–33 Degradación de módulo elástico global fallo fibra en rango [0-27] grados. .	158
Figura 6–34 Degradación de módulo elástico global fallo fibra en rango [27-63] grados. .	158
Figura 6–35 Degradación de módulo elástico global fallo fibra en rango [27-63] grados. .	158
Figura 6–36 Degradación de módulo elástico global fallo matriz en rango [0-27] grados. .	159
Figura 6–37 Degradación de módulo elástico global fallo matriz en rango [27-63] grados.	159
Figura 6–38 Degradación de módulo elástico global fallo matriz en rango [63-90] grados.	159
Figura 6–39 Diagrama de bloques función de análisis Fallo Progresivo. El funcionamiento principal regido por dos ciclos while anidados que se encargan de iterar la solución hasta encontrar el total de láminas fallidas.	160
Figura 6–40 Dos principales tipos de comparación.....	161
Figura 6–41 Ejemplo de análisis de material en software comercial.	162
Figura 6–42 Medios de obtención de datos de comparación.	163
Figura 6–43 Proceso de información ingresada para análisis de materiales.....	163
Figura 6–44 Dimensiones de material analizadas en herramienta creada.	165
Figura 6–45 Proceso generalizado de análisis asistido por computadora o ingeniería asistida por computadora (CAE).....	166

Figura 6–46 Dimensiones generales de probetas de material compuesto según ASTM D3039.....	168
Figura 7–1 Gráfico de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Pipes & Cole [137].....	179
Figura 7–2 Gráfico de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Kawai [139].....	183
Figura 7–3 Datos gráficos de Fallo Final obtenidos en análisis Kawai [139].	185
Figura A–1 Creación de interfaz para la suma de dos números.	223
Figura A–2 Archivos generados al guardar proyecto de GUIDE.	223
Figura A–3 Secciones de código generadas de proyecto GUIDE.	224
Figura A–4 Código de función de ejemplo “pushbutton1”	225
Figura A–5 Secuencialidad de funcionamiento de interfaz de ejemplo.	225
Figura A–6 Diseño inicial de interfaz de usuario en programa de análisis de laminados compuestos.....	226
Figura A–7 Una de las primeras iteraciones de diseño de interfaz de usuario.	226
Figura A–8 Interfaz de análisis de laminados con submenús extendidos.....	227
Figura A–9 Interfaz de análisis de laminados con submenús contraídos.	228
Figura A–10 Interfaz de análisis menús de funciones auxiliares.....	228
Figura A–11 Interfaz Submenú Título.....	229
Figura A–12 Interfaz Submenú Posicionamiento de orden de láminas.....	229
Figura A–13 Interfaz Submenú Dimensiones de material.....	230
Figura A–14 Interfaz Selección de método de caracterización de módulos elásticos.	231
Figura A–15 Interfaz Submenú 4 ingreso directo.....	231
Figura A–16 Interfaz Submenú 4 ingreso directo.....	231
Figura A–17 Interfaz Submenú Cargas aplicadas.....	232
Figura A–18 Interfaz Submenú Valores máximos de material.....	233
Figura A–19 Interfaz Submenú Contenido de Vacío.....	233
Figura A–20 Interfaz Submenú Multianálisis Fallo Inicial	234
Figura A–21 Interfaz Submenú Multianálisis Fallo Progresivo	235
Figura A–22 Interfaz Submenú Resultados 1	236
Figura A–23 Submenú Resultados 2	236
Figura A–24 Interfaz Graficación de esfuerzos y deformaciones	237
Figura A–25 Interfaz Submenú Resultados 3	237
Figura A–26 Interfaz Botones Calcular, Guardar, Calcular Guardar y Abrir.....	237
Figura A–27 Interfaz Botones exportar resultados	238
Figura A–28 Ejemplo de función generada por MATLAB® GUIDE.	239
Figura A–29 Código correspondiente a función de botón “Añadir lamina”	240
Figura A–30 Ejemplo de función generada por usuario.	240
Figura A–31 Código correspondiente a función creada de usuario “math_derivfracvol”..	241
Figura A–32 Secciones de código para función CALCULARbutton.....	242
Figura A–33 Diagrama de función GUARDARbutton y captura de botón de interfaz.....	243
Figura A–34 Secciones de código para función GUARDARbutton	244
Figura A–35 Diagrama de función CALCYGUARDbutton y captura de botón de interfaz.	245
Figura A–36 Secciones de código para función CALCYGUARDbutton.	245
Figura A–37 Diagrama de función CALCULARbutton y captura de botón de interfaz. ...	246
Figura A–38 Elementos gráficos de la ventana de trabajo en MATLAB®.....	250

Figura A-39 Partes de la función linspace.	251
Figura A-40 Creación de elementos gráficos de GUIDE.....	252
Figura A-41 Codificación de funcionalidad de elementos gráficos GUIDE.	252
Figura A-42 Elementos gráficos de GUIDE.	254
Figura A-43 Modificación de propiedades elementos gráficos en GUIDE.	254
Figura A-44 Valores obtenidos de código fracción de volumen.....	255
Figura A-45 Valores obtenidos de código fracción de masa.	256
Figura A-46 Valores obtenidos de código fracción de masa (por densidades y volúmenes).	257
Figura A-47 Valores obtenidos de código fracción de volumen (con vacío)	258

Índice de Tablas

Tabla 3-1 Clasificación general de materiales compuestos [85]:	29
Tabla 3-2 Propiedades de fibras de carbono.....	33
Tabla 3-3 Composición molecular porcentual de fibra de vidrio.	35
Tabla 3-4 Propiedades de fibras de vidrio.	35
Tabla 3-5 Propiedades de fibras de aramida.....	36
Tabla 3-6 Propiedades de fibras de Nicalon	37
Tabla 3-7 Propiedades de resinas y aplicación	40
Tabla 3-8 Propiedades mecánicas de diversas matrices	40
Tabla 3-9 Valor de factor de refuerzo ξ para módulo elástico E_2	48
Tabla 3-10 Valor de factor de refuerzo ξ para módulo elástico G_{12}	49
Tabla 3-11 Ajustes de curva lineal para valores de resistencia cortante, flexora y tensionante en función de fracción de volumen de vacío.	51
Tabla 3-12 Ajustes de curva lineal para valores de módulos tensionante y flexora en función de fracción de volumen de vacío.	52
Tabla 3-13 Ejemplos de los efectos causados por laminados no-simétricos [106, pp. 7–30].	54
Tabla 3-14 Resistencia y rigidez de material sándwich honeycomb relativos a un laminado sólido. Propiedades comparadas unitariamente al laminado sólido. [106, pp. 7–11].....	58
Tabla 4-1 Comparación de valores de elasticidad y resistencia laminados tejidos y unidireccionales [113].....	85
Tabla 5-1 Valores de parámetros de arreglo	122
Tabla 6-1 Datos de ingreso: Dimensiones de material utilizados en análisis.....	164
Tabla 6-2 Datos de ingreso: Propiedades de material utilizados en análisis.	164
Tabla 6-3 Datos de ingreso: Cargas impuestas sobre material.	164
Tabla 6-4 Tabla del resumen de las propiedades de material utilizadas para análisis de configuraciones de laminados compuestos con artículos de investigación.	165
Tabla 7-1 Propiedades de material según Autar: Example 2.6 [6].	170
Tabla 7-2 Comparación matriz de flexibilidad Autar: Example 2.6 [6].	170
Tabla 7-3 Comparación matriz de flexibilidad Autar: Example 2.7 [6].	171
Tabla 7-4 Comparación deformaciones globales Autar: Example 2.7 [6].	171
Tabla 7-5 Propiedades de material David Roylance: Example 1.	172
Tabla 7-6 Comparación matriz de flexibilidad David Roylance: Example 1.....	172
Tabla 7-7 Propiedades de fibra de carbono T300 [135].	173
Tabla 7-8 Propiedades típicas de resinas epóxicas [85].	173
Tabla 7-9 Dimensiones de análisis de ejemplo comparativo entre programas.....	173
Tabla 7-10 Esfuerzo y deformación global calculada según Autar: Example 2.7 [6].	174
Tabla 7-11 Dimensiones de análisis para problema de ejemplo Autar 4.2 [6].	175
Tabla 7-12 Cargas aplicadas en material actual Autar 4.2 [6].	175
Tabla 7-13 Cargas aplicadas en Autar 4.2 [6].	175
Tabla 7-14 Comparación de módulos elásticos Herramienta-Autar 4.2 [6].	176
Tabla 7-15 Comparación de deformaciones Herramienta-Autar 4.2 [6].	176
Tabla 7-16 Propiedades de material M. Stuart [136].	177
Tabla 7-17 Dimensiones de análisis para problema de ejemplo M. Stuart [136].	177

Tabla 7-18 Comparación de predicción teórica de módulos elásticos con datos experimentales de M. Shuart [136].	178
Tabla 7-19 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Pipes & Cole [137].	180
Tabla 7-20 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Pipes & Cole [137].	180
Tabla 7-21 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Pipes & Cole [137].	181
Tabla 7-22 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Pipes & Cole [137].	181
Tabla 7-23 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Kawai [139].	183
Tabla 7-24 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Kawai [139].	184
Tabla 7-25 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Kawai [139].	184
Tabla 7-26 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Kawai [139].	186
Tabla 7-27 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Taniguchi [140].	187
Tabla 7-28 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Taniguchi [140].	188
Tabla 7-29 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Taniguchi [140].	188
Tabla 7-30 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Taniguchi [140].	189
Tabla 7-31 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Jauregui et al. [141].	190
Tabla 7-32 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Jauregui et al.[141].	191
Tabla 7-33 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Jauregui et al.[141].	191
Tabla 7-34 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Jauregui et al. [141].	192
Tabla 7-35 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales García et. al [142].	193
Tabla 7-36 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Virginia et. al [142].	193
Tabla 7-37 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Virginia et. al [142].	194
Tabla 7-38 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Virginia et. al [142].	194

Tabla 7-39 Configuración de paneles y ángulos de corte de probetas.....	195
Tabla 7-40 Tabla de valores de resistencia de laminados compuestos de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación C. T. Sun Edge Effects [128]. El esfuerzo de fallo final es derivado de la fuerza de fallo final y el área transversal del material analizado.	195
Tabla 7-41 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial C. T. Sun Edge Effects [128].....	196
Tabla 7-42 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de laminado C. T. Sun Edge Effects [128].	197
Tabla 7-43 Tabla de valores de resistencia de laminados compuestos de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Sun y Oplinger [110]. El esfuerzo de fallo final es derivado de la fuerza de fallo final y el área transversal del material analizado.	199
Tabla 7-44 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Sun y Oplinger [110] para laminados de 6 capas.	200
Tabla 7-45 Dimensiones de material de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Sun y Oplinger [110] para laminados de 8 capas.	200
Tabla 7-46 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de laminado Sun y Oplinger [110].....	201
Tabla 7-47 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Ataabadi [143] para laminados de 8 capas.	204
Tabla 7-48 Dimensiones de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Ataabadi [143] para laminados de 11 capas.	205
Tabla 7-49 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de laminado Ataabadi [143].	205
Tabla 7-50 Propiedades de material de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Martínez [144] para laminados de 2 capas.	206
Tabla 7-51 Dimensiones de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Martínez [144] para laminados de 8 capas.	207
Tabla 7-52 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de laminado Martínez [144].	207
Tabla 7-53 Comparativa Fallo Inicial a Fallo Final CT SUN [128] [0/90/45/-45]s	208
Tabla 7-54 Comparativa Fallo Inicial a Fallo Final CT SUN [128] [7.5/-82.5/52.5/-37.5]s	208
Tabla 7-55 Comparativa Fallo Inicial a Fallo Final CT SUN [128] [15/-75/60/-30]s	209
Tabla 7-56 Comparativa Fallo Inicial a Fallo Final CT SUN [128] [22.5/-67.5/67.5/-22.5]s	209
Tabla 7-57 Comparativa Fallo Inicial a Fallo Final CT SUN [128] [67.5/-22.5/-67.5/22.5]s	210
Tabla 7-58 Comparativa Fallo Inicial a Fallo Final CT SUN [128] [75/-15/-60/30]s	210
Tabla 7-59 Comparativa Fallo Inicial a Fallo Final CT SUN [128] [82.5/-7.5/-52.5/37.5]s	211

Tabla 7-60 Comparativa Falo Inicial a Falo Final CT SUN [128] [90/0/-45/45]s211

Capítulo 1. Introducción

1.0. Introducción

El uso de materiales compuestos en aeronaves de uso comercial logra un ahorro de peso gracias a la alta proporción de resistencia-peso presente en estos materiales. Lo que se ve reflejado en ahorros de más de un 20% en economía de combustible [1] y una equivalente reducción de emisiones contaminantes sin incluir el potencial aumento de ciclos de vida útil de una aeronave. Esto los vuelve una área de inversión con alto ímpetu económico que crece día a día [2].

Hoy en día el uso de materiales compuestos sigue diversificándose en conjunto con las distintas aproximaciones de estudio y técnicas de caracterización. Ejemplo de ello es el Boeing 787, el cual hace uso de un 50% de material compuesto en su estructura [3], [4], marcando un precedente en el futuro de la manufactura de aeronaves que se apoyan en el uso de materiales avanzados (como lo son los materiales compuestos) para mantener la competitividad y aumento de las eficiencias de vehículos de transporte aéreos. Ejemplo de esto lo podemos encontrar en el Boeing 777x [5], cuyo larguero principal, componente estructural vital del ala, está construido de materiales compuestos de manera similar a su antecesor Boeing 787.

Además de las características elásticas y de resistencia individuales, la combinación de materiales, permite el aprovechamiento combinado de las propiedades de diversos materiales, obteniendo ventajas como: mejor resistencia a fenómenos causados por el medio ambiente tal como la corrosión, el contar con una alta resistencia a diferentes cargas, así como a la fatiga [6] y fenómenos de endurecimiento o agrietamiento típicos en metales, lo que hace de los materiales compuestos sean grandes candidatos para desarrollo y manufactura de componentes mecánicos o estructurales en casos específicos.

Sin embargo, las altas ventajas mencionadas y el continuo crecimiento en el uso de estos materiales también vienen con dificultades propias. Al ser estos materiales muy diversos se cuenta con menor conocimiento si los comparamos con los materiales metálicos ya clásicos en la industria. El comportamiento y modos de falla que se pueden presentar en los materiales compuestos son más diversos por lo que requieren de un estudio más detallado.

Esta investigación trata del análisis matemático y análisis de datos experimentales en el desarrollo de herramientas matemáticas para la aproximación del comportamiento elástico y resistencia presente en los materiales compuestos laminados de uso aeroespacial.

Entre estos materiales destacan principalmente aquellas láminas y laminados compuestos de fibras unidireccionales cubiertos de matriz polimérica. Estos son de alto uso en la industria aeroespacial y automotriz comercial. Para entenderlos mejor se hace uso de distintas aproximaciones tales como conceptos micromecánicos como medio de homogenización de las características y el comportamiento de estos materiales, los cuales auxilian en la selección de materiales compuestos de interés.

Al ser los materiales compuestos de fibra unidireccional un material con comportamiento complejo debido a su morfología, la forma de análisis elástico clásico de materiales denominados “isotrópicos” deja de ser un medio viable de aproximación a su comportamiento. Los materiales compuestos laminados, debido a su dependencia y

variabilidad direccional denominada “ortotropía” (un tipo de anisotropía), requieren una descripción más profunda de su comportamiento.

Además de esto, la variabilidad de manufactura y configuraciones de material compuesto posibles permite el uso individual o combinado de láminas de fibras con direcciones de fibra a distintos ángulos de giro (0, 15, 30, 60, 90 grados); del conjunto de láminas apiladas (laminado) se puede obtener un mejor comportamiento elástico y de resistencia es el que se selecciona para una aplicación específica.

No obstante, es esta misma variabilidad en la manufactura la que aumenta el nivel de complejidad del comportamiento elástico promediado en un laminado. El laminado resultante, es uno altamente dependiente de la dirección, de la combinación de materiales seleccionados, de los ángulos de dirección de las láminas seleccionadas, del tipo de carga aplicada y del tipo de imperfecciones que se pudiesen llegarse a presentar (fibras rotas o vacíos). Como resultado, se pueden ocasionar distintos tipos y categorías de falla en el laminado compuesto; afectando negativamente el tiempo de vida de un componente, si no es que ocurre un fallo drástico.

Los materiales compuestos, además de características elásticas y de resistencia mejoradas, a su vez cuentan con debilidades producto de la dirección de sus fibras, su forma de trabajo (tensión y compresión) y manufactura. Cabe destacar que la forma de reaccionar a las cargas por el laminado es dependiente de la configuración de este, lo cual puede causar fallas variadas que son específicas de cada una de las capas del laminado. Esta dependencia direccional de resistencia hace necesario el uso de matemáticas específicas para su análisis que hacen uso de la transformación de esfuerzos y de matrices elásticas. También se debe de considerar el uso de criterios de ruptura anisotrópicos para generar sea un método o herramienta robusta de análisis de materiales.

El estudio a laminados compuestos se logra por medio de la teoría de laminados en materiales, permitiendo el aseguramiento de la resistencia del compuesto a través de la evaluación por distintas teorías de fallo y envolventes. Esto logra la aproximación a los límites del fallo verdadero del material con los datos obtenidos teóricamente bajo configuraciones específicas de carga, permitiendo asegurando su vida útil con seguridad y funcionamiento estructural.

1.1. Problemática

El uso de materiales compuestos en el diseño de componentes estructurales aeroespaciales es un fenómeno en crecimiento debido a las características mecánicas que ofrecen llegando a igualar o mejorar la de los materiales convencionales (resistencia, peso entre otras). No obstante, la infinidad de combinaciones y configuraciones posibles generan un problema en términos de análisis, ya que el cambiar uno solo de sus componentes constitutivos o dirección de las láminas cambia las propiedades mecánicas y su tendencia al fallo.

Como resultado de esta complejidad los ingenieros tienen que buscar la configuración óptima, para la aplicación específica que se busca, dando cumplimiento a las condiciones de diseño y de seguridad. Esto implica un alto consumo de tiempo y de pruebas de validación. Aunado a esto la manufactura de los materiales compuestos sigue siendo considerada un proceso artesanal, lo que agrega un factor de riesgo extra. Estas complicaciones directamente afectan su análisis, lo cual requiere de distintas aproximaciones de solución considerando distintos parámetros en conjunto de diversas teorías de falla, los cuales se vean reflejadas en factores de seguridad aceptables.

Por lo que una efectiva aproximación del estudio de estos materiales es a través de una herramienta computacional que evalúe los estados de esfuerzos de los materiales compuestos con el uso de diversas teorías de falla. De este modo se optimiza una primera aproximación al diseño; por medio del enfoque en la respuesta de resistencia y del comportamiento de los materiales constituyentes individuales y en conjunto.

1.2. Justificación

En la industria aeroespacial, los materiales compuestos se han situado como una importante área de inversión y crecimiento debido a la capacidad de creación de componentes estructurales de alta resistencia en comparación a su peso, una disminución en el peso se refleja en la eficiencia de combustible, por nombrar unos ejemplos. La consolidación del uso de los materiales compuestos en los últimos años es producto de las múltiples ventajas que ofrecen. Esto se debe a que los distintos materiales usados para crear los materiales compuestos cuando trabajan en conjunto llegan a adquirir mejores propiedades mecánicas que los materiales de uso estándar. No obstante, que estos sean formados por diversos materiales, aumenta la complejidad de su estudio; ya que sus comportamientos pueden variar en función de su morfología y la aplicación. Esto, en conjunto de las variables de manufactura pueden generar fallos que afecten directamente la integridad y vida de los componentes. Dada la complejidad física de los materiales compuestos el uso de una herramienta teórica que considere los diversos laminados y sus comportamientos (ortotrópicos/anisotrópicos), funge como auxiliar en la descripción de sus comportamientos. Esto ayuda a conocer las potenciales respuestas del material a diferentes cargas de trabajo, el uso de dicha herramienta justifica su uso como medio para la evaluación de diseños y selección de una configuración de las láminas óptima. Con esta herramienta se estimaría el error generado entre la predicción teórica numérica y lo experimental, ahorrando tiempo en el proceso de diseño y análisis debido a que funge como auxiliar en el suministro de información para proyectos como el crecimiento de daño y la propagación de grietas en el estudio de fallos de materiales compuestos, presentando de manera gráfica su comportamiento y teorías de falla que describen la resistencia de materiales compuestos. De igual forma se podrá utilizar con fines educativos y de investigación.

1.3. Hipótesis

Se puede predecir el comportamiento de esfuerzos de manera intra e interlaminar con una variación del 15%, basándose en el comportamiento micro y macro mecánico de los materiales compuestos, usando distintas teorías de falla.

1.4. Objetivo General

Desarrollar un estudio matemático-computacional por medio del desarrollo de un programa de cómputo para obtener la descripción del comportamiento de materiales compuestos, bajo distintas condiciones de carga y configuraciones de fibras (dirección de la fibra o diversos materiales), tanto en lámina como en laminados, desde el punto de vista de la macro y micromecánica. Validando los resultados teóricos con datos de pruebas experimentales.

1.5. Objetivos específicos

Para lograr el objetivo general una serie de objetivos específicos son desarrollados y se nombran a continuación:

- Identificación de los materiales constitutivos y propiedades mecánicas.
- Comportamiento de los materiales compuestos (isotrópicos, anisotrópicos, ortotrópicos y variantes dependientes de configuraciones variables de laminados).
- Identificar la teoría de lámina.
- Identificar la teoría de laminado.
- Identificar las teorías de falla.
- Desarrollar códigos sencillos para láminas y laminados.
- Desarrollo de código complejo para láminas y laminados.
- Desarrollar código de programación, estudio de matrices (matriz elástica [S] y la matriz en teoría de laminados compuestos A-B-D).
- Comparativa de datos con pruebas en materiales compuestos.
- Pruebas diversas de validación.

En base a estos objetivos se genera el protocolo de tesis que se desarrolla más adelante. En el Capítulo 3 se desarrollan las bases de ciencia de materiales para materiales compuestos, en el Capítulo 4 y 5 se desarrollan las bases matemáticas de análisis elástico y de fallo en materiales compuestos, en el Capítulo 6 se desarrolla la metodología de análisis y generación de herramienta y en el Capítulo 7 se muestran y discuten conclusiones.

Capítulo 2. Antecedentes

2.0. Introducción a los antecedentes

El estudio de las estructuras es una de las áreas de la investigación científica más viejas en existencia. Actualmente las aplicaciones de la ciencia estructural se enfocan en construcción de aparatos y estructuras bajo principios de resistencia en materiales, enfocados en reducir peso, emisiones contaminantes y que sean autosustentables.

A través de generaciones de civilizaciones, sabios, masones, arquitectos, biólogos, filósofos, exploradores y científicos, han estudiado estructuras en ocasiones de manera paralela o conjunta. Biólogos, exploradores y artistas con notas y dibujos de especies de animales y su estructura fisiológica^I. Masones y constructores en la creación de refugios, vehículos, monumentos, puentes y edificios junto del conocimiento técnico de materiales necesario para ello^{II}. Filósofos, sabios y científicos estudiando el funcionamiento de materiales, llegando a conclusiones útiles sobre su naturaleza^{III}.

Con la llegada del pensamiento matemático, físicos y matemáticos generaron progreso más estable y documentado como el estudio de la deformación de materiales, la diferencia del comportamiento plástico y elástico, la teoría atómica y los tipos de enlaces químicos en metales, polímeros y cerámicos los cuales sirven de base para el desarrollo, uso, manufactura y aprovechamiento de materiales que crece continuamente.

Así, la ciencia de las estructuras pasa de ser inicialmente una superposición y entrelazado de conocimientos generales en biología, matemática y filosófica, a lo que es hoy en día: una ciencia madura de aplicaciones ingenieriles y de construcción con resultados predichos en bases y conceptos matemáticos para la caracterización de comportamiento de materiales, métodos de análisis por medio de la mecánica de materiales, mecánica del medio continuo, métodos clásicos de análisis macromecánico, análisis micromecánico, a hoy en día con métodos numéricos por medio del elemento finito, y el análisis estructural moderno.

2.1. Metales, herramientas y máquinas

Con el desarrollo del conocimiento, técnicas, tecnologías y experimentación, el ser humano pasa de ser un hombre primitivo dependiente de los cambios de la naturaleza, a un ser que transforma la naturaleza a sus necesidades. La obtención de materiales para uso como herramienta comunicó al ser humano el poder aprovechar y entender a los materiales y sus posibles aplicaciones, sean estos materiales naturales o materiales procesados por el hombre con novedosos usos en función de la necesidad de fuerza, resistencia, durabilidad y dureza.

Con el procesamiento de metales y su refinamiento, el ser humano encontró usos los cuales diferían notablemente de los materiales naturales (madera, piedra, pieles, cerámicos primitivos). Como resultado se obtuvo su uso en aplicaciones cada vez más robustas como

^I Distintos biólogos entre ellos Charles Darwin, Alfred Wallace, así como el polímata Leonardo Da Vinci.

^{II} Arquitectos y masones del mundo antiguo; griegos, egipcios. Obras arquitectónicas del mundo antiguo y moderno como la catedral de Colonia, Duomo di Milano, el primer puente de hierro “The iron bridge”.

^{III} Robert Hooke, Leonhard Euler, Thomas Young.

herramientas bélicas en la edad del bronce, herramientas de ganadería, vehículos, construcciones, herramientas de construcción o el diverso uso de metales y el crecido procesamiento que se dió a lo largo de la primera revolución industrial.^{IV} Dibujo ilustrativo de una de las primeras máquinas de tejer se muestra en la Figura 2–1.

El avance en química ha permitido el procesamiento de distintos y nuevos materiales para usos cada vez más especializados con de altos requerimientos de fuerza o resistencia a altas cargas que ha llevado a su uso optimizado, donde predomina el uso de maquinaria, uso de aleaciones, máquinas para fines de transporte, construcción, y manufactura en general.

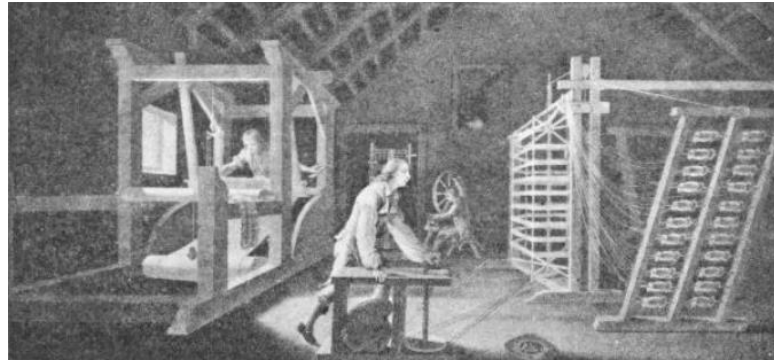


Figura 2–1 Ilustración de una de las primeras máquinas de tejer. [7]

2.2. Materiales y modelos matemáticos

El crecido uso de nuevos materiales ha traído como consecuencia la necesidad de su estudio, creando ramas altamente especializadas de la ciencia de las estructuras y sólidos que se dedica al estudio de deformaciones internas de materiales bajo acción de fuerzas. [8]

Estas áreas de estudio son los fundamentos en la ciencia de la ingeniería aplicada. Con ella se describe de manera cuantitativa a los materiales, basándose en conceptos de elasticidad y resistencia de materiales sólidos representados a través de desplazamientos, deformaciones, esfuerzos, energía elástica (potencial), o en su caso plástica, entre otras formas de energía interna microscópica en un sistema sólido [9, p. 3].

A través de años, distintas aproximaciones de estudio matemático de los fenómenos descritos en el párrafo anterior se han presentado; así como la interdependencia de sus parámetros. Al trabajar en conjunto, por medio de estos parámetros se alcanza una descripción más acertada de los criterios de deformación de los materiales, el soporte de cargas o su punto de ruptura/fractura.

Estas aproximaciones son las diversas teorías y técnicas de análisis que han sido formuladas por físicos/científicos en elasticidad y resistencia de materiales. De este modo se estudian los posibles estados de energía interna en sólidos deformables que relacionan su

^{IV} Gran Bretaña a mediados de los 1700 en manufactura de metales, herramientas, textiles, máquinas de vapor.

resistencia, y que es dependiente del tipo de material, geometría, microestructura y la manera en la que las cargas se distribuyen internamente.

El estudio de la elasticidad data a tiempos de Galileo Galilei en sus experimentos y notas, pero más formalmente se considera comenzando en 1678 donde Robert Hooke [10] planteó la relación lógica en forma de oración “*Ut tensio sic vis*” (a la extensión la fuerza), que refiere al resultado de su experimentación con resortes donde dedujo la ley de proporcionalidad elástica. En ella describe la relación que existe entre la deformación geométrica de un cuerpo y la fuerza aplicada bajo la expresión conocida “ $f = kx$ ” [10].

A mediados de 1700, Leonhard Euler y Jacob (James) Bernoulli [11] aportaron avances en sus estudios de “*elastica theory*” y temas afines como “*The theory of vibrations*”, describiendo las deflexiones de líneas elásticas de estructuras así como los comportamientos de vibraciones en varillas por medio de fundamentos elásticos [11].

A inicios de 1780, Thomas Young menciona las propiedades de proporción en deformaciones elásticas de objetos sólidos, en sus lecturas “*A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts*”. En ella habla de fenómenos físicos entre los que destaca la descripción de distintos tipos de maquinaria y producción de materiales donde el uso de fuerzas genera cambios en su forma [12, pp. 169–180].

Cerca de 1820, Augustin-Louis Cauchy formuló bases matemáticas entre las cuales aportó en el área de análisis tridimensional para el estudio de medios continuos [13]. Entre sus aportes se tiene uno de los más relevantes a la ciencia de la elasticidad donde trabaja con matemáticas del equilibrio estático, movimientos de superficies elásticas, y las fuerzas que se trabajan en ellas representadas en sus componentes. De aquí llega al uso del *tétraèdre* (tetraedro) del cual deduce las ecuaciones de elasticidad y componentes de esfuerzo del “Tensor de Cauchy”, que relaciona presiones con fuerzas en ejes tridimensionales [14].

Alrededor de 1850 mientras Inglaterra se encontraba en la primera revolución industrial, Eaton Hodgkinson [15], investigador experimental en resistencia de materiales realizaba pruebas con hierro fundido y nuevos materiales derivados del hierro que en esa época eran creados. De sus experimentos estudió la flexión y valores de resistencias últimas de compresión y tensión de estos materiales. Esto tendría gran influencia en el futuro del diseño mecánico.

En 1870, Jean-Victor Poncelet [16], en su libro de “*Introducción a la mecánica industrial*”, menciona los parámetros que influyen en la resistencia de materiales, usando conceptos como el tiempo, intensidad de la carga y el esfuerzo aplicado en materiales con geometrías y propiedades distintas de fines industriales, mencionando conceptos de degradación de material que hoy se conoce como fatiga.

Alemania se une a los esfuerzos de investigación de sus países vecinos y Julius Weisbach [17], presenta su trabajo sobre técnicas de cálculo estructural y usa la teoría de máximo esfuerzo como base de la selección de dimensiones seguras para partes mecánicas.

Los estudios de Poncelet y Cauchy fueron continuados por el matemático Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, al análisis de esfuerzos y teorías emergentes de la época. Al

mismo tiempo el científico Simeón Denis Poisson junto a sus estudios de vibraciones de barras obtuvo descripción de la elongación lateral de barras finitas que aportó solución a problemas prácticos ingenieriles con conceptos matemáticos que son aún usados hoy en día [18, Ch. 5].

2.2.1. Estudio de fallo, concentración de esfuerzo y fractura

El paradigma de estudio en materiales fue renovado con el uso de las matemáticas y se establece formalmente una metodología confiable, eficaz y cuantitativa para las construcciones de ingeniería práctica. El uso de la matemática, de la elasticidad y cálculo estructural se vio altamente desarrollado y difundido de manera internacional, junto con la ciencia de materiales para usos prácticos industriales, gubernamentales, militares y desarrollo que continua hoy en día.

George Green[18, p. 218], [19], [20] trabajó con las propiedades de materiales sólidos y dedujo que la ecuación que describe la deformación de elementos de un sistema debe ser una función homogénea de segundo grado con seis componentes; $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$.

De manera paralela a los estudios de la matemática de la elasticidad, los estudios en ciencia de materiales y metalurgia, en 1864 David Kirkaldy [21], realiza estudios experimentales en calderas de alta presión y el uso de distintos materiales (acero y hierro), determinando que las características inherentes de cada materiales los volvían propicios para ciertos tipos de construcción, haciendo hincapié en la naturaleza de la ruptura quebradiza de estos materiales.

Científicos estudiaron la importancia de fracturas en materiales, tales como W. D. Biggs [22], quien consideró la influencia del tamaño en una estructura en la fractura de la misma. En 1907, el matemático alemán y profesor de mecánica Karl Wiegardt derivó el campo de esfuerzos alrededor de la punta de una grieta [22], obteniendo el orden correcto de la singularidad que se generaba.

Bertram Hopkinson [23] hace mención de las características de los materiales dúctiles y quebradizos y la aparición de “fracturas misteriosas” representativas de un material quebradizo generadas en materiales dúctiles, mencionando la importancia de continuar estudios en concentraciones de esfuerzos en imperfecciones como agujeros y grietas.

En 1913 el ingeniero Charles Inglis [24], académico e ingeniero civil inglés, en base a la indicación de B. Hopkinson de la necesidad de mayor investigación en grietas, estudió los efectos de defectos en estructuras, donde formuló la matemática necesaria para el análisis de esfuerzos en irregularidades/grietas de estructuras a través de coordenadas elípticas. Esto abrió paso a una nueva gama del estudio de concentraciones de esfuerzos en imperfecciones de materiales y su influencia en la resistencia de una estructura, ahora en lenguaje matemático.

En 1920, el ingeniero Alan Arnold Griffith [25], con apoyo del trabajo de Inglis, estudió los límites prácticos de la teoría de la elasticidad con pruebas experimentales en materiales cristalinos, encontrando una mejor descripción de resistencia de materiales, ahora siendo ésta no en términos de esfuerzos promedios en una estructura, sino en términos de energía

elástica [22], la cual, en conjunto con el estudio de imperfecciones preexistentes en sólidos, son criterios de avance de rupturas en el estudio de la ahora llamada *mecánica de fractura*.

En 1934, Egon Orowan [26], físico y metalúrgico Húngaro-Inglés, trabaja con conceptos de plasticidad y fallas debido a sus estudios en irregularidades de materiales, haciendo continua mención a la idea en la que la concentración de esfuerzos en irregularidades (grietas) preexistentes en materiales ayudan a su falla prematura [27].

Años después, George Rankine Irwin [28], logró hacer que la ciencia de fractura se estableciera como una eficaz herramienta en la estimación de la resistencia de componentes críticos, través del uso de conceptos como plasticidad, dinámica, análisis fractográfico y nuevos métodos de prueba. Entre sus aportes, en 1948 menciona la necesidad de ajustes la teoría de Griffith para materiales cuasi-quebradizos y en 1957, deriva una ecuación de crecimiento de grieta a partir del campo de esfuerzo delante de la grieta dominado por un factor de intensidad de esfuerzo “K”, trabajando por primera vez con el término “razón de liberación de energía de deformación”[29].

En 1953 Rivlin R. S. y Thomas A. D. [30], estudiaron la ruptura de caucho vulcanizado generando criterios para propagaciones de fracturas similares a las generadas por Griffith, llegando a valores de razón de liberación de energía de deformación mostrando la relación entre el valor crítico de esta y la energía de ruptura, demostrando la importante influencia de estos principios de estudio en la de resistencia de componentes y materiales.

Es en el lapso del comienzo de la revolución industrial hasta la formalización del estudio de fracturas en el diseño mecánico que el historial de incidentes de falla de estructuras debido a propagación de grietas (acompañado con fenómenos como fatiga y concentración de esfuerzos) cada vez más se acumulaba y era más evidente en elementos estructurales como navíos y aviones. Durante la segunda guerra mundial era común el fallo de embarcaciones de metal soldado fallaron debido a fractura quebradiza (generada por el proceso de soldado con los cambios de temperatura) debido a concentraciones de esfuerzos localizados en las orillas de las mamparas [31]. Por otro lado, en 1954 la manufacturera de aviación británica *De Havilland* [32] con su construcción del primer jet comercial “De Havilland Comet” sufrió accidentes por fatiga y consecuente agrietamiento del metal del fuselaje debido a los ciclos de presurización en este.

El comienzo de estudio de la mecánica de fractura no determinó la erradicación de este fenómeno y otros ejemplos son las fallas por fractura de material en eventos lamentables como la falla de la plataforma extractora de petróleo Alexander L. Kielland en 1980, y en 1998 un tren de alta velocidad que viajaba de Múnich a Hamburgo que se desvió debido a la ruptura en una rueda que generó aún más daños que colapsaron un puente, tomando la vida de 101 víctimas humanas.

Distintas aproximaciones a la estimación de comportamiento de fracturas y fallos en materiales desde entonces han sido generadas a distintas escalas; la separación de planos atómicos, microestructura de un material, los granos en un material policristalino o las fibras en un material compuesto [33]. Investigadores de física, materiales, metalurgia y

químicos han aportado distintos métodos de descripción de fallo desde distintas áreas de la ciencia y sus interrelaciones.

Un ejemplo es en 1966, F. M. Burdekin y D. E. W. Stone [34], trabajaron con mecánica de fracturas usando conceptos de desplazamiento en grietas en estudio de la cedencia donde la mecánica de fractura lineal elástica deja de ser válida, trabajando en condiciones combinadas elástico-plásticas por medio de los conceptos de esfuerzos, desplazamientos, largo de grieta y el concepto de “desplazamiento de abertura de grieta” extendiendo la mecánica de fractura convencional a casos de estudio con efectos de plasticidad.

Otro ejemplo es en 1967, el reporte técnico por A. S. Tetelman [35] de Stanford, trabajando junto con NASA describe como el exceso de Hidrógeno puede difundirse en aceros y auxilia la aparición de huecos o microgrietas que pueden crecer y ayudar a la fractura de una estructura debido a las condiciones locales del material y sus características cristalinas, causando la pérdida de ductilidad localizada en componentes críticos.

En general, el estudio de fracturas y concentraciones de esfuerzo se obtiene a partir de que es un fenómeno que promueve los esfuerzos en discontinuidades, los cuales pueden presentarse en muchos tipos de materiales (metales, polímeros, materiales compuestos, etc) y a distintas escalas. Su estudio dependerá del material, de la geometría del componente de interés y de la escala en la que se trabaje.

2.2.2. Desarrollo de elasticidad anisotrópica

La derivación de formulaciones y modelos comportamiento elástico en materiales descritas en secciones anteriores es un área de continuo desarrollo. Hoy en día, dependiendo de la aplicación, un estudio detallado de materiales puede necesitar de escalas cada vez más pequeñas llegando al uso de formulaciones en base a propiedades electrónicas de sólidos entrando a temas de la *física del estado sólido*. Esto puede verse reflejado en el libro “Electronic Basis of the Strength of Materials” por John Gilman [36], donde se hace referencia de los parámetros que influyen en el comportamiento de materiales no solo de una perspectiva clásica, sino desde una perspectiva de física moderna.

Sin embargo, el estudio de la elasticidad y resistencia de materiales no fue un camino directo al estado de su estudio moderno. El estudio de materiales comenzó como una aproximación de descripción del comportamiento en materiales a una escala macroscópica, como los presentes en metales y materiales genéricos de construcción comúnmente isotrópicos, esto es, las mismas características elásticas en todas las direcciones de estudio.

No todos los materiales mantienen las mismas proporciones de deformación en todas sus direcciones (como la madera y los cristales metálicos en el estudio de metalurgia). Por años existió discusión acerca de cuál es la manera correcta de trabajar con la elasticidad, así como de cuál sería la cantidad correcta de módulos elásticos necesarios para describir un material [37]. Al ser paralelo el modelado matemático de la elasticidad de materiales con experimentación, validación y estudios de su microestructura, se denota la necesidad de extender el modelado elástico a un modelado no limitado por condiciones isotrópicas.

La idea de dependencia direccional de elasticidad de materiales (anisotropía) y de diversas escalas de estudio en materiales no es nueva; Timoshenko en 1951 menciona como los materiales estructurales en la realidad “no satisfacen la suposición de homogeneidad y distribución continua” ya que materiales como el acero están constituidos de diversos tipos y orientaciones de cristales que se aprecian bajo microscopio. Sin embargo, la influencia de la anisotropía de sus cristales se desvanece debido al minúsculo tamaño y la distribución direccional aleatoria de grano metálico que se promedia a lo largo del material, cuando se estudia a escalas macroscópicas [38].

La cantidad correcta de números elásticos en un material elástico anisotrópico generalizado, ha llegado al uso de 21 o 15 constantes [37]. Datos experimentales obtenidos sobre las propiedades elásticas en cristales por W. Voigt [39] no coincidían con el número de constantes elásticas descritas por Cauchy [14] (15 constantes), por lo que en 1954, M. Born [40], al estudiar red cristalinas en materiales, discute que, a menos que las “relaciones de Cauchy” de simetría se mantengan en materiales, la ley de Hooke generalizada contiene 21 constantes independientes, cimentando las bases del modelado, caracterización y estudio de materiales avanzados, en ambas escalas microscópica y macroscópica de materiales anisotrópicos.

No obstante, antes del estudio en elasticidad anisotrópica de cristales por M. Born [40], la matemática de elasticidad anisotrópica ya era aplicada de manera práctica (sin bases derivadas de la microscopía de cristales), por medio de anisotropía macroscópica definida

de 21 constantes. Entre los trabajos que destacan se encuentran los llevados a cabo por S. G. Lekhnitskii [41] en respecto al estudio y aplicaciones en materiales elásticos anisotrópicos, donde trata con la derivación de la elasticidad en un cuerpo plano anisotrópico y el uso de estas bases matemáticas en el estudio elástico de placas, barras, vigas anisotrópicas y sus distribuciones de esfuerzos, las cuales eran aplicables a materiales como la madera, material comúnmente utilizado en barcos y aviones, cuya respuesta elástica tiende a variar entre la dirección axial, y transversal debido al direccionamiento de las fibras de lignina, como se muestra a distintas escalas en la Figura 2–2.

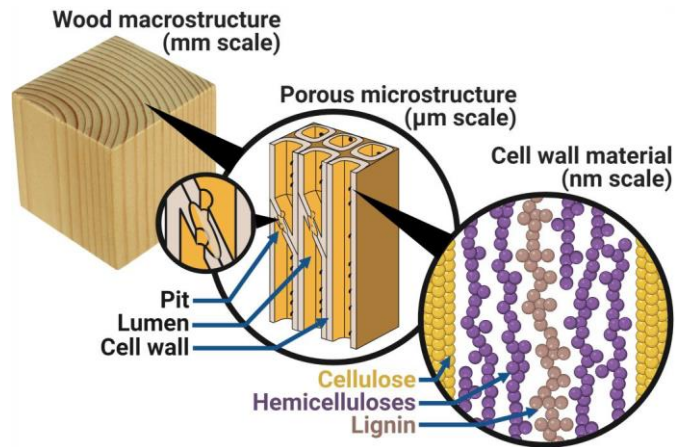


Figura 2–2 Vista simplificada de la estructura de madera a distintas escalas [42].

El desarrollo de estudios del comportamiento complejo de materiales continuó internacionalmente, y años más adelante, científicos como J. C. Halpin [43] y Stephen W. Tsai, manejaron la elasticidad, y diversas aproximaciones de resistencias en materiales anisotrópicos, entre los cuales se encuentran los materiales compuestos.

2.3. Tenacidad y mecánica de fractura

El fallo y fractura es un fenómeno que se encuentra en todos los tipos de materiales, sean metálicos o materiales compuestos. En 1850, la deformación de materiales dúctiles y quebradizos y sus diferencias eran claras debido a sus modos de fallo. En 1845, W. J. M. Rankine [44], habla de la falla de ejes de tren, e hipotetiza el fallo mecánico debido al “gradual deterioro”, que comienza como pequeñas fisuras que se extienden y originan de las zonas de abrupto cambio de grosor entre la unión del eje y el cuerpo de vagones. Esto es ejemplo de cómo los conceptos de fatiga, concentración de esfuerzos, ruptura por grietas, y diferencia entre falla dúctil o quebradiza en materiales interactúan entre sí.

Griffith [45] estudió materiales quebradizos y la influencia de imperfecciones en su ruptura. Su objetivo inicial era demostrar el efecto del tratamiento de superficie en su resistencia (ej. limado, rectificado por abrasión, o pulido), considerando la energía potencial y su influencia en grietas preexistentes y su extensión (negligiendo fuerzas intermoleculares por cuestiones de escala). Los resultados afirmaron la hipótesis de que materiales con menor cantidad de imperfecciones obtienen mayor resistencia. Esto se logró con pruebas en vidrio de óxidos refinados (materiales quebradizos); este comportamiento se sigue observando con las fibras de alta resistencia utilizadas materiales compuestos modernos como fibras de carbono, fibras de vidrio y Kevlar, que, debido a su pequeño diámetro y método de manufactura, las imperfecciones son minimizadas y permite altos valores de resistencia.

Sin embargo, la clasificación quebradiza o no quebradiza de materiales no toma en consideración las propiedades de resistencia a ruptura como “*tenacidad*” (toughness) de materiales no quebradizos, así como los mecanismos de resistencia a propagación de grietas “*tenacidad a la fractura*” que exhiben distintos materiales.

La tenacidad en materiales no quebradizos es una propiedad inherente que describe la capacidad de un material de absorber energía sin fracturarse y se calcula obteniendo el área total bajo la curva del diagrama esfuerzo-deformación que representa la densidad de energía de deformación del material a su ruptura [46] .

Por otro lado, la tenacidad a la fractura, por medio del concepto de *curvas de resistencia a propagación de grietas* (R-curves), influyen en la estabilidad de crecimiento de rupturas por medio de la tasa de liberación de energía elástica G , y su relación con la magnitud de *intensidad de liberación de energía* necesaria para un *crecimiento de fractura inestable* conocido como la tenacidad de fractura G_c [33], la cual cambia de material a material, y describe la resistencia a fracturas de magnitudes distintas.

En materiales dúctiles y tenaces, una vez sobrepasada la resistencia elástica, la tenacidad funciona como un mecanismo de resistencia a ruptura instantánea debido a la deformación plástica que se presenta, lo cual permite que parte de la energía suministrada al material se disipe por medio de deformaciones permanentes microscópicas continuas en el material hasta llegar a su ruptura.

El comportamiento de resistencia a ruptura sea de modo plástico o frágil puede observarse en materiales como polímeros, materiales piezoeléctricos y metales los cuales cuentan con distintos mecanismos que permiten la resistencia mecánica a ruptura, sea esta por medio de

tenacidad o tenacidad a la fractura. Ejemplos de estos mecanismos: en polímeros la resistencia a deformaciones plásticas es obtenida debido a su naturaleza de entrelazado amorfo de cadenas de uniones covalentes moleculares [47], en materiales piezoeléctricos, la presencia de campos eléctricos aumenta su tenacidad de fractura y resistencia a propagación de grietas [48], en metales la ductilidad, el efecto de dislocaciones y mecanismo de endurecimiento por deformación (efecto Petch-Hall, refuerzo de los límites de grano) por deformación plástica [49]. Estos mecanismos sirven como medios de disipación de la energía elástica en forma de deformación plástica dúctil o crecimiento de grietas dentro de la estructura de un material, que permite la no fractura instantánea una vez que el límite elástico del material ha sido sobrepasado.

De los estudios de Griffith [45], es importante mencionar que la Mecánica de Fractura Lineal en forma pura cuenta con el defecto de predecir esfuerzos demasiado altos tendiendo a infinito en la punta de una grieta [50], hecho irreal que no toma en consideración a los fenómenos de deformación plástica. Esto fue solucionado por Irwin [50] “*siempre y cuando que la región plástica en deformación no tome valores muy altos que invaliden el método de sustituir la energía gastada en deformación plástica localizada por tensión superficial como medida de la resistencia del avance de una grieta*”, mencionando la posibilidad de uso de los criterios de Griffith en agrietamiento plástico.

El conjunto de matemáticas de estimación de liberación de energía de ruptura creada por Irwin es lo que ahora se denomina *Mecánica de Fractura Lineal Elástica* (o LEFM, por sus siglas en inglés), la cual tuvo alto impacto ingenieril. Irwin, en su reporte de propagación de roturas de aluminios y aceros de 1956 [45], desarrolla la fórmula de aumento de liberación de energía elástica G (energy release rate) a través de la cual se sugiere que una expansión de grieta inestable sucede cuando G se sobrepasa un valor de energía crítica G_c tenacidad a la fractura de forma similar como un esfuerzo actual en un material donde σ alcanza o sobrepasa un valor máximo de esfuerzo σ_{max} .

Alrededor de 1954 Joseph A. Kies [51], trabaja con manufactura de acrílicos con fines aeronáuticos y la resistencia de estos. Llega a la conclusión que el esfuerzo crítico para un tamaño de grieta depende solamente del producto de la tenacidad de fractura y el módulo de Young $G_c E$, el cual puede ser calculado del esfuerzo aplicado y tamaño de grieta de una prueba. Esto permitió cambiar el estudio de grieta en base a energía a uno de campo de esfuerzos. Irwin relacionó G con los esfuerzos en la punta de la grieta introduciendo el factor de intensidad de esfuerzo $K = \sqrt{G E}$.

De este modo se estableció la Mecánica de Fractura Lineal Elástica como una herramienta con aplicaciones en fatiga, rotura por corrosión, esfuerzo y concurrente investigación de hoy en día. Los modos de fractura posibles en un material son ilustrados en la **Figura 2–3**.

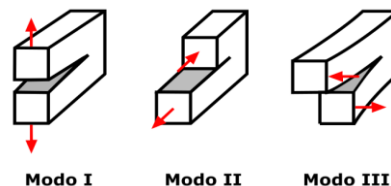


Figura 2–3 Modos de fallo por grieta en un material.

2.4. Nuevos materiales, fibras de alta resistencia y fabricación

Hoy en día los materiales compuestos pueden ser creados con una extensa diversidad de materiales con una vasta gama de propiedades dependientes de la aplicación (elásticas, ópticas, peso, compatibilidad biológica etc.). En la industria aeroespacial destacan los materiales que permiten tener una mayor densidad de rigidez y resistencia permisible en el material sin sacrificar su peso, como se logra con el uso de fibras de alta resistencia sean de carbono (o grafito), fibras de vidrio, o fibras de arámidas como el Kevlar.

En 1933, el ingeniero e inventor estadounidense Games Slayter desarrollo el método de manufactura de vidrio en filamentos, mejor conocido como “lana de vidrio” [52], la cual tuvo gran impacto por sus novedosas aplicaciones y futuras investigaciones.

En 1958, el físico Roger Bacon, trabajando para la *National Carbon Company* fue uno de los primeros en crear fibras de carbono a través del calentamiento de filamentos de Rayon hasta su carbonización [53]. Fue alrededor de 1960 cuando el primer método de manufactura estable de fibras de carbono de alta resistencia y estabilidad fue patentado en Japón por el Dr. Akio Shindo [54], creando fibras carbonizadas a través del precursor poliacrilonitrilo bajo condiciones atmosféricas diversas separadas por cámaras, unas con oxígeno y otros gases inertes a altas temperaturas.

En 1970, la química Polaca Stephanie Kwolek, tenía una serie de patentes en la síntesis, uso de poliamidas y la manufactura de fibras continuas, los cuales serían la base de la manufactura de fibras de alta resistencia como el Kevlar [55], donde se indica que la preparación de fibras alineadas de alto peso molecular inciden en la obtención de características tales como altos módulos de rigidez, alto punto de fusión y una resistencia última alta ideales para uso estructural avanzado.

En cuanto a las distintas resinas que pueden usarse como matriz en materiales compuestos unidireccionales, la creación de resinas epóxicas se atribuye en 1930 a los científicos Dr. Pierre en Suiza y el Dr. Sylvan Greenlee en los Estados Unidos, pero la primera patente registrada fue por el químico Paul Schlack en 1934 en Alemania [56], la cual, habla acerca de la manufactura de resinas de aminas de alto peso molecular y su proceso de manufactura.

2.5. Materiales compuestos: antecedentes y medios de aprovechamiento

La combinación de distintas fases de materiales no es nueva. El uso combinado y concepto de refuerzo de fibras naturales fue utilizado por Israelitas en la manufactura de ladrillos en 1200 B.C. [43], aumentando características como permisibilidad de humedad y resistencia a fractura en comparación a los ladrillos sin refuerzos. Más evidencias existen en la combinación de uso de adhesivos, así como el uso combinado de metales “Damasco” en espadas ceremoniales japonesas.

En 1902 la sociedad francesa Le Carbone [57] patentó la creación de vidrio recubierto por una capa de celuloide, la cual creaba un vidrio que al romperse no permitía que éste se expulsa fragmentado, protegiendo así a posibles usuarios de fragmentos de vidrio peligrosos.

En 1935, los consultantes de la empresa Owens-Corning, Al Simison y Arthur D. Little [58] experimentalmente combinaron lana de vidrio en conjunto con baquelita, creando el primer material compuesto de fibra de vidrio y matriz polimérica, abriendo paso al uso combinado de estos materiales.

Fue en la segunda guerra mundial cuando el uso de laminados de materiales en aeronáutica, en el avión “The Havilland Mosquito” (laminados de madera con resina) da comienzo al uso de materiales compuestos para obtener resistencia y disminución de peso en una estructura aeroespacial [59].

Ya en 1945 la investigación de materiales anisotrópicos, sean naturales (como la madera), o artificialmente generados con diferencias de rigideces flexoras, como los materiales compuestos, eran estudiados en la Unión Soviética [41].

A mediados de 1990 los materiales compuestos se volvieron comunes como reemplazo efectivo de materiales tradicionales. Sus usos iniciales se expandieron en aplicaciones eléctricas, infraestructura y equipos de uso eléctrico debido a sus propiedades aislantes y de mayor resistencia [60].

En 1992 en Escocia, se inauguró el primer puente creado completamente de materiales compuestos en el mundo, en la ciudad de Perthshire, el llamado “Aberfeldy Footbridge”. Foto de este puente se aprecia en la **Figura 2-4**.



Figura 2–4 Puente de material compuesto Aberfeldy. [61]
Foto © Andrew Curtis (cc-by-sa/2.0)

En 1992, W. Krenkel [62] describe la combinación de una fibra de alta resistencia con una matriz cerámica en materiales compuestos de carbono reforzado por carbono, los cuales tienen aplicación como materiales de muy alta resistencia a temperaturas elevadas que han sido utilizadas en transbordadores espaciales, aviones supersónicos, y frenos en aviones comerciales.

Otro ejemplo de combinación de materiales son los materiales compuestos con matriz metálica [63], los cuales permiten el aprovechamiento no solo de las fibras de alta resistencia, sino de la rigidez, dureza y soporte a alta temperatura de metales.

Hoy en día los materiales compuestos tienen un sinnúmero de aplicaciones de ingeniería y manufactura, que van desde ejemplos relativamente sencillos en deportes (palos de golf, bicicletas), hasta manufactura de elementos estructurales en industrias aeroespaciales, automotrices, médicas e ingeniería civil. Cualquier área con necesidad de diseño de elementos de resistencia especializada, peso disminuido, o resistencia a corrosión encuentran una alternativa en ellos.

Una aplicación reciente del uso de los materiales compuestos es el conocido avión 787 Dreamliner, donde más del 50% del material usado son materiales compuestos, principalmente fibra de vidrio y fibra de carbono como se muestra en la **Figura 2–5**. Este cambio logró aumentos en eficiencia de combustible considerables, marcando un paso al futuro de los materiales utilizados en la industria aeroespacial comercial.

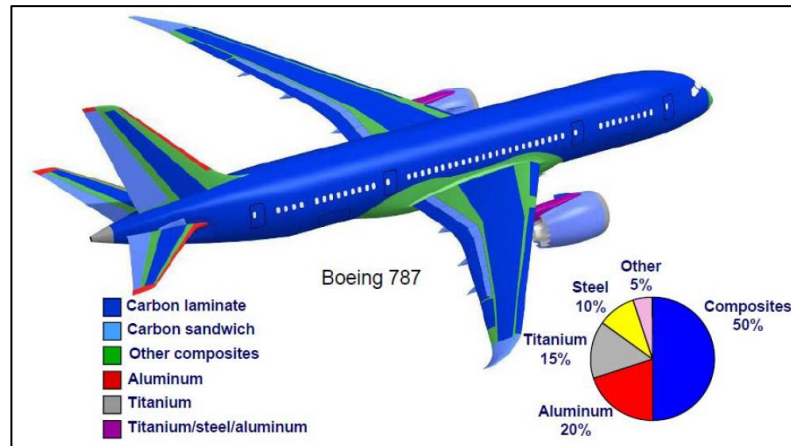


Figura 2–5 Uso de material compuesto en Boeing 787 (Boeing). [64]

2.5.1. Medios de aprovechamiento de materiales compuestos

Los medios de aprovechamiento de los materiales compuestos dependen directamente de las propiedades necesitadas, o deseadas a aprovechar en la manufactura de componentes.

Entre los parámetros generales deseados a aprovecharse de la combinación de materiales se encuentran principalmente el incremento de la *resistencia* del material, aumentar la resistencia al fenómeno *creep*, aumentar la resistencia de *fatiga*, mejora de resistencia a la *corrosión* y *shock térmico* cuando en propiedades de resistencia de materiales [63].

En la industria aeroespacial, la importancia económica del diseñar elementos estructurales de menor peso sin afectar la resistencia de la estructura de la aeronave es lo que ha llevado a su desarrollo y uso en elementos estructurales como largueros, larguerillos, costillas y fuselaje de aeronaves modernas como el 787 de Boeing y jets privados de distintas compañías. Ejemplo de esto se observa en el diagrama de la **Figura 2–6**.

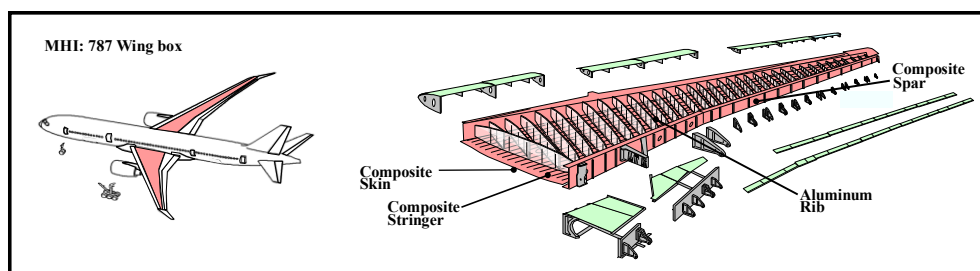


Figura 2–6 Uso de compuestos con fines de resistencia en estructura de ala B787. [65]

Cuando se requiere el aprovechamiento de otras propiedades los objetivos pueden ser con fines funcionales como materiales compuestos para materiales electrónicos, la creación de materiales magnéticos con propiedades especiales, así a como en aplicaciones médicas, la necesidad de alta resistencia a la corrosión, biocompatibilidad [63], materiales con memoria de forma, entre otros.

Un ejemplo del aprovechamiento de materiales con distintas propiedades a las mecánicas es por el creador de la fibra de vidrio Games Slayter [66] quien patenta la idea de la combinación de fibras de vidrio de alta resistencia en junto con una resina como matriz, cuyo uso particular se caracteriza del aprovechamiento que ambos materiales tienen el mismo índice de refracción, permitiendo un material compuesto ser de alta resistencia al mismo tiempo que transparente sin distorsión de la luz que pasa a través de ellos. La ilustración de esta idea se aprecia en la **Figura 2-7**.

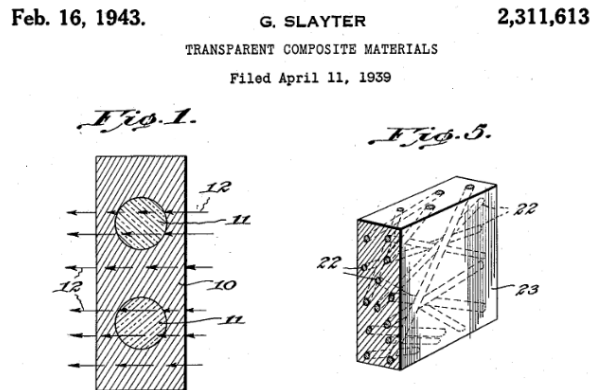


Figura 2-7 Materiales Compuestos Transparentes Patente US2311613A. [66]

Una clara aplicación de estos conceptos y aprovechamiento de las características *visuales* y de *refuerzo estructural* se evidencia en la patente actualmente activa US6889938B1 por Paul S. Nordman [67], donde menciona y registra el método de manufactura del vidrio estructural de la cabina en aviones la cual, además de morfología general, habla de la combinación de una *fibra de alta resistencia transparente* con un *índice de refracción aproximadamente igual al índice de refracción de la matriz*, permitiendo crear un vidrio de cabina frontal tanto estructuralmente resistente, como visualmente transparente, ayudando a la visibilidad de pilotos en aeronaves de forma segura.

2.5.2. Laminados, defectos y vacíos

Como se mencionó, el comienzo del uso de secuencias de láminas de materiales se evidenció en los aviones durante la segunda guerra mundial. De la combinación de materiales en secuencia de láminas o capas surge el uso de materiales laminados con fibras de alta resistencia. El laminado de materiales en construcción de botes compuestos laminados basados en matrices de resinas orgánicas y madera han sido utilizados por muchos años, mientras que el uso de materiales compuestos de fibra de carbono ha tenido crecimiento constante desde los años 1970 [68].

Hoy en día la combinación de materiales laminados puede ser tan variada como técnicamente sea posible, tomando en consideración aspectos como compatibilidad entre materiales y compatibilidad/adhesión de interfaces. Entre los posibles materiales a utilizar se encuentran fibras de vidrio, fibras de carbono, fibras de boro, fibras de aramidas y fibras de silicón [69] en combinación con algún tipo de matriz, así a como con diversas configuraciones de giro de dirección de lámina, donde los ángulos más comúnmente

utilizados son 0, 90, 45 y 30 grados. Ilustración de direcciones de lámina son apreciables en la **Figura 2-8**.

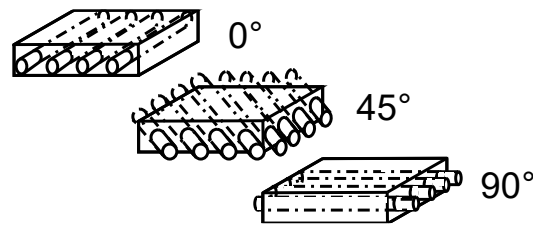


Figura 2-8 Variabilidad de dirección de fibras en láminas de material compuesto.

Sin embargo, la alta posibilidad de variabilidad en materiales, combinación de laminados, sus direcciones, y el tipo de materiales o resinas a utilizar en conjunto a los distintos métodos de manufactura existentes, permiten la creación no deseada de vacíos e imperfecciones en la distribución de lámina-matriz, lo cual tiene afecta negativamente las propiedades elásticas, de resistencia a fractura y delaminación en un material.

En el estudio por Huansong Huang, y Ramesh Talreja [70] se menciona los tipos de defectos posibles en materiales compuestos laminados, los cuales se pueden dividir en 3 principales categorías, sea defectos en fibras, defectos en matriz, o defectos en la interfaz matriz-fibra.

Respecto a vacíos, diversos estudios se han realizado como los mencionados por M. Medikhani et al. [71] para la descripción de la influencia del contenido de vacío en materiales compuestos laminados. La importancia de su estudio se da de la alta incidencia de vacíos dependiente de las condiciones de los métodos de manufactura y el cómo estos afectan negativamente el desempeño de estos materiales.

2.6. Teorías de resistencia y envolventes de fallo

Del estudio del estado elástico y cálculo de deformaciones en materiales debido a cargas externas, surgen también teorías físicas basadas en el estudio dimensional y variabilidad de cargas en materiales, sea en 1, 2 o 3 dimensiones. Estas teorías se dedican a la aproximación de un valor de resistencia en un material o componente dado bajo estados de esfuerzos diversos para predecir su fallo.

La principal diferencia útil entre las distintas teorías de fallo que se han desarrollado se tiene en el tipo de material el cual tratan de predecir su comportamiento de resistencia. Si el material es isotrópico dúctil se utiliza una teoría distinta a si el material es un material isotrópico frágil, debido a la diferencia de resistencias últimas entre las cargas de tensión y compresión. Lo mismo se mantiene cierto cuando el material tiene una naturaleza elástica distinta, donde en materiales compuestos no es completamente correcto hacer el uso de teorías de resistencia basadas en relaciones isotrópicas debido a su naturaleza anisotrópica y modos de fallo específicos del material y viceversa. Dependiendo también de la escala de estudio de material que se maneje.

2.6.1. Teorías de energía aplicables a materiales isotrópicos

Para materiales cuyas características no varían dependiendo de la dirección (isotrópicos), uno de los primeros criterios de fallo del material fue sugerido por Rankine en 1858 donde propuso una teoría para la cedencia de materiales isotrópicos. También, en 1864 Henry Tresca trabajó con una teoría que sugiere fallo si el esfuerzo cortante alcanza un valor determinado [72].

En 1913, una teoría muy conocida es la llamada teoría de distorsión, por Richard von Mises [73], quien, en su trabajo desarrolla una fórmula matemática en el promediado del estado de energía en un sólido debido a fuerzas en tres ejes, describiendo así de forma más precisa la resistencia generalizada en materiales dúctiles policristalinos cuyo fallo predomina debido a energía la energía elástica distorsional, en comparación a teorías anteriores.

Otra teoría, desarrollada por Christensen [74] en 1997, se enfoca en la aproximación de la resistencia a materiales isotrópicos no dúctiles, los cuales, por su naturaleza frágil, difieren en el valor de sus resistencias últimas de compresión y tensión, haciendo uso de la teoría de von Mises en combinación con términos en fractura para la descripción de fallo.

2.6.2. Teorías de energía aplicables a materiales no isotrópicos

Para materiales anisotrópicos y compuestos, cuyas características elásticas varían dependiendo de la dirección de estudio, diversas teorías han sido creadas y aproximadas en relación con su aplicabilidad y su forma de derivación en base a elasticidad anisotrópica. No obstante, teorías sencillas de máximo esfuerzo y máxima deformación como un valor límite son aún aplicables en ciertos tipos de materiales compuestos.

En 1947, R. Hill [75] trabaja con su teoría de resistencia en la cedencia de metales anisotrópicos, donde usando conceptos de potencial plástico de von Mises, lo extiende y adapta al estudio de la tendencia anisotrópica en metales en base a principios anisotrópicos elásticos a nivel cristalino.

En 1966, S. W. Tsai y V. D. Azzi [76] trabajaron con la teoría de resistencia anisotrópica creada anteriormente por Rodney Hill. Esta teoría comúnmente se encuentra bajo el nombre de la teoría de resistencia Tsai-Hill por los aportes de ambos científicos.

En 1967, O. Hoffman [77] desarrolló una teoría de resistencia basada en las formulaciones Mises-Schleicher y Hill, llegando a una fórmula que aproxima el comportamiento de fallo tanto en tensión como en compresión.

En 1970, S. W. Tsai y E. M. Wu [78] modificaron la anterior teoría Tsai-Hill para lograr poder incluir términos que tomen en consideración las diferencias de resistencias últimas de tensión y compresión en materiales anisotrópicos, utilizando tanto términos lineales como cuadráticos.

En 1980, Z. Hashin [79], debido a un análisis en los distintos modos de falla en laminados, formula un set de ecuaciones como un conjunto multicriterio para la aproximación de

modos de fallo en materiales compuestos, permitiendo discernir entre la posibilidad de fallo sea por compresión o tensión, de fibra o matriz en materiales compuestos laminados.

En 1998, A. Puck y H. Schürmann [80] trabajan con un set de categorías de fallo de laminados y la formulación para su aproximación, llegando a resultados favorables en la predicción de fallos por categorías inter-fibra bajo criterios de fallo frágil.

En 2003 C. G. Davila, N. Jaunky y S. Goswami [81] trabajaron con la formulación del modelo de resistencia multicriterio LaRC02, el cual, derivado de criterios de Hashin y Puck, obtiene una predicción a través de diversos evolventes de fallo mostrando una mejoría en aproximación de predicción en los casos de falla por compresión de fibra.

En 2003, C. G. Davila y P. P. Camanho [82] trabajaron con un nuevo modelo de resistencia con un conjunto multicriterio LarC03, esta vez basados en el trabajo de Dvorak en mecánica de fractura, así a como el concepto de plano de acción de Puck, obteniendo predicciones que se correlacionan bien con datos experimentales.

En 2013, S. T. Pinho, C. G. Davila, P. P. Camanho, L. Iannucci y P. Robinson [83] trabajaron con la formulación de un nuevo modelo multicriterio de resistencia LarC04, el cual extendió el estudio multicriterio de fallos en compuestos a uno 3D basados en modelos físicos para cada modo de falla, además de permitir la descripción de comportamiento no-lineal de matrices.

Estas teorías se encuentran entre las que mayor frecuencia de uso tienen por concordar sus valores con resultados experimentales. Sin embargo, entre otras aproximaciones de menor uso relativo se encuentran: Criterio de Franklin, Criterio Stassi D'Alia, Criterio Norris-Mckinnon, Criterio Norris, Criterio Fischer, Criterio Yamada-Sun, Criterio Griffith-Baldwin, Criterio de Chamis, Criterio de Gol'denblat-Kopnov, Criterio de Ashkenazi, Criterio de Huang-Kirmser, entre otros, cuyos usos prácticos *dependen de la naturaleza del material analizado*.

Capítulo 3. Marco teórico: Ciencia de materiales compuestos

3.0. Propiedades mecánicas de los materiales

Los materiales compuestos se conforman de la combinación de distintos materiales para aprovechar sus diversas propiedades individuales y en conjunto. Para lograr aprovechar la gran gama de materiales a disponibilidad es necesario primero conocer la naturaleza de sus comportamientos, sea en cuestiones de deformación, su capacidad de resistencia a cargas externas y modos en que estos pueden fallar. Para el uso efectivo de materiales en diseño de estructuras es concierne conocer su comportamiento de deformación, el cual se divide en dos categorías principales:

- Comportamiento de **deformación elástica (recuperable)**.
- Comportamiento de **deformación plástica (no recuperable)**.

La categoría de **deformación recuperable (elástica)**, define que, al ser aplicada una carga externa, se genera una deformación interna microscópica a lo largo de todo el material, cuando la carga es retirada, la geometría recupera su estado original.

Dentro de la categoría de **deformación no recuperable (plástica)** se encuentran aquellas propiedades que conciernen a cambios en la geometría, que no se recuperan una vez que se retira la carga. Estos cambios no recuperables dependen de la naturaleza y microestructura del material de estudio. Entre ellos se encuentra la propiedad de *deformación plástica* de materiales dúctiles y maleables, como los metales dúctiles blandos y polímeros plásticos. Otro tipo de deformación no recuperable es aquella que se presenta en forma de *agrietamiento del material*, entre los que se presentan en los materiales frágiles no-dúctiles como: metales quebradizos, cristales amorfos y polímeros cristalinos rígidos.

Dependiendo de la naturaleza del material, puede ser posible encontrar uno, o ambos tipos de *deformación no recuperable* (agrietamiento y/o deformación permanente).

En la **Figura 3–1** se puede observar la representación de los tipos de fallo, así como las deformaciones producidas en el material las cuales varían dependiendo de la naturaleza frágil, dúctil-frágil, o totalmente dúctil del material de estudio.

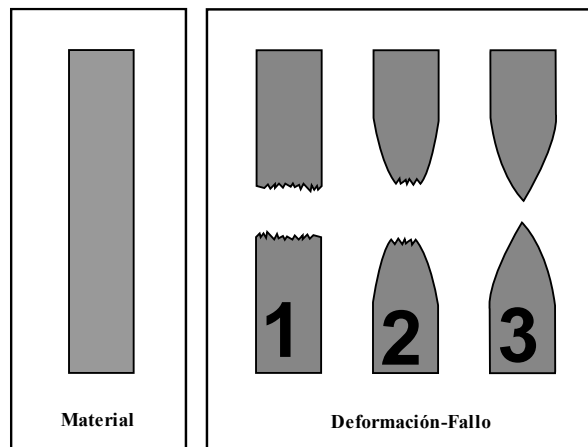


Figura 3–1 Tipos de fallo por naturaleza de deformación no elástica: 1. Fallo frágil., 2. Fallo dúctil-frágil, 3. Fallo dúctil.

Teóricamente, el modelado de materiales y sus deformaciones desde un punto de vista elástico dependerá de la **escala de estudio**, la **aplicación**, y de la **naturaleza elástica del material** a estudiar. La **elasticidad** funge como medio de correlación de la respuesta de deformación recuperable (elástica) de un material y el esfuerzo aplicado en él [38]. Los tipos de respuesta de los materiales, así como sus geometrías deben ser comprendidos para lograr el diseño efectivo y seguro de componentes mecánicos y estructurales.

En la práctica, para estudiar y obtener el comportamiento a las cargas externas, los materiales se someten a distintos tipos de pruebas. Los cuales se realizan con especímenes bajo diversas combinaciones y magnitudes de carga. Para este tipo de pruebas se utilizan máquinas especiales que se denominan *máquinas universales*, en las cuales los materiales se someten a ensayos de tensión, compresión o flexión a partir de especímenes de prueba estandarizados, buscando la correlación de los análisis teóricos elásticos con las pruebas físicas. La **Figura 3–2** muestra ejemplo ilustrativo de forma y componentes generales de máquinas universales de prueba.

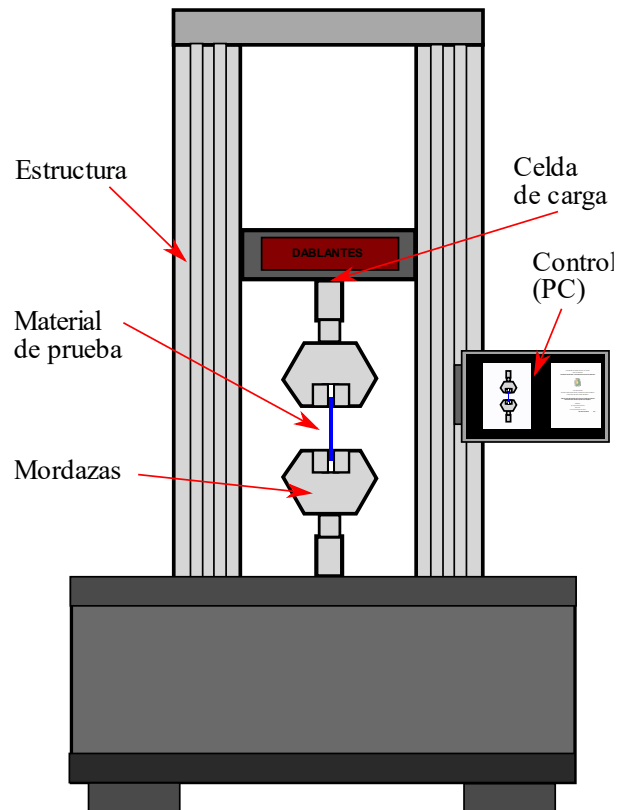


Figura 3–2 Ilustración ejemplificadora de máquina de pruebas universal.

3.1. Materiales compuestos

Debido a la infinidad de combinación de materiales posibles, los materiales compuestos son una gran área de investigación. Comúnmente la razón de la combinación de materiales es lograr obtener características mejoradas en la creación de componentes o estructuras que no se hubieran podido adquirir del uso de un solo material. Ejemplo de esto es el uso de materiales avanzados en aviones como mostrado en la **Figura 3-3**.



Figura 3-3 Uso de laminado de carbón en Boeing 787 Dreamliner. [84]

Una generalizada clasificación de los materiales compuestos es presentada por Derek Hull [85], quien menciona ejemplos de clasificación de materiales compuestos a diversas escalas mostrado en la **Tabla 3-1**:

Tabla 3-1 Clasificación general de materiales compuestos [85]:

Materiales compuestos naturales.	Madera.
	Hueso.
	Bambú.
	Músculos y otros tejidos.
Materiales microcompuestos	Aleaciones metálicas: Ej. Aceros
	Termoplásticos reforzados: Ej. Poliestireno de impacto, ABS.
	Compuestos de moldeo de láminas.
	Termoplásticos reforzados.
Materiales macrocompuestos (Productos de ingeniería)	Acero galvanizado.
	Vigas de concreto reforzado.
	Hélices de helicóptero
	Esquíes, palos de golf (de fibra de carbono, etc)

El principal criterio para diferenciación y clasificación práctica entre un material macrocompuestos o microcompuestos es mencionada por Robert M. Jones [86], discutiendo que la diferencia clave está en si los componentes del material compuesto son observables a simple vista o no.

En relación con esto se puede observar cómo en aleaciones metálicas, por ejemplo, un material metálico es un microcompuesto debido a la combinación de fases metálicas

distintas en la microescala, pero que para usos prácticos el material es considerado homogéneo a una escala macroscópica. Por otro lado, en materiales compuestos laminados, especialmente los de uso aeroespacial con fibras de alta resistencia, los componentes individuales son perceptibles a una escala macroscópica (el tamaño típico de una fibra de carbono es 1/10 de un cabello humano) haciendo **inválida** la suposición simplificada de homogeneidad y a su vez, generando comportamientos estructurales complejos notables, como elasticidad y resistencia anisotrópica. Por lo tanto, se denomina materiales compuestos, a aquellos que macroscópica y observablemente no puedan considerarse homogéneos.

Un material compuesto se define como un material que está químicamente conformado de dos o más distintas fases de materiales (material multifase), lo cual, por definición categoriza a un material compuesto como heterogéneo (no homogéneo) [87]. La **Figura 3–4** muestra un ejemplo de un medio multifase.

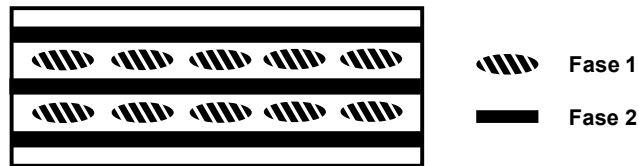


Figura 3–4 Medio multifase. Representación de material con dos constituyentes distintos.

La combinación de materiales se da de la necesidad del uso de propiedades físicas distintas en un producto en particular. Algunas de las propiedades que pueden ser mejoradas o combinadas al crear un producto o material compuesto son las siguientes [86]:

- Resistencia última
- Rigidez
- Resistencia a la corrosión
- Resistencia al desgaste
- Atractividad
- Peso
- Fatiga
- Comportamiento a altas temperaturas
- Aislamiento térmico
- Conductividad térmica
- Aislamiento acústico

Para la industria aeroespacial y automotriz, una de las principales razones del uso de materiales compuestos es de la obtención de materiales rígidos de alta resistencia que al mismo tiempo permitan un menor peso, así como mayor resistencia a la corrosión comparado a metales en ciertos elementos estructurales.

3.1.1. Clasificación de los materiales compuestos modernos de uso estructural

Los principales tipos de clasificación de material compuesto moderno, y de principal uso en industrias aeroespacial y automotriz son los siguientes [87]:

- Lámina unidireccional:** Conjunto de fibras de uno o más niveles situados en una dirección.
- Fibras tejidas y laminados:** Conjunto de fibras individuales o en conjunto entretejidas para formar un material tejido con distintos tipos de ángulos de configuraciones posibles.
- Fibra particulada y fibras cortas:** Secciones de fibras discontinuas con uso en compuestos de inyección, logrando generar materiales con las ventajas de las fibras compuestas.
- Compuestos híbridos:** Aplicaciones donde un compuesto de fibra es combinado con un metal o un material de fibra continua con el fin de combinar características.

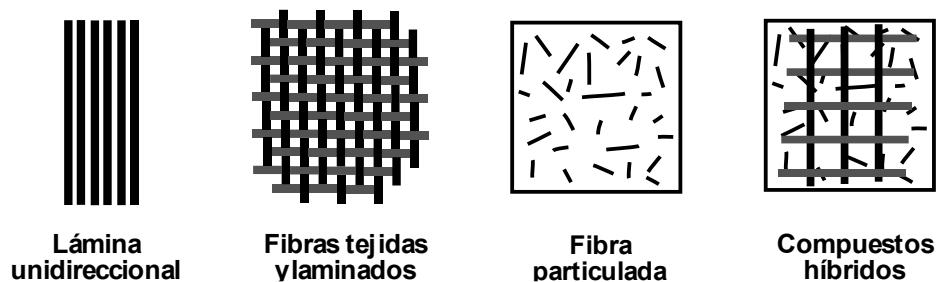


Figura 3–5 Representación gráfica de clasificación de material compuesto.

En los materiales compuestos modernos, como mostrado en la **Figura 3–5** y **Figura 3–6**, los compuestos de polímeros reforzado por fibra (FRP por sus siglas en inglés) son aquellos en la que una fase de este material (fibras), funcionan como un refuerzo de una segunda fase llamada matriz, la cual distribuye y mantiene la posición de las fibras y al mismo tiempo transmite las cargas entre ellas [69], logrando con la combinación de ambos, un material más eficaz para un propósito particular, como lo es el menor peso en aeronaves.

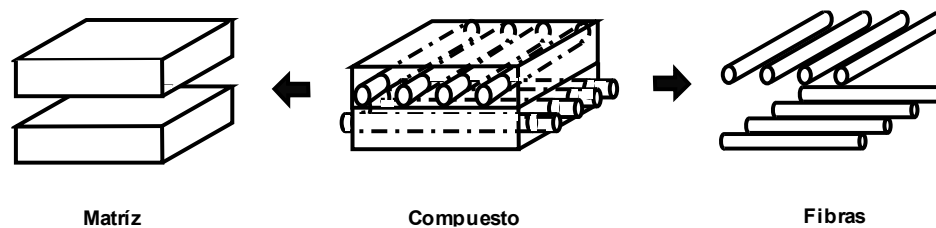


Figura 3–6 Estructura de compuesto de polímero reforzado por fibra (FRP).

3.1.2. Tipos de fibras en materiales compuestos

El material del cual se manufacturen las fibras de material compuesto dependerá de las propiedades físicas que se deseen aprovechar, tomando en consideración la microestructura

y forma de manufactura de la fibra. Actualmente existe una gran diversidad de fibras las cuales son manufacturadas con distintos tipos de materiales y materiales precursores. Para los materiales compuestos aquí mencionados, el principal interés está en aprovechar la alta resistencia (o características excepcionales) de las fibras, uniéndolas por medio de una matriz. Entre los distintos tipos materiales de fibra posibles a utilizar en el uso de materiales laminados compuestos se encuentran [85], [87]:

a) Fibra de carbono

Las fibras de carbono son fibras de alta resistencia y alto módulo elástico con aproximadamente 7-8 μm en diámetro las cuales consisten en el conjunto de planos basales de grafito unidos por altos enlaces covalentes y fuerzas van der Waals entre capas [85]. Estas se obtienen del carbonizado de materiales precursores como Rayon, Poliacrilonitrilo (PAN) o breas. Su uso se da de la alta resistencia en su dirección longitudinal que puede aprovecharse al usarse como fase de refuerzo en materiales compuestos laminados. Captura de microscopia de esta fibra se puede apreciar en la **Figura 3-7**.

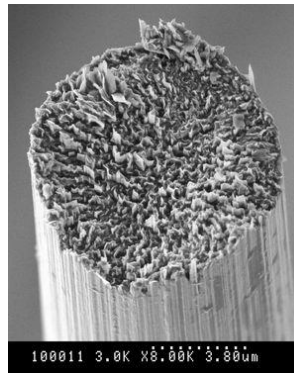
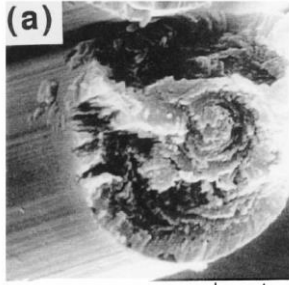


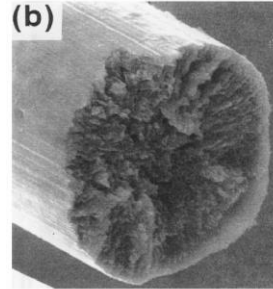
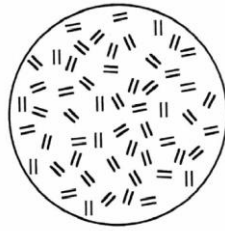
Figura 3-7 Microscopia electrónica de barrido (SEM) a una fibra de carbono [88].

La resistencia, módulo elástico, así a como compatibilidad [89] con distintos tipos de matriz dependerá del método de manufactura y el precursor de la variante de fibra de carbono específica, lo cual genera que los planos basales de grafito sean creados orientados a distintos tipos de arreglos [90]. Entre los posibles tipos de arreglo de los planos basales de grafito se encuentran los analizados por Takakazu Suzuki [90] (aleatoria, radial, cebolla), en distintas fibras de carbono, donde encuentra una alta relación entre la resistencia última de la fibra y baja reactividad química al combinarse con una matriz metálica de aluminio cuando la fibra tiene una composición de planos basales en forma de cebolla. Capturas de las distintas microestructuras se observan en las **Figura 3-8**, **Figura 3-9** y **Figura 3-10**.



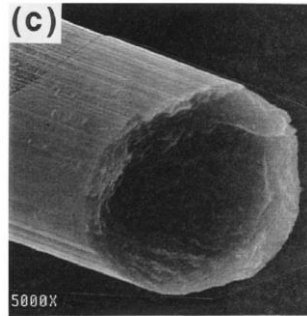
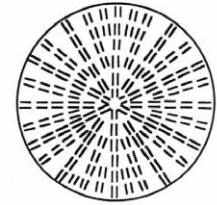
10kV; 2 μm

Figura 3-8 Fibra de carbono con planos basales en orden aleatorio. [90]



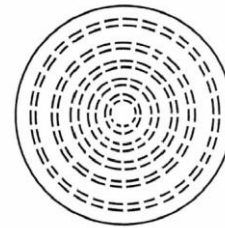
10kV; 2 μm

Figura 3-9 Fibra de carbono con planos basales en orden radial. [90]



15kV; 2 μm

Figura 3-10 Fibra de carbono con planos basales en orden cebolla. [90]



La anisotropía y principal aumento de resistencia de las fibras de carbono se da de la orientación de los planos basales de grafito la cual mantiene la integridad del material en su dirección longitudinal. Este direccionamiento es resultado del estirado de las fibras de sus precursores en su proceso de manufactura [85].

Las propiedades típicas de fibras de carbono pueden apreciarse en la **Tabla 3-2** [6]:

Tabla 3-2 Propiedades de fibras de carbono.

Propiedad	Unidad	Precursor: Brea	Precursor: PAN
Gravedad específica	-	1.99	1.78
Módulo de Young	GPa	379.2	241.3
Resistencia última de tensión	MPa	1723	3447
Coefficiente axial de expansión térmica	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	-0.54	-1.26

b) Fibra de vidrio

Las fibras de vidrio de alta resistencia son fibras de vidrio mineral comúnmente oxido de silicio en combinación con otros óxidos como: oxido de calcio, oxido de boro, oxido de sodio entre otros. Dependiendo de los porcentajes de óxidos se obtienen distintas propiedades elásticas [85].

Como estudiado y discutido por Griffith [25] muchos materiales, entre ellos el vidrio tienen teóricamente una muy alta resistencia. La razón de que esta alta resistencia no se presente en los materiales comunes a gran escala es que la presencia de imperfecciones y microgrietas altamente disminuyen su capacidad de soporte de cargas.

Las fibras de vidrio, por su método de fabricación, permiten la obtención de fibras con diámetro en el rango de 5-25 μm . Su pequeño tamaño y composición química permiten una menor abundancia de imperfecciones, obteniendo fibras de alta resistencia utilizables como refuerzo en materiales compuestos. Captura de microscopía de esta fibra se puede apreciar en la **Figura 3–11**.

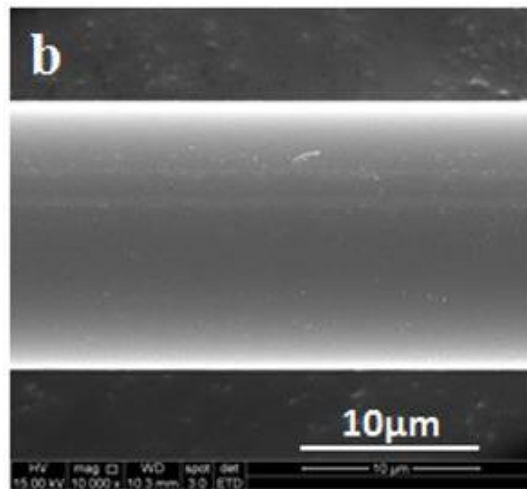


Figura 3–11 Microscopía electrónica de barrido (SEM) a una fibra de vidrio. [91]

Entre los más comunes tipos de fibra de vidrio se tienen el tipo E, C y S [85]. **El tipo E** (E por eléctrico) es el más comúnmente utilizado por buenas propiedades generales de resistencia, rigidez, así como resistencia a la intemperie. **El tipo C** (C por corrosión), tiene una más alta resistencia a la corrosión que el tipo E, pero menor resistencia. **El tipo S** (S de Structural) tiene un mayor módulo elástico y mayor resistencia a la temperatura que el tipo E razón de su uso en aplicaciones aeroespaciales [85].

Los porcentajes de composición química de las fibras de vidrio tipo E, C y S pueden apreciarse en la siguiente **Tabla 3-3**[85]:

Tabla 3-3 Composición molecular porcentual de fibra de vidrio.

Material	E-Glass (%)	C-Glass (%)	S-Glass (%)
SiO ₂	52.4	64.4	64.4
Al ₂ O ₃ , Fe ₂ O ₃	14.4	4.1	25.0
CaO	17.2	13.4	-
MgO	4.6	3.3	10.3
Na ₂ O, K ₂ O	0.8	9.6	0.3
Ba ₂ O ₃	10.6	4.7	-
BaO	-	0.9	-

Las propiedades típicas de fibras de vidrio pueden apreciarse en la **Tabla 3-4** [6]:

Tabla 3-4 Propiedades de fibras de vidrio.

Propiedad	Unidad	E-Glass	S-Glass
Gravedad específica	-	2.54	2.49
Módulo de Young	GPa	72.40	85.50
Resistencia última de tensión	MPa	3447	4585
Coefficiente axial de expansión térmica	$\mu\text{m}/\text{m}/^{\circ}\text{C}$	5.04	5.58

c) Fibras orgánicas

Las fibras orgánicas de alta resistencia son fibras creadas bajo el principio de la creación de polímeros lineales donde la organización polimérica es cristalina (repetitiva) llegando a valores teóricos de 220 GPa en resistencia, pero que, debido a la incapacidad de creación de cadenas de polímeros perfectos, este valor no es alcanzado [85].

Entre las fibras orgánicas, las que mayor uso tienen en aplicaciones aeroespaciales son las fibras de Arámidas y derivadas, las cuales más comúnmente se les conoce por sus nombres comerciales Kevlar, Technora, y Nomex. Captura de microscopía se puede apreciar en la **Figura 3-12**.

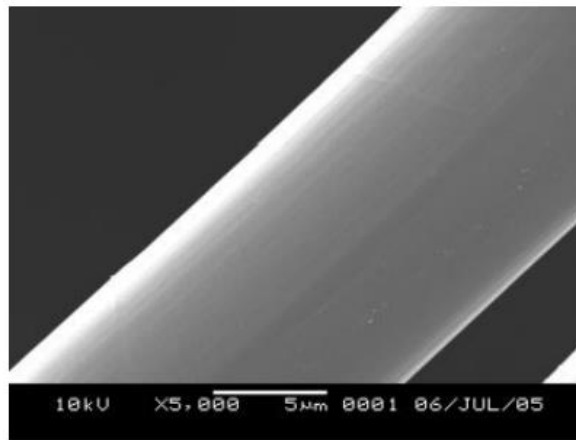


Figura 3-12 Microscopía electrónica de barrido (SEM) a una fibra de aramida. [92]

Las propiedades típicas de fibras de aramida pueden apreciarse en la **Tabla 3-5** [6]:

Tabla 3-5 Propiedades de fibras de aramida

Propiedad	Unidad	Kevlar 29	Kevlar 49
Gravedad específica	-	1.44	1.48
Módulo de Young	GPa	62.05	131.0
Resistencia última de tensión	MPa	3620	3620
Coefficiente axial de expansión térmica	$\mu\text{m}/\text{m}/^\circ\text{C}$	-2	-2

Otro tipo de fibra orgánica comercial es la fibra VectranTM. Esta es una fibra de alta resistencia comparable al kevlar, conformada de un polímero de cristal líquido termotrópico y co-poliéster aromático de p-hidroxibenzoato (HBA) con 2 ácidos los cuales forman una fibra altamente orientada al ser manufacturada por electrohilado [93] (Electrospinning). Una de las desventajas de esta fibra, sin embargo, es la no muy alta resistencia a radiación ultravioleta.

d) Fibras de carburo de silicón

Las fibras de carburo de silicón, comercialmente conocidas como Nicalon, son fibras de alta resistencia con un diámetro en los valores de $14\mu\text{m}$ comúnmente utilizadas como refuerzo de materiales compuestos de matriz cerámica. Este tipo de fibras cuenta con una alta resistencia última de material, alto módulo elástico, así como una buena estabilidad térmica [94]. Entre los tipos de fibra Nicalon se encuentran versiones que difieren en su cantidad de oxígeno el cual afecta la resistencia de la fibra en variaciones de temperatura. Captura de microscopía se puede apreciar en la **Figura 3–13**.

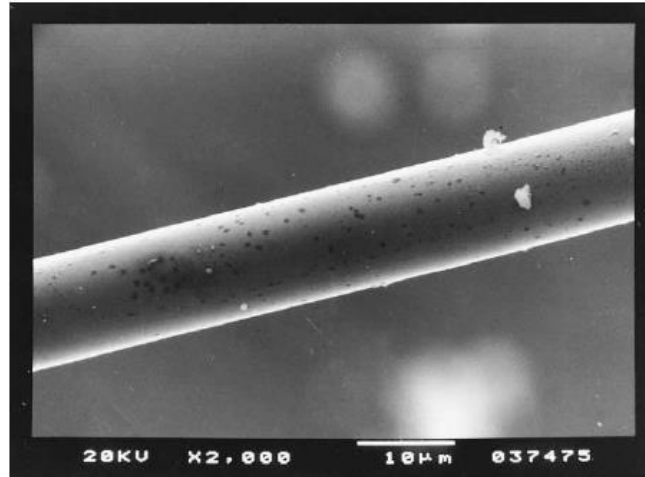


Figura 3–13 Microscopía electrónica de barrido (SEM) a una fibra de Nicalon. [94]

Las propiedades típicas de una fibra de Nicalon pueden apreciarse en la siguiente **Tabla 3-6** [94]:

Tabla 3-6 Propiedades de fibras de Nicalon

Propiedad	Unidad	Nicalon-607	Hi-Nicalon
Resistencia última de tensión	GPa	1.44	1.48
Módulo elástico	GPa	62.05	131.0
Densidad	$\text{X}10^3 \text{ kg/m}^3$	3620	3620

e) Fibras de Boro

Las fibras de boro son fibras de alta resistencia con interés en aplicaciones de altas temperaturas y alta rigidez. Su uso se dio principalmente como refuerzo en materiales compuestos de uso militar, donde uno de sus usos fue en las alas de aluminio de aeronaves de combate para tratar de solventar el agrietamiento en la unión de las alas al fuselaje por medio de la aplicación de un compuesto de boro con resina epóxica [95]. Sin embargo, su uso se vió en mayor parte reemplazado, aunque no eliminado por el uso de fibras de carbono. Captura de microscopía se puede apreciar en la **Figura 3–14**.

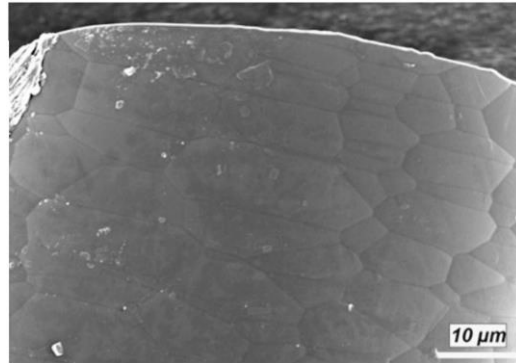


Figura 3–14 Microscopía electrónica de barrido (SEM) de la superficie de fibra de Boro. [96]

Sus propiedades mecánicas se encuentran en valores de 2.42 GPa para resistencia última, así como un módulo de Young promedio de 414 GPa y se manufacturan por medio de la deposición química por vapor de Boro elemental sobre un filamento metálico delgado [97].

No obstante de las altas capacidades de resistencia del material, la alta presencia de imperfecciones debido a los procesos de manufactura posibles, la variabilidad de resistencias causadas por este y la naturaleza quebradiza que se presenta debido a esfuerzos compresivos residuales [98], hace de este material uno el cual su no ideal comportamiento deba tenerse en consideración para su uso, razón por la cual el uso de fibras de carbono y aramidas han comparativamente tenido mayor difusión en uso desde su adopción. Representación gráfica de esta fibra se puede observar en la **Figura 3–15**.

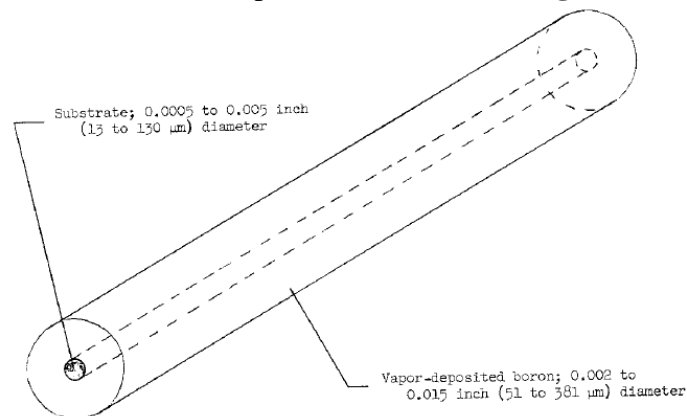


Figura 3–15 Representación gráfica de un filamento de boro manufacturado. [97]

f) Fibras PTFE

Las fibras PTFE (Fluoro polímero sintético o Teflón™), aún que no son fibras de alta resistencia, son fibras con una muy buena estabilidad química y térmica que cuenta con un bajo coeficiente de fricción y otras propiedades que la convierten en un material útil. Uno de los principales puntos de interés, es la fácil manufactura de coberturas de protección para una gran gama de materiales y la creación de esteras de protección. Estas fibras pueden ser depositadas en localizaciones de interés de una superficie, permitiendo el control de hidrofobicidad, arrastre y otras propiedades superficiales [99].

Estas fibras son comúnmente utilizadas en la industria como parte de materiales compuestos que funcionan como materiales antifricción con resistencia al desgaste en un gran rango de velocidades de deslizamiento.

Este material de manera independiente, no cuenta con capacidades de resistencia a altas cargas tensionales, sin embargo, gracias a sus características tribológicas y estabilidad química, su uso se da en combinación con fibras de alta resistencia como el Kevlar, que da como resultado un material compuesto altamente resistente a cargas tensionales junto a las propiedades tribológicas y químicas del PTFE con posibles aplicaciones en componentes de baja velocidad y altas cargas en baleros (rodamientos) de motores aéreos, principalmente en las fases de encendido y apagado [100].

3.1.3. Tipos de matriz en materiales compuestos

Los tipos de matriz posibles a utilizar en un material compuesto dependerá de las características necesarias y de la compatibilidad química con la fibra de interés. Estas tienen comúnmente propiedades de resistencia más bajas que las fibras de alta resistencia, pero funcionan para mantener a las fibras en su posición deseada y como medio de transmisión y redistribución de carga entre y hacia las fibras. Entre los posibles materiales de matriz a utilizar para unir fibras de alta resistencia se encuentran resinas termoplásticas y termoestables que pueden ser de poliéster, resinas epóxicas, polipropileno, nylon y policarbonatos [85]. También es posible el uso de matrices metálicas, así como matrices cerámicas como las matrices de carbón en materiales compuestos carbón-carbón para aplicaciones de alta temperatura.

En general, las matrices pueden asumirse isotrópicas a diferencia de las fibras unidireccionales por lo que facilita estudios básicos elásticos. Por lo tanto, se presentan propiedades y aplicaciones generales de matrices usadas en materiales compuestos en las **Tabla 3-7** y **Tabla 3-8**.

Las propiedades y aplicaciones para distintos tipos de resinas como matriz pueden apreciarse en la **Tabla 3-7** [101]:

Tabla 3-7 Propiedades de resinas y aplicación

Matriz	Propiedades	Ejemplos de aplicación
Resina epóxica.	Muy altas propiedades mecánicas.	Bienes de deportes, partes automotivas, hélices de energía eólica, cobertura de ala y secciones de fuselaje de aeronaves.
	Procesamiento sencillo.	
Resina bismaleimida.	Muy alta estabilidad térmica.	Motores de aeronaves.
Resina fenólica.	Buenas propiedades de fuego/toxicidad.	Partes interiores para trenes y cabinas de aeronaves.
Resina benzoxazina.	Buenas propiedades de fuego/toxicidad.	Potenciales aplicaciones aeroespaciales.
	Muy alta estabilidad de almacenamiento.	

Algunas propiedades mecánicas típicas promedio para distintos tipos materiales de matriz poliméricas pueden apreciarse en la **Tabla 3-8** [85], [87]:

Tabla 3-8 Propiedades mecánicas de diversas matrices

Propiedades		Resinas				
Propiedad	Unidad	Epóxica	Poliimida	Policarbonato	Polipropileno	Carburo de silicón
Resistencia última de tensión	MPa	58.6	103	80	31	310
Módulo elástico	GPa	4.6	3.5	2.3	1.2	400
Densidad	X10 ³ kg /m ³	1380	1460	1060	900	3200

3.2. Estudio micromecánico de láminas

El comportamiento de una lámina unidireccional planar macromecánico es posible de fortalecer por medio de la aproximación de su comportamiento elástico en términos de micromecánica, permitiendo aproximar su comportamiento a través de la obtención de 4 constantes elásticas de lámina plana que son aproximadas por distintos métodos.

En el modelo derivado de dos dimensiones, las 4 constantes elásticas de una lámina ortotrópica son:

1. Módulo de Young longitudinal, E_1
2. Módulo de Young transversal, E_2
3. Razón de Poisson mayor, ν_{12}
4. Módulo cortante en-plano, G_{12}

Los distintos métodos de aproximación posibles para llegar a un valor determinado de constantes elásticas mediante derivaciones micromecánicas son [102]:

- **Mecánica de materiales.**
Se logra a través de derivaciones de deformación y esfuerzo uniformes a través de las ecuaciones clásicas de mecánica de materiales.
- **Numérico.**
Se logra a través de aproximaciones numéricas usando métodos como diferencia finita, elemento finito entre otros con el fin de aproximar el comportamiento promedio de un compuesto a través de sus constituyentes.
- **Campo auto consistente.**
Se logra a través de elasticidad clásica utilizada para obtener soluciones de constantes elásticas en la suposición de homogeneidad del material compuesto.
- **Métodos variacionales.**
Se logran a través de métodos basados en principios de energía que delimitan propiedades efectivas.
- **Relaciones semi-empíricas.**
Se logran a través de relaciones generadas específicamente para ajustar las deficiencias de los métodos anteriormente mencionados. El conjunto de ecuaciones Halpin-Tsai es un promediado de las características interpoladas deducidas obtenidas de la mecánica de materiales y la aproximación variacional.

3.2.1. Fracciones de volumen

Para lograr el estudio micromecánico de materiales compuestos es necesario hacer uso de términos de estudio por fracciones de volumen. Fracción de volumen se refiere al contenido porcentual de volumen de material en un material compuesto de 2 o más fases. Para esto, se toma en consideración la siguiente notación [6]:

$$\begin{aligned}v_{c,f,m} &= \text{volumen del compuesto, fibra y matriz respectivamente} \\ \rho_{c,f,m} &= \text{densidad del compuesto, fibra y matriz respectivamente}\end{aligned}$$

El volumen del compuesto se obtiene a través de la suma de los volúmenes de los materiales constituyentes, el cual a su vez es el volumen total del material mostrado en la Ecuación 3.1.

$$v_c = v_f + v_m \quad (3.1)$$

La fracción de volumen V_f de la fibra es el contenido porcentual de volumen en el material, el cual se obtiene con la Ecuación 3.2:

$$V_f = \frac{v_f}{v_c} \quad (3.2)$$

Del mismo modo, la fracción de volumen de matriz V_m es el contenido porcentual de volumen en el material, que se obtiene por medio de la Ecuación 3.3:

$$V_m = \frac{v_m}{v_c} \quad (3.3)$$

La suma de las fracciones de volumen, con el fin de mantener lógica porcentual igual a la unidad, debe ser como en la Ecuación 3.4:

$$V_f + V_m = 1 \quad (3.4)$$

Una representación gráfica de las fracciones de volumen representativas de un material se observa en la **Figura 3–16**.

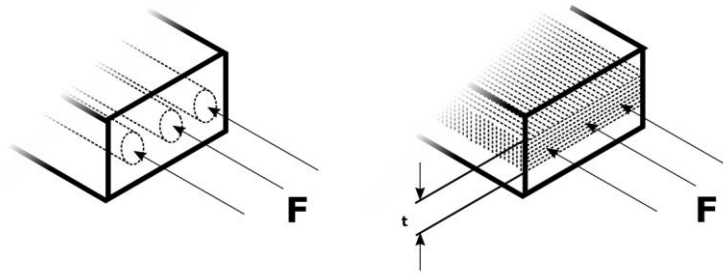


Figura 3–16 Representación gráfica de fracciones de volumen.

3.2.2. Fracciones de volumen con vacíos

Durante manufactura la presencia de vacíos e imperfecciones es perjudicial a las características del material, influyendo negativamente a parámetros como rigidez cortante, resistencia compresiva, resistencia tensionante transversal a la dirección de fibras, resistencia a fatiga y resistencia a la humedad [6].

Por lo tanto, también es pertinente hacer el estudio de fracciones de volumen incluyendo el volumen ocupado por los vacíos en el material. El volumen total de un compuesto incluyendo a vacíos es mostrado en la Ecuación 3.5:

$$v_c = v_f + v_m + v_v \quad (3.5)$$

Por lo tanto, del mismo modo a las fracciones de volumen en el apartado anterior, las fracciones de volumen para la fibra, matriz y vacíos son el contenido porcentual de volumen por cada uno de estos constituyentes.

La fracción de volumen de fibra V_f y de matriz V_m se obtienen de manera similar al apartado anterior, dividido entre el nuevo valor de v_c . La nueva fracción de volumen en este caso es la fracción de volumen de contenido de vacío, el cual, similar a casos anteriores se obtiene por medio de la Ecuación 3.6:

$$V_v = \frac{v_v}{v_c} \quad (3.6)$$

Similar al apartado anterior, la suma de las fracciones de volumen, con el fin de mantener lógica porcentual igual a la unidad como en la Ecuación 3.7:

$$V_f + V_m + V_v = 1 \quad (3.7)$$

3.2.3. Fracciones de volumen, masa y densidad

Dependiendo de las necesidades de experimentación y caracterización, al igual que el uso de medición de volumen, es posible hacer uso de las relaciones de masa y densidad de materiales compuestos en combinación de materiales.

Para masa, haciendo uso de la misma lógica de combinación de materiales, la masa del material compuesto debería ser la combinación de las masas de los constituyentes (fibra w_f y matriz w_m), obteniendo la Ecuación 3.8:

$$w_c = w_f + w_m \quad (3.8)$$

Así, las fracciones de volumen porcentual de fibra W_f y matriz W_m se obtiene por medio de las Ecuaciones 3.9 y 3.10:

$$W_f = \frac{w_f}{w_c} \quad (3.9)$$

$$W_m = \frac{w_m}{w_c} \quad (3.10)$$

Para densidad, de la definición de densidad para un solo material se tiene que la densidad del compuesto, fibra y matriz es obtenida con las Ecuaciones 3.11, 3.12 y 3.13:

$$w_c = \rho_c v_c \quad (3.11)$$

$$w_f = \rho_f v_f \quad (3.12)$$

$$w_m = r_m v_m \quad (3.13)$$

Dependiendo de la necesidad, de estas expresiones es posible despejar los valores de fracciones de masa, volumen y sus interrelaciones debido al contenido porcentual de cada material en un material compuesto [6].

3.2.4. Derivación de módulos elásticos por micromecánica

Para permitir el estudio de materiales compuestos y la influencia de las características del material a un nivel micromecánico se deben derivar los módulos elásticos de un material compuesto por medio de la unión de sus constituyentes.

La existencia de distintos modelos de derivación de módulos elásticos es debido a la naturaleza de su derivación, que parten desde consideraciones simples de distribución de esfuerzo, hasta estudios geométricos-elásticos en una escala microscópica. El tipo o modelo de derivación utilizada dependerá del tipo de material a estudiar, sea estudio de fibras continuas o refuerzo por fibras cortas.

De los distintos modos de derivación, solo se desarrollan los **dos** con mayor importancia de derivación y aplicación para la aproximación efectiva de los módulos elásticos, el *método por resistencia de materiales*, y el *método semiempírico*.

3.2.5. Derivación de módulos elásticos método por resistencia de materiales

El método por resistencia de materiales hace uso de la suposición de distribución de esfuerzo en el material compuesto dependiente del contenido porcentual (fracción de volumen) de cada fase del material compuesto. En el caso de materiales compuestos de fibra unidireccional, las fracciones de volumen a tomar a consideración son el contenido porcentual de fibra y matriz.

▪ **Módulo de Young longitudinal de material compuesto [E1]**

Derivado de la distribución carga normal homogénea en un elemento de material compuesto en dirección paralela a las fibras, se obtiene el valor del módulo de Young longitudinal **E1** para un material compuesto, dependiente del módulo de Young de la fibra, matriz, y sus respectivas fracciones de volumen como en la Ecuación 3.14 [6], [102]:

$$E_1 = E_{1f}V_f + E_{1c}V_c \quad (3.14)$$

Debido a que $V_f + V_c = 1$, otra manera de representar la ecuación anterior es por medio de la Ecuación 3.15:

$$E_1 = E_{1f}V_f + E_{1c}(1 - V_f) \quad (3.15)$$

A esta relación de propiedades en materiales en función de su contenido porcentual volumétrico comúnmente se le denomina “*regla de las mezclas*”, derivado de los estudios en cristales metálicos de Andrés Reuss [103] y Woldemar Voigt [39] respecto a sus características elásticas y tiene uso en distintos tipos de modelado de materiales a nivel micromecánico que se deriva de la distribución de carga en un material y que se ilustra en la **Figura 3–17**.

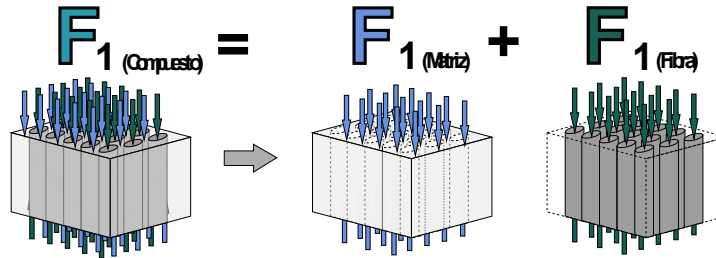


Figura 3–17 Distribución de carga en derivación micromecánica.

▪ **Módulo de Young transversal de material compuesto [E2].**

El módulo longitudinal transversal difiere altamente de las características elásticas y de resistencia del material en su dirección longitudinal debido a que el material se mantiene unido principalmente por la matriz. Para valores de resistencia no es factible hacer uso de regla de mezclas, sin embargo, el módulo elástico es aproximable bajo la misma ideología de regla de mezclas [102].

De modo similar a la derivación del módulo longitudinal, el módulo elástico transversal E2 se deriva de la influencia del módulo elástico individual de fibra y matriz en dirección transversal a través de la sumatoria de deformaciones Δ de los constituyentes de donde se deriva el módulo. El módulo elástico **E2** se obtiene por medio de la Ecuación 3.16 [6], [102]:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_{2f}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (3.16)$$

Esta aportación de ambos materiales para su deformación es ilustrada en la **Figura 3–18**.

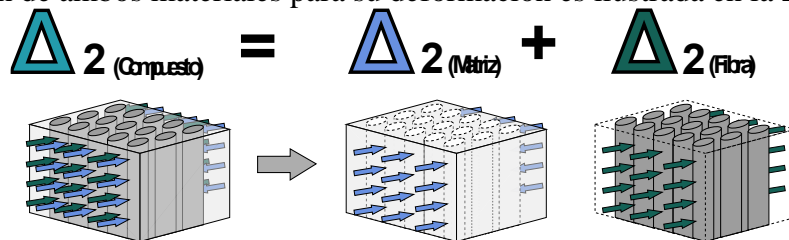


Figura 3–18 Deformación transversal en derivación micromecánica. Δ representando la diferencia en deformación por cada uno de los materiales constituyentes del material compuesto.

▪ **Relación de Poisson principal [v12]**

De la misma suposición de influencia proporcional de la fracción de volumen en las características elásticas de un material compuesto, se deriva la proporción de deformación longitudinal-transversal por medio de la igualdad de valores de deformación unitaria transversal, junto la definición de proporción entre deformación longitudinal y transversal del material, conocida como relación de Poisson en la Ecuación 3.74 [6], [102]:

$$v_{12} = V_f v_{12f} + V_m v_m \quad (3.17)$$

Esta aproximación logra valores experimentalmente factibles de uso por lo que su relación se reutiliza en otros métodos de derivación. Esta aportación de ambos materiales para su relación de Poisson es ilustrada en la **Figura 3–19**.

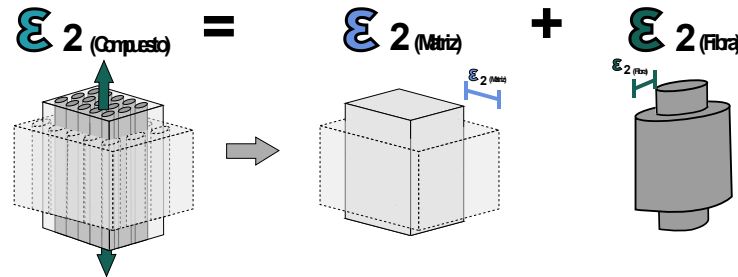


Figura 3–19 Derivación relación de Poisson en derivación micromecánica. ϵ representando la deformación por cada uno de los materiales constituyentes del material compuesto.

▪ **Módulo cortante transversal [G₁₂]**

Para obtener el módulo cortante se utiliza una derivación similar al módulo elástico transversal, con la influencia de los constituyentes por medio de la igualación de deformaciones cortantes en el compuesto. El módulo cortante transversal se obtiene mediante la Ecuación 3.75 [6], [102]:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_{12f}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (3.18)$$

La expresión anterior, aunque aproximada a los valores experimentales de la derivación de módulo cortante transversal, es reemplazada por expresiones en otros métodos de derivación más aproximados a datos experimentales. Esta aportación de ambos materiales para su deformación cortante es ilustrada en la **Figura 3–20**.

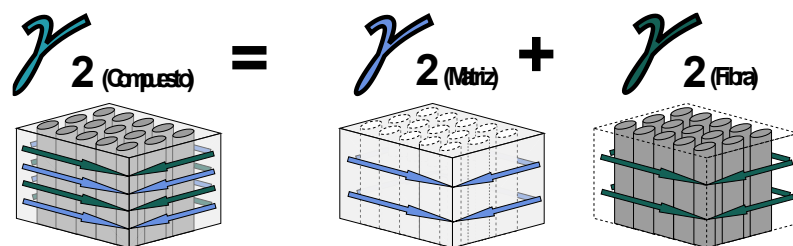


Figura 3–20 Deformación cortante transversal en derivación micromecánica. γ representando deformación distorsional para cada uno de los materiales constituyentes del material compuesto.

3.2.6. Derivación de módulos elásticos método semi-empírico (Halpin-Tsai)

El método de derivación de módulos elásticos semiempírico por John C. Halpin [104] (basado en el trabajo de Stephen Tsai), es la adaptación a las expresiones de derivación por resistencia de materiales modificándolas por medio de consideraciones geométricas y de elasticidad clásica para lograr una mejor aproximación de los valores de módulos elásticos en un material compuesto unidireccional.

▪ **Módulo de Young longitudinal de material compuesto [E1]**

El módulo de Young longitudinal obtenido por medio de modelado semiempírico es el mismo al obtenido por la aproximación de resistencia de materiales, esto debido a su concordancia con valores experimentales como la Ecuación 3.76 [6]:

$$E_1 = E_{1f}V_f + E_{1c}V_c \quad (3.19)$$

▪ **Módulo de Young transversal de material compuesto [E2]**

El módulo de Young transversal se obtiene por medio de la modificación a la ecuación de la derivación por resistencia de materiales con el fin de ajustar los valores a los experimentales. Esto se logra por medio de la Ecuación 3.77 [6]:

$$\frac{E_2}{E_m} = \frac{1 + \xi\eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (3.20)$$

Donde el valor de la constante η se muestra en la Ecuación 3.78:

$$\eta = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) - \xi} \quad (3.21)$$

La variable ξ se le denomina el factor de refuerzo y depende de las características de acomodo de fibra; su geometría, la geometría de empaquetado y condiciones de carga. Los valores de ξ pueden tomar los valores de la **Tabla 3-9** [6]:

Tabla 3-9 Valor de factor de refuerzo ξ para módulo elástico E2.

ξ (Valor)	Condición
2	Aplicable a: Geometría de fibras: Fibras circulares. Geometría de empaquetado: Cuadrado.
$2(a/b)$	Aplicable a: Geometría de fibras: Sección transversal cuadrada (largo a , ancho b) Geometría de empaquetado: Arreglo hexagonal.

▪ **Relación de Poisson principal [v12]**

El valor de la relación de Poisson por medio de derivación semiempírico es el mismo al obtenido por medio de la aproximación de resistencia de materiales debido a su concordancia con valores experimentales como en la Ecuación 3.79 [6]:

$$v_{12} = V_f v_{12f} + V_m v_m \quad (3.22)$$

▪ **Módulo cortante transversal [G12]**

El valor del módulo cortante se obtiene en modo distinto a la derivación de resistencia de materiales, por medio de la Ecuación 3.80:

$$\frac{G_{12}}{G_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (3.23)$$

Donde la constante η se obtiene como en la Ecuación 3.81:

$$\eta = \frac{(G_f/G_m) - 1}{(G_f/G_m) + \xi} \quad (3.24)$$

El valor de ξ (factor de refuerzo) depende de las características de acomodo de fibra; su geometría, la geometría de empaquetado y condiciones de carga. Los valores de ξ pueden tomar los valores de la **Tabla 3-10** [6]:

Tabla 3-10 Valor de factor de refuerzo ξ para módulo elástico G12.

ξ (Valor)	Condición
1	Aplicable a: Geometría de fibras: Fibras circulares. Geometría de empaquetado: Cuadrado. Rango de fracción de volumen de fibra: $V_f [0 \text{ a } 0.5]$
$1 + 40V_f^{10}$	Aplicable a: Geometría de fibras: Fibras circulares. Geometría de empaquetado: Cuadrado. Rango de fracción de volumen de fibra: $V_f [0.5 \text{ a } 1]$
$\sqrt{3} \log_e(a/b)$	Aplicable a: Geometría de fibras: Sección transversal cuadrada (largo a , ancho b) Geometría de empaquetado: Arreglo hexagonal.

3.3. Influencia del contenido de vacío en laminados compuestos

El contenido de vacíos en materiales compuestos laminados es un fenómeno complejo que afecta la integridad en distintos aspectos de estos materiales. Debido a su importancia, el estudio de este fenómeno (según M. Medikhani et al. [71]) se divide en tres principales categorías en un intento de lograr un mayor dominio sobre el:

1. Los parámetros que rigen su formación.
2. Caracterización.
3. Efectos en propiedades mecánicas.

Los vacíos pueden afectar el material compuesto desde su proceso de manufactura hasta el producto terminado, afectando la vida del componente debido a la degradación de sus propiedades.

Para lograr aproximar la resistencia de un material compuesto es necesario obtener la respuesta elástica de cada una de las capas apiladas en el laminado cuando al laminado en conjunto se le aplican cargas. Para esto, la Teoría de Laminado Clásica se distingue como un método efectivo de aproximación al comportamiento elástico y distribución de esfuerzos en el cual se toma en consideración la no homogeneidad de distribución de cargas debido a la variación de deformaciones obtenidas por la variabilidad de módulos elásticos en las distintas capas del material a través de su altura.

No obstante, como método de análisis conservador, la estimación de disminución de las propiedades mecánicas puede ser aproximada por medio de ajustes de curva que describen la tendencia de disminución de propiedades mecánicas como los generados por Liu y Zhang [105], que relacionan el contenido porcentual de vacío a la disminución porcentual de módulos elásticos y disminución porcentual de resistencia última del material por medio de diversas curvas obtenidas de ajuste de datos numéricos y experimentales la cual se muestra en la **Figura 3–21**:

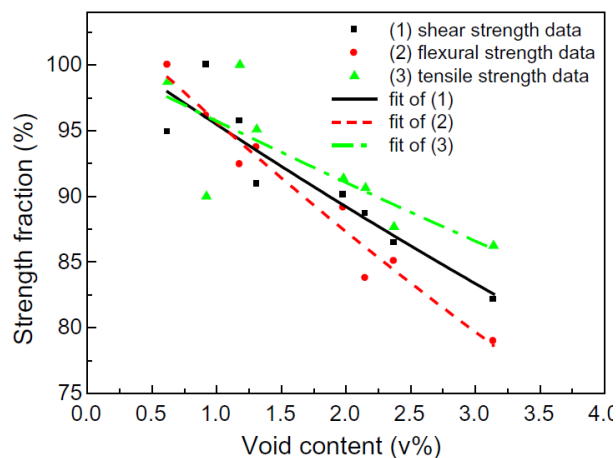


Figura 3–21 Disminución de valores de resistencia en relación con el contenido de vacío por Liu y Zhang [105].

De esta gráfica es posible obtener ajustes de curva lineal para la expresión que relacione los valores de resistencia y contenido de vacío como una ecuación lineal como criterio mostrado en la **Tabla 3-11**:

Tabla 3-11 Ajustes de curva lineal para valores de resistencia cortante, flexora y tensionante en función de fracción de volumen de vacío.

Resistencia flexora (R_F)	Resistencia cortante (R_C)	Resistencia tensionante (R_T)
$R_F(v\%) = -8.0842 (v\%) + 104.1179$	$R_C(v\%) = -6.1276 (v\%) + 101.8895$	$R_T(v\%) = -4.6137 (v\%) + 100.5048$
* $v\%$ es el valor de contenido porcentual de vacío con valor de 0 a 100.		

Estos valores (R_C, R_F, R_T) se pueden manejar de manera práctica como un factor de disminución al multiplicarse por el parámetro mecánico que afecten, obteniendo, por ejemplo, el valor de disminución de resistencia cortante por medio de la Ecuación 3.25:

$$\sigma_{cortante(disminuido)} = R_C * \sigma_{cortante(original)} \quad (3.25)$$

Donde la variable sigma σ representa la magnitud de resistencia (o esfuerzo) del material, utilizando de modo similar los otros factores de disminución de resistencia.

Del mismo modo se obtienen ajustes del valor de módulo tensionante y flexor en función del contenido de vacío en el material cuya tendencia se muestra en la **Figura 3-22**:

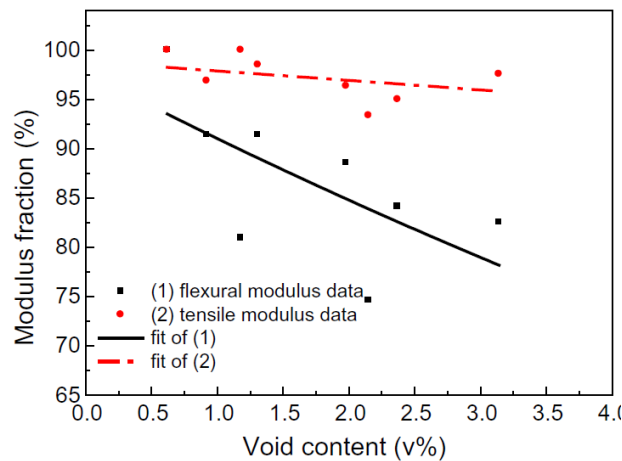


Figura 3-22 Disminución de valores de módulos en relación con el contenido de vacío por Liu y Zhang [105].

De esta gráfica es posible obtener ajustes de curva lineal para la expresión que relacione los valores de módulos y contenido de vacío como una ecuación lineal como criterio mostrado en la **Tabla 3-12**:

Tabla 3-12 Ajustes de curva lineal para valores de módulos tensionante y flexora en función de fracción de volumen de vacío.

Módulo flexor (M_F)	Módulo tensionante (M_T)
$M_F(v_{\%}) = -5.9045 (v_{\%}) + 96.6618$	$M_C(v_{\%}) = -0.9311 (v_{\%}) + 98.3165$
* $v_{\%}$ es el valor de contenido porcentual de vacío con valor de 0 a 100.	

Estos valores (M_C, M_F) se pueden manejar de manera practica como un factor de disminución al multiplicarse por el parámetro mecánico que afecten, obteniendo, por ejemplo, el valor de disminución de módulo flexor por medio de la Ecuación 3.26:

$$E_{F(disminuido)} = M_F * E_{F(original)} \quad (3.26)$$

Donde la variable E representa la magnitud de módulo elástico flexor del material, utilizándose de modo similar los otros factores de disminución de módulos elásticos.

La aplicación de la degradación de los módulos elásticos tensionantes y flexionantes en el estudio de laminados compuestos son por medio de la matriz de rigidez de laminado [ABD] que se muestra desplegada en la figura 63 de la sección 4.2.4 Teoría de Laminado Clásica (Classical Laminate Theory), multiplicando la matriz de rigidez extensional al correspondiente Factor de disminución tensionante M_T y multiplicando la matriz de rigidez flexora al correspondiente Factor de disminución flexor M_F , teniendo por lo tanto las Ecuaciones 3.27 y 3.28:

$$[A]_{(disminuido)} = M_C * [A]_{(original)} \quad (3.27)$$

$$[D]_{(disminuido)} = M_F * [D]_{(original)} \quad (3.28)$$

Para el módulo de acoplamiento [B] sin embargo, debido a la falta de información y expresiones que mencionen el tipo de degradación que esta matriz pudiera tomar, suponiendo una influencia de degradación por ambos factores de degradación M_T y M_F , el factor de degradación asumido para esta matriz de rigidez se propone como el promedio de ambos factores de degradación extensional y flexor conforme la Ecuación 3.87, el cual puede ser ajustado por valores de ajuste experimental:

$$M_{[B]} = (M_C + M_F)/2 \quad (3.29)$$

3.4. Laminación y clasificación de materiales compuestos

Materiales laminados se le denomina a la combinación de materiales en forma de apilamiento de láminas delgadas para formar un material nuevo. El laminado de materiales puede ser desde laminados de distintos tipos de madera, hasta la combinación de metales o láminas de material compuesto con fibras de alta resistencia, sea unidireccional o tejido como mostrado en la **Figura 3–23**.

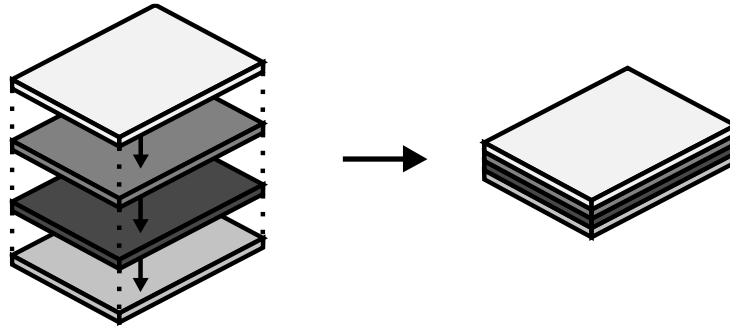


Figura 3–23 Representación gráfica de apilamiento de materiales laminados.

Con el fin de aprovechar la resistencia de las fibras de alta resistencia, en materiales compuestos se hace uso de fibras continuas de alta resistencia unidas por una matriz. Este conjunto se denomina lámina unidireccional, una de las formas más comunes de uso es por medio de laminados con distintas orientaciones de apilamiento, las cuales giran las láminas a cierto ángulo en relación relativa para permitir el uso de las propiedades longitudinales en más de una orientación.

Un material compuesto laminado puede contar con más de un tipo de lámina consistente de distintos grosores y diferentes materiales. Materiales compuestos que contienen capas de uno o más distintos materiales se les denomina *compuestos híbridos*, teniendo posibles combinaciones de capas de láminas de fibras de carbono con capas de láminas de fibra de vidrio u otras dependiendo de las necesidades. Cuando una misma capa de material compuesto contiene más de un tipo de material, a este se le denomina *compuestos híbridos intra-capa* [102]. Esto se ejemplifica en la **Figura 3–24**.

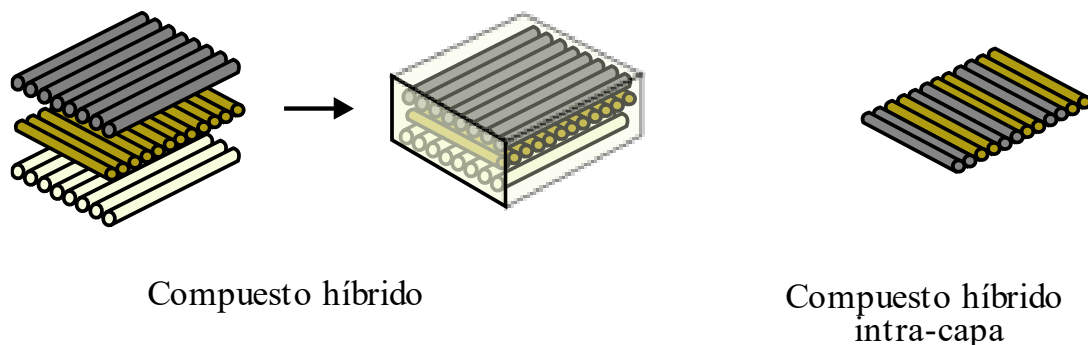


Figura 3–24 Representación gráfica de materiales compuestos híbridos.

Entre las distintas configuraciones posibles de laminados, se tienen diversos casos de simetrías y patrones de ordenamiento de láminas los cuales son ya utilizadas comúnmente en la industria. Las variaciones de configuraciones tienen efectos distintos en la naturaleza de su resistencia, así a como deformaciones inducidas al momento de su manufactura, como se menciona en el manual de mantenimiento técnico para Aero estructuras de la FAA [106], mostrado en la Tabla 3-13. Variantes de configuraciones de laminados típicos se muestran en la sección 3.4.1 Código de laminado

Tabla 3-13 Ejemplos de los efectos causados por laminados no-simétricos [106, pp. 7–30].

Tipo	Ejemplo	Comentarios
Simétrico, balanceado	(+45, -45, 0, 0, -45, +45)	Plano, constante esfuerzo de plano medio
No simétrico, balanceado	(90, +45, 0, 90, -45, 0)	Induce curvatura
Simétrico, no balanceado	(-45, 0, 0, -45)	Induce torsión
No simétrico, no balanceado	(90, -45, 0, 90, -45, 0)	Induce torsión y curvatura

3.4.1. Código de laminado

El código de laminado es una notación especial para escribir de manera más corta el orden de laminados presentes en un material laminado compuesto [6] por medio de orden de ángulo de láminas entre corchetes divididos por diagonal.

Un simple orden de laminado consecutivo como mostrado indica el orden de capas de laminado en un material. Ejemplo de esto se muestra en la **Figura 3–25**.

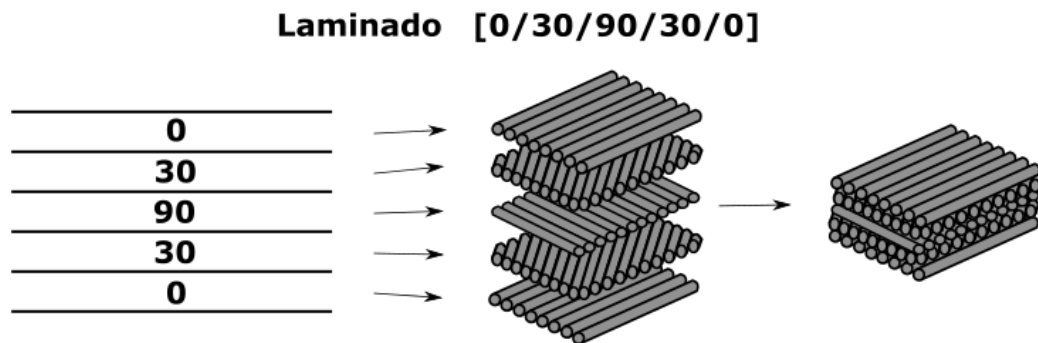


Figura 3–25 Código de laminado: Orden consecutivo.

Un **subíndice numerado** en una capa de laminado indica el número de repeticiones de una lámina en la localización correspondiente. Ejemplo de esto se muestra en la **Figura 3–26**.

Laminado $[0/90_2/0/90]$

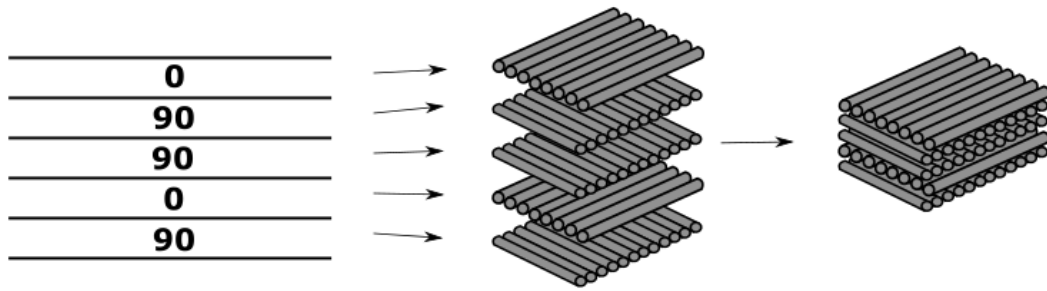


Figura 3–26 Código de laminado: Subíndice 2 denotando repetitividad de capa.

Un subíndice “s” indica la simetría del compuesto por medio del plano medio, y una línea horizontal superior del número de una capa indica que esa capa es la capa central del compuesto, indicando también, un numero impar de capas. Ejemplo de esto se muestra en la Figura 3–27.

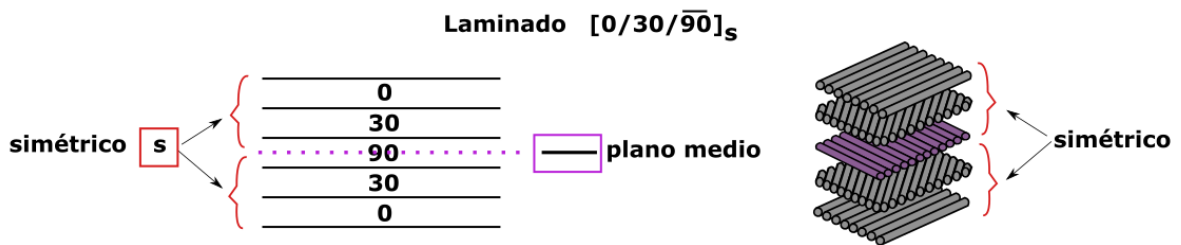


Figura 3–27 Código de laminado: Simetría de laminado y plano medio laminado impar.

3.4.2. Laminados simétricos

Se le denomina laminado simétrico, si el ángulo y grosor de un laminado se repite a partir de un laminado central. Un ejemplo es el laminado mostrado en la Figura 3–28 [6]:

Laminado $[0/30/90]_s$

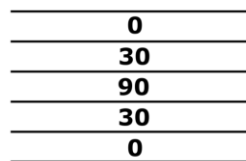


Figura 3–28 Representación gráfica laminado simétrico.

3.4.3. Laminados capa cruzada

También conocido como laminado con capas especialmente ortotrópicas, es un laminado que solo cuenta con capas de 0° y 90° . Un ejemplo es mostrado en la Figura 3–29 [6]:

Laminado [0/90₂/0/90]

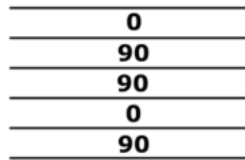


Figura 3–29 Representación gráfica laminado capa cruzada.

3.4.4. Laminados de capa a ángulo

Se denomina laminado de capa a ángulo si tiene capas del mismo material y grosor orientadas al mismo ángulo $+\theta$ y $-\theta$. Ejemplo es mostrado en la **Figura 3–30** [6]:

Laminado [-40/40/-40/40]

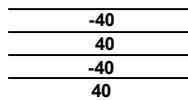


Figura 3–30 Representación gráfica laminado capa a ángulo.

3.4.5. Laminados antisimétricos

Se denomina laminados antisimétricos si el grosor y material es el mismo del plano medio, pero las orientaciones de capas son contrarias. Ejemplo es mostrado en la **Figura 3–31** [6]:

Laminado antisimétrico

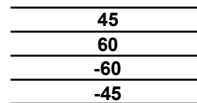


Figura 3–31 Representación gráfica laminado antisimétrico.

3.4.6. Laminados balanceados

Un laminado es balanceado si cuenta con capas pares a ángulos $+\theta$ y $-\theta$, no necesitando ser adyacentes las capas, pero si teniendo el mismo grosor para asegurar balanceo de elasticidad. Un ejemplo es laminado mostrado en la **Figura 3–32** [6]:

Laminado [30/40/-30/30/-30/-40]

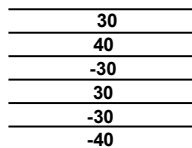


Figura 3–32 Representación gráfica laminado balanceado.

3.4.7. Laminados quasi-isotrópico

Un laminado quasi-isotrópico es aquel que elásticamente dentro del comportamiento extensional se comporta como un material isotrópico al momento de rotarlo planamente, manteniendo los mismos, o muy similares valores de módulos elásticos promediados independientemente de la rotación. Ejemplos de estos laminados se muestra en la **Figura 3-33**:

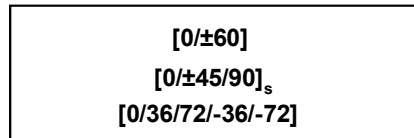


Figura 3-33 Ejemplos de laminados balanceados.

3.4.8. Otros tipos de laminados

Otros tipos de laminado realizan la inclusión de otros tipos de capas o materiales entre sus capas, sean *foams*, *adhesivos*, o *matrices de material corrugado* (similar al cartón de paquetería común), como se maneja en paneles sándwich *honeycomb* de Aero estructuras, como mostrado en la **Figura 3-34**. El uso de este tipo de estructuras sándwich tiene ventajas de disminución de peso, sin afectar gravemente la resistencia del material, dependiendo del uso del componente. Entre sus propiedades principales se tiene altos valores de rigidez flexora a un mínimo peso, en comparación con construcciones de aluminio o compuesto sólido [106].

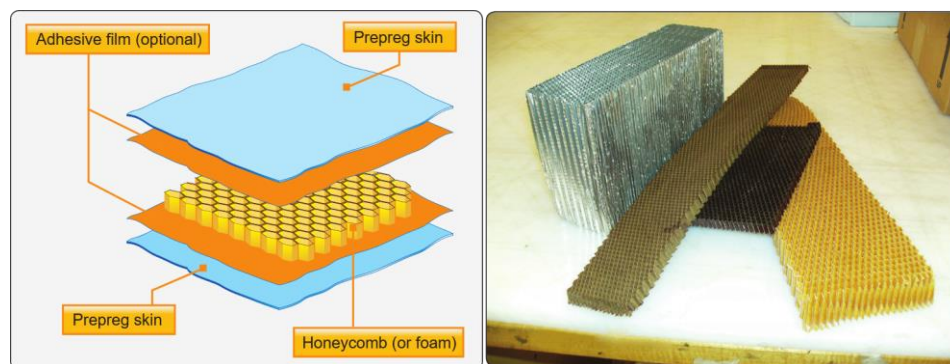
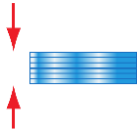
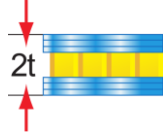



Figura 3-34 Construcción de un sándwich honeycomb y tipos de núcleo honeycomb. Estos son unidos mediante distintos medios, típicamente adhesivos[106].

El uso de este tipo de configuración de laminado tiene ventajas principales en el aumento de grosor y resistencia flexora de un laminado, sin comprometer el peso de este, como mostrado en la Tabla 3-14.

Tabla 3-14 Resistencia y rigidez de material sándwich honeycomb relativos a un laminado sólido. Propiedades comparadas unitariamente al laminado sólido. [106, pp. 7–11].

	Laminado sólido	Grosor de núcleo (t)	Grosor de núcleo (4t)
Figura			
Grosor	1.0	7.0	37.0
Resistencia Flexora	1.0	3.5	9.2
Peso	1.0	1.03	1.06

- **Materiales superficiales/cara de sándwiches (facing materials):**

La mayoría de las estructuras honeycomb usadas en construcción de aeronaves tienen aluminio, fibra de vidrio, Kevlar, o capas de fibra de carbono. Capas de fibra de carbono no pueden ser utilizadas con honeycomb de aluminio debido a que esta causa corrosión del aluminio. Titanio y acero son utilizados para aplicaciones especiales en construcciones de alta temperatura. Las capas superficiales de muchos componentes son comúnmente delgadas, a veces incluyendo solo 3 o 4 capas. Reportes de campo indican que estas capas no tienen muy buena resistencia a impactos [106].

- **Materiales de núcleo (core materials):**

Cada tipo de material de núcleo tiene ciertas propiedades y beneficios específicos de su uso. El más común tipo de material utilizado en estructuras honeycomb es papel de arámida, mientras que fibra de vidrio es utilizada para aplicaciones de altas resistencias. Estos pueden encontrarse en distintos tipos de acomodo y forma de celda, las cuales se comportan de manera distinta elásticamente y en resistencia.

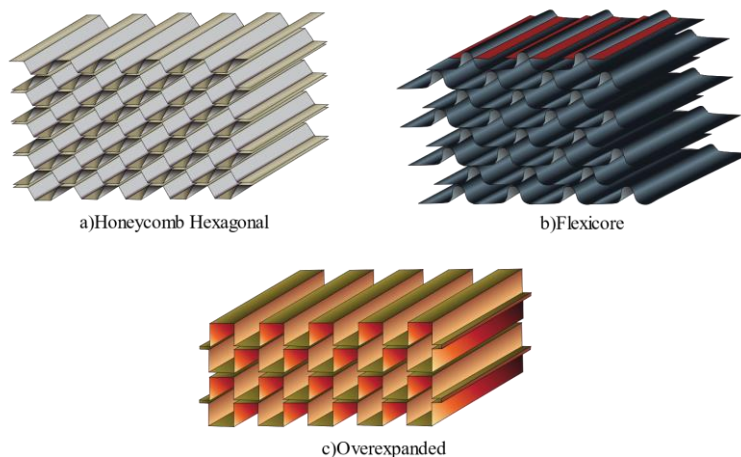


Figura 3–35 Tipos de núcleos de materiales sándwich. a) Honeycomb hexagonal, b) Flexicore, c) Overexpanded [106].

Entre los tipos de material de núcleo existentes se encuentran [106]:

- **Honeycomb de Papel Kraft:**
Relativa baja resistencia, buenas propiedades aislantes, fácilmente accesible y bajo costo.
- **Honeycomb de Termoplásticos:**
Buenas propiedades aislantes, buena absorción de energía y/o redirección, paredes de celda lisas, resistencia a humedad y químicos, compatibles con el ambiente, estéticos y relativo bajo costo.
- **Honeycomb de Aluminio:**
Mejor relación resistencia-peso y absorción de energía, buenas propiedades de transferencia de calor, propiedades de protección a campos electromagnéticos, lisas y delgadas paredes de celda y relativo bajo costo.
- **Honeycomb de Acero:**
Buenas propiedades de transferencia de calor, protección electromagnética y resistencia al calor.
- **Honeycomb de Materiales especiales (titanio):**
Relativa alta relación peso-resistencia, buenas propiedades de transferencia de calor, resistencia química, y resistencia a muy altas temperaturas.
- **Honeycomb de Papel de aramida:**
Resistencia a flamas, retardante a fuego, buenas propiedades aislantes, bajas propiedades dieléctricas y buena formabilidad.
- **Honeycomb de Fibra de vidrio:**
Propiedades cortantes ajustables por configuración de lámina, bajas propiedades dieléctricas, buenas propiedades aislantes y buena formabilidad.
- **Honeycomb de Carbono:**
Buena retención de estabilidad dimensional, retención de propiedades a altas temperaturas, alta rigidez, muy bajo coeficiente de expansión térmica, conductividad térmica ajustable, relativamente alto módulo cortante y precios elevados.
- **Honeycomb Cerámico:**
Resistentes a muy altas temperaturas, buenas propiedades aislantes, se puede obtener en muy pequeños tamaños de celda y es de precios muy elevados.
- **Foams diversos:**
Son usualmente utilizados para aviones ligeros, para dar resistencia y forma a puntas de alas, controles de vuelo, secciones de fuselaje, alas y costillas de avión. Los núcleos de foam no son comúnmente utilizados en aviones de tipo comercial ya que son más pesados y menos resistentes que núcleos de honeycomb. Entre distintos tipos de foam se encuentran poliestirenos, fenólicos, poliuretano, polipropileno, polivinilo, polimetacrilimida, entre otros, dependiendo de las aplicaciones y propiedades deseadas. (Refiera a FAA - Aviation Maintenance Technician Handbook – Airframe Volume 1, página 7-13 [106], si necesita una descripción y ventajas de cada uno de estos foams).

3.5. Lenguaje y entorno de programación

El lenguaje y entorno de programación utilizado es MATLAB®, el cual es una paquetería de herramientas de software y de programación altamente utilizada en diversas áreas ingenieriles y científicas para cálculos matemáticos y análisis de datos gracias a sus relativamente sencillas funciones de cálculo matemático y visualización de datos.

De la página oficial: [107] *“MATLAB® es utilizado por millones de ingenieros y científicos a nivel mundial para analizar y diseñar sistemas y productos que transforman el mundo. El lenguaje MATLAB basado en matrices y es la forma más natural de expresar matemática computacional. Funciones de gráficos incluidos hacen sencillo el visualizar y obtener entendimiento de conjuntos de datos. El entorno de escritorio invita a la experimentación, exploración y descubrimiento. Las herramientas de MATLAB y capacidades son rigurosamente probadas y diseñadas para trabajar en conjunto.”*. MATLAB® es una marca registrada producto de la compañía MathWorks®. Mas información puede encontrarse en Apéndice A, sección A.4.



Figura 3–36 Logo oficial de MathWorks® creador de MATLAB®.

Capítulo 4. Marco teórico: Mecánica de materiales compuestos

4.0. Mecánica de materiales y análisis de sólidos

La mecánica de sólidos o mecánica de materiales son ciencias que se dedican al estudio de materiales y estructuras, que en conjunto explican a diferentes niveles las deformaciones, movimientos y reacciones internas que se presentan en distintos materiales sólidos bajo la acción de fuerzas externas [8].

Los sólidos pueden experimentar distintos tipos de carga como: cargas axiales, cortantes, de torsión, flexión y combinaciones de estas, que se pueden presentar en las distintas direcciones espaciales (en 1, 2 o 3 dimensiones). Estas cargas generan distintas deformaciones y distorsiones internas en el material: ya sea en la zona elástica (energía recuperable), o en la zona plástica, generando una deformación o un agrietamiento permanente (energía no recuperable).

En representación tridimensional cartesiana, las cargas normales (tensión-compresión) y tangenciales (cortantes) en un elemento pueden ser representadas en un cubo de esfuerzos. Donde, por cada eje dimensional (1, 2, 3), se tiene una carga normal y dos cargas tangenciales a la superficie de estudio, como se muestra en la **Figura 4-1**.

Las cargas normales por definición son aquellas en dirección ortogonal (o normal) a la superficie de interés y las cargas tangenciales son aquellas en dirección tangente a la superficie de estudio que son aplicadas en dirección de los ejes restantes. La combinación de cargas da como resultado un combinado de deformaciones dentro del material en este caso el cubo de geometría que se le denomina *estado de esfuerzos* o *estado de energía*.

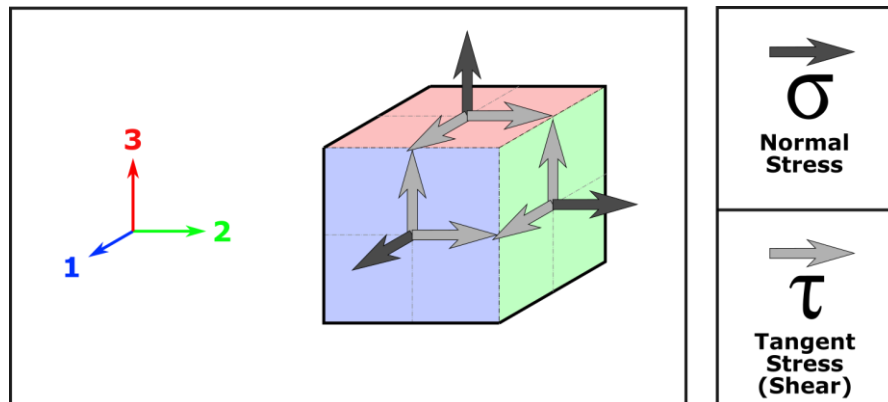


Figura 4-1 Cargas normales y tangenciales en un cubo abstraído de un elemento, donde σ representa los esfuerzos normales (Normal Stress en inglés) y τ representa los esfuerzos cortantes (Shear Stress en inglés).

Dependiendo de la intensidad, la combinación de cargas en el material, se obtienen distintas respuestas de deformación en el material que pueden crear modos de fallo distintos.

4.1. Teoría de la elasticidad

La propiedad elástica en un material es la capacidad que tiene de deformarse y regresar a su estado original. El comportamiento elástico en un material depende de su composición química y microestructura. La *ley de proporcionalidad de Hooke*, se utiliza para representar el comportamiento elástico de una manera homogéneo-promediada la cual se muestra en la Ecuación 4.0:

$$F = k * x \quad (4.0)$$

Donde se relaciona el comportamiento lineal (k) entre la deformación (x) que experimenta un material debido a la aplicación de una carga (F), (Vea **Figura 4-2**).

La ley de Hooke usada en el estudio de resistencia de materiales usa la misma lógica de proporcionalidad que la ley de proporcionalidad de Hooke. En esta se considera un material idealmente elástico-homogéneo y describe sus deformaciones por medio de la *deformación elástica extensional*, la *deformación elástica distorsional* y la cantidad de fuerza aplicada en un material por medio de módulos de proporcionalidad elásticos [38].

Para la relación de **deformación elástica extensional**, se hace uso de la relación entre los parámetros de *deformación unitaria extensional* (ϵ) y el *esfuerzo* (σ), por medio de un módulo de proporcionalidad elástico (E) el cual se denomina módulo de Young y que se muestra en la Ecuación 4.1. Estos parámetros describen la deformación en dirección dimensional normal a un plano de estudio. La **Figura 4-2** muestra una representación visual de las deformaciones extensionales en 2D.

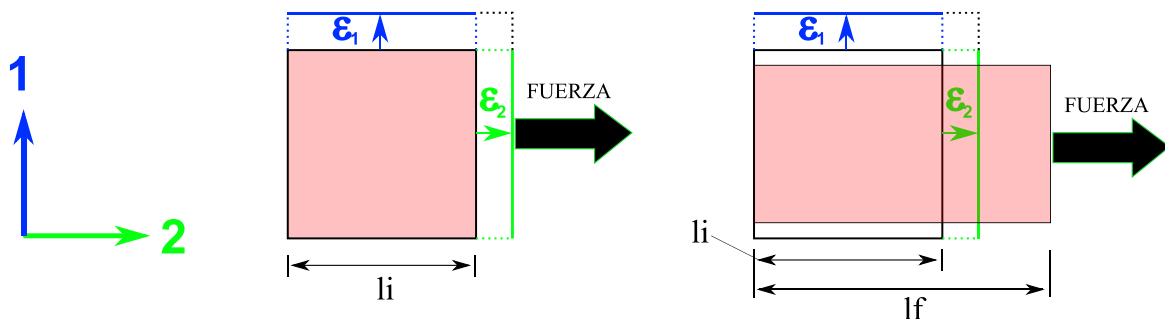


Figura 4-2 Representación 2D de deformaciones extensionales en ejes coordenados, siendo ϵ_1 deformación en dirección 1 y ϵ_2 deformación en dirección 2. Al aplicar una fuerza, l_i es el largo inicial y l_f es el largo final de un elemento deformado.

$$\sigma = E * \epsilon \quad (4.1)$$

La *deformación unitaria extensional* ϵ se obtiene a través de la Ecuación 4.2:

$$\epsilon = \frac{l_i - l_f}{l_f} \quad (4.2)$$

La *deformación unitaria extensional* se define como la deformación resultante total del material por unidad de longitud, la cual se puede interpretar como el aumento o disminución porcentual del largo inicial del material al ser aplicada una carga, y su unidad es “distancia/distancia”.

El *esfuerzo normal* en un elemento de material (σ) se obtiene a través de la Ecuación 4.3. El *esfuerzo normal* se define como la cantidad de fuerza distribuida por unidad de área dentro de un material en dirección normal al plano de estudio actual.

$$\frac{F}{A} \text{ (fuerza en dirección normal)} \quad (4.3)$$

El módulo elástico de proporcionalidad, o también llamado módulo de Young, se puede obtener despejando la variable de la Ecuación 4.1 y obteniendo la Ecuación 4.4 a través de la relación Ecuación 4.4:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (4.4)$$

El módulo de Young E es la relación existente entre el esfuerzo aplicado en un material y la deformación longitudinal influida dentro de él. El módulo de Young se considera como uno de los parámetros que define la magnitud de rigidez en un material. Esta es, por lo tanto, una propiedad inherente al tipo material y cambia entre materiales (o de dirección a dirección en materiales no isotrópicos).

Otro tipo de deformación es la relación de esfuerzo-deformación elástica distorsional. La distorsión, de forma análoga a la fórmula de deformación extensional, es el cambio de geometría angular en un material descrito por medio de la relación entre la *deformación unitaria cortante* (γ), el *esfuerzo cortante* (τ), a través de un módulo de proporcionalidad elástico cortante (G) mostrado en la Ecuación 4.5. La **Figura 4–3** muestra la representación 2D de deformaciones distorsionales. El módulo cortante G es la proporción lineal existente de esfuerzo cortante aplicado en un material y la deformación distorsional (cortante) presente en un elemento de material.

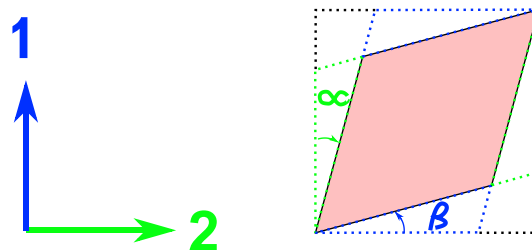


Figura 4–3 Representación 2D de deformaciones distorsionales en ejes coordenados, siendo α deformación distorsional en respecto al eje 1 y β deformación distorsional en respecto al eje 2, conocidos también como *deformación tensorial*, o *tensorial strain*.

$$\tau = \gamma * G \quad (4.5)$$

La deformación unitaria cortante γ se obtiene a través de la Ecuación 4.6, la cual es la suma de los ángulos (en radianes) al generarse una deformación cortante infinitesimal (distorsión) en un material. El *esfuerzo cortante* τ se obtiene a través de la Ecuación 4.7.

$$\gamma = \alpha + \beta \quad (4.6)$$

$$F/A \quad (\text{fuerza en dirección tangencial, o paralela al plano}) \quad (4.7)$$

El *esfuerzo cortante* se define como la cantidad de fuerza por unidad de área en dirección cortante (tangente) aplicada a la superficie o plano de estudio dentro de un material.

Cuidado especial debe tenerse en diferenciar la deformación cortante tensorial (representada por γ) y la deformación cortante de ingeniería (representada por ϵ), donde existe una relación del doble del valor entre γ y ϵ ($2\gamma = \epsilon$ [86]), los cuales, dependiendo del autor son intercambiados arbitrariamente (γ por ϵ o viceversa) y puede generar error si no se toma en consideración.

La ley de Hooke cuando se aplica de manera tridimensional toma en consideración la interrelación que tiene el esfuerzo en un material dado con la deformación unitaria a través de módulos proporcionales de elasticidad en las 3 direcciones espaciales las cuales se estudian en un elemento cúbico en sus 3 ejes cartesianos 1, 2 y 3 de la **Figura 4-4**.

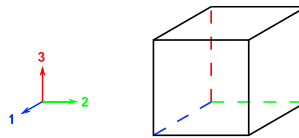


Figura 4-4 Elemento de material cubico cúbico, donde se aprecian las tres direcciones ortogonales entre sí 1, 2 y 3.

El estudio de diversos materiales conlleva analizar las distintas proporciones de deformación elástica tales como los isotrópicos, anisotrópicos, ortotrópicos, etc. y sus relaciones lineales de elasticidad. Por ejemplo, un material compuesto laminado, en ciertas aplicaciones se puede considerar lineal, “pero nunca” puede considerarse isotrópico [6]. La **Ley de Hooke Generalizada** representa un conjunto de ecuaciones simultáneas lineales que describen y toman en consideración fuerzas, dirección, módulos de elasticidad (dependiente del material), deformaciones y esfuerzos en las distintas direcciones espaciales de un material, así como su interdependencia direccional, siendo una herramienta útil para el análisis de materiales.

4.1.1. Ley de Hooke Generalizada

La forma más generalizada de elasticidad teórica es aquella de los materiales completamente anisotrópicos. Esta se destaca por no contar con ningún plano de simetría, y cuyas proporciones de deformaciones al momento de aplicar cargas en él no coinciden en cargas tangenciales. La deformación simétrica y no simétrica puede observarse en la **Figura 4-5**.

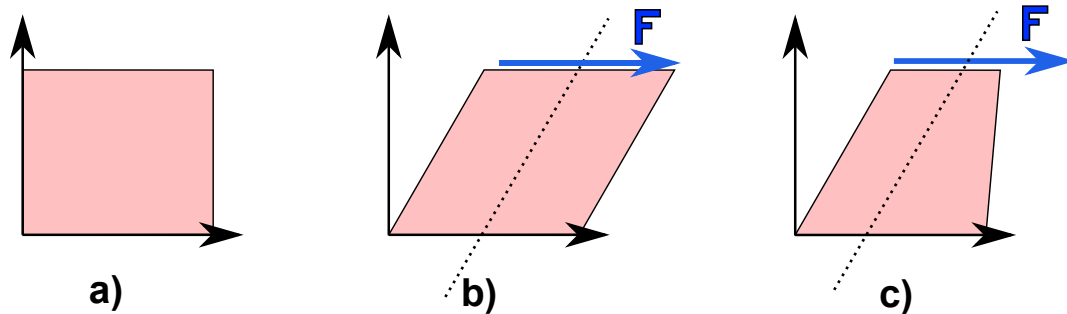


Figura 4-5 Representación de deformaciones de un material. Donde F representa la fuerza aplicada y los incisos representan: a) Material no deformado, b) Material deformado bajo carga con deformación simétrica por plano de simetría (línea punteada), c) Material deformado bajo carga con deformación no simétrica por plano de simetría (línea punteada).

Un material generalmente anisotrópico es aquel que se caracteriza por no contar con ejes de simetría (ver **Figura 4-5 c**), expandido a tres dimensiones, en todas las combinaciones de direcciones espaciales, como se muestra en la **Figura 4-6**.

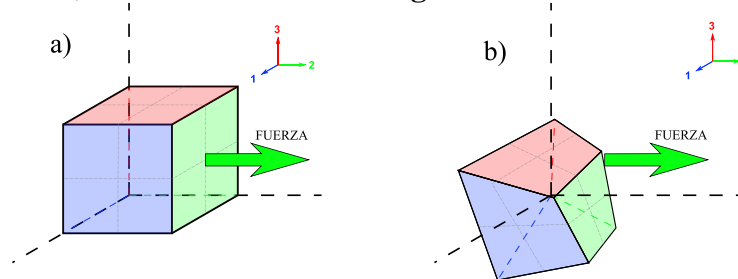


Figura 4-6 Representación 3D de deformación de un elemento de material sin aparentes planos de simetría al aplicar una fuerza.

Las distintas direcciones espaciales para esfuerzos o deformaciones cortantes y normales en un elemento de material son representadas en la **Figura 4-7**.

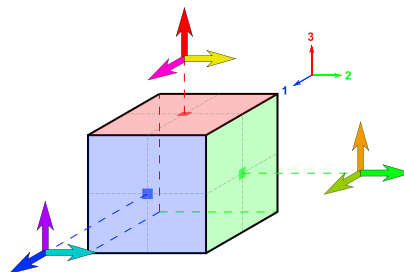


Figura 4-7 Direcciones espaciales de esfuerzos y deformaciones donde se pueden presentar simetrías o no simetrías.

Dependiendo los autores de la literatura utilizada, no se hace distinción de la variable utilizada para representar esfuerzos entre las variables sigma “ σ ” y tau “ τ ”, y entre las variables épsilon “ ϵ ” y gamma “ γ ” para deformaciones, usando solamente la variable sigma σ para esfuerzos, y la variable ϵ para deformaciones. Utilizando esta notación, la distinción se hace sólo a través de los subíndices de la variable de interés para marcar la dirección en que un esfuerzo o deformación se aplica, siendo el **primer índice** indicador de la dirección de la superficie en la cual se aplica la fuerza, y el **segundo índice** la dirección de la fuerza aplicada. Esta notación simplificada es ejemplificada en la **Figura 4–8**.

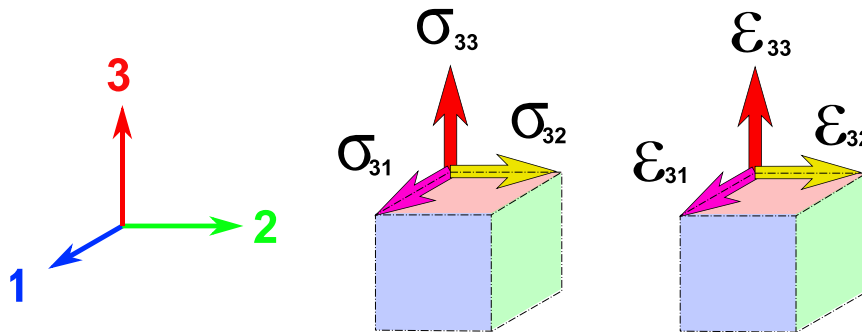


Figura 4–8 Notación de esfuerzos y deformaciones (normales y cortantes) con solo variables sigma σ y épsilon ϵ . Siguiendo esta notación, σ_{31} representa el esfuerzo situado en la cara normal a la dirección 3, con dirección 1 de aplicación de carga.

Tomando en consideración los 3 ejes cartesianos posibles en un material presentes en un plano, a los cuales se les puede aplicar 1 esfuerzo normal y 2 esfuerzos tangenciales, dando como resultado un total de 9 parámetros distintos de esfuerzos ilustrados en la **Figura 4–9**.

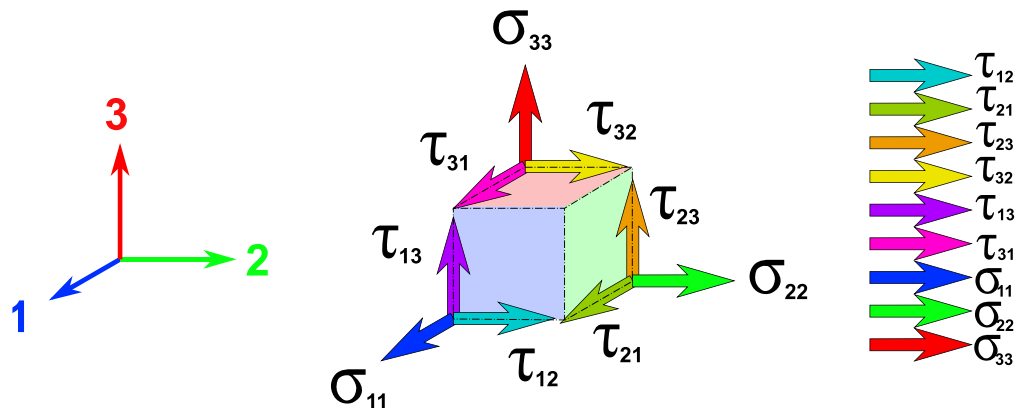


Figura 4–9 Direcciones de esfuerzos en cubo de material. Donde σ representa esfuerzos normales, τ representa esfuerzos cortantes y los subíndices representan la superficie de aplicación y la fuerza aplicada en ella respectivamente.

Cada una de estas direcciones de aplicación de esfuerzos tiene una influencia en las deformaciones del material, los cuales (de igual modo a los esfuerzos), por cada eje de dimensión se tiene 1 deformación longitudinal y 2 deformaciones tangenciales. Así, debido a los 3 ejes dimensionales suman un total de 9 direcciones de deformación los cuales son ilustrados en la **Figura 4–10**.

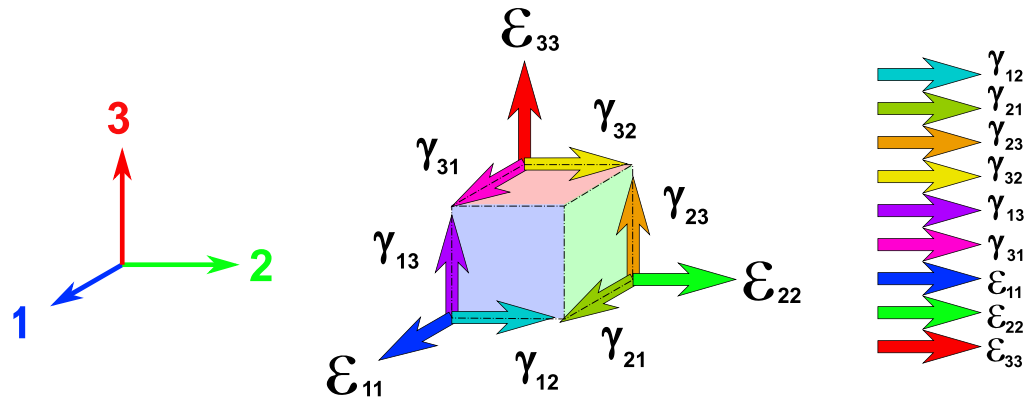


Figura 4–10 Direcciones de deformación en cubo de material. Donde ϵ representa deformaciones longitudinales, γ representa deformaciones cortantes y los subíndices representan la superficie de aplicación y la fuerza aplicada en ella respectivamente.

Cada una de las 9 direcciones de esfuerzos tiene influencia en cada una de las 9 direcciones de deformación a través de un módulo elástico (representativo de la influencia de proporcionalidad lineal). Por lo tanto, las interrelaciones de esfuerzo y deformaciones toman un total de 81 módulos elásticos distintos. Esto genera un conjunto de ecuaciones simultaneas que describen el estado de deformación en un material para cada uno de los esfuerzos como en la Ecuación 4.8 [72].

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= C_{1111}\epsilon_{11} + C_{1122}\epsilon_{22} + C_{1133}\epsilon_{33} + C_{1112}\epsilon_{12} + C_{1123}\epsilon_{23} \\
 &\quad + C_{1131}\epsilon_{31} + C_{1121}\epsilon_{21} + C_{1132}\epsilon_{32} + C_{1113}\epsilon_{13} \\
 &\quad \dots \\
 \sigma_{33} &= C_{3311}\epsilon_{11} + C_{3322}\epsilon_{22} + C_{3333}\epsilon_{33} + C_{3312}\epsilon_{12} + C_{3323}\epsilon_{23} \\
 &\quad + C_{3331}\epsilon_{31} + C_{3321}\epsilon_{21} + C_{3332}\epsilon_{32} + C_{3313}\epsilon_{13} \\
 &\quad \dots
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Donde σ representa esfuerzo, C representa el módulo de rigidez y ϵ representa deformación. En representación de ecuaciones matricial, este set de ecuaciones puede apreciarse en la Ecuación 4.9:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1121} & C_{1132} & C_{1113} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2221} & C_{2232} & C_{2213} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3321} & C_{3332} & C_{3313} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1221} & C_{1232} & C_{1213} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2321} & C_{2332} & C_{2313} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3121} & C_{3132} & C_{3113} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2112} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2121} & C_{2132} & C_{2113} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3212} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3221} & C_{3232} & C_{3213} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1321} & C_{1332} & C_{1313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

En la ecuación anterior, los subíndices de las constantes elásticas “C” describen los subíndices de los parámetros relacionados de esfuerzo y deformación marcados en **azul** y **rojo** respectivamente. Siguiendo esta notación, el módulo elástico C_{2322} , se refiere al módulo elástico que relaciona el esfuerzo aplicado en la cara normal al eje 2 con carga direccionada al eje 3 la y el cómo esta influencia la deformación aplicada en la cara normal al eje 2 que se deforma en dirección del eje 2. De aquí, se puede obtener la ecuación en notación corta como en la Ecuación 4.10 [72]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (4.10)$$

Donde i, j, k y l pueden asumir los valores 1, 2, 3 o x, y, z dependiendo del sistema cartesiano tridimensional usado, definiendo así la elasticidad anisotrópica generalizada.

4.1.2. Elasticidad anisotrópica en materiales de ingeniería común

En la práctica, los materiales no se comportan al grado de anisotropía descrita con 81 constantes elásticas distintas. El tipo de anisotropía aplicada a materiales comunes se obtiene simplificando el conjunto de ecuaciones anterior, tomando en consideración la simetría de esfuerzos y deformaciones distorsional-tangencial existentes en materiales reales. Para deformaciones distorsionales, la simetría es:

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21}, \quad \epsilon_{23} = \epsilon_{32}, \quad \epsilon_{31} = \epsilon_{13} \quad (4.11)$$

Y para esfuerzos tangenciales, la simetría es:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} \quad (4.12)$$

Lo cual, simplifica el conjunto de ecuaciones y número de constantes elásticas a uno de 6 esfuerzos, 6 deformaciones y sus interrelaciones con 36 constantes elásticas independientes como en la Ecuación 4.13.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Donde los subíndices de cada uno de los módulos elásticos “ C_{xxxx} ” son en relación con los subíndices de los esfuerzos y deformaciones relacionados. Dependiendo de la literatura, los subíndices dobles de esta expresión pueden simplificarse a través de la notación [72], [108]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1, \sigma_{22} = \sigma_2, \sigma_{33} = \sigma_3, \sigma_{23} = \sigma_4, \sigma_{31} = \sigma_5, \sigma_{12} = \sigma_6 \\ \epsilon_{11} &= \epsilon_1, \epsilon_{22} = \epsilon_2, \epsilon_{33} = \epsilon_3, \epsilon_{23} = \epsilon_4, \epsilon_{31} = \epsilon_5, \epsilon_{12} = \epsilon_6 \end{aligned}$$

Lo que da como resultado la misma ecuación, vector de esfuerzos, vector de deformaciones y misma matriz con subíndices simplificados:

Estas ecuaciones puede escribirse en forma compacta con la Ecuación 4.14 y 4.15 [108]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

$$\sigma_i = C_{ij}\epsilon_j,$$

O aún más simplificado como la Ecuación 4.16:

$$\sigma = A * \epsilon, \quad (4.16)$$

Donde **A** es la matriz de constantes elásticas, también conocida como **matriz de rigidez [C]**, **σ** es el vector de esfuerzos resultantes, y **ϵ** es el vector de deformaciones en un elemento de material. Si se desea obtener las deformaciones unitarias como resultado, la ecuación puede invertirse y la relación se obtiene a través de la matriz elástica **A** inversa, representada con **a** como en la Ecuación 4.17 [108]:

$$\epsilon = a * \sigma, \quad (4.17)$$

Donde **a**, es la matriz de constantes elásticas invertida, también conocida como **matriz de flexibilidad [S]**, **ϵ** es el vector de deformaciones unitarias y **σ** es el vector de esfuerzos en un elemento de material, la cual de forma extensa se puede apreciar en la Ecuación 4.18:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

La significancia física de las constantes elásticas interpretadas como relaciones entre esfuerzo-deformación multidireccional puede apreciarse en la siguiente **Figura 4-11** [86].

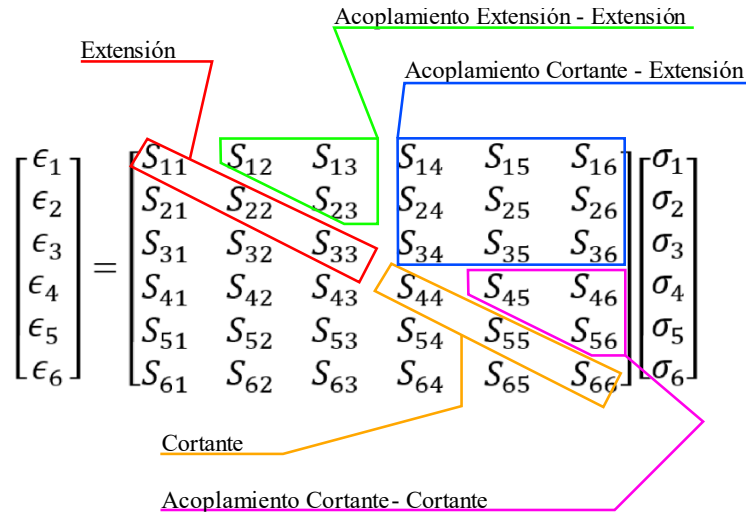


Figura 4-11 Significancia física de la matriz de flexibilidad denotando los tipos de acoplamiento entre esfuerzos y deformación que representan.

De la **Figura 4-11**, el acoplamiento “extensión” se refiere al acoplamiento entre esfuerzo y deformación en forma directamente normal (ej. el efecto del esfuerzo en dirección a eje 1 en relación con la deformación extensional en dirección a eje 1). El acoplamiento “extensión-extensión” se refiere a la influencia que el esfuerzo en una dirección tiene relativo a las otras direcciones (ej. esfuerzo en dirección de eje 1 en relación con la deformación extensional al material en el eje 2 o 3 y viceversa). El acoplamiento “cortante-extensión” se refiere a la influencia que el esfuerzo cortante tiene con las deformaciones extensionales, así como la relación contraria (esfuerzo extensional con las deformaciones cortantes). El acoplamiento “cortante-cortante” se refiere a se refiere a la influencia que el esfuerzo cortante en una dirección tiene relativo a la deformación cortante de otras direcciones y el acoplamiento “cortante” se refiere al acoplamiento entre esfuerzo y deformación en forma cortante correspondiente (ej. la relación entre esfuerzo en dirección 12 con la deformación en dirección 12).

De este modo, los componentes de esfuerzos normales y tangenciales en un material anisotrópico con **esfuerzos cortantes simétricos** se pueden apreciar en la **Figura 4-12**:

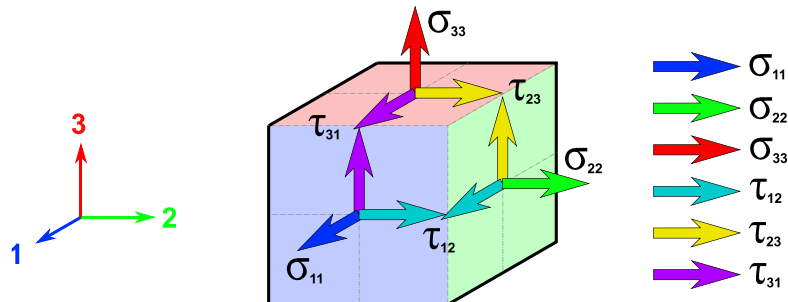


Figura 4-12 Esfuerzos en anisotropía simplificados debido a simetría, reducidos a solo 3 esfuerzos cortantes (τ) por simetría y 3 esfuerzos normales (σ).

Dependiendo de la combinación y variación de estos esfuerzos se generan deformaciones unitarias longitudinales y tangenciales dependientes de la dirección (anisotrópicas) con deformaciones cortantes simétricas, las cuales pueden ser apreciadas en la **Figura 4–13**:

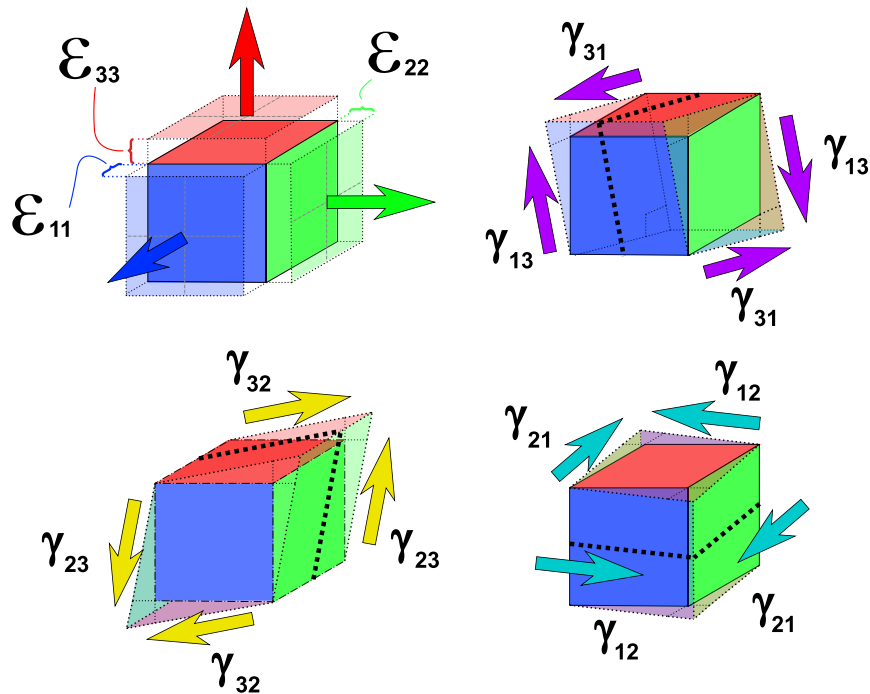


Figura 4–13 Deformaciones longitudinales ϵ y tangenciales γ en materiales anisotrópicos.

Derivado de la simetría deducida de la energía elástica en un material anisotrópico [6], los módulos elásticos con subíndices invertidos cuentan con elasticidad simétrica, por lo que:

$$C_{ij} = C_{ji}$$

De este modo, los valores de constantes elásticas en la matriz de rigidez y matriz de flexibilidad anteriores (36), se reducen a 21 constantes elásticas independientes, lo cual se muestra con la siguiente matriz dividida por las constantes elásticas en la diagonal, que son las constantes en direcciones principales como en la Ecuación 4.17.

Donde *sym* simboliza la simetría de la matriz elástica respecto a la diagonal. La simetría de

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \text{sym} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \text{sym} & \text{sym} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & C_{55} & C_{56} \\ \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & \text{sym} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

comportamiento elástico puede ser continuamente simplificado dependiendo del comportamiento del material, reduciendo el número de 21, a un número menor de constantes elásticas independientes.

4.1.3. Elasticidad monoclnica

La elasticidad monoclnica es una subcategora de elasticidad anisotrpica, la cual se caracteriza por tener el comportamiento de elasticidad anisotrpica excepto en un plano de simetra. Este tipo de simetra se presenta en algunos sistemas cristalinos de minerales naturales y sintticos y su representacin se observa en la **Figura 4-14**.

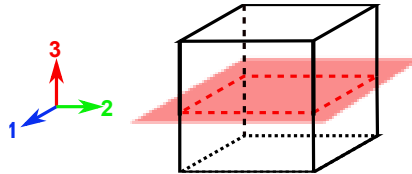


Figura 4-14 Elasticidad monoclnica: Un plano de simetra.

En este tipo de elasticidad la matriz elstica se reduce, debido a la eliminacin de independencia de los mdulos elsticos afectados por esta simetra [6].

$$C_{14} = 0, C_{15} = 0, C_{25} = 0, C_{34} = 0, C_{35} = 0, C_{46} = 0, C_{56} = 0,$$

Dando de resultado la matriz de la Ecuacin 4.18:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ sym & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ sym & sym & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ sym & sym & sym & C_{44} & C_{45} & 0 \\ sym & sym & sym & sym & C_{55} & 0 \\ sym & sym & sym & sym & sym & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Donde *sym* simboliza la simetra de la matriz elstica respecto a la diagonal.

4.1.4. Elasticidad ortogonalmente ortotrpnica

La elasticidad ortotrpnica ortogonal es otra subcategora de elasticidad anisotrpica, la cual se caracteriza por tener el comportamiento de elasticidad anisotrpica con 3 ejes de simetra elstica ortogonales entre s. Este tipo de elasticidad se puede encontrar en materiales naturales como la madera y materiales artificiales como los materiales compuestos reforzados por fibras de alta resistencia. Su representacin se muestra en la **Figura 4-15**.

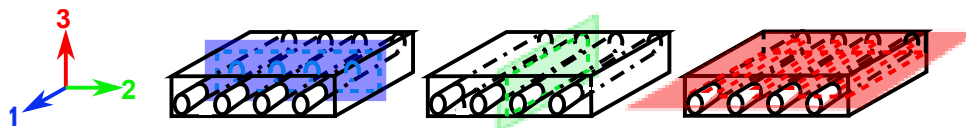


Figura 4-15 Elasticidad ortotrpnica ortogonal: Tres planos de simetra.

En este tipo de elasticidad la matriz elstica se reduce, debido a la eliminacin de independencia de los mdulos elsticos afectados por la simetra de 3 planos ortogonales de simetra [6].

$$C_{16} = 0, C_{26} = 0, C_{36} = 0, C_{45} = 0$$

Dando de resultado la matriz de la Ecuación 4.19:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ sym & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ sym & sym & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ sym & sym & sym & C_{44} & 0 & 0 \\ sym & sym & sym & sym & C_{55} & 0 \\ sym & sym & sym & sym & sym & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Donde *sym* simboliza la simetría de la matriz elástica respecto a la diagonal.

4.1.5. Elasticidad isotrópica

Si todos los planos posibles de simetría de comportamiento elástico en el material son iguales, a este tipo de elasticidad se le denomina material isotrópico. Este tipo de elasticidad tiene las mismas características elásticas independiente de la dirección y es el que comúnmente se les asigna a materiales como metales, rocas y cerámicos en escala macroscópica. Su representación se muestra en la **Figura 4-16**.

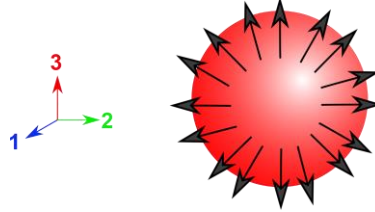


Figura 4-16 Elasticidad isotrópica: Infinitos planos y direcciones de simetría en material.

En materiales isotrópicos, la matriz elástica está dada por la Ecuación 4.20:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ sym & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ sym & sym & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ sym & sym & sym & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ sym & sym & sym & sym & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ sym & sym & sym & sym & sym & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Donde *sym* simboliza la simetría de la matriz elástica respecto a la diagonal.

4.2. Estudio macromecánico de laminados

El principal tipo de lámina utilizada con fin de aprovechar las características de alta resistencia de una fibra es la fibra unidireccional. La lámina de compuesto unidireccional se caracteriza de una matriz que rodea a fibras de un material las cuales están alineadas en una sola dirección. La lámina unidireccional se categoriza en los materiales anisotrópicos dentro de la subcategoría ortotrópicos, los cuales se caracterizan por tener 3 ejes de simetría. Para el estudio macromecánico de una lámina se considera un **sólido homogéneo con características elásticas ortotrópicas**, cuyo comportamiento es representado por 9 constantes de ingeniería independientes (módulos de Young E_1, E_2, E_3 , razones de Poisson $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$, y módulos cortantes G_{12}, G_{23}, G_{31}), los cuales son utilizados con la matriz elástica para un material ortotrópico mencionado en la sección 4.1.5. La matriz elástica de flexibilidad [S] se reescribe en términos de constantes de ingeniería y se obtiene la Ecuación 4.21 [6]:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Donde E representa módulo elástico, ν representa relación de Poisson, ϵ representa deformación y σ representa esfuerzo, los cuales en conjunto forman la ecuación para cálculo de estado de esfuerzo en un material ortotrópico. Si esta ecuación se invierte, se obtiene la ecuación con la matriz de rigidez [C] en términos de constantes de ingeniería, la cual se aprecia en la Ecuación 4.22 [6]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & -\frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} & -\frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} & \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_2\Delta} & -\frac{\nu_{31} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31} + \nu_{12}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & -\frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3} & \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Donde $\Delta = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})/(E_1E_2E_3)$

Junto a ello se consideran restricciones que las matrices deben ser **positivas** y **definidas**, por lo que se tienen las relaciones de las Ecuaciones 4.23, 4.24 y 4.25:

$$E_1 > 0, E_2 > 0, E_3 > 0, G_{12} > 0, G_{23} > 0, G_{31} > 0, \quad (4.23)$$

$$1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0, 1 - \nu_{31}\nu_{13} > 0, 1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0, \quad (4.24)$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0 \quad (4.25)$$

4.2.1. Lámina ortotrópica plana (2D)

Un modo de aprovechamiento de los materiales compuestos es por medio de superficies en láminas delgadas. Las láminas delgadas de material compuesto unidireccional tienen un muy pequeño espesor en comparación a sus otras dimensiones, se puede asumir un estado de **esfuerzo bidimensional** para simplificar el estudio de esfuerzos. La representación gráfica de esfuerzo plano puede apreciarse en la **Figura 4-17**.

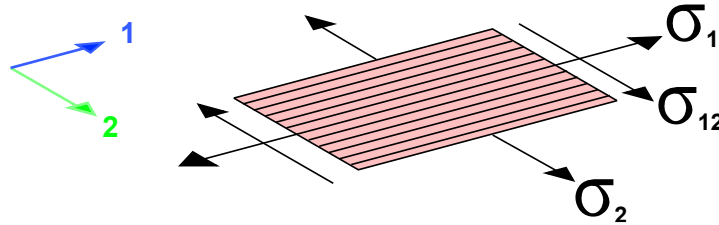


Figura 4-17 Representación gráfica de esfuerzo plano (2D). σ representa el esfuerzo y los subíndices indican la dirección de aplicación.

Para lograr esta simplificación, las direcciones de relaciones de esfuerzos y deformaciones en el 3er eje se eliminan de modo que los esfuerzos normales y cortantes fuera de plano se igualan a cero como en la Ecuación 4.26. La deformación distorsional fuera de plano se iguala a cero como en la Ecuación 4.27 [6]:

$$\sigma_3 = 0, \tau_{23} = 0, \tau_{31} = 0, \quad (4.26)$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{31} = 0 \quad (4.27)$$

Por lo que, si se desea derivar la deformación en un tercer eje, esto se hace por medio de la Ecuación 4.28:

$$\epsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \quad (4.28)$$

Donde S representan el módulo, o los elementos de la matriz de flexibilidad, ϵ representa deformación y σ esfuerzo. La deformación unitaria en dirección 3 no es independiente,

siendo función de las otras deformaciones, por lo que pueden omitirse. Estas simplificaciones resultan en la matriz de esfuerzo plano de la Ecuación 4.29 [6]:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Donde los términos S_{ij} son los elementos de la matriz de flexibilidad [S] para esfuerzo plano, con 4 elementos independientes.

Invirtiendo la ecuación anterior se obtiene la ecuación de esfuerzo plano por medio de la matriz de rigidez [Q] para esfuerzo plano, con 4 términos independientes como indica la Ecuación 4.30:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Estos coeficientes se obtienen al invertir la matriz de flexibilidad, obteniendo las relaciones de las Ecuaciones 4.31, a 4.34:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{21} * \nu_{12}} \quad (4.31)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} * E_2}{1 - \nu_{21} * \nu_{12}} \quad (4.32)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{21} * \nu_{12}} \quad (4.33)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (4.34)$$

Donde ν representa la relación de Poisson, E es el módulo de Young, G es la rigidez cortante, y los subíndices representan la dirección que representan.

4.2.2. Lámina ortotrópica plana (2D) con ángulos de inclinación

Las cargas aplicadas a un material compuestos no solo pueden aplicarse en la dirección de las fibras, sino también en distintas direcciones. El ángulo el cual se genera al rotar una lámina altera la respuesta elástica en la dirección de aplicación de la carga. Cada ángulo de giro tiene consecuencia distinta en la respuesta elástica interna del material en distintas direcciones de donde la carga sea aplicada.

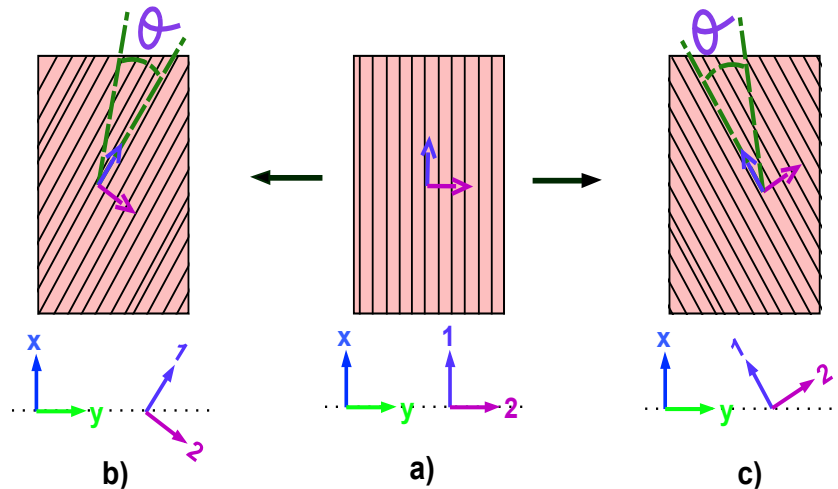


Figura 4–18 Representación gráfica de ángulos de giro a una lámina de fibra unidireccional con coordenadas globales (x , y) y coordenadas locales (1 , 2) donde b) y c) los ejes coordenados locales y globales no coinciden y en a) ambos ejes de coordenadas son coincidentes.

Para poder hacer el estudio del material de un ángulo de giro a otro se requieren ejes de coordenadas distintos. Un eje coordenado se le denomina el eje de coordenadas globales, el cual se representa con las coordenadas x y y de la **Figura 4–18** y se puede interpretar como el “eje de coordenadas de interés”, o bajo el cual se estudia el material o aplican cargas. El segundo eje coordenado se le denomina eje de coordenadas locales, el cual se representa con las coordenadas 1 y 2 de la Figura anterior y se puede interpretar como el eje de coordenadas perteneciente a las direcciones principales del material, siendo la dirección principal de las fibras el eje 1 , y la dirección transversal a las fibras el eje 2 .

Cuando la dirección de estudio del material (o aplicación de cargas) coincide con la dirección de las fibras, ambos ejes coordenados son el mismo, similar a la **Figura 4–18 a)**, sin la necesidad de manipulaciones especiales.

Por otro lado, si la dirección de estudio (o aplicación de cargas) en el material no coincide con la dirección del material (figura **b)** y **c)** de la **Figura 4–18**), existe un desfase angular que afecta la respuesta elástica del material. Por lo tanto, se debe estudiar por medio de transformaciones lineales de coordenadas o transformaciones tensoriales en base a funciones trigonométricas para transformar proyecciones de esfuerzos a distintos ejes, o la magnitud de constantes elásticas en el nuevo eje rotado. Para efectuar la transformación de

proyecciones de esfuerzos a un nuevo eje, se hace uso de la llamada matriz de transformación, la cual se define como la Ecuación 4.35 [6], [109]:

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Y su inversa como la Ecuación 4.36:

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Donde $c = \cos(\theta)$ y $s = \sin(\theta)$ en la matriz.

A través de estas transformaciones se obtienen las relaciones de deformación y esfuerzo de un eje coordinado a otro, obteniendo la Ecuación 4.37:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Para las relaciones de transformación de ejes coordenados de un estado de esfuerzos 2D, así como la Ecuación 4.38:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R][T]^{-1}[R]^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Para las relaciones de transformación de ejes coordenados de deformaciones, donde $[R]$ y $[R]^{-1}$ se les denomina la matriz de Reuter [6], [109] y se usa para ajustar el valor de la deformación cortante debido a la simetría presente, multiplicando o dividiendo por 2 el valor del esfuerzo cortante, teniendo así la Ecuación 4.39:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Y su inversa, la Ecuación 4.40:

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Haciendo uso de las relaciones de esfuerzo a un eje transformado, se puede hacer la relación entre el esfuerzo en eje principal con la deformación en eje principal, por medio de las características de la matriz elástica que resulta del giro de la dirección del material como la Ecuación 4.41 [6]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

La matriz elástica resultante de los términos intermedios $[q]$ tiene valores reducidos debido a la desviación angular, y se le denomina **matriz elástica reducida** en la Ecuación 4.42 [6]:

$$[q] = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Donde los valores de los módulos elásticos reducidos de la matriz son mostrados en las Ecuaciones 4.43 a la 4.48:

$$q_{11} = Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \quad (4.43)$$

$$q_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(c^4 + s^2) \quad (4.44)$$

$$q_{22} = Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \quad (4.45)$$

$$q_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \quad (4.46)$$

$$q_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})cs^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s \quad (4.47)$$

$$q_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \quad (4.48)$$

Se relaciona los esfuerzos y deformaciones en un eje global por medio de la matriz de módulos elásticos reducidos mostrada en la Ecuación 4.49:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Donde q son los elementos de la matriz de rigidez disminuida, σ son los elementos de esfuerzo y ϵ son los elementos de deformación. La importancia del estudio de transformación de esfuerzos y giro de láminas ortotrópicas se da no solo por la necesidad de una correcta caracterización de su comportamiento elástico, sino de la correcta transformación de sus componentes y la actual configuración interna del material que tiene relación directa con el estudio del modo de fallo que éste puede presentar.

Los modos de fallo y resistencia son desarrollados en la sección de teorías de resistencia de este documento. No obstante, es importante mencionar la influencia de la proyección de esfuerzos en una lámina unidireccional, la cual, al cambiar la orientación de una lámina de 0° a 90°, el dominio de resistencia del material se ve transportado de uno dominado por la resistencia de la fibra, a uno dominado por la resistencia de la matriz. Esto es discutido y analizado por medio de las diversas teorías de resistencia como las descritas por Sun, Quinn y Oplinger [110], donde se analiza la resistencia ultima de una lámina de compuesto el girar la dirección de la fibra de 0° a 90° y se hace discusión del como los modos de fallo principales pueden dividirse en tres dominios:

1. **De 0° a 2.9°:** Fallo es dominado principalmente por la fibra.
2. **De 2.9° a 27.1°:** Fallo es dominado por el esfuerzo cortante en la matriz.
3. **De 27.1° a 90°:** Fallo es dominado por el esfuerzo normal transversal a la matriz.

Los dominios de fallo por ángulo de material son ilustrados en la **Figura 4-19**.

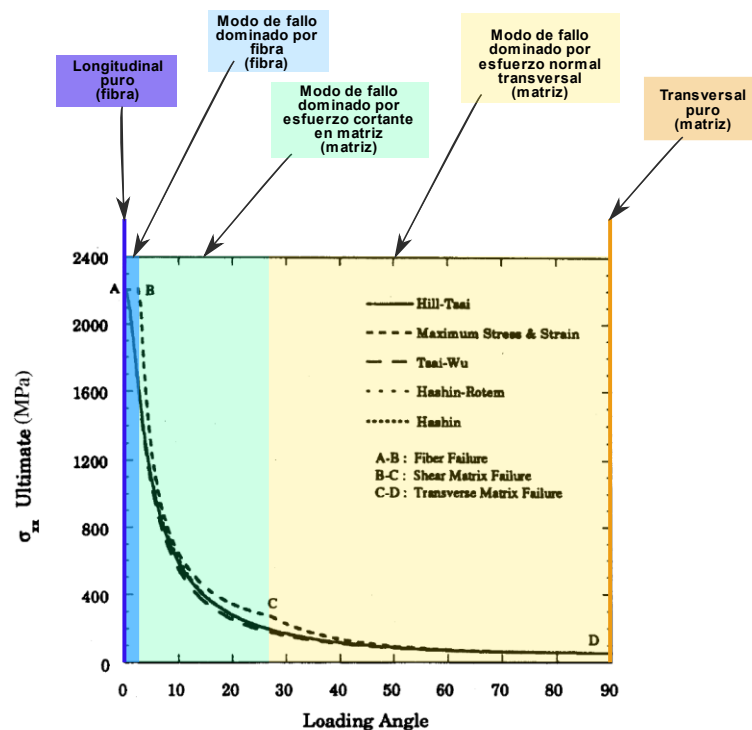


Figura 4-19 Dominios de fallo por ángulo de lámina. [110]

Los modos de fallo representados por el dominio de fibra o matriz son ilustrados en la **Figura 4-20**.

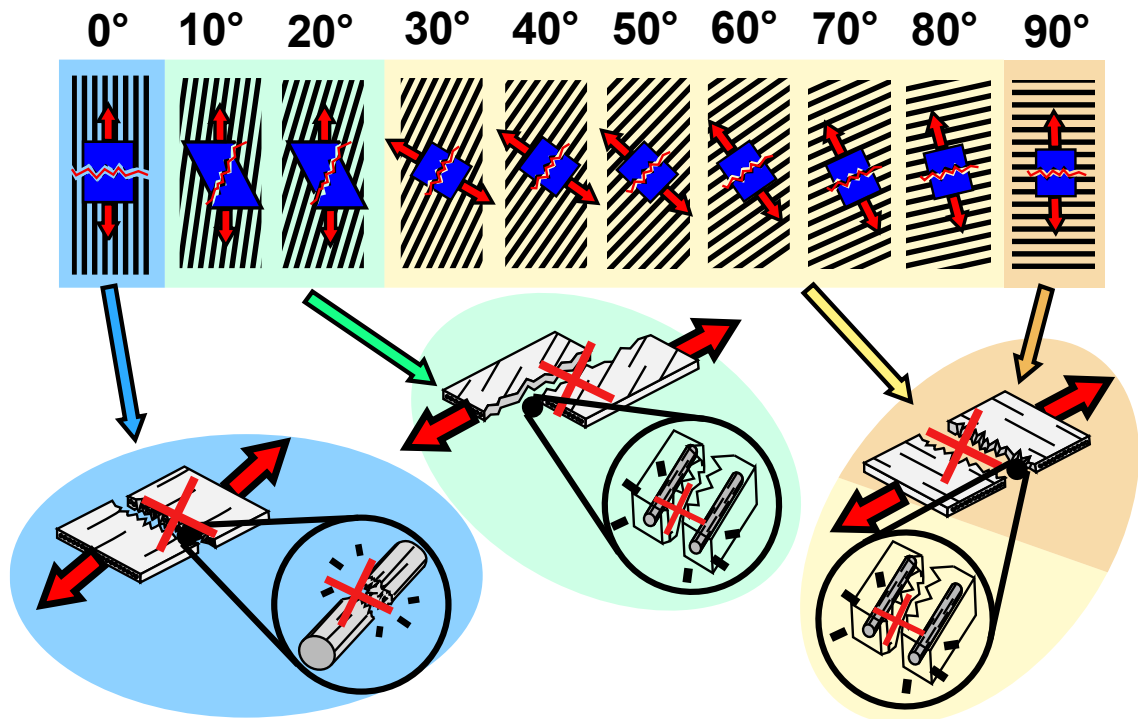


Figura 4–20 Representación gráfica de dominio de modos de fallo por ángulo de lámina. La carga aplicada es denotada por una flecha roja y la dirección de la fibra por las líneas negras paralelas. Donde los principales modos de fallo pueden ser divididos en tres principales categorías: En óvalo azul se indica el fallo por fibra, en óvalo verde se indica el fallo por matriz en manera cortante y en óvalo amarillo-naranja el fallo de matriz por tensión.

4.2.3. Lámina ortotrópica plana (2D) tejida y métodos de estudio

El estudio de láminas ortotrópicas de materiales compuestos se basa en la caracterización del comportamiento elástico dependiente de la dirección. Esto se logra por medio de la suposición de homogeneidad que se obtiene por la metodología de estudio de las matrices de elasticidad plana para una lámina o laminado. Estas características de elasticidad manifestadas macroscópicamente son directamente dependientes de la microestructura y conformación interna del material, por lo que diferencias en el posicionamiento de sus componentes; tiene influencia directa en su resistencia, modo de fallo (de láminas individuales) y la respuesta elástica. Algunos de los tipos de láminas tejidas utilizadas en la industria son ejemplificados en la **Figura 4–21**.

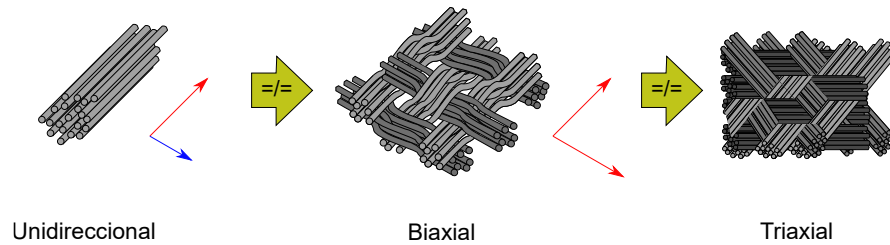


Figura 4–21 Comparación de la microestructura de laminado unidireccional, tejido biaxial y tejido triaxial.

Entre los distintos métodos de caracterización posibles, una manera de estudio de estos laminados compuestos tejidos es el presentado por Shembekar, Prashant S. y Naik, Niranjana K. [111], quienes por medio de interrelaciones micromecánicas de las características elásticas fibra-matriz basados en el trabajo de S. G. Lekhnitskii [41, pp. 45–50], analizan un compuesto tejido; tomando en consideración la rotación de láminas y su uso en compuestos laminados.

Las relaciones que utilizan para obtener las constantes elásticas efectivas de una lámina ortotrópica plana tejida en dirección principal X son:

$$\frac{1}{E_x^F} = \left(\frac{\cos^4 \theta_f(x, y)}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta_f(x, y)}{E_T} + (\cos^2 \theta_f(x, y) * \sin^2 \theta_f(x, y)^2) + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2 v_{TL}}{E^T} \right) \right) \quad (4.50)$$

$$E_y^F = E_T \quad (4.51)$$

$$v_{yx}^F = v_{TL} * \cos^2 \theta_f(x, y) + v_{TT} \sin^2 \theta_f(x, y) \quad (4.52)$$

$$\frac{1}{G_{xy}^F} = \left(\frac{\sin^2 \theta_f(x, y)}{G_{TT}} + \frac{\cos^2 \theta_f(x, y)}{G_{LT}} \right) \quad (4.53)$$

Del mismo modo, las relaciones para obtener las constantes elásticas efectivas de una lámina plana tejida en dirección principal Y son:

$$\frac{1}{E_y^w} = \left(\frac{\cos^4 \theta_w(x, y)}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta_w(x, y)}{E^T} + (\cos^2 \theta_w(x, y) * \sin^2 \theta_w(x, y)^2) + \left(\frac{1}{G_{LT}} - \frac{2 v_{TL}}{E^T} \right) \right) \quad (4.54)$$

$$E_y^w = E_T \quad (4.55)$$

$$v_{yx}^w = (v_{TL} * \cos^2 \theta_w(x, y)^2 + v_{TT} \sin^2 \theta_w(x, y)^2) * \left(\frac{E_y^w}{E_x^w} \right) \quad (4.56)$$

$$\frac{1}{G_{xy}^w} = \left(\frac{\sin^2 \theta_w(x, y)^2}{G_{TT}} + \frac{\cos^2 \theta_w(x, y)^2}{G_{LT}} \right) \quad (4.57)$$

Donde los subíndices y superíndices **w** y **y** se refieren a las direcciones locales de las fibras tejidas “Warp” y “Yarn” de una capa de fibras tejidas balanceadas [0-90] lo cual se ilustra en la **Figura 4–22**.

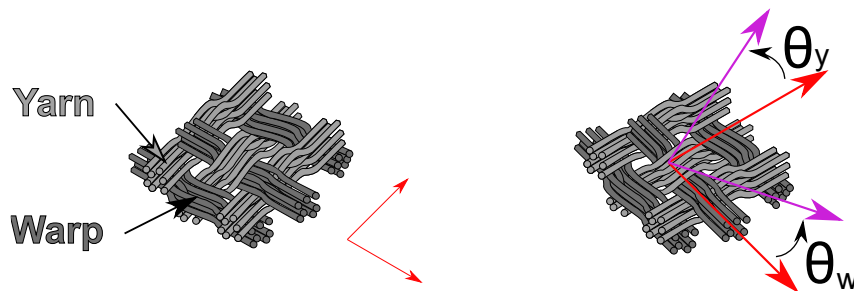


Figura 4–22 Partes de una capa de lámina tejida y ángulos de giro. θ representa el ángulo de giro y los subíndices **y** y **w** indican pertenencia a yarn y warp respectivamente.

Otro método de estudio y caracterización de laminados tejidos (woven laminates) es aquel trabajado por O. Zebdi, R. Boukhili y F. Trochu [112], quienes para lograr obtener el comportamiento extensional elástico de placas de laminados compuestos primeramente representan matemáticamente cada capa de material compuesto tejido como **capas independientes unidireccionales** con la mitad del grosor de una capa. Estas son subsecuentemente procesadas por la Teoría de Laminado Clásico (CLT) de la cual se obtiene la aproximación de módulos elásticos promedio. Esto se ilustra en la **Figura 4–23**.

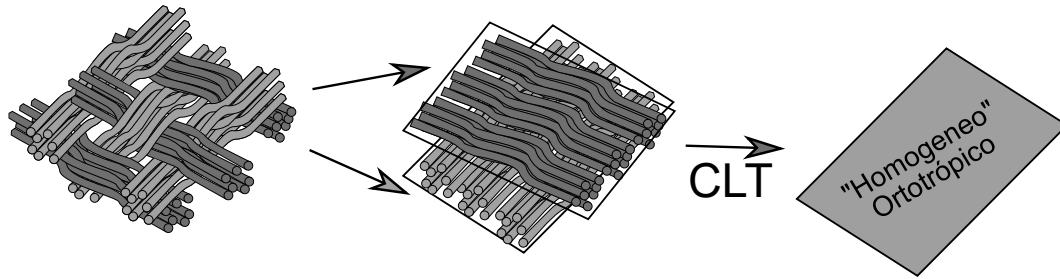


Figura 4-23 Aproximación inversa a caracterización de elasticidad de lámina CLT.

El método CLT inverso, aunque correlaciona y mantiene márgenes de error bajos en la predicción de módulos elásticos de laminados tejidos, no funge como método de caracterización de resistencia de amplias configuraciones de laminados debido a la diferencia física de entre los tipos de entrelazado de distintos tejidos, donde una diferencia notable se encuentra en el módulo de Poisson y las deformaciones transversales y distorsionales. Un compuesto tejido se comporta distinto de uno unidireccional debido a que en el compuesto tejido se restringe el desplazamiento relativo entre fibras entrelazadas una vez cubiertas por una matriz, afectando el comportamiento de deformación transversal o afectado por la relación de Poisson. Este comportamiento es posible observar en el trabajo por S. Ekşi y K. Genel [113], quienes realizaron pruebas con laminados unidireccionales y laminados tejidos de fibra de carbono y fibra de vidrio, cuyos datos muestran una tendencia a una mayor relación de Poisson en laminados tejidos. Comparativa de los módulos elásticos de fibras unidireccionales y tejidos se aprecian en la **Tabla 4-1**.

Tabla 4-1 Comparación de valores de elasticidad y resistencia laminados tejidos y unidireccionales [113].

Mechanical properties of fiber reinforced composites obtained from tension, compression and shear tests.

Reinforcement type	Volume of fiber V_f	Density $[\text{g}/\text{cm}^3]$	Elasticity module $[\text{MPa}]$	Shear module $[\text{MPa}]$	Poisson ratio $[-]$	Tensile strength $[\text{MPa}]$	Tensile strength/density	Shear strength $[\text{MPa}]$	Compression strength $[\text{MPa}]$	Elongation at break
Woven glass	30	1.55	14 352	4728	0.24	220	141.9	119	96	0.016
Woven aramid	30	1.2	19 087	2585	0.38	357	297.5	53	64	0.019
Woven carbon	30	1.31	42 000	12350	0.32	340	259.5	180	118	0.009
Unidir. glass (0°)	30	1.55	18 300	3895	0.25	432	278.7	30	71	0.028
Unidir. glass (90°)	30	1.55	7 940	3895	0.17	52	33.5	30	16	0.0096
Unidir. carbon (0°)	30	1.31	78 715	2195	0.4	826	630.5	20	118	0.0100
Unidir. carbon (90°)	30	1.31	4 930	2195	0.25	37	28.2	20	27	0.0130

4.2.4. Teoría de Laminado Clásica (Classical Laminate Theory)

Para lograr aproximar la resistencia de un material compuesto laminado es necesario obtener la respuesta elástica de cada una de las capas apiladas en el laminado, cuando al laminado en conjunto se le aplican cargas. Para esto, la **Teoría de Laminado Clásica** se distingue como un método efectivo de aproximación al comportamiento elástico y distribución de esfuerzos. En él se toma en consideración la no homogeneidad de distribución de cargas debido a la variación de deformaciones obtenidas por las distintas capas del material a través de su altura.

La Teoría de Laminado Clásica en aplicación de materiales compuestos se desarrolló alrededor de 1960 en los trabajos por E. Reissner y Y. Stavsky en 1961 [114] y Dong, Pister y Taylor en 1962 [115], demostrando métodos derivados de la teoría de placas del tipo Poisson-Kirchhoff en el estudio de distribuciones de esfuerzos en laminados compuestos. En ella se combinan consideraciones de esfuerzos debido a deformaciones causadas por deformaciones longitudinales y deformaciones debido a deformaciones por deflexión.

El método cuenta con las siguientes consideraciones teóricas [6]:

- El material de lámina se considera homogéneo.
- El material de lámina se considera ortotrópico.
- La deformación del material es siempre perpendicular al plano medio inicial ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).
- El laminado es delgado y con cargas solo en plano ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$).
- Los desplazamientos son continuos y pequeños a través de la lámina ($|u|, |v|, |w| \ll |h|$), donde h es el grosor del laminado y u, v y w los desplazamientos en x, y y z respectivamente.
- Cada lámina es elástica.
- No hay deslizamientos en la interfaz interlaminar.

La elasticidad y esfuerzos en este modelo de material se estudian en el comportamiento plano del material, haciendo caso omiso de esfuerzos fuera de plano similar al estado de funcionamiento de placas de láminas cuya extensión plana es considerablemente más grande en comparación a sus otras dimensiones como se muestra en la figura **Figura 4-24**.

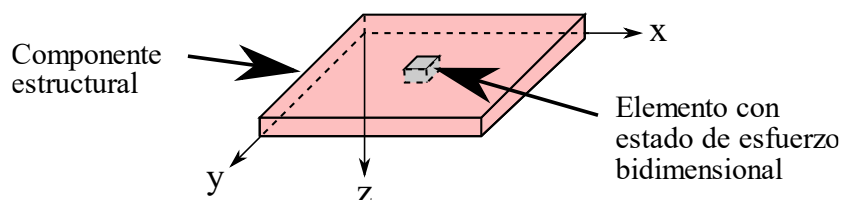


Figura 4-24 Esfuerzo plano en laminado compuesto.

Ilustración de esfuerzos planos y momentos son mostrados en la **Figura 4–25**.

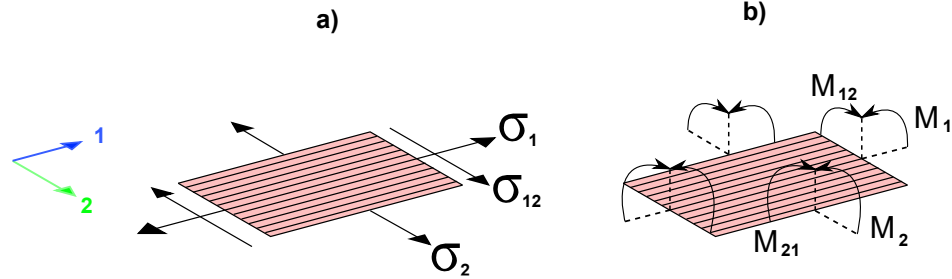


Figura 4–25 Lámina plana. A) Esfuerzos representados por σ , b) Momentos representados por M .

La relación de deformaciones debido a esfuerzos y momentos se obtiene por medio de la Ecuación 4.58:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

Donde se representa los esfuerzos en el plano medio con la Ecuación 4.59:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

Y las curvaturas de plano medio con la Ecuación 4.60:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} = + \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

Por lo tanto, de manera simplificada, las deformaciones por lámina en laminado se pueden escribir como en la Ecuación 4.61:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

Combinando este valor de las deformaciones de una lámina con la matriz elástica reducida se obtiene la relación de esfuerzo debido a la influencia de las deformaciones y momentos en el laminado como en la Ecuación 4.62:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

Obtención de deformaciones en plano medio:

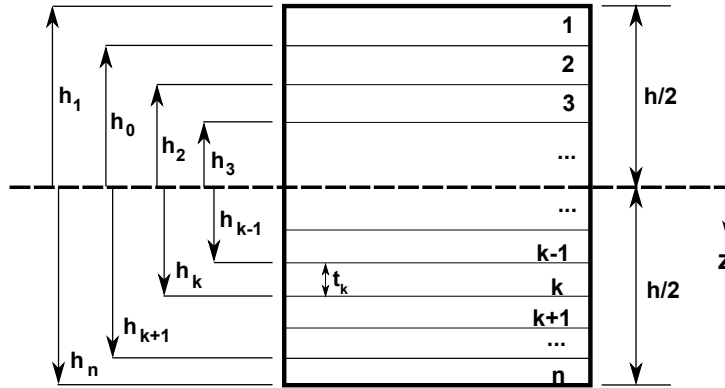


Figura 4–26 Orden y alturas de laminado, donde n es el número de láminas con el cual cuenta el laminado, h es la altura correspondiente a cierta altura, k es un número consecutivo de lámina actualmente analizado, k-1 es el número de lámina anterior y k+1 la lámina siguiente (redibujado de [6]).

Si un laminado tiene **n** láminas, el número de lámina de estudio actual es representado por **k** con un grosor **t_k**, el grosor **h** del laminado se obtiene con la Ecuación 4.63:

$$h = \sum_{k=1}^n t_k \quad (4.63)$$

El orden de láminas se puede observar ilustrado en la **Figura 4–26**. De aquí, las coordenadas en **z** de cada superficie de capa de lámina se obtienen con la Ecuación 4.64:

$$h = \sum_{k=1}^n t_k \quad (4.64)$$

Del mismo modo las coordenadas de altura por número de lámina se pueden obtener con las Ecuaciones 4.65 a 4.70

Lámina 1 (Primer lámina):

$$h_1 = -\frac{h}{2} \text{ (superficie superior)} \quad (4.65)$$

$$h_1 = -\frac{h}{2} + t_1 \text{ (superficie inferior)} \quad (4.66)$$

Lámina k (k=2, 3, ...n-2, n-1):

$$h_{k-1} = -\frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{k-1} t \text{ (superficie superior)} \quad (4.67)$$

$$h_k = -\frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{k-1} t \text{ (superficie inferior)} \quad (4.68)$$

Lámina n:

$$h_{n-1} = \frac{h}{2} - t_n \text{ (superficie superior)} \quad (4.69)$$

$$h_k = \frac{h}{2} \text{ (superficie inferior)} \quad (4.70)$$

De las alturas y la distribución de la fuerza en el material laminado se obtiene la relación entre fuerzas por unidad de longitud y momentos por unidad de longitud en un laminado como en las Ecuaciones 4.71 y 4.72[6].

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (4.71)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (4.72)$$

Siendo [6]:

$N_x, N_y =$ fuerza normal por unidad de longitud

$N_{xy} =$ fuerza cortante por unidad de longitud

$M_x, M_y =$ momentos flexionantes por unidad de longitud

$M_{xy} =$ momentos torsionantes por unidad de longitud

Substituyendo la definición de esfuerzos en plano para una lámina de compuesto con matriz elástica reducida, se obtiene la Ecuación 4.73 y 4.74:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{bmatrix}_k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \right\} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \\ &+ \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{bmatrix}_k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \right\} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{bmatrix}_k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz \right\} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \\ &+ \left\{ \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{16} \\ q_{12} & q_{22} & q_{26} \\ q_{16} & q_{26} & q_{66} \end{bmatrix}_k \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \right\} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Integrando los valores de las alturas se obtienen las Ecuaciones 4.75 a 4.77:

$$\int_{h_{k-1}}^{h_k} dz = (h_k - h_{k-1}) \quad (4.75)$$

$$\int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz = \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (4.76)$$

$$\int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz = \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (4.77)$$

Por lo que, substituyendo se obtiene las Ecuaciones 4.78 y 4.79:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

De aquí, las matrices [A], [B] y [D] en notación corta se obtienen por medio de las Ecuaciones 4.80 a 4.81:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [(q_{ij})_k] (h_k - h_{k-1}), i = 1,2,6; j = 1,2,6 \quad (4.80)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(q_{ij})]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), i = 1,2,6; j = 1,2,6 \quad (4.81)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [(q_{ij})]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), i = 1,2,6; j = 1,2,6 \quad (4.82)$$

Las matrices [A], [B] y [D] se les denominan las matrices **extensionales**, **acoplamiento** y **rigidez flexionante** respectivamente. Combinando estas ecuaciones se obtiene la Ecuación 4.83:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Esta se denomina la **matriz ABD** para estudio de deformaciones en materiales laminados compuestos. La matriz de rigidez extensional [A] relaciona las fuerzas en plano a las deformaciones en plano, la matriz de rigidez flexionante [D] relaciona los momentos flexionantes resultantes a las curvaturas de la lámina y la matriz de acoplamiento [B] acopla los términos de fuerza y momento a las curvaturas y deformaciones de plano medio. En la **Figura 4-27** se menciona la significancia física de esta matriz.

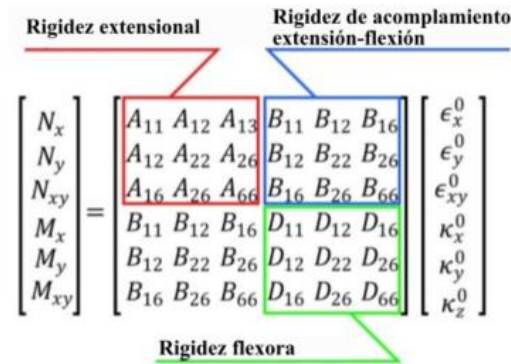


Figura 4-27 Interpretación de la matriz ABD.

En la matriz ABD para estudio de elasticidad plana de laminados, los distintos módulos de relación de rigidez elástica pueden ser descritos individualmente:

Matriz A:

- A_{11} y A_{22} son los módulos de rigidez extensionales axial en dirección 1 y 2 respectivamente.
- A_{12} es el módulo de rigidez extensional debido al efecto de la relación de Poisson.
- A_{16} y A_{26} son los módulos de rigidez relación extensión-cortante.

Matriz B:

- B_{11} y B_{22} son los módulos de rigidez acoplamiento extensional-flexor en dirección 1 y 2 respectivamente.
- B_{12} es el módulo de rigidez acoplamiento extensión-flexión debido al efecto de relación de Poisson.
- B_{16} y B_{26} son los módulos de rigidez acoplamiento extensión-torsión. (cortante-flexión)
- B_{66} es el módulo de rigidez acoplamiento cortante-torsión.

Matriz D:

- D_{11} y D_{22} son los módulos de rigidez flexor en dirección 1 y 2.
- D_{12} es el módulo de rigidez flexor debido al efecto de la relación de Poisson.
- D_{16} y D_{26} son los módulos de rigidez acoplamiento flexión-torsión.
- D_{66} es el módulo de rigidez torsionante.

Los modos de deformación y los tipos de relación fuerza-deformación que son representados por esta matriz de elasticidad ABD de laminado son ejemplificados en la **Figura 4-28**.

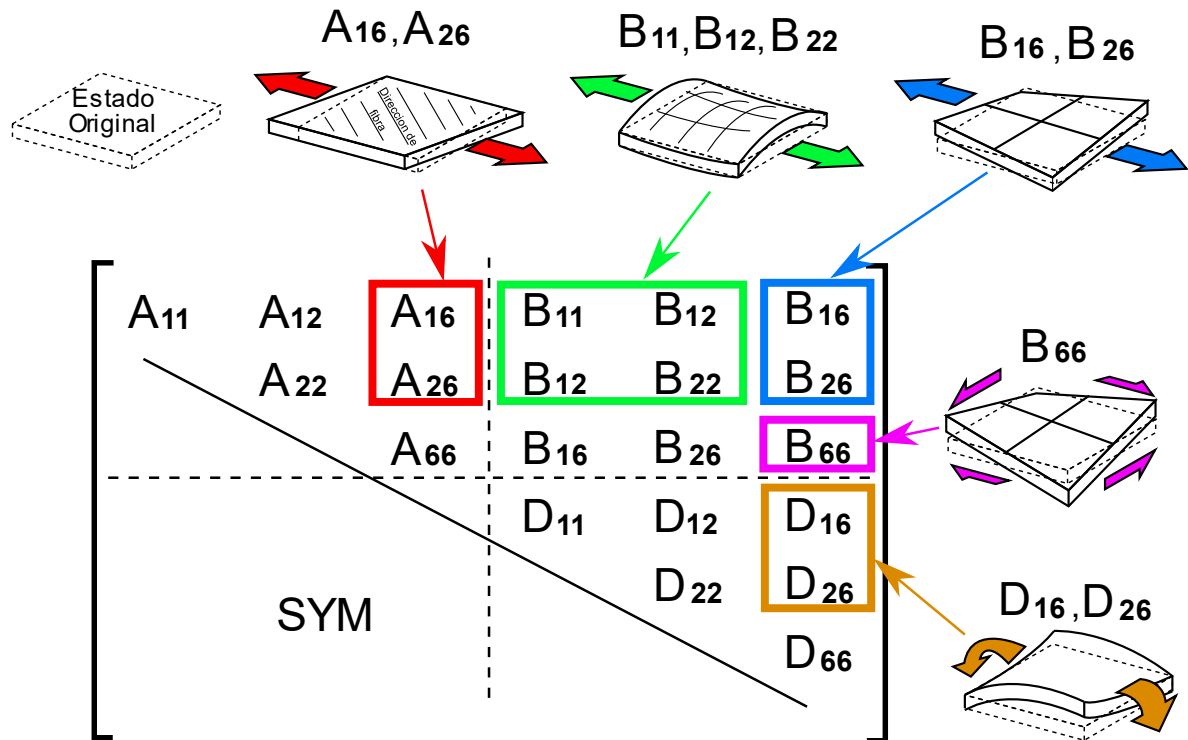


Figura 4-28 Representación gráfica de acoplamiento (carga-deformación) de la matriz ABD en laminados compuestos.

4.3. Metodologías de descripción de resistencia y fallo en laminados

Seguido de las distintas herramientas de caracterización de comportamiento elástico de materiales compuestos, existen distintas aproximaciones de la descripción de resistencia de ellos en su manera individual, así como en conjuntos laminados.

Entre las metodologías existentes, una que toma en consideración el **fallo progresivo** o **historial de daño** de las capas de laminado es mencionado por Tolson y Zabarás [116] por medio del “Fallo de primera capa” o “First Ply Failure” (FPF por sus siglas en inglés) y “Fallo de última capa” o “Last Ply Failure” (LPF por sus siglas en inglés), las cuales toman en consideración la resistencia de un laminado compuesto a partir de la integridad conjunta e individual de cada una de sus capas. Este tipo de análisis se distingue al ser uno en el que se genera un historial de la capacidad de soporte de carga de material, obteniendo una proposición de la secuencia de fallo en un material laminado dado debido a sus características elásticas y distribución de esfuerzos entre sus capas. Este método puede ser utilizado en combinación de distintas teorías de resistencia ya que analiza la consecutividad de fallo en materiales laminados, más no necesariamente el modo de fallo en sí.

Con fines de aseguramiento de seguridad en estructuras se desea que un componente trabaje sin deformaciones permanentes que afecten su integridad o vida. Por lo tanto, en cuestiones de diseño de productos o estructuras, el Fallo Inicial se puede considerar como el valor de resistencia final del material incluso si el material aún cuenta con capacidad de soporte de carga por arriba del Fallo Inicial. El Fallo Inicial se considera el momento o carga bajo el cual una de las capas de un compuesto laminado puede considerarse ha fallado bajo la teoría de resistencia utilizada, independientemente del número de capas de laminado con el cual se cuente en un sándwich laminado.

1. **First Ply Failure (FPF):**

Ocurre cuando sucede un fallo inicial en una capa de un laminado, sea en la dirección de la fibra o en la dirección perpendicular a las fibras. La representación de fallo inicial se muestra en la **Figura 4–29**.

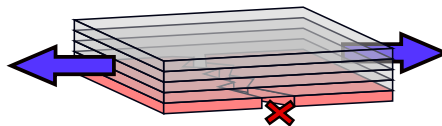


Figura 4–29 Representación gráfica de “First Ply Failure (FPF)”.

2. **Last Ply Failure (LPF):**

Ocurre cuando la estructura se ha degradado al punto en el cual ya no es capaz de soportar cargas adicionales por medio de la falla de la última capa en el laminado. La representación de fallo inicial se muestra en la **Figura 4–30**

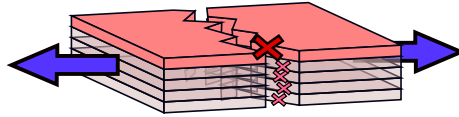


Figura 4–30 Representación gráfica de “Last Ply Failure (LPF)”.

En general, diversos autores atribuyen al fallo de estructuras y laminados compuestos a distintos casos y **modos de carga** entre los cuales se tiene [116]:

1. Cargas longitudinales de tensión en la dirección de las fibras.
2. Cargas compresivas en la dirección de las fibras.
3. Cargas tensionales transversales a las fibras.
4. Cargas compresivas transversales a las fibras.
5. Cargas cortantes.

Por medio de estos modos de carga, los **principales modos de fallo** que pueden suceder en un material compuesto pueden ser descritos como [116]:

1. Ruptura de fibras.
2. Ruptura de la matriz.
3. Separación entre la fibra y matriz.
4. Separación de una lámina de otra (delaminación).

Estos modos de fallo utilizables en la estimación del comportamiento de resistencia de un elemento de material compuesto están intrínsecamente unidas a la idea de la estimación de resistencia y el uso efectivo de materiales compuestos. Esto se logra por medio de los critérios de resistencia, siendo unos son derivados de teorías de energía distorsional como la de von Mises, adaptados a materiales anisotrópicos o con bases de derivación física discutidos en la sección de “5.0 Teorías de resistencia y envolventes de fallo.”.

Así, el análisis de laminados por teoría de laminado mencionado en la sección “4.2.4 Teoría de Laminado Clásica (Classical Laminate Theory).” Funge principalmente como un medio de obtención de la distribución de esfuerzos a través de la configuración de capas de laminado actual, esfuerzos los cuales subsecuentemente se utilizan para analizar los critérios de resistencia y envolventes de fallo teóricos de material compuesto ortotrópico, evaluando la resistencia de láminas individualmente del material conjunto laminado en cuestión. Esto se expresa en la **Figura 4–31**:



Figura 4–31 Diagrama de secuencia en estudio de laminados de material compuesto.

Estas metodologías de estudio y base de análisis de modos de fallo en materiales compuestos son algunos de los diversos métodos que pueden utilizarse para estudiar un componente estructural creado con estos materiales. En general, es buena práctica mantener la objetividad del diseño de componentes, donde deben cubrirse todos los posibles modos de fallo que un material puede tener, generando márgenes de seguridad independiente por modo de fallo o capa de laminado de así necesitarlo en una aplicación específica.

La idea de mantener un estudio y diseño dependiente de la escala de los modos de fallo es un paradigma constante en los materiales compuestos. Esto puede observarse por el reporte Advisory Circular de la FAA AC-20-107B Composite Aircraft Structure [117], el cual presenta guía en los aspectos de regulaciones legales en certificación de aeronaves y estructuras con este tipo de materiales, así como servir de guía en los aspectos de diseño, manufactura y mantenimiento de estos materiales, los cuales están estrechamente relacionados. En este reporte se presentan esquemáticos conceptuales de los tipos de pruebas y niveles de análisis que se imponen a componentes de aeronaves como se muestra en la **Figura 4-32**.

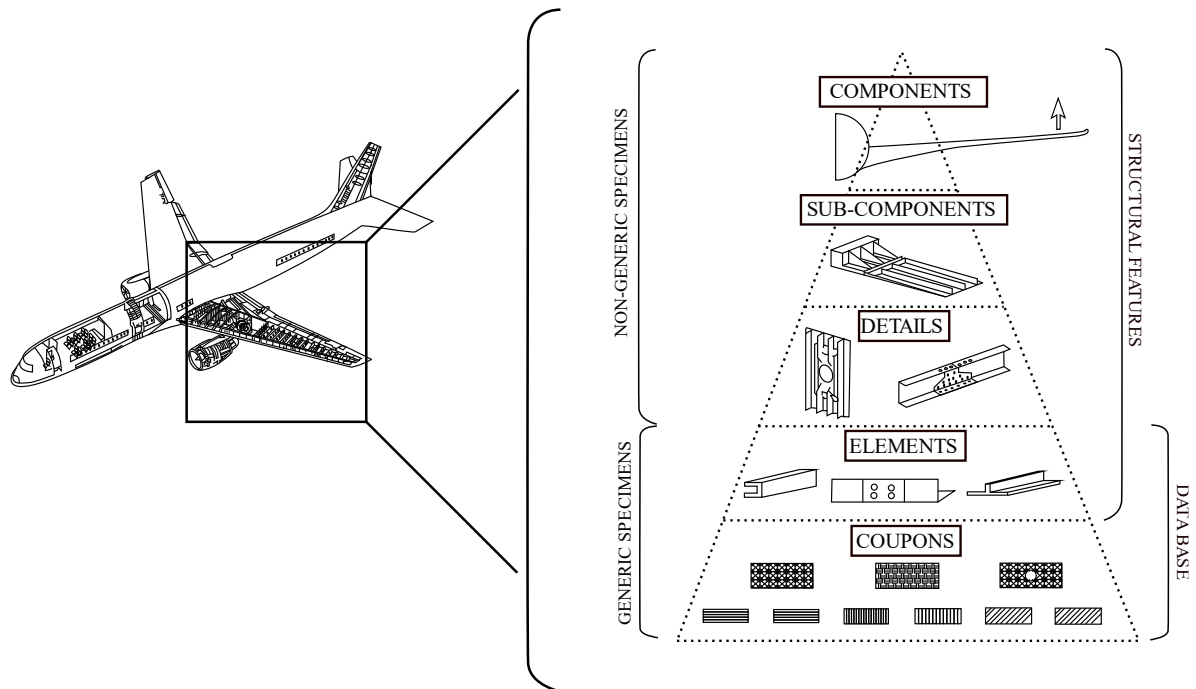


Figura 4-32 Esquema de escalas y bloques de análisis en un elemento estructural de aeronave, (Redibujado de [117]).

Este esquema y guía generalizada de niveles de análisis se encuentran también en armonía con las distintas metodologías de análisis multi-escala que se han desarrollado para análisis de materiales compuestos y crecimiento de daño, como mostrado por Múgica [118], quien trabaja con análisis de material compuesto computacional en múltiples escalas en un esquema jerárquico similar a la **Figura 4-32**.

Capítulo 5. Teorías de resistencia y envolventes de fallo

5.0. Teorías de resistencia y envolventes de fallo

En el estudio de materiales, el fallo de un material sucede en la separación del comportamiento elástico después del cual se presentan fallos en un componente que pueden ser desde grietas, rupturas o deformación plástica dúctil. Para fines de diseño, fallo se interpreta como el fin del comportamiento elástico del material (**Figura 5–1**).

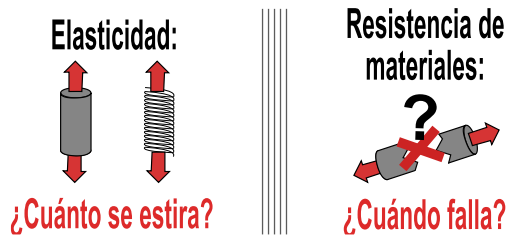


Figura 5–1 Ilustración de elasticidad/resistencia.

Las teorías de resistencia son un conjunto de conceptos fisicomatemáticos creados por investigadores cuyo objetivo es caracterizar por medio de parámetros simples (esfuerzos o deformaciones y sus interrelaciones) el comportamiento y momento exacto/aproximado en que un tipo de material fallará, fungiendo como criterio para predecir si un material puede ser utilizado de manera práctica y segura bajo variaciones de magnitudes de carga de un componente o una estructura estudiada.

Un ejemplo muy conocido y aceptado con fines ingenieriles en criterios de fallo es la teoría de energía distorsional de von Mises [73], teoría física la cual deriva el fallo de un material dúctil isotrópico cuando este alcanza un valor de energía distorsional crítico que permite el comienzo de deformaciones plásticas. Diversas teorías de resistencia aproximan el fallo de materiales sea por su naturaleza dúctil, quebradiza y su tipo de elasticidad (isotrópica a anisotrópica) como se presenta en madera o láminas de material compuesto anisotrópico.

Muchas teorías de resistencia como criterios de fallo son considerados ajustes de curva [110, p. 23], sus derivaciones y consideraciones de menor rigor matemático que utilizan diversos parámetros experimentales. No obstante, existen argumentaciones fisicomatemáticas detrás de las más clásicas teorías de resistencia.

La teoría de Tresca que aproxima la resistencia en metales (antecesor de la teoría de von Mises) trabaja con los límites de un material dúctil isotrópico representado por medio de un valor exacto de “**esfuerzo cortante crítico**” límite del material. Richard M. Christensen [119] menciona que el fallo a nivel cristalino de sección cristal metálico (cuyo fallo se caracteriza principalmente por el deslizamiento de planos atómicos) puede asociarse al fallo de la teoría de resistencia de Tresca por fallo cortante. Comparativa de la envolvente de fallo Tresca y von Mises se muestra en la **Figura 5–2**. Aplicaciones de estas teorías debido a modos de fallo por cortante se puede apreciar en pruebas de cristales metálicos [120] mostrados la **Figura 5–3**.

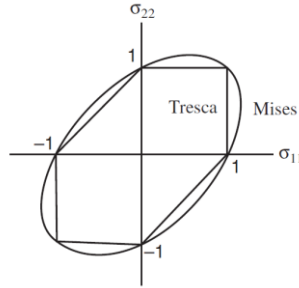


Figura 5–2 Comparación de envoltorio de fallo Tresca y von Mises. [119]

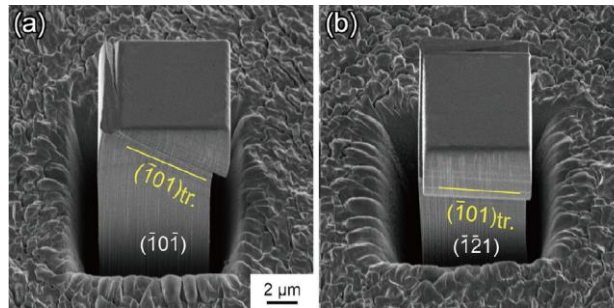


Figura 5–3 Fallo por planos cristalinos en material inter-metalico.

Un ejemplo más de estos conceptos de aplicación de criterios de resistencia dependientes del modo de fallo en ámbitos de “análisis dependiente de la escala” se tiene en el reporte técnico para la NASA [121], donde incluye la matemática matricial utilizada para analizar el esfuerzo y planos de fallo en palas de turbinas de alta presión con microestructura de cristal único (Single-crystal turbine). En él, además de mostrar las transformaciones de coordenadas de esfuerzo para planos cristalográficos, menciona el uso de teorías de resistencia de máximo esfuerzo cortante, teoría de esfuerzo de Von Mises y teoría de Tresca para correlacionar el fallo del material dependiendo de la aplicabilidad, ya que los materiales metálicos son comúnmente agregados policristalinos no homogéneos en la microescala, pero cuyo comportamiento tiende a promediarse a grandes escalas razón por la cual la teoría de von Mises es en veces la más adecuada.

Dependiendo de la teoría de resistencia estudiada es como se argumenta la base en fenómenos físicos de sus criterios, aproximando no solamente un límite teórico de energía interna generalizado de resistencia de cada material, sino, un límite directamente *basado en los modos de fallo* que un material puede presentar, dependiente del material y la escala de estudio de interés.

Esta base de teorías de resistencia, basadas más directamente en fenómenos físico y modos de fallo aplicables a materiales compuestos como lo son Hashin [79], Puck [80] y LarC02 [81], las cuales surgen de la necesidad de aproximación de distintos modos de fallo causados por mecanismos de fallo independientes (como los presentes en materiales laminados de fibras unidireccionales).

La relación directa de los *criterios de resistencia con la escala* en la cual se trabaja o considera el estudio de un material, es de suma importancia. De esto, Richard M. Christensen [119], resalta como “ *todos los modos de fallo tienen una escala de acción* ” y el cómo en materiales compuestos existe una constante incertidumbre de cuál es la escala, más correcta en la cual se debe de caracterizar el fallo en los laminados debido a que el daño de estos ocurre en todas las escalas desde moleculares hasta el completo fallo macromecánico. También menciona de la dependencia de escala se menciona como el modo de fallo “ *delaminación* ” es solo presente a la escala de laminado, y, por otro lado, las bandas de retorcido o “ *kink bands* ” son comúnmente un fallo a nivel de laminado o láminas individuales.

La idea de modos de fallo dependiente de la escala se puede observar de manera más clara en la **Figura 5–4** :

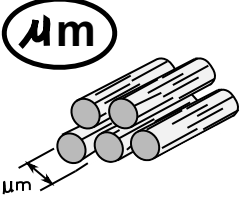
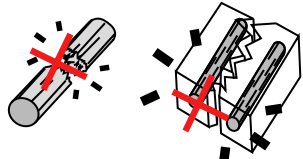
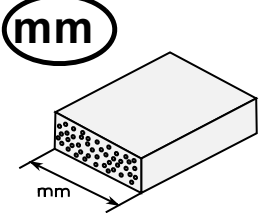
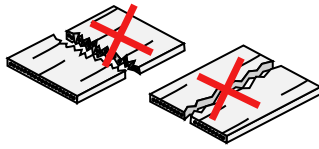
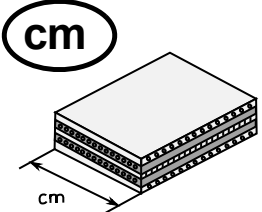
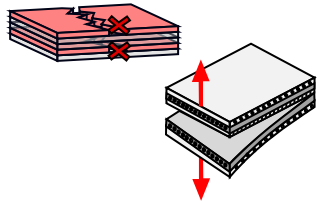
Escala	Modos de fallo	Criterios de fallo y caracterización
	<p style="text-align: center;">Grieta Fibra/Matriz</p> 	<ul style="list-style-type: none"> -Mecanismos de transferencia y distribución de carga -Fallo de matriz -Fallo de fibra -Grieta/Fractura - (Altos gradientes de esfuerzo): -Propagación de grieta
	<p style="text-align: center;">Fallo de lámina</p> 	<ul style="list-style-type: none"> -Criterios de resistencia -Interactivos -Multicriterio -Grieta/Fractura - (Altos gradientes de esfuerzo): -Propagación de grieta (bajo homogenización)
	<p style="text-align: center;">Fallo de laminado</p> 	<ul style="list-style-type: none"> -Análisis lámina por lámina -Modelos progresivos de fallo -Fist Ply Failure -Last Ply Failure -Grieta/Fractura - (Altos gradientes de esfuerzo): -Delaminación -Crecimiento grieta inter-lámina

Figura 5–4 Dependencia de modos de fallo con escala de análisis.

5.1. Nomenclatura utilizada de deformaciones, esfuerzos y esfuerzos últimos multidireccionales

En los criterios de fallo se hace uso de la siguiente nomenclatura para los componentes de esfuerzo presentes en un material consecuencia de las cargas aplicadas a él, y los componentes de esfuerzo último pertenecientes al material. Se muestra también la nomenclatura para los componentes de deformación presentes en un material consecuencia de las cargas aplicadas a él, y los componentes de deformación última característico del material. Estos son usados para evaluar criterios de fallo en el material, dependiendo de la formulación del criterio y los fenómenos que este trata de correlacionar para aproximar la resistencia de materiales anisotrópicos.

1) Esfuerzos presentes en material:

Para las distintas direcciones, los esfuerzos presentes en un material utilizarán la nomenclatura y variable sigma “ σ ”, de modo que las distintas direcciones de esfuerzo son:

$$\sigma_{11} = \text{esfuerzo en material direccion 1 (normal)}$$

$$\sigma_{22} = \text{esfuerzo en material direccion 2 (normal)}$$

$$\sigma_{33} = \text{esfuerzo en material direccion 3 (normal)}$$

para esfuerzos normales, donde un esfuerzo con signo positivo define un esfuerzo de tensión, y un esfuerzo con signo negativo define un esfuerzo de compresión. Para esfuerzos cortantes se tiene:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \text{esfuerzo en material direccion 12/21 (cortante)}$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \text{esfuerzo en material direccion 23/32 (cortante)}$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \text{esfuerzo en material direccion 13/31 (cortante)}$$

Donde un signo positivo o negativo mantiene o invierte la dirección del esfuerzo cortante.

2) Esfuerzos últimos de material:

Del mismo modo, los valores de resistencia (esfuerzo) última para las distintas direcciones se definen; Para esfuerzos últimos normales en tensión:

$$\sigma_{11(max)}^T = \text{esfuerzo (tensión) último de material direccion 1 (normal)}$$

$$\sigma_{22(max)}^T = \text{esfuerzo (tensión) último de material direccion 2 (normal)}$$

$$\sigma_{33(max)}^T = \text{esfuerzo (tensión) último de material direccion 3 (normal)}$$

Para esfuerzos últimos normales en compresión:

$$\sigma_{11(max)}^C = \text{esfuerzo (compresión) último de material direccion 1 (normal)}$$

$$\sigma_{22(max)}^C = \text{esfuerzo (compresión) último de material direccion 2 (normal)}$$

$$\sigma_{33(max)}^C = \text{esfuerzo (compresión) último de material direccion 3 (normal)}$$

Dependiendo del criterio o material, si los valores de esfuerzo normal últimos son el mismo para las direcciones de esfuerzo tensionante y compresivo, esto significa que:

$$\sigma_{11(max)} = \sigma_{11(max)}^T = \sigma_{11(max)}^C$$

$$\sigma_{22(max)} = \sigma_{22(max)}^T = \sigma_{22(max)}^C$$

$$\sigma_{33(max)} = \sigma_{33(max)}^T = \sigma_{33(max)}^C$$

Por lo que los esfuerzos últimos solo serían:

$$\sigma_{11(max)} = \text{esfuerzo último de material direccion 1 (normal)}$$

$$\sigma_{22(max)} = \text{esfuerzo último de material direccion 2 (normal)}$$

$$\sigma_{33(max)} = \text{esfuerzo último de material direccion 3 (normal)}$$

Por otro lado, para la resistencia (esfuerzo) últimos cortante de material se definen:

$$\sigma_{12(max)} = \text{esfuerzo último de material direccion 12/21 (cortante)}$$

$$\sigma_{23(max)} = \text{esfuerzo último de material direccion 23/32 (cortante)}$$

$$\sigma_{13(max)} = \text{esfuerzo último de material direccion 13/31 (cortante)}$$

3) Deformaciones presentes en material:

A su vez, para las distintas direcciones, las deformaciones presentes en un material utilizarán la nomenclatura y variable sigma “ ϵ ”, de modo que las distintas direcciones de deformación son:

$$\epsilon_{11} = \text{deformación en material direccion 1 (normal)}$$

$$\epsilon_{22} = \text{deformación en material direccion 2 (normal)}$$

$$\epsilon_{33} = \text{deformación en material direccion 3 (normal)}$$

para deformaciones normales, una deformación con signo positivo define una deformación de tensión, y una deformación con signo negativo define una deformación de compresión.

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \text{deformación en material direccion 12/21 (cortante)}$$

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \text{deformación en material direccion 23/32 (cortante)}$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \text{deformación en material direccion 13/31 (cortante)}$$

para deformaciones cortantes, donde un signo positivo o negativo mantiene o invierte la dirección del esfuerzo cortante.

4) Deformaciones últimas de material:

Del mismo modo, los valores de deformación última para las distintas direcciones se definen; Para deformaciones últimas normales en tensión:

$$\epsilon_{11(max)}^T = \text{deformación (tensión) última de material dirección 1 (normal)}$$

$$\epsilon_{22(max)}^T = \text{deformación (tensión) última de material dirección 2 (normal)}$$

$$\epsilon_{33(max)}^T = \text{deformación (tensión) última de material dirección 3 (normal)}$$

Para deformaciones últimas normales en compresión:

$$\epsilon_{11(max)}^C = \text{deformación (compresión) última de material dirección 1 (normal)}$$

$$\epsilon_{22(max)}^C = \text{deformación (compresión) última de material dirección 2 (normal)}$$

$$\epsilon_{33(max)}^C = \text{deformación (compresión) última de material dirección 3 (normal)}$$

Dependiendo del criterio o material, si los valores de deformación normal últimos son el mismo para las direcciones de deformación bajo carga tensionante y compresivo, por lo que:

$$\epsilon_{11(max)} = \epsilon_{11(max)}^T = \epsilon_{11(max)}^C$$

$$\epsilon_{22(max)} = \epsilon_{22(max)}^T = \epsilon_{22(max)}^C$$

$$\epsilon_{33(max)} = \epsilon_{33(max)}^T = \epsilon_{33(max)}^C$$

Las deformaciones últimas para esfuerzos últimos normales son:

$$\epsilon_{11(max)} = \text{deformación última de material dirección 1 (normal)}$$

$$\epsilon_{22(max)} = \text{deformación última de material dirección 2 (normal)}$$

$$\epsilon_{33(max)} = \text{deformación última de material dirección 3 (normal)}$$

Para esfuerzos últimos cortantes:

$$\epsilon_{12(max)} = \text{deformación última de material dirección 12/21 (cortante)}$$

$$\epsilon_{23(max)} = \text{deformación última de material dirección 23/32 (cortante)}$$

$$\epsilon_{31(max)} = \text{deformación última de material dirección 13/31 (cortante)}.$$

5.2. Teorías de energía y criterios de fallo aplicables a materiales anisotrópicos y compuestos laminados

En materiales compuestos, la anisotropía de material tiene consecuencias en la elasticidad direccional, así como en los valores de resistencia última de los mismos, generando la necesidad de valores específicos de resistencia (esfuerzo) últimos.

Sun, Quinn y Oplinger [110], en su reporte comparativo de métodos de análisis para materiales compuestos laminados definen tres principales clasificaciones de acuerdo a la naturaleza de los diversos criterios de resistencia existentes:

- **Criterios límite:**
Estos criterios predicen la carga de fallo y modo a través de comparar los esfuerzos σ_{11} , σ_{22} y τ_{12} (o deformaciones unitarias ϵ_{11} , ϵ_{22} y ϵ_{12}) separadamente sin contar con algún tipo de interacción entre los parámetros [110].
- **Criterios Interactivos:**
Estos criterios predicen la carga de fallo usando una ecuación cuadrática o de orden superior tomando en consideración todos los componentes de esfuerzo y deformación, debido a las interacciones de sus componentes en transformación de coordenadas. Se considera fallo una vez que la ecuación ha sido satisfecha. El modo de fallo es determinado indirectamente comparando las proporciones de los componentes de esfuerzo o deformación presentes [110].
- **Criterios de modos separados:**
Estos criterios separan el fallo de matriz y fibra independientemente. Las ecuaciones pueden ser dependientes de uno o más componentes de esfuerzo por lo que la interacción de los componentes de esfuerzo varía de criterio a criterio dentro de este grupo. Si la ecuación satisfecha contiene solo un componente de esfuerzo el modo de fallo corresponde a esa dirección o de otra forma, el modo de fallo puede ser determinado como lo es con los criterios interactivos por comparación de proporciones de componentes de esfuerzo y deformación [110].

Entre los diversos criterios que aplican a materiales compuestos se encuentran los criterios simples como:

- Criterio de máximo esfuerzo.
- Criterio de máxima deformación.

Así como criterios complejos como:

- Criterio de Tsai-Hill [76]
- Criterio de Hoffman [77]
- Criterio de Chamis [122]
- Criterio de Tsai-Wu [78]
- Criterios de Hashin [79]
- Criterios LaRC entre ellos LaRC02 [81].

5.3. Criterio Máximo Esfuerzo

El Criterio de Máximo Esfuerzo se logra de la comparación directa de los valores de los componentes de esfuerzo presente en un material, con el esfuerzo último en cada dirección aplicable o de interés.

Una forma de comparación es a través de la proporción relativa entre el valor de esfuerzo actual del material, y el esfuerzo último del material, la cual se logra a través de una división [80]. Donde, si:

$$\frac{\text{Esfuerzo en material (caso de estudio)}}{\text{Esfuerzo último de material}} \geq 1$$

Se considera fallo cuando el esfuerzo presente en el material es igual o mayor a la resistencia del mismo, obteniendo un valor de ecuación mayor o igual a 1. Esta ecuación es una forma peculiar de comparación del esfuerzo último de material con el fin de lograr congruencia a las teorías de fallo desarrolladas más adelante, donde la idea es interpretar la ecuación como un **índice de fallo**, siendo la unidad “1” resultante, el índice o probabilidad de fallo que pudiera interpretarse como un valor porcentual. De esta interpretación, si se obtiene un valor de índice de fallo mayor a la unidad, se interpreta en que el material de estudio es más que 100% probable de presentar un fallo, y **cualquier valor debajo de la unidad es una condición segura del material**. Esta es una relación inversa al conocido **factor de seguridad**, donde los elementos de la división son los mismo, excepto que son divididos de manera inversa, y que ambas expresiones pueden utilizarse, siempre y cuando se tenga cuidado con el valor indicador, que en este caso es “ ≥ 1 ”. Esto aplica para todas las direcciones del elemento de estudio, como presentado en las Ecuaciones 4.84 a 4.89:

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11(max)}} \geq 1 \quad (4.84) \quad \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12(max)}} \geq 1 \quad (4.85)$$

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22(max)}} \geq 1 \quad (4.86) \quad \frac{\sigma_{23}}{\sigma_{23(max)}} \geq 1 \quad (4.87)$$

$$\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{33(max)}} \geq 1 \quad (4.88) \quad \frac{\sigma_{31}}{\sigma_{31(max)}} \geq 1 \quad (4.89)$$

Este tipo de comparación tiene uso en teorías sencillas como las propuestas por A. Puck en sus trabajos y en otras teorías de resistencia interactivas como la de Tsai-Wu [78].

Otra forma de comparación usada evalúa el valor de esfuerzo en un material con los rangos de esfuerzo permisible en tensión y compresión mostrado en las Ecuaciones 4.90 a 4.92 [6], [123]:

$$\sigma_{11(max)}^C < \sigma_{11} < \sigma_{11(max)}^T \quad (4.90)$$

$$\sigma_{22(max)}^C < \sigma_{22} < \sigma_{22(max)}^T \quad (4.91)$$

$$\sigma_{33(max)}^C < \sigma_{33} < \sigma_{33(max)}^T \quad (4.92)$$

Para esfuerzos cortantes, cuyo valor puede ser positivo o negativo, se espera no sobrepase el valor último de material mostrado en las Ecuaciones 4.93 a 4.95.

$$|\sigma_{12}| < \sigma_{12(max)} \quad (4.93)$$

$$|\sigma_{23}| < \sigma_{23(max)} \quad (4.94)$$

$$|\sigma_{31}| < \sigma_{31(max)} \quad (4.95)$$

La forma común de la envolvente de fallo de este criterio es mostrada en la **Figura 5-5**:

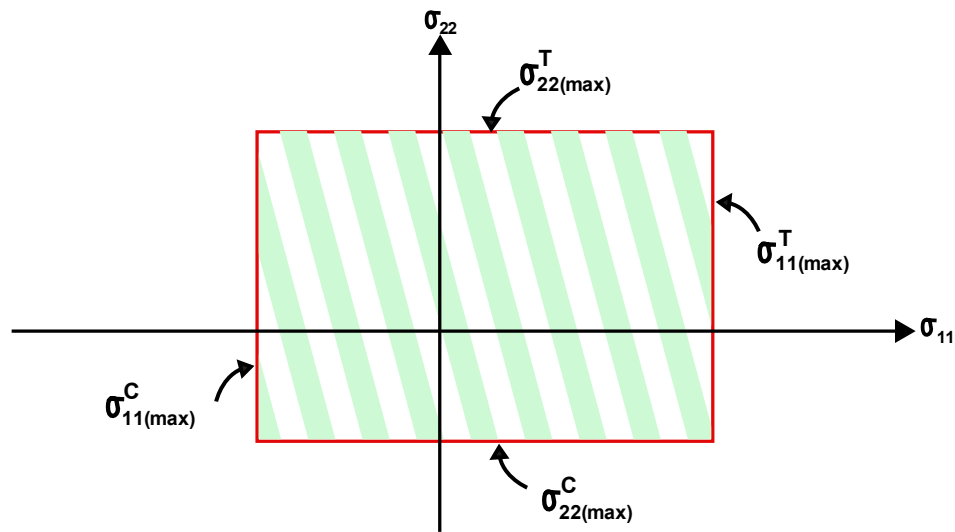


Figura 5-5 Envolvente de fallo típica para el criterio de máximo esfuerzo, donde σ representa el esfuerzo y el superíndice T o C representa si es a tensión o compresión.

Donde se considera toda la zona interna a los límites (zona rayado verde) como segura sin fallo en el material. La ventaja de este criterio de fallo es la facilidad de uso, sin embargo, no toma en consideración la interrelación e interinfluencia de componentes de esfuerzo, lo cual, a su vez, significa que incorrectamente sobreestima la resistencia del material bajo ciertas combinaciones o “estados” de esfuerzos.

5.4. Criterio Máxima Deformación

Similar al Criterio de Máximo Esfuerzo, el Criterio de Máxima Deformación hace la comparación directa de los componentes del estado de deformación actual en un material, con los componentes de los valores máximos de deformación actual.

De igual modo que el esfuerzo, una forma de comparación de la resistencia de un material es a través de la proporción relativa entre el valor de deformación actual del material, y la deformación última del material en manera de **índice de fallo**, la cual se logra a través de una división [80], donde sí:

$$\frac{\text{Deformación en material (caso de estudio)}}{\text{Deformación última de material}} \geq 1$$

Se considera fallo en el material debido al sobrepaso de deformación posible (o permisible) en el material en alguna dirección dada, lo cual, para las distintas direcciones se muestran en las Ecuaciones 4.96 a 4.100:

$$\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{11(max)}} \geq 1 \quad (4.96) \qquad \frac{\epsilon_{12}}{\epsilon_{12(max)}} \geq 1 \quad (4.97)$$

$$\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{22(max)}} \geq 1 \quad (4.98) \qquad \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{23(max)}} \geq 1 \quad (4.99)$$

$$\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{33(max)}} \geq 1 \quad (4.100) \qquad \frac{\epsilon_{31}}{\epsilon_{31(max)}} \geq 1 \quad (4.101)$$

Igual a los esfuerzos últimos, de ser necesario cada una de las 6 fórmulas anteriores se puede subdividir en dos fórmulas distintas, una para tensión y otra para compresión, cambiando el valor máximo del material del denominador respectivamente, dependiendo del valor máximo que se desea comparar.

Otra forma de comparación se logra por evaluar directamente el valor de deformación en un material con los rangos de esfuerzo permisible en tensión y compresión en las Ecuaciones 4.102 a 4.104:

$$\epsilon_{11(max)}^C < \epsilon_{11} < \epsilon_{11(max)}^T \quad (4.102)$$

$$\epsilon_{22(max)}^C < \epsilon_{22} < \epsilon_{22(max)}^T \quad (4.103)$$

$$\epsilon_{33(max)}^C < \epsilon_{33} < \epsilon_{33(max)}^T \quad (4.104)$$

Para deformaciones cortantes, que el valor de deformación cortante presente en el material (sea este negativo o positivo) no sobrepase el valor máximo de deformación cortante del material en las Ecuaciones 4.105 a 4.107.

$$|\epsilon_{12}| < \epsilon_{12(max)} \quad (4.105)$$

$$|\epsilon_{23}| < \epsilon_{23(max)} \quad (4.106)$$

$$|\epsilon_{31}| < \epsilon_{31(max)} \quad (4.107)$$

Esto, aplicado en cálculo de esfuerzo para láminas (análisis plano/2D) [123] se tiene la en la Ecuación 4.108:

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}^T}{E_{11}} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} - \nu_{12} \frac{\sigma_{22}}{E_{11}} \quad (4.108)$$

De aquí, se obtiene la Ecuación 4.109:

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{11}^T}{\nu_{12}} \quad (4.109)$$

Del mismo modo se tiene la relación de parámetros en dirección transversal en la Ecuación 4.110:

$$\epsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}^T}{E_{22}} = \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} - \nu_{12} \frac{\sigma_{11}}{E_{22}} \quad (4.110)$$

De aquí, se obtiene la Ecuación 4.111:

$$\sigma_{22} = \nu_{12}\sigma_{11} + \sigma_{22}^T \quad (4.111)$$

La envolvente de fallo de este criterio es mostrada en la Figura 5-6:

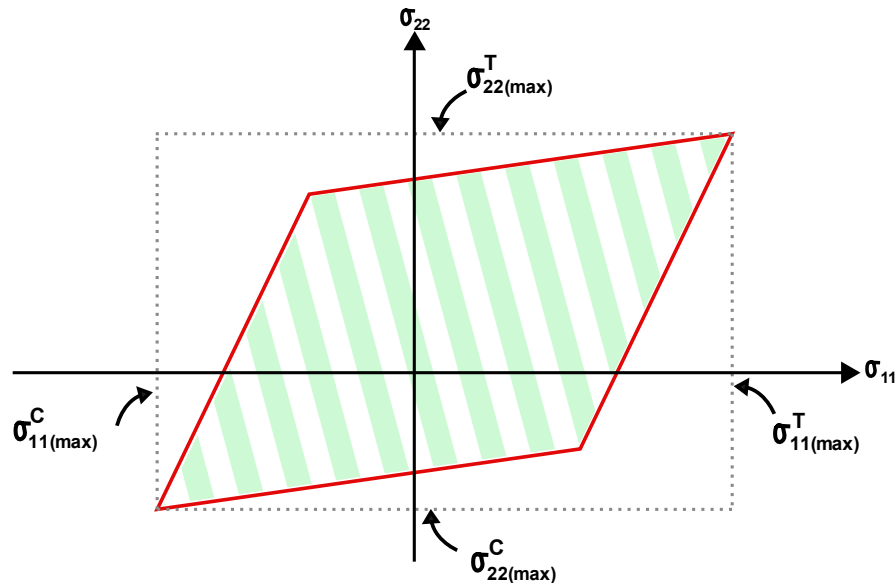


Figura 5-6 Envolvente de fallo típica para el criterio de máxima deformación, donde σ representa el esfuerzo y el superíndice T o C representa si es a tensión o compresión.

Donde se considera toda la zona interna a los límites (zona rayado verde) como segura sin fallo en el material. La ventaja de este criterio de fallo, similar al criterio anterior, es su facilidad de uso, sin embargo, no toma en consideración la interrelación e interinfluencia de componentes de esfuerzo, lo cual, a su vez, significa que sobre-estima la resistencia del material bajo ciertas combinaciones de esfuerzos.

5.5. Criterio de Tsai-Hill

El criterio de resistencia de Tsai-Hill, o teoría de resistencia Tsai-Hill para materiales laminados compuestos por Azzi y Tsai[76], es la utilización de una adaptación del criterio de resistencia materiales anisotrópicos cristalinos por Rodney Hill [75], para su uso en el análisis de laminados compuestos.

La base de la formulación de la teoría de R. Hill [75] se da de la modificación de la teoría de von Mises en el uso del potencial plástico (punto de cedencia del material) a uno de un material anisotrópico a través de constantes características del estado anisotrópico del material (F, G, H, L, M, N), las cuales toman en consideración las interacciones de los componentes de esfuerzo de distintas direcciones.

Para esta teoría, el potencial plástico, o criterio de cedencia toma la forma:

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L(\sigma_{23})^2 + 2M(\sigma_{31})^2 + 2N(\sigma_{12})^2 \geq 1 \quad (4.112)$$

Donde:

$$F = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{22(max)}} + \frac{1}{\sigma_{33(max)}} + \frac{1}{\sigma_{11(max)}} \right] \quad (4.113)$$

$$G = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{33(max)}} + \frac{1}{\sigma_{11(max)}} + \frac{1}{\sigma_{22(max)}} \right] \quad (4.114)$$

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{11(max)}} + \frac{1}{\sigma_{22(max)}} + \frac{1}{\sigma_{33(max)}} \right] \quad (4.115)$$

$$L = \frac{1}{2 * (\sigma_{23(max)})^2} \quad (4.116)$$

$$M = \frac{1}{2 * (\sigma_{31(max)})^2} \quad (4.117)$$

$$N = \frac{1}{2 * (\sigma_{12(max)})^2} \quad (4.118)$$

Desarrollando y reacomodando:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(\sigma_{11})^2}{(\sigma_{11(max)})^2} + \frac{(\sigma_{22})^2}{(\sigma_{22(max)})^2} + \frac{(\sigma_{33})^2}{(\sigma_{33(max)})^2} \right) \\
& - \left(\frac{1}{(\sigma_{11(max)})^2} + \frac{1}{(\sigma_{22(max)})^2} - \frac{1}{(\sigma_{33(max)})^2} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} \\
& - \left(\frac{1}{(\sigma_{11(max)})^2} - \frac{1}{(\sigma_{22(max)})^2} + \frac{1}{(\sigma_{33(max)})^2} \right) \sigma_{11} \sigma_{33} - \frac{1}{(\sigma_{11(max)})^2} \quad (4.119) \\
& + \frac{1}{(\sigma_{22(max)})^2} + \frac{1}{(\sigma_{33(max)})^2} \sigma_{22} \sigma_{33} \\
& + \left(\frac{(\sigma_{12})^2}{(\sigma_{12(max)})^2} + \frac{(\sigma_{13})^2}{(\sigma_{13(max)})^2} + \frac{(\sigma_{23})^2}{(\sigma_{23(max)})^2} \right) \geq 1
\end{aligned}$$

Esta fórmula se simplifica para el estudio de una lámina anisotrópica 2D en el plano 1-2, eliminando los términos de la ecuación fuera de este plano, obteniendo:

$$\left(\frac{(\sigma_{11})^2}{(\sigma_{11(max)})^2} + \frac{(\sigma_{22})^2}{(\sigma_{22(max)})^2} \right) - \left(\frac{1}{(\sigma_{11(max)})^2} \right) (\sigma_{11} \sigma_{22}) + \left(\frac{(\sigma_{12})^2}{(\sigma_{12(max)})^2} \right) \geq 1 \quad (4.120)$$

El criterio de fallo de R. Hill se utilizó por Azzi y Tsai en 1965 [76], para permitir un método de ajuste de análisis de materiales laminados compuestos. En él se discute el uso de estas fórmulas adaptadas a láminas ortotrópicas y en la conclusión de este papel, debido a la falta de distinción en resistencia última tensión o compresión, se menciona la distinción del uso de los valores de esfuerzo último en compresión o tensión intercambiada en la fórmula dependiendo del estado de esfuerzos aplicado (tensión o compresión), lo cual se hace conforme las Ecuaciones 3.151 a 3.153 en términos de la ecuación con esfuerzos principales:

$$\sigma_{11(max)} = \sigma_{11(max)}^T \text{ si } \sigma_{11} > 0 \text{ y } \sigma_{11(max)} = \sigma_{11(max)}^C \text{ si } \sigma_{11} < 0 \quad (4.121)$$

$$\sigma_{22(max)} = \sigma_{22(max)}^T \text{ si } \sigma_{22} > 0 \text{ y } \sigma_{22(max)} = \sigma_{22(max)}^C \text{ si } \sigma_{22} < 0 \quad (4.122)$$

$$\sigma_{33(max)} = \sigma_{33(max)}^T \text{ si } \sigma_{33} > 0 \text{ y } \sigma_{33(max)} = \sigma_{33(max)}^C \text{ si } \sigma_{33} < 0 \quad (4.123)$$

Y las Ecuaciones 3.151 a 3.156 para términos cruzados:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11(max)} &= \sigma_{11(max)}^T, \sigma_{22(max)} = \sigma_{22(max)}^T, \sigma_{33(max)} = \sigma_{33(max)}^T \text{ si } \sigma_{11} \sigma_{22} > 0 \text{ y} \\
\sigma_{11(max)} &= \sigma_{11(max)}^C, \sigma_{22(max)} = \sigma_{22(max)}^C, \sigma_{33(max)} = \sigma_{33(max)}^C \text{ si } \sigma_{11} \sigma_{22} < 0
\end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11(max)} &= \sigma_{11(max)}^T, \sigma_{22(max)} = \sigma_{22(max)}^T, \sigma_{33(max)} = \sigma_{33(max)}^T \text{ si } \sigma_{11} \sigma_{33} > 0 \text{ y} \\
\sigma_{11(max)} &= \sigma_{11(max)}^C, \sigma_{22(max)} = \sigma_{22(max)}^C, \sigma_{33(max)} = \sigma_{33(max)}^C \text{ si } \sigma_{11} \sigma_{33} < 0
\end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11(max)} &= \sigma_{11(max)}^T, \sigma_{22(max)} = \sigma_{22(max)}^T, \sigma_{33(max)} = \sigma_{33(max)}^T \text{ si } \sigma_{22}\sigma_{33} > 0 \text{ y} \\ \sigma_{11(max)} &= \sigma_{11(max)}^C, \sigma_{22(max)} = \sigma_{22(max)}^C, \sigma_{33(max)} = \sigma_{33(max)}^C \text{ si } \sigma_{22}\sigma_{33} < 0 \end{aligned} \quad (4.126)$$

La envolvente de fallo que se forma es un elipsoide en el espacio 3D de esfuerzos, y una elipse en un corte paramétrico debido a los términos cuadráticos de la ecuación, cuyos ejes matemáticamente representan la diferencia de resistencia en función de la dirección.

La envolvente de fallo elipsoidal se encuentra centrada en la coordenada (0,0) del estado de esfuerzo actual, y sus ejes principales se verán modificados dependiendo si se usa el valor de esfuerzo máximo en compresión o en tensión del material dependiendo del estado de carga. La envolvente de fallo de este criterio es mostrada en la **Figura 5-7**:

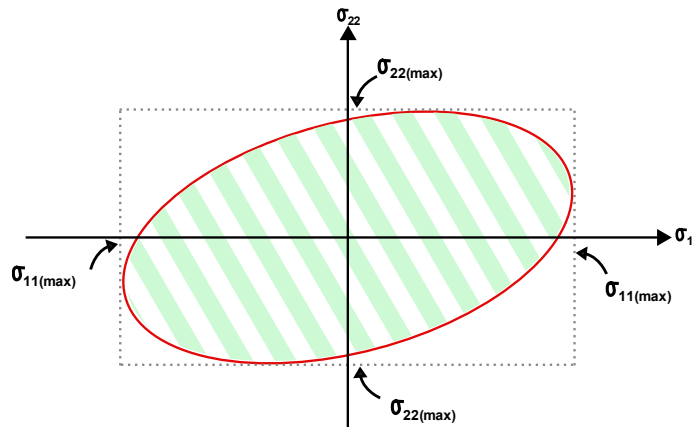


Figura 5-7 Envolvente de fallo típica para el criterio de Tsai-Hill, donde σ representa el esfuerzo sobre el material.

Donde se considera toda la zona interna a los límites (zona rayado verde) como segura sin fallo en el material. Este es un tipo de envolvente de fallo interactivo debido a que toma en consideración la interrelación de los componentes de esfuerzo y considera el fallo de manera independiente la modalidad de fallo posible debido a que analiza el material en su totalidad.

Para mostrar la relación y paralelamente comparar esta envolvente de fallo a uno de un material isotrópico, cuando los valores de resistencia últimos en los distintos ejes tienen el mismo valor, la envolvente de fallo en la teoría Tsai-Hill se convierte en una envolvente idéntica al de la teoría de von Mises para materiales isotrópicos.

5.6. Criterio de Hoffman

El criterio de Hoffman por Oscar Hoffman [77] es una modificación de la teoría Tsai-Hill la cual extiende su uso permitiendo parámetros de resistencia última en tensión y compresión lo cual genera lo que Hoffman refiere como “condición de fractura”, donde hace énfasis a su aplicación en materiales compuestos reforzados por fibras por su naturaleza quebradiza. La diferencia entre las resistencias de tensión y compresión es característica de los materiales quebradizos, los cuales tienden a tener diferencias significativas. Por esta razón el criterio de Hoffman toma en consideración el uso de parámetros últimos de resistencia tensionante y compresiva por medio de la inclusión de términos de tensión y compresión en los parámetros característicos del estado anisotrópico del material (similar a Tsai-Hill, en este caso con las variables $C_1 \dots C_9$) junto del uso de términos lineales con los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 y σ_3 para así lograr mejor la descripción del comportamiento anisotrópico de un material. Para esta teoría, el criterio de resistencia toma la forma de la Ecuación 3.157:

$$C_1(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + C_2(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + C_3(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + C_4(\sigma_{11}) + C_5(\sigma_{22}) + C_6(\sigma_{33}) + C_7(\sigma_{23})^2 + C_8(\sigma_{31})^2 + C_9(\sigma_{12})^2 \geq 1 \quad (4.127)$$

Donde $C_1 \dots C_9$ son nueve parámetros del material, determinados únicamente de nueve datos básicos de resistencia en las Ecuaciones 3.128 a 3.136:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{22(max)}^T * \sigma_{22(max)}^C} + \frac{1}{\sigma_{33(max)}^T * \sigma_{33(max)}^C} + \frac{1}{\sigma_{11(max)}^T * \sigma_{11(max)}^C} \right] \quad (4.128)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{33(max)}^T * \sigma_{33(max)}^C} + \frac{1}{\sigma_{11(max)}^T * \sigma_{11(max)}^C} + \frac{1}{\sigma_{22(max)}^T * \sigma_{22(max)}^C} \right] \quad (4.129)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma_{11(max)}^T * \sigma_{11(max)}^C} + \frac{1}{\sigma_{22(max)}^T * \sigma_{22(max)}^C} + \frac{1}{\sigma_{33(max)}^T * \sigma_{33(max)}^C} \right] \quad (4.130)$$

$$C_4 = \frac{1}{\sigma_{11(max)}^T} - \frac{1}{\sigma_{11(max)}^C} \quad (4.131)$$

$$C_5 = \frac{1}{\sigma_{22(max)}^T} - \frac{1}{\sigma_{22(max)}^C} \quad (4.132)$$

$$C_6 = \frac{1}{\sigma_{33(max)}^T} - \frac{1}{\sigma_{33(max)}^C} \quad (4.133)$$

$$C_7 = \frac{1}{(\sigma_{23(max)})^2} \quad (4.134)$$

$$C_8 = \frac{1}{(\sigma_{31(max)})^2} \quad (4.135)$$

$$C_9 = \frac{1}{(\sigma_{12(max)})^2} \quad (4.136)$$

Esta fórmula se simplifica para el estudio de una lámina anisotrópica 2D en el plano 1-2, eliminando los términos de la ecuación fuera de este plano, obteniendo la Ecuación 4.137:

$$\frac{(\sigma_{11})^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{11(max)}^C * \sigma_{11(max)}^T} + \frac{(\sigma_{22})^2}{\sigma_{22(max)}^C * \sigma_{22(max)}^T} + \frac{\sigma_{11(max)}^C - \sigma_{11(max)}^T}{\sigma_{11(max)}^C * \sigma_{11(max)}^T} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22(max)}^C - \sigma_{22(max)}^T}{\sigma_{22(max)}^C * \sigma_{22(max)}^T} \sigma_{22} + \frac{(\sigma_{12})^2}{(\sigma_{12(max)})^2} \geq 1 \quad (4.137)$$

El criterio de fallo de Hoffman, a diferencia del criterio de Tsai-Hill para láminas ortotrópicas, no requiere de ajustes para el uso de resistencias ultimas en compresión y tensión del material debido a que estas son ya incluidas en las ecuaciones del criterio. Debido a la misma naturaleza de derivación con términos cuadráticos, este criterio tiene una envolvente de fallo elipsoidal representativa del estado de resistencia anisotrópico del material, la cual, a diferencia del criterio Tsai-Hill el centro de la envolvente de fallo se desplaza en los ejes de esfuerzo dependiendo de la magnitud de los esfuerzos principales. La envolvente de fallo de este criterio es mostrada en la **Figura 5–8**:

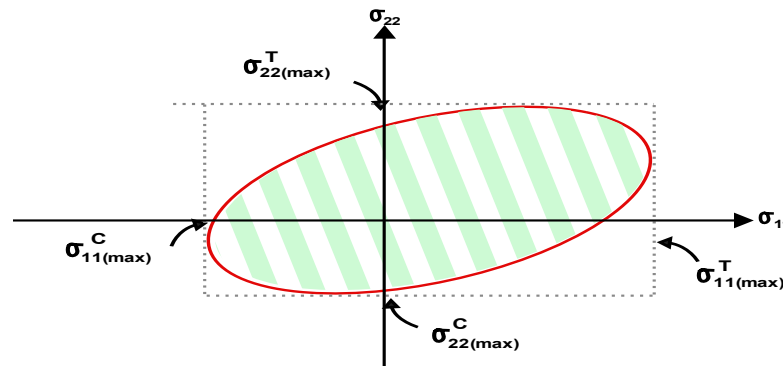


Figura 5–8 Envolvente de fallo típica para el criterio de Hoffman, donde σ representa el esfuerzo y el superíndice T o C representa si es a tensión o compresión.

Donde se considera toda la zona interna a los límites (zona rayado verde) como segura sin fallo en el material. Este es un tipo de envolvente de fallo interactivo debido a que toma en consideración la interrelación de los componentes de esfuerzo y considera el fallo de manera independiente a la modalidad de fallo posible debido a que analiza el material en su totalidad. El desplazamiento del centro de la elipse envolvente de fallo permite hacer énfasis en la diferencia de los valores de resistencia última de tensión y compresión, además de que los valores de tensión y compresión son utilizados en todo el criterio de fallo en sus distintas direcciones.

5.7. Criterio de Tsai-Wu

El criterio de resistencia de Tsai-Wu por Stephen W. Tsai y Edward M. Wu [78] utiliza las mismas bases teóricas de creación de una envolvente de fallo elipsoidal debido a la diferencia de elasticidad y resistencia última dependiente de la dirección en materiales anisotrópicos, proponiendo una teoría anisotrópica generalizada.

La teoría de Tsai-Wu toma en consideración, además de términos cuadráticos que forman el elipsoide de resistencia en direcciones de esfuerzo espaciales (similar a Tsai-Hill y Hoffman), el uso de términos lineales los cuales permiten tener un desplazamiento lineal del elipsoide de resistencia de manera similar al criterio de Hoffman, logrando así crear un énfasis entre la diferencia de valores de resistencia últimos en tensión y compresión por la posición relativa de la elipse de resistencia. Además, el criterio de Tsai-Wu, a diferencia del criterio de Hoffman, hace la inclusión de términos cruzados de resistencia (fuera de diagonal), lo cual permite una mejor descripción de la interacción de los componentes de esfuerzo.

De la forma más generalizada, con notación de subíndices cortos, el criterio de resistencia se tiene la Ecuación 4.138 [78]:

$$\begin{aligned}
 F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_4\sigma_4 + F_5\sigma_5 + F_6\sigma_6 + F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 \\
 + 2F_{14}\sigma_1\sigma_4 + 2F_{15}\sigma_1\sigma_5 + 2F_{16}\sigma_1\sigma_6 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 \\
 + 2F_{24}\sigma_2\sigma_4 + 2F_{25}\sigma_2\sigma_5 + 2F_{26}\sigma_2\sigma_6 + F_{33}\sigma_3^2 + 2F_{34}\sigma_3\sigma_4 \\
 + 2F_{35}\sigma_3\sigma_5 + 2F_{36}\sigma_3\sigma_6 + F_{44}\sigma_4^2 + 2F_{45}\sigma_4\sigma_5 + 2F_{46}\sigma_4\sigma_6 + F_{55}\sigma_5^2 \\
 + 2F_{56}\sigma_5\sigma_6 + F_{66}\sigma_6^2 \geq 1
 \end{aligned} \quad (4.138)$$

Aplicado al análisis de una lámina ortotrópica plana (2D), la ecuación se reduce a la Ecuación 4.139 [6]:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\sigma_6 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 \geq 1 \quad (4.139)$$

Lo cual, en notación de subíndices extendido se tiene la Ecuación 3.170:

$$F_{11}\sigma_{11} + F_{22}\sigma_{22} + F_{12}\sigma_{12} + F_{1111}\sigma_{11}^2 + F_{2222}\sigma_{22}^2 + F_{1212}\sigma_{12}^2 + 2F_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} \geq 1 \quad (4.140)$$

Donde los factores se muestran en las Ecuaciones 4.141 a 4.142:

$$F_{11} = \frac{1}{\sigma_{11(max)}^T} - \frac{1}{\sigma_{11(max)}^C} \quad (4.141)$$

$$F_{1111} = \frac{1}{\sigma_{11(max)}^T * \sigma_{11(max)}^C} \quad (4.142)$$

$$F_{22} = \frac{1}{\sigma_{22(max)}^T} - \frac{1}{\sigma_{22(max)}^C} \quad (4.143)$$

$$F_{2222} = \frac{1}{\sigma_{22(max)}^T * \sigma_{22(max)}^C} \quad (4.144)$$

$$F_{12} = 0 \quad (4.145)$$

$$F_{1212} = \frac{1}{(\sigma_{12(max)})^2} \quad (4.146)$$

$$F_{1122} = \frac{[1 - (F_{11} + F_{22})\sigma_{11(max)}^T - (F_{1111} + F_{2222})\sigma_{11(max)}^T]}{2(\sigma_{11(max)}^T)^2} \quad (4.147)$$

**F₁₁₂₂ es un valor que relaciona la influencia de estados de esfuerzo biaxiales, por lo tanto, es un valor especial que al no poderse obtener directamente. Comúnmente es obtenido experimentalmente de pruebas propuestas de esfuerzo biaxial, resultando en esta ecuación y otras obtenidas por distintas metodologías [6].*

Métodos de obtención del valor del factor de interacción F₁₁₂₂:

Tsai-Hill:

$$F_{1122} = -\frac{1}{2(\sigma_1^T)_{ult}^2}$$

Hoffman:

$$F_{1122} = \frac{1}{2(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}}$$

Mises-Hencky:

$$F_{1122} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(\sigma_1^T)_{ult}(\sigma_1^C)_{ult}(\sigma_2^T)_{ult}(\sigma_2^C)_{ult}}}$$

Distintos métodos para calcular el valor de la constante de influencia bidireccional F_{1122} son propuestos por diversos científicos en discusión de la más correcta interpretación basada en resultados experimentales biaxiales, así como estabilidad y apertura de la envolvente de fallo elipsoidal. Un estudio con discusión del historial de las distintas aproximaciones y sus respectivas consideraciones es el realizado por S. Li, E. Sitnikova, Y. Liang y A.-S. Kaddour [124], donde listan las diversas aproximaciones en base a estabilidad de apertura de la envolvente de fallo, seguido de metódicamente proponer el uso del criterio “Tsai-Wu racionalizado”, el cual permite la consideración y el uso de envolventes de fallo abiertas (hiperbólicas) debido a la estabilidad que ciertas combinaciones de carga que auxilian la resistencia del material.

En cuanto a interpretación del criterio, similar a la teoría de Hoffman, la teoría de Tsai-Wu toma en consideración desde un principio la relación de las variables de esfuerzo último en tensión y compresión en los términos lineales del criterio, lo cual permite el ajuste de la diferencia de resistencia a tensión y compresión por medio del desplazamiento en la envolvente de fallo. Además, al ser una derivación más generalizada de resistencia anisotrópica, incluye términos cruzados dependientes de estados combinados de esfuerzo, lo cual ajusta los rangos considerados sin fallo de material, debido a la influencia de estos. También, cabe mencionar este criterio no hace distinción del signo de la dirección de los esfuerzos cortantes debido a que estos se consideran simétricos, por lo tanto, la única influencia de los esfuerzos cortantes en el criterio es en forma de términos cuadráticos. La envolvente de fallo de este criterio es mostrada en la **Figura 5-9**:

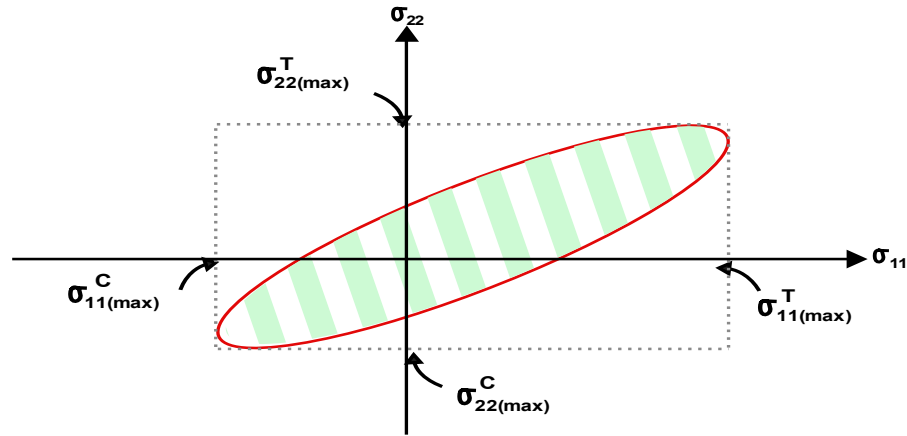


Figura 5–9 Envoltorio de fallo típica para el criterio de Tsai-Wu, donde σ representa el esfuerzo y el superíndice T o C representa si es a tensión o compresión.

Donde se considera toda la zona interna a los límites (zona rayado verde) como segura sin fallo en el material. Este es un tipo de envoltorio de fallo interactivo debido a que toma en consideración la interrelación de los componentes de esfuerzo y considera el fallo de manera independiente al modo de fallo posible debido a que analiza el material en su totalidad.

5.8. Criterios de Hashin

La teoría multicriterio de Hashin [79], toma en consideración los distintos posibles modos de fallo en un material compuesto laminado para la derivación de envolventes de fallo en distintos modos de carga por medio de funciones a intervalos.

Hashin hace hincapié que, tomando en consideración teorías de fallo antecesoras, el razonamiento de utilización de términos cuadráticos es principalmente uno de ajuste de curvas para descripción del comportamiento de resistencia sin ser necesariamente uno con directas interpretaciones físicas. También menciona que, al momento de hacer comparaciones en la simetría de cristales metálicos anisotrópicos y materiales compuestos reforzados por fibra, aún que estos pudieran teóricamente tener la misma simetría anisotrópica, sus modos de fallo varían debido a la diferencia de escala analizada y su microestructura, lo cual permite una alta variación de modos de fallo en un material compuesto.

Por lo tanto, a base de consideraciones de no variación en rotación de ejes (invariantes), en la modificación del criterio polinomial de Tsai-Wu, y los posibles modos de fallo en compuestos (matriz o fibra). Hashin desarrolla criterios para fallo en tensión o compresión en materiales compuestos por sus principales direcciones de fallo, sea dominado por fibra o matriz, y los criterios que logran este fallo.

Para el modo de fallo de fibra, se hace principal hincapié en la diferencia de esfuerzos de tensión y compresión **en dirección de la fibra** por medio de rangos de esfuerzo. Representación de esto se muestra en la **Figura 5–10**.

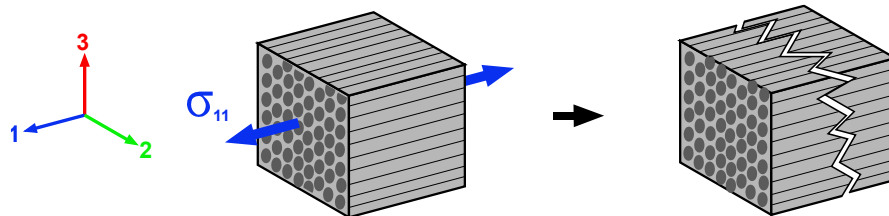


Figura 5–10 Representación gráfica del modo de fallo de fibra Hashin.

Para el fallo de matriz, se hace hincapié en el rango de valor de los esfuerzos **transversales a la fibra**, dirección en la cual la matriz comúnmente rige la resistencia del material. Representación de esto se muestra en la **Figura 5–11**.

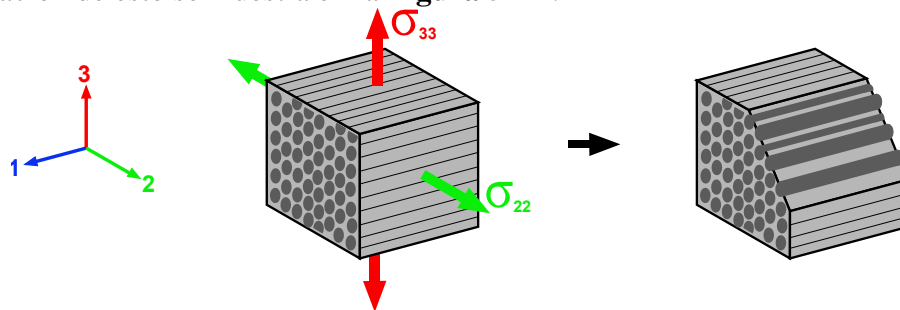


Figura 5–11 Representación gráfica del modo de fallo de matriz Hashin.

Por lo tanto, bajo estudio de los diversos modos de carga de esfuerzo axial o transversal, se derivan los siguientes modos de fallo:

Criterios Hashin (3D)

Hashin (3D): Fallo de fibra a tensión

Si $\sigma_{11} > 0$;

$$\frac{(\sigma_{11})^2}{(\sigma_{11(max)}^T)^2} + \frac{(\sigma_{31})^2 + (\sigma_{12})^2}{(\sigma_{12(max)})^2} = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.148)$$

Hashin (3D): Fallo de fibra a compresión

Si $\sigma_{11} < 0$;

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11(max)}^C} = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.149)$$

Hashin (3D): Fallo de matriz a tensión

Si $\sigma_{22} + \sigma_{33} > 0$;

$$\frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{(\sigma_{22(max)}^T)^2} + \frac{(\sigma_{23})^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{(\sigma_{23(max)})^2} + \frac{(\sigma_{13})^2 + (\sigma_{12})^2}{(\sigma_{12(max)})^2} = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.150)$$

Hashin (3D): Fallo de matriz a compresión

Si $\sigma_{22} + \sigma_{33} < 0$;

$$\frac{\left[\left(\frac{\sigma_{22(max)}^C}{2 * \sigma_{23(max)}} \right)^2 - 1 \right]}{\sigma_{22(max)}^C} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{4 * (\sigma_{23(max)})^2} + \frac{(\sigma_{23})^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{(\sigma_{23(max)})^2} + \frac{(\sigma_{31})^2 + (\sigma_{12})^2}{(\sigma_{12(max)})^2} = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.151)$$

Los criterios de Hashin para esfuerzo planar (2D) se simplifican modificando términos de dimensiones que no afecten directamente el estado de esfuerzo plano, por lo tanto, se tiene:

Crterios Hashin (2D)

Hashin (2D): Fallo de fibra a tensin:

Si $\sigma_{11} \geq 0$;

$$\frac{(\sigma_{11})^2}{(\sigma_{11(max)}^T)^2} + \frac{(\sigma_{12})^2}{(\sigma_{12(max)})^2} = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.152)$$

Hashin (2D): Fallo de fibra a compresin:

Si $\sigma_{11} < 0$;

$$\frac{(\sigma_{11})^2}{(\sigma_{11(max)}^C)^2} = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.153)$$

Hashin (2D): Fallo de matriz a tensin:

Si $\sigma_{22} \geq 0$;

$$\frac{(\sigma_{22})^2}{(\sigma_{22(max)}^T)^2} + \frac{(\sigma_{12})^2}{(\sigma_{12(max)})^2} = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.154)$$

Hashin (2D): Fallo de matriz a compresin:

Dos versiones de criterio de fallo a compresin Hashin:

Si $\sigma_{22} < 0$;

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22(max)}^C}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{\sigma_{12(max)}}\right)^2 = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (\text{Hashin, 1973}) [125]$$

$$\left[\left(\frac{\sigma_{22(max)}^C}{2*\sigma_{23(max)}}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22(max)}^C} + \frac{(\sigma_{22})^2}{4*(\sigma_{23(max)})^2} + \frac{(\sigma_{12})^2}{(\sigma_{12(max)})^2} = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (\text{Hashin, 1980}) [79] \quad (4.155)$$

El conjunto de criterios de fallo de Hashin diferencia el modo de fallo de matriz y fibra a travs de discernir el estado de esfuerzos actual.

5.9. Criterios de Puck

La teoría multicriterio de Puck [80], bajo el mismo paradigma de derivaciones de criterios independientes de resistencia para los diversos estados de esfuerzo en un material compuesto toma en consideración las discusiones de Hashin respecto al fallo predominantemente quebradizo de materiales compuestos unidireccionales. Con ello desarrolla un set de criterios basados en los distintos fenómenos de ruptura de un material compuesto unidireccional.

A estos criterios se les denomina “Criterios Fenomenológicos” (Phenomenological Criteria) y toman en consideración no solo el estado de esfuerzo multiaxial, sino el tipo de fallos que estos comúnmente generan en un material compuesto unidireccional, para así lograr una aproximación de descripción de la resistencia de estos.

Esta aproximación, sin embargo, a diferencia del estudio realizado por Hashin y teorías derivadas de von Mises cuyo fallo se deriva por la principal influencia que tiene la energía de distorsión y ecuaciones de ajuste (Hill, Tsai-Wu), la realiza por medio de consideraciones de energía de Mohr y Hashin para fallo quebradizo, permitiendo aumentar el grado de predicción de fallos debido a la naturaleza quebradiza de las fibras.

Este conjunto de criterios toma principal consideración al fallo de materiales compuestos con fibras unidireccionales debido a la interrelación de esfuerzos normales, tangentes y transversales a la dirección de las fibras. Esto se logra haciendo distinción de fallo por los medios de fallo denominados **Fallo de Fibra (FF)** y el **Fallo Inter-Fibra (IFF)** [80].

El modo de Fallo de Fibra (FF) toma en consideración el fallo en la dirección en la cual se encuentra la fibra unidireccional, y es subdividido en dos principales categorías:

1. **Fallo de Fibra (FF) Tensionante:**

El modo causado por el fallo en estado de esfuerzo tensionante. El criterio se rige en términos de deformación unitaria en dirección tensionante tras la ruptura por separación de los componentes del material.

2. **Fallo de Fibra (FF) Compresivo:**

El modo causado por el fallo en estado de esfuerzo compresivo. El criterio se rige por los valores de deformación unitaria en dirección compresiva, donde el fenómeno de ruptura se rige por el retorcido (kinking) de fibras unidireccionales.

Representación de este modo de fallo se muestra en la **Figura 5–12**.

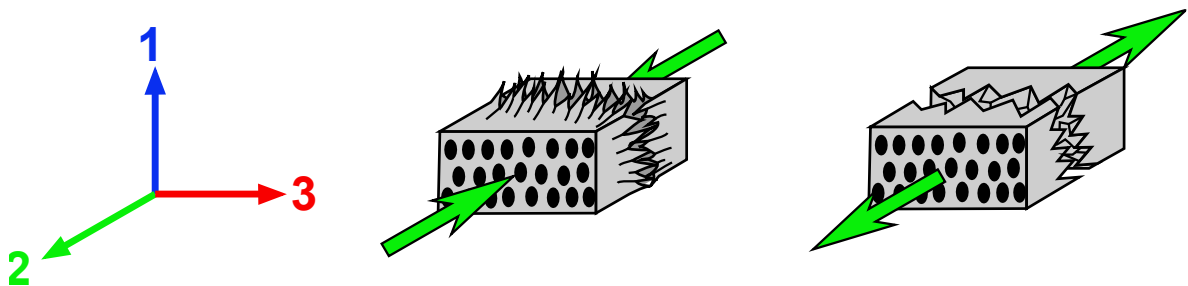


Figura 5–12 Representación gráfica de Fallo de Fibra (FF) por criterios de Puck.

El modo de Fallo Inter-Fibra (IFF) toma en consideración el fallo debido a las cargas aplicadas que principalmente influyen al fallo en la dirección transversal a la dirección de la fibra unidireccional. En este modo de fallo se considera que el fallo sucede por medio de la aparición de planos de fallo los cuales son paralelos a la dirección de las fibras y cuyas modalidades se dividen en tres principales categorías:

1. Fallo Inter Fibra (IFF) Modo A:

El tipo de fallo IFF modo A es un tipo de fallo que, bajo la condición que $\sigma_{22} \geq 0$ tiende a abrir el material en un ángulo de fractura $\theta_{fp} = 0^\circ$, siendo el esfuerzo que causa la separación un esfuerzo de tensión, donde el fallo se da debido al esfuerzo σ_{22} en conjunto de un esfuerzo cortante longitudinal σ_{21} .

2. Fallo Inter Fibra (IFF) Modo B:

El tipo de fallo IFF modo B es un tipo de fallo que, bajo la condición de esfuerzo $\sigma_{22} < 0$ sucede en un plano de fractura con un valor $\theta_{fp} = 0^\circ$, donde los esfuerzos que influyen en el fallo son el esfuerzo normal σ_{22} y el esfuerzo σ_{21} , pero que a diferencia del modo A, el fallo se origina únicamente debido a la influencia del esfuerzo cortante σ_{21} , mientras que el esfuerzo σ_{22} impide la fractura.

3. Fallo Inter Fibra (IFF) Modo C:

El tipo de fallo IFF modo C es un tipo de fallo que toma en consideración la variación de esfuerzo por la variación de ángulo de proyección en el material el cual genera el “plano de acción” de fallo en el material, generando planos de fallo con valores $\theta_{fp} \approx \pm 45^\circ$, dependiente de los valores del esfuerzo normal σ_{22} y el esfuerzo cortante σ_{12} .

Representación de este modo de fallo se muestra en la **Figura 5–13**.

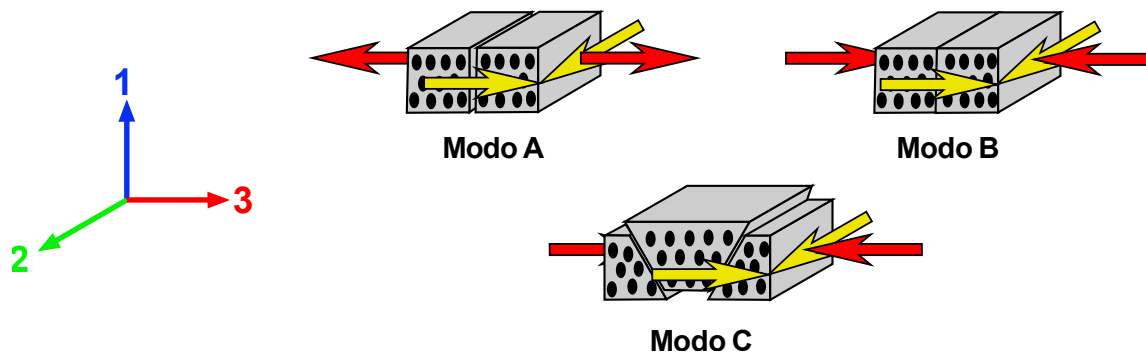


Figura 5–13 Representación gráfica de Fallo Inter-Fibra (IFF) por criterios de Puck.

Los criterios de resistencia Puck son los siguientes:

Puck (2D): Fallo de Fibra (FF) a tensión:

Si $\sigma_{11} \geq 0$;

$$\frac{1}{\epsilon_{1T}} \left(\epsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_2 \right) = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.156)$$

Puck (2D): Fallo de Fibra (FF) a compresión:Si $\sigma_{11} < 0$;

$$\frac{1}{\epsilon_{1c}} \left| \left(\epsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_2 \right) \right| = 1 - (10\gamma_{12})^2 \quad (4.157)$$

Puck (2D): Fallo Inter-Fibra (IFF) Modo A:Si $\sigma_{22} \geq 0$; $\theta_{fp} = 0^\circ$;

$$\sqrt{\left(\frac{\tau_{12}}{S_{21}}\right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)}\sigma_2\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)}\frac{\sigma_2}{S_{21}} = 1 - \left|\frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}}\right| \quad (4.158)$$

Puck (2D): Fallo Inter-Fibra (IFF) Modo B:Si $\sigma_{22} < 0$ y $0 \leq \left|\frac{\sigma_2}{\tau_{21}}\right| \leq \frac{R_{\perp\perp}^A}{|\tau_{21c}|}$; $\theta_{fp} = 0^\circ$;

$$\frac{1}{S_{21}} \left(\sqrt{\tau_{21}^2 + \left(p_{\perp\parallel}^{(-)}\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)}\sigma_2 \right) = 1 - \left|\frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}}\right| \quad (4.159)$$

Puck (2D): Fallo Inter-Fibra (IFF) Modo C:Si $\sigma_{22} < 0$ y $0 \leq \left|\frac{\tau_{21}}{\sigma_2}\right| \leq \frac{|\tau_{21c}|}{R_{\perp\perp}^A}$; $\cos(\theta_{fp}) = \sqrt{\frac{f_w R_{\perp\perp}^A}{(-\sigma_2)}}$;

$$\frac{1}{S_{21}} \left(\sqrt{\tau_{21}^2 + \left(p_{\perp\parallel}^{(-)}\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)}\sigma_2 \right) = 1 - \left|\frac{\sigma_1}{\sigma_{1D}}\right| \quad (4.160)$$

De las ecuaciones anteriores se tienen las siguientes definiciones en las Ecuaciones 4.161 a 4.165:

$$p_{\perp\parallel}^{(+)} = -\left(\frac{d\tau_{21}}{d\sigma_2}\right)_{\sigma_2=0} \text{ de la curva } (\sigma_2, \tau_{21}), \sigma_2 \geq 0 \quad (4.161)$$

$$p_{\perp\parallel}^{(-)} = -\left(\frac{d\tau_{21}}{d\sigma_2}\right)_{\sigma_2=0} \text{ de la curva } (\sigma_2, \tau_{21}), \sigma_2 \leq 0 \quad (4.162)$$

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{Y_C}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)})} = \frac{S_{21}}{2p_{\perp\parallel}^{(-)}} \left(\sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{Y_C}{S_{21}}} - 1 \right) \quad (4.163)$$

$$p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{R_{\perp\perp}^A}{S_{21}} \quad (4.164)$$

$$\tau_{21} = S_{21} \sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^{(-)}} \quad (4.165)$$

Para las ecuaciones de los modos A, B y C, los valores de $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ y $p_{\perp\parallel}^{(+)}$ son parámetros de arreglo de inclinación de la curva de fractura, se recomienda [126] que los valores sean de $p_{\perp\parallel}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(+)}$ debido a que la separación de los valores genera una discontinuidad en la curva de fractura. También, H. M. Deuschle y Bernd-H Kröplin [127], a través del trabajo de Puck y recomendaciones de VDI-Gesellschaft Kunststofftechnik hace mención que a través de los valores de inclinación a un ángulo ψ , que los valores recomendados de la envolvente de fallo a un ángulo $\psi = 0$ son correspondientes a la **Tabla 3-14**:

Tabla 5-1 Valores de parámetros de arreglo

Material	$p_{\perp\parallel}^{(+)}$	$p_{\perp\parallel}^{(-)}$	$p_{\perp\perp}^{(-)}, p_{\perp\perp}^{(+)}$
GFRP	0.30	0.25	0.20-0.25
CFRP	0.35	0.30	0.25-0.30

GFRP: Polímero Reforzado por Fibra de Vidrio, **CFRP:** Polímero Reforzado por Fibra de Carbono

También menciona el uso por Puck del procedimiento de interpolación para obtener los valores de $p_{\perp\psi}^{(-)}$ y $p_{\perp\psi}^{(+)}$, a cualquier ángulo ψ con la Ecuación 4.166.

$$\frac{p_{\perp\psi}^{(-),(+)}}{R_{\perp\psi}^A} = \frac{p_{\perp\perp}^{(-),(+)}}{R_{\perp\perp}^A} \cos^2 \psi + \frac{p_{\perp\parallel}^{(-),(+)}}{R_{\perp\parallel}^A} \sin^2 \psi \quad (4.166)$$

Donde se tiene la Ecuación 4.167

$$\cos^2 \psi = \frac{(\tau_{nt})^2}{(\tau_{nt})^2 + (\tau_{nl})^2} \quad (4.167)$$

Y la Ecuación 4.168

$$\sin^2 \psi = \frac{(\tau_{nl})^2}{(\tau_{nt})^2 + (\tau_{nl})^2} \quad (4.168)$$

5.10. Criterios de LaRC02

Los criterios LaRC02[81] (Por las siglas del centro de investigación NASA – Langley Research Center), son un conjunto multicriterio desarrollado por los investigadores Carlos G. Dávila y Navin Jaunky para la descripción de resistencia de materiales laminados compuestos de fibra unidireccional los cuales se basan principalmente en el trabajo por Hashin y el trabajo de Puck para generar criterios que describan el fallo de matriz y fibra, sin requerir parámetros de ajuste de curvas de fallo.

En él se toma en consideración la influencia de la compresión transversal en el aumento de la resistencia cortante de la matriz debido a que se argumenta un mayor nivel de fricción interna, y la variación propuesta del ángulo de fractura de matriz determinado por Puck, el cual puede variar dependiendo del valor de compresión transversal. Uno de los más grandes aportes por Puck es el ángulo de fallo típico a 53 grados en una capa de laminado [81], sin embargo, se discute como los criterios de Puck hacen uso de diversos parámetros de material que no tienen significancia física directa, razón por la cual se desarrolló el conjunto de criterios LaRC02.

Para el modo de **fallo de matriz a tensión**, el criterio propuesto por Hashin se correlaciona bien con pruebas físicas permaneciendo sin modificación y es el que se utiliza para la teoría LaRC02. Para el modo de **fallo matriz a compresión** el criterio de Hashin no satisface la descripción de comportamiento, razón por la que se utiliza una derivación por Mohr-Coulomb junto al plano de acción de Puck y el ángulo de fallo de matriz. Esto se ilustra en la **Figura 5–14**.

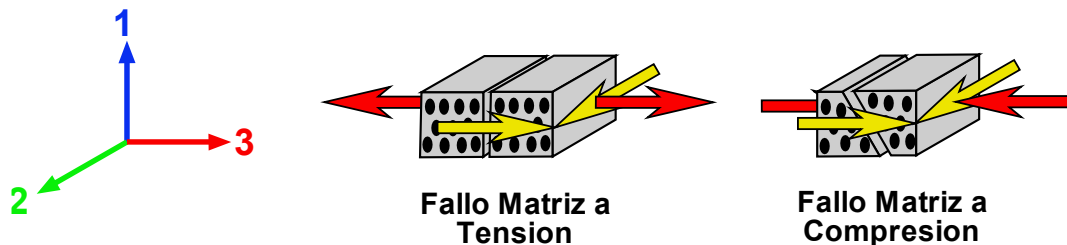


Figura 5–14 Representación gráfica de Fallo de Matriz de LaRC02.

Para el modo de **fallo de fibra a tensión**, el criterio es un criterio no interactivo de máxima deformación unitaria permisible. Para el **fallo de fibra a compresión** el fallo toma en consideración fenómenos de retorcido (kinking) de las fibras en el material basadas en teorías de fallo compresivas a nivel micromecánico y se asume un valor conocido de esfuerzo máximo en compresión para el modo de fallo por retorcido. Esto se ilustra en la **Figura 5–15**.

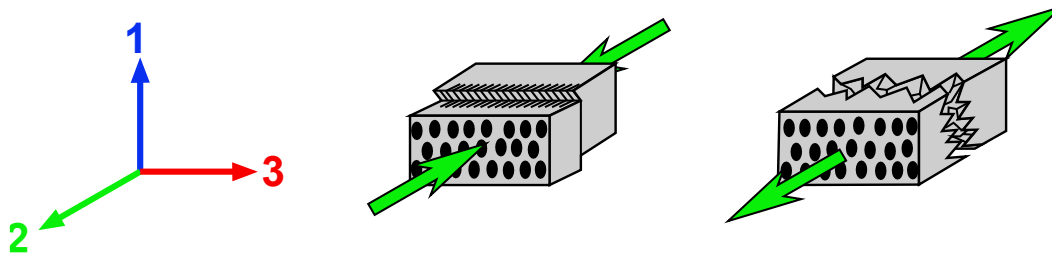


Figura 5–15 Representación gráfica de Fallo de Fibra de LaRC02.

Los criterios de resistencia LaRC02 son los siguientes:

LaRC02 (2D): Fallo de Matriz a tensión:

Si $\sigma_{22} \geq 0$;

$$FI_M = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y^T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S^L}\right)^2 = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.169)$$

LaRC02 (2D): Fallo de Matriz a compresión:

Si $\sigma_{22} < 0$; Si $\sigma_{11} < Y^C$;

$$FI_M = \left(\frac{\tau_{eff}^{mT}}{S^T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{eff}^{mL}}{S^L}\right)^2 = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.170)$$

Si $\sigma_{22} < 0$; Si $\sigma_{11} \geq Y^C$

$$FI_M = \left(\frac{\tau_{eff}^{mT}}{S^T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{eff}^{mL}}{S^L}\right)^2 = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.171)$$

LaRC02 (2D): Fallo de Fibra a tensión:

Si $\sigma_{11} \geq 0$;

$$FI_F = \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_1^T} = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.172)$$

LaRC02 (2D): Fallo de Fibra a compresión:

Si $\sigma_{11} < 0$; Si $\sigma_{22}^m < 0$;

$$FI_M = \left(\frac{|\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m}{S^L}\right) = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.173)$$

Si $\sigma_{11} < 0$; Si $\sigma_{22}^m \geq 0$;

$$FI_M = \left(\frac{\sigma_{22}^m}{Y^T}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}^m}{S^L}\right)^2 = \begin{cases} \geq 1 & \text{Fallo} \\ < 1 & \text{NO Fallo} \end{cases} \quad (4.174)$$

Donde los valores de esfuerzo efectivo τ_{eff}^T y τ_{eff}^C se muestran en las Ecuaciones 4.175 y 4.176:

$$\tau_{eff}^T = (-\sigma_{22} \cos \alpha (\sin \alpha - \eta^T \cos \alpha)) \quad (4.175)$$

$$\tau_{eff}^C = (\cos \alpha (|\tau_{12}| + \eta^L \sigma_{22} \cos \alpha)) \quad (4.176)$$

El esfuerzo máximo transversal se obtiene mediante la expresión 4.177:

$$S^T = Y^C \cos \alpha_0 \left(\sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{\tan 2\alpha_0} \right) \quad (4.177)$$

Los coeficientes de fricción interna η^T y η^L se obtienen mediante las expresiones 4.178 y 4.179:

$$\eta^T = \frac{-1}{\tan 2\alpha_0} \quad (4.178)$$

$$\eta^L \approx \frac{S^L \cos 2\alpha_0}{Y^C \cos^2 \alpha_0} \quad (4.179)$$

Los esfuerzos debido al desalineamiento de ángulo de fibra se obtienen mediante las expresiones 4.180 a 4.182:

$$\sigma_{11}^m = \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + 2\tau_{12} \sin \theta \cos \theta \quad (4.180)$$

$$\sigma_{22}^m = \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\tau_{12} \sin \theta \cos \theta \quad (4.181)$$

$$\tau_{12}^m = \sigma_{11} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin \theta \cos \theta + \tau_{12} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad (4.182)$$

Donde θ se obtiene mediante la expresión 4.183:

$$\theta = \frac{\tau_{12} + (G_{12} - X^C)\theta^C}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}} \quad \text{y} \quad \theta^C = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left(\frac{S^L}{X^C} + \eta^L \right) \left(\frac{S^L}{X^C} \right)}}{2 \left(\frac{S^L}{X^C} + \eta^L \right)} \right) \quad (4.183)$$

Capítulo 6. Metodología y experimentación

6.0. Introducción y planeación a las fases de proyecto

Para el enfoque de estudio de materiales compuestos de este trabajo, se desarrolla una herramienta computacional que se validará utilizando bibliografía, pruebas físicas, y otro software de uso comercial. Para lograr el objetivo, el trabajo se divide en 4 fases, donde: en la primera fase se enfoca en la conceptualización de la teoría utilizada en el estudio de materiales compuestos. En la segunda fase se aborda la generación de algoritmos basados en la matemática de estudio de láminas simples; en la tercera fase se codifican los algoritmos para analizar conjuntos de laminados a distintas direcciones. Finalmente, en la cuarta fase se realiza el análisis comparativo de resultados entre la bibliografía y las pruebas experimentales para la validación de la herramienta. Estas fases y sub-fases se pueden observar en la **Figura 6–1**, las cuales se discutirán a detalle más adelante. Los conectores circulares con número que se presentan a la derecha de las cajas representan entradas o subprocesos que alimentan a cada fase.

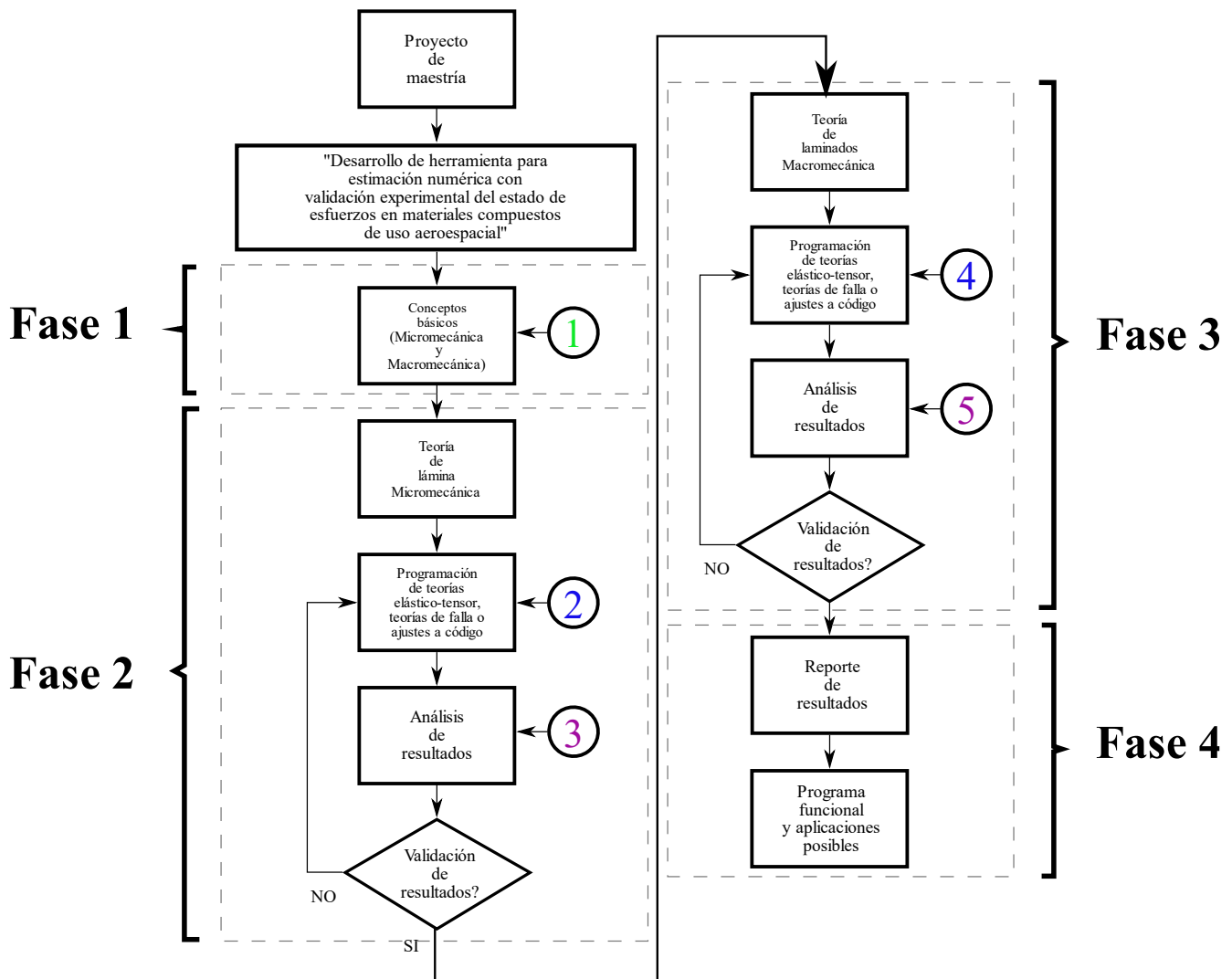


Figura 6–1 Diagrama principal de flujo de estudio de materiales compuestos en proyecto de maestría.

6.1. Fase 1: Conceptos básicos

En esta fase se buscan los conceptos básicos para el estudio de materiales a pequeña escala y mediana escala, como lo son los conceptos de: macromecánica, micromecánica, contenido porcentual, regla de mezclas y su influencia en la elasticidad de materiales. Para lograr esto, se realiza una revisión bibliográfica, que ayuda en la codificación de la conceptualización del cálculo de porcentajes de volumen entre otros conceptos micromecánicos. La metodología descrita de la **Fase 1** que se muestra en la **Figura 6-1**, así como su sub-proceso (conector 1) se describen a detalle en la **Figura 6-2**, mismas que se compone de dos secciones, la macromecánica y la micromecánica.

Con estos insumos, se codificarán los primeros algoritmos utilizables con el fin de analizar el comportamiento elástico, junto con el comportamiento de resistencia para materiales compuestos unidireccionales, ya sea en forma de lámina o bien, de un laminado.

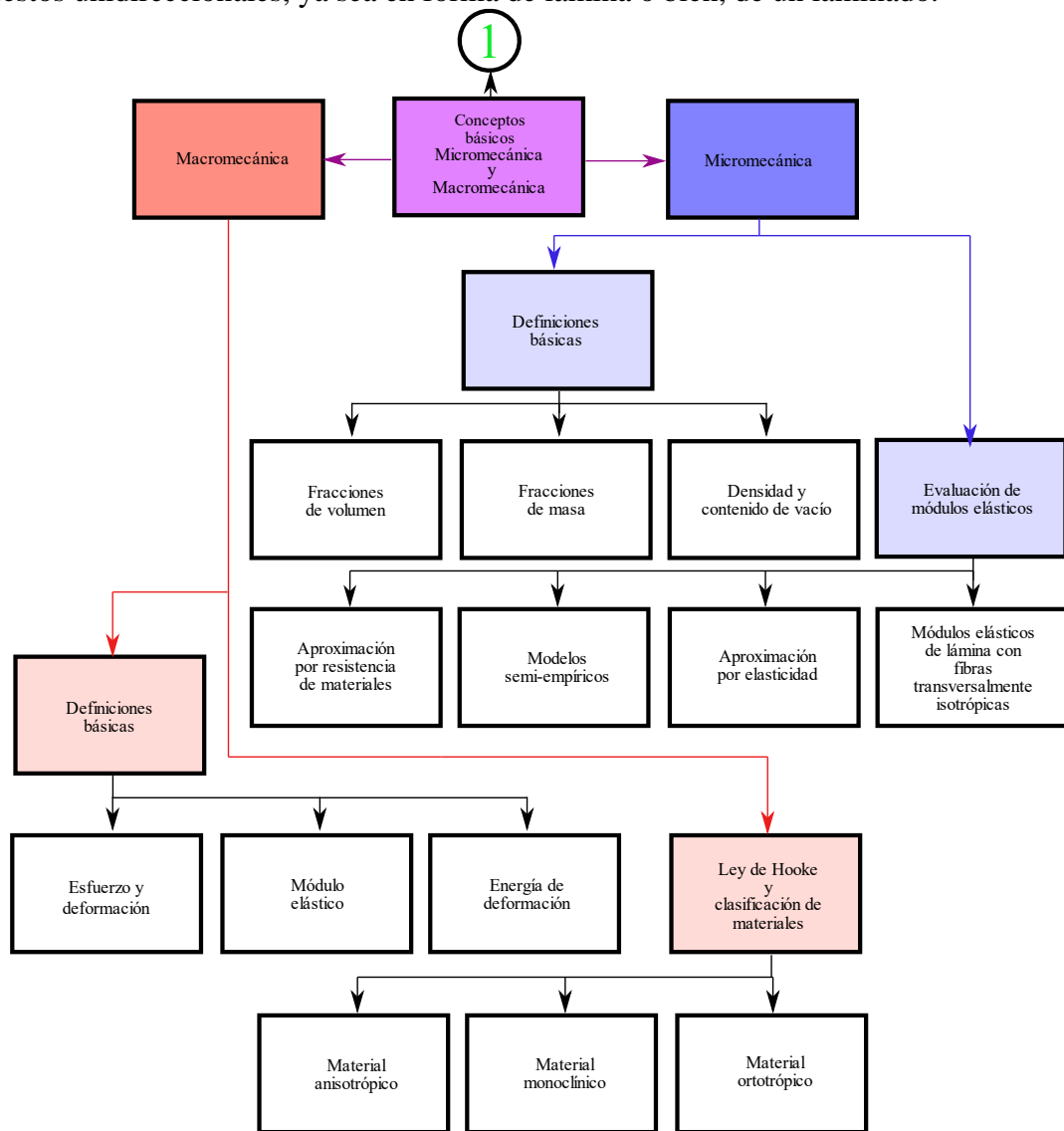


Figura 6-2 Entradas conceptuales para el desarrollo de la Fase 1.

6.1.1. Conceptualización de micromecánica

El uso de conceptos micromecánicos es necesario debido a que el material compuesto laminado por fibras unidireccionales es un material heterogéneo, el cual necesita una fase de homogenización de sus características elásticas antes de poder hacer uso de ellas en forma macromecánica. Esto se logra estudiando las características del material compuesto y su naturaleza ortotrópica generando un promediado pesado de sus módulos elásticos principales $E1$, $E2$, $G12$ y $\nu12$ como se menciona en la sección 3.2 Estudio micromecánico de láminas obteniendo estos valores por medio de las proporciones de contenido de fibra y matriz.

La influencia y uso de los distintos conceptos en micromecánica son desglosados y descritos:

Micromecánica:

- Definiciones básicas.
 - Fracciones de volumen masa y vacío:
Estos conceptos son necesarios para entender la obtención de las características elásticas del material por medio de sus constituyentes, fibra y matriz. [6]

- Evaluación de módulos elásticos.
 - Métodos de derivación de módulos elásticos:
Esta terminología y teoría es necesaria para la comprensión de los métodos existentes para la caracterización del comportamiento elástico de materiales compuestos. [102], [6]
 - Método de derivación por mecánica de materiales:
Este método de derivación utiliza las propiedades de los materiales obtenidas por mecánica de materiales clásica para el promediado de características elásticas en direcciones ortotrópicas debido a la influencia conjunta fibra-matriz. [102], [6]
 - Método de derivación semiempírico:
Es un método derivado del método de mecánica de materiales que hace modificación a la obtención de los módulos elásticos transversal y cortante debido a su falta de correspondencia con datos experimentales, esto para lograr una más adecuada descripción de los módulos elásticos en materiales compuestos. [102], [6]

6.1.2. Conceptualización de macromecánica

El uso de conceptos macromecánicos es necesario en los materiales compuestos de fibras unidireccionales debido a que necesita de la caracterización elástica **dependiente** de la dirección.

Esto se logra estudiando las características del material compuesto y su naturaleza ortotrópica con módulos elásticos principales E_1 , E_2 , G_{12} y ν_{12} y sus transformaciones como se menciona en la sección 4.2 Estudio macromecánico de laminados

El sentido en el uso de los conceptos macromecánicos se describe a continuación:

Macromecánica:

- Definiciones básicas:
 - Esfuerzo y deformación.
Estos conceptos son necesarios para el estudio de la naturaleza de cambio de forma y concentración de fuerza en materiales. [8]
 - Módulo elástico.
La conceptualización de módulo elástico es necesaria debido a la significancia física de la proporción de elasticidad direccional utilizada en materiales.
 - Energía de deformación. [8]
Estos conceptos se presentan para el estudio de la concentración de energía por unidad de volumen en materiales, lo cual es base para los criterios de resistencia para materiales.[108]
- Ley de Hooke y clasificación de materiales.
 - Material anisotrópico.
Estos conceptos básicos son necesarios para entender la elasticidad en materiales cuya deformación depende de la dirección. [6]
 - Material monoclinico.
El concepto de este tipo de material es necesario para aprender a identificar los distintos tipos de material y las posibles simetrías de deformación existentes. [6]
 - Material ortotrópico.
Estos conceptos son necesarios para entender las relaciones de elasticidad en materiales compuestos de fibras unidireccionales. [6]

Esta conceptualización se realiza en conjunto con la creación de códigos y algoritmos que realizan el cálculo de estas relaciones para su uso como herramienta.

.

6.1.3. Conceptos de estudio en materiales compuestos y programación

La paquetería y lenguaje de programación utilizada para este proyecto es MATLAB®. Las funciones iniciales más básicas y el cálculo de esfuerzos en laminados compuestos se realizan inicialmente por código directo en forma de “scripts” sin interfaz de usuario, seguido del diseño y programación de subfunciones en el submódulo MATLAB® GUIDE con el cual se continuó el desarrollo de la herramienta de análisis y que se describe en la sección 3.5 Lenguaje y entorno de programación

Se codifican algoritmos utilizables que permiten analizar la relación fuerza-esfuerzo para el análisis del comportamiento elástico y de resistencia en conjunto, en materiales compuestos.

a) Comportamiento elástico.

Se refiere al estiramiento del material y la relación con las cargas soportadas. La deformación y estiramiento puede ser en las direcciones espaciales en las que se trabaje, ya sea en forma **longitudinal** o en forma **distorsional** como se menciona en la sección 4.1 Teoría de la elasticidad.

b) Comportamiento de resistencia.

Se refiere al comportamiento de **perdida de función del soporte de cargas** de un material, el cual sucede cuando la energía dentro del material sobrepasa un valor específico, hecho que se desea evitar. Esto se trabaja por medio de los criterios de fallo desarrollados en la sección 5.0 Teorías de resistencia y envolventes de fallo.

Para lograr el estudio de la resistencia y elasticidad de estos materiales, dos principales **escalas** de análisis se utilizan de manera independiente y en conjunto:

1) Análisis de láminas simples unidireccionales.

Se estudian y codifican algoritmos que permiten el análisis matemático de la respuesta elástica, estado de esfuerzo y de resistencia de **una sola capa** de laminado compuesto, la cual a su vez se conforma de una matriz combinada con fibras unidireccionales continuas de alta resistencia.

2) Análisis de laminados compuestos unidireccionales de varias capas.

Se refiere al análisis matemático de la respuesta elástica y la respuesta de deformación de materiales compuestos de **varias capas** en forma de “sándwich” laminado. Sus capas pueden estar direccionadas en diversos ángulos de inclinación lo cual afecta la respuesta elástica de cada una de las capas, el conjunto, y por consecuencia la resistencia del material total laminado.

Además de las dos principales formas de estudio de materiales compuestos unidireccionales (lámina y laminado), como funciones auxiliares se tendrán:

1) Uso de métodos opcionales basados en micromecánica para la caracterización de un material compuesto.

Se utilizan relaciones matemáticas basadas en la regla de mezclas mencionadas en la sección 3.2 Estudio micromecánico de láminas y el contenido volumétrico porcentual actual de dos materiales, afectando las **propiedades elásticas** de un material compuesto que demuestra una directa dependencia del contenido de fibra y matriz por medio de su contenido porcentual para cada dirección espacial. Una representación del contenido de micromecánica se observa en la **Figura 6–3**.

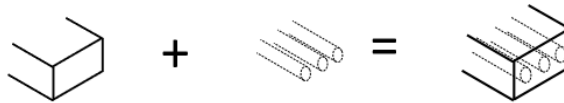


Figura 6–3 Representación de la estructura micromecánica en un material compuesto.

2) Uso de relaciones experimentales de la influencia de vacíos (voids) en la resistencia y degradación de módulos elásticos en materiales laminados compuestos.

Se utilizan relaciones matemáticas que describen la influencia del contenido porcentual volumétrico de vacíos en las propiedades de materiales compuestos. Estos se obtienen a partir de ajustes de curva en la degradación de sus propiedades mencionados en la sección 3.3 Influencia del contenido de vacío en laminados compuestos La representación del contenido de vacío porcentual en un material compuesto se observa en la **Figura 6–4**.



Figura 6–4 Representación del contenido de vacío porcentual en un material compuesto.

6.1.4. Generación de algoritmos independientes y unificación de código

La creación de un programa unificado de análisis de laminado se logra por medio de la función conjunta de secciones de código dedicadas a funciones independientes. La filosofía general por seguir es el clásico método de “*dividir un problema grande, en muchos problemas pequeños*”. Entre las distintas secciones de código, las principales funciones matemáticas creadas son:

- Algoritmo para el cálculo de fracciones de volumen.
- Algoritmo para el cálculo de las relaciones micromecánicas de una lámina singular.
- Algoritmo para el cálculo los diversos criterios de resistencia.
- Algoritmo para el cálculo de las relaciones de elasticidad de laminado ABD.
- Algoritmo para el cálculo iterativo de Fallo Inicial y Fallo Progresivo.

La creación de estos distintos algoritmos se realiza de manera independiente, secuencial e iterativa asegurando el correcto funcionamiento conforme la retroalimentación mencionada en el diagrama de flujo principal de la **Figura 6-1**.

Asimismo, se crean algoritmos de funcionamiento de interfaz de usuario, funciones gráficas y elementos auxiliares los cuales se enlistan a continuación:

- Funciones de botones de interfaz y elementos gráficos.
- Funciones de tabulado de esfuerzo por capa de laminado.
- Funciones de tabulado de criterio de resistencia por capa de laminado.
- Función de graficado de envoltorios de fallo.
- Función de cálculo de módulos elásticos de laminado.
- Funciones auxiliares para exportar resultados y generar reportes.

La creación de algoritmos y funciones auxiliares se ilustra por medio del diagrama de flujo de la **Figura 6-5**:

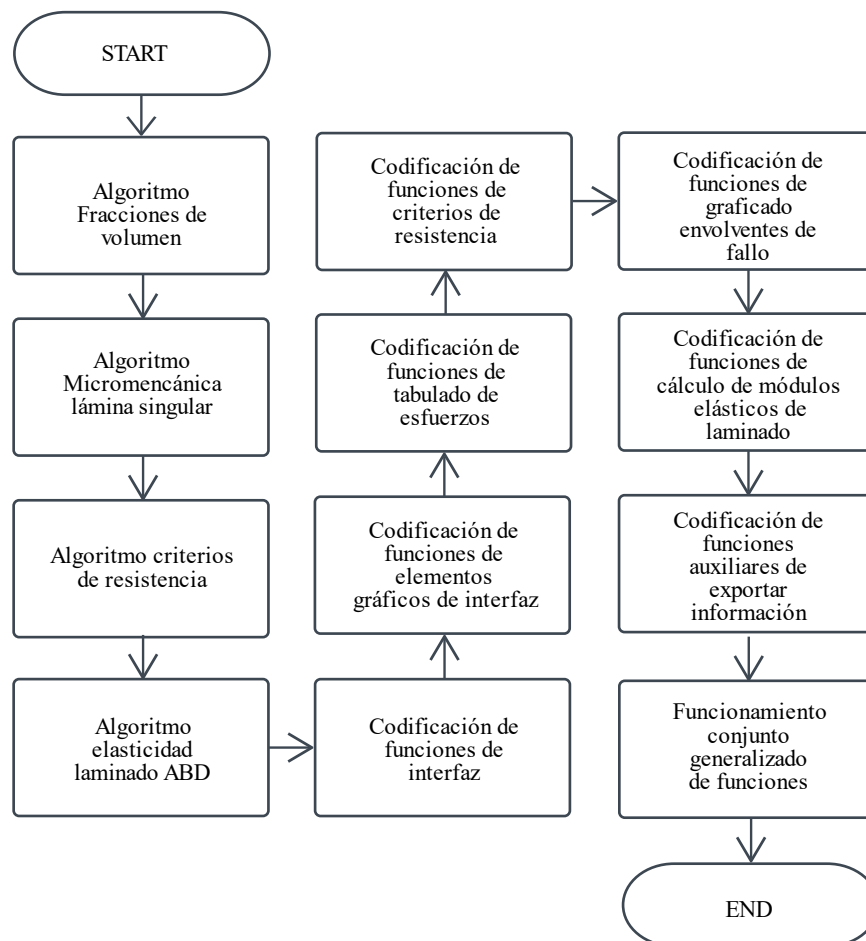


Figura 6-5 Secuencialidad utilizada para la generación de funciones y algoritmos en el proyecto.

6.1.5. Codificación de conceptos micromecánicos en fracciones de volumen: **Descripción de la estructura de código**

Los códigos de conceptos básicos iniciales se generan calculando fracciones de volumen, masa y densidad que son utilizados en las relaciones micromecánicas.

Siguiendo las ecuaciones del apartado 3.2.1 Fracciones de volumen, se codifican cuatro primeras funciones básicas de cálculo de los conceptos de fracciones porcentuales del contenido de masa y volumen:

1) Código de fracción de volumen.

Se calcula el contenido porcentual (fraccionario) de la cantidad de volumen en un material compuesto según las ecuaciones 3.1 a 3.4.

2) Código de fracción de masa (por densidades y volúmenes).

Se calcula el contenido porcentual (fraccionario) de la cantidad de masa según las relaciones de volumen y densidad de las ecuaciones 3.8 a 3.13.

3) Código de fracción de volumen (con vacío).

Se calcula el contenido porcentual (fraccionario) de la cantidad de volumen en un material compuesto según las ecuaciones 3.5 a 3.7.

Los diagramas de flujo de las funciones básicas de cálculo de contenido fraccional pueden apreciarse en las **Figura 6-6** a **Figura 6-9**. Detalles de la codificación y ejemplos se encuentran en el Apéndice A, Sección A.5.

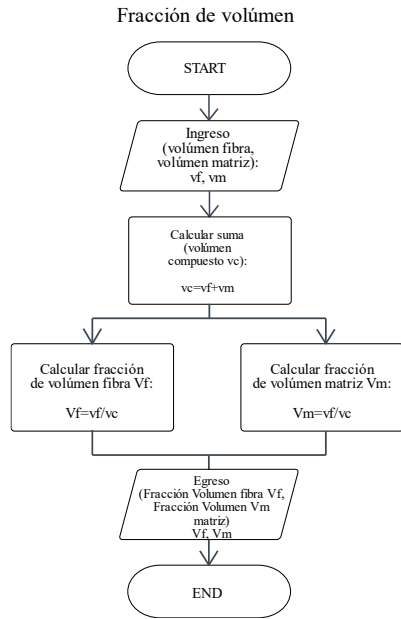


Figura 6-6 Diagrama de bloques para el cálculo de fracciones de volúmen.

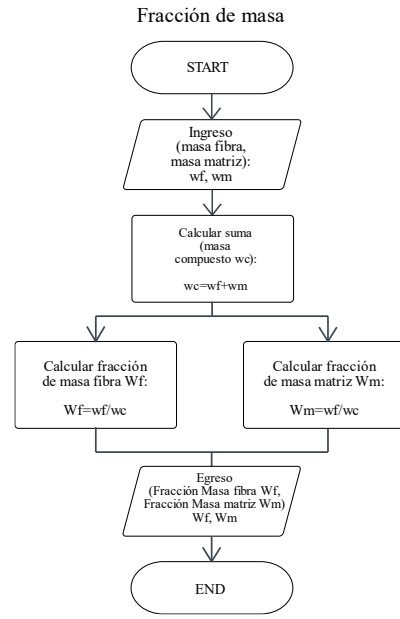


Figura 6-7 Diagrama de bloques para el cálculo de fracciones de volúmen.

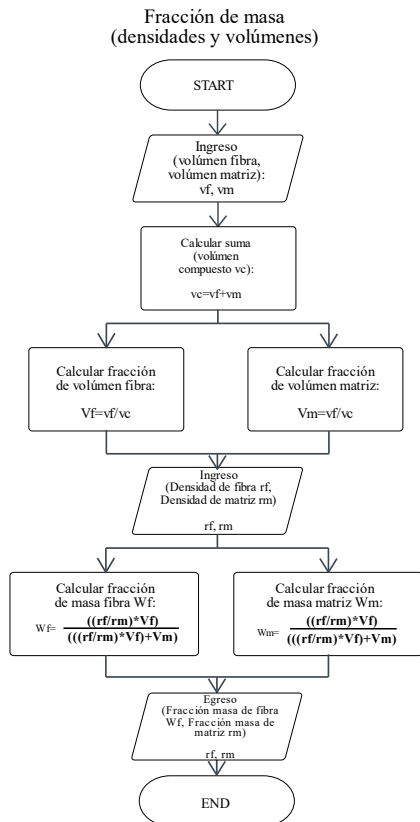


Figura 6-8 Diagrama de bloques para el cálculo de fracción de masa.

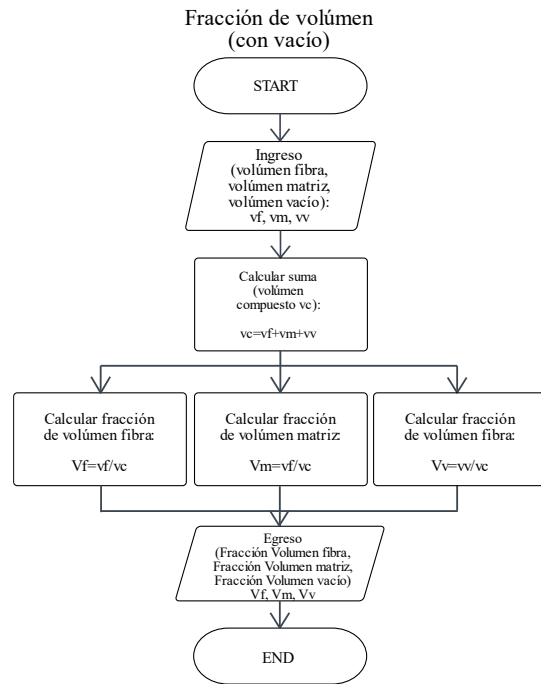


Figura 6-9 Diagrama de bloques para el cálculo de fracción de volúmen con vacío.

6.1.6. Módulos de lámina por micromecánica: Descripción de la estructura de código

La micromecánica en la derivación de módulos elásticos en láminas de material compuesto se lleva a cabo por medio de los conceptos matemáticos de la regla de mezclas y teorías modificadas (Halpin-Tsai) de los que se obtienen los módulos elásticos de lámina en 2D como se menciona en el punto 4.2.1 Lámina ortotrópica plana (2D).

El código inicial de derivación de módulos elásticos permite el cálculo de los módulos elásticos de lámina plana unidireccional 2D siguientes:

- **E1** (Módulo elástico longitudinal de lámina)
- **E2** (Módulo elástico transversal de lámina)
- **G12** (Módulo elástico cortante de lámina)
- **p12** (Relación de Poisson en-plano 1-2 de lámina)

Estos módulos caracterizan el comportamiento de estiramiento o deformación del material laminar plano compuesto a estudiar obtenidos de las propiedades individuales de fibra y matriz antes de ser combinados.

Los dos métodos codificados para la derivación de módulos elásticos son los más conocidos para el estudio de materiales compuestos, los cuales son mencionados en el apartado en 3.2.4 Derivación de módulos elásticos por micromecánica:

- **Derivación por conceptos de mecánica de materiales.**
Son las ecuaciones obtenidas del estudio geométrico de la composición de fibra-matriz y las definiciones de esfuerzo-deformación en el estudio de mecánica de materiales.
- **Derivación por conceptos ajustados semiempírico Halpin-Tsai.**
Son las ecuaciones obtenidas de la modificación del método de derivación por mecánica de materiales, el cual corrige los módulos elásticos **E2** y **G12** debido a su falta de precisión (cuando se utiliza el método anterior), generando ajustes basados en datos experimentales y relaciones de tipo semiempírico.

Estas ecuaciones se codifican en un “script” secuencial que pide los valores necesarios, V_f , V_m (fracción de volumen matriz y fibra), seguido de los módulos elásticos de fibra y matriz, para poder calcular los módulos de su combinación en una lámina de material compuesto el cual se muestra en la **Figura 6–10**.

Micromecánica:
Derivación de
módulos elásticos
de lámina unidireccional
por fracción de volumen.

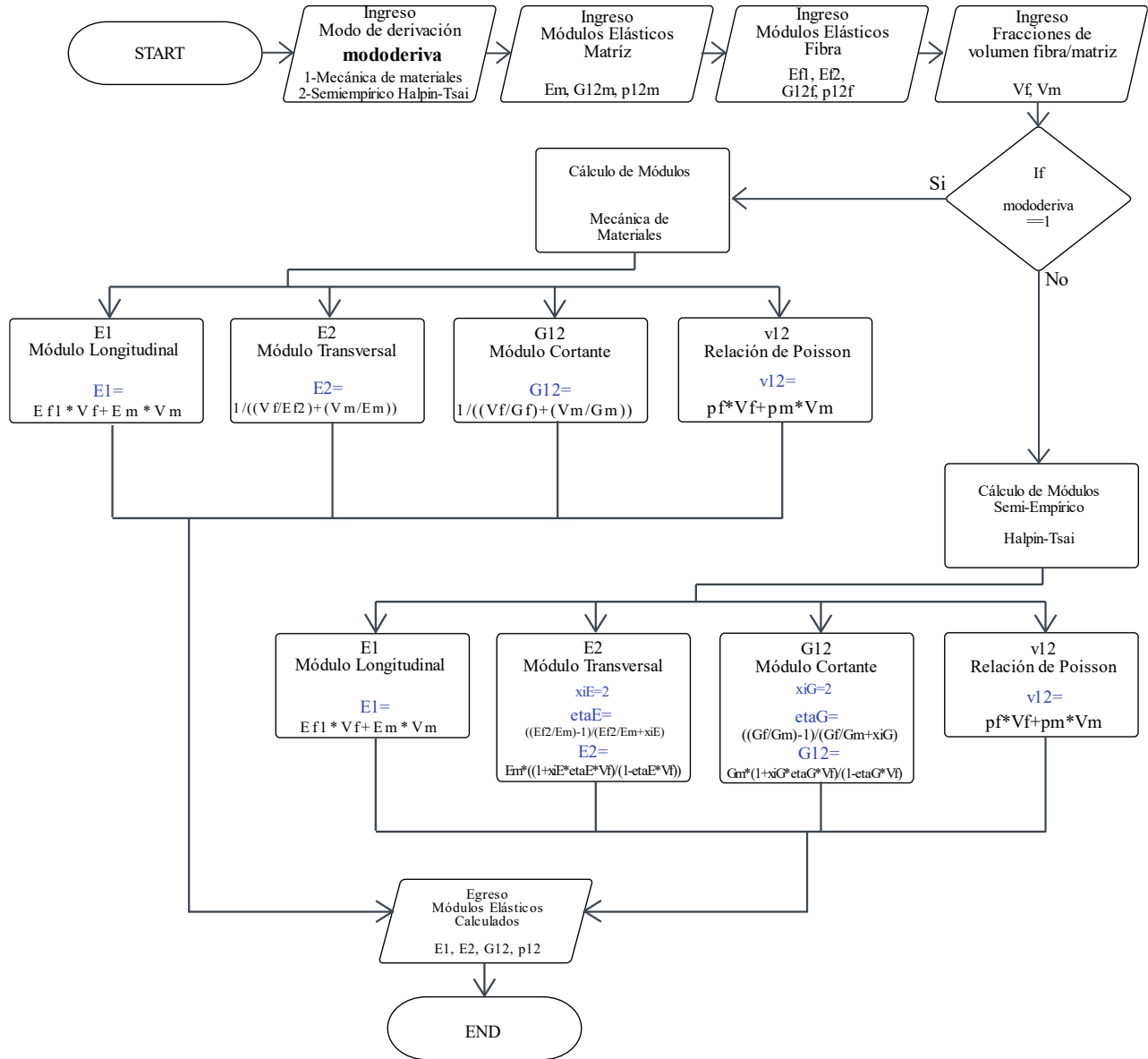


Figura 6–10 Diagrama de bloques para la derivación de módulos elásticos en material compuesto. **E1**, **E2**, **G12** y **p12** representan las propiedades de material: módulo de Young, módulo cortante, y relación de Poisson respectivamente. **xiG**, **etaG**, **xiE** y **etaE** son constantes de ajuste para el cálculo por método micromecánico semiempírico. Dependiendo de la sección de código, la relación de Poisson también se almacena sobre la variable **nu12**.

6.2. Fase 2: Micromecánica y lámina anisotrópica

Esta fase trata los conceptos de elasticidad anisotrópica y elasticidad de lámina ortotrópica, módulos elásticos tensoriales y su relación con los módulos elásticos de ingeniería como medio de caracterización del comportamiento de una lámina homogenizada y la interrelación de esfuerzo-deformación multidireccional. Se maneja la transformación de coordenadas de las matrices elásticas con el fin de caracterizar la elasticidad en láminas rotadas. Se realiza el correspondiente codificado matemático necesario de manera matricial para el cálculo de estado de esfuerzos en una simple lámina ortotrópica con rotación en rango [0-90] así como retroalimentación y validación de funcionamiento.

Sub-metodologías de la Fase 2:

Las entradas conceptuales de la Fase 1 nutren la Fase 2. La Fase 2 hace uso de las entradas conceptuales de micromecánica y criterios de resistencia en materiales en conjunto con la prueba iterativa de códigos y funciones generadas descritos en las **Figura 6-11** y **Figura 6-12**:

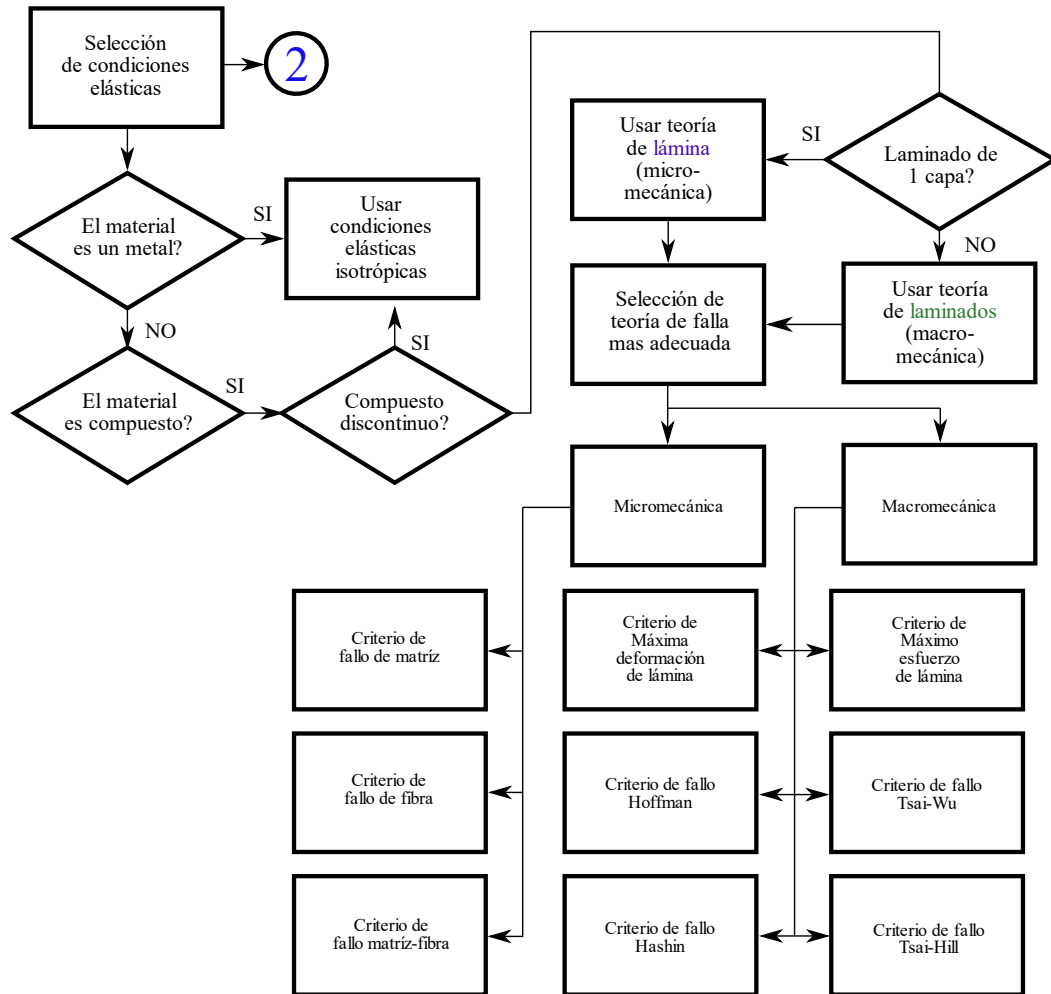


Figura 6-11 Entrada conceptual 2 para el desarrollo de la Fase 2.

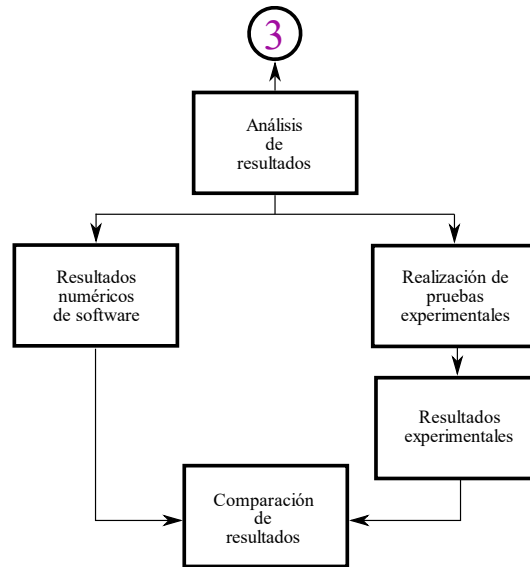


Figura 6–12 Entrada conceptual 3 de análisis iterativo para el desarrollo de la Fase 2.

Para esta fase se hace uso de los algoritmos generados en la sección 6.1 Fase 1: Conceptos básicos, permitiendo la derivación por micromecánica de los módulos elásticos de una lámina de material compuesto.

Junto con los módulos elásticos derivados por micromecánica, el desarrollo de la herramienta para el análisis de la respuesta elástica en materiales compuestos a nivel lámina se logra aplicando lo descrito en las secciones 4.2 Estudio macromecánico de laminados y 3.2 Estudio micromecánico de láminas del **Capítulo 3**. Generando un código que funge como medio semiautomático para el cálculo del estado de esfuerzo en una lámina. Los módulos elásticos son derivados a partir de conceptos micromecánicos y auxilian al estado de esfuerzo plano homogenizado. La **Figura 6–13** muestra el diagrama del proceso de estudio de láminas de material compuesto.

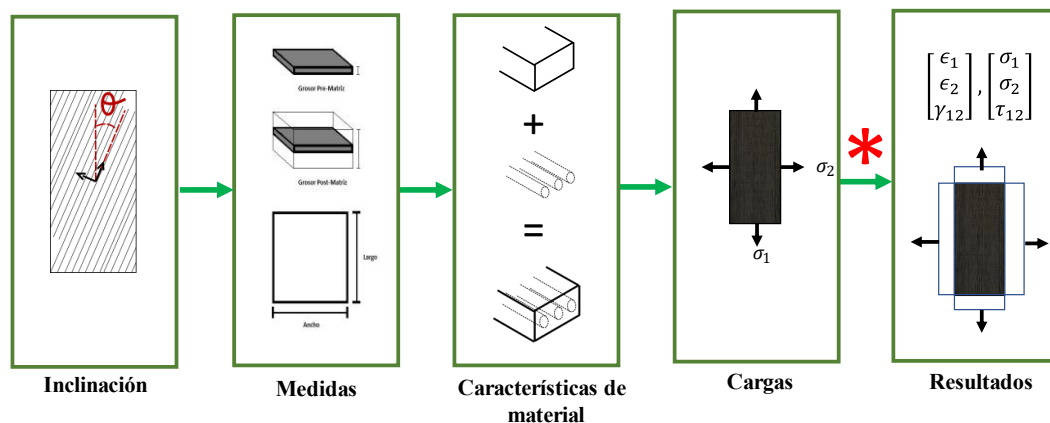


Figura 6–13 Diagrama del estudio de respuesta elástica de una capa de lámina. Donde se tiene inclinación, dimensiones, σ y τ representando los esfuerzos, ϵ y γ representando las deformaciones.

6.2.1. Lámina ortotrópica 2D: Descripción de estructura

Los códigos para la aplicación de conceptos macromecánicos de láminas se llevan a cabo por medio de los conceptos en matemática matricial 2D los cuales relacionan el estado de esfuerzo-deformación del material como se muestra en el apartado 4.2.1 Lámina ortotrópica plana (2D). Los módulos elásticos de material (E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12}) de lámina son utilizados para armar los **módulos elásticos de ingeniería** en la matriz de rigidez plana $[Q]$ (Q_{11} , Q_{22} ... etc.) con los que se calcula el estado de esfuerzo en el material.

Los módulos elásticos de ingeniería se **calculan dependiendo del ángulo de inclinación del material**. Estas ecuaciones son derivadas a partir de la transformación de coordenadas aplicada a la matriz elástica 2D y se calculan conforme el apartado 4.2.2 Lámina ortotrópica plana (2D) con ángulos de inclinación. Los módulos q_{11} , q_{22} , q_{12} , q_{16} , q_{26} y q_{66} de ese apartado son calculados debido a su dependencia de las relaciones trigonométricas en la transformación de coordenadas y son utilizados para armar la matriz de rigidez $[Q]$ para una capa de material de estudio. El diagrama de flujo para esta función se muestra en la **Figura 6–14**.

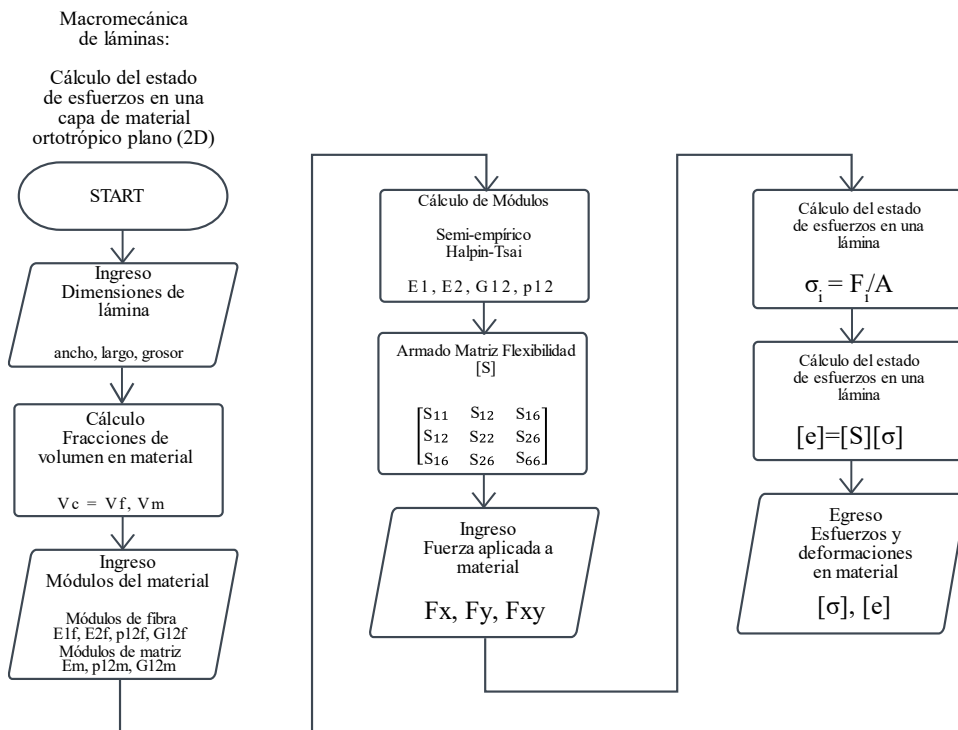


Figura 6–14 Diagrama de bloques del estudio macromecánico de lámina simple. V_c , V_f y V_m representan las fracciones de volumen del compuesto, la fibra y la matriz respectivamente. E_1 , E_2 , G_{12} y ν_{12} representan las características de material módulo de Young, módulo cortante, y relación de Poisson respectivamente. $[\sigma]$, $[\epsilon]$ y $[S]$ representan los vectores de esfuerzo y deformación y la matriz de flexibilidad respectivamente.

6.2.2. Teorías de fallo: Descripción de estructura

Los códigos de la aplicación de teorías de resistencia para un material compuesto se logran por medio de las teorías matemáticas mencionadas en la sección 5.2 Teorías de energía y criterios de fallo aplicables a materiales anisotrópicos y compuestos laminados. La diferencia y razón de aplicación de estas teorías se debe a las interacciones de energía que las teorías toman en consideración para aproximar el fallo por medio de sus ecuaciones.

A partir del estado de esfuerzo en un material actual analizado (una capa de material compuesto) se toma el vector de estado de esfuerzos $[\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}]$ el cual es evaluado por cada una de las teorías de resistencia para discernir si existe fallo bajo la teoría actual. Entre las teorías se encuentran las de: Tsai Hill, Tsai-Wu, Hoffman, Hashin y LaRC02, generando una tabla que muestra el fallo o no fallo del material bajo estas teorías. El diagrama de flujo de este proceso se puede apreciar en la **Figura 6-15**.

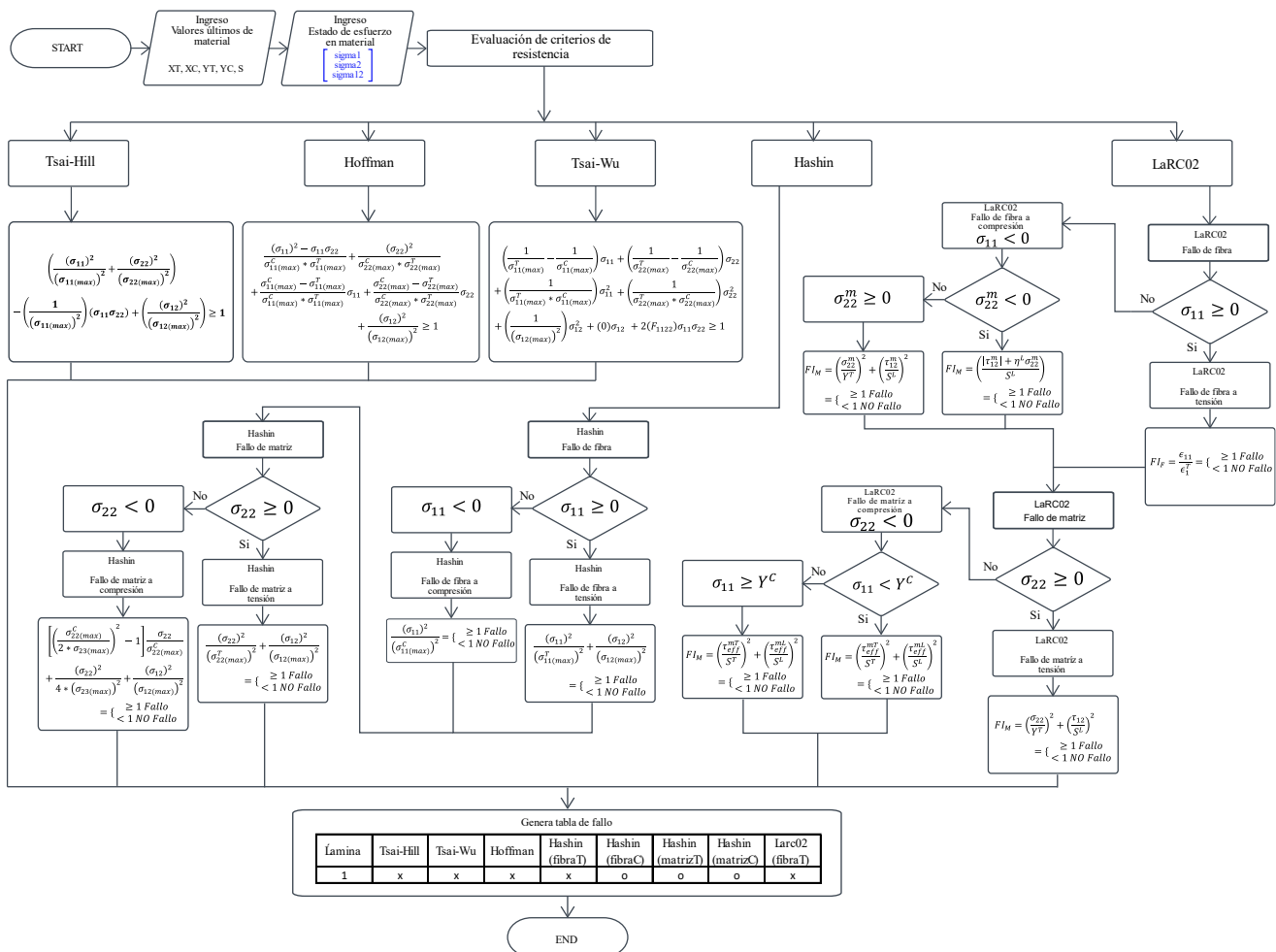


Figura 6-15 Diagrama de bloques del estudio de teorías de resistencia en materiales compuestos. σ representa el esfuerzo normal en el material, τ representa el esfuerzo cortante en el material y la dirección dependerá de los subíndices.

6.3. Fase 3: Macromecánica de laminados

Esta fase se dedica al trabajo con la elasticidad anisotrópica de conjuntos de laminados, por medio de la homogenización de las distintas capas. Estas son conjuntos de capas que pueden encontrarse rotadas a distintos ángulos. Esto se logra por medio de la teoría de laminados [ABD], la cual aproxima la elasticidad de laminados por medio de la sumatoria de matrices elásticas por cada capa, siendo esto proporcional al grosor de cada capa (o similar a un promedio pesado), de donde se obtiene la relación fuerza-deformación como es mencionado en la sección 4.2.4 Teoría de Laminado Clásica (Classical Laminate Theory). Con el fin de permitir la generación de algoritmos para el cálculo de estado de esfuerzos de un conjunto laminado, primero se deriva el estado de esfuerzo en cada una de las capas, retroalimentando y validando el funcionamiento y los resultados obtenidos con datos experimentales.

Propiedades y fallo: Sub-metodología de la Fase 3

Los objetivos de conceptualización de la Fase 2 alimentan el inicio de la Fase 3, la cual se encarga del desarrollo de algoritmos de análisis. En forma similar a la fase anterior. La Fase 3 hace uso de las sub-metodologías de entrada de conceptos de estudio de láminas y retroalimentación descritos en la Figura 6–16 y Figura 6–17:

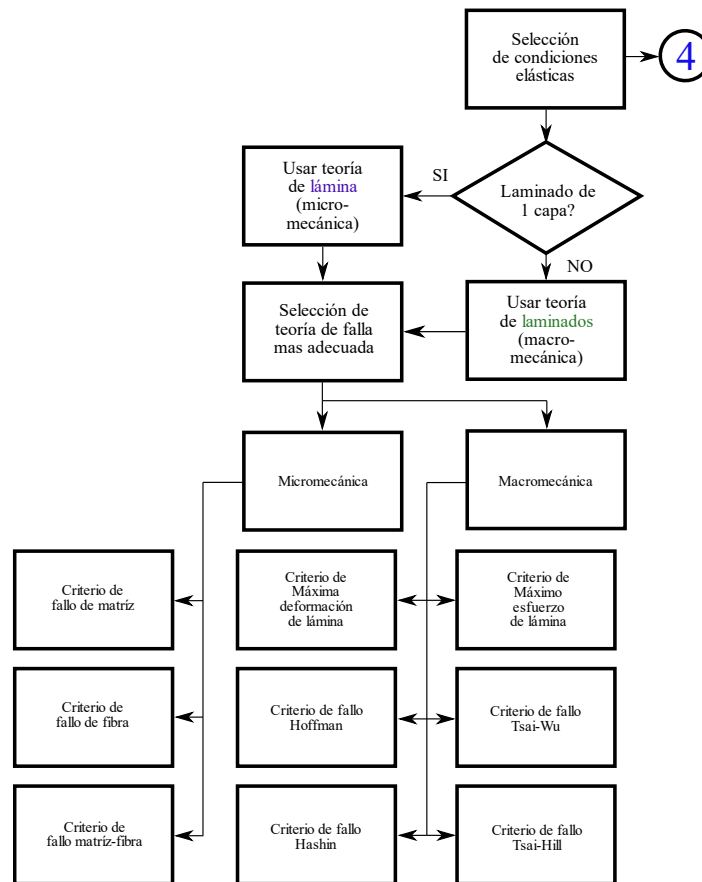


Figura 6–16 Entrada conceptual 4 para el desarrollo de la Fase 3.

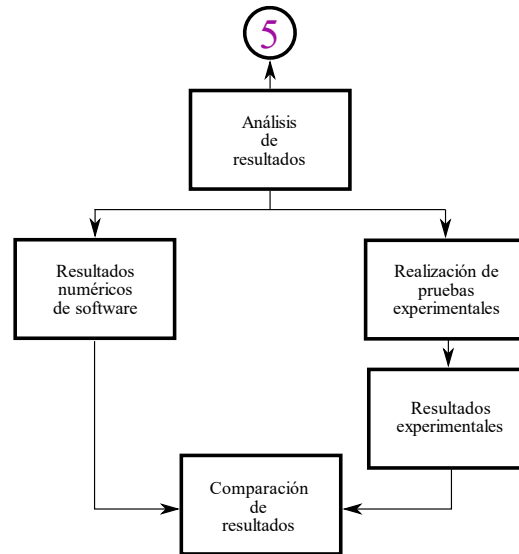


Figura 6–17 Entrada conceptual 3 de análisis iterativo para el desarrollo de la Fase 2.

Para esta fase se hace uso de algoritmos generados en la sección 6.1 Fase 1: Conceptos básicos y la sección 6.2 Fase 2: Micromecánica y lámina anisotrópica. Para permitir el uso de una lámina de material compuesto caracterizada por sus módulos de ingeniería previamente obtenidos y sus valores calculados, los cuales se usan como insumos para los cálculos de la elasticidad ([ABD]) en un conjunto de laminados.

Para analizar la elasticidad en conjuntos de capas se toman en consideración los efectos de deformación y deflexión en los laminados a través de sus capas como se comenta en la sección 4.2.4 Teoría de Laminado Clásica (Classical Laminare Theory). La **Figura 6–18** muestra el diagrama del proceso de estudio de laminados de material compuesto.

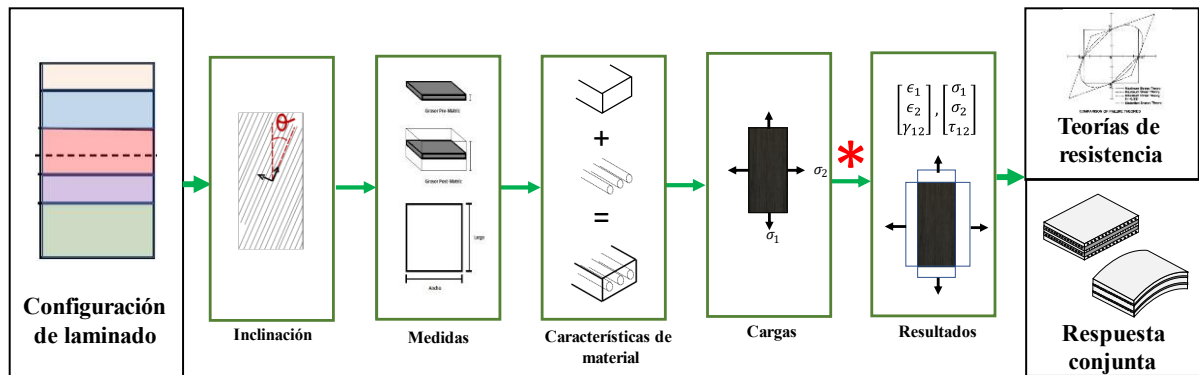


Figura 6–18 Diagrama del estudio de respuesta elástica de laminados de varias capas.

6.3.1. Teoría de laminado ABD: Descripción de estructura

Los pasos para el estudio de un laminado compuesto con la matriz [ABD] se enlistan a continuación:

1. Se calcula el módulo elástico de ingeniería de una lámina plana (2D) y se calculan los módulos elásticos rotados para cada una de las láminas conforme al ángulo de inclinación actual de cada capa como se menciona en la sección 4.2.2 Lámina ortotrópica plana (2D) con ángulos de inclinación
2. Se calculan las matrices A, B, y D mostradas en las Ecuaciones 3.110 a 3.112, las cuales relacionan las deformaciones extensionales, de acoplamiento y de flexión por medio de una sumatoria de módulos elásticos la cual es proporcional al grosor de cada capa de laminado ingresando fuerza por unidad de longitud o momento por unidad de longitud.
3. Se arma la matriz [ABD] la cual forma parte de un sistema de ecuaciones 6x6 relacionando fuerzas y momentos (plano 2D) a deformaciones longitudinales y curvaturas. Se calculan las deformaciones en el laminado entero como es desarrollado en la sección 4.2.4 Teoría de Laminado Clásica (Classical Laminate Theory)
4. Con la deformación longitudinal total en conjunto con la curvatura calculada, se obtiene la deformación en cada una de las capas del laminado y se calcula la variación del esfuerzo por cada capa de laminado.

El código para esta función se desarrolla en forma de “script” como un algoritmo que obtiene los parámetros de configuración actual de laminado (dimensión, cargas aplicadas, módulos elásticos, valores de resistencia), generando las transformaciones necesarias de módulos elásticos y armando las matrices de elasticidad de lámina y laminado. El diagrama de este algoritmo de cálculo se observa en la **Figura 6–19 y Figura 6–20**.

En este código las fracciones de volumen utilizadas son definidas por tres métodos distintos:

a) Modo predeterminado:

En éste modo la proporción de fracción de volumen toma valores predeterminados que se encuentran dentro del rango típico de proporción de volumen fibra-matriz para un material de fibra de carbono [6, p. 106].

Estos valores son 0.7 para fracción de volumen de fibra y 0.3 para fracción de volumen de matriz.

b) Ingreso manual:

Este modo de ingreso de fracción de volumen permite el ingreso manual de la fracción de volumen de fibra Vf , a partir del cual se calcula la fracción de volumen de la matriz Vm como en la Ecuación 4.1.

$$Vm = 1 - Vf \quad (4.1)$$

c) Derivación por dimensiones de probeta.

En este modo de obtención de fracciones de volumen, las fracciones de volumen correspondientes a la fibra y matriz se obtienen asumiendo que se cuenta con un valor medido de grosor de lámina de fibra de una probeta sin matriz, así como el valor de grosor de lámina una vez que esta ha sido cubierta por la matriz. De la diferencia de estos grosores, se calcula la fracción de fibra y matriz correspondientes al contenido porcentual geométrico de estos materiales. Para el cálculo de fracciones de volumen derivados de las dimensiones de probeta (caso 3 del diagrama de flujo de la **Figura 4-23**), las fracciones de volumen se calculan conforme las Ecuaciones 4.2.1 a 4.2.5.

$$vm = (\text{largo} * \text{ancho} * (\text{grosorpostmatriz} - \text{grosorprematriz})) \quad (4.2.1)$$

$$vf = (\text{largo} * \text{ancho} * \text{grosor}) \quad (4.2.2)$$

$$vc = vf + vm \quad (4.2.3)$$

$$Vf = vf/vc \quad (4.2.4)$$

$$Vm = vm/vc \quad (4.2.5)$$

La **Figura 6–19** describe el proceso de cálculo de laminados compuestos mencionado en esta sección.

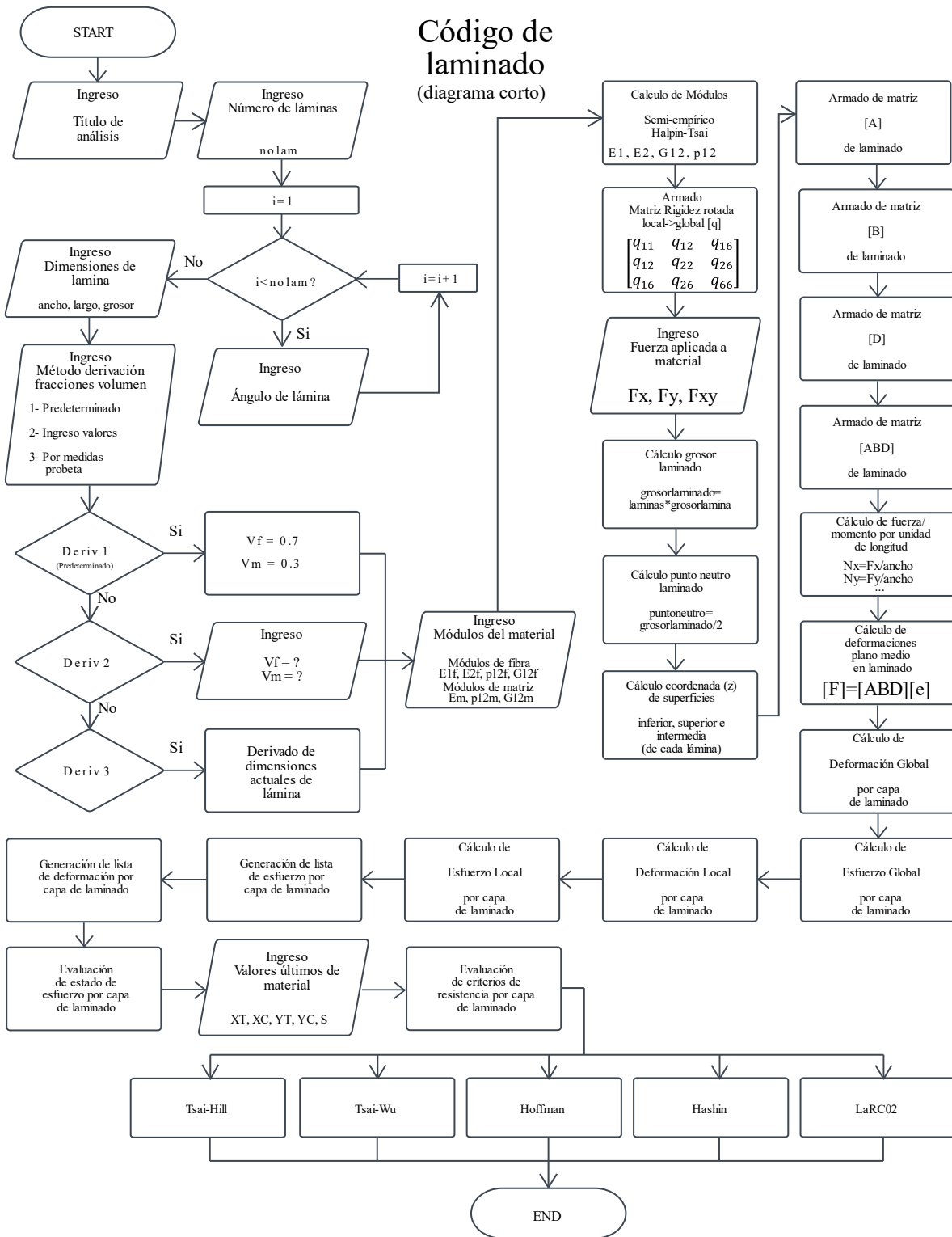


Figura 6–19 Diagrama de bloques de estudio macromecánico de laminados. (Diagrama corto).

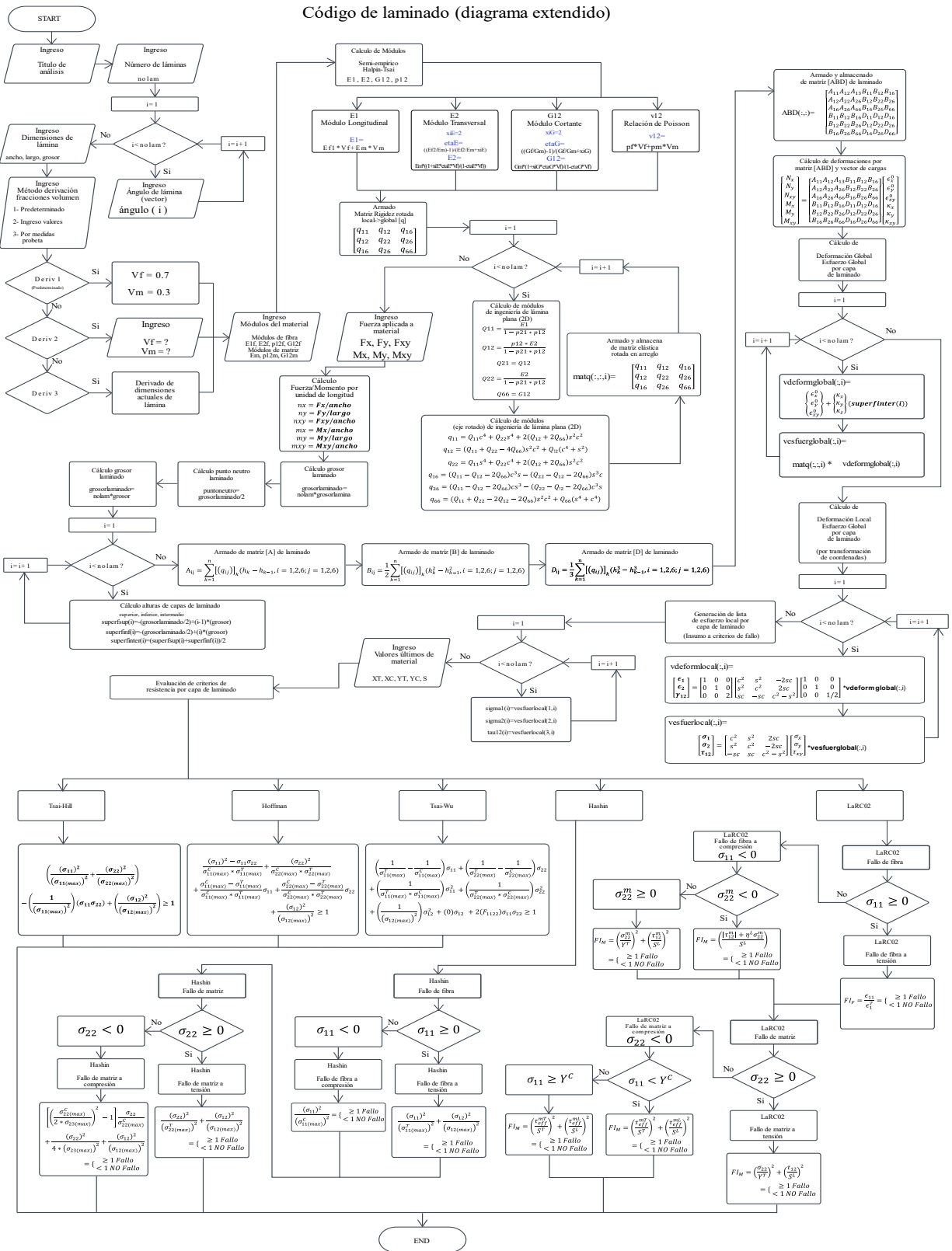


Figura 6-20 Diagrama de bloques de estudio biomecánico de laminados. (Diagrama extendido).

6.3.2. Degradación por % de vacío

La función auxiliar para incluir degradación por contenido porcentual de vacío del programa se logra por medio del submenú Contenido de vacío mencionado en el diseño de interfaz. El funcionamiento de este submenú es por medio del funcionamiento conjunto de 3 funciones programadas que trabajan para generar la degradación debido al efecto de vacíos.

Degradación por vacío: Activación de submenú:

El cuadro de selección del submenú debe ser seleccionado para activar la función de este submenú y la cantidad porcentual de contenido de vacío debe ser ingresada. El flujo se muestra en el diagrama mostrado en la **Figura 6–21**.

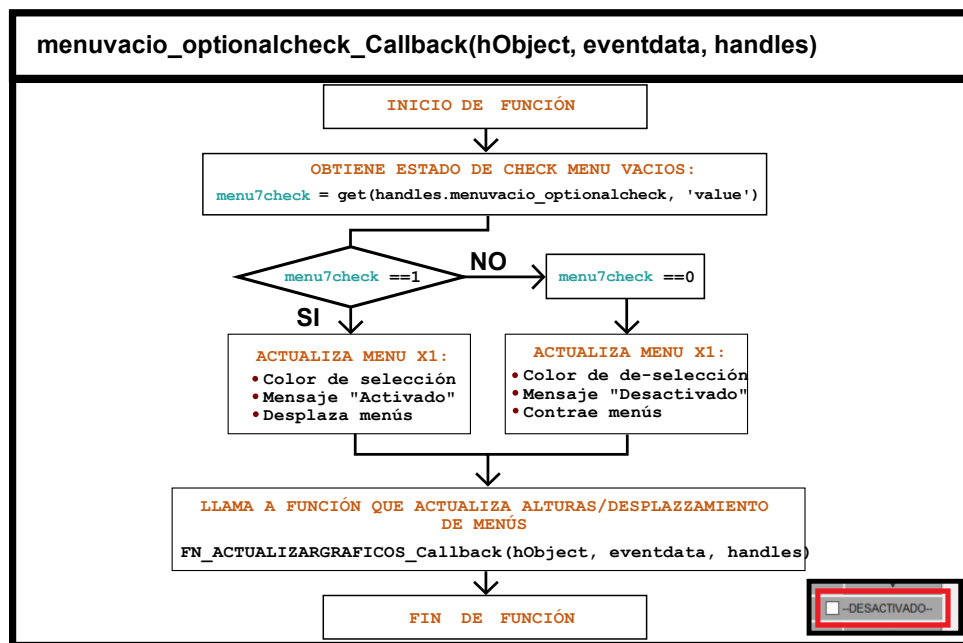


Figura 6–21 Diagrama de función menu_optionalcheck y captura de cuadro de selección de interfaz.

Degradación por vacío: Factores de disminución:

La activación del submenú por medio del cuadro de selección actualiza una variable global de estado la cual permite que la subfunción generada por usuario “**math_ContVacio()**” calcule los factores de disminución en módulos elásticos y resistencia del material. Esta subfunción se encarga de calcular los factores de disminución mencionados en la sección 3.3 Influencia del contenido de vacío en laminados compuestos, por medio de las ecuaciones de ajuste de curva. Esto se indica en el diagrama mostrado en la **Figura 6–22**.

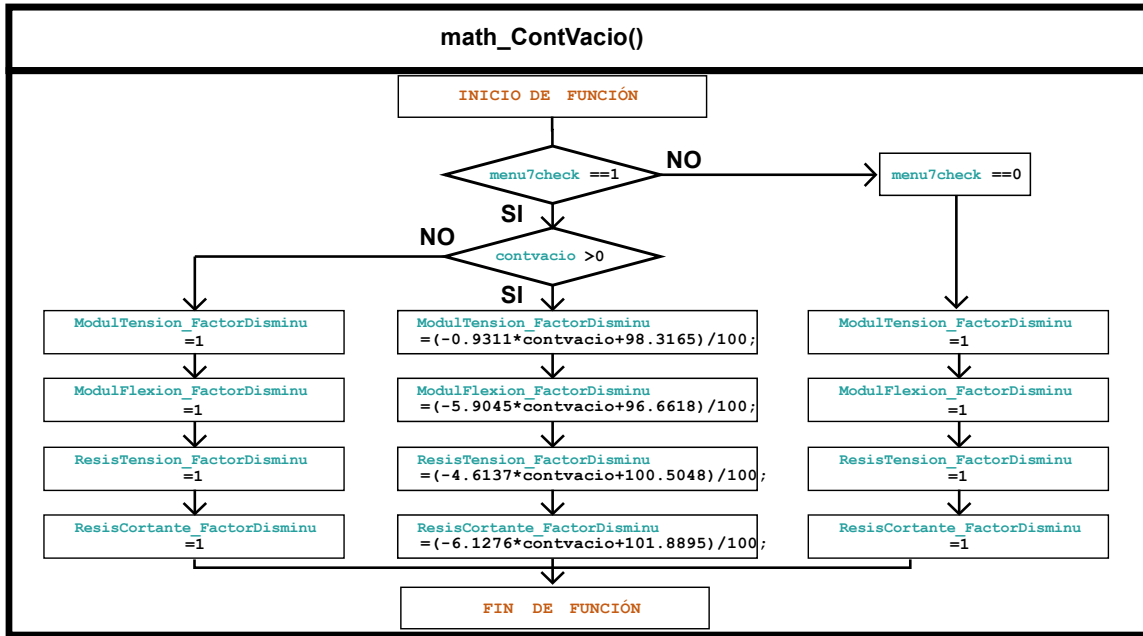


Figura 6–22 Diagrama de función math_ContVacio() y captura de botón de interfaz.

Degradación por vacío: Uso de factores de disminución.

Los factores de disminución calculados de esta función son utilizados dentro de las funciones “**math_ManipulacionesABD()**” y “**math_CriteriosFalla()**” mencionadas en apéndice sección [.A.3.5.](#) del programa principal de análisis de laminados. El flujo se indica en el diagrama mostrado en la **Figura 6–23**.

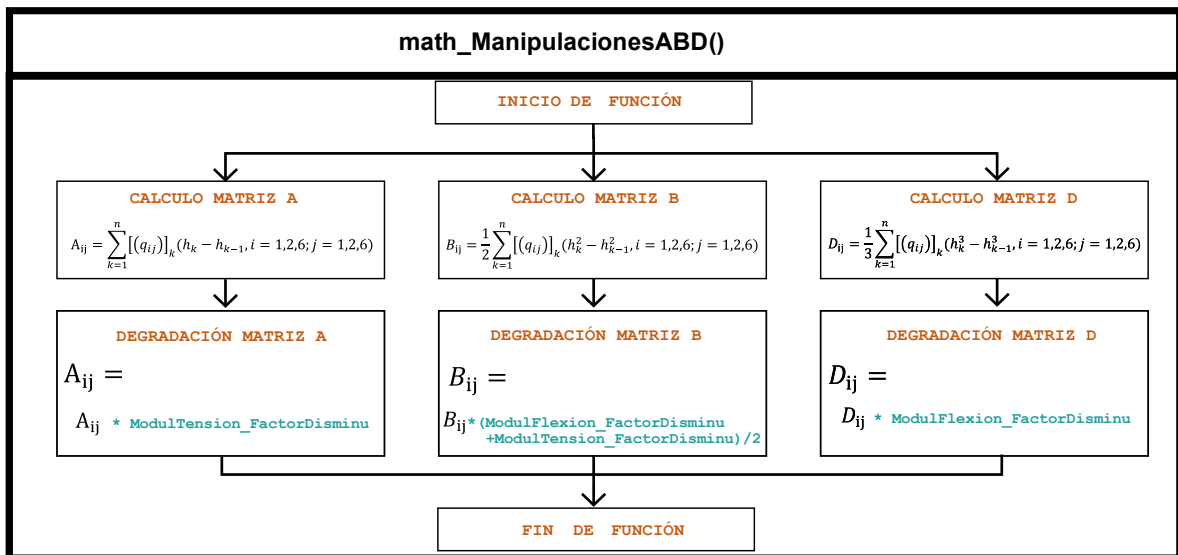


Figura 6–23 Diagrama de función math_ManipulacionesABD() e inclusión de degradación.

Cuando el submenú no está activado o el contenido porcentual de vacío es igual a cero, los factores de disminución son iguales a la unidad (1) conforme la función “**math_ContVacío()**”, lo que significa que no se aplica ninguna disminución sobre los parámetros elásticos y de resistencia del material compuesto actual. De otro modo, la degradación por medio de estos parámetros es realizada conforme se describe en la sección 3.3 Influencia del contenido de vacío en laminados compuestos sobre el código principal de este programa y las funciones mencionadas.

La degradación a los valores de resistencia es implementada por medio de un método similar al de la degradación de los módulos de laminado al multiplicar el factor de degradación de resistencia por el valor de resistencia inicial de material dentro de la función “**math_CriteriosFalla()**”. El funcionamiento se indica en el diagrama mostrado en la **Figura 6–24**.

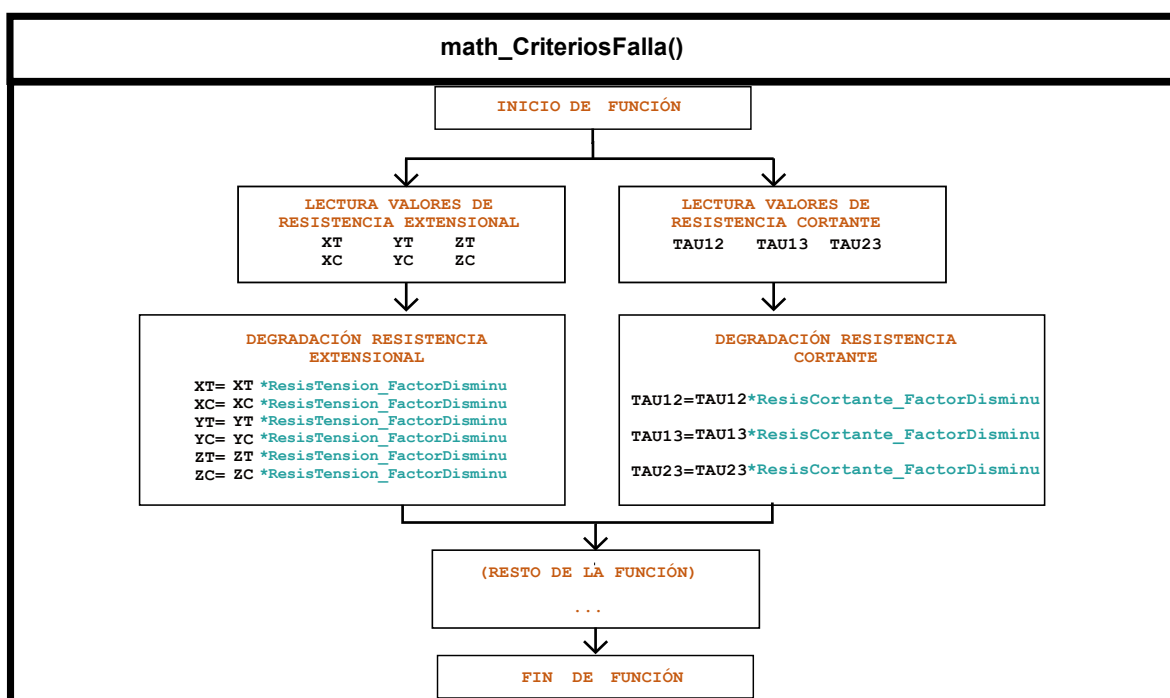


Figura 6–24 Diagrama de sección inicial de función **math_CriteriosFalla()** e inclusión de degradación.

Una vez tomada en consideración la degradación correspondiente en las secciones de código mencionadas, el programa continúa con la solución de análisis de laminados compuestos por capa como se menciona en apéndices Sección [A.3.5](#).

6.3.3. Cálculo de Fallo Inicial de 5 teorías (Función auxiliar)

El análisis de Fallo Inicial en este programa funciona por medio de la función auxiliar controlada por medio del submenú [Multianálisis Fallo Inicial](#) en apéndice sección A.3. En este submenú se activa un algoritmo que aumenta la carga en un compuesto laminado a estudiar de manera progresiva en un determinado rango de cargas, encontrando así las teorías y el valor bajo los cuales se considera que el material ha alcanzado el primer fallo (o degradación).

El avance de carga se realiza bajo la resolución calculada de los rangos de fuerza ingresados y el número de pasos ingresado. De aquí se almacena el punto de fallo de cada teoría para poder graficar y mostrar el punto de fallo para cada una de estas. La resolución de avance de cálculo de fallo se calcula por medio de los rangos ingresados en el submenú conforme la Ecuación 4.3:

$$(Resolución) = \frac{(Valor\ Final\ [N]) - (Valor\ Inicial\ [N])}{(Número\ de\ pasos)} \quad (4.3)$$

El análisis multiresolución a Fallo Inicial almacena datos de esfuerzos en material en cada uno de los puntos de avance, los cuales son utilizados para la graficación de resultados. El diagrama representativo de pasos de solución y resolución se muestra en la **Figura 6–25**.

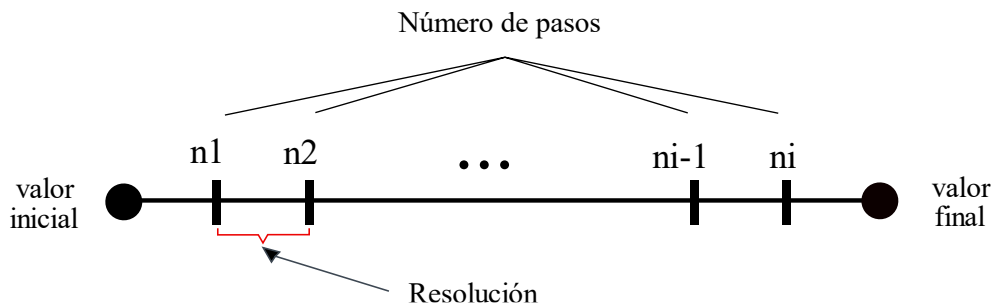


Figura 6–25 Representación de rango de cargas y puntos a solución de Fallo Inicial.

De la resolución calculada se genera un vector (lista) de valores de carga para los cuales se analiza el laminado iterativamente, registrando después de cada solución el fallo o no fallo del material, encontrando así el punto en el cual se detecta el primer fallo en alguna capa de laminado para cada una de las teorías mencionadas. En él se busca la existencia de fallo según las teorías **sin hacer distinción del modo de fallo** ni hacer distinción entre los 4 distintos tipos de fallo (Fallo Matriz Compresión, Fallo Matiz Tensión, Fallo Fibra Tensión y Fallo Fibra Compresión) de las teorías multicriterio.

El código se realiza por medio de un ciclo “for” dentro del cual se aumenta la carga con la cual se realiza el análisis de laminado de forma iterativa. Dentro de cada una de las iteraciones de ciclo se registra el estado actual del material y resultados, los cuales se utilizan para generar gráficos dentro del submenú. El diagrama de Fallo Inicial se aprecia en la **Figura 6–26**.

Análisis a Fallo Inicial

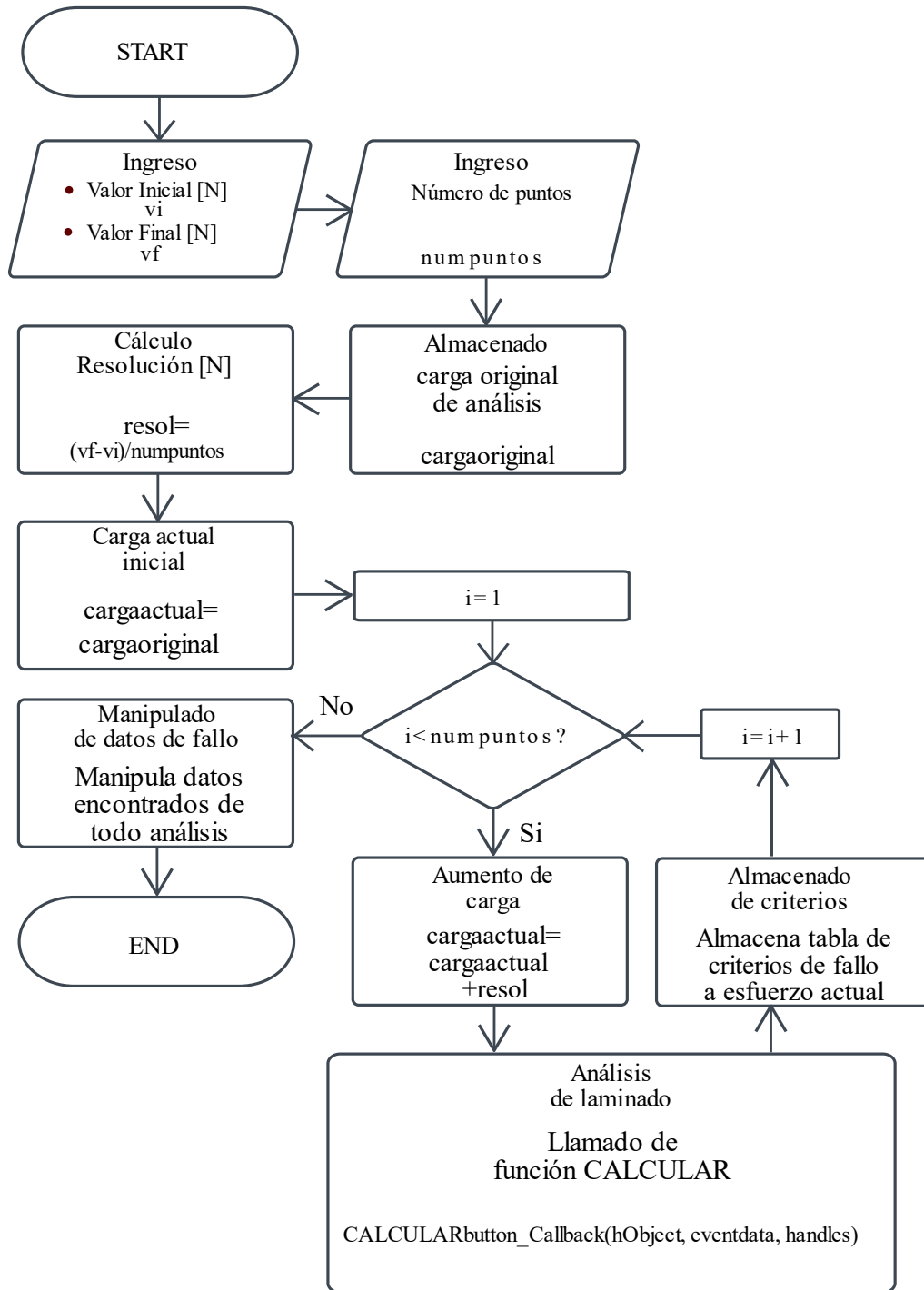


Figura 6–26 Diagrama de bloques de la función de análisis de Fallo Inicial.

6.3.4. Cálculo de fallo progresivo (Función auxiliar)

El análisis de fallo progresivo en este programa funciona por medio de la función auxiliar la cual es controlada por medio del submenú [Multianálisis Fallo Progresivo](#), en apéndices sección A.3. En este submenú se activa un algoritmo que aumenta la carga en un compuesto laminado a estudiar de manera progresiva, encontrando bajo una teoría seleccionada el punto de carga en el cual se considera que el material ha fallado. Esto, a diferencia de la función de fallo inicial, se realiza progresivamente encontrando el orden de fallo en el compuesto laminado actual tomando en consideración **todas las capas de laminado** y el fallo en cada una de ellas aún después del fallo inicial, registrando el orden y la carga bajo la cual las capas de material laminado fallan.

Estructura de código:

El funcionamiento de este submenú se realiza por medio de dos ciclos “while” anidados, los cuales trabajan en conjunto para encontrar el fallo de láminas hasta el fallo de lámina final. El **ciclo while interno** itera el aumento de una carga inicial hasta encontrar la carga en la cual se encuentra el fallo de una capa de laminado. Al encontrarse un fallo en una capa de laminado se registra la carga, módulos elásticos, número de láminas fallidas y qué láminas fallaron específicamente.

Seguido de encontrar el fallo, el código sale del ciclo while interno al **ciclo while externo** el cual registra el número de láminas restantes a fallar, genera una degradación de módulos elásticos debido al fallo anterior y regresa al ciclo while interno con un nuevo módulo elástico de laminado bajo el cual intentará buscar el fallo de la siguiente(s) capa(s) de laminado. El algoritmo cambia del ciclo while interno al externo hasta encontrar el fallo en todas las capas de laminado.

Consideraciones de degradación progresiva:

Para comprender mejor los pasos necesarios para el estudio continuo de laminados compuestos tomando en consideración el historial de degradación del material, es necesario recapitular el estudio de laminados por medio de la metodología de la Teoría de Laminado Clásica mencionada en el apartado 4.2.4 Teoría de Laminado Clásica (Classical Laminate Theory). La degradación progresiva, mencionada en la sección 4.3 Metodologías de descripción de resistencia y fallo en laminados, funciona de manera conjunta con la mecánica del material compuesto y los módulos elásticos representativos.

El comportamiento elástico de un conjunto laminado se conforma de los módulos elásticos de laminado [ABD] por medio de la sumatoria de los módulos elásticos transformados de cada una de sus capas. Esto es representado visualmente en la **Figura 6-27**:

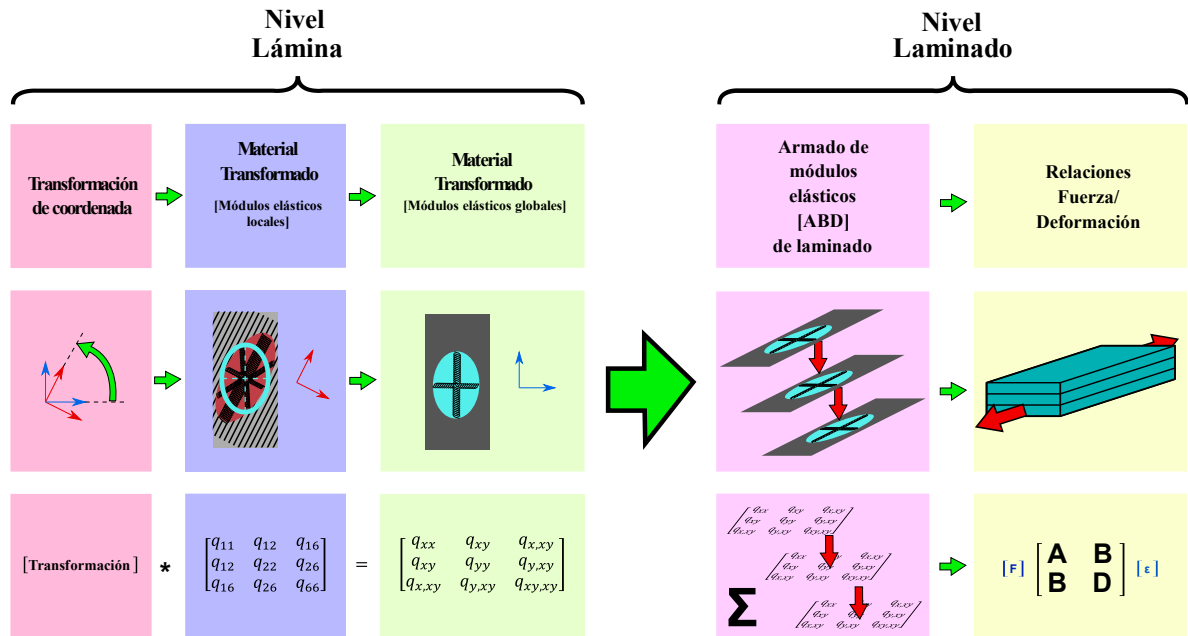


Figura 6–27 Ilustración del proceso de estudio de laminados compuestos.

Seguido de generarse un análisis inicial del material laminado de varias capas bajo el cual se encontró un fallo en una de sus capas, los módulos elásticos representativos del material en la zona de fallo deben ser degradados para actualizar el estado del material laminado en su totalidad. Esto es, el módulo elástico representativo de la capa fallada debe ser modificado o anulado (dependiendo del tipo de degradación considerada) para poder realizar el análisis de laminado nuevamente, bajo el nuevo estado del material con capacidad de cargas y rigidez reducidas.

Debido a las posibles consideraciones de degradación para el estudio de laminados compuestos, cuatro modos de degradación fueron codificados, los cuales toman en consideración cuatro variaciones de degradación que quedan a selección del usuario para una mejor representación del fenómeno de continuidad de fallo dentro del material.

Los cuatro modos de degradación se enlistan y trabajan de la siguiente manera:

1. Degradación Completa.

Este modo de degradación se basa en la degradación numérica de la magnitud de módulos elásticos dentro de la matriz de elasticidad plana bidimensional de la capa de compuesto laminado específica de estudio, **al momento de existir un fallo**.

Matemáticamente, la matriz de módulos elásticos de 3x3 elementos es completamente disminuida a la unidad (de su valor original que ronda a los 1×10^6) en cada uno de sus elementos. La degradación se lleva a cabo en la matriz de módulos elástico global **antes** de ser armada la matriz [ABD] de laminado. El estudio continúa iterativamente hasta tener un fallo en cada una de las capas de láminas de material compuesto **tomando en consideración el historial de fallo con matriz [ABD] actualizada**. Diagrama ilustrativo mostrado en la **Figura 6–28**.

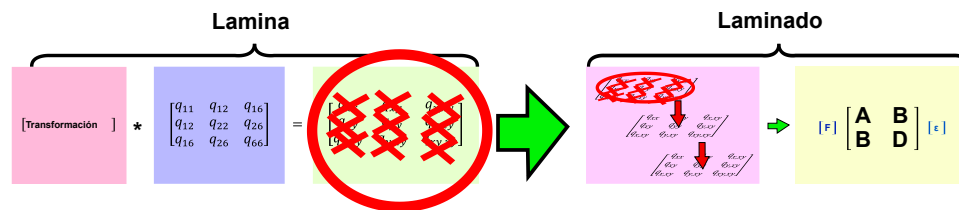


Figura 6–28 Degradación completa de módulos elásticos de lámina. En este modo de degradación se eliminan completamente los módulos elásticos correspondientes a la lámina fallada, influyendo en el recálculo de módulo elástico de laminado, el cual ahora será reducido por la capa de laminado fallada cuya rigidez ya no se toma en consideración.

2. No Degradación.

Este modo de degradación se distingue por ser uno donde no existe degradación alguna en ningún módulo elástico del laminado compuesto. El estudio se continúa iterativamente hasta tener un fallo en cada una de las láminas de material compuesto del laminado actual. Este modo de degradación tiende a dar valores de resistencia total más altos a valores reales experimentales. Diagrama ilustrativo en **Figura 6–29**.

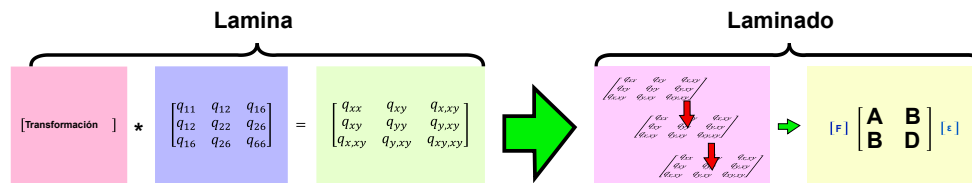


Figura 6–29 No degradación de módulos elásticos de lámina. Este modo de degradación no genera una iterativa degradación de rigidez dentro del material.

3. Degradación Parcial (Modo Coord. Local)

Este modo de degradación se distingue por ser uno donde primero se obtiene (según las teorías de fallo Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman, Hashin, LaRC02) el modo de fallo en las láminas de material compuesto, seguido de degradar los módulos elásticos correspondientes al modo de fallo en los **módulos elásticos de coordenada local del material**. Esto quiere decir, el fallo de fibra genera una degradación del módulo q_{11} local y módulos relacionados, mientras que el fallo de matriz genera una degradación del módulo q_{22} local y los módulos relacionados en la coordenada local.

El estudio se continúa iterativamente hasta tener un fallo en cada una de las láminas de material compuesto del laminado actual. Diagrama ilustrativo mostrado en la **Figura 6–30**.

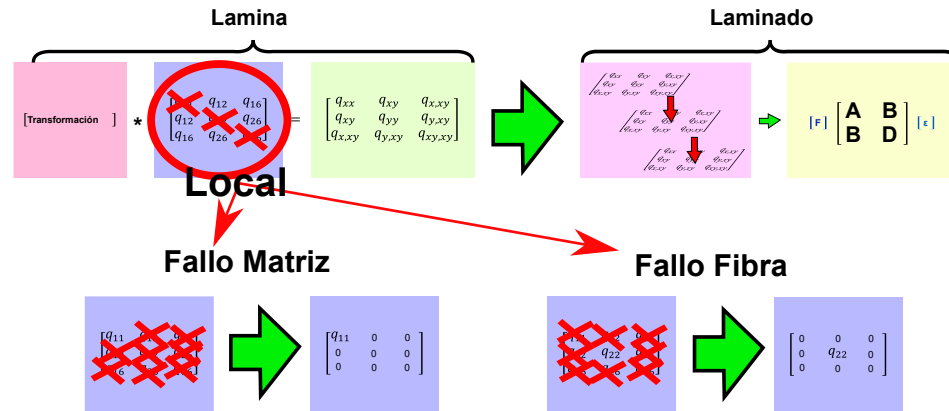


Figura 6–30 Degradación Parcial Local de módulos elásticos de lámina. En este modo de degradación los módulos locales son degradados correspondientemente al componente que haya fallado (fibra o matriz) en los módulos elásticos locales **antes** de su transformación a módulos elásticos globales.

4. Degradación Parcial (Modo Coord. Global Modificado)

Este modo de degradación, igual al **Modo Parcial Local**, se distingue por ser uno donde primero se obtiene (según las teorías de fallo Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman, Hashin, LaRC02) el modo de fallo en las láminas de material compuesto. De aquí se degradan los módulos elásticos correspondientes al modo de fallo. Los módulos elásticos que se degradan correspondientemente son los **módulos elásticos globales** en vez de los locales, sin embargo, la degradación es más específica por subcategorías dependiendo de ángulo de lámina que falló. Diagrama ilustrativo en **Figura 6–31**.

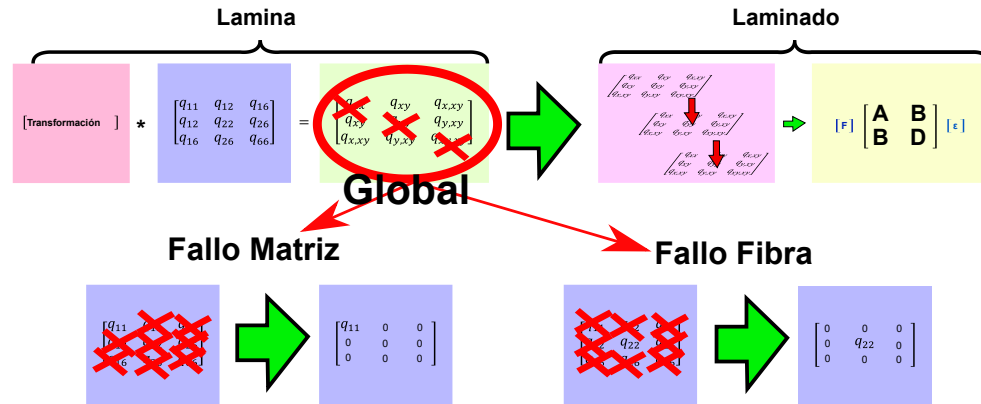


Figura 6–31 Degradación Parcial Global de módulos elásticos de lámina. En este modo de degradación los módulos globales son degradados correspondientemente al componente que haya fallado (fibra o matriz) **después** de haber sido generada la transformación de módulos elásticos locales.

Del estado de esfuerzo interno se discrimina el tipo de fallo en la capa de laminado el cual permite seleccionar el tipo de degradación.

El tipo de degradación se divide en rangos que permiten su análisis desde la perspectiva del eje coordinado global. Los rangos de degradación son empíricamente deducidos por medio de los rangos de fallo mencionados en la sección 4.2.2 Lámina ortotrópica plana (2D) con ángulos de inclinación en la Figura 4–19 la cual es obtenida de una comparativa de métodos de análisis de fallo en compuestos por C.T. Sun [110]. Los típicos modos de fallo en compuestos dependen del ángulo de inclinación y los rangos de este gráfico son adaptados al fallo longitudinal-transversal que el material compuesto puede tener.

Los tipos de fallo de una perspectiva de coordenada global en este modo de degradación se divide en los siguientes sub-rangos por modo de fallo posible a presentar el material, acorde a la Figura 4–20, la cual es repetida en la Figura 6–32.

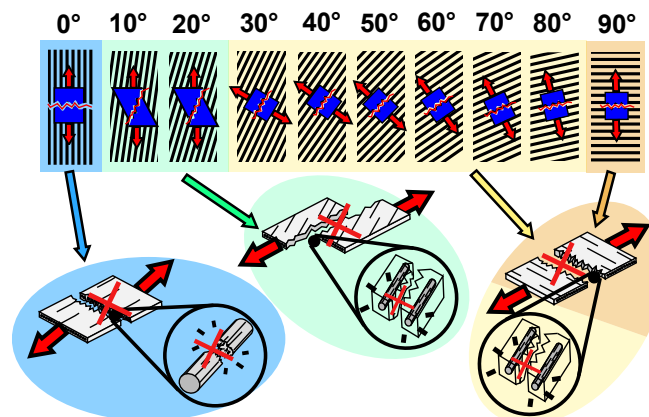


Figura 6–32 Representación gráfica de dominios de fallo por ángulo de lámina. De 0° a 2.9° el Fallo es dominado principalmente por la fibra; De 2.9° a 27.1° el Fallo es dominado por el esfuerzo cortante en la matriz; De 27.1° a 90° el Fallo es dominado por el esfuerzo normal transversal a la matriz. [110]

a) **Fallo de fibra (Degradación global modificado)**

- **Rango [0 a 27] grados**, los módulos degradados debido a un fallo de fibra a una perspectiva global, cuando la fibra se encuentra en este rango de giro, son los módulos globales Q11 y los relacionados Q12 y Q21, así como el módulo cortante Q66, como se muestra en la Figura 6–33, permaneciendo aún funcional, solamente el módulo transversal Q22.

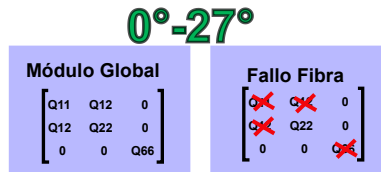


Figura 6–33 Degradación de módulo elástico global fallo fibra en rango [0-27] grados.

- **Rango [27 a 63] grados**, los módulos degradados debido a un fallo de fibra a perspectiva global, cuando la fibra se encuentra en este rango de giro, son todos. Esto debido a que representativamente el material es incapaz de soportar cargas en direcciones 1 y 2, así como cortantes, degradando todos los módulos, como se muestran en la Figura 6–34.

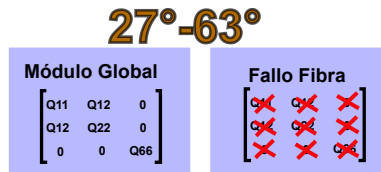


Figura 6–34 Degradación de módulo elástico global fallo fibra en rango [27-63] grados.

- **Rango [63 a 90] grados**, los módulos degradados debido a un fallo de fibra a perspectiva global, cuando la fibra se encuentra en este rango de giro, son los módulos pertenecientes a la dirección de la actual dirección de las fibras y su influencia en el material entero, siendo los módulos degradados Q22, sus relacionados, y el cortante Q66 como se muestran en la Figura 6–35. permaneciendo funcional, solamente el módulo transversal Q11.

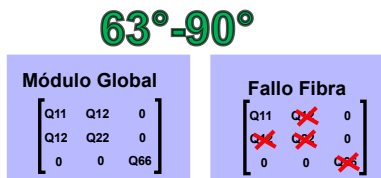


Figura 6–35 Degradación de módulo elástico global fallo fibra en rango [27-63] grados.

b) Fallo de matriz (Degradación global modificado)

- **Rango [0 a 27] grados**, los módulos degradados debido a un fallo de matriz de una perspectiva global, cuando la fibra se encuentra en este rango de giro, son los módulos globales Q22 y los relacionados Q12 y Q21, así como el módulo cortante Q66, como se muestra en la Figura 6–36, permaneciendo aún funcional, solamente el módulo longitudinal de fibra Q11. Esto es contrario al fallo presentado a la Figura 6–33.

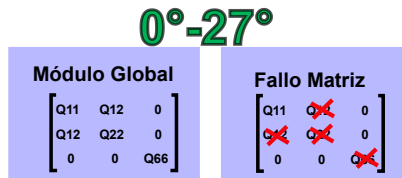


Figura 6–36 Degradación de módulo elástico global fallo matriz en rango [0-27] grados.

- **Rango [27 a 63] grados**, los módulos degradados debido a un fallo de matriz a perspectiva global, cuando la fibra se encuentra en este rango de giro, son todos. Esto debido a que representativamente el material es incapaz de soportar cargas en direcciones 1 y 2, así como cortantes por ser un punto intermedio de direccionamiento de fibras y matriz, siendo todos los módulos los que se degradan representativamente (aunque en la realidad, puede permanecer poca resistencia en el material), como se muestran en la Figura 6–37.

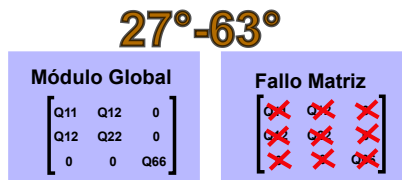


Figura 6–37 Degradación de módulo elástico global fallo matriz en rango [27-63] grados.

- **Rango [63 a 90] grados**, los módulos degradados debido a un fallo de matriz a perspectiva global, cuando la fibra se encuentra en este rango de giro, son los módulos pertenecientes a la actual dirección de la matriz y su influencia en el material entero, siendo los módulos degradados Q11, sus relacionados y el cortante Q66 como se muestran Figura 6–38. permaneciendo funcional el módulo transversal Q22.

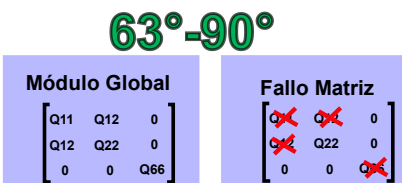


Figura 6–38 Degradación de módulo elástico global fallo matriz en rango [63-90] grados.

6.4. Fase 4: Comparativa de datos

Esta fase se dedica al estudio y comparación de los resultados obtenidos de casos de prueba, validaciones y resultados numéricos obtenidos con la herramienta de análisis. Esto se realiza por medio de la comparación directa entre valores numéricos exactos teóricos de literatura, así como resultados de datos experimentales de diversos artículos los cuales registran valores de resistencia y elasticidad de materiales.

Por lo tanto, correspondiente a los ámbitos de estudio de los materiales compuestos de este programa y métodos utilizados, dos principales tipos de comparación de interés que se llevan a cabo se alistan y muestran en la **Figura 6–40**:

1. Comparación de la respuesta elástica por módulos de laminado.

Esto se lleva a cabo con el fin de comparar los valores de deformación numéricos obtenidos de las matrices de elasticidad de laminado, por medio del programa con valores de deformación $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_{12}$. Estos se comparan de ejercicios teóricos y de artículos de investigación que tienen secciones dedicadas a obtener valores de deformación en materiales compuestos.

2. Comparación de la resistencia de laminados (teórica-experimental).

Esto se lleva a cabo con el fin de comparar los valores de resistencia última de un material compuesto (lámina simple o conjunto laminado), con el fin de obtener la aproximación y similitud o error porcentual. Estos se obtienen entre los valores de resultados experimentales de artículos de investigación (o reportes técnicos) y los obtenidos aproximados por las teorías utilizadas en este programa sea en modo de fallo inicial o fallo final.

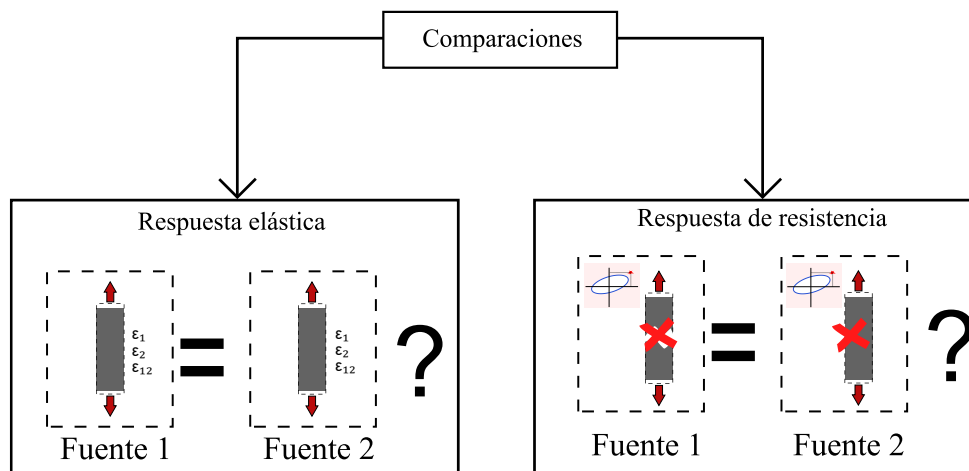


Figura 6–40 Dos principales tipos de comparación.

Los tres **medios de obtención de datos** con fines de comparación se utilizan dependiendo de la información existente en artículos de investigación o reportes técnicos disponibles.

a) Datos exactos teóricos de ejercicios de literatura.

Son aquellos que se obtienen de literatura en mecánica de materiales compuestos los cuales cuentan con ejemplos y ejercicios resueltos cuyos resultados se pueden comparar a los resultados generados por el código del programa creado.

Ejemplo de ellos son los ejercicios en el libro por Autar K. Kaw [6] donde muestran ejemplos de deformaciones resultantes de características de material presentadas lo cual sirve como retroalimentación inicial para la programación de ésta herramienta.

b) Datos reportados de artículos de investigación y reportes técnicos.

Son aquellos valores y datos obtenidos de artículos de investigación y reportes técnicos por distintas instituciones (universitarias o puramente de investigación) en las cuales se presentan sean resultados de deformación en las direcciones global o local dado una configuración de laminado. Esta información de propiedades es listada. Estos resultados pueden ser a nivel laminado o a nivel lámina simple a diversos ángulos de inclinación.

Ejemplo de ellos es el artículo por C. T. Sun y C. G. Zhou [128] donde se registra un material correctamente caracterizado en sus módulos elásticos y se trabaja en la prueba de diversas configuraciones de material compuesto quasi-isotrópico registrando la resistencia ultima de laminados a distintas capas de orientación las cuales son analizables por el programa creado.

c) Datos obtenidos de análisis en software comercial.

Son aquellos valores y datos obtenidos de la simulación de ambos la respuesta elástica y comportamiento de resistencia en conjuntos laminados. Los datos de conjuntos laminados simulados se obtienen de artículos de investigación y reportes técnicos cuyas propiedades se encuentran debidamente caracterizadas permitiendo su ingreso en software comercial para calcular valores de deformación y resistencia bajo ciertas condiciones de carga y teorías de resistencia como mostrado en la **Figura 6-41**.

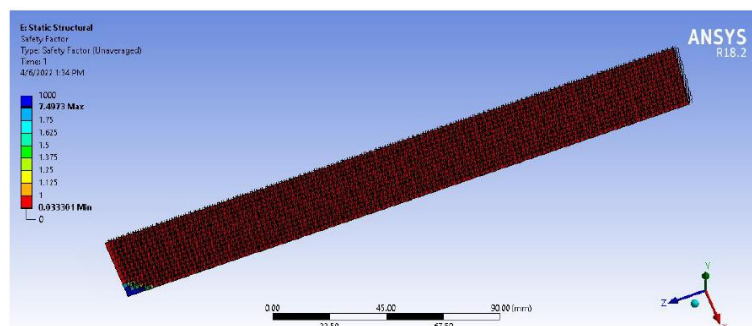


Figura 6-41 Ejemplo de análisis de material en software comercial.

Estos tres medios de obtención de datos se utilizan para realizar pruebas comparativas con el programa de análisis para analizar similitudes y diferencias de manera cualitativa y cuantitativa. El diagrama representativo de esta comparación se muestra en la **Figura 6-42**.

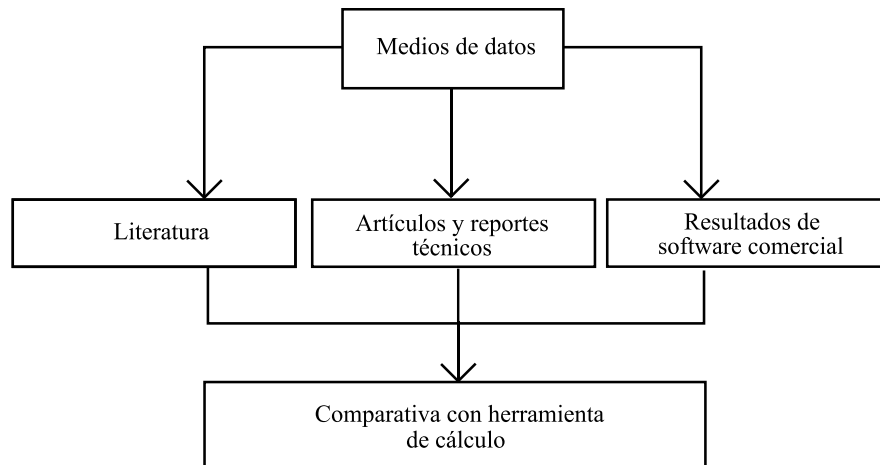


Figura 6–42 Medios de obtención de datos de comparación.

6.4.1. Método comparativo de resultados: Material analizado

La comparación de datos para análisis elásticos en materiales compuestos se realiza por medio de procesar información y configuraciones de lámina o laminado de diversas fuentes con los códigos programados de comportamiento de láminas de este proyecto. Los datos utilizados para la comparación dependerán de los resultados necesarios comparar, los cuales pueden ser relativos a elasticidad de lámina, elasticidad de laminado, resistencia de lámina, laminado o combinación de ellas. Estas pruebas se realizaron de ambas maneras en secciones de código y en el programa ya integrando distintas secciones de código, siendo el programa ya integrado mostrado en la **Figura 6–43**.

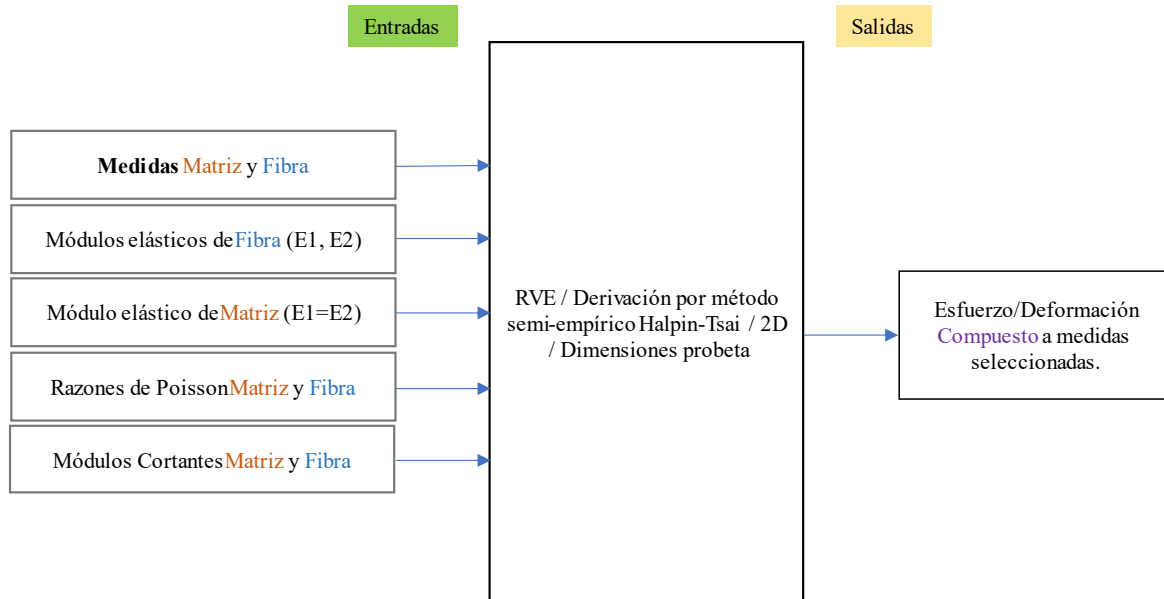


Figura 6–43 Proceso de información ingresada para análisis de materiales.

Los parámetros comunes utilizados como ingreso de información para análisis se muestran en **Tabla 6-1**, **Tabla 6-2** y **Tabla 6-3**.

Tabla 6-1 Datos de ingreso: Dimensiones de material utilizados en análisis.

Propiedad	Símbolo/Representación	Unidad
Ancho de lámina	<i>ancho</i>	m
Largo de lámina	<i>largo</i>	m
Grosor de lámina	<i>grosor</i>	m

Tabla 6-2 Datos de ingreso: Propiedades de material utilizados en análisis.

Propiedad	Símbolo	Unidad
Fracción de volumen fibra	V_f	-
Módulo elástico longitudinal	E_1	Pa, MPa, GPa...
Módulo elástico transversal	E_2	Pa, MPa, GPa...
Módulo elástico cortante	G_{12}	Pa, MPa, GPa...
Relación de Poisson mayor	ν_{12}	-
Resistencia X tensionante	$\sigma_{1(max)}^T$	Pa, MPa, GPa...
Resistencia X compresiva	$\sigma_{1(max)}^C$	Pa, MPa, GPa...
Resistencia Y tensionante	$\sigma_{2(max)}^T$	Pa, MPa, GPa...
Resistencia Y compresiva	$\sigma_{2(max)}^C$	Pa, MPa, GPa...
Resistencia cortante en plano	$\tau_{12(max)}$	Pa, MPa, GPa...

Tabla 6-3 Datos de ingreso: Cargas impuestas sobre material.

Carga	Símbolo/Representación	Unidad
Fuerza X	F_x	N
Fuerza Y	F_y	N
Fuerza XY	F_{xy}	N

Esta información se obtiene de artículos de investigación de pruebas a materiales y ejemplos teóricos de análisis de materiales compuestos.

6.4.2. Método comparativo de resultados: Análisis en herramienta generada

Los parámetros listados en las tablas **Tabla 6-1**, **Tabla 6-2** y **Tabla 6-3** son ingresados en los menús y cuadros de ingreso de información del programa-herramienta creado para obtención y análisis de resultados. De esta información se generan los reportes de estado de material. Entre los parámetros o modos de estudio a analizar se encuentran:

- Estado de esfuerzos en el laminado.
- Estado de esfuerzo por capa de laminado.
- Tabla de fallo/no fallo por criterio de resistencia por capa de laminado.
- Análisis al fallo inicial.
- Análisis al fallo progresivo.
- Inclusión de efecto de vacíos (opcional).

Estos parámetros se encuentran recopilados en una tabla resumida de las propiedades de material analizadas en el artículo de interés como mostrado en la **Tabla 6-4**:

Tabla 6-4 Tabla del resumen de las propiedades de material utilizadas para análisis de configuraciones de laminados compuestos con artículos de investigación.

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lamina	#	m
Ancho de lamina	#	m
Largo de lamina	#	m
Área inferior (dirección 1)	#	m
Área lateral (dirección 2)	#	m
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	#	-
Grosor de laminado	#	m
Ancho de laminado	#	m
Largo de laminado	#	m
Área inferior laminado	#	m
Área lateral laminado	#	m
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	#	Pa
E2	#	Pa
G12	#	Pa
ν_{12}	#	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	#	Pa
Y	#	Pa
S (cortante)	#	Pa
X' (compresión)	#	Pa
Y' (compresión)	#	Pa

De la **Tabla 4-4**, las dimensiones son adecuadas para su procesamiento en los parámetros utilizados en la herramienta de análisis creada, las cuales son ilustradas en la **Figura 6-44**:

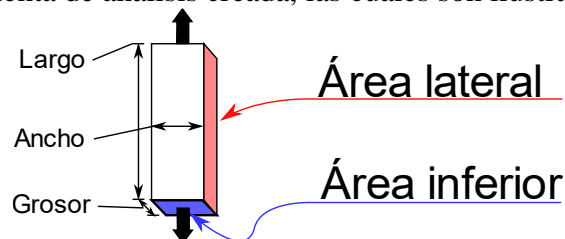


Figura 6-44 Dimensiones de material analizadas en herramienta creada.

6.4.3. Método comparativo de resultados: Análisis en software comercial

El análisis de datos de laminados por medio de software comercial se lleva a cabo por medio del uso de herramientas computacionales de elemento finito en análisis de materiales. Para ello se utilizan simulaciones sencillas de material laminado compuesto en los programas comerciales como ANSYS y PATRAN.

El método generalizado de simulación y análisis de materiales asistido por computadora se logra siguiendo el diagrama en la **Figura 6-45**, el cual es también aplicable en análisis de flujos e ingeniería asistida en computadora en general:

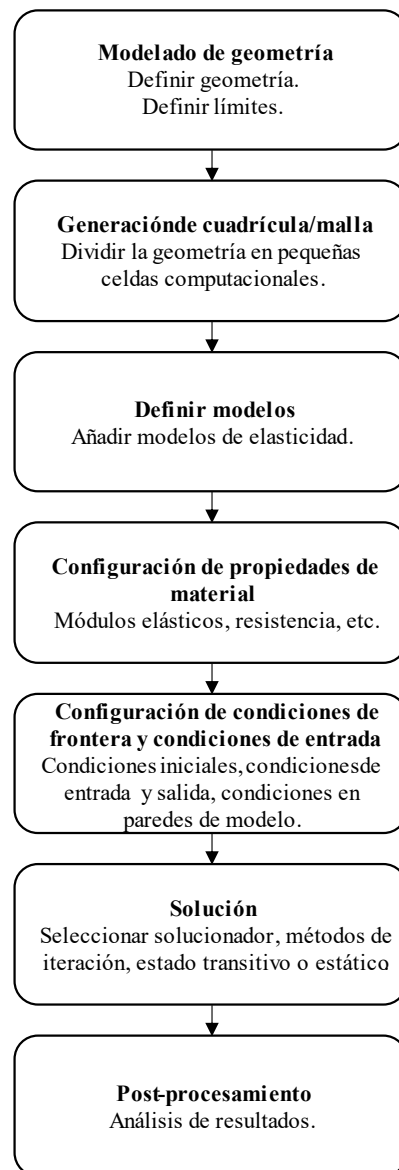


Figura 6-45 Proceso generalizado de análisis asistido por computadora o ingeniería asistida por computadora (CAE).

Las distintas fases del proceso de la **Figura 6–45** consisten en:

- **Modelado de la geometría:**

Se refiere al ingreso de la geometría al programa. Comúnmente es posible utilizar archivos de geometría generados en software comercial externos al programa de análisis los cuales son posibles de importar.

- **Generación de cuadrícula/malla:**

Se refiere a la creación y generado de discretización geométrica la cual se encargará de servir como base a la solución por nodos del estado de deformación solucionado dentro del material.

- **Definir modelos:**

Se refiere a las matemáticas base utilizadas para solucionar y obtener los resultados de deformación. Para el caso de estudio de materiales compuestos laminados el modelo que genera la solución u obtención de resistencia por capa de laminado.

- **Configuraciones de propiedades:**

Se refiere al ingreso y selección de propiedades de material entre las cuales se encuentran el módulo de Poisson, los módulos de Young y las características físicas necesarias utilizadas en el análisis de materiales y elasticidad dependientes del modelo utilizado. Junto a ello también se ingresan los valores límites de resistencia de estos materiales.

- **Configuraciones de frontera y condiciones de entrada:**

Se refiere al set de cargas bajo el cual se encuentra el material y bajo el cual se está analizando sea elasticidad o resistencia actualmente.

- **Solución:**

Se refiere las configuraciones de solución y convergencia de datos, las cuales dependiendo de la complejidad de las ecuaciones a solucionar numéricamente requieren de ajustes especiales.

- **Post-procesamiento:**

Se refiere a la visualización y análisis de datos obtenidos del análisis numérico de este proceso, el cual puede interpretarse dependiente de los límites conocidos del modelo utilizado, la resolución de mallado y los resultados esperados.

6.4.4. Normas ASTM

La ASTM International (antes conocida como *American Society for Testing and Materials*) es un líder mundialmente reconocido en el desarrollo y la entrega de estándares de consenso voluntarios. Hoy en día, más de 12,000 normas de ASTM se utilizan en todo el mundo para mejorar la calidad de los productos, mejorar la salud y la seguridad, fortalecer el acceso al mercado y el comercio, y aumentar la confianza del consumidor. Los

estándares de ASTM International son lineamientos de satisfacción al cliente y un medio para la competitividad de empresas en una amplia gama de mercados. Con más de 140 comités técnicos de redacción de normas, atienden a una amplia gama de industrias; metales, construcción, petróleo, productos de consumo y más [129].

La definición de términos utilizados en el uso de materiales compuestos, es por medio de la norma ASTM D3878, la cual denomina la terminología estándar [130].

Con la norma ASTM D3410 se definen métodos estándar para pruebas de fuerzas compresivas por cargas cortantes [131].

Con la norma ASTM D7264 se definen métodos estándar de prueba para propiedades de flexión de materiales compuestos [132].

La norma ASTM D3039 determina las propiedades de tensión en plano de materiales compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras (FRP). Las pruebas de material compuesto se limitan a fibra continua o compuestos discontinuos reforzados con fibra en los cuales el refuerzo es equilibrado y simétrico en dirección de la prueba [133].

Una tira plana de material con dimensiones como las mostradas en la Figura 8 se monta en la sección de prueba de una máquina prueba universal y se carga en tensión para obtener su comportamiento de deformación hasta obtener su ruptura. De este modo se obtiene la resistencia máxima del material antes del fallo.

Las dimensiones de las probetas típicas se basan en los estándares de la ASTM D3039, como se muestra en la Figura 6-46 [133].

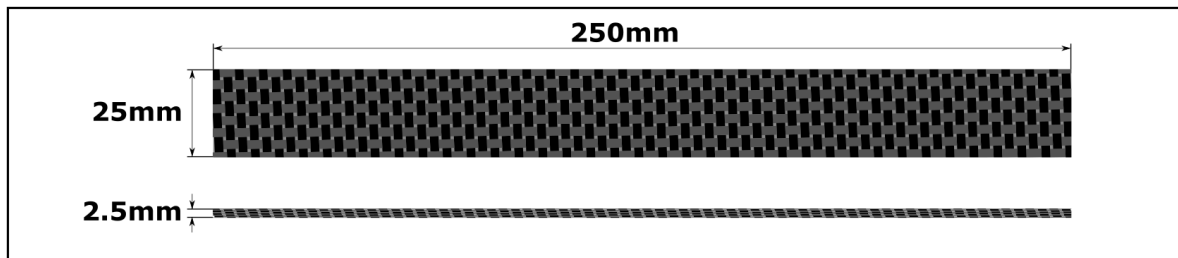


Figura 6-46 Dimensiones generales de probetas de material compuesto según ASTM D3039.

Capítulo 7. Resultados y conclusiones

Para analizar los resultados experimentales se realizaron gráficas y tablas de las resistencias comparativas por medio de hojas de cálculo o software de procesamiento de datos, con los que se analizan y comparan resultados del programa creado HLAMD, resultados de literatura de investigación y resultados numéricos.

7.0. Resultados de elasticidad-deformación lámina simple

En esta sección se muestran resultados con datos y ejemplos que se dedican a calcular deformaciones en lámina simple con los resultados obtenidos de la herramienta de cálculo.

7.0.1. Comparación con literatura Autar K. Kaw: Example 2.6

El primer conjunto de comparación es por medio de los ejercicios de elasticidad de lámina homogenizada del libro Mechanics of Composite Materials 2nd Ed. De Autar K. Kaw [6]. El ejemplo calcula, los siguientes valores de interés (2.6 [6, p. 106]):

- a) Matriz de flexibilidad.
- b) Deformaciones en el eje coordenado 1-2 si los esfuerzos aplicados son: $\sigma_1 = 2MPa$, $\sigma_2 = -3MPa$, $\tau_{12} = 4MPa$.

Las propiedades utilizadas para calcular esta información se presentan en la **Tabla 7-1**:

Tabla 7-1 Propiedades de material según Autar: Example 2.6 [6].

Propiedad	Símbolo	Valor	Unidad
Fración de volumen fibra	V_f	0.7	-
Módulo elástico longitudinal	E_1	181	GPa
Módulo elástico transversal	E_2	10.30	GPa
Módulo elástico cortante	G_{12}	7.17	GPa
Relación de Poisson mayor	ν_{12}	0.28	MPa
Resistencia X tensionante	$\sigma_{1(max)}^T$	1500	MPa
Resistencia X compresiva	$\sigma_{1(max)}^C$	1500	MPa
Resistencia X tensionante	$\sigma_{2(max)}^T$	40	MPa
Resistencia X compresiva	$\sigma_{2(max)}^C$	246	MPa
Resistencia cortante en plano	$\tau_{12(max)}$	68	MPa

Ingresando los valores de material de la **Tabla 7-1** en el programa de cálculo de lámina se permite la comparación de la matriz de flexibilidad conforme la **Tabla 7-2**:

Tabla 7-2 Comparación matriz de flexibilidad Autar: Example 2.6 [6].

Matriz de flexibilidad Autar		
$\begin{bmatrix} 0.5525 \times 10^{-11} & -0.154710^{-11} & 0 \\ -0.1547 \times 10^{-11} & 0.9709 \times 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0.1395 \times 10^{-9} \end{bmatrix}$		
Matriz de flexibilidad calculada en programa		
$\begin{bmatrix} 5.5248e - 12 & -1.5469e - 12 & 0 \\ -1.5469e - 12 & 9.7087e - 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3947e - 10 \end{bmatrix}$		

7.0.2. Comparación con literatura Autar K. Kaw: Example 2.7 [6]

En el ejemplo se observan los valores de interés del ejemplo de comparación **Example 2.7** [6, p. 106] son:

- a) Matriz de flexibilidad reducida (transformada).
- b) Deformaciones globales calculadas.

Las propiedades utilizadas para este ejercicio se presentan en la **Tabla 7-1**.

Ingresando los valores de material de la **Tabla 7-1** en el programa de cálculo de lámina permite la comparación de la matriz de flexibilidad conforme la **Tabla 7-3**:

Tabla 7-3 Comparación matriz de flexibilidad Autar: Example 2.7 [6].

Matriz de flexibilidad Autar		
$\begin{bmatrix} 0.8053x10^{-10} & -0.7878x10^{-11} & -0.3234x10^{-10} \\ -0.7878xx10^{-11} & 0.3475x10^{-10} & -0.4696x10^{-10} \\ -0.3234x10^{-10} & -0.4696x10^{-10} & 0.1141x10^{-9} \end{bmatrix}$		
Matriz de flexibilidad calculada en programa		
$\begin{bmatrix} 8.052e - 11 & -7.877e - 12 & -3.233e - 11 \\ -7.877e - 12 & 3.474e - 11 & -4.695e - 11 \\ -3.233e - 11 & -4.6957e - 11 & 1.141e - 10 \end{bmatrix}$		

Esto demuestra correspondencia en la matemática de elasticidad utilizada para láminas ortotrópicas 2D. La comparación de deformaciones globales se muestra en la **Tabla 7-4**.

Tabla 7-4 Comparación deformaciones globales Autar: Example 2.7 [6].

Vector de deformaciones Autar
$\begin{bmatrix} 0.5534x10^{-4} \\ -0.3078x10^{-3} \\ 0.5328x10^{-3} \end{bmatrix}$
Vector de deformaciones en programa
$\begin{bmatrix} 5.5337e - 05 \\ -3.0782e - 04 \\ 5.3278e - 04 \end{bmatrix}$

7.0.3. Comparación con literatura David Roylance MIT Course Notes: Example 1

El siguiente conjunto de comparación es por medio de los ejercicios de elasticidad de lámina de los ejercicios por el instructor de MIT David Roylance de la página web.mit.edu de la documentación de uno de sus módulos [134]

Entre los ejercicios a comparar, se compara los resultados de:

- a) Matriz de flexibilidad reducida.

Las propiedades utilizadas para calcular esta información se presentan en la **Tabla 7-5**:

Tabla 7-5 Propiedades de material David Roylance: Example 1.

Propiedad	Símbolo	Valor	Unidad
Módulo elástico longitudinal	$E1$	82	GPa
Módulo elástico transversal	$E2$	4	GPa
Módulo elástico cortante	G_{12}	2.8	GPa
Relación de Poisson mayor	ν_{12}	0.25	-

Ingresando los valores de material de la **Tabla 7-5** en el programa de cálculo de lámina permite la comparación de la matriz de flexibilidad conforme lo indica la **Tabla 7-6**:

Tabla 7-6 Comparación matriz de flexibilidad David Roylance: Example 1.

Matriz de flexibilidad David Roylance: Example 1
$\begin{bmatrix} 0.8828x10^{-10} & -0.1968x10^{-10} & -0.1222x10^{-10} \\ -0.1969x10^{-10} & 0.2071x10^{-9} & -0.8370x10^{-10} \\ -0.1222x10^{-10} & -0.8377x10^{-10} & 0.2905x10^{-9} \end{bmatrix}$
Matriz de flexibilidad calculada en programa
$\begin{bmatrix} 8.8305e - 11 & -1.9708e - 11 & -1.2220e - 10 \\ -1.9708e - 11 & 2.0720e - 10 & -8.37359e - 11 \\ -1.2220e - 10 & -8.3735e - 11 & 2.9050e - 10 \end{bmatrix}$

Esto demuestra correspondencia en la matemática de elasticidad utilizada para láminas ortotrópicas 2D.

7.0.4. Comparación de parámetros esfuerzo-deformación en una lámina entre programas. Ejemplo utilizando conceptos micromecánicos

La siguiente comparación muestra los resultados entre dos programas comerciales (ANSYS y PATRAN) que cuentan con módulos de análisis de laminados compuestos y la herramienta de materiales laminados creada. Para ello se hace uso de características de material obtenidas de dos fuentes distintas y de cargas aplicadas para obtener así deformaciones.

Las dos fuentes de información de donde se obtuvo características de material son el reporte técnico de la NASA por Coquill y Adams [135] donde presentan propiedades para distintos materiales entre ellos diversos tipos de fibra de carbono así como las propiedades típicas para resina epóxicas obtenidas del libro de Derek Hull [85].

Entre los datos resultantes a comparar, se compara los resultados de:

- Esfuerzo principal longitudinal en lámina.
- Desplazamiento unitario longitudinal ϵ_1 .

Las propiedades utilizadas para calcular esta información se presentan las propiedades de material para una fibra de carbono en la **Tabla 7-7**:

Tabla 7-7 Propiedades de fibra de carbono T300 [135].

Material	E1(MPa)	E2 (MPa)	G12 (MPa)	V12 (-)
CF: T300	145 000	5 600	3 500	0.61

Del mismo modo, las propiedades utilizadas para calcular esta información, se presentan las propiedades típicas de resinas epóxicas en la **Tabla 7-8**:

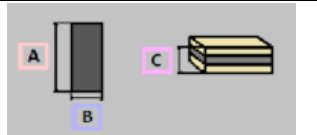
Tabla 7-8 Propiedades típicas de resinas epóxicas [85].

Material	E1=E2 (MPa)	G12 (MPa)	V12 (-)
CF: T300	3 000	931	0.38

Las propiedades de las **Tabla 7-6** y **Tabla 7-7** fueron utilizados en un ejemplo práctico que representa una probeta conformada de los materiales fibra y matriz mencionados en estas tablas. Las dimensiones representativas de la probeta propuesta a analizar se observan en la **Tabla 7-9**:

Tabla 7-9 Dimensiones de análisis de ejemplo comparativo entre programas.

Dimensiones [m]	
A. Largo	0.12
B. Ancho	0.04
C. Grosor	0.001



Del mismo set de datos del reporte técnico por Coquill y Adams [135] se obtiene un valor de esfuerzo último perteneciente a la fibra con un valor de 1752 MPa. De este valor y las dimensiones de probeta se despeja un valor de fuerza último f_{ult} en dirección normal a la fibra con el área de probeta $A_{probeta}$ el cual será utilizado para calcular la deformación a este valor de carga. El área se calcula asumiendo que solo la fibra es la que se encarga de soportar cargas en el material, utilizando sus dimensiones para despejar el valor de f_{ult} .

$$\sigma_{f_{ult}} = 1752 \text{ MPa}$$

$$A_{probeta} = (\text{ancho})(\text{grosor prematriz}) = (0.04)(0.001) = 0.00004 \quad (7.1)$$

$$f_{ult} = \sigma_{f_{ult}} * A_{probeta} \quad (7.2)$$

$$f_{ult} = 70080 \text{ N}$$

De este valor se arma el vector de cargas ingresado a ambos programas comerciales y al programa/herramienta creada en este proyecto, obteniendo los resultados de deformación y esfuerzo mostrados en la **Tabla 7-10**:

Tabla 7-10 Esfuerzo y deformación global calculada según Autar: Example 2.7 [6].

Programa	Esfuerzo [GPa]	Desplazamiento unitario longitudinal ϵ_1
MSC PATRAN-NASTRAN	1.752	0.01217
ANSYS	1.752	0.01217
PROGRAMA LAMINADOS	1.752	0.01208

7.1. Resultados de deformación en elasticidad de conjunto laminado

En esta sección se calculan y comparan datos de ejemplo de deformación de láminas simples con los datos de deformación obtenidas con la herramienta de cálculo.

7.1.1. Comparación con literatura Autar K. Kaw: Example 4.2

El conjunto de comparación es por medio de los ejercicios de elasticidad de laminado homogenizado del libro Mechanics of Composite Materials 2nd Ed. De Autar K. Kaw. [6]. Entre lo solicitado a calcular, se encuentran los valores de interés siguientes ([6, p. 332]):

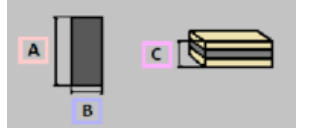
- c) Matrices de rigidez [A], [B] y [D].

El conjunto laminado a analizar es un laminado sándwich con tres capas unidireccionales en arreglo [0, 30, -45]. Las propiedades utilizadas para este material son las mismas mostradas en la **Tabla 7-1**.

Las dimensiones utilizadas propuestas para el análisis son los mostrados en la siguiente **Tabla 7-11**:

Tabla 7-11 Dimensiones de análisis para problema de ejemplo Autar 4.2 [6].

Dimensiones [m]	
A. Largo	0.12
B. Ancho	0.04
C. Grosor	0.005



Las cargas utilizadas para el análisis de este caso de estudio de ejemplo son biaxiales conforme la siguiente configuración:

Tabla 7-12 Cargas aplicadas en material actual Autar 4.2 [6].

Cargas [N/m]	
F _x [N/m]	1000
F _y [N/m]	1000

Las cargas son convertidas de dimensión derivada [N/m] a [N] debido a que esta es la forma de ingreso en el programa, por lo que depende de las dimensiones de probeta seleccionadas actual:

Cálculo de cargas aplicadas [N]:

Ancho de probeta: 0.04 m

$$\frac{\text{Carga}}{\text{Distancia}} = \frac{F}{0.04} = 1000 \text{ N/m}$$

$$F = (0.04) \left(1000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) = 40 \text{ N}$$

Tabla 7-13 Cargas aplicadas en Autar 4.2 [6].

Cargas [N]	
F _x [N/m]	40
F _y [N/m]	40

Usando la herramienta generada y los conceptos de armado de matrices de elasticidad de laminado [ABD], los parámetros de material y carga aplicada se obtiene la comparación de matriz elástica conforme la **Tabla 7-14** y las deformaciones en la **Tabla 7-15**:

Tabla 7-14 Comparación de módulos elásticos Herramienta-Autar 4.2 [6].

Matriz ABD							% Error
Ejercicio Autar 4.2	1.739e9	3.884e8	5.663e7	--3.129e6	9.855e5	-1.072e6	Max. individual: 3.59%
	3.884e8	4.533e8	-1.141e8	9.855e5	1.158e6	-1.072e6	
	5.663e7	-1.141e8	4.525e8	-1.072e6	-1.072e6	9.855e5	
	-3.129e6	9.855e5	-1.072e6	3.343e4	6.461e3	-5.240e3	
	9.885e5	1.158e6	-1.072e6	6.461e3	9.320e3	-5.596e3	
	--1.072e6	-1.072e6	9.855e5	-5.240e3	-5.596e3	7.663e3	
Código (Herramienta creada)	1.74E+09	3.95E+08	56633731	-3128834	1003627	-1071656	Min. Individual: 0.00%
	3.95E+08	4.53E+08	-1.1E+08	1003627	1157791	-1071656	
	56633731	-1.1E+08	4.52E+08	-1071656	-1071656	985521.6	
	-3128834	1003627	-1071656	33432.03	6564.708	-5240.29	
	1003627	1157791	-1071656	6564.708	9319.771	-5595.91	
	-1071656	-1071656	985521.6	-5240.29	-5595.91	7662.78	
							Promedio: 0.17%

Tabla 7-15 Comparación de deformaciones Herramienta-Autar 4.2 [6].

Deformaciones resultantes a cargas			% Error	
Ejercicio Autar 4.2	e_x	3.123E-07	e_x	7%
	e_y	3.492E-06		
	e_xy	-7.598E-07		
	k_x	2.971E-05		
	k_y	-3.285E-04		
	k_xy	4.101E-04		
Herramienta creada	e_x	2.89E-07	k_x	14%
	e_y	3.5E-06	k_y	0%
	e_xy	-7.5E-07	k_xy	1%
	k_x	2.56E-05		
	k_y	-0.00033		
	k_xy	0.000405		

7.1.2. Comparación con literatura: elasticidad de laminado M. Shuart [136]

Este conjunto de comparación es por medio de los datos de elasticidad obtenidos experimentalmente por M. Shuart [136] en sus pruebas con configuraciones simétricas en plano y sus capacidades compresivas. En él se muestra un material completamente caracterizado en sus módulos elásticos los cuales son utilizados para predecir la rigidez de conjuntos laminados en diversas configuraciones. Los parámetros deseados comparar teóricamente son:

- d) Módulos elásticos de rigidez a distintas orientaciones de laminado.

Los conjuntos laminados a analizar son laminados sándwich con 48 capas unidireccionales en arreglo $[\pm\theta/\mp\theta]_6s$. Las propiedades utilizadas para este material son mostradas en la **Tabla 7-16**.

Tabla 7-16 Propiedades de material M. Shuart [136].

Propiedad	Símbolo	Valor	Unidad
Módulo elástico longitudinal	$E1$	127.6	GPa
Módulo elástico transversal	$E2$	11.3	GPa
Módulo elástico cortante	G_{12}	6.0	GPa
Relación de Poisson mayor	ν_{12}	0.3	-

Las dimensiones utilizadas propuestas para el análisis son los mostrados en la siguiente **Tabla 7-17**:

Tabla 7-17 Dimensiones de análisis para problema de ejemplo M. Shuart [136].

Dimensiones [m]		
A. Largo	0.445	
B. Ancho	0.381	
C. Grosor	0.00013	

Se analizaron cada uno de los casos con conjuntos laminados mostrados en la **Tabla 7-18**. En ella también se muestra la comparativa de módulos elásticos predichos por la teoría de laminado clásica usada en la herramienta y los módulos obtenidos experimentalmente. Para poder realizar el análisis se utilizaron parámetros de resistencia arbitrarios sin relación alguna a esta prueba con el fin de permitir que el programa calcule los módulos elásticos sin tomar atención de los cálculos de resistencia que no es el fin de esta prueba.

Tabla 7-18 Comparación de predicción teórica de módulos elásticos con datos experimentales de M. Shuart [136].

Predicción de módulo elástico			
Configuración Laminar (dirección laminar en grados)	Literatura [GPa] [136]	Herramienta [GPa]	Error %
[0]48	130.9	127.59	2.5
[±5/∓5]6s	129	125.32	2.9
[±10/∓10]6s	119.3	118.05	1.0
[±15/∓15]6s	103.5	105.14	1.6
[±20/∓20]6s	88.3	87.25	1.2
[±30/∓30]6s	45.9	45.09	1.8
[±45/∓45]6s	17.5	19.4	10.9
[±60/∓60]6s	12	12.6	5.0
[±70/∓70]6s	11	11.64	5.8
[±85/∓85]6s	10.5	10.3	1.9
[±90/∓90]6s	10.3	11.3	9.7

El error porcentual fue calculado por medio de la ecuación 7.3. El resultado de principal interés obtenido de esta ecuación es la magnitud, sin embargo se mantiene el signo para indicar si la diferencia/error de la comparación esta por debajo del valor de resistencia del material por medio de **valores negativos (-)**, subestimando la resistencia del material acorde a datos de pruebas), mientras que los valores **positivos (+)** indican la diferencia/error estimado sobrepasado del valor de resistencia acorde a datos de prueba, lo cual es una sobreestimación de la resistencia del material. Aunque idealmente lo que se desea es precisamente predecir la resistencia del material, cuando hay diferencias en la predicción, preferentemente se desea la resistencia de un material se subestime en valores menores al reportado, lo cual permite un diseño conservador.

$$Error\% = \frac{(\text{Valor Literatura}) - (\text{Herramienta})}{(\text{Valor Literatura})} * 100 \quad (7.3)$$

7.2. Resultados de comparación a Fallo Final de láminas simples

El Fallo Final, como mencionado en la sección 4.3 Metodologías de descripción de resistencia y fallo en laminados, se refiere a la última degradación entre las distintas capas de material compuesto en un material o conjunto laminado.

El **Fallo Final de láminas simples** se distingue del hecho que su Fallo Inicial coincide con el Fallo Inicial, debido a que el representativo laminado total analizado solo cuenta con una capa de lámina y el estudio de consecutividad de fallo a nivel lámina por lo tanto termina con el primer fallo de esa única capa.

El Fallo Final (o inicial) en este conjunto de datos para lámina simple se compara por medio del error porcentual calculado entre el valor de carga última reportada por la literatura para las distintas configuraciones de laminado probadas experimentalmente en ese reporte de literatura y el valor teórico predicho por la metodología de análisis Fallo Inicial en conjunto de las teorías de fallo de la herramienta de análisis creada.

7.2.1. Fallo Final de lámina simple: Pipes & Cole

El Fallo Final de lámina de esta sección analiza los datos de literatura por Pipes, R. Byron y Cole, B. W. [137], en el cual prueban distintas configuraciones de una capa de material compuesto de fibra unidireccional de fibras de boro los cuales se utilizan para comparar teóricamente por medio de teoría de resistencia tensorial. Las resistencias últimas multidireccionales son caracterizadas en el trabajo de Sun [110] en unidades MPa. El material es un sistema Boro-Epóxico AVCO 5505 cuyos módulos elásticos se encuentran estudiados en el reporte técnico por Weller [138] que trabaja con este mismo sistema de material. Así se tiene un material completamente caracterizado en módulos elásticos y resistencia. En este trabajo se muestra una gráfica con los valores de resistencia para los ángulos [0, 15, 30, 45, 60 y 90] a distintas velocidades de aplicación de carga mostrados en la **Figura 7-1**, los cuales son los puntos para comparar teóricamente. De las velocidades de carga, la condición estática es la seleccionada para comparación.

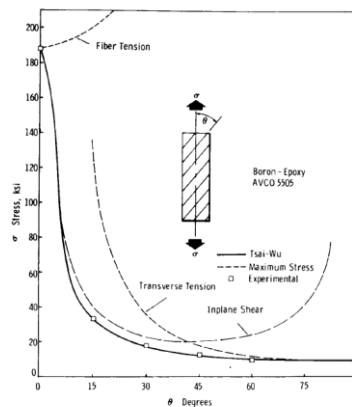


Figura 7-1 Gráfico de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Pipes & Cole [137].

Los valores de resistencia de la **Figura 7-1** pueden apreciarse en la siguiente **Tabla 7-19**:

Tabla 7-19 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Pipes & Cole [137].

Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura [137] (MPa)
0	1,297.23
15	228.84
30	122.04
45	85.63
60	65.36
90	64.95

Para generar la comparativa de resistencia mencionada en reporte de literatura y la predicha por medio del análisis en la herramienta de análisis creada, las propiedades de material se resumen en la **Tabla 7-20**:

Tabla 7-20 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Pipes & Cole [137]

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lámina	0.00013208	m
Ancho de lámina	0.0254*	m
Largo de lámina	0.2286*	m
Área inferior (dirección 1)	3.35483E-06	m ²
Área lateral (dirección 2)	3.01935E-05	m ²
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	1	-
Grosor de laminado	0.00013208	m
Ancho de laminado	0.0254	m
Largo de laminado	0.2286	m
Área inferior laminado	3.35483E-06	m ²
Área lateral laminado	3.98796E-09	m ²
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	2.14427E+11	Pa
E2	20,201,639,000	Pa
G12	4,136,854,000	Pa
v12	0.24	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	1,296,200,000	Pa
Y	62,100,000	Pa
S (cortante)	68,500,000	Pa
X' (compresión)	-2,489,000,000	Pa
Y' (compresión)	-310,300,000	Pa

*Valor asumido ajustado a tamaño de probeta para permitir su procesado en la herramienta generada.

Para poder ingresar los datos en la herramienta creada se requiere un valor de fuerza, por lo que el esfuerzo último de la **Tabla 7-20** se multiplica por el área inferior (transversal a probeta) del tamaño de probeta asumida para obtener valores de fuerza mostrados en la **Tabla 7-21**.

Tabla 7-21 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Pipes & Cole [137].

Dirección Laminar (grados)	Fuerza de Fallo Final en literatura [137]. [N]
15	4352
30	767.70
45	409.41
60	287.28
75	219.27

Los datos de resistencia obtenidos teóricamente por medio de criterios de resistencia Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin y LarC02 comparados se muestran resumidos en la **Tabla 7-22**. El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último en literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3. Acorde a esta ecuación, el error porcentual se interpreta como la magnitud de la diferencia al valor de interés (de literatura), sin embargo, se mantiene el signo positivo o negativo para indicar si la estimación se encuentra por debajo, o por arriba del valor de literatura. Valores negativos de error indican que el valor estimado se encuentra por debajo del valor de pruebas (lo cual se prefiere, para subestimación de resistencia), mientras que valores positivos indican la estimación teórica sobrepasa la resistencia del material obtenida de pruebas (no se prefiere, debido a ser una sobreestimación errónea de la capacidad del material)

Tabla 7-22 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Pipes & Cole [137].

Configuración de Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura[137] (Pa)	Esfuerzo de Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura-HLAMD	Teoría
[0]	1,297,233,364	1,300,000,000	0.21	Tsai-Hill
[0]	1,297,233,364	1,300,000,000	0.21	Hoffman
[0]	1,297,233,364	1,300,000,000	0.21	Tsai-Wu
[0]	1,297,233,364	1,300,000,000	0.21	Hashin
[0]	1,297,233,364	1,300,000,000	0.21	LaRC02
[15]	228,837,000	261,000,000	14.05	Tsai-Hill
[15]	228,837,000	231,000,000	0.95	Hoffman
[15]	228,837,000	232,000,000	1.38	Tsai-Wu
[15]	228,837,000	265,000,000	15.80	Hashin

Configuración de Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura^[137] (Pa)	Esfuerzo de Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura-HLAMD	Teoría
[15]	228,837,000	265,000,000	15.80	LaRC02
[30]	122,037,000	134,000,000	9.80	Tsai-Hill
[30]	122,037,000	117,000,000	-4.13	Hoffman
[30]	122,037,000	118,000,000	-3.31	Tsai-Wu
[30]	122,037,000	134,000,000	9.80	Hashin
[30]	122,037,000	134,000,000	9.80	LaRC02
[45]	85,632,900	92,404,031	7.91	Tsai-Hill
[45]	85,632,900	82,964,929	-3.12	Hoffman
[45]	85,632,900	83,461,705	-2.54	Tsai-Wu
[45]	85,632,900	92,404,031	7.91	Hashin
[45]	85,632,900	92,404,031	7.91	LaRC02
[60]	65,362,000	73,441,710	12.36	Tsai-Hill
[60]	65,362,000	69,108,140	5.73	Hoffman
[60]	65,362,000	69,268,625	5.98	Tsai-Wu
[60]	65,362,000	73,441,710	12.36	Hashin
[60]	65,362,000	73,441,710	12.36	LaRC02
[90]	64,949,000	62,198,822	-4.23	Tsai-Hill
[90]	64,949,000	62,198,822	-4.23	Hoffman
[90]	64,949,000	62,198,822	-4.23	Tsai-Wu
[90]	64,949,000	62,198,822	-4.23	Hashin
[90]	64,949,000	62,198,822	-4.23	LaRC02

7.2.2. Fallo Final de lámina simple: Kawai

El Fallo Final de lámina “Kawai” se refiere a los datos del trabajo por M. Kawai, S. Yajima, A. Hachinohe y Y. Takano [139], en el cual prueban distintas configuraciones de una capa de material compuesto de fibra unidireccional, mostrando un material completamente caracterizado en sus módulos elásticos. En él se muestra una gráfica con los valores de resistencia para los ángulos [0, 15, 30, 45, 60 y 90]. Estos puntos de resistencia son los datos a comparar teóricamente, la cual se muestra en la **Figura 7–2**.

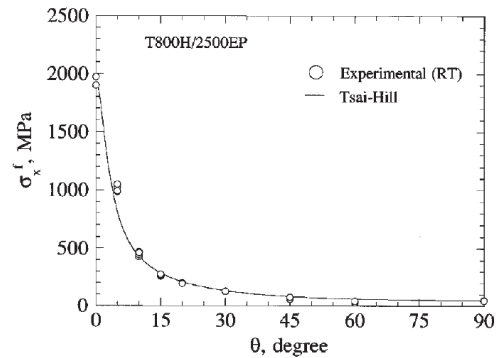


Figura 7–2 Gráfico de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Kawai [139].

Los valores de resistencia de la **Figura 7–2** pueden apreciarse en la siguiente **Tabla 7-23**:

Tabla 7-23 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Kawai [139].

Dirección Lámina (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura [139] (Pa)
0	1,941,230,000
5	1,016,340,000
10	439,220,000
15	256,940,000
20	192,370,000
30	124,820,000
45	66,200,000
60	41,240,000
90	43,800,000

Para generar la comparativa de resistencia mencionada en el trabajo y la predicha por medio del análisis en la herramienta de análisis creada, las propiedades de material se resumen en la **Tabla 7-24**:

Tabla 7-24 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Kawai [139]

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lámina	0.0002737*	m
Ancho de lámina	0.0254*	m
Largo de lámina	0.2286*	m
Área inferior (dirección 1)	6.95198E-06	m ²
Área lateral (dirección 2)	6.25678E-05	m ²
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	1	-
Grosor de laminado	0.0002737	m
Ancho de laminado	0.0254	m
Largo de laminado	0.2286	m
Área inferior laminado	6.95198E-06	m ²
Área lateral laminado	6.25678E-05	m ²
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	1.59E+11	Pa
E2	8,450,000,000	Pa
G12	4,780,000,000	Pa
v12	0.357	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	1,934,000,000	Pa
Y	48,500,000	Pa
S (cortante)	77,800,000	Pa
X' (compresión)	1,934,000,000**	Pa
Y' (compresión)	48,500,000**	Pa

*Valor asumido para permitir su procesado en la herramienta generada.
 **Valor asumido igual al valor tensionante debido a falta de información.

Para poder ingresar los datos en la herramienta creada se requiere un valor de fuerza, por lo que el esfuerzo último de la **Tabla 7-23** se multiplica por el área inferior (transversal a probeta) de un tamaño de probeta asumido para obtener valores de fuerza mostrado en la **Tabla 7-25**.

Tabla 7-25 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Kawai [139].

Dirección Laminar (grados)	Fuerza de Fallo Final en literatura [N]
0	1,3495.39
5	7,065.57
10	3,053.44
15	1,786.24
20	1,337.35
30	867.74

Dirección Laminar (grados)	Fuerza de Fallo Final en literatura [N]
45	460.22
60	286.69
90	304.49

Analizando estos valores de carga con las propiedades y dimensiones de material, se obtuvieron valores últimos de resistencia obtenidos teóricamente en forma de dato crudo y en forma de gráficos que muestran los datos como en la **Figura 7-3**:

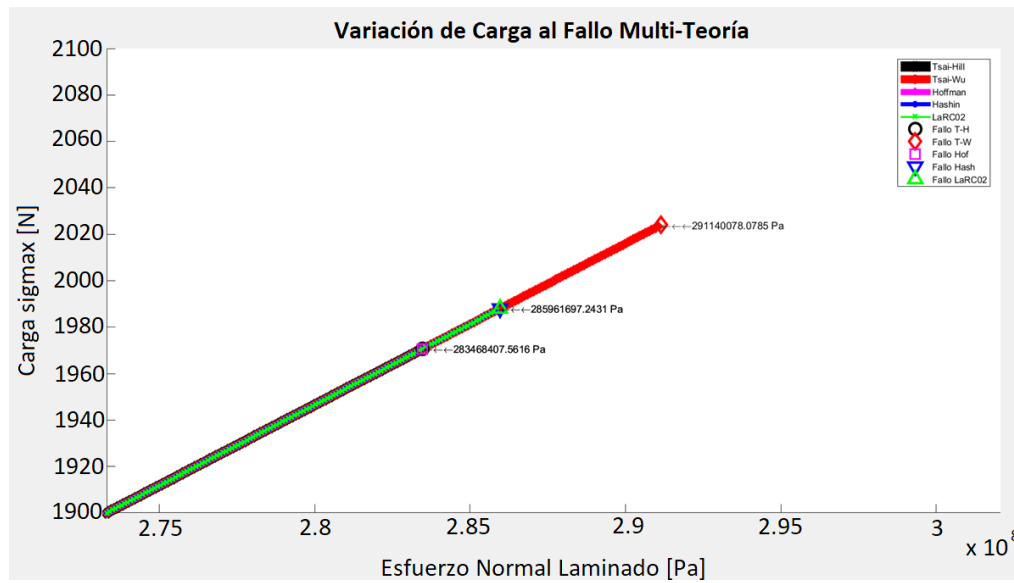


Figura 7-3 Datos gráficos de Fallo Final obtenidos en análisis Kawai [139].

Los datos de resistencia obtenidos teóricamente por medio de criterios de resistencia Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin y LarC02 comparados se muestran resumidos en la **Tabla 7-26**.

El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último en literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3. Acorde a esta ecuación, el error porcentual se interpreta como la magnitud de la diferencia al valor de interés (de literatura), sin embargo, se mantiene el signo positivo o negativo para indicar si la estimación se encuentra por debajo, o por arriba del valor de literatura. Valores negativos de error indican que el valor estimado se encuentra por debajo del valor de pruebas (lo cual se prefiere, para subestimación de resistencia), mientras que valores positivos indican la estimación teórica sobrepasa la resistencia del material obtenida de pruebas (no se prefiere, debido a ser una sobreestimación errónea de la capacidad del material)

Tabla 7-26 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Kawai [139].

Configuración Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura [139] (Pa)	Esfuerzo de Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura- HLAMD	Teoría
[0]	1,941,230,000.00	1,934,125,242.02	-0.37	Tsai-Hill
[0]	1,941,230,000.00	1,934,125,242.02	-0.37	Hoffman
[0]	1,941,230,000.00	1,934,125,242.02	-0.37	Tsai-Wu
[0]	1,941,230,000.00	1,934,125,242.02	-0.37	Hashin
[0]	1,941,230,000.00	1,934,125,242.02	-0.37	LaRC02
[5]	1,016,340,000.00	808,402,785.96	-20.46	Tsai-Hill
[5]	1,016,340,000.00	808,402,785.96	-20.46	Hoffman
[5]	1,016,340,000.00	830,458,847.69	-18.29	Tsai-Wu
[5]	1,016,340,000.00	814,156,542.45	-19.89	Hashin
[5]	1,016,340,000.00	887,996,412.00	-12.63	LaRC02
[10]	439,220,000.00	427,935,638.48	-2.57	Tsai-Hill
[10]	439,220,000.00	427,935,638.48	-2.57	Hoffman
[10]	439,220,000.00	440,450,058.83	0.28	Tsai-Wu
[10]	439,220,000.00	437,860,868.41	-0.31	Hashin
[10]	439,220,000.00	437,860,868.41	-0.31	LaRC02
[15]	256,940,000.00	283,468,407.56	10.32	Tsai-Hill
[15]	256,940,000.00	283,468,407.56	10.32	Hoffman
[15]	256,940,000.00	291,140,078.08	13.31	Tsai-Wu
[15]	256,940,000.00	285,961,697.24	11.30	Hashin
[15]	256,940,000.00	285,961,697.24	11.30	LaRC02
[20]	192,370,000.00	208,238,041.50	8.25	Tsai-Hill
[20]	192,370,000.00	208,238,041.50	8.25	Hoffman
[20]	192,370,000.00	213,272,578.45	10.87	Tsai-Wu
[20]	192,370,000.00	209,053,147.40	8.67	Hashin
[20]	192,370,000.00	209,053,147.40	8.67	LaRC02
[30]	124,820,000.00	131,761,023.47	5.56	Tsai-Hill
[30]	124,820,000.00	131,761,023.47	5.56	Hoffman
[30]	124,820,000.00	134,062,526.07	7.40	Tsai-Wu
[30]	124,820,000.00	131,856,919.89	5.64	Hashin
[30]	124,820,000.00	131,856,919.89	5.64	LaRC02
[45]	66,200,000.00	82,386,660.89	24.45	Tsai-Hill
[45]	66,200,000.00	82,386,660.89	24.45	Hoffman
[45]	66,200,000.00	83,093,838.01	25.52	Tsai-Wu
[45]	66,200,000.00	82,386,660.89	24.45	Hashin
[45]	66,200,000.00	82,386,660.89	24.45	LaRC02
[60]	41,240,000.00	60,850,764.81	47.55	Tsai-Hill
[60]	41,240,000.00	60,850,764.81	47.55	Hoffman
[60]	41,240,000.00	61,071,335.07	48.09	Tsai-Wu
[60]	41,240,000.00	60,845,974.81	47.54	Hashin
[60]	41,240,000.00	60,845,974.81	47.54	LaRC02
[90]	43,800,000.00	48,523,341.55	10.78	Tsai-Hill
[90]	43,800,000.00	48,523,341.55	10.78	Hoffman
[90]	43,800,000.00	48,523,341.55	10.78	Tsai-Wu
[90]	43,800,000.00	48,523,341.55	10.78	Hashin
[90]	43,800,000.00	48,523,341.55	10.78	LaRC02

7.2.3. Fallo Final de lámina simple: Taniguchi

El Fallo Final de lámina “Taniguchi” se refiere a los datos de literatura por N. Taniguchi, T. Nishiwaki, H. Kawada [140], en el cual prueban distintas configuraciones de una capa de material compuesto de fibra unidireccional, mostrando un material completamente caracterizado en sus módulos elásticos. En él se muestra una gráfica con los valores de resistencia para los ángulos [15, 30, 45, 60 y 75] a distintas velocidades de aplicación de carga, los cuales son los puntos para comparar teóricamente. De las velocidades de carga, la condición estática es la seleccionada para comparación. Los esfuerzos de fallo de este reporte se muestran en la **Tabla 7-27**.

Tabla 7-27 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Taniguchi [140].

Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura [140] (MPa)
15	218
30	113
45	80.9
60	70.3
75	65.1

Para generar la comparativa de resistencia mencionada en literatura y la predicha por medio del análisis en la herramienta de análisis creada, las propiedades de material se resumen en la **Tabla 7-28**.

Para poder ingresar los datos en la herramienta creada se requiere un valor de fuerza, por lo que el esfuerzo último de la **Tabla 7-28** se multiplica por el área inferior (transversal a probeta) del tamaño de probeta mencionado en literatura para obtener valores de fuerza mostrado en la Tabla 7-29.

Los datos de resistencia obtenidos teóricamente por medio de criterios de resistencia Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin y LarC02 comparados se muestran resumidos en la **Tabla 7-30**. El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último en literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3. Acorde a esta ecuación, el error porcentual se interpreta como la magnitud de la diferencia al valor de interés (de literatura), sin embargo, se mantiene el signo positivo o negativo para indicar si la estimación se encuentra por debajo, o por arriba del valor de literatura. Valores negativos de error indican que el valor estimado se encuentra por debajo del valor de pruebas (lo cual se prefiere, para subestimación de resistencia), mientras que valores positivos indican la estimación teórica sobrepasa la resistencia del material obtenida de pruebas (no se prefiere, debido a ser una sobreestimación errónea de la capacidad del material)

Tabla 7-28 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Taniguchi [140]

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lámina	0.001	m
Ancho de lámina	0.005	m
Largo de lámina	0.025	m
Área inferior (dirección 1)	0.000005	m ²
Área lateral (dirección 2)	0.000025	m ²
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	1	-
Grosor de laminado	0.001	m
Ancho de laminado	0.005	m
Largo de laminado	0.025	m
Área inferior laminado	0.000005	m ²
Área lateral laminado	0.000025	m ²
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	1.25E+11	Pa
E2	9,380,000,000	Pa
G12	4,280,000,000	Pa
v12	0.32	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	23,600,000,000	Pa
Y	63,100,000	Pa
S (cortante)	51,300,000	Pa
X' (compresión)	23,600,000,000*	Pa
Y' (compresión)	63,100,000*	Pa

*Valor asumido igual al valor tensionante debido a falta de información.

Tabla 7-29 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Taniguchi [140].

Dirección Laminar (grados)	Fuerza de Fallo Final en literatura [140] [N]
15	218
30	113
45	80.9
60	70.3
75	65.1

Tabla 7-30 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Taniguchi [140].

Configuración Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura [140] (Pa)	Esfuerzo de Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura-HLAMD	Teoría
[15]	216,240,000	200,492,000.00	-7.28	Tsai-Hill
[15]	216,240,000	200,492,000.00	-7.28	Hoffman
[15]	216,240,000	200,661,280.00	-7.20	Tsai-Wu
[15]	216,240,000	200,498,720.00	-7.28	Hashin
[15]	216,240,000	200,498,720.00	-7.28	LaRC02
[30]	110,560,000	107,245,280.00	-3.00	Tsai-Hill
[30]	110,560,000	107,245,280.00	-3.00	Hoffman
[30]	110,560,000	107,323,200.00	-2.93	Tsai-Wu
[30]	110,560,000	107,245,920.00	-3.00	Hashin
[30]	110,560,000	107,245,920.00	-3.00	LaRC02
[45]	78,000,000	79,610,080.00	2.06	Tsai-Hill
[45]	78,000,000	79,610,080.00	2.06	Hoffman
[45]	78,000,000	79,652,480.00	2.12	Tsai-Wu
[45]	78,000,000	79,610,080.00	2.06	Hashin
[45]	78,000,000	79,610,080.00	2.06	LaRC02
[60]	67,930,000	68,596,000.00	0.98	Tsai-Hill
[60]	67,930,000	68,596,000.00	0.98	Hoffman
[60]	67,930,000	68,616,320.00	1.01	Tsai-Wu
[60]	67,930,000	68,596,000.00	0.98	Hashin
[60]	67,930,000	68,596,000.00	0.98	LaRC02
[75]	62,930,000	64,232,000.00	2.07	Tsai-Hill
[75]	62,930,000	64,232,000.00	2.07	Hoffman
[75]	62,930,000	64,238,400.00	2.08	Tsai-Wu
[75]	62,930,000	64,232,000.00	2.07	Hashin
[75]	62,930,000	64,232,000.00	2.07	LaRC02

7.2.4. Fallo Final de lámina simple: Análisis De La Iniciación De Grietas En Perfiles Alares De Material Compuesto Por Impactos De Baja Energía

El Fallo Final de lámina de este trabajo trabaja con los datos de investigación por Jauregui [141], en el cual prueba una configuración de 10 capas de material compuesto de fibra bidireccional el cual se analiza como si fuera una sola capa debido la simplificación de propiedades por homogenización a través de sus capas y que al no ser rotada permite un análisis relativamente similar al de láminas unidireccionales debido a la no necesidad de transformaciones. En él se tiene un material compuesto el cual fue probado para obtención del módulo elástico y valores de resistencia, los cuales fueron procesados por medio de la herramienta creada. El esfuerzo de fallo en de este trabajo se muestra en la siguiente **Tabla 7-31**.

Tabla 7-31 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Jauregui et al. [141].

Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura [141] (MPa)
0	328

Para generar la comparativa de resistencia mencionada entre datos de prueba y la predicha por medio del análisis en la herramienta creada, las propiedades de material se resumen en la **Tabla 7-32**.

Para poder ingresar los datos en la herramienta creada se requiere un valor de fuerza, por lo que el esfuerzo último de la **Tabla 7-32** se multiplica por el área inferior (transversal a probeta) del tamaño de probeta mencionado en el reporte de literatura para obtener valores de fuerza mostrado en la **Tabla 7-33**.

Los datos de resistencia obtenidos teóricamente por medio de criterios de resistencia Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin y LarC02 comparados se muestran resumidos en la **Tabla 7-34**. El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último de literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3, siguiendo los lineamientos mencionados de subestimación/sobreestimación de valores de resistencia acorde al signo de la diferencia porcentual.

Tabla 7-32 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Jauregui et al.[141].

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lámina	0.000168	m
Ancho de lámina	0.0255	m
Largo de lámina	0.17719	m
Área inferior (dirección 1)	0.000004284	m ²
Área lateral (dirección 2)	2.97679E-05	m ²
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	10	-
Grosor de laminado	0.00168	m
Ancho de laminado	0.0255	m
Largo de laminado	0.17719	m
Área inferior laminado	0.00004284	m ²
Área lateral laminado	0.000297679	m ²
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	16,944,116,618*	Pa
E2	16,944,116,618*	Pa
G12	5,240,006,000**	Pa
v12	0.3**	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	328,000,000	Pa
Y	328,000,000	Pa
S (cortante)	328,000,000***	Pa
X' (compresión)\	328,000,000***	Pa
Y' (compresión)	328,000,000***	Pa

*Valor E1 y E2 misma magnitud al ser lámina bidireccional balanceada.

**Valor asumido de valores de material típico de otros reportes debido la falta de información

***Valor de resistencia compresivo y cortante asumido igual a valores de resistencia tensionante debido a falta de información.

Tabla 7-33 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Jauregui et al.[141].

Dirección Laminar (grados)	Fuerza de Fallo Final en literatura [141] [N]
0	14051

Tabla 7-34 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Jauregui et al. [141].

Configuración Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura [141] (Pa)	Esfuerzo de Fallo Final en herramienta (Pa)	Error % Literatura-HLAMD	Teoría
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	328000000	329131652.7	0.35	Tsai-Hill
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	328000000	329131652.7	0.35	Hoffman
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	328000000	329131652.7	0.35	Tsai-Wu
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	328000000	329131652.7	0.35	Hashin
[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]	328000000	329131652.7	0.35	LarC02

Discusión a este análisis se puede realizar en ámbito de metodologías de homogenización las cuales varían entre láminas unidireccionales y láminas bidireccionales que requieren de especiales transformaciones en caso de orientarse a distintos ángulos.

Cuidado especial se debe de tener en las consideraciones y teorías de fallo debido a que no todas las teorías de resistencia que se manejan en este trabajo son aplicables, LarC02 por ejemplo caracteriza modos de fallo de láminas **unidireccionales** específicamente.

7.2.5. Fallo Final de lámina simple: Análisis y Evaluación de Fibras Naturales en Materiales Compuestos de Matriz Polimérica aplicados a Álabes de Aerogeneradores de Baja Capacidad

El Fallo Final en el trabajo por García et. al [142] presenta los datos de pruebas en con una configuración de 1 capa de material compuesto de fibra bidireccional. En él se tiene un material compuesto el cual fue probado para obtención del módulo elástico y un valor de resistencia, el cual fue procesado por medio de la herramienta creada. El esfuerzo de fallo en este trabajo se muestra en la **Tabla 7-35**. Para generar la comparativa de resistencia mencionada en el trabajo de investigación y la predicha por medio del análisis en la herramienta creada, las propiedades de material se resumen en la **Tabla 7-36**.

Tabla 7-35 Tabla de valores de resistencia de láminas unidireccionales **García et. al [142]**.

Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura (MPa)
0	94.4

Tabla 7-36 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Final Virginia et. al [142].

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lámina	0.0025	m
Ancho de lámina	0.025	m
Largo de lámina	0.25	m
Área inferior (dirección 1)	0.0000625	m ²
Área lateral (dirección 2)	0.000625	m ²
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	1	-
Grosor de laminado	0.0025	m
Ancho de laminado	0.025	m
Largo de laminado	0.25	m
Área inferior laminado	0.0000625	m ²
Área lateral laminado	0.000625	m ²
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	45,820,000,000	Pa
E2	45,850,000,000*	Pa
G12	11,340,000,000	Pa
v12	0.04	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	94,400,000	Pa
Y	328,000,000**	Pa
S (cortante)	328,000,000**	Pa
X' (compresión)	94,400,000	Pa
Y' (compresión)	32,800,000**	Pa

*Valor E1 y E2 misma magnitud al ser lámina bidireccional balanceada.

**Valor asumido de valores de material típico de otros reportes debido la falta de información.

Para poder ingresar los datos en la herramienta creada se requiere un valor de fuerza, por lo que el esfuerzo último de la **Tabla 7-37** se multiplica por el área inferior (transversal a probeta) del tamaño de probeta mencionado en literatura para obtener valores de fuerza mostrado en la Tabla 7-38.

Tabla 7-37 Tabla de valores de fuerza última de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Virginia et. al [142].

Dirección Laminar (grados)	Fuerza de Fallo Final en literatura [142] [N]
0	5900

Los datos de resistencia obtenidos teóricamente por medio de criterios de resistencia Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin y LarC02 comparados se muestran resumidos en la **Tabla 7-38**. El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último en literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3, siguiendo los lineamientos mencionados de subestimación/sobreestimación de valores de resistencia acorde al signo de la diferencia porcentual.

Tabla 7-38 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de lámina Virginia et. al [142].

Configuración Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo de Fallo Final en literatura [142] (Pa)	Esfuerzo de Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura-HLAMD	Teoría
[0]	94,400,000	94,400,000	0	Tsai-Hill
[0]	94,400,000	94,400,000	0	Hoffman
[0]	94,400,000	94,400,000	0	Tsai-Wu
[0]	94,400,000	94,400,000	0	Hashin
[0]	94,400,000	94,400,000	0	LarC02

Discusión a este análisis se puede realizar en ámbito de metodologías de homogenización las cuales varían entre láminas unidireccionales y láminas bidireccionales que requieren de especiales transformaciones en caso de orientarse a distintos ángulos.

Cuidado especial se debe de tener en las consideraciones y teorías de fallo debido a que no todas las teorías de resistencia que se manejan en este trabajo son aplicables, LarC02 por ejemplo caracteriza modos de fallo de láminas **unidireccionales** específicamente.

7.3. Resultados de comparación a Fallo Final e Inicial de laminados

En esta sección se hace comparación de valores de resistencia de distintas configuraciones de laminados para su Fallo Final y su Fallo Inicial.

7.3.1. Fallo Final e Inicial de laminado: C. T. Sun y S. G. Zhou

Estimación de Fallo Inicial de este apartado se refiere a los datos de literatura por C. T. Sun y S. G. Zhou [128], en el cual prueban distintas configuraciones de un laminado compuesto de fibra unidireccional, mostrando un material completamente caracterizado en sus módulos elásticos en lámina simple. En el reporte discuten acerca de los efectos que tienen los acabados superficiales en materiales compuestos por lo cual se refiere a este reporte como “C. T. Sun Edge Effects” más adelante. En él se prueban 3 distintos paneles de material laminado compuesto los cuales son a su vez recortados a distintos ángulos de orientación con los cuales se probaron las diversas configuraciones de laminados. Los 3 paneles de configuración laminar probadas y los ángulos a los cuales se cortaron se observan en la **Tabla 7-39**.

Tabla 7-39 Configuración de paneles y ángulos de corte de probetas.

Panel No.	Configuración de Dirección Laminar (grados)	Ángulos de corte a panel (grados)
1	[0/90/45/-45]s	0, 7.5, 15, 22.5
2	[45/-45/90/0]s	22.5, 30, 37.5, 45
3	[0\60\ -60]s	0, 10, 20, 30

Los valores de resistencia pueden apreciarse en la siguiente **Tabla 7-40**:

Tabla 7-40 Tabla de valores de resistencia de laminados compuestos de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación C. T. Sun Edge Effects [128]. El esfuerzo de fallo final es derivado de la fuerza de fallo final y el área transversal del material analizado.

Panel	Ángulo de corte de probeta en panel (grados)	Configuración de Dirección Laminar resultante (grados)	Fuerza de Fallo Final en literatura [128] (N)	Esfuerzo de fallo derivado de literatura [128] (Pa)
1	0	[0/90/45/-45]s	16,538	616,218,915
1	7.5	[7.5/-82.5/52.5/-37.5]s	12,624	470,368,284
1	15	[15/-75/60/-30]s	11,098	413,519,686
1	22.5	[22.5/-67.5/67.5/-22.5]s	10,489	390,813,395
2	22.5	[67.5/-22.5/-67.5/22.5]s	12,406	462,247,056
2	30	[75/-15/-60/30]s	12,713	473,683,071
2	37.5	[82.5/-7.5/-52.5/37.5]s	14,243	530,697,408
2	45	[90/0/-45/45]s	17,117	637,765,031
3	0	[0/60/-60]s	15,600	774,997,215
3	10	[10/70/-50]s	9,141	454,125,827
3	20	[20/80/-40]s	8,429	418,768,099
3	30	[30/90/-30]s	8,363	415,453,312

Para generar la comparativa de resistencia mencionada en literatura y la predicha por medio del análisis en la herramienta de análisis creada, las propiedades de material se resumen en la **Tabla 7-41**. Para el Fallo Final, El valor de resistencia teórico es aproximado por medio de la metodología de progresión de daño descrita en la sección 6.3.4 Cálculo de fallo progresivo (Función auxiliar) y los resultados son mostrado en la Error! Reference source not found.. El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último en literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3, siguiendo los lineamientos mencionados de subestimación/sobreestimación de valores de resistencia acorde al signo de la diferencia porcentual.

Tabla 7-41 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial C. T. Sun Edge Effects [128]

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lámina	0.00013208	m
Ancho de lámina	0.0254	m
Largo de lámina	0.2286	m
Área inferior (dirección 1)	3.35483E-06	m ²
Área lateral (dirección 2)	3.01935E-05	m ²
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	6	-
Grosor de laminado	0.00079248	m
Ancho de laminado	0.0254	m
Largo de laminado	0.2286	m
Área inferior laminado	2.0129E-05	m ²
Área lateral laminado	0.000181161	m ²
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	1.38998E+11	Pa
E2	9,859,485,000	Pa
G12	5,240,006,000	Pa
v12	0.3	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	2,206,000,000	Pa
Y	56,540,000	Pa
S (cortante)	110,300,000*	Pa
X' (compresión)\	-2,013,000,000**	Pa
Y' (compresión)	206,800,000	Pa

*Valor asumido para permitir su procesado en la herramienta generada.

**Valor asumido igual al valor tensionante debido a falta de información.

Los datos de resistencia obtenidos teóricamente por medio de criterios de resistencia Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin y LarC02 comparados se muestran resumidos en la **Tabla 7-42**. El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último en literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3, siguiendo los lineamientos mencionados de subestimación/sobreestimación de valores de resistencia acorde al signo de la diferencia porcentual.

Tabla 7-42 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de laminado C. T. Sun Edge Effects [128].

Configuración de Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo Fallo Final en literatura [128] (Pa)	Esfuerzo Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Final	Esfuerzo Fallo Inicial en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Inicial	Teoría
[0/90/45/-45]s	616,218,915	555,169,380	-9.91	334,343,616	-45.74	Tsai-Hill
[0/90/45/-45]s	616,218,915	555,169,380	-9.91	330,120,853	-46.43	Hoffman
[0/90/45/-45]s	616,218,915	555,169,380	-9.91	316,210,570	-48.69	Tsai-Wu
[0/90/45/-45]s	616,218,915	555,169,380	-9.91	337,696,988	-45.20	Hashin
[0/90/45/-45]s	616,218,915	555,169,380	-9.91	337,696,988	-45.20	LarC02
[7.5/-82.5/52.5/-37.5]s	470,368,284	503,005,814	6.94	339,323,996	-27.86	Tsai-Hill
[7.5/-82.5/52.5/-37.5]s	470,368,284	521,635,659	10.90	334,405,717	-28.91	Hoffman
[7.5/-82.5/52.5/-37.5]s	470,368,284	517,909,690	10.11	321,327,566	-31.69	Tsai-Wu
[7.5/-82.5/52.5/-37.5]s	470,368,284	503,005,814	6.94	342,304,771	-27.23	Hashin
[7.5/-82.5/52.5/-37.5]s	470,368,284	670,674,418	42.58	342,304,771	-27.23	LarC02
[15/-75/60/-30]s	413,519,686	458,294,186	10.83	354,414,170	-14.29	Tsai-Hill
[15/-75/60/-30]s	413,519,686	547,717,442	32.45	347,459,027	-15.98	Hoffman
[15/-75/60/-30]s	413,519,686	495,553,876	19.84	336,877,275	-18.53	Tsai-Wu
[15/-75/60/-30]s	413,519,686	458,294,186	10.83	356,500,713	-13.79	Hashin
[15/-75/60/-30]s	413,519,686	778,727,519	88.32	356,500,713	-13.79	LarC02
[22.5/-67.5/67.5/-22.5]s	390,813,395	417,308,527	6.78	379,676,240	-2.85	Tsai-Hill
[22.5/-67.5/67.5/-22.5]s	390,813,395	543,991,473	39.19	369,243,527	-5.52	Hoffman
[22.5/-67.5/67.5/-22.5]s	390,813,395	473,198,062	21.08	363,440,330	-7.00	Tsai-Wu
[22.5/-67.5/67.5/-22.5]s	390,813,395	462,020,155	18.22	380,393,489	-2.67	Hashin
[22.5/-67.5/67.5/-22.5]s	390,813,395	763,823,643	95.44	371,851,705	-4.85	LarC02
[67.5/-22.5/-67.5/22.5]s	462,247,056	417,308,527	-9.72	379,676,240	-17.86	Tsai-Hill
[67.5/-22.5/-67.5/22.5]s	462,247,056	543,991,473	17.68	369,243,527	-20.12	Hoffman
[67.5/-22.5/-67.5/22.5]s	462,247,056	473,198,062	2.37	363,406,175	-21.38	Tsai-Wu
[67.5/-22.5/-67.5/22.5]s	462,247,056	462,020,155	-0.05	380,421,434	-17.70	Hashin
[67.5/-22.5/-67.5/22.5]s	462,247,056	763,823,643	65.24	371,851,705	-19.56	LarC02
[75/-15/-60/30]s	473,683,071	458,294,186	-3.25	354,414,170	-25.18	Tsai-Hill
[75/-15/-60/30]s	473,683,071	547,717,442	15.63	347,459,027	-26.65	Hoffman
[75/-15/-60/30]s	473,683,071	495,553,876	4.62	336,877,275	-28.88	Tsai-Wu
[75/-15/-60/30]s	473,683,071	458,294,186	-3.25	356,500,713	-24.74	Hashin
[75/-15/-60/30]s	473,683,071	778,727,519	64.40	353,122,500	-25.45	LarC02
[82.5/-7.5/-52.5/37.5]s	530,697,408	503,005,814	-5.22	339,305,366	-36.06	Tsai-Hill
[82.5/-7.5/-52.5/37.5]s	530,697,408	521,635,659	-1.71	334,442,977	-36.98	Hoffman
[82.5/-7.5/-52.5/37.5]s	530,697,408	517,909,690	-2.41	321,308,936	-39.46	Tsai-Wu
[82.5/-7.5/-52.5/37.5]s	530,697,408	503,005,814	-5.22	342,323,401	-35.50	Hashin
[82.5/-7.5/-52.5/37.5]s	530,697,408	670,674,418	26.38	341,540,948	-35.64	LarC02
[90/0/-45/45]s	637,765,031	555,169,380	-12.95	334,293,938	-47.58	Tsai-Hill
[90/0/-45/45]s	637,765,031	555,169,380	-12.95	330,071,174	-48.25	Hoffman
[90/0/-45/45]s	637,765,031	555,169,380	-12.95	316,210,570	-50.42	Tsai-Wu
[90/0/-45/45]s	637,765,031	555,169,380	-12.95	337,622,469	-47.06	Hashin
[90/0/-45/45]s	637,765,031	555,169,380	-12.95	337,622,469	-47.06	LarC02
[0/60/-60]s	774,997,215	740,225,839	-4.49	415,097,785	-46.44	Tsai-Hill
[0/60/-60]s	774,997,215	740,225,839	-4.49	399,672,274	-48.43	Hoffman
[0/60/-60]s	774,997,215	740,225,839	-4.49	401,684,297	-48.17	Tsai-Wu
[0/60/-60]s	774,997,215	740,225,839	-4.49	415,053,080	-46.44	Hashin
[0/60/-60]s	774,997,215	740,225,839	-4.49	415,053,080	-46.44	LarC02
[10/70/-50]s	454,125,827	486,859,948	7.21	370,112,920	-18.50	Tsai-Hill
[10/70/-50]s	454,125,827	516,667,700	13.77	361,071,235	-20.49	Hoffman
[10/70/-50]s	454,125,827	516,667,700	13.77	353,321,220	-22.20	Tsai-Wu
[10/70/-50]s	454,125,827	486,859,948	7.21	371,305,230	-18.24	Hashin

Configuración de Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo Fallo Final en literatura [128] (Pa)	Esfuerzo Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Final	Esfuerzo Fallo Inicial en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Inicial	Teoría
[10/70/-50]s	454,125,827	829,649,095	82.69	364,946,243	-19.64	LarC02
[20/80/-40]s	418,768,099	357,693,023	-14.58	343,285,943	-18.02	Tsai-Hill
[20/80/-40]s	418,768,099	442,148,320	5.58	337,821,189	-19.33	Hoffman
[20/80/-40]s	418,768,099	422,276,486	0.84	325,401,292	-22.30	Tsai-Wu
[20/80/-40]s	418,768,099	357,693,023	-14.58	345,968,641	-17.38	Hashin
[20/80/-40]s	418,768,099	630,930,749	50.66	344,577,612	-17.72	LarC02
[30/90/-30]s	415,453,312	337,821,189	-18.69	334,293,938	-19.54	Tsai-Hill
[30/90/-30]s	415,453,312	412,340,568	-0.75	330,046,333	-20.56	Hoffman
[30/90/-30]s	415,453,312	382,532,816	-7.92	316,185,729	-23.89	Tsai-Wu
[30/90/-30]s	415,453,312	337,821,189	-18.69	337,647,310	-18.73	Hashin
[30/90/-30]s	415,453,312	576,283,204	38.71	337,647,310	-18.73	LarC02

7.3.2. Fallo Final e Inicial de laminado: C. T. Sun FAA – Purdue CML

El Fallo Inicial “C. T. Sun FAA - Purdue CML” se refiere a los datos del reporte técnico por C. T. Sun, B. J. Quinn, J. Tao y D.W. Oplinger [110], en el cual muestran datos de pruebas a distintas configuraciones de laminados compuesto realizadas en el Laboratorio de Materiales Compuestos en La Universidad de Purdue. En él se prueban distintas configuraciones de un laminado compuesto de fibra unidireccional, mostrando un material completamente caracterizado en sus módulos elásticos en lámina simple. Los datos son resultados de pruebas a 4 distintos paneles de material laminado compuesto que a su vez recortados a distintos ángulos de orientación. Los 4 paneles de configuración laminar probadas se nombran de A a D y los ángulos a los cuales se cortaron se observan en la **Tabla 7-43**:

Tabla 7-43 Tabla de valores de resistencia de laminados compuestos de láminas unidireccionales a diversos ángulos de orientación Sun y Oplinger [110]. El esfuerzo de fallo final es derivado de la fuerza de fallo final y el área transversal del material analizado.

Panel	Ángulo de corte de probeta en panel (grados)	Configuración Laminar resultante (grados)	Fuerza de Fallo Final en literatura [110] (N)	Esfuerzo de Fallo Final (Pa)
A	0	[0, 45, -45, 90, 90, -45, 45, 0]	20,208	765,000,000
A	7.5	[7.5, 52.5, -37.5, -82.5, -82.5, -37.5, 52.5, 7.5]	19,865	752,000,000
A	15	[15, 60, -30, -75, -75, -30, 60, 15]	20,446	774,000,000
A	22.5	[22.5, 67.5, -22.5, -67.5, -67.5, 22.5, 67.5, 22.5]	21,978	832,000,000
B	0	[0, 45, -45, -45, 45, 0]	15,156	765,000,000
B	7.5	[7.5, 52.5, -37.5, -37.5, 52.5, 7.5]	14,899	752,000,000
B	15	[15, 60, -30, -30, 60, 15]	15,334	774,000,000
B	22.5	[22.5, 67.5, -22.5, -22.5, 67.5, 22.5]	15,156	765,000,000
B	26	[26, 71, -19, -19, 71, 26]	14,899	752,000,000
B	30	[30, 75, -15, -15, 75, 30]	15,334	774,000,000
B	45	[45, 90, 0, 0, 90, 45]	16,484	832,000,000
C	0	[90, 30, -30, -30, 30, 90]	15,156	765,000,000
C	7.5	[-82.5, 37.5, -22.5, -22.5, 37.5, -82.5]	14,899	752,000,000
C	15	[-75, 45, -15, -15, 45, -75]	15,334	774,000,000
C	22.5	[-67.5, 52.5, -7.5, -7.5, 52.5, -67.5]	16,484	832,000,000
D	0	[90, 0, 90, 0, 0, 90, 0, 90]	29,744	1,126,000,000
D	1.5	[-88.5, 1.5, -88.5, 1.5, 1.5, -88.5, 1.5, -88.5]	30,114	1,140,000,000
D	3	[-87, 3, -87, 3, 3, -87, 3, -87]	28,371	1,074,000,000
D	4.5	[-85.5, 4.5, -85.5, 4.5, 4.5, -85.5, 4.5, -85.5]	26,891	1,018,000,000
D	6	[-84, 6, -84, 6, 6, -84, 6, -84]	22,744	861,000,000
D	7.5	[-82.5, 7.5, -82.5, 7.5, 7.5, -82.5, 7.5, -82.5]	18,835	713,000,000
D	15	[-75, 15, -75, 15, 15, -75, 15, -75]	10,408	394,000,000
D	22.5	[-67.5, 22.5, -67.5, 22.5, 22.5, -67.5, 22.5, -67.5]	7,608	288,000,000

Para generar la comparativa de resistencia mencionada en literatura y la predicha por medio del análisis en la herramienta de análisis creada, las propiedades de material se resumen en la Tabla 7-44 y Tabla 7-45:

Tabla 7-44 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Sun y Oplinger [110] para laminados de 6 capas.

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lámina	0.00013	m
Ancho de lámina	0.0254	m
Largo de lámina	0.2286	m
Área inferior (dirección 1)	0.000003302	m ²
Área lateral (dirección 2)	0.000029718	m ²
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	6	-
Grosor de laminado	0.00078	m
Ancho de laminado	0.0254	m
Largo de laminado	0.2286	m
Área inferior laminado	0.000019812	m ²
Área lateral laminado	0.000178308	m ²
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	1.537E+11	Pa
E2	11,000,000,000	Pa
G12	6,900,000,000	Pa
v12	0.32	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	2,171,000,000	Pa
Y	67,000,000	Pa
S (cortante)	110,300,000	Pa
X' (compresión)	2,013,000,000	Pa
Y' (compresión)	206,800,000	Pa

*Valor asumido para permitir su procesado en la herramienta generada.

**Valor asumido igual al valor tensionante debido a falta de información.

Tabla 7-45 Dimensiones de material de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Sun y Oplinger [110] para laminados de 8 capas.

Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	8	-
Grosor de laminado	0.00104	m
Ancho de laminado	0.0254	m
Largo de laminado	0.2286	m
Área inferior laminado	0.000026416	m ²
Área lateral laminado	0.000237744	m ²

*Valor asumido para permitir su procesado en la herramienta generada.

**Valor asumido igual al valor tensionante debido a falta de información.

Los datos de resistencia obtenidos teóricamente por medio de criterios de resistencia Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin y LarC02 comparados se muestran resumidos en la Tabla 7-46. El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último en literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3, siguiendo los lineamientos mencionados de subestimación/sobreestimación de valores de resistencia acorde al signo de la diferencia porcentual.

Tabla 7-46 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de laminado Sun y Oplinger [110].

Panel	Configuración de Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo Fallo Final en literatura [110] (Pa)	Esfuerzo Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Final	Esfuerzo Fallo Inicial en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Inicial	Teoría
A	[0, 45, -45, 90]s	765,000,000	552,695,336	-27.75	399,079,939	-47.83	Tsai-Hill
A	[0, 45, -45, 90]s	765,000,000	552,695,336	-27.75	394,264,843	-48.46	Hoffman
A	[0, 45, -45, 90]s	765,000,000	552,695,336	-27.75	374,660,512	-51.02	Tsai-Wu
A	[0, 45, -45, 90]s	765,000,000	552,695,336	-27.75	404,582,908	-47.11	Hashin
A	[0, 45, -45, 90]s	765,000,000	552,695,336	-27.75	404,582,908	-47.11	LarC02
A	[7.5, 52.5, -37.5, -82.5]s	752,000,000	480,769,231	-36.07	403,149,845	-46.39	Tsai-Hill
A	[7.5, 52.5, -37.5, -82.5]s	752,000,000	442,913,386	-41.10	397,188,294	-47.18	Hoffman
A	[7.5, 52.5, -37.5, -82.5]s	752,000,000	442,913,386	-41.10	378,558,449	-49.66	Tsai-Wu
A	[7.5, 52.5, -37.5, -82.5]s	752,000,000	480,769,231	-36.07	408,366,201	-45.70	Hashin
A	[7.5, 52.5, -37.5, -82.5]s	752,000,000	681,405,209	-9.39	408,366,201	-45.70	LarC02
A	[15, 60, -30, -75]s	774,000,000	465,626,893	-39.84	415,072,946	-46.37	Tsai-Hill
A	[15, 60, -30, -75]s	774,000,000	473,198,062	-38.86	404,640,232	-47.72	Hoffman
A	[15, 60, -30, -75]s	774,000,000	446,698,970	-42.29	391,226,744	-49.45	Tsai-Wu
A	[15, 60, -30, -75]s	774,000,000	469,412,477	-39.35	418,053,721	-45.99	Hashin
A	[15, 60, -30, -75]s	774,000,000	726,832,223	-6.09	418,053,721	-45.99	LarC02
A	[22.5, 67.5, -22.5, -67.5]s	832,000,000	442,913,386	-46.77	415,072,946	-50.11	Tsai-Hill
A	[22.5, 67.5, -22.5, -67.5]s	832,000,000	495,911,569	-40.40	404,640,232	-51.37	Hoffman
A	[22.5, 67.5, -22.5, -67.5]s	832,000,000	442,913,386	-46.77	391,226,744	-52.98	Tsai-Wu
A	[22.5, 67.5, -22.5, -67.5]s	832,000,000	442,913,386	-46.77	418,053,721	-49.75	Hashin
A	[22.5, 67.5, -22.5, -67.5]s	832,000,000	753,331,314	-9.46	418,053,721	-49.75	LarC02
B	[0, 45, -45]s	883,000,000	736,927,115	-16.54	641,025,641	-27.40	Tsai-Hill
B	[0, 45, -45]s	883,000,000	736,927,115	-16.54	600,646,073	-31.98	Hoffman
B	[0, 45, -45]s	883,000,000	736,927,115	-16.54	605,693,519	-31.41	Tsai-Wu
B	[0, 45, -45]s	883,000,000	736,927,115	-16.54	646,073,087	-26.83	Hashin
B	[0, 45, -45]s	883,000,000	736,927,115	-16.54	646,073,087	-26.83	LarC02
B	[7.5, 52.5, -37.5]s	843,000,000	630,930,749	-25.16	628,407,026	-25.46	Tsai-Hill
B	[7.5, 52.5, -37.5]s	843,000,000	585,503,735	-30.55	575,408,843	-31.74	Hoffman
B	[7.5, 52.5, -37.5]s	843,000,000	588,027,458	-30.25	572,885,120	-32.04	Tsai-Wu
B	[7.5, 52.5, -37.5]s	843,000,000	630,930,749	-25.16	628,407,026	-25.46	Hashin
B	[7.5, 52.5, -37.5]s	843,000,000	903,492,833	7.18	628,407,026	-25.46	LarC02
B	[15, 60, -30]s	929,000,000	614,526,550	-33.85	613,264,688	-33.99	Tsai-Hill
B	[15, 60, -30]s	929,000,000	613,264,688	-33.99	610,740,965	-34.26	Hoffman
B	[15, 60, -30]s	929,000,000	623,359,580	-32.90	610,740,965	-34.26	Tsai-Wu
B	[15, 60, -30]s	929,000,000	615,788,411	-33.71	614,526,550	-33.85	Hashin
B	[15, 60, -30]s	929,000,000	961,538,462	3.50	614,526,550	-33.85	LarC02
B	[22.5, 67.5, -22.5]s	1,028,000,000	581,718,151	-43.41	581,718,151	-43.41	Tsai-Hill
B	[22.5, 67.5, -22.5]s	1,028,000,000	590,551,181	-42.55	532,505,552	-48.20	Hoffman
B	[22.5, 67.5, -22.5]s	1,028,000,000	657,429,841	-36.05	546,386,029	-46.85	Tsai-Wu
B	[22.5, 67.5, -22.5]s	1,028,000,000	585,503,735	-43.04	585,503,735	-43.04	Hashin

Panel	Configuración de Dirección Laminaar (grados)	Esfuerzo Fallo Final en literatura [110] (Pa)	Esfuerzo Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Final	Esfuerzo Fallo Inicial en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Inicial	Teoría
B	[22.5, 67.5, -22.5]s	1,028,000,000	1,000,656,168	-2.66	585,503,735	-43.04	LarC02
B	[26, 71, -19]s	1,129,000,000	560,266,505	-50.37	557,742,782	-50.60	Tsai-Hill
B	[26, 71, -19]s	1,129,000,000	638,501,918	-43.45	555,219,059	-50.82	Hoffman
B	[26, 71, -19]s	1,129,000,000	588,027,458	-47.92	555,219,059	-50.82	Tsai-Wu
B	[26, 71, -19]s	1,129,000,000	565,313,951	-49.93	562,790,228	-50.15	Hashin
B	[26, 71, -19]s	1,129,000,000	969,109,631	-14.16	562,790,228	-50.15	LarC02
B	[30, 75, -15]s	1,074,000,000	526,196,245	-51.01	524,934,383	-51.12	Tsai-Hill
B	[30, 75, -15]s	1,074,000,000	623,359,580	-41.96	519,886,937	-51.59	Hoffman
B	[30, 75, -15]s	1,074,000,000	590,551,181	-45.01	519,886,937	-51.59	Tsai-Wu
B	[30, 75, -15]s	1,074,000,000	538,814,860	-49.83	528,719,968	-50.77	Hashin
B	[30, 75, -15]s	1,074,000,000	961,538,462	-10.47	528,719,968	-50.77	LarC02
B	[45, 90, 0]s	818,000,000	735,665,253	-10.07	391,177,064	-52.18	Tsai-Hill
B	[45, 90, 0]s	818,000,000	735,665,253	-10.07	388,653,341	-52.49	Hoffman
B	[45, 90, 0]s	818,000,000	735,665,253	-10.07	388,653,341	-52.49	Tsai-Wu
B	[45, 90, 0]s	818,000,000	735,665,253	-10.07	392,438,926	-52.02	Hashin
B	[45, 90, 0]s	818,000,000	735,665,253	-10.07	392,438,926	-52.02	LarC02
C	[90, 30, -30]s	765,000,000	408,843,125	-46.56	399,374,196	-47.79	Tsai-Hill
C	[90, 30, -30]s	765,000,000	403,795,679	-47.22	394,157,840	-48.48	Hoffman
C	[90, 30, -30]s	765,000,000	383,605,895	-49.86	374,683,442	-51.02	Tsai-Wu
C	[90, 30, -30]s	765,000,000	413,890,571	-45.90	404,590,553	-47.11	Hashin
C	[90, 30, -30]s	765,000,000	408,843,125	-46.56	404,590,553	-47.11	LarC02
C	[-82.5, 37.5, -22.5]s	752,000,000	409,953,564	-45.48	403,447,922	-46.35	Tsai-Hill
C	[-82.5, 37.5, -22.5]s	752,000,000	404,956,592	-46.15	396,741,178	-47.24	Hoffman
C	[-82.5, 37.5, -22.5]s	752,000,000	384,968,706	-48.81	378,856,527	-49.62	Tsai-Wu
C	[-82.5, 37.5, -22.5]s	752,000,000	414,950,535	-44.82	407,919,085	-45.76	Hashin
C	[-82.5, 37.5, -22.5]s	752,000,000	579,850,596	-22.89	407,919,085	-45.76	LarC02
C	[-75, 45, -15]s	774,000,000	421,613,164	-45.53	414,973,586	-46.39	Tsai-Hill
C	[-75, 45, -15]s	774,000,000	416,616,192	-46.17	404,193,116	-47.78	Hoffman
C	[-75, 45, -15]s	774,000,000	411,619,221	-46.82	390,630,589	-49.53	Tsai-Wu
C	[-75, 45, -15]s	774,000,000	426,610,135	-44.88	418,103,400	-45.98	Hashin
C	[-75, 45, -15]s	774,000,000	658,136,483	-14.97	418,103,400	-45.98	LarC02
C	[-67.5, 52.5, -7.5]s	832,000,000	491,722,189	-40.90	434,199,586	-47.81	Tsai-Hill
C	[-67.5, 52.5, -7.5]s	832,000,000	464,667,878	-44.15	417,308,527	-49.84	Hoffman
C	[-67.5, 52.5, -7.5]s	832,000,000	464,667,878	-44.15	410,850,181	-50.62	Tsai-Wu
C	[-67.5, 52.5, -7.5]s	832,000,000	495,103,977	-40.49	435,193,178	-47.69	Hashin
C	[-67.5, 52.5, -7.5]s	832,000,000	-	-	435,193,178	-47.69	LarC02
D	[90, 0, 90, 0]s	1,126,000,000	1,105,390,672	-1.83	507,551,496	-54.92	Tsai-Hill
D	[90, 0, 90, 0]s	1,126,000,000	1,105,390,672	-1.83	507,253,418	-54.95	Hoffman
D	[90, 0, 90, 0]s	1,126,000,000	1,105,390,672	-1.83	505,390,434	-55.12	Tsai-Wu
D	[90, 0, 90, 0]s	1,126,000,000	1,105,390,672	-1.83	507,626,015	-54.92	Hashin
D	[90, 0, 90, 0]s	1,126,000,000	1,105,390,672	-1.83	507,626,015	-54.92	LarC02
D	[-88.5, 1.5, -88.5, 1.5]s	1,140,000,000	984,251,969	-13.66	504,198,124	-55.77	Tsai-Hill
D	[-88.5, 1.5, -88.5, 1.5]s	1,140,000,000	984,251,969	-13.66	502,037,062	-55.96	Hoffman
D	[-88.5, 1.5, -88.5, 1.5]s	1,140,000,000	984,251,969	-13.66	500,323,116	-56.11	Tsai-Wu
D	[-88.5, 1.5, -88.5, 1.5]s	1,140,000,000	984,251,969	-13.66	504,272,643	-55.77	Hashin
D	[-88.5, 1.5, -88.5, 1.5]s	1,140,000,000	1,105,390,672	-3.04	504,272,643	-55.77	LarC02
D	[-87, 3, -87, 3]s	1,074,000,000	772,259,237	-28.10	494,808,682	-53.93	Tsai-Hill
D	[-87, 3, -87, 3]s	1,074,000,000	760,902,483	-29.15	488,101,938	-54.55	Hoffman
D	[-87, 3, -87, 3]s	1,074,000,000	772,259,237	-28.10	486,611,550	-54.69	Tsai-Wu
D	[-87, 3, -87, 3]s	1,074,000,000	772,259,237	-28.10	494,808,682	-53.93	Hashin
D	[-87, 3, -87, 3]s	1,074,000,000	1,071,320,412	-0.25	494,808,682	-53.93	LarC02
D	[-85.5, 4.5, -85.5, 4.5]s	1,018,000,000	601,907,935	-40.87	479,606,728	-52.89	Tsai-Hill
D	[-85.5, 4.5, -85.5, 4.5]s	1,018,000,000	586,765,597	-42.36	466,789,395	-54.15	Hoffman

Panel	Configuración de Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo Fallo Final en literatura [110] (Pa)	Esfuerzo Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Final	Esfuerzo Fallo Inicial en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Inicial	Teoría
D	[-85.5, 4.5, -85.5, 4.5]s	1,018,000,000	598,122,350	-41.25	465,895,163	-54.23	Tsai-Wu
D	[-85.5, 4.5, -85.5, 4.5]s	1,018,000,000	601,907,935	-40.87	479,606,728	-52.89	Hashin
D	[-85.5, 4.5, -85.5, 4.5]s	1,018,000,000	711,689,885	-30.09	479,606,728	-52.89	LarC02
D	[-84, 6, -84, 6]s	861,000,000	480,769,231	-44.16	461,274,961	-46.43	Tsai-Hill
D	[-84, 6, -84, 6]s	861,000,000	465,626,893	-45.92	442,645,116	-48.59	Hoffman
D	[-84, 6, -84, 6]s	861,000,000	473,198,062	-45.04	441,899,922	-48.68	Tsai-Wu
D	[-84, 6, -84, 6]s	861,000,000	488,340,400	-43.28	461,274,961	-46.43	Hashin
D	[-84, 6, -84, 6]s	861,000,000	533,767,414	-38.01	461,274,961	-46.43	LarC02
D	[-82.5, 7.5, -82.5, 7.5]s	713,000,000	448,894,609	-37.04	440,782,132	-38.18	Tsai-Hill
D	[-82.5, 7.5, -82.5, 7.5]s	713,000,000	423,909,752	-40.55	416,935,930	-41.52	Hoffman
D	[-82.5, 7.5, -82.5, 7.5]s	713,000,000	423,909,752	-40.55	416,935,930	-41.52	Tsai-Wu
D	[-82.5, 7.5, -82.5, 7.5]s	713,000,000	448,894,609	-37.04	440,782,132	-38.18	Hashin
D	[-82.5, 7.5, -82.5, 7.5]s	713,000,000	448,894,609	-37.04	440,782,132	-38.18	LarC02
D	[-75, 15, -75, 15]s	394,000,000	346,910,963	-11.95	341,671,356	-13.28	Tsai-Hill
D	[-75, 15, -75, 15]s	394,000,000	318,064,809	-19.27	312,236,201	-20.75	Hoffman
D	[-75, 15, -75, 15]s	394,000,000	317,231,981	-19.48	313,353,992	-20.47	Tsai-Wu
D	[-75, 15, -75, 15]s	394,000,000	346,910,963	-11.95	341,671,356	-13.28	Hashin
D	[-75, 15, -75, 15]s	394,000,000	346,910,963	-11.95	341,671,356	-13.28	LarC02
D	[-67.5, 22.5, -67.5, 22.5]s	288,000,000	279,906,118	-2.81	279,906,118	-2.81	Tsai-Hill
D	[-67.5, 22.5, -67.5, 22.5]s	288,000,000	256,965,475	-10.78	256,965,475	-10.78	Hoffman
D	[-67.5, 22.5, -67.5, 22.5]s	288,000,000	256,700,485	-10.87	256,700,485	-10.87	Tsai-Wu
D	[-67.5, 22.5, -67.5, 22.5]s	288,000,000	279,943,973	-2.80	279,943,973	-2.80	Hashin
D	[-67.5, 22.5, -67.5, 22.5]s	288,000,000	279,981,829	-2.78	279,981,829	-2.78	LarC02

7.3.3. Fallo Final e Inicial de laminado: Ataabadi

El Fallo Inicial “Ataabadi” se refiere a los datos de literatura por P. B. Ataabadi, D. Karagiozova, M. H. Shaterzadeh, y M. Alves, [143], en el cual muestran datos de pruebas a distintas configuraciones de laminados compuesto con el fin de probar un método de caracterización de materiales con especímenes cilíndricos. Dos configuraciones de laminados son probadas y el reporte de literatura muestra el material de lámina unidireccional completamente caracterizado con los datos de elasticidad y resistencia.

Para generar la comparativa de resistencia mencionada en el reporte y la predicha por medio del análisis en la herramienta de análisis creada, las propiedades de material se muestran en la Tabla 7-50 y Tabla 7-48.

Tabla 7-47 Propiedades de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Ataabadi [143] para laminados de 8 capas.

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lámina	0.0002737	m
Ancho de lámina	0.0254*	m
Largo de lámina	0.2286*	m
Área inferior (dirección 1)	6.95198E-06	m ²
Área lateral (dirección 2)	6.25678E-05	m ²
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	8	-
Grosor de laminado	0.0021896	m
Ancho de laminado	0.0254	m
Largo de laminado	0.2286	m
Área inferior laminado	5.56158E-05	m ²
Área lateral laminado	1.36998E-07	m ²
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	1.35E+11	Pa
E2	10,000,000,000	Pa
G12	5,000,000,000	Pa
ν_{12}	0.3	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	1,500,000,000	Pa
Y	50,000,000	Pa
S (cortante)	70,000,000	Pa
X' (compresión)	1,200,000,000	Pa
Y' (compresión)	250,000,000	Pa

*Valor asumido para permitir su procesado en la herramienta generada.

Tabla 7-48 Dimensiones de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Ataabadi [143] para laminados de 11 capas.

Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	11	-
Grosor de laminado	0.002349999	m
Ancho de laminado	0.0254	m
Largo de laminado	0.2286	m
Área inferior laminado	5.969E-05	m ²
Área lateral laminado	1.14768E-07	m ²

Los datos de resistencia obtenidos teóricamente por medio de criterios de resistencia Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin y LarC02 comparados se muestran resumidos en la Tabla 7-49. El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último en literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3, siguiendo los lineamientos mencionados de subestimación/sobreestimación de valores de resistencia acorde al signo de la diferencia porcentual.

Tabla 7-49 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de laminado Ataabadi [143].

Configuración de Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo Fallo Final en literatura [143] (Pa)	Esfuerzo Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Final	Esfuerzo Fallo Inicial en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Inicial	Teoría
[0/90/90/0]s	806,300,000	750,146,002	-6.88	366,370,444	-54.56	Tsai-Hill
[0/90/90/0]s	806,300,000	750,146,002	-6.88	365,651,224	-54.65	Hoffman
[0/90/90/0]s	806,300,000	750,146,002	-6.88	364,428,551	-54.80	Tsai-Wu
[0/90/90/0]s	806,300,000	750,146,002	-6.88	366,442,366	-54.55	Hashin
[0/90/90/0]s	806,300,000	750,146,002	-6.88	366,442,366	-54.55	LaRC02
[±45/0/±45/0]s	548,170,000	439,622,956	-19.80	405,421,144	-26.04	Tsai-Hill
[±45/0/±45/0]s	548,170,000	439,622,956	-19.80	374,148,989	-31.75	Hoffman
[±45/0/±45/0]s	548,170,000	439,622,956	-19.80	376,382,716	-31.34	Tsai-Wu
[±45/0/±45/0]s	548,170,000	439,622,956	-19.80	406,538,007	-25.84	Hashin
[±45/0/±45/0]s	548,170,000	439,622,956	-19.80	406,538,007	-25.84	LaRC02

7.3.4. Fallo Final e Inicial de laminado: Martínez

El Fallo Inicial Martínez se refiere a los datos de literatura por J. L. Martínez Vicente*, M. C. Serna Moreno, M. A. Caminero Torija y J. J. López Cela [144], en el cual muestran datos de pruebas a distintas configuraciones de laminados compuesto unidireccional de un laminado compuesto de fibra unidireccional, utilizando un material de fibra de carbono Hexcel M21-IMA caracterizado en sus módulos elásticos en lámina simple. Debido a la falta del valor de módulos elásticos, la relación de Poisson y módulo elástico transversal E22 se obtienen del reporte por Montemurro [145] quien utiliza el mismo sistema compuesto unidireccional.

Para generar la comparativa de resistencia mencionada en literatura y la predicha por medio del análisis en la herramienta de análisis creada, las propiedades de material se resumen en la Tabla 7-50 y Tabla 7-51.

Tabla 7-50 Propiedades de material de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Martínez [144] para laminados de 2 capas.

Medidas de lámina:	Valor	Unidad
Grosor de lámina	0.0002737*	m
Ancho de lámina	0.0254*	m
Largo de lámina	0.2286*	m
Área inferior (dirección 1)	6.95198E-06	m ²
Área lateral (dirección 2)	6.25678E-05	m ²
Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	2	-
Grosor de laminado	0.0005474	m
Ancho de laminado	0.0254	m
Largo de laminado	0.2286	m
Área inferior laminado	1.3904E-05	m ²
Área lateral laminado	0.000125136	m ²
Módulos elásticos de lámina:	Valor	Unidad
E1	1.72E+11	Pa
E2	8,659,000,000	Pa
G12	5,150,000,000	Pa
v12	0.3	-
Resistencia última de lámina:	Valor	Unidad
X	2,218,950,000	Pa
Y	48,500,000**	Pa
S (cortante)	89,650,000	Pa
X' (compresión)	2,218,950,000	Pa
Y' (compresión)	48,500,000**	Pa

*Valor asumido para permitir su procesado en la herramienta generada.

**Valor asumido debido a falta de información.

Tabla 7-51 Dimensiones de material utilizadas para la comparativa de resultados de resistencia al Fallo Inicial Martínez [144] para laminados de 8 capas.

Medidas de laminado:	Valor	Unidad
Número de láminas	8	-
Grosor de laminado	0.0021896	m
Ancho de laminado	0.0254	m
Largo de laminado	0.2286	m
Área inferior laminado	5.56158E-05	m ²
Área lateral laminado	0.000500543	m ²

Los datos de resistencia obtenidos teóricamente por medio de criterios de resistencia Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin y LarC02 comparados se muestran resumidos en la Tabla 7-52. El error porcentual entre el valor reportado de valor de esfuerzo último en literatura y el valor calculado en herramienta se calculó por medio de la Ecuación 7.3, siguiendo los lineamientos mencionados de subestimación/sobreestimación de valores de resistencia acorde al signo de la diferencia porcentual.

Tabla 7-52 Valores de error porcentual de resistencia obtenidos por teorías de resistencia y programa HLAMD al valor reportado en literatura por configuración de laminado Martínez [144].

Configuración de Dirección Laminar (grados)	Esfuerzo Fallo Final en literatura [144] (Pa)	Esfuerzo Fallo Final en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Final	Esfuerzo Fallo Inicial en HLAMD (Pa)	Error % Literatura vs HLAMD Fallo Inicial	Teoría
[0]	2,219,000,000	2,218,972,148	0	1,500,004,315	0	Tsai-Hill
[0]	2,219,000,000	2,218,972,148	0	1,500,004,315	0	Hoffman
[0]	2,219,000,000	2,218,972,148	0	1,500,004,315	0	Tsai-Wu
[0]	2,219,000,000	2,218,972,148	0	1,500,004,315	0	Hashin
[0]	2,219,000,000	2,218,972,148	0	1,500,004,315	0	LaRC02
[90]8	52,850,000	50,003,739	-5.38	50,003,739	-5.38	Tsai-Hill
[90]8	52,850,000	50,003,739	-5.38	50,003,739	-5.38	Hoffman
[90]8	52,850,000	50,003,739	-5.38	50,003,739	-5.38	Tsai-Wu
[90]8	52,850,000	50,003,739	-5.38	50,003,739	-5.38	Hashin
[90]8	52,850,000	50,003,739	-5.38	50,003,739	-5.38	LaRC02
[±45]8	207,910,000	137,263,053	-33.98	137,263,053	-33.98	Tsai-Hill
[±45]8	207,910,000	130,142,779	-37.40	130,142,779	-37.40	Hoffman
[±45]8	207,910,000	130,576,311	-37.20	130,576,311	-37.20	Tsai-Wu
[±45]8	207,910,000	137,586,701	-33.82	137,586,701	-33.82	Hashin
[±45]8	207,910,000	137,586,701	-33.82	137,586,701	-33.82	LaRC02
[45]8	89,650,000	81,496,566	-9.09	81,496,566	-9.09	Tsai-Hill
[45]8	89,650,000	75,428,151	-15.86	75,428,151	-15.86	Hoffman
[45]8	89,650,000	75,967,566	-15.26	75,967,566	-15.26	Tsai-Wu
[45]8	89,650,000	81,496,566	-9.09	81,496,566	-9.09	Hashin
[45]8	89,650,000	81,496,566	-9.09	81,496,566	-9.09	LaRC02

7.4. Comparativa de resultados Fallo Inicial – Fallo Final entre programas

De los resultados de fallo de material teórico se realiza una comparativa con los resultados obtenidos por software de análisis comercial (“SOFTW COM”), datos experimentales, y datos obtenidos de herramienta de análisis creada (“HDLAM”). Se obtienen los resultados mostrados en las Tablas 7-53 a 7-60.

Tabla 7-53 Comparativa Fallo Inicial a Fallo Final CT SUN [128] [0/90/45/-45]s

TEORÍA	FALLO	ARTÍCULO	SOFTW COM (De FS @ 10000 N)	HLAMD* (DEGRADA)	DIF % SOFTW COM - HLAMD	DIF % SOFTW COM - ART	DIF % HLAMD- ART
TSAI WU	FALLO INICIAL	N/A	8431	8486.66	-1%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	16538.48	19075.0*	14900	28%	15%	-10%
TSAI HILL	FALLO INICIAL	N/A	8454	8973.33	-6%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	16538.48	17715.0*	14900	19%	7%	-10%
HOFFMAN	FALLO INICIAL	N/A	8457	8859.99	-5%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	16538.48	16285.0*	14900	9%	-2%	-10%
HASHIN	FALLO INICIAL	N/A	8453	9063.33	-7%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	16538.48	22870.0*	14900	53%	38%	-10%
LARC02	FALLO INICIAL	N/A	N/A	9100	N/A	N/A	N/A
	FALLO FINAL	16538.48	N/A	14900	N/A	N/A	-10%

*Valores calculados a resolución de paso=[100N]

Tabla 7-54 Comparativa Fallo Inicial a Fallo Final CT SUN [128] [7.5/-82.5/52.5/-37.5]s

TEORÍA	FALLO	ARTÍCULO	SOFTW COM (De FS @ 10000 N)	HLAMD* (DEGRADA)	DIF % SOFTW COM - HLAMD	DIF % SOFTW COM - ART	DIF % HLAMD- ART
TSAI WU	FALLO INICIAL	N/A	8350	8700	-4%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12624	18739.0*	13900	35%	48%	10%
TSAI HILL	FALLO INICIAL	N/A	8526	9200	-7%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12624	17381.0*	13500	29%	38%	7%
HOFFMAN	FALLO INICIAL	N/A	8522	9000	-5%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12624	16006.0*	14000	14%	27%	11%
HASHIN	FALLO INICIAL	N/A	8526	9200	-7%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12624	22781.0*	13500	69%	80%	7%
LARC02	FALLO INICIAL	N/A	N/A	9200	N/A	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12624	N/A	18000	N/A	N/A	43%

Tabla 7-55 Comparativa Falo Inicial a Falo Final CT SUN [128] [15/-75/60/-30]s

TEORÍA	FALLO	ARTÍCULO	SOFTW COM (De FS @ 10000 N)	HLAMD* (DEGRADA)	DIF % SOFTW COM - HLAMD	DIF % SOFTW COM - ART	DIF % HLAM D-ART
TSAI WU	FALLO INICIAL	N/A	8429	9100	-7%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	17790.0*	21700	34%	60%	20%
TSAI HILL	FALLO INICIAL	N/A	8524	9600	-11%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	16447.0*	21900	34%	48%	11%
HOFFMAN	FALLO INICIAL	N/A	8514	9400	-9%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	15225.0*	20900	4%	37%	32%
HASHIN	FALLO INICIAL	N/A	8525	9600	-11%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	21752.0*	22100	77%	96%	11%
LARC02	FALLO INICIAL	N/A	N/A	9600	N/A	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	N/A	25100	N/A	N/A	88%

Tabla 7-56 Comparativa Falo Inicial a Falo Final CT SUN [128] [22.5/-67.5/67.5/-22.5]s

TEORÍA	FALLO	ARTÍCULO	SOFTW COM (De FS @ 10000 N)	HLAMD* (DEGRADA)	DIF % SOFTW COM - HLAMD	DIF % SOFTW COM - ART	DIF % HLAM D-ART
TSAI WU	FALLO INICIAL	N/A	8429	9100	-7%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	17790.0*	13300	34%	60%	20%
TSAI HILL	FALLO INICIAL	N/A	8524	9600	-11%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	16447.0*	12300	34%	48%	11%
HOFFMAN	FALLO INICIAL	N/A	8514	9400	-9%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	15225.0*	14700	4%	37%	32%
HASHIN	FALLO INICIAL	N/A	8525	9600	-11%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	21752.0*	12300	77%	96%	11%
LARC02	FALLO INICIAL	N/A	N/A	9600	N/A	N/A	N/A
	FALLO FINAL	11098.3	N/A	20900	N/A	N/A	88%

*Valores calculados a resolución de paso=[100N]

Tabla 7-57 Comparativa Falo Inicial a Falo Final CT SUN [128] [67.5/-22.5/-67.5/22.5]s

TEORÍA	FALLO	ARTÍCULO	SOFTW COM (De FS @ 10000 N)	HLAMD* (DEGRADA)	DIF % SOFT W COM - HLAMD	DIF % SOFTW COM - ART	DIF % HLAM D-ART
TSAI WU	FALLO INICIAL	N/A	8323	9800	-15%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12406.08	16668.0*	12700	31%	34%	2%
TSAI HILL	FALLO INICIAL	N/A	8338	10200	-18%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12406.08	15417.0*	11200	38%	24%	-10%
HOFFMAN	FALLO INICIAL	N/A	8310	10000	-17%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12406.08	14387.0*	14600	-1%	16%	18%
HASHIN	FALLO INICIAL	N/A	8337	10300	-19%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12406.08	18660.0*	12400	50%	50%	0%
LARC02	FALLO INICIAL	N/A	N/A	10300	N/A	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12406.08	N/A	20500	N/A	N/A	65%

Tabla 7-58 Comparativa Falo Inicial a Falo Final CT SUN [128] [75/-15/-60/30]s

TEORÍA	FALLO	ARTÍCULO	SOFTW COM (De FS @ 10000 N)	HLAMD * (DEGRAD A)	DIF % SOFTW COM - HLAMD	DIF % SOFTW COM - ART	DIF % HLAM D-ART
TSAI WU	FALLO INICIAL	N/A	8272	9100	-9%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12713.01	18022.0*	13300	36%	42%	5%
TSAI HILL	FALLO INICIAL	N/A	8301	9600	-14%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12713.01	16679.0*	12300	36%	31%	-3%
HOFFMAN	FALLO INICIAL	N/A	8280	9400	-12%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12713.01	15434.0*	14700	5%	21%	16%
HASHIN	FALLO INICIAL	N/A	8302	9600	-14%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12713.01	22384.0*	12300	82%	76%	-3%
LARC02	FALLO INICIAL	N/A	N/A	9600	N/A	N/A	N/A
	FALLO FINAL	12713.01	N/A	20900	N/A	N/A	64%

*Valores calculados a resolución de paso=[100N]

Tabla 7-59 Comparativa Falo Inicial a Falo Final CT SUN [128] [82.5/-7.5/-52.5/37.5]s

TEORÍA	FALLO	ARTÍCULO	SOFTW COM (De FS @ 10000 N)	HLAMD* (DEGRADA)	DIF % SOFTW COM - HLAMD	DIF % SOFTW COM - ART	DIF % HLAM D-ART
TSAI WU	FALLO INICIAL	N/A	8180	8700	-6%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	14243.2	18935.0*	13900	36%	33%	-2%
TSAI HILL	FALLO INICIAL	N/A	8137	9200	-12%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	14243.2	17571.0*	13500	30%	23%	-5%
HOFFMAN	FALLO INICIAL	N/A	8136	9000	-10%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	14243.2	16177.0*	14000	16%	14%	-2%
HASHIN	FALLO INICIAL	N/A	8137	9200	-12%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	14243.2	22876.0*	13500	69%	61%	-5%
LARC02	FALLO INICIAL	N/A	N/A	9200	N/A	N/A	N/A
	FALLO FINAL	14243.2	N/A	18000	N/A	N/A	26%

*Valores calculados a resolución de paso=[100N]

Tabla 7-60 Comparativa Falo Inicial a Falo Final CT SUN [128] [90/0/-45/45]s

TEORÍA	FALLO	ARTÍCULO	SOFTW COM (De FS @ 10000 N)	HLAMD* (DEGRADA)	DIF % SOFTW COM - HLAMD	DIF % SOFTW COM - ART	DIF % HLAM D-ART
TSAI WU	FALLO INICIAL	N/A	8120	8500	-4%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	17116.75	19257.0*	14900	29%	13%	-13%
TSAI HILL	FALLO INICIAL	N/A	8091	9000	-10%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	17116.75	17895.0*	14900	20%	5%	-13%
HOFFMAN	FALLO INICIAL	N/A	8096	8900	-9%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	17116.75	16447.0*	14900	10%	-4%	-13%
HASHIN	FALLO INICIAL	N/A	8091	9100	-11%	N/A	N/A
	FALLO FINAL	17116.75	22949.0*	14900	54%	34%	-13%
LARC02	FALLO INICIAL	N/A	N/A	9100	N/A	N/A	N/A
	FALLO FINAL	17116.75	N/A	14900	N/A	N/A	-13%

*Valores calculados a resolución de paso=[100N]

7.5. Conclusiones y discusiones

Varias conclusiones emergen de este trabajo de investigación, dando respuesta a la hipótesis planteada la cual indica si “se puede predecir el comportamiento de esfuerzos de manera intra e interlaminar, con una variación del 15% basándose en el comportamiento micro y macromecánico de los materiales compuestos usando distintas teorías de fallo”. Los resultados de este trabajo concluyen que, si se puede obtener valores menores al 15% de resistencia y elasticidad, para láminas e incluso laminados, siempre y cuando se cuente con la mayor cantidad de información posible en las propiedades mecánicas matriz-fibra, orientación de fibras y se seleccione una teoría adecuada.

Los resultados presentados indican que existen variaciones en el estudio de la lámina simple, donde el error varía entre el 0% y el 15.80%, en función de las teorías que se estén utilizando, cuando es comparado con los resultados de Pipes & Cole [137]. No obstante, al compararse con los resultados de Kawai [139], el error puede alcanzar valores de hasta 48%, en función de la teoría y orientación de fibras a utilizar. En este mismo sentido, si comparamos los resultados obtenidos con la lámina de Taniguchi [140], el error reportado es menor al 7.3 %.

Basado en esto, se puede concluir que, si es posible obtener resultados, con un 15% de error comparado con la literatura, pero, debe de tenerse en cuenta que varias suposiciones se deben de hacer debido a la carencia de información en la literatura cuando reportan sus resultados y protocolos.

De los resultados, el menor porcentaje de error se encuentra cuando la lámina se encuentra a 0 grados para todas las teorías de fallo, mientras que el porcentaje mayor se encuentra a los 15 y 60 grados de orientación, donde se puede presentar fallos por transición en fibra y matriz.

En cuanto a laminados, los errores oscilaron entre 0%, y el 88%. Dicha variación varía en función de la configuración y la teoría que se utiliza. los resultados aquí indican que la hipótesis se cumple parcialmente, teniendo en cuenta el número y dirección de láminas y la información obtenida por la fuente bibliográfica; Cabe destacar que, si eliminamos la teoría Larc02 en comparación de trabajo de Sun y Zhou [128], el error se reduce a un valor menor de 40% en la comparación de los fallos finales del material y concuerda con un error consistente al compararlo con las diversas teorías de falla.

Si se comparan los resultados obtenidos con el software de uso comercial, existe un porcentaje de variación, siendo los resultados obtenidos por la herramienta de análisis creada más cercanos al fallo final reportado por las diversas literaturas en esta tesis, en la mayoría de los casos. lo cual se puede explicar al uso de las teorías de fallo estudiadas y de si en el análisis se considera fallo o degradación laminar como se muestra de la Tabla 7-57 a la Tabla 7-60. Cabe destacar que la herramienta presentada aquí no se basa en análisis por elemento finito, sino en la predicción de fallo por diversas teorías, utilizando como referente el fallo final en probetas.

En este trabajó también se abordó el fallo inicial de una lámina de un laminado. El fallo inicial representa la degradación de la primera lámina, iniciando con la perdida de

integridad de la lámina-laminado. Para el estudio de láminas simples se tuvo un error general del 4.9% de todos los resultados aquí, considerando sobre- y subestimaciones, es decir, cuando falló después de lo reportado por la literatura, y cuando falló antes de lo reportado por la literatura. De igual forma se tiene un promedio general absoluto de error del 8.3%, destacando que el fallo inicial de una lámina debe corresponder con el fallo final.

En cuanto a laminados se obtiene un promedio general de todas las pruebas del -35.8%, el valor negativo indica que el valor inicial ocurre por debajo del fallo final reportado. De manera global, podemos inferir que un fallo inicial de una lámina en un laminado se dará alrededor del 35.8% con una desviación estándar en porcentaje del 16.61% del valor final obtenido experimentalmente, en función del número y orientación de los laminados, así como la teoría de falla que se emplea.

Este trabajo sugiere que es muy favorable trabajar con las teorías Tsai-Wu y Hashin porque dan resultados más conservadores sin la necesidad de cálculos exhaustivos de ajuste de curva y parámetros de arreglo. Sin embargo, no se desalienta el uso de teoría más avanzadas como criterios de Puck, y las LaRC siempre y cuando se realice el pertinente ajuste de curva de fallo con el sistema material utilizado.

Bibliografía

- [1] “787 Dreamliner by design - Dreamliner Advantages Overview - Webpage,” 2022. <https://www.boeing.com/commercial/787/by-design/#/dreamliner-advantages-overview>.
- [2] J. Osborne, “The UK composites industry – turning ideas into investments,” *Reinf. Plast.*, vol. 57, no. 3, pp. 43–46, 2013, doi: 10.1016/s0034-3617(13)70095-x.
- [3] J. Hale, “Boeing 787 From Ground Up,” *Boeing Comer. Aeromagazine*, p. 9, 2012, [Online]. Available: http://www.boeing.com/commercial/aeromagazine/articles/qtr_4_06/article_04_1.html.
- [4] The Boeing Co., “AERO - Boeing 787 from the Ground Up - Webpage,” 2012. https://www.boeing.com/commercial/aeromagazine/articles/qtr_4_06/article_04_1.html (accessed Feb. 20, 2004).
- [5] The Boeing Co., “State of the art 777X Composite Wing Center completes prototype parts - Webpage,” 2016. <https://www.boeing.com/company/about-bca/washington/composite-wing-center-12-06-16.page> (accessed Feb. 20, 2004).
- [6] A. K. Kaw, *Mechanics of Composite Materials*. CRC Press LLC, 2006.
- [7] H. G. Wells, *A short history of the world*, 1st ed. New York: The Macmillan Company, 1922.
- [8] E. P. Popov, *Engineering Mechanics of Solids*, Reprint. Prentice-Hall, 1976.
- [9] J. M. Gere and B. J. Goodno, *Mechanics of Materials*, 7th ed. Toronto, ON: Cengage Learning, 2009.
- [10] R. Hooke, “De Potentia Restitutiva, or of Spring,” 1678.
- [11] M. A. Augustus Edward Hough Love, *A TREATISE ON THE MATHEMATICAL THEORY OF ELASTICITY*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1893.
- [12] T. Young, *A course of lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts*. London: J. & H. Cox, BROTHERS, 1845.
- [13] C. A. Truesdell, “Cauchy and the modern mechanics of continua,” *Rev. Hist. Sci. Paris.*, vol. 45, no. 1, pp. 5–24, 1992, doi: 10.3406/rhs.1992.4229.
- [14] L. Cauchy, *Exercices de mathématiques. Année 2*. De Bure Freres, Libraires Du Roi Et de la Bibliotheque Du Roi, 1827.
- [15] E. Hodgkinson, *Experimental Researches on the Strength and other Properties of Cast Iron*. London, 1842.
- [16] J.-V. Poncelet, *Introduction à la mécanique industrielle , physique ou expérimentale*, 3rd ed. Paris: Gauthier-Villars, 1870.
- [17] Julius Weisbach, “Lehrbuch der Ingenieur un Maschinen-Mechanik,” 2nd ed., Braunschweig: Friedrich Vieweg und Sohn, 1850, p. 241.
- [18] S. P. Timoshenko, “HISTORY OF STRENGTH OF MATERIALS With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures,” 1983.
- [19] G. Green, *Mathematical Papers of the late George Green*. MACMILLANM AND CO, 1871.
- [20] S. N. Patnaik, S. S. Pai, and D. A. Hopkins, “Compatibility condition in theory of solid mechanics (elasticity, structures, and design optimization),” *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 14, no. 4, pp. 431–457, 2007, doi: 10.1007/s11831-007-9011-9.
- [21] D. Kirkaldy, *Results of An Experimental Inquiry into the Tensile Strength and other*

- Properties of various kinds of Wrought-Iron and Steel*, 2nd ed. Glasgow, 1862.
- [22] B. Cotterell, “The past, present, and future of fracture mechanics,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 69, no. 5, pp. 533–553, 2002, doi: 10.1016/S0013-7944(01)00101-1.
- [23] B. Hopkinson, “Lecture to the Sheffield Society of Engineers and Metallurgists,” in *The Scientific Papers of Bertram Hopkinson*, Cambridge University Press, 1910, pp. 64–78.
- [24] C. E. Inglis, “Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners,” in *Spring Meetings of the Fifty-fourth Session of the Institution of Naval Architects*, 1913, pp. 219–241.
- [25] A. A. Griffith, “VI. The phenomena of rupture and flow in solids,” *Trans. R. Soc. London Ser. A Contain. Pap. a Math. or Phys. Character*, vol. A, 1921, doi: <http://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>.
- [26] E. Orowan, “Zur Kristallplastizität. I,” *Zeitschrift fuer Phys.*, vol. 89, pp. 605–613, 1934, doi: <https://doi.org/10.1007/BF01341478>.
- [27] F. R. N. Nabarro and A. S. Argon, *Egon Orowan - A Biographical Memoir*. National Academies Press, 1996.
- [28] S. Y. Yarema, “On the contribution of G. R. Irwin to fracture mechanics,” *Mater. Sci.*, vol. 31, no. 5, pp. 617–623, 1996, doi: 10.1007/bf00558797.
- [29] C. E. Neal-Sturgess, “A Direct Derivation of the Griffith-Irwin Relationship using a Crack tip Unloading Stress Wave Model,” pp. 1–9, 2008, [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0810.2218>.
- [30] R. S. Rivlin and A. G. Thomas, “Rupture of rubber. I. Characteristic energy for tearing,” *J. Polym. Sci.*, vol. 10, no. 3, pp. 291–318, 1953, doi: 10.1002/pol.1953.120100303.
- [31] W. Zhang, “Technical Problem Identification for the Failures of the Liberty Ships,” *Challenges*, vol. 7, no. 2, p. 20, 2016, doi: 10.3390/challe7020020.
- [32] Ministry of Transport & Civil Aviation, “Civil Aircraft Accident - Report of the Court of Inquiry into the Accidents to Comet G-ALYP on 10th January, 1954 and Comet G-ALYY on 8th April, 1954,” London, 1954.
- [33] A. T. Zehnder, “Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics: Preface,” in *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, vol. 58 LNACM, P. Trigueros and G. Zavarise, Eds. 2011.
- [34] F. M. Burdekin and D. E. W. Stone, “The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials,” *J. Strain Anal. Eng. Des.*, vol. 1, no. 2, pp. 145–153, 1966, doi: 10.1243/03093247V012145.
- [35] A. S. Tetelman, “The Mechanism of Hydrogen Embrittlement in Steel,” 1967.
- [36] J. Gilman, *Electronic Basis of the Strength of Materials*, 1st ed. Cambridge University Press, 2003.
- [37] B. D. Annin and N. I. Ostrosablin, “Anisotropy of elastic properties of materials,” *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 49, no. 6, pp. 998–1014, 2008, doi: 10.1007/s10808-008-0124-1.
- [38] S. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1951.
- [39] W. Voigt, “Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper [On the relationship between the two elastic constants of an isotropic body],” *Ann. Phys.*, vol. 274, no. 12, pp. 573–587, 1889.
- [40] M. Born and H. Kuang, “Elasticity and Stability,” in *Dynamical Theory of Crystal*

- Lattices*, 1st ed., London: Oxford University Press, 1954, p. 166.
- [41] S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach, Science Publishers, 1968.
- [42] E. E. Thybring and M. Fredriksson, “Wood modification as a tool to understand moisture in wood,” *Forests*, vol. 12, no. 3, pp. 1–18, 2021, doi: 10.3390/f12030372.
- [43] J. C. Halpin, *Primer on composite materials*, 2nd ed. Taylor & Francis, 1992.
- [44] W.J.M. Rankine, “On the Causes of the Unexpected Breakage of the Journals of Railway Axles and on the Means of Preventing such Accidents by Observing the Law of Continuity in Their Construction,” *Minutes Proc. Inst. Civ. Eng.*, pp. 178–180, 1842.
- [45] G. R. Irwin, “Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys,” 1956.
- [46] R. G. Budynas and J. K. Nisbett, *Shigley’s Mechanical Engineering Design*, 9th ed. McGraw-Hill, 2009.
- [47] L. Lin and A. S. Argon, “Structure and plastic deformation of polyethylene,” *J. Mater. Sci.*, vol. 29, no. 2, pp. 294–323, 1994, doi: 10.1007/BF01162485.
- [48] F. Meschke, A. Kolleck, and G. A. Schneider, “R-curve behaviour of BaTiO₃ due to stress-induced ferroelastic domain switching,” *J. Eur. Ceram. Soc.*, vol. 17, no. 9, pp. 1143–1149, 1997.
- [49] J. Gil Sevillano and E. Aernoudt, “Low energy dislocation structures in highly deformed materials,” *Mater. Sci. Eng.*, vol. 86, no. C, pp. 35–51, 1987, doi: 10.1016/0025-5416(87)90441-1.
- [50] G. R. Irwin, “Fracture,” in *Elasticity and Plasticity / Elastizitaet und Plastizitaet*, vol. 3, Springer Berlin Heidelberg, 1958, pp. 551–590.
- [51] H. P. Rossmanith, *Fracture Research in Retrospect*. A. A. Balkena, 1997.
- [52] G. Slayter, “Method and apparatus for making glass wool,” US2133235, 1938.
- [53] R. Bacon, “FILAMENTARY GRAPHITE AND METHOD FOR PRODUCING THE SAME,” US2957756, 1960.
- [54] A. Shindo, “PROCESS FOR THE PREPARATION OF CARBON FIBERS,” US3529934, 1968.
- [55] L. K. Stephanie, “P-benzamide polymers and process for preparing same CA839851,” CA839851, 1970.
- [56] P. Schlack, “Manufacture of Amines of High Molecular Weight, Which are Rich in Nitrogen,” US2136928, 1938.
- [57] LE CARBONE, “BREVET D’INVENTION Pour nouveau genre de verre ou céramique doublé de celluloid et ses diverses applications,” FR321651A, 1902.
- [58] Owens Corning, “PEOPLE & PRODUCTS,” *PEOPLE & PRODUCTS MAKING HISTORY Owens Corning Milestones*. .
- [59] M. W. Bowman, *De Havilland Mosquito*, 1st ed. Frome: Crowood Press, 1997.
- [60] C. H. Zweben, “Composites: Overview,” *Encyclopedia of Condensed Matter Physics*. 2005.
- [61] A. Curtis, “Aberfeldy Golf Course bridge Photo.” 2009.
- [62] W. Krenkel and P. Schanz, “Fiber ceramic structures based on liquid impregnation technique,” *Acta Astronaut.*, vol. 28, no. C, pp. 159–169, 1992, doi: 10.1016/0094-5765(92)90021-A.
- [63] K. U. Kainer, *Metal Matrix Composites Custom-made Materials for Automotive and Aerospace Engineering*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006.
- [64] T. Abe, “Composite Application Challenge in Primary Aircraft Structures - ICAS

- Workshop 2011,” 2011. [Online]. Available:
[https://www.icas.org/media/pdf/Workshops/2011/ICAS Workshop presentation 04 Abe.pdf](https://www.icas.org/media/pdf/Workshops/2011/ICAS%20Workshop%20presentation%2004%20Abe.pdf).
- [65] L. Mitsubishi Heavy Industries and S. A. J. Maesawa, “次への視点 特別顧問 前沢 淳一,” in 航空機ビジネス“ものづくり”35年次への視点（主としてBOE I N Gとの協業を通して）, 2013, p. 46, [Online]. Available:
<https://www.sjac.or.jp/common/pdf/info/news121.pdf>.
- [66] G. Slayter, “Transparent Composite Materials,” US2311613, 1943.
- [67] P. S. Nord and Ordman, “STRUCTURAL COCKPIT WINDOW AND METHOD OF MAKING SAME,” US6889938B1, 2005.
- [68] P. Davies, “Review of standard procedures for delamination resistance testing.,” in *Delamination Behaviour of Composites*, CRC Press LLC, 2008, p. 65.
- [69] D. Gay, S. V. Hoa, and S. W. Tsai, *Composite materials design and applications*. Florida: CRC Press LLC, 2003.
- [70] H. Huang and R. Talreja, “Effects of void geometry on elastic properties of unidirectional fiber reinforced composites,” *Compos. Sci. Technol.*, vol. 65, no. 13, pp. 1964–1981, 2005, doi: 10.1016/j.compscitech.2005.02.019.
- [71] M. Mehdikhani, L. Gorbatikh, I. Verpoest, and S. V. Lomov, “Voids in fiber-reinforced polymer composites: A review on their formation, characteristics, and effects on mechanical performance,” *J. Compos. Mater.*, vol. 53, no. 12, pp. 1579–1669, 2019, doi: 10.1177/0021998318772152.
- [72] J. R. Vinson and R. L. Sierakowski, *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1987.
- [73] R. von Mises, “Mechanilk der festen Koerper im plastisch-deformablen Zustand,” in *Nachrichten von der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen*, 1913, pp. 582–592.
- [74] R. M. Christensen, “Yield Functions/Failure Criteria for Isotropic Materials,” vol. 453, pp. 1473–1491, 1997.
- [75] R. Hill, “A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals,” *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.*, vol. 193, no. 1033, pp. 281–297, 1948, doi: 10.1098/rspa.1948.0045.
- [76] S. W. Tsai and V. D. Azzi, “Strength of laminated composite materials,” *AIAA J.*, vol. 4, no. 2, pp. 296–301, 1966, doi: 10.2514/3.3431.
- [77] O. Hoffman, “The brittle strength of orthotropic materials,” *J. Compos. Mater.*, vol. 1, pp. 200–206, 1967, doi: <https://doi.org/10.1177/002199836700100210>.
- [78] S. W. Tsai and E. M. Wu, “A General Theory of Strength for Anisotropic Materials,” *J. Compos. Mater.*, vol. 5, no. 1, pp. 58–80, 1971, doi: 10.1177/002199837100500106.
- [79] Z. Hashin, “Failure criteria for unidirectional fiber composites,” *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 47, no. 2, pp. 329–334, 1980, doi: 10.1115/1.3153664.
- [80] A. Puck and H. Schürmann, “Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models,” *Compos. Sci. Technol.*, no. 58, 1998.
- [81] C. G. Dávila, N. Jaunky, and S. Goswami, “Failure criteria for FRP laminates in plane stress,” *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf.*, pp. 1–11, 2003, doi: 10.2514/6.2003-1991.

- [82] C. G. Dávila, N. Jaunky, and S. Goswami, “Failure criteria for FRP laminates in plane stress,” *44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf.*, no. November, 2003, doi: 10.2514/6.2003-1991.
- [83] S. T. Pinho, C. G. Dávila, P. P. Camanho, L. Iannucci, and P. Robinson, “Failure Models and Criteria for FRP Under In-Plane or Three-Dimensional Stress States Including Shear Non-linearity,” *Nasa/Tm-2005-213530*, p. 68, 2005.
- [84] The Boeing Co., “787 Dreamliner by Design - Webpage,” 2022. <https://www.boeing.com/commercial/787/by-design/#/advanced-composite-use>.
- [85] D. Hull, *An introduction to composite materials*, 1st ed. Cambridge University Press, 1981.
- [86] R. M. Jones, *Mechanics of composite materials*, 2nd ed. Taylor & Francis, 1999.
- [87] C. T. Herakovich, “Chapter 1: The what and the why of fibrous composites,” in *Mechanics of Fibrous Composites*, 1st ed., NY.: John Wiley & Sons, Inc., 1998, pp. 1–15.
- [88] The Japan Carbon Fiber Manufacturers Association, “JCMA Webpage - What is Carbon Fibers?,” 2022. <https://www.carbonfiber.gr.jp/english/material/what.html>.
- [89] W. D. Bascom and L. T. Drzal, “Surface Properties of Carbon Fibers and Their Adhesion To Organic Polymers.,” 1987.
- [90] T. Suzuki and H. Umehara, “Pitch-based carbon fiber microstructure and texture and compatibility with aluminum coated using chemical vapor deposition,” *Carbon N. Y.*, vol. 37, no. 1, pp. 47–59, 1999, doi: 10.1016/S0008-6223(98)00186-9.
- [91] L. Sá Vitorino and R. L. Oréface, “Layer-by-Layer technique employed to construct multitask interfaces in polymer composites,” *Polimeros*, vol. 27, no. 4, pp. 330–338, 2017, doi: 10.1590/0104-1428.15616.
- [92] Y. Xing and X. Ding, “UV Photo-Stabilization of Tetrabutyl Titanate for Aramid Fibers via Sol–Gel Surface Modificatio,” *J. Appl. Polym. Sci.*, vol. 103, pp. 3113–3119, 2007, doi: DOI 10.1002/app.25463.
- [93] C. Balagna *et al.*, “Antibacterial nanostructured composite coating on high performance Vectran™ fabric for aerospace structures,” *Surf. Coatings Technol.*, vol. 373, no. May, pp. 47–55, 2019, doi: 10.1016/j.surfcoat.2019.05.076.
- [94] G. Kister and B. Harris, “Tensile properties of heat-treated Nicalon and Hi-Nicalon fibres,” *Compos. - Part A Appl. Sci. Manuf.*, vol. 33, no. 3, pp. 435–438, 2002, doi: 10.1016/S1359-835X(01)00125-7.
- [95] C. T. Herakovich, “Boron Fiber to Carbon Fiber,” in *The Structural Integrity of Carbon Fiber Composites*, P. W. R. Beaumont and C. Soutis, Eds. Springer, 2017.
- [96] H. D. Alamdari, D. Dubé, and P. Tessier, “Behavior of boron in molten aluminum and its grain refinement mechanism,” *Metall. Mater. Trans. A Phys. Metall. Mater. Sci.*, vol. 44, no. 1, pp. 388–394, 2013, doi: 10.1007/s11661-012-1388-x.
- [97] H. W. Herring, “SELECTED MECHANICAL AND PHYSICAL PROPERTIES OF BORON FILAMENTS,” Washington, D. C., 1966.
- [98] G. K. Layden, “Fracture behaviour of boron filaments,” *J. Mater. Sci.*, vol. 8, no. 11, pp. 1581–1589, 1973, doi: 10.1007/BF00754893.
- [99] S. Borkar *et al.*, “Polytetrafluoroethylene nano/microfibers by jet blowing,” *Polymer (Guildf.)*, vol. 47, no. 25, pp. 8337–8343, 2006, doi: 10.1016/j.polymer.2006.09.069.
- [100] H. Wang, X. Qi, W. Zhang, Y. Dong, B. Fan, and Y. Zhang, “Tribological properties of PTFE/Kevlar fabric composites under heavy loading,” *Tribol. Int.*, vol. 151, no. May, p. 106507, 2020, doi: 10.1016/j.triboint.2020.106507.

- [101] H. Lengsfeld, W.-F. Felipe, K. Johannes, L. Javier, and A. Volker, *Composite Technology: Prepregs and Monolithic Part Fabrication Technologies*. Carl Hanser Verlag, 2016.
- [102] I. M. Daniel and O. Ishai, *Engineering mechanics of composite materials*, 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2006.
- [103] A. Reuss, “Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle.,” *ZAMM - J. Appl. Math. Mech. / Zeitschrift für Angew. Math. und Mech.*, vol. 9, no. 1, pp. 49–58, 1929, doi: 10.1002/zamm.19290090104.
- [104] J. C. Halpin, “EFFECTS OF ENVIRONMENTAL FACTORS ON COMPOSITE MATERIALS,” Ohio, 1969.
- [105] L. Liu, B. M. Zhang, D. F. Wang, and Z. J. Wu, “Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates,” *Compos. Struct.*, vol. 73, no. 3, pp. 303–309, 2006, doi: 10.1016/j.compstruct.2005.02.001.
- [106] FAA, “Aviation Maintenance Technician Handbook - Volume 1,” *Aviat. Maint. Tech. Handb. - Airframe*, vol. 1, pp. 9–21, 2018.
- [107] The MathWorks Inc., “MATLAB - Webpage - The Language of Technical Computing,” *MATLAB The Language of Technical Computing*, 2022. https://www.mathworks.com/help/matlab/index.html?s_tid=CRUX_lftnav.
- [108] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, 1st ed. McGraw-Hill, 1946.
- [109] R. C. Reuter, “Concise Property Transformation Relations for an Anisotropic Lamina,” *J. Compos. Mater.*, vol. 5, pp. 270–272, 1971, doi: 10.1177/002199837100500214.
- [110] C. T. Sun, B. J. Quinn, J. Tao, D. W. Oplinger, and W. J., “Comparative Evaluation of Failure Analysis Methods for Composite Laminates.,” *U.S. Dep. Transp. FAA*, no. May, p. 133, 1996, [Online]. Available: <http://trid.trb.org/view.aspx?id=523207>.
- [111] P. S. Shembekar and N. K. Naik, “Elastic analysis of woven fabric laminates: part I. Off-axis loading,” *J. Compos. Technol. Res.*, vol. 15, no. 1, pp. 23–33, 1993, doi: 10.1520/ctr10350j.
- [112] O. Zebdi, R. Boukhili, and F. Trochu, “An inverse approach based on laminate theory to calculate the mechanical properties of braided composites,” *J. Reinf. Plast. Compos.*, vol. 28, no. 23, pp. 2911–2930, 2009, doi: 10.1177/0731684408094063.
- [113] S. Ekşi and K. Genel, “Comparison of mechanical properties of unidirectional and woven carbon, glass and aramid fiber reinforced epoxy composites,” *Acta Phys. Pol. A*, vol. 132, no. 3, pp. 879–882, 2017, doi: 10.12693/APhysPolA.132.879.
- [114] E. Reissner and Y. Stavsky, “Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates,” *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 28, no. 3, pp. 402–408, 1961, doi: 10.1115/1.3641719.
- [115] R. L. Taylor, K. S. Pister, and S. B. Dong, “On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates,” *J. Aerosp. Sci.*, no. 4, 1962, doi: 10.2514/8.9668.
- [116] S. Tolson and N. Zabaras, “Finite element analysis of progressive failure in laminated composite plates,” *Comput. Struct.*, vol. 38, no. 3, pp. 361–376, 1991, doi: 10.1016/0045-7949(91)90113-Z.
- [117] FAA, “AC 20-107B Composite aircraft structure,” 2009. doi: 10.1061/9780784408506.ch09.
- [118] J. I. Múgica, C. S. Lopes, F. Naya, M. Herráez, V. Martínez, and C. González, “Multiscale modelling of thermoplastic woven fabric composites: From

- micromechanics to mesomechanics,” *Compos. Struct.*, vol. 228, no. August, p. 111340, 2019, doi: 10.1016/j.compstruct.2019.111340.
- [119] R. M. Christensen, *The Theory of Materials Failure*. Oxford University Press, 2013.
- [120] Y. Hashizume, M. Inomoto, N. L. Okamoto, H. Takebayashi, and H. Inui, “Micropillar compression deformation of single crystals of the intermetallic compound Γ -Fe₄Zn₉,” *Acta Mater.*, vol. 199, pp. 514–522, 2020, doi: 10.1016/j.actamat.2020.08.062.
- [121] G. R. Swanson and N. K. Arakere, “Effect of Crystal Orientation on Analysis of Single-Crystal , Nickel-Based Turbine Blade Superalloys,” 2000.
- [122] C. C. Chamis, “Failure Criteria for Is a Significant Number Pages Which Do,” 1969.
- [123] G. Z. Voyiadjis and P. I. Kattan, “Failure Theories of a Lamina.,” in *Mechanics of Composite Materials with MATLAB*, 2005, pp. 183–192.
- [124] S. Li, E. Sitnikova, Y. Liang, and A. S. Kaddour, “The Tsai-Wu failure criterion rationalised in the context of UD composites,” *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, vol. 102, pp. 207–217, 2017, doi: 10.1016/j.compositesa.2017.08.007.
- [125] Z. Hashin and A. Rotem, “A Fatigue Failure Criterion for Fiber Reinforced Materials,” *J. Compos. Mater.*, vol. 7, no. 4, pp. 448–464, 1973, doi: 10.1177/002199837300700404.
- [126] A. Puck and H. M. Deuschle, “Progress in the Puck Failure Theory for Fibre Reinforced Composites : Analytical solutions for 3D-stress.”
- [127] H. Matthias Deuschle and B. H. Kröplin, “Finite element implementation of Puck’s failure theory for fibre-reinforced composites under three-dimensional stress,” *J. Compos. Mater.*, vol. 46, no. 19–20, pp. 2485–2513, 2012, doi: 10.1177/0021998312451480.
- [128] C. T. Sun and S. G. Zhou, “Failure of Quasi-Isotropic Composite Laminates with Free Edges,” *J. Reinf. Plast. Compos.*, vol. 7, no. 6, pp. 515–557, 1988, doi: 10.1177/073168448800700602.
- [129] I. ASTM, “Oficial ASTM International website ‘About us.’”
https://www.astm.org/ABOUT/full_overview.html.
- [130] I. ASTM, “ASTM D3878 Standard Terminology for Composite Materials,” West Conshohocken PA. doi: 10.1520/D3878-20A.
- [131] I. ASTM, “ASTM D3410 / D3410M - 03 Standard Test Method for Compressive Properties of Polymer Matrix Composite Materials with Unsupported Gage Section by Shear Loading,” West Conshohocken, PA. doi: 10.1520/D3410_D3410M-03.
- [132] I. ASTM, “ASTM D7264 / D7264M - 07 Standard Test Method for Flexural Properties of Polymer Matrix Composite Materials,” West Conshohocken, PA, 2007.
- [133] ASTM INTERNATIONAL, “Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials,” 2014. doi: 10.1520/D3039.
- [134] D. Roylance, “Laminated composite plates - David Roylance Course Notes MIT,” 2000. https://web.mit.edu/course/3/3.11/www/module_list.html.
- [135] S. L. Coquill and D. F. Adams, “Mechanical Properties of Several Neat Polymer Matrix Materials and Unidirectional Carbon Fiber-Reinforced Composites,” 1989.
- [136] M. J. Shuart, “Failure of compression-loaded multidirectional composite laminates,” *AIAA J.*, vol. 27, no. 9, pp. 1274–1279, 1989, doi: 10.2514/3.10255.
- [137] R. B. Pipes and B. W. Cole, “On the Off-Axis Strength Test for Anisotropic Materials,” vol. 5, 1973.
- [138] T. Weller, “Analytical and Experimental Studies of Graphite-Epoxy and Boron-

- Epoxy Angle Ply Laminates in Shear,” 1977.
- [139] M. Kawai, S. Yajima, A. Hachinohe, and Y. Takano, *Off-axis fatigue behavior of unidirectional carbon fiber-reinforced composites at room and high temperatures*, vol. 35, no. 7. 2001.
- [140] N. Taniguchi, T. Nishiwaki, and H. Kawada, “Tensile strength of unidirectional CFRP laminate under high strain rate,” *Adv. Compos. Mater. Off. J. Japan Soc. Compos. Mater.*, vol. 16, no. 2, pp. 167–180, 2007, doi: 10.1163/156855107780918937.
- [141] I. Jauregui, “ANÁLISIS DE LA INICIACIÓN DE GRIETAS EN PERFILES ALARES DE MATERIAL COMPUESTO POR IMPACTOS DE BAJA ENERGÍA,” UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA, 2021.
- [142] V. G. Angel, “Análisis y Evaluación de Fibras Naturales en Materiales Compuestos de Matriz Polimérica aplicados a Álabes de Aerogeneradores de Baja Capacidad,” Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ingeniería Mexicali, 2019.
- [143] P. B. Ataabadi, D. Karagiozova, M. H. Shaterzadeh, and M. Alves, “Deriving unidirectional lamina properties from testing on cylindrical laminated specimens,” *Compos. Struct.*, vol. 245, no. February, p. 112382, 2020, doi: 10.1016/j.compstruct.2020.112382.
- [144] J. L. Martínez Vicente, M. C. Serna Moreno, M. A. Caminero Torija, and J. J. López Cela, “Multiaxial behavior of notched composite structures manufactured by different procedures,” *16th Eur. Conf. Compos. Mater. ECCM 2014*, no. June, pp. 22–26, 2014.
- [145] M. Montemurro, M. I. Izzi, J. El-Yagoubi, and D. Fanteria, “Least-weight composite plates with unconventional stacking sequences: Design, analysis and experiments,” *J. Compos. Mater.*, vol. 53, no. 16, pp. 2209–2227, 2019, doi: 10.1177/0021998318824783.
- [146] S. R. Swanson and B. C. Trask, “An examination of failure strength in $[0/\pm 60]$ laminates under biaxial stress,” *Composites*, vol. 19, no. 5, pp. 400–406, 1988, doi: 10.1016/0010-4361(88)90128-0.
- [147] The MathWorks Inc., “MATLAB - Página web - Conceptos básicos sobre el escritorio,” 2022. https://es.mathworks.com/help/matlab/learn_matlab/desktop.html.

Apéndices

Apéndice A – Programa de análisis e interfaz

A.1 Uso de submódulo GUIDE

El uso de GUIDE de MATLAB® se realizó por medio del cambio paralelo de los archivos con extensiones “.fig” y “.m”. Como ejemplo sencillo, una interfaz que suma dos números se realiza con los pasos a) a e) siguientes:

- a) Se crea una interfaz en GUIDE con los elementos gráficos deseados como en la **Figura A-1**:

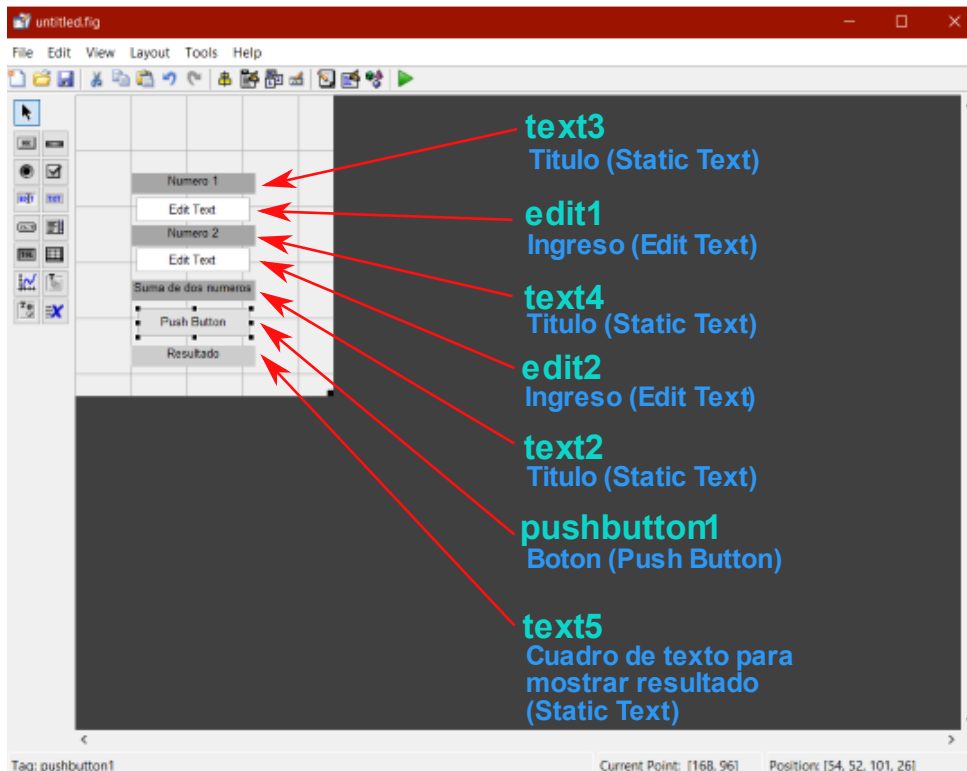


Figura A-1 Creación de interfaz para la suma de dos números.

- b) Se guarda el archivo. Esto genera ambos archivos con extensiones “.fig” y “.m” con el nombre seleccionado al guardar como mostrado en la **Figura A-2**. Esto también abrirá en la ventana de trabajo de MATLAB® con el código correspondiente archivo “.m” a este proyecto de interfaz.

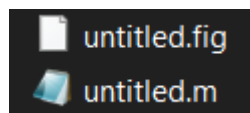


Figura A-2 Archivos generados al guardar proyecto de GUIDE.

c) Al abrirse el archivo “.m” en la ventana de trabajo de MATLAB®, es posible analizar las secciones de código generadas automáticamente como mostrado en la **Figura A-3: (Imagen vectorizada para visualizar preferentemente en formato PDF digital).**

```
function varargout = untitled(varargin)
% UNTITLED MATLAB code for untitled.fig
%
% UNTITLED, by itself, creates a new UNTITLED or raises the existing
% singleton*.
%
% H = UNTITLED returns the handle to a new UNTITLED or the handle to
% the existing singleton*.
%
% UNTITLED('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the local
% function named CALLBACK in UNTITLED.M with the given input arguments.
%
% UNTITLED('Property','Value',...) creates a new UNTITLED or raises the
% existing singleton*. Starting from the left, property value pairs are
% applied to the GUI before untitled_OpeningFcn gets called. An
% unrecognized property name or invalid value makes property application
% stop. All inputs are passed to untitled_OpeningFcn via varargin.
%
% *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows only one
% instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES
% Edit the above text to modify the response to help untitled
% Last Modified by GUIDE v2.5 27-Mar-2022 14:28:08
% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @untitled_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn',  @untitled_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn',  [], ...
                  'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end
if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT
```

Secciones de código generadas automáticamente.

No afectan al programa o son necesarios para funciones básicas de GUI.

(No editar)

```
function untitled_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
%////////////////////////////////////////////////////
handles.output = hObject; % Choose default command line output for untitled
guidata(hObject, handles); % Update handles structure
```

Función: Sección de código generada automáticamente.

Aquí pueden codificarse líneas de código de inicialización de GUI (Ej. apagar un botón etc.)

```
function varargout = untitled_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;
```

Función: Sección de código generada automáticamente.

```
function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

Función: Sección de código correspondiente a botón 1. (Aquí se codifica líneas de código que se realizan cuando pushbutton1 es hecho clic)

```
function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

```
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

Función: Sección de código correspondiente a cuadro editable 1.

(No eliminar)

```
function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

```
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'), get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

Función: Sección de código correspondiente a cuadro editable 2.

(No eliminar)

Figura A-3 Secciones de código generadas de proyecto GUIDE.

d) Se edita la función “_Callback” correspondiente a “PushButton1” la cual se acciona al hacer clic sobre el botón. Esta función contendrá las líneas de código correspondientes a leer información de los cuadros editables, sumar números y escribir el resultado en el último cuadro de texto. El código y los comentarios de cada línea se pueden leer después del símbolo “%” en la **Figura A-4:**

```

function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
    global num1 num2
    num1=get(handles.edit1,'String'); %obtiene valor de entrada de numero 1 y lo
    guarda en "num1" variable global, [esta se obtiene en forma de "string"]
    num2=get(handles.edit1,'String'); %obtiene valor de entrada de numero 2 y lo
    guarda en "num2" variable global, [esta se obtiene en forma de "string"]

    num1=str2double(num1); %guarda dentro la variable "num1" el contenido de la
    variable "num1" convertido a numero
    num2=str2double(num2); %guarda dentro la variable "num2" el contenido de la
    variable "num2" convertido a numero

    num3=num1+num2; %suma valores numericos guardados dentro las variables
    "num1" y "num2"

    num3=num2str(num3); %convierte valor numerico guardado en "num3" en "string"
    y lo guarda en variable "num3"

    set(handles.text5,'String',num3); %Set de valor de variable "num3" en
    elemento grafico "text5"

```

Figura A-4 Código de función de ejemplo “pushbutton1”

- e) Con este código e interfaz diseñada, la secuencialidad de uso de esta interfaz es observable en la **Figura A-5**:



Figura A-5 Secuencialidad de funcionamiento de interfaz de ejemplo.

El funcionamiento e interrelación de figuras graficas de interfaz se realiza de esta manera, en forma de código en el archivo “.m” del proyecto actual dentro de la ventana de MATLAB® sea para actualizar gráficos, generar cálculos o las acciones que se deseen al seleccionar botones o elementos de interfaz.

A.2 Diseño de iteraciones de interfaz

La interfaz de usuario para el análisis de materiales compuestos se realizó de manera iterativa agregando submenús conforme era necesario. El diseño de la interfaz fue hecho conforme la naturaleza secuencial de ingreso de información de datos de material en un análisis de materiales mecánico y para su útil uso. El borrador de diseño inicial de acomodo de menús en la interfaz se aprecia en la **Figura A-6**:

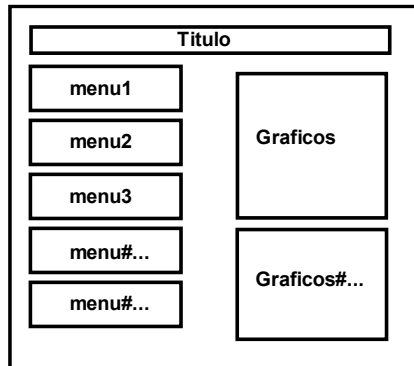


Figura A-6 Diseño inicial de interfaz de usuario en programa de análisis de laminados compuestos.

De este borrador de diseño se generaron las primeras iteraciones de diseño de interfaz de usuario por medio de GUIDE para generar las secciones graficas de ingreso de información de un material a estudiar como mostrado en la **Figura A-7**.

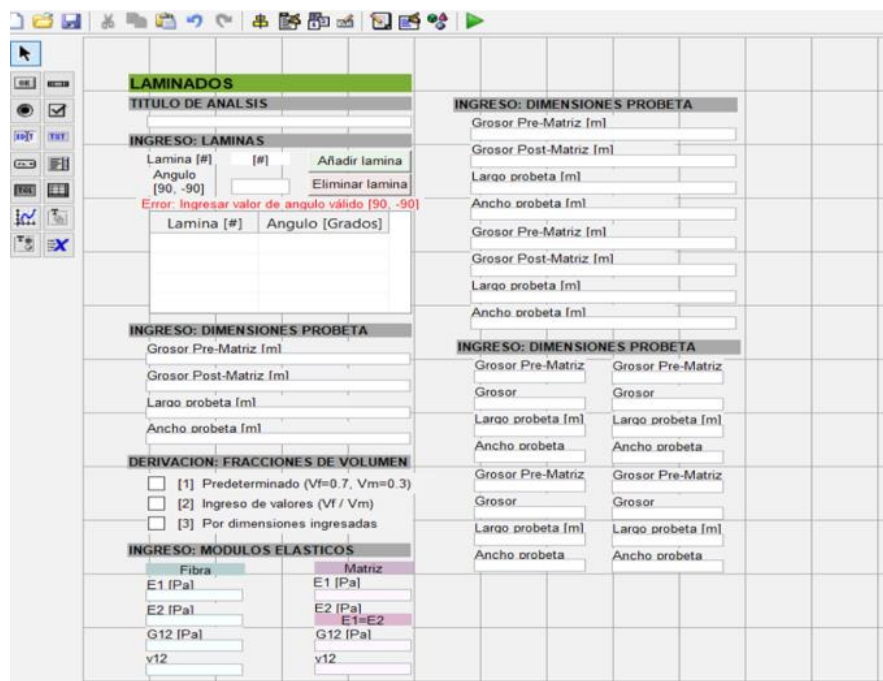


Figura A-7 Una de las primeras iteraciones de diseño de interfaz de usuario.

Seguido de varias iteraciones y actualizaciones de interfaz, la interfaz diseñada con todos los menús de función principal extendidos se puede apreciar conforme la **Figura A-8**:

The screenshot displays the software interface for laminated analysis, organized into several sections:

- 1 TÍTULO DE ANALISIS:** Title of the analysis, currently set to "CTSun_EdgeEff_PANEL1_p4_1".
- 2 INGRESO: LAMINAS:** Lamination input section. Includes a table for lamina properties (Lamina [#], Angulo [°]) and options to add, delete, or repeat laminae. The table shows 8 laminae with angles ranging from 0 to 90 degrees.
- 3 INGRESO: DIMENSIONES DE PROBETA:** Specimen dimensions input. Includes fields for length (A), width (B), lamina thickness (C), and pre-matrix thickness (D). A diagram shows the specimen geometry.
- MODULOS ELASTICOS: INGRESO DIRECTO <<> MICROMECANICA:** Elastic modulus input section, currently set to "INGRESO DIRECTO".
- 4 INGRESO: MODULOS DIRECTO:** Direct modulus input. Includes fields for E1, E2, G12, and nu12.
- 5 INGRESO: CARGAS FUERZA Y MOMENTO:** Force and moment input. Includes fields for Fx, Fy, Fxy, Mx, My, Mxy, and Mxy.
- 6 INGRESO: VALORES MAXIMOS DE MATERIAL:** Material maximum values input. Includes fields for maximum tension, compression, and shear stress, as well as unitary deformation.
- X1 INGRESO: CONTENIDO DE VACIO:** Void content input, currently set to "-DESACTIVADO-".
- Y1 MULTIANALISIS: FALLO INICIAL:** Initial failure analysis option.
- Y2 MULTIANALISIS: FALLO PROGRESIVO:** Progressive failure analysis option.

On the right side, the results are displayed:

- GRAFICOS CRITERIOS:** A plot showing the Tsai-Hill failure envelope (blue ellipse) and the actual stress state (red dot). The axes are sigma1 and sigma2, both scaled by 10^9.
- TABLA CRITERIOS:** A table showing the failure criteria for each lamina. The columns include Lamina, Tsai-Hill, Tsai-Wu, Hoffman, Hashin FT, Hashin FC, Hashin MT, Hashin MC, LaRC02 FT, and LaRC02 FC. The table shows that all laminae are within the failure envelope.
- TABLA ESFUERZO Y DEFORMACION LAMINAS:** A table showing the stress and strain for each lamina. The columns include DEF [XYZ], ESF [XYZ], and TABLA RESULTADOS POR LAMINA. The table shows the stress and strain for each of the 8 laminae.
- LAMINADO GENERAL: ESFUERZO Y MODULOS:** A section showing the overall elastic modulus and stress for the laminate. It includes fields for E1, E2, G12, nu12, and the overall stress components (SIGMA_X, SIGMA_Y, SIGMA_Z).

Figura A-8 Interfaz de análisis de laminados con submenús extendidos.

Todos los menús principales que se muestran en la Figura anterior son necesarios de llenar para analizar una configuración de material de laminado compuesto.

Al ser contraídos, todos los menús entendibles se muestran en la **Figura A-9**:

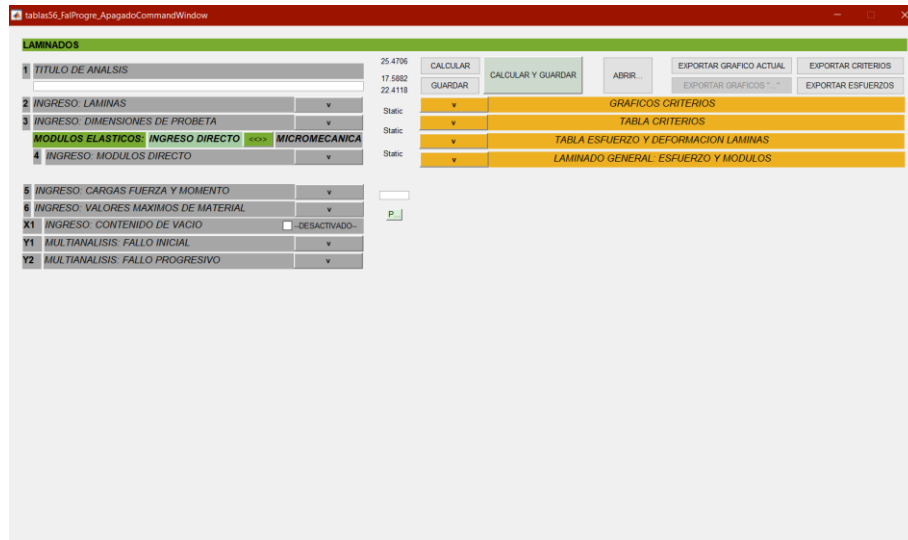


Figura A-9 Interfaz de análisis de laminados con submenús contraídos.

De igual manera, los menús correspondientes a las funciones auxiliares “Contenido de vacío”, “Fallo Inicial” y “Fallo Progresivo” pueden apreciarse en la **Figura A-10**:

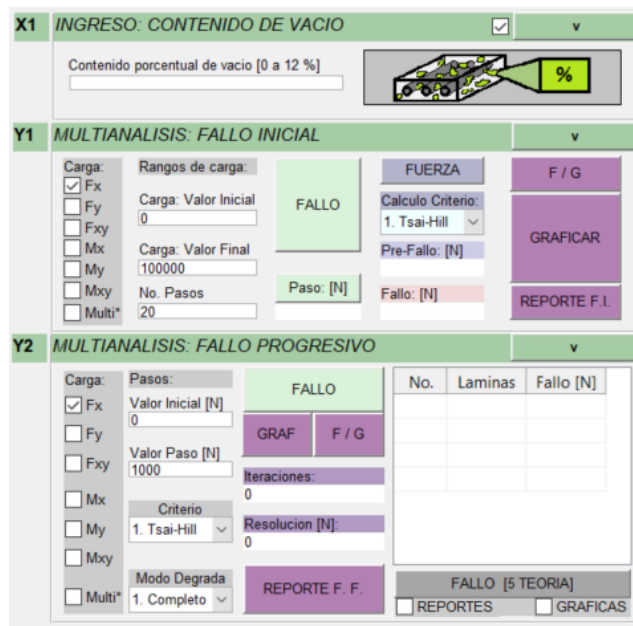


Figura A-10 Interfaz de análisis menús de funciones auxiliares.

A.3 Submenús de interfaz diseñados

Los submenús de la interfaz fueron generados con la cantidad de botones, cuadros de texto o tablas dependiendo de la naturaleza o función del submenú a utilizar. Se generaron un total de 6 menús necesarios para un básico análisis de laminado compuesto, 4 menús de muestra de resultados y 3 menús de funciones auxiliares con numeración X1, Y1 y Y2.

- **Submenú 1: Título.**



Figura A-11 Interfaz Submenú Título.

El Submenú 1 Título mostrado en la **Figura A-11** es el primer menú cuya funcionalidad es tener un espacio de ingreso de título para el análisis llevado a cabo. Este nombre se utiliza para la generación de reporte generado por el programa, con los datos de análisis listados y resultados.

- **Submenú 2: Posicionamiento de orden de láminas.**

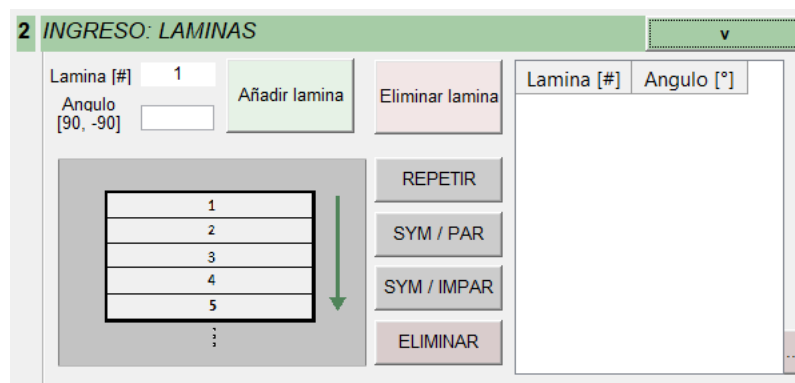


Figura A-12 Interfaz Submenú Posicionamiento de orden de láminas.

El Submenú 2 mostrado en la **Figura A-12** de posicionamiento de orden de láminas es el segundo menú del programa. En él se ingresa el orden de ángulos de giro de láminas en el laminado para hacer los cálculos de rigidez y respuesta elástica del laminado en forma conjunta y en forma independiente.

El orden de láminas a ingresar es de arriba abajo, según se muestra en la imagen ilustrativa. La manera para ingresar una lámina a determinado ángulo es llenando la casilla de texto a un lado de la opción “Ángulo” seguido de seleccionar el botón verde claro “Añadir lámina”. Si se desea eliminar la última lámina añadida esto se logra seleccionando el botón rojo claro “Eliminar lámina”. Después de añadir una configuración de laminado específica, se puede hacer uso de los botones auxiliares:

- **REPETIR:**

El botón auxiliar REPETIR toma una configuración de laminado actual ingresado y la copia debajo de la configuración existente. Esto genera un laminado con el doble de láminas con exactamente el mismo orden de laminados (y sus ángulos de rotación).

- **SYM/PAR**

El botón auxiliar SYM/PAR copia la configuración de laminado actual debajo de las láminas existentes, generando un laminado con el doble de láminas. A diferencia del botón REPETIR, el orden generado por este botón es simétrico con respecto a la altura del laminado.

- **SYM/IMPAR**

El botón auxiliar SYM/IMPAR copia la configuración de laminado actual debajo de las láminas existentes sin repetir la última lámina debido a que esta se considera el centro del laminado. El laminado total tendrá por lo tanto no el doble, sino (doble-1) número de láminas.

- **ELIMINAR**

El botón auxiliar ELIMINAR elimina todas las láminas actuales en la configuración.

- **Submenú 3: Dimensiones de material.**

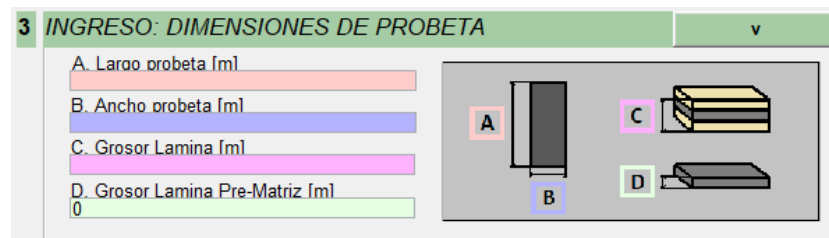


Figura A-13 Interfaz Submenú Dimensiones de material.

El Submenú 3 Dimensiones de probeta mostrado en la **Figura A-13** es el tercer menú del programa. En él se ingresa las dimensiones de las láminas a utilizar en el laminado. Las dimensiones por ingresar son:

- **Grosor de lámina pre-matriz.**

Esta dimensión se utiliza para el cálculo de fracciones de volumen si se tiene activado el 3er método de derivación en el submenú 4_2.

- **Grosor de lámina post-matriz.**

Esta dimensión se utiliza para el cálculo de fracciones de volumen, así como para el cálculo de esfuerzo en lámina ya que ésta es la dimensión de grosor final de una lámina.

- **Largo de probeta.**

Dimensión largo de probeta, utilizado para cálculo de esfuerzo en lámina.

- **Ancho de probeta.**

Dimensión ancho de probeta, utilizado para cálculo de esfuerzo en lámina. Esta opción solo se activa si se selecciona la opción 3 de derivación de módulos elásticos por micromecánica.

- **Submenú 4: Módulos elásticos.**



Figura A-14 Interfaz Selección de método de caracterización de módulos elásticos.

El submenú 4 mostrado en la **Figura A-14** se separa en dos submenús que permiten caracterizar módulos elásticos de una lámina de material compuesto por medio de dos métodos, el ingreso directo de módulos elásticos y el ingreso por método micromecánico.

La selección de uno u otro submenú de módulo elástico se logra por medio del botón encerrado en un cuadro rojo de la siguiente figura, permitiendo la aparición de uno u otro menú de módulos elásticos:

- **Submenú 4_1: Módulos elásticos método directo.**



Figura A-15 Interfaz Submenú 4 ingreso directo.

La selección del método de ingreso de módulos elástico directo mostrado en la **Figura A-15** permite el ingreso independiente de los módulos elásticos ($E1, E2, G12, \nu12$) como se muestra en figura.

- **Submenú 4_2: Módulos elásticos método micromecánica.**



Figura A-16 Interfaz Submenú 4 ingreso directo

La selección del método de ingreso de módulos elástico por micromecánica mostrado en la **Figura A-17** permite la derivación de los módulos elásticos por medio de conceptos micromecánicos de fracciones de volumen y módulos elásticos independientes de fibra y matriz.

Las fracciones de volumen pueden ser definidas de 3 formas:

a) Predeterminado ($V_f=0.7$, $V_m=0.3$)

Opción seleccionada automáticamente al inicio del programa. Utiliza los valores predeterminados para laminados de fibra de carbono, donde los valores típicos de fracciones de volumen de fibra y matriz son 0.7 y 0.3 respectivamente.

b) Ingreso de valores (V_f/V_m)

La selección de esta opción abre el menú que permite el ingreso de los valores de fracciones de volumen de manera manual.

c) Por dimensiones ingresadas

La selección de esta opción abre el menú que permite la derivación de los valores de fracciones de volumen de fibra y matriz respectivamente a través de las dimensiones ingresadas de grosor pre y post matriz.

• **Submenú 5: Cargas aplicadas.**



Figura A-17 Interfaz Submenú Cargas aplicadas

Este menú mostrado en la **Figura A-17** permite el ingreso de los valores de cargas aplicadas en el laminado de estudio actual. Estas cargas consisten en fuerzas longitudinales y cortante (por estudio de laminado 2D) y 3 fuerzas de momento. Estas fuerzas arman el vector de fuerzas utilizadas para la solución de laminado ABD del laminado de estudio.

• **Submenú 6: Valores máximos de material.**

6 INGRESO: VALORES MAXIMOS DE MATERIAL		v
Esfuerzo X Maximo (Tension) [Pa]	<input type="text"/>	Esfuerzo Maximo Cortante XY [Pa]
Esfuerzo X Maximo (Compresion) [Pa]	<input type="text"/>	Esfuerzo Maximo Cortante YZ [Pa]
Esfuerzo Y Maximo (Tension) [Pa]	<input type="text"/>	0
Esfuerzo Y Maximo (Compresion) [Pa]	<input type="text"/>	Esfuerzo Maximo Cortante ZX [Pa]
Esfuerzo Z Maximo (Tension) [Pa]	<input type="text"/>	0
Esfuerzo Z Maximo (Compresion) [Pa]	<input type="text"/>	Deformacion Unitaria X Maxima [-]
		0
		Deformacion Unitaria Y Maxima [-]
		0
		Deformacion Unitaria Z Maxima [-]
		0

Figura A-18 Interfaz Submenú Valores máximos de material

Este menú mostrado en la **Figura A-18** permite el ingreso de los valores de esfuerzo y deformación últimas en las distintas direcciones de prueba, los cuales se utilizan para los diversos criterios de esfuerzos.

- **Submenú X1: Contenido de vacío.**


X1 INGRESO: CONTENIDO DE VACIO	<input checked="" type="checkbox"/>	v
Contenido porcentual de vacio [0 a 12 %]	<input type="text"/>	

Figura A-19 Interfaz Submenú Contenido de Vacío

Este menú mostrado en la **Figura A-19** permite el ingreso de un valor de contenido porcentual de vacío en la configuración de laminado actual lo cual influye en las características de resistencia y módulos elásticos de material actual. Esto se logra multiplicando el factor de disminución según el contenido porcentual de vacío por el **valor de resistencia** y **módulos elásticos de laminado** respectivamente.

- **Submenú Y1: Multianálisis Fallo Inicial.**

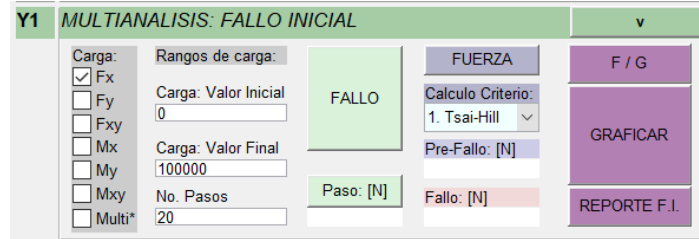


Figura A–20 Interfaz Submenú Multianálisis Fallo Inicial

El submenú mostrado en la **Figura A-20** Multianálisis Fallo Inicial permite la solución de múltiples análisis de laminado por medio de variación de cargas. Esta variación de cargas se define por medio de los apartados “**Carga: Valor Inicial**”, “**Carga: Valor Final**”, y “**No. Pasos**”, los cuales permiten la definición del rango de variación por medio de valor inicial, final y el número de divisiones entre el valor final e inicial. Estos pasos variarán la carga a variar seleccionada (**Fx, Fy, Fxy, Mx, My, Mxy**) y llevarán a cabo la solución **n** número de veces.

Los botones tienen las siguientes funciones:

- **FALLO:**
El botón auxiliar FALLO inicia la función Multisolución Fallo Inicial.
- **FUERZA**
El botón auxiliar FUERZA, al ser seleccionado, cambia la unidad (de Newton a Pascal) mostrada del momento de fallo Inicial del material bajo la teoría actual en ambas secciones “**Pre-Fallo: [N]**” y “**Fallo: [N]**”.
- **GRAFICAR**
El botón auxiliar GRAFICAR genera un gráfico de los puntos analizados Multianálisis al Fallo Inicial en el cual se puede observar la vida del material y el punto de fallo por cada una de las 5 teorías.
- **F/G:**
El botón auxiliar F/G lleva a cabo las funciones de ambos botones “FALLO” y “GRAFICAR” analizando bajo los parámetros ingresados y graficando los datos de resultados en forma secuencial.
- **REPORTE F.I.**
El botón auxiliar REPORTE F.I. genera y exporta un reporte en formato “.xls” con todos los datos del análisis Multisolución a Fallo Inicial para su uso y manipulación fuera del programa.

- **Submenú Y2: Multianálisis Fallo Progresivo.**

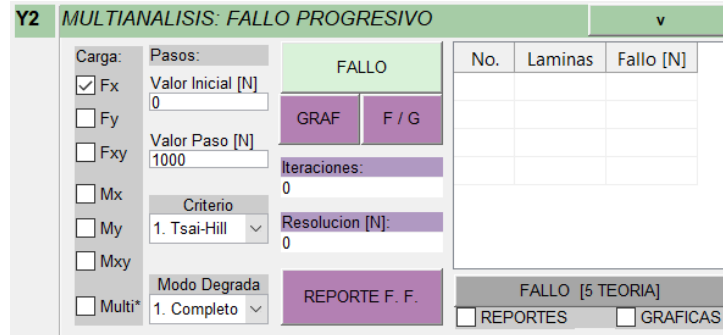


Figura A-21 Interfaz Submenú Multianálisis Fallo Progresivo

El submenú Multianálisis Fallo Progresivo mostrado en la **Figura A-21** permite la solución de múltiples análisis de laminado variando la carga y encontrando el fallo lámina a lámina en orden hasta el fallo en todas las capas de laminado. La variación de cargas se define por medio de los apartados “**Valor Inicial [N]**”, “**Valor Paso [N]**”, los cuales permiten la definición del valor inicial y la resolución de pasos en el análisis progresivo de fallo. La carga seleccionada se variará en forma aumentativa hasta reportar fallo en todas las capas de laminado.

El Fallo Progresivo se calcula independiente por teoría, necesitando hacer un cálculo por cada teoría si se requiere comparar resultados entre teorías. Para ello es posible utilizar el botón “**FALLO [5 TEORIA]**” para hacer el cálculo con las 5 teorías de resistencia disponibles en forma serial.

Los botones de este submenú tienen las siguientes funciones:

- **FALLO:**
El botón auxiliar FALLO inicia la función Multisolución Fallo Progresivo con parámetros ingresados. Al final del análisis el orden de fallo, láminas falladas y carga de fallo son graficados en la tabla.
- **GRAF**
El botón auxiliar GRAF, al ser seleccionado genera un gráfico de los puntos analizados Multianálisis al Fallo Progresivo en el cual se puede observar la vida del material y el punto de fallo por cada una de las 5 teorías.
- **F/G:**
El botón auxiliar F/G lleva a cabo las funciones de ambos botones “FALLO” y “GRAF” analizando bajo los parámetros ingresados y graficando los datos de resultados en forma secuencial.
- **REPORTE F.F.**
El botón auxiliar REPORTE F.F. genera y exporta un reporte en formato “.xls” con todos los datos del análisis Multisolución a Fallo Fncial para su uso y manipulación fuera del programa.

- **Submenú de resultados 1:**

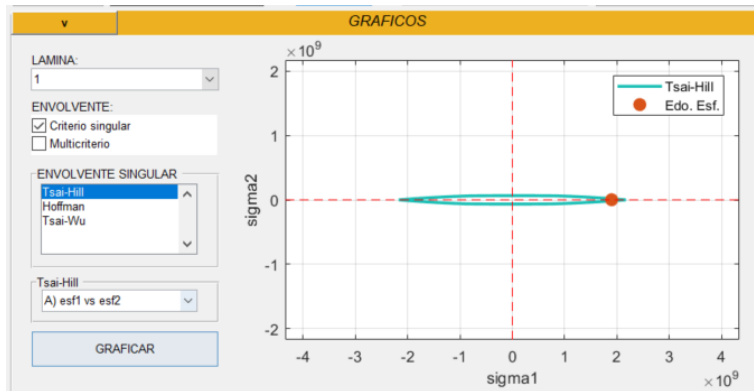


Figura A–22 Interfaz Submenú Resultados 1

En este menú de resultados mostrado en la **Figura A-22** se muestra los valores de resistencia a través de envolventes de fallo graficados bidimensionalmente, en las distintas teorías de resistencia aplicables a materiales compuestos y con los valores últimos de material y estado de esfuerzos actual. Es posible seleccionar el grafico a obtener por lámina, criterio singular o multicriterio, así como la parametrización deseada observar.

- **Submenú de resultados 2:**

PLY NUMBER	ANGLE [DEG]	POSITION	SURFACE HEIGHT [m]	epsilon_x [m/m]	epsilon_y [m/m]	epsilon_xy [m/m]
1	0	Superior	-5.2832e-04	0.0124	-0.0038	6.5984e-19
1	0	Intermedio	-4.6228e-04	0.0124	-0.0038	3.7475e-19
1	0	Inferior	-3.9624e-04	0.0124	-0.0038	8.9664e-20
2	45	Superior	-3.9624e-04	0.0124	-0.0038	8.9664e-20
2	45	Intermedio	-3.3020e-04	0.0124	-0.0038	-1.9542e-19
2	45	Inferior	-2.6416e-04	0.0124	-0.0038	-4.8051e-19
3	-45	Superior	-2.6416e-04	0.0124	-0.0038	-4.8051e-19
3	-45	Intermedio	-1.9812e-04	0.0124	-0.0038	-7.6560e-19
3	-45	Inferior	-1.3208e-04	0.0124	-0.0038	-1.0507e-18
4	90	Superior	-1.3208e-04	0.0124	-0.0038	-1.0507e-18

Figura A–23 Submenú Resultados 2

Este menú de resultados mostrado en la **Figura A-23** muestra los valores numéricos de resultados de deformaciones y esfuerzos para cada una de las láminas los cuales fueron calculados de la matriz elástica ABD para laminados ortotrópicos.

Los resultados pueden ser cambiados entre esfuerzos y deformaciones para los ejes locales y globales para cada una de las láminas a través de los botones amarillos superiores, mostrando los valores numéricos de esfuerzo y deformación a 3 niveles por lamina: Su superficie superior, su superficie inferior y su superficie intermedia.

También es posible graficar los valores de esfuerzo y deformación local y global por altura de lámina por medio de los botones inferiores mostrado en la **Figura A-24**.

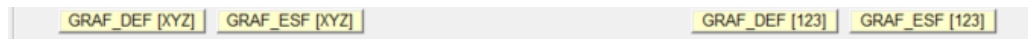


Figura A-24 Interfaz Graficación de esfuerzos y deformaciones

- **Submenú de resultados 3:**

CRITERIOS DE FALLO										
LAMINA	Tsai-Hill	Tsai-Wu	Hoffman	Hashin FT	Hashin FC	Hashin MT	Hashin MC	LaRC02 FT	LaRC02 FC	LaRC02
1o	x	o	o	x	o	x	x	x	x	x
2o	o	o	o	x	x	o	x	x	x	x
3o	x	o	o	x	o	x	x	x	x	x

Figura A-25 Interfaz Submenú Resultados 3

Este menú de resultados mostrado en la **Figura A-25** muestra si las láminas a distintas direcciones y alturas estudiadas se consideran si resisten los distintos criterios de resistencia o no dependiendo de los valores ingresados de estados de carga y valores últimos de material, marcando con un “o” la lámina y criterio de fallo si este se considera si falla por el criterio de fallo, o “x” si se considera no falla por ese criterio.

- **Botones: CALCULAR, GUARDAR y ABRIR**

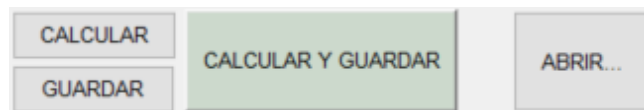


Figura A-26 Interfaz Botones Calcular, Guardar, Calcular Guardar y Abrir

Esta sección grafica del interfaz mostrado en la **Figura A-26** contiene 4 botones con las siguientes funcionalidades:

Botón CALCULAR

El botón calcular corre la solución del análisis con todos los parámetros ingresados y genera la graficación y tabulación de resultados automática en los menús de resultados de la interfaz.

Botón GUARDAR

El botón guardar exporta todos los datos de análisis y resultados actual a un archivo tabular formato “.xls” donde se listan todos los parámetros de ingreso y calculados de interés que van desde módulos elásticos, valores de resistencia hasta resultados de

resistencia por teoría en forma tabular. Este archivo tiene de nombre el texto de título ingresado al inicio del análisis.

Botón CALCULAR Y GUARDAR

El botón Calcular y Guardar genera las funciones de ambos botones “Calcular” y “Guardar” de manera conjunta, realizando el análisis y la exportación de datos en archivo formato “.xls”.

Botón ABRIR

El botón abrir permite la selección de un archivo de resultados previo “.xls” para la importación de todos los parámetros de análisis evitando la necesidad de repetición de parámetros de análisis previos.

- **Botones: Exportar datos de menú de resultados**



Figura A-27 Interfaz Botones exportar resultados

Los botones para exportar resultados mostrados en la **Figura A-27** son:

Botón EXPORTAR GRAFICO ACTUAL

El botón exporta una imagen copia del grafico actual en formato “.jpeg” con el nombre del título de análisis actual junto la numeración del grafico actual que se está exportando.

Botón EXPORTAR CRITERIOS

El botón exporta una imagen copia de los datos actuales de la tabla de criterios de resistencia en formato “.xls” con el nombre del del título de análisis actual.

Botón EXPORTAR ESFUERZOS

El botón exporta una imagen copia de los datos actuales de la tabla de distribución de esfuerzos en formato “.xls” con el nombre del del título de análisis actual.

A.3.1 Descripción de estructura de código. Funciones de interfaz y análisis de laminados

Los códigos generados para la aplicación de conceptos de estudio de micromecánica a macromecánica en el estudio de laminados compuestos unidireccionales (por medio ahora de interfaz gráfica de usuario) se lograron con el procedimiento descrito en el diagrama de la sección “[6.3 Fase 3: Macromecánica de laminados.](#)”.

A diferencia del diagrama de flujo en el apartado mencionado (la cual genera el cálculo de laminados compuestos en forma secuencial y continua dentro de una misma función), la forma de programación de la matemática utilizada por medio de MATLAB® GUIDE se logró por medio de la **compartimentalización de código** de las distintas líneas de código dedicadas a calcular o procesar distintos tipos de información para permitir su uso independiente con futuras funciones.

Los **dos tipos de funciones** principales utilizadas dentro del archivo “.m” generado de proyecto por medio de MATLAB® GUIDE para compartimentalizar el análisis de laminados compuestos son los siguientes:

- a) **Función generada por MATLAB® GUIDE correspondiente a un elemento gráfico.**

Estas funciones utilizadas son generadas automáticamente por el submódulo MATLAB® GUIDE al momento de generar un nuevo elemento grafico las cuales están funcionalmente unidas a la **función del elemento** gráfico (función de elemento refiere a: presionado de botón, etc.).

Un ejemplo es la función correspondiente al botón “Añadir lámina” correspondiente al **Submenú 2**. La función generada y su línea de código identificadora se puede observar en la **Figura A-28**:

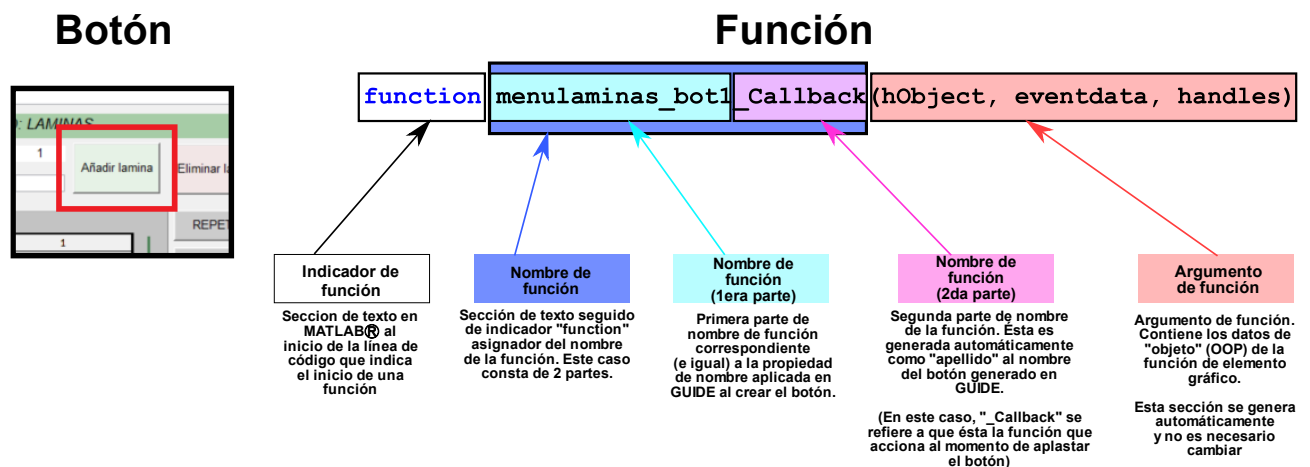


Figura A–28 Ejemplo de función generada por MATLAB® GUIDE.

El código correspondiente (usado como tal en el programa) se puede observar en la siguiente figura con comentarios seguido del carácter “%” explicando las distintas líneas de código y la acción que generan mostrado en la **Figura A-29 (Figura vectorizada para visualizar preferentemente en formato PDF digital)**.

```

%-----
%BOTON1 AGREGAR LAMINA-----
%-----
function menulaminas_bot1_Callback(hObject, eventdata, handles)
%INICIALIZA variable global p dentro de esta funcion pushbutton
global p %inicializa variable global p donde se almacena los datos de la tabla de angulos
global laminas %inicializa variable global laminas donde se almacena el numero de laminas actuales ingresadas
global lamcounter2 %inicializa variable global lamcounter2 donde se almacena numero de laminas-1
grados=get(handles.menulaminas_in1, 'text'); %Obtiene el valor de la casilla de ingreso de grados y la guarda en variable local "grados"
gradosdouble=str2double(grados); %transforma el valor "string" de la variable "grados" a "double" y la guarda en variable "gradosdouble"
%DISCERNIDOR de aseguramiento de rango ingresado de angulo valores SOLO [90,-90]
if (gradosdouble<-90) || (gradosdouble>90) || (isempty(grados)) || (isnan(gradosdouble)) %IF - Si "gradosdouble" esta en rango -90 a 90 o esta vacio o "isnan" entra a condicion
set(handles.menulaminas_txt5, 'text', ' '); %Hace visible un elemento grafico de advertencia valor de angulo a ingresar "no esta en rango/no es valido"
%CORRECCION DE GRADOS AUTOMATICA - Cambia valor de angulo a uno ingresable por programa en rango valido [90,-90]
if (gradosdouble<-90) && (gradosdouble>=-180) %Esta seccion de codigo convierte un valor de -95 grados a su equivalente 85 el cual esta en rango [90,-90]
gradosdouble=gradosdouble+180;
elseif (gradosdouble>90) && (gradosdouble<=180) %Esta seccion de codigo convierte un valor de 95 grados a su equivalente -85 el cual esta en rango [90,-90]
gradosdouble=gradosdouble-180;
end
set(handles.menulaminas_in1, 'text', num2str(gradosdouble)); %Esta linea de codigo escribe el valor modificado de angulo en elemento grafico casilla de angulo
else % ELSE - Si no se cumple if anterior, angulo si esta en rango, por lo tanto:
set(handles.menulaminas_txt5, 'text', ' '); %Lineas de codigo apaga el elemento grafico de advertencia "valor de angulo a ingresar no esta en rango/no es valido"
%ACTUALIZA contador para set de informacion en tabla de grados-----
lamcounter1 = get(hObject, 'text') + 1;
laminas=lamcounter1;
set(hObject, 'text', lamcounter1);
%CREAYACTUALIZA contador para correccion de datos en texto Lamina[#]-----
%contadoractualizad=lamcounter2; es variable global porque asi permite actualizarse de fuera
lamcounter2=lamcounter1+1;
set(handles.menulaminas_txt2, 'text', sprintf('%d', lamcounter2));
drawnow; %Actualizacion de GUI forzada
%IMPRESION de datos de contador y grados en tabla de grados de menu 2-----
p.MyData={p.MyData; {[lamcounter1] [gradosdouble]}};
set(handles.menulaminas_tabla1, 'text', p.MyData);
end

```

Figura A–29 Código correspondiente a función de botón “Añadir lamina”

b) Funciones generadas por usuario.

Estas funciones son generadas por el usuario a discreción o necesidad de él. Estas funciones se crean con sintaxis similar a las funciones generadas automáticamente por GUIDE, con la diferencia de poder utilizar cualquier nombre que no es dependiente de elementos gráficos y utilizando la sintaxis de creación de funciones de MATLAB que se describe en la **Figura A-30**:

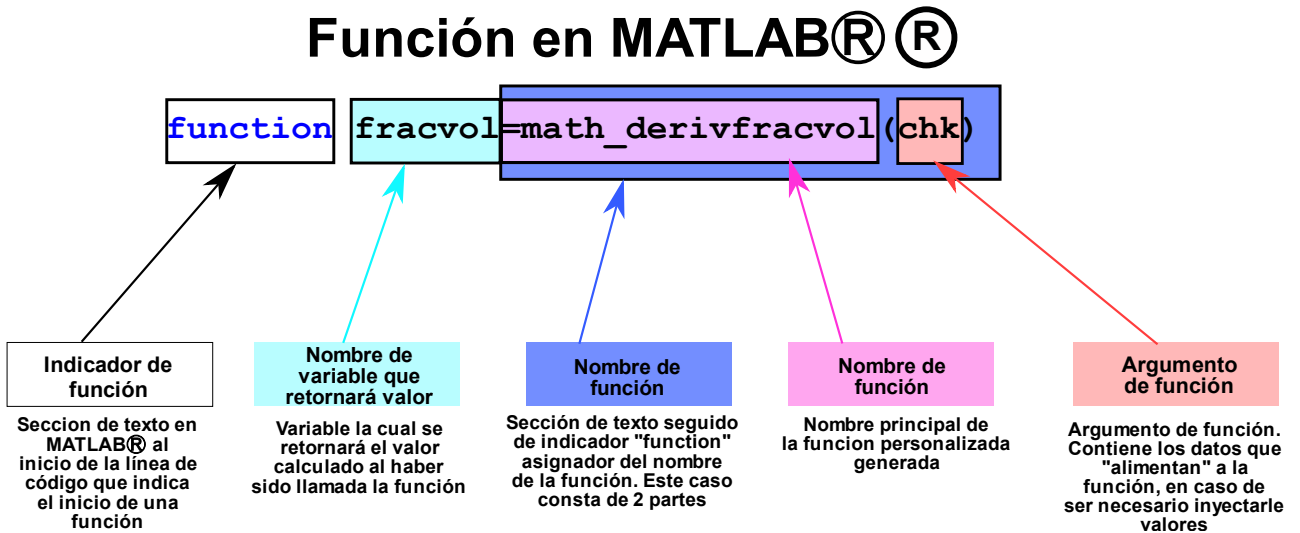


Figura A–30 Ejemplo de función generada por usuario.

Como ejemplo, la funcionalidad de la función creada por usuario “**math_derivfracvol()**” del programa, se puede observar en la siguiente figura, fungiendo como función que actualiza una variable global que ayuda a elegir qué **proporción de fracción de volumen fibra-matriz** utilizará el programa de las opciones dentro del programa [1,2,3], retornando los valores Vf y Vm dentro la variable “fracvol”. Esta función creada por usuario se encuentra dentro del programa de la siguiente **Figura A-31: (Figura vectorizada para visualizar preferentemente en formato PDF digital).**

```

%-----
%FUNCMATH1: - DERIVFRACVOL:START-----
%-----
function fracvol=math_derivfracvol(chk)
    global dim_pre dim_post dim_largo dim_ancho
    global Vf Vm in_Vf in_Vm
    %Metodo1-----
    if chk==1
        %Valores tipicos de fraccion de volumen de fibra y matriz en fibras
        %unidireccionales. Fraccion de volumen de fibra=0.7, Fraccion de
        %volumen matriz=0.3.
        Vf=0.7;
        Vm=0.3;
        fracvol=[0.7,0.3];
    end
    %Metodo2-----
    if chk==2
        %disp(' *Ingreso de valores directos Vf/Vm')
        Vf=in_Vf

        Vm=1-Vf;
        %fprintf('Fraccion de volumen de matriz: %f \n', Vm)
        fracvol=[Vf,Vm];
    end
    %Metodo3-----
    if chk==3
        %Metodo de derivacion de fracciones de volumen midiendo el grosor
        %de una lamina antes y despues de cubrir con resina.
        %Por simplificacion, el grosor de la placa 2Dimensional se considerara unidad "1".
        %Por lo tanto, los volúmenes respectivos se obtienen:
        %Volumen fibra [m]: (usado para calcular fracciones adelante)
        vf=dim_largo*dim_ancho*dim_pre;
        %Volumen matriz [m]: (usado para calcular fracciones adelante)
        vm=dim_largo*dim_ancho*(dim_post-dim_pre);

        %Calculo de fracciones de volumen
        %vc = volumen compuesto (total), vm = volumen matriz, vf = volumen fibra
        %disp('Volumen total vc es la suma de ambos volúmenes de fibra y masa:');
        vc=vf+vm;

        %Fraccion de volumen porcentual fibra:
        Vf=(vf/vc);
        %Fraccion de volumen porcentual matriz:
        Vm=(vm/vc);
        fracvol=[Vf,Vm];
    end

%-----
%FUNCMATH1: - DERIVFRACVOL:END-----
%-----

```

Figura A–31 Código correspondiente a función creada de usuario “math_derivfracvol”.

El programa cuenta con **ambos** tipos de funciones, las generadas por MATLAB® GUIDE y las creadas por usuario utilizadas para compartimentalizar los cálculos matemáticos necesarios y funciones auxiliares de actualización de gráficos las cuales se llaman sea independientemente o entre sí según la necesidad.

A.3.2 Codificación de función botón CALCULAR



Figura A-32 Secciones de código para función CALCULARbutton.

A.3.3 Codificación de función botón GUARDAR. Descripción de estructura de código

El botón GUARDARbutton es una función generada por GUIDE correspondiente a un elemento gráfico la cual se activa al hacer clic sobre el botón. El código creado para esta función se dedica a generar un reporte de resultados con los datos ingresados de análisis y los resultados obtenidos del análisis de esfuerzo-deformación para el conjunto laminado.

Para hacer uso de este botón/función es necesario primero haber realizado un análisis debido a que el programa primero se encarga de revisar que no falte información, de otro modo el programa mostrara un mensaje que hace falta información. Si no hay información faltante y ya se realizó un análisis el programa recopila los datos de análisis, los concatena y los exporta como “.xls”. La forma de discernir si ya se realizó un análisis aun o no es por medio de una variable global, en este caso “STATUS_sol” la cual se actualiza dependiendo del estado de solución como en la **Figura A-33**.

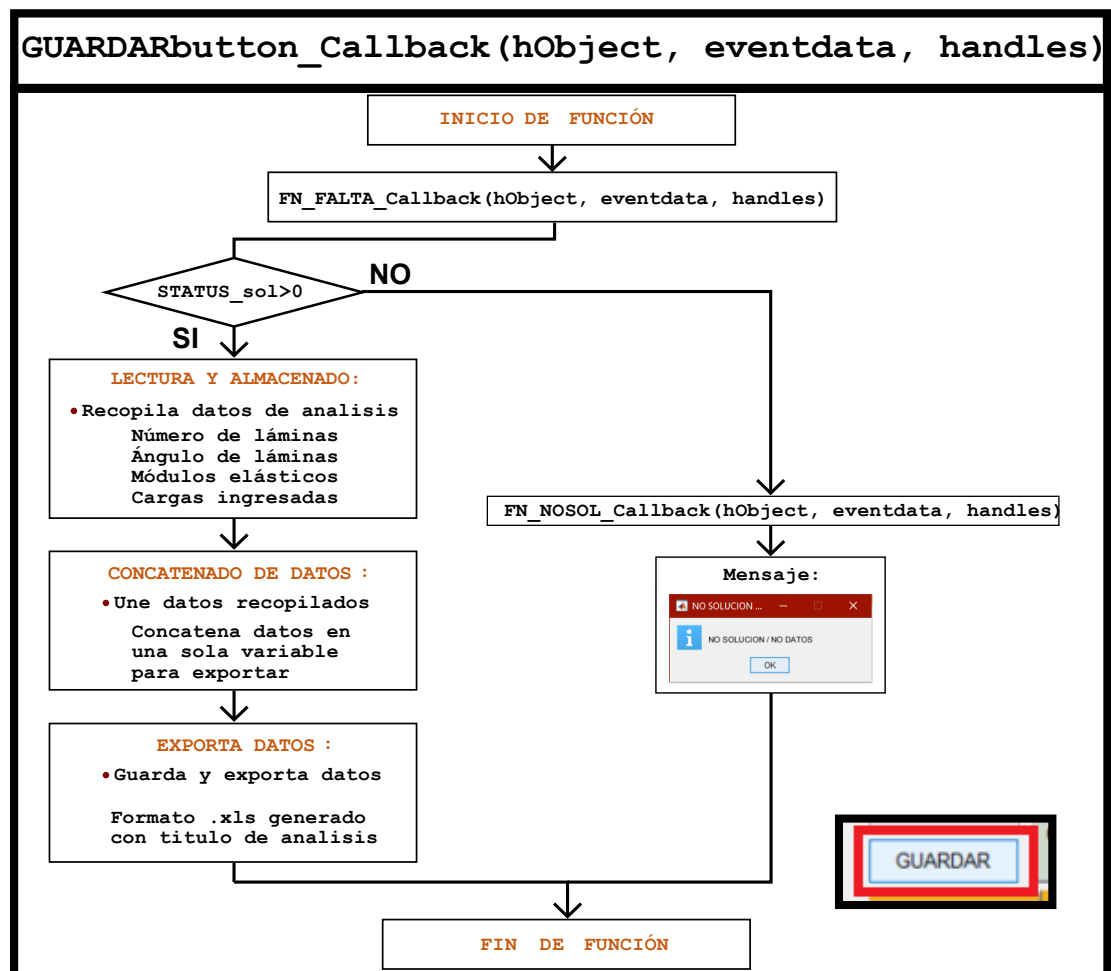


Figura A–33 Diagrama de función GUARDARbutton y captura de botón de interfaz.

Resumiendo, y cortando el código creado para poder ejemplificar su función sin mostrar todas las líneas de la función GUARDARbutton, la estructura generalizada de código de esta función se puede apreciar en la **Figura A-34: (Figura vectorizada para visualizar preferentemente en formato PDF digital).**

<pre>function GUARDARbutton_Callback(hObject, eventdata, handles) global Vf Vm E1 E2 p12 G12 global ... %CHECK SI FALTA INFORMACION FN_FALTA_Callback(hObject, eventdata, handles) %CHECK SI SE HA REALIZADO ANALISIS O NO (PARA PROCEDER A GUARDAR REPORTE) if STATUS_sol>0 ----- %START: MATRICES/TABLAS PRECONCATENAZION (actualiza tamaño de datos a 12 columnas) %----- for i=1:tamanow2(1) %Nueva matriz de ángulos (w2) w2new(i,:)=[w2(i,1),w2(i,2),{''},{''},{''},{''},{''},{''},{''},{''},{''},{''},{''}]; end ... %Variable tabla con todos los DATOS de analisis: ANALISIS_DATOS=[{'TITULO'}, {w1}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; {'**DATOS INGRESADOS:**'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''};%Seccion {'*****LAMINAS:'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''};%Seccion {'LAMINA'}, {'ANGULO'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; laminaangulo; {'*****DIMENSIONES:'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''};%Seccion {'LARGO'}, {w3_3}, {'[m]'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; {'ANCHO'}, {w3_4}... ... {'*****CARGAS INGRESADAS:'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''};%Seccion {'Ex'}, {w5_1}, {'[N]'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; {'Ey'}, {w5_2}... ... {'**VALORES MAXIMOS MATERIAL:'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''};%Seccion {'MAX XT'}, {w6_1}, {'[Pa]'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; ...]; %Variable tabla con todos los RESULTADOS de analisis: ANALISIS_RESULTADOS=[{'*****'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; {'*****RESULTADOS:*****'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''};%Seccion {'*****'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; {'*****ESFUERZOS LAMINADO (ENTERO)'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; {'sigmaX'}, {laminado_sigmax}, {'[Pa]'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; {'sigmaY'}, {laminado_sigmay}, {'[Pa]'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; {'sigmaXY'}, {laminado_sigmaxy}, {'[Pa]'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; {'*****MATRIZ FLEXIBILIDAD [S]'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; Snew; {'*****MATRIZ FLEXIBILIDAD [Q]'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; Qnew; {'*****MATRIZ ABD'}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}, {''}; ABDnew; ...]; %Variable tabla con todos los DATOS y RESULTADOS de analisis: DATOS=[ANALISIS_DATOS;ANALISIS_RESULTADOS]; tituloreporte=strcat(w1, '_REPORTE.xls'); xlswrite(tituloreporte,DATOS) %MENSAJE GUARDADO TERMINADO msgb_guardado=msgbox('GUARDADO TERMINADO', 'GUARDADO', 'help'); pause(2); delete(msgb_guardado); else FN_NOSOL_Callback(hObject, eventdata, handles) end</pre>	<p>Linea de código inicio de función correspondiente a "GUARDARbutton" la cual acciona al presionar el botón.</p> <p>Declaración/Inicialización de variables globales (usadas en diversas funciones).</p> <p>Llamado a subfunción FN_FALTA que se dedica a buscar si falta información para iniciar análisis de ingreso de datos.</p> <p>Condional que salta todo el código de exportar si STATUS_sol muestra que aun nose ha realizado análisis</p> <p>Sección de código que guarda diversos datos de pre-análisis y resultados en forma de celdas de 12 columnas. Esto, para permitir concatenar con datos de distinto número de columnas.</p> <p>Sección de código que concatena en arreglo de celdas todos los datos pre-análisis dentro la variable "ANALISIS_DATOS".</p> <p>Sección de código que concatena en arreglo de celdas todos los datos resultados de análisis dentro la variable "ANALISIS_RESULTADOS".</p> <p>Sección de código que concatena en una sola variable los datos de "ANALISIS_DATOS" y "ANALISIS_RESULTADOS".</p> <p>Sección de código que concatena título de reporte y exporta .xls con comando "xlswrite()".</p> <p>Sección de código que muestra mensaje de GUARDADO ha terminado.</p> <p>Condional que acciona si no se ha realizado análisis y muestra mensaje "NO SOLUCION" por medio de subfuncion "FN_NOSOL"</p>
---	--

Figura A-34 Secciones de código para función GUARDARbutton

A.3.4 Codificación de función botón CALCULAR Y GUARDAR. Descripción de estructura de código

El botón CALCYGUARDbutton es una función generada por GUIDE correspondiente al elemento grafico creado la cual se activa al hacer clic sobre el botón. El código creado para esta función se dedica accionar ambas acciones de los botones “CALCULAR” y “GUARDAR” de manera secuencial como se muestra en la **Figura A-35**.

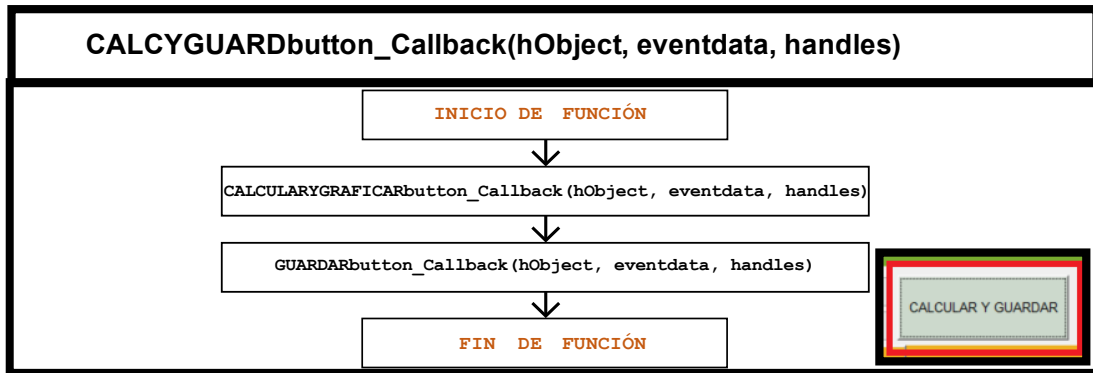


Figura A–35 Diagrama de función CALCYGUARDbutton y captura de botón de interfaz.

La funcionalidad de esta función específica no es compleja, sin embargo, fue añadida a este documento para ejemplificar como algunas funciones dentro de este programa de interfaz fueron generadas para fungir de funciones auxiliares amigables a usuario las cuales en ocasiones se dedican solamente a hacer llamado a otras funciones preexistentes por lo que no requieren detalles de explicación de estructura de código ni funcionamiento.

El código de esta función es relativamente sencillo y solo se dedica a llamar a las funciones CALCULAR y GUARDAR secuencialmente como se muestra en la **Figura A-36**:

```

function CALCYGUARDbutton_Callback(hObject, eventdata, handles)
    CALCULARbutton_Callback(hObject, eventdata, handles)
    GUARDARbutton_Callback(hObject, eventdata, handles)
  
```

Linea de código inicio de función correspondiente a "CALCYGUARDbutton" la cual acciona al presionar el botón.

Llamado a función 1 CALCULARbutton

Llamado a función 2 GUARDARbutton

Figura A–36 Secciones de código para función CALCYGUARDbutton.

A.3.5 Módulos de programa y codificado

La interfaz de usuario se codifica por medio de las herramientas de generación de interfaz de usuario MATLAB® GUIDE. Como se menciona en Apéndice A “[Funcionamiento de GUIDE](#)”, permitiendo la selección y acomodo de elementos gráficos para la creación de herramientas computacionales.

Codificación de la función del botón CALCULAR. Descripción de la estructura de código:

Considerando los dos tipos de funciones utilizadas dentro del código del programa principal y la interfaz de usuario, las distintas funciones se codifican de manera independiente e interdependiente dentro del código.

Para ejemplificar esta independencia e interdependencia de funciones, el principal modo para el análisis de un laminado compuesto se logra con el botón de interfaz “CALCULAR”, el cual es una función generada de GUIDE. Esta contiene y llama a las subfunciones necesarias para el cálculo de las distintas secciones de la matemática de laminados como se muestra en la **Figura A-37**:

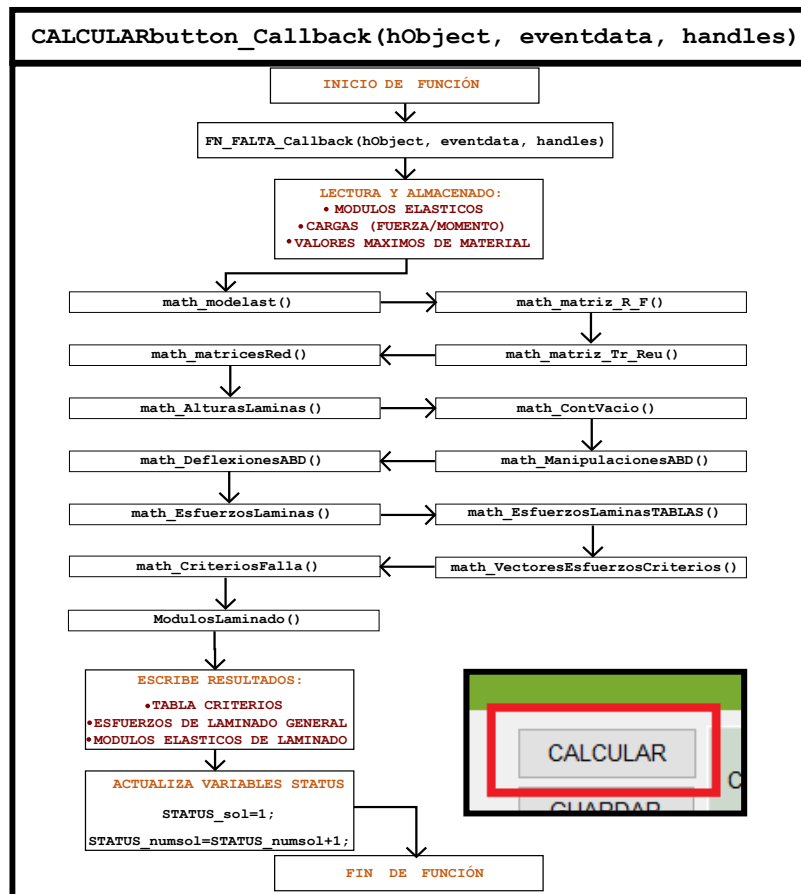


Figura A–37 Diagrama de función CALCULARbutton y captura de botón de interfaz.

Los nombres de las funciones llamadas dentro de la función “CALCULARbutton” en la Figura A-37 están nombradas como aparecen actualmente dentro del código de análisis de laminado y son llamados secuencialmente hasta finalizar el análisis.

Las funciones compartimentalizadas utilizadas dentro del botón “CALCULAR” tienen la siguiente funcionalidad:

- a) **CALCULARbutton_Callback(hObject, eventdata, handles)**
Función correspondiente al elemento gráfico botón “CALCULAR” cuyas líneas de código internas se accionan al presionar el botón.
- b) **FN_FALTA_Callback(hObject, eventdata, handles)**
Función llamada dentro de la función “CALCULARbutton” correspondiente a otro botón (con visibilidad apagada) cuya función es buscar cada uno de los cuadros de entrada de información para saber si falta información antes de correr un análisis.
- c) **math_modelast()**
Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular los módulos elásticos (E1, E2, G12, p12) de lámina por medio del método micromecánico Halpin Tsai o por ingreso de módulo directo dependiendo del modo utilizado actualmente. A esta función no se le inyectan ni exportan valores debido a que los módulos elásticos son calculados y guardados como variables globales.
- d) **math_matriz_R_F()**
Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular la matriz de rigidez de lámina [Q] y matriz de flexibilidad [S] de lámina.
- e) **math_matriz_Tr_Reu()**
Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular las matrices de transformación inversa y no inversa, así como la matriz Reuter.
- f) **math_matricesRed()**
Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular las matrices elásticas reducidas debido al ángulo de rotación actual en cada una de las láminas. Dentro de esta función también se degradan los módulos elásticos en 4 diversos modos, esto dependiendo si se encuentra activo un análisis progresivo.
- g) **math_AlturasLaminas()**
Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular por medio del número de láminas y grosor de estas, la altura de cada una de las láminas en su superficie inferior, superior e

intermedia, estos datos son utilizados para calcular esfuerzos dependientes de la altura al momento de estudiar laminados.

h) math_ContVacio()

Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular el contenido de vacío y la degradación de módulos de laminado correspondiente. Esta función tiene un condicional el cual si no está activado el menú auxiliar X1 no genera ningún tipo de degradación y se salta las líneas de código de esta función.

i) math_ManipulacionesABD()

Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular las matrices A, B y D de laminado, así como el armado de la matriz 6x6 [ABD].

j) math_DeflexionesABD()

Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular por medio de la matriz generada [ABD] las deflexiones y deformaciones en el laminado entero debido al vector de ingresado de cargas.

k) math_EsfuerzosLaminas()

Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular los esfuerzos en cada capa de lámina derivado de la deformación global de laminado.

l) math_EsfuerzosLaminasTABLAS()

Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a concatenar 4 arreglos 2D de tablas de esfuerzos y deformaciones en ambas su coordenada global y local para su tabulado en el submenú de resultados 3.

m) math_VectoresEsfuerzosCriterios()

Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a acomodar los valores de esfuerzo calculados en las capas de laminado en variables vector $\sigma_1(k)$, $\sigma_2(k)$, $\tau_{12}(k)$ para su fácil uso en los criterios de resistencia.

n) math_CriteriosFalla()

Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular a partir de los esfuerzos en material a distintas capas si estas fallan o no según las teorías matemáticas [Tsai-Hill, Hoffman, Tsai-Wu, Hashin, LaRC02] y genera las bases para su graficado y la tabulación de criterios del submenú de resultados 2.

o) ModulosLaminado()

Función creada por usuario llamada dentro de la función “CALCULARbutton” la cual se dedica a calcular los módulos elásticos de laminado entero.

Cada una de estas funciones creadas por usuario anteriormente mencionadas no retornan valores por medio de la función y tampoco tienen ingreso de datos. Esto es debido al uso de variables globales para el almacenamiento de datos de análisis de laminado los cuales por necesidad de mostrar en menús de resultados y en más de una función, es necesario su permanencia y accesibilidad, utilizando a variables globales como medio de almacenamiento entre funciones creadas por GUIDE y las creadas por usuario.

A.4 Información relativo a entorno de programación utilizado

A.4.1 Ventana de trabajo

El entorno de programación, como se muestra en la siguiente figura, contiene los elementos gráficos que permiten al usuario hacer uso del programa y generar códigos matemáticos que sean útiles a él. En la ventana se puede apreciar los espacios: [147]

- **Folder actual:**
Elemento grafico (ventana) que permite acceder a archivos de la computadora.
- **Command Window:**
Elemento grafico (ventana) que permite introducir líneas de comandos, identificada por el indicador (>>).
- **Workspace:**
Elemento grafico (ventana) que permite explorar datos o variables que se crean o sean importadas de archivos.

Como cualquier lenguaje de programación, al trabajar en MATLAB®, el usuario emite comandos que crean variables y llaman a funciones, permitiendo generar algoritmos los cuales se ejecutan línea por línea en orden secuencial hasta terminar la función programada. Captura de la interfaz se muestra en la **Figura A–38**.

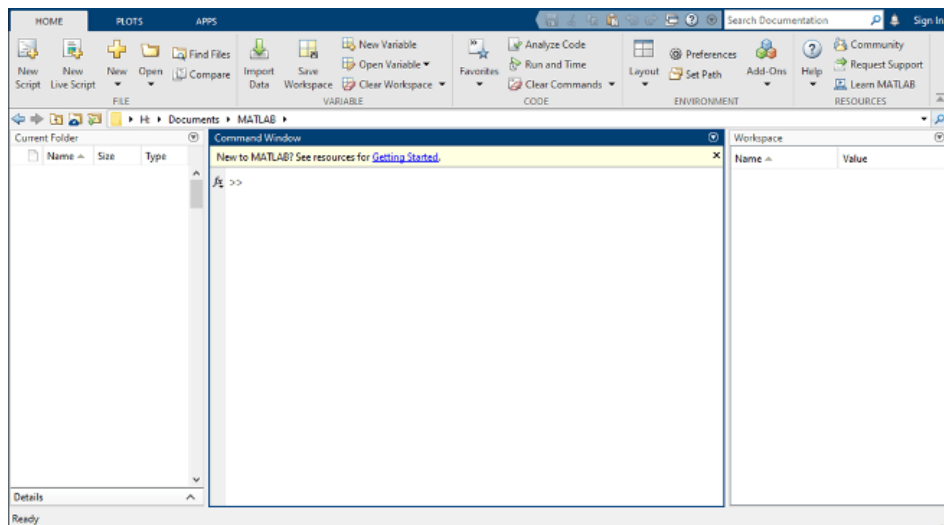


Figura A–38 Elementos gráficos de la ventana de trabajo en MATLAB®.

A.4.2 Funciones básicas

El ingreso de funciones básicas para programar puede ser por medio de la ventana de trabajo **Command Window** ingresando comandos independientes para trabajar de manera secuencial con variables y resultados que se van calculando y guardando, utilizando a MATLAB® como una calculadora o se puede hacer uso de la creación de “**scripts**” (o

algoritmos de renglones secuenciales) con diversas funciones los cuales se pueden guardar como archivos de texto y sólo se ejecutan hasta la selección del botón “Run”.

La función más básica del entorno de programación es el ingresar comandos por medio de la **Command Window**. Como cualquier lenguaje de programación, las funciones preexistentes en librerías de MATLAB que se ingresan son comúnmente una palabra o frase reservada la cual seguido de paréntesis se ingresa el llamado argumento con el cual funcionará una función determinada.

Como ejemplo, la función **linspace** del lenguaje MATLAB genera una lista de valores en el rango **X1** a **X2** con **n** número de valores separados equitativamente, la cual puede ser de utilidad cuando se requiere graficar valores u otros usos. Esto se puede apreciar a detalle en la **Figura A–39**.

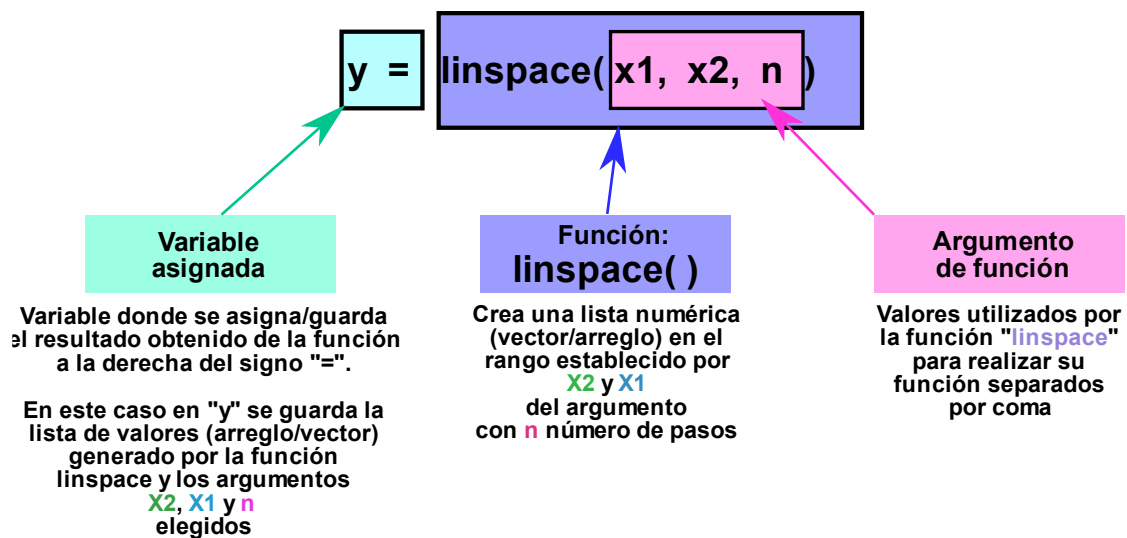


Figura A–39 Partes de la función linspace.

Para buscar la funcionalidad de una función específica del lenguaje de programación MATLAB se puede hacer clic al botón F1 del teclado o buscar la función en internet para encontrar información detallada acerca del uso de la función y sus argumentos.

Entre las funciones más utilizadas de posible utilidad en proyectos y paridad con lenguajes de programación genéricos se tienen:

- **Ciclos:** While, For
- **Condicionales:** If, Else, Switch
- **Librerías matemáticas:** Una gran librería con funciones matriciales, de estadística, probabilidad y muestra/graficación de datos.

A.4.3 Funcionamiento de GUIDE

MATLAB® GUIDE (Pronto a ser suplido por sucesor MATLAB® App Designer) es un entorno de programación y creación de interfaces de gráficos de usuarios. En él se permite la creación de distintos tipos de elementos gráficos como cajas de selección desplazables, botones, cuadros de texto actualizables, cuadros de ingreso de texto entre otros. Cada uno de estos elementos se genera paralelamente de manera gráfica así a como en forma de función la cual es utilizable en forma de código. La interfaz de creación de elementos gráficos se puede apreciar en la **Figura A–40**.

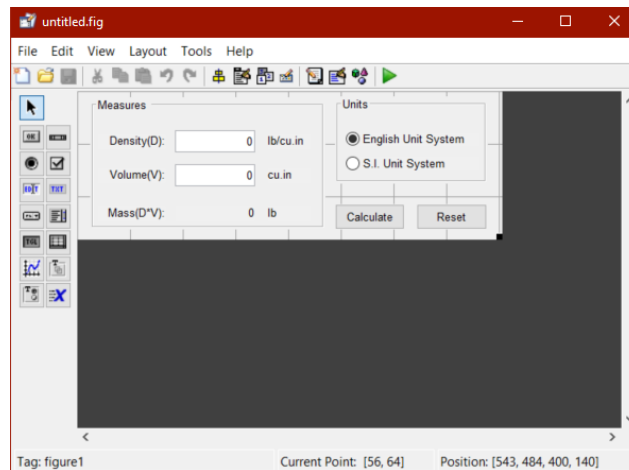


Figura A–40 Creación de elementos gráficos de GUIDE.

La funcionalidad de cada uno de los elementos gráficos (sea su creación al iniciar el programa o su acción al momento de ser seleccionados) se define por medio de funciones automáticamente generadas con el nombre correspondiente a cada uno de los elementos gráficos creados en un script con el mismo nombre que éste tiene la ventana de elementos gráficos. Dentro las funciones de cada uno de los elementos gráficos se puede codificar algoritmos por medio del uso de variables globales o locales lo que se desea calcular o mostrar en el programa. La ventana donde se encuentra el código generado se puede observar en la **Figura A–41**.

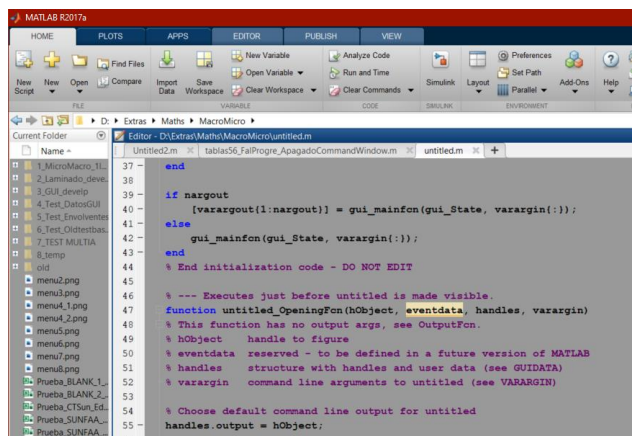


Figura A–41 Codificación de funcionalidad de elementos gráficos GUIDE.

Entre los elementos gráficos posibles a utilizar con MATLAB® GUIDE se encuentran:

A. Push Button

Elemento gráfico botón cuya función es correr el código que sea asignado a él cuando este es presionado. La función del botón solo será llevada a cabo 1 vez.

B. Radio Button

Elemento gráfico que permite seleccionar y deseleccionar el botón. Al ser seleccionado, el estado del botón se guarda, sea “on” u “off”.

C. Edit Text

Elemento gráfico que permite ingresar texto en él. Su contenido puede ser leído por otras funciones para usos diversos.

D. Pop-up Menu

Elemento gráfico que permite la apertura de un menú desplazable al ser seleccionado. Las opciones dentro del menú desplazable son personalizables y permite elegir entre diversas opciones.

E. Toggle Button

Elemento gráfico con funcionalidad de botón el cual permanece seleccionado una vez hecho clic sobre él. El botón mantiene guardado la posición de “seleccionado” o “no seleccionado” cuando es hecho clic sobre él.

F. Slider

Elemento gráfico que permite el desplazamiento de una barra de deslizamiento de valores la cual sirve de ingreso para variación de valores en un sistema.

G. Check Box

H. Elemento gráfico que permite seleccionar y deseleccionar el botón. Al ser seleccionado, el estado del botón se guarda, sea “on” u “off”.

I. Static Text

Elemento gráfico de función simple que permite mostrar texto. Este comúnmente sirve como cuadro de texto en títulos o la actualización de texto en cuadros donde no se desea el cambio de valores por el usuario.

J. Listbox

Elemento gráfico que permite la selección de diversas opciones de una caja. Similar a Pop-up Menú sin embargo en forma extendida todo el tiempo.

K. Table

Elemento gráfico que permite mostrar datos/tablas en una tabla dentro la interfaz.

L. Axes

Elemento gráfico que permite mostrar gráficos y datos graficables dentro de MATLAB dentro la interfaz en vez de una tabla de ventana emergente.

M. Panel

Elemento gráfico que permite la inclusión de diversos tipos de botones y elementos gráficos en un solo “subgrupo” el cual puede ser manipulado en forma conjunta.

N. Button Group

Elemento gráfico que permite igual a Panel, la inclusión de diversos tipos de elementos gráficos un “subgrupo” el cual puede ser manipulado en forma conjunta.

Los elementos gráficos numerados pueden ser observados en la **Figura A-42**:

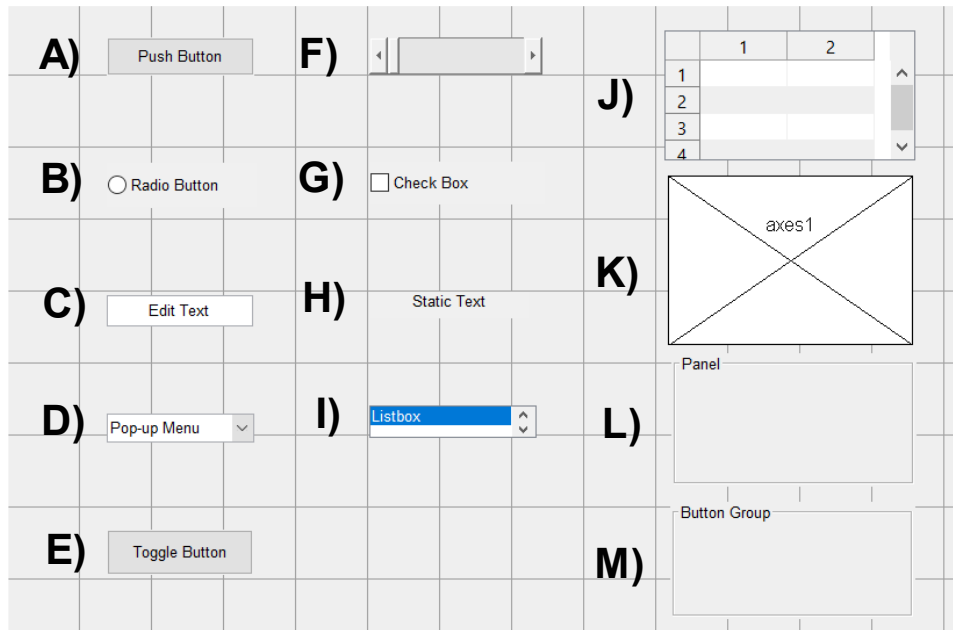


Figura A–42 Elementos gráficos de GUIDE.

Cada uno de los elementos gráficos anteriores puede ser manipulado en contenido y forma por medio de sus propiedades en las siguientes categorías:

- Contenido.
- Color de fondo.
- Color frontal.
- Texto.
- Posición.
- Estado (activo/desactivo).

Esto, por medio de código dentro la interfaz gráfica en funcionamiento, o por medio de GUIDE al hacer doble clic sobre el elemento gráfico deseado cambiar. Este menú de propiedades editables se puede observar en la **Figura A–43**.

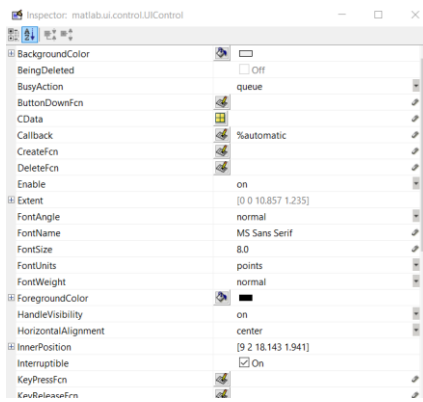


Figura A–43 Modificación de propiedades elementos gráficos en GUIDE.

A.5 Función de programas base iniciales

Códigos sencillos sentaron la base del desarrollo de las herramientas y funcionamiento de teorías en la creación del programa de análisis, comenzando con conceptos de micromecánica.

1) Código de fracción de volumen.

```
%Fracciones de volumen
255itul('-----Fracciones de volumen-----')
%Usuario ingresa las variables que se conocen/son necesarias para esta sección de 255itulu.
%Volumen de fibra y volumen de matriz
%Volumen de matriz y fibra es denotado por 255itulus255255 "v", vm y vf respectivamente.
%Fraccion de volumen de matriz y fibra es una 255itulus255255255 al volumen total
%del compuesto denotada por 255itulus255255 Vm y Vf respectivamente.
255itul('Ingresa el volumen de fibra (vf) [m^3]:')
vf=input('vf: \n')vfvf
255itul('Ingresa el volumen de matriz (vm) [m^3]:')
vm=input('vm: \n')
255itul('Volumen total vc es la suma de ambos 255itulus255255 de fibra y masa:')
vc=vf+vm
Vc=vc/vc;
255itul('La 255itulus255 de volumen de la fibra Vf es vf/vc ')
Vf=(vf/vc)
255itul('La 255itulus255 de volumen de la matriz Vm es vm/vc ')
Vm=(vm/vc)
%Graficacion en barra para visualizar porcentajes:
255itulus=categorical({'Compuesto', 'Matriz', 'Fibra'});
255itulus=reordercats(255itulus,{'Compuesto', 'Matriz', 'Fibra'});
vs=[Vc,Vm,Vf];
%col 255itu la variable donde se guarden 3 vectores de colores
col=[0,0,0;0,0,0;0,0,0];
%los siguientes 3 renglones le asignan valor a cada 255itulus del vector 1,2,3
%con el vector al cual se iguala
col(1,:) = [.5 .7 .5]; % -- gris oscuro
col(2,:) = [0.8 1 0.8]; % -- gris claro
col(3,:) = [.2 .4 .2]; % -- negro
%b=bar(255itulus,vs,'FaceColor','flat'); %single color
b=bar(255itulus(1),vs(1),'FaceColor',col(1,:));
hold on;
for i=2:length(vs)
    bar(titulos(i),vs(i),'FaceColor',col(i,:))
end
hold off;
```

El código sencillo anterior calcula el porcentaje (o fracciones de volumen) debido a una cantidad conocida del volumen de matriz y fibra seguido de graficar en barras el porcentaje de ambos materiales. Resultado obtenido en **Figura A–44**.

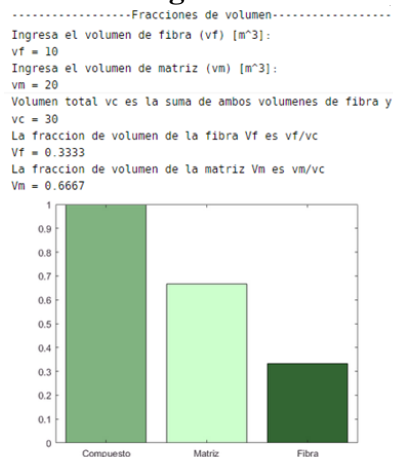


Figura A–44 Valores obtenidos de código fracción de volumen.

2) Código de fracción de masa.

```

%Fracciones de masa
256itul('-----Fracciones de masa-----')
%Usuario ingresa las variables que se conocen/son necesarias para esta sección de 256itulu.
%Masa de fibra y masa de matriz
256itul('Ingresa la masa de fibra (wf) [kg]:')
wf=input('wf (kg): \n')
256itul('Ingresa la masa de matriz (wm) [kg]:')
wm=input('wm (kg): \n')
256itul('Masa total wc es la suma de ambos 256itulus256256 de fibra y masa:')
wc=wf+wm
disp('kg')
256itul('La 256itulus256 de masa (peso) de la fibra Wf es wf/wc')
Wf=(wf/wc)
256itul('La 256itulus256 de masa (peso) de la matriz Wm es wm/wc')
Wm=(wm/wc)
Wc=wc/wc;
%Graficacion en barra para visualizar porcentajes:
titulos1=categorical({'Compuesto', 'Matriz', 'Fibra'});
titulos1=reordercats(titulos1,{'Compuesto', 'Matriz', 'Fibra'});
vs=[Wc,Wm,Wf]; col=[0,0,0;0,0,0;0,0,0];
col(1,:) = [.5 .5 .7]; % -- gris oscuro
col(2,:) = [0.8 0.8 1]; % -- gris claro
col(3,:) = [.2 .2 .4]; % -- negro
b1=bar(titulos1(1),vs(1),'FaceColor',col(1,:));
hold on;
for i=2:length(vs)
    bar(titulos1(i),vs(i),'FaceColor',col(I,:))
end
hold off;

```

El código sencillo anterior calcula el porcentaje (o fracciones de masa) debido a una cantidad conocida de masa de matriz y fibra seguido de graficar en barras el porcentaje de ambos materiales. Resultado obtenido en **Figura A-45**.

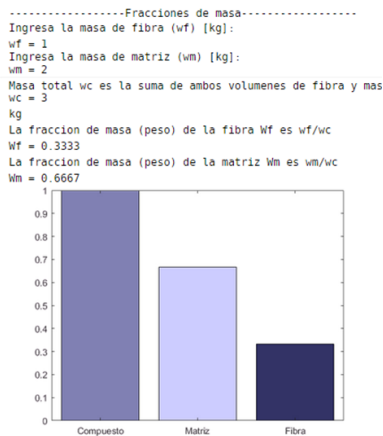


Figura A-45 Valores obtenidos de código fracción de masa.

3) Código de fracción de masa (por densidades y volúmenes).

```

Fracciones de masa (densidades y 257itulus257257)
257itul('-----Fracciones de masa (densidades y 257itulus257257)-----')
%Usuario ingresa las variables que se conocen/son necesarias para esta sección de 257itulu.
%Densidades y 257itulus257257 de matriz y fibra.
257itul('Se debe conocer densidades y volúmenes')
257itul('Ingresa el volumen de fibra (vf) [m^3]:')
vf=input('Volumen fibra vf: [m^3] \n')
257itul('Ingresa el volumen de matriz (vm) [m^3]:')
vm=input('Volumen matriz vm: [m^3] \n')
257itul('Voluen total vc es la suma de ambos 257itulus257257 de fibra y masa:');
vc=vf+vm
Vc=vc/vc;
257itul('La 257itulus257 de volumen de la fibra Vf es vf/vc ')
Vf=(vf/vc)
257itul('La 257itulus257 de volumen de la matriz Vm es vm/vc ')
Vm=(vm/vc)
257itul('Ingrese la densidad de la fibra (kg/m^3)')
rf=input('Densidad fibra rf: [kg/m^3] \n')
257itul('Ingrese la densidad de la matriz (kg/m^3)')
rm=input('Densidad matriz rm: [kg/m^3] \n')
%Fraccion de masa Wf se obtiene de un despeje de la 257itulus257257257 de la 257itulus257 de
%densidad, de la cual se obtiene:
257itul('Fraccion de masa de la fibra Wg es:')
Wf=((rf/rm)*Vf)/(((rf/rm)*Vf)+Vm)
257itul('Fraccion de masa (peso) de la matriz Wm es wm/wc')
Wm=(Vm/((rf/rm)*(1-Vm)+Vm))
Wc=Wf+Wm;
%Graficacion en barra para visualizar porcentajes:
titulos1=categorical({'Compuesto', 'Matriz', 'Fibra'});
titulos1=reordercats(titulos1,{'Compuesto', 'Matriz', 'Fibra'});
vs=[Wc,Wm,Wf];
col=[0,0,0;0,0,0;0,0,0];
col(1,:) = [.5 .5 .7]; % -- gris oscuro
col(2,:) = [0.8 0.8 1]; % -- gris claro
col(3,:) = [.2 .2 .4]; % -- negro
b1=bar(titulos1(1),vs(1),'FaceColor',col(1,:));
hold on;
for i=2:length(vs)
    bar(titulos1(i),vs(i),'FaceColor',col(i,:))
end
hold off;

```

El código sencillo anterior calcula el porcentaje (o fracciones de masa) debido a una cantidad conocida de masa de matriz y fibra seguido de graficar en barras el porcentaje de ambos materiales. Resultado obtenido en **Figura A-46**.

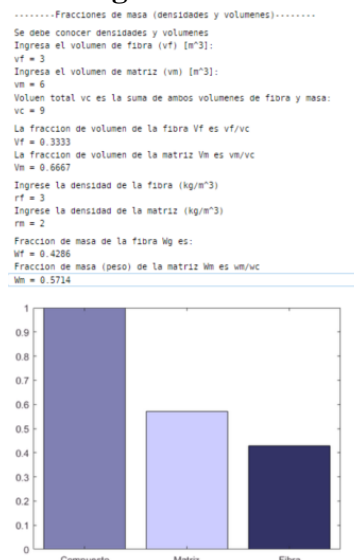


Figura A-46 Valores obtenidos de código fracción de masa (por densidades y volúmenes).

4) Código de fracción de volumen (con vacío).

```

Fracciones de volumen (con vacío)
%El contenido de vacío en un material compuesto detrimenta las propiedades
%en materiales compuestos.
258itul('-----Fraccion de vacío-----')
%Usuario ingresa las variables que se conocen/son necesarias para esta sección de
%Volumen de vacío y volumen de compuesto.
%Volumen de matriz, fibra y vacío es denotado por "v", vm, vf y vv respectivamente.
%Fraccion de volumen de matriz, fibra y vacío es una al volumen total
%del compuesto denotada por Vm, Vf y Vv respectivamente.
258itul('Ingresa el volumen de fibra (vf) [m^3]:')
vf=input('Volumen de fibra vf: \n')
258itul('Ingresa el volumen de matriz (vm) [m^3]:')
vm=input('Volumen de matriz vm: \n')
258itul('Ingresa el volumen de vacío (vv) [m^3]:')
vv=input('Volumen de vacío vv: \n')
258itul('Volumen total vc es la suma de de fibra, masa y vacío:')
vc=vf+vm+vv
Vc=vc/vc;
258itul('La de volumen de la fibra Vf es vf/vc ')
Vf=(vf/vc)
258itul('La de volumen de la matriz Vm es vm/vc ')
Vm=(vm/vc)
258itul('La de volumen de la vacío Vv es vv/vc ')
Vv=(vv/vc)
%Graficacion en barra para visualizar porcentajes:
titulos1=categorical({'Compuesto', 'Matriz', 'Fibra', 'Vacío'});
titulos1=reordercats(titulos1,{'Compuesto', 'Matriz', 'Fibra', 'Vacío'});
vs=[Vc,Vm,Vf,Vv];
col=[0,0,0;0,0,0;0,0,0];
col(1,:) = [.5 .5 .7]; % -- oscuro
col(2,:) = [0.8 0.8 1]; % -- claro
col(3,:) = [.2 .2 .4]; % -- negro
col(4,:) = [1 1 1]; % -- white
%b=bar(258itulus,vs,'FaceColor','flat'); %single color
b1=bar(titulos1(1),vs(1),'FaceColor',col(1,:));
hold on;
for i=2:length(vs)
    bar(titulos1(i),vs(i),'FaceColor',col(i,:))
end
hold off;

```

El código sencillo anterior calcula el porcentaje (o fracciones de volumen) debido a una cantidad conocida del volumen de matriz, fibra y contenido de vacío, seguido de graficar en un gráfico de barras el porcentaje de ambos materiales. Resultado obtenido en **Figura A–47**.

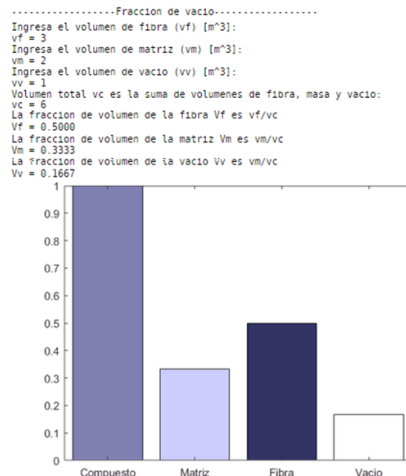


Figura A–47 Valores obtenidos de código fracción de volumen (con vacío)

•

.

