

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS



**RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN
IMÁGENES DIGITALES USANDO MÁSCARAS DE
HILBERT BINARIAS DE ANILLOS
CONCÉNTRICOS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

PRESENTA:

DIEGO FRANCISCO ALCARAZ UBACH

Ensenada, Baja California, México.

Septiembre de 2015.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN
IMÁGENES DIGITALES USANDO MÁSCARAS DE
HILBERT BINARIAS DE ANILLOS
CONCÉNTRICOS

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

DIEGO FRANCISCO ALCARAZ UBACH

APROBADO POR:



DRA. SELENE SOLORZA
CALDERÓN

DIRECTOR DE TESIS



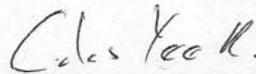
M.C. ADINA JORDAN
ARAMBURO

SINODAL



M.C. GLORIA ELENA
RUBÍ VÁZQUEZ

SINODAL



DR. CARLOS YEE
ROMERO

SINODAL

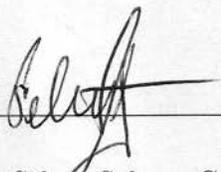
RESUMEN de la Tesis de Diego Francisco Alcaraz Ubach, presentada para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Ensenada, Baja California, México, septiembre de 2015.

**RECONOCIMIENTO DE PATRONES EN IMÁGENES
DIGITALES USANDO MÁSCARAS DE HILBERT BINARIAS
DE ANILLOS CONCÉNTRICOS**

El reconocimiento de patrones en imágenes digitales es un campo de investigación relevante para distintas áreas. Existen sistemas de reconocimiento de patrones que ayudan a automatizar la clasificación de objetos mediante imágenes capturadas con un microscopio, donde en algunos casos el tamaño o escala de los objetos a estudiar no varía, a diferencia de su posición y orientación. En este trabajo de tesis se desarrolla un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante a posición y rotación, fundamentado en la teoría de la transformada de Fourier y de la transformada de Hilbert. Para esto, se generan dos máscaras binarias de anillos concéntricos que surgen del estudio de la transformada de Hilbert radial, las cuales son la base para que el sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales sea invariante a rotación.

Palabras clave: Reconocimiento de patrones, procesamiento de imágenes, transformada de Fourier, transformada de Hilbert, máscaras Hilbert.

Resumen aprobado por:



Dra. Selené Solorza Calderón

Agradecimientos

Agradezco a la Dra. Selene Solorza, por darme la oportunidad de trabajar con ella, por estar siempre dispuesta a ayudarme y por el tiempo que invirtió en la realización de esta tesis.

A mis sinodales la M.C. Adina Jordán, la M.C Gloria Rubí y el Dr. Carlos Yee, por las correcciones y observaciones realizadas para mejorar este trabajo.

Al CONACYT, por el apoyo para la elaboración de este trabajo de tesis, en específico, por la beca del proyecto de Ciencia Básica SEP-CONACYT 2011 con número 169174 y titulado: *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales mediante máscaras binarias de anillos concéntricos y firmas unidimensionales invariantes a posición, rotación y escalamiento.*

Índice general

Introducción	1
1. Fundamentos matemáticos	4
1.1. Transformada de Fourier	4
1.1.1. Series de Fourier	5
1.1.2. Integral de Fourier	10
1.1.3. Propiedades de la transformada de Fourier y la función signo	13
1.1.4. Teorema de convolución	17
1.1.5. Transformada de Fourier en dimensión n	19
1.2. Transformada de Hilbert	20
1.2.1. Transformada de Hilbert sobre la recta real	21
1.2.2. Transformada de Hilbert en el espacio de frecuencia	25
1.2.3. Transformada de Hilbert en dimensión n	27
1.3. Señales	29
1.3.1. Imagen digital	29
1.3.2. Señal analítica	30
1.4. Funciones discretas	31
1.4.1. Transformada discreta de Fourier	32
1.4.2. Convolución discreta	34
1.4.3. Transformada discreta de Hilbert	35
1.4.4. Transformada discreta de Fourier bidimensional	38
1.4.5. Transformada discreta de Hilbert bidimensional	39
1.5. Transformada de Hilbert radial	39
2. Fundamentos del reconocimiento de patrones	42
2.1. Transformada de Fourier de una imagen	42

2.1.1. Invariancia a posición	43
2.2. Filtrado de imágenes	45
2.2.1. Filtrado espacial	45
2.2.2. Filtrado en frecuencia	46
3. Sistema de reconocimiento de patrones invariante a posición y rotación	47
3.1. Máscaras Hilbert	47
3.2. Firmas unidimensionales invariantes a traslación y rotación . .	50
4. Plano de clasificación y nivel de confianza del sistema de reconocimiento de patrones	53
5. Conclusiones	60
Referencias	61

Índice de figuras

1.1. Curva cerrada Γ orientada positivamente.	22
1.2. Contorno formado por las medias circunferencias C_R y C_ε , y la unión de los intervalos $(-R, x_0 - \varepsilon)$ y $(x_0 + \varepsilon, R)$. La curva C_R está orientada positivamente y la curva C_ε se recorre en sentido negativo.	23
1.3. Esquema del método para determinar la función análoga a $\frac{1}{\pi x}$ para los casos: variable continua en frecuencia, variable discreta en frecuencia y variable discreta.	35
1.4. Pulso rectangular y el valor absoluto de su transformada de Hilbert.	40
2.1. Ejemplificación de la invariancia a posición del módulo de la transformada de Fourier de una imagen. a) Imagen I . b) $ \mathcal{F}_F[I] $. c) Imagen J . d) $ \mathcal{F}_F[J] $. Ambos espectros de amplitud se muestran bajo una transformación logarítmica por cuestiones de visualización.	44
3.1. a) Parte real de $H[k_1, k_2]$: $Re[H]$. b) Parte imaginaria de $H[k_1, k_2]$: $Im[H]$	48
3.2. a) Disco binario D . b) Máscara H_R . c) Máscara H_I	49
3.3. Filtros H_R y H_I actuando sobre el espectro de amplitud de Fourier de la imagen. a) Imagen I . b) Módulo de la transformada de Fourier de I . c) Espectro de amplitud de Fourier filtrado con H_R . d) Espectro de amplitud de Fourier filtrado con H_I . Por cuestiones de visualización, las imágenes de los espectros de amplitud se muestran bajo una transformación logarítmica.	50

3.4. Firmas correspondientes a una imagen. a) Imagen I . b) Firma f_R . c) Firma f_I	52
4.1. Base de datos: imágenes digitales de fósiles de diatomeas.	54
4.2. Rectángulo de confianza del 95.4% en color azul, rectángulo de confianza del 68.3% en color cian y el punto rojo indica la coordenada $(\bar{X}_{P^A}, \bar{X}_{I^A})$	57
4.3. Plano de clasificación de las imágenes de fósiles de diatomeas de la Figura 4.1.	58
4.4. Amplificación de la Figura 4.3 correspondientes a los rectángulos de confianza de diatomeas G, U, H y F	58
4.5. Amplificación de la Figura 4.3 correspondientes a los rectángulos de confianza de diatomeas E, P, D, I, N, R, M y S	59

Introducción

El reconocimiento de patrones es un área de interés en los sectores social y económico, en distintos campos de la ciencia y en el desarrollo de tecnologías, por citar sólo algunos ejemplos. Desarrollar nuevas aplicaciones, algoritmos y técnicas más eficientes y mejores tecnologías, es una tarea multidisciplinaria en donde participan ingenieros, físicos, matemáticos, entre otros.

Las aplicaciones del reconocimiento de patrones se pueden clasificar en los siguientes grupos: comunicación entre las computadoras y el hombre, biomedicina, física, aspectos de seguridad, estudio y estimación de recursos naturales, estereología, industria y robótica e inteligencia artificial [1]. La mayoría de las aplicaciones del reconocimiento de patrones, correspondientes a los grupos mencionados, están basadas en herramientas que surgen del estudio de distintas ramas de las matemáticas. En particular, el reconocimiento de patrones en imágenes digitales se sustenta, en gran medida, en conceptos y resultados del análisis funcional. Además, las teorías de la estadística paramétrica juegan un papel esencial para dar validez a las aplicaciones desarrolladas en esta área.

En general, para desarrollar aplicaciones de las matemáticas se parte de conceptos o resultados ya estudiados y algunas veces no se presta suficiente atención a las bases teóricas de éstos. En ocasiones, adentrarse en la teoría parece innecesario por fines prácticos; sin embargo, conocer, estudiar y plasmar de dónde o cómo surgen dichos conceptos o resultados amplía el panorama y aumenta la posibilidad de encontrar otras aplicaciones, además de ser una actividad enriquecedora en todos sentidos, tanto para el lector como para el

que redacta. Desde esta última perspectiva, en este trabajo se presenta parte de la teoría de la transformadas de Fourier y de Hilbert, junto con un sistema digital de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante a posición y rotación basado en dichas transformadas.

La transformada de Fourier ha sido ampliamente estudiada y aplicada en el campo del reconocimiento de patrones, por esto se introduce únicamente parte de la base teórica del análisis de Fourier y se desarrolla la teoría necesaria para relacionar la transformada de Fourier con la de Hilbert, además, se establecen los fundamentos utilizados para la implementación del sistema digital de reconocimiento de patrones. Por el contrario, la transformada de Hilbert no es reconocida del todo por su utilidad en el reconocimiento de patrones en imágenes digitales, sus principales aplicaciones son en el área de procesamiento de señales unidimensionales.

Una ventaja de la transformada de Fourier, es que las aplicaciones de ésta para funciones de una variable se extienden de manera natural para funciones multivariantes. Desafortunadamente, la transformada de Hilbert no tiene esa ventaja; al calcular la transformada de Hilbert de señales bidimensionales (por ejemplo imágenes) no se obtienen los mismos resultados que para señales unidimensionales. Por ello, se han propuesto distintas transformadas de Hilbert con el objetivo de extender las aplicaciones de una a dos dimensiones. Entre dichas propuestas, se encuentra la *transformada de Hilbert radial* [2,3], a partir de la cual se elaboraron dos máscaras binarias de anillos concéntricos para lograr la invariancia a rotación, a las cuales se les denominó *máscaras Hilbert*.

Este trabajo se divide en cinco capítulos. En el primero, se describen los fundamentos teóricos de la transformada de Fourier y de la transformada de Hilbert. Además, se sientan las bases matemáticas del sistema digital de reconocimiento de patrones, desarrollado a partir de la transformada de Hilbert radial. El segundo capítulo trata sobre los fundamentos del reconocimiento de patrones en imágenes digitales. El tercer capítulo describe la metodología para el desarrollo del sistema de reconocimiento de patrones invariante a posición y rotación. En el cuarto capítulo se muestran los resultados y

la validación del sistema. Finalmente, en el capítulo cinco se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Fundamentos matemáticos

Este capítulo trata sobre la teoría de la transformada de Fourier y de la transformada de Hilbert para funciones de variable continua y discreta. Además, se introducen los conceptos de *señal* e *imagen digital* y se mencionan algunas aplicaciones de la transformada de Hilbert en el procesamiento de señales.

1.1. Transformada de Fourier

Los orígenes del análisis de Fourier se remontan al estudio de algunas ecuaciones diferenciales parciales. A mediados del siglo XVIII, personajes como D'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli y Lagrange propusieron series trigonométricas como solución general al problema de la cuerda vibrante [4]. Posteriormente, a principios del siglo XIX, Fourier estudió el tipo de funciones que admiten representación en series trigonométricas. De todas estas contribuciones, surge lo que hoy se conoce como series de Fourier [6].

1.1.1. Series de Fourier

Debido a que la transformada de Fourier se deriva de las series de Fourier, presentar la definición de esta transformada no tiene mucho sentido si antes no se muestra qué son y de dónde provienen las series de Fourier. Aun cuando el estudio de las series de Fourier surgió de proponer series trigonométricas como soluciones generales a ecuaciones diferenciales, gracias al desarrollo del análisis funcional en el siglo XIX es posible introducir las series de Fourier desde otra perspectiva.

Llámesese $\mathcal{C}[a, b]$ al conjunto de funciones continuas cuyo dominio es el intervalo $[a, b]$, con valores en \mathbb{C} . Al ser un conjunto de funciones continuas, es fácil mostrar que $\mathcal{C}[a, b]$ es un espacio vectorial.

Es posible definir distintos atributos entre funciones pertenecientes a $\mathcal{C}[a, b]$, como el producto escalar, definido para $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ de la siguiente manera:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (1.1.1)$$

donde $\overline{g(x)}$ denota el complejo conjugado de la función g .

En un espacio vectorial \mathbb{V} con dimensión finita, todo $v \in \mathbb{V}$ puede expresarse como una combinación lineal de elementos de alguna base β . Si \mathbb{V} es de dimensión infinita, la base β no es de cardinalidad finita; para este caso, si β es una colección numerable de vectores, cada $v \in \mathbb{V}$ se puede representar mediante una sucesión de sumas parciales que son combinaciones lineales de los elementos de β , es decir, mediante series. Como es posible encontrar una infinidad de funciones continuas linealmente independientes en $[a, b]$, una base para $\mathcal{C}[a, b]$ no es de cardinalidad finita. Por ejemplo, una base para el espacio vectorial $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ es el conjunto de funciones

$$\{1, e^{\pm ix}, e^{\pm 2ix}, e^{\pm 3ix}, \dots, e^{\pm nix}, \dots\}, \quad (1.1.2)$$

teniendo en cuenta la fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, se tendría una forma de expresar a funciones continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ mediante

los elementos de (1.1.2), es decir, mediante series de senos y cosenos (series trigonométricas) [4].

Para demostrar que el conjunto 1.1.2 es una base de $\mathcal{C}[a, b]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \langle 1, e^{imx} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} [\cos mx - i \operatorname{sen} mx] dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx - i \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx dx \\
 &= \frac{\operatorname{sen} mx}{m} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + i \frac{\cos mx}{m} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

por lo que 1 y e^{imx} son ortogonales, para $m \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, tomando el producto escalar entre e^{imx} y e^{inx} con $m, n \in \mathbb{Z}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \langle e^{imx}, e^{inx} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x] dx + i \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}[(m-n)x] dx.
 \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Si $m \neq n$, entonces

$$\begin{aligned}
 \langle e^{imx}, e^{inx} \rangle &= \frac{\operatorname{sen}[(m-n)x]}{m-n} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - i \frac{\cos[(m-n)x]}{m-n} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

lo que indica que e^{imx} y e^{inx} son ortogonales entre sí. Si $m = n$, entonces,

$$\begin{aligned}
 \langle e^{imx}, e^{inx} \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} dx \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

De las ecuaciones (1.1.3), (1.1.5) y (1.1.6), queda determinado que el conjunto (1.1.2) es ortogonal. Dado que $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ está contenido en el espacio de Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$ y cualquier conjunto ortogonal de un espacio de Hilbert forma una base [5], el conjunto $\{1, e^{\pm ix}, e^{\pm 2ix}, e^{\pm 3ix}, \dots, e^{\pm nix}, \dots\}$ genera a $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$.

Suponiendo que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ converge uniformemente en el intervalo $[-\pi, \pi]$ a una función $f(x)$ continua en $[-\pi, \pi]$, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (1.1.7)$$

entonces los coeficientes c_n se pueden calcular tomando el producto escalar entre $f(x)$ y e^{imx} , como:

$$\begin{aligned} \langle f(x), e^{imx} \rangle &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, e^{imx} \right\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle c_n e^{inx}, e^{imx} \rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \langle e^{inx}, e^{imx} \rangle \\ &= 2\pi c_m. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

De aquí, se tiene que

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{2\pi} \langle f(x), e^{imx} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

para $m \in \mathbb{Z}$ [7].

A la ecuación (1.1.7), se le conoce como la *serie de Fourier compleja* de la función $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, donde los coeficientes c_n se calculan mediante la ecuación (1.1.9). Si la función f es periódica, con periodo 2π , se puede obtener su serie de Fourier no sólo en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Si la función $f(t)$ está definida para valores $t \in [a, b]$, la transformación

$$x = \frac{2\pi(t-a)}{L} - \pi, \quad (1.1.10)$$

con $L = b - a$, hace que $f(x)$ quede definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ [7]. De

esta forma,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\left[\frac{2\pi(t-a)}{L} - \pi\right]} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i2n\pi t}{L}} e^{-\frac{i2n\pi a}{L}} e^{-in\pi} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i2n\pi t}{L}} e^{-\frac{i2n\pi a}{L}} (-1)^n.
 \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-in\left[\frac{2\pi(t-a)}{L} - \pi\right]} f(t) \frac{2\pi}{L} dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_a^b e^{-\frac{i2n\pi t}{L}} e^{\frac{i2n\pi a}{L}} e^{in\pi} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{L} \int_a^b e^{-\frac{i2n\pi t}{L}} e^{\frac{i2n\pi a}{L}} (-1)^n f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (1.1.12) en (1.1.11),

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\frac{2n\pi}{L}x}, \tag{1.1.13}$$

con

$$d_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-i\frac{2n\pi}{L}x} dx. \tag{1.1.14}$$

Por lo tanto, una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, se puede expresar como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2n\pi\nu_0 x}, \tag{1.1.15}$$

en donde los coeficientes c_n , se calculan mediante

$$c_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-i2n\pi\nu_0 x} dx, \tag{1.1.16}$$

con $\nu_0 = \frac{1}{L}$. En particular, para alguna función periódica $f(x)$ continua con periodo T , se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2n\pi\nu_0 x}, \quad (1.1.17)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i2n\pi\nu_0 x} dx, \quad (1.1.18)$$

para la cual $\nu_0 = \frac{1}{T}$ representa la frecuencia fundamental de $f(x)$. También se puede expresar la serie de Fourier compleja de la función $f(x)$ en términos de la frecuencia angular ω :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x}, \quad (1.1.19)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx, \quad (1.1.20)$$

en donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Convergencia de las series de Fourier

Si la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2n\pi\nu x}, \quad (1.1.21)$$

converge uniformemente a la función $f(x)$, es posible calcular los coeficientes c_n para obtener la serie de Fourier compleja de la función. Por otro lado, teniendo una función $f(x)$ es posible determinar cuándo admite representación en series de Fourier, es decir, se pueden establecer condiciones para la convergencia de la serie de Fourier de la función.

Si una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ satisface que $f(x)$ tiene únicamente un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, tiene un número finito de máximos y mínimos en $[a, b]$, y es absolutamente integrable en $[a, b]$, entonces la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2n\pi\nu x} \quad (1.1.22)$$

converge a $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$. A las condiciones anteriores, se les denomina *condiciones de Dirichlet* [8].

1.1.2. Integral de Fourier

La serie de Fourier de una función, se puede extender a la recta real. Para el caso de funciones definidas en $[a, b]$, se hace tender L a infinito; y, para funciones con periodo T , se toma el límite cuando T tiende a infinito. Ambos casos dan lugar a la integral de Fourier [9].

Si la función $f(x)$ admite representación en series de Fourier dentro de un intervalo $[a, b]$, entonces,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2n\pi\nu_0 x}, \quad (1.1.23)$$

con $\nu_0 = \frac{1}{L}$ y

$$c_n = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-i2n\pi\nu_0 x} dx. \quad (1.1.24)$$

Sustituyendo la ecuación (1.1.24) en (1.1.23),

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{L} \int_a^b f(s) e^{-i2n\pi\nu_0 s} ds \right] e^{i2n\pi\nu_0 x}. \quad (1.1.25)$$

Como $\nu_0 = \frac{1}{L}$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_a^b f(s) e^{-i2n\pi\nu_0 s} ds \right] e^{i2n\pi\nu_0 x} \nu_0. \quad (1.1.26)$$

Sea $\Delta\nu = \nu_0$, entonces $n\nu_0 = n\Delta\nu$ y

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_a^b f(s) e^{-i2n\pi\Delta\nu s} ds \right] e^{i2n\pi\Delta\nu x} \Delta\nu. \quad (1.1.27)$$

En el límite cuando L tiende a infinito, $n\Delta\nu$ tiende a ν y $\Delta\nu$ tiende a $d\nu$. Por lo tanto, la ecuación (1.1.25) se convierte en

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i2\pi\nu s} ds \right] e^{i2\pi\nu x} d\nu, \quad (1.1.28)$$

a la cual se le conoce como la *integral de Fourier* [9].

Transformada de Fourier de una función

De la ecuación (1.1.28), la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i2\pi\nu s} ds \quad (1.1.29)$$

es una función $F(\nu)$ denominada *transformada de Fourier* de la función f , la cual se denota por el operador \mathcal{F} . Es decir, la transformada de Fourier de la función $f(x)$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu x} dx \\ &= F(\nu). \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

Por otra parte, al operador inverso \mathcal{F}^{-1} se le conoce como *transformada inversa de Fourier*, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[F(\nu)] &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu x} d\nu \\ &= f(x). \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

A las ecuaciones (1.1.30) y (1.1.31), también se les conoce como el *par de transformadas de Fourier*. La función $e^{-i2\pi\nu x}$ es el *núcleo de la transformada de Fourier* y $e^{i2\pi\nu x}$ el *núcleo de la transformada inversa de Fourier*. Además, al dominio de la transformada de Fourier de una función $f(x)$ se le conoce como *espacio de frecuencias* o *espacio de Fourier*. Es decir, la representación de la función $f(x)$ en el espacio de frecuencias está dada por $\mathcal{F}[f(x)]$.

La transformada de Fourier de una función $f(x)$, denotada por $F(\nu)$, se puede separar en su parte real $Re[F(\nu)]$ y su parte imaginaria $Im[F(\nu)]$:

$$\begin{aligned}
 F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu x} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(2\pi\nu x) + i \operatorname{sen}(2\pi\nu x)] dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(2\pi\nu x)] dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\operatorname{sen}(2\pi\nu x)] dx \\
 &= Re[F(\nu)] + iIm[F(\nu)].
 \end{aligned} \tag{1.1.32}$$

A $Re[F(\nu)]$ se le conoce como la *transformada coseno* y a $Im[F(\nu)]$ la *transformada seno* [9]. También, $F(\nu)$ se puede escribir en términos de su módulo y fase, es decir,

$$F(\nu) = |F(\nu)|e^{i\theta}, \tag{1.1.33}$$

con $\theta = \arctan \frac{Im[F(\nu)]}{Re[F(\nu)]}$. A $|F(\nu)|$ se le conoce como el *espectro de amplitud de Fourier* y a θ como *espectro fase de Fourier* [9].

Existencia de la Transformada de Fourier de una función

La transformada de Fourier de una función $f(x)$ existe, si la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu x} dx \tag{1.1.34}$$

converge, es decir, si el valor de la integral (1.1.34) es finito.

Para $f(x)$ una función de \mathbb{R} a \mathbb{C} , utilizando la propiedad

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx, \tag{1.1.35}$$

se tiene que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-i2\pi\nu x}| dx. \tag{1.1.36}$$

Tomando en cuenta que el módulo de un número complejo z está dado por $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, donde \bar{z} denota el complejo conjugado de z ,

$$\begin{aligned} |e^{-i2\pi\nu x}| &= |\cos(2\pi\nu x) - i \operatorname{sen}(2\pi\nu x)| \\ &= \sqrt{[\cos(2\pi\nu x) - i \operatorname{sen}(2\pi\nu x)][\cos(2\pi\nu x) + i \operatorname{sen}(2\pi\nu x)]} \\ &= \sqrt{\cos^2(2\pi\nu x) + \operatorname{sen}^2(2\pi\nu x)} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

por lo que el término de la derecha de la desigualdad (1.1.36), se simplifica a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-i2\pi\nu x}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad (1.1.38)$$

Si la integral (1.1.38) converge, entonces la integral (1.1.34) converge absolutamente, y por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx \quad (1.1.39)$$

también converge. De esto, y tomando en cuenta las condiciones para que la serie de Fourier de f exista, se obtiene una condición suficiente para que la transformada de Fourier de una función exista [8].

1.1.3. Propiedades de la transformada de Fourier y la función signo

La transformada de Fourier junto con sus propiedades, dan lugar a diversas aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia. Muchos problemas, tanto teóricos como prácticos, se resuelven mediante esta transformada, o bien, se resuelven con mayor facilidad. Tal es el caso de la transformada de Hilbert, cuyas aplicaciones se realizan en su mayoría en el espacio de Fourier. Por esto, es importante definir algunas propiedades del operador \mathcal{F} antes de relacionar estas dos transformadas. Por otra parte, la función signo juega un papel fundamental en el cálculo de la transformada de Hilbert de una función.

Propiedades de la transformada de Fourier

Sean f y g dos funciones cuyas transformadas de Fourier existen y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si $F(\nu) = \mathcal{F}[f(x)]$ y $G(\nu) = \mathcal{F}[g(x)]$, entonces:

Linealidad:

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha F(\nu) + \beta G(\nu). \quad (1.1.40)$$

Demostración: La transformada de Fourier de $\alpha f(x) + \beta g(x)$, está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] e^{-i2\pi\nu x} dx \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\nu x} dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi\nu x} dx \quad (1.1.41) \\ &= \alpha F(\nu) + \beta G(\nu). \end{aligned}$$

■

Esta propiedad indica que el operador \mathcal{F} es lineal.

Traslación:

$$\mathcal{F}[f(x - \alpha)] = F(\nu) e^{-i2\pi\nu\alpha}. \quad (1.1.42)$$

Demostración: La transformada de Fourier de $f(x - \alpha)$ es

$$\mathcal{F}[f(x - \alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \alpha) e^{-i2\pi\nu x} dx. \quad (1.1.43)$$

Haciendo $x - \alpha = s$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x - \alpha)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi\nu(s+\alpha)} ds \\ &= e^{-i2\pi\nu\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi\nu s} ds \quad (1.1.44) \\ &= e^{-i2\pi\nu\alpha} F(\nu). \end{aligned}$$

■

Con esto, se observa que el módulo de la transformada de Fourier no varía ante traslaciones, es decir, si $F_1(\nu)$ y $F_2(\nu)$ son las transformadas de Fourier de las funciones $f(x)$ y $f(x + \alpha)$ respectivamente, entonces $|F_1(\nu)| = |F_2(\nu)|$.

Simetría:

$$\mathcal{F}[F(x)] = f(-\nu). \quad (1.1.45)$$

Demostración: Tomando la transformada inversa de Fourier de $F(\nu)$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu x} d\nu, \quad (1.1.46)$$

y haciendo $x = -s$, se obtiene

$$f(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{-i2\pi\nu s} d\nu, \quad (1.1.47)$$

e intercambiando s por ν , se llega a

$$f(-\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i2\pi\nu x} dx. \quad (1.1.48)$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}[F(x)] = f(-\nu)$.

■

Esta propiedad es útil para obtener la transformada de Fourier de una función que es la transformada de Fourier de alguna otra función.

La función signo (*sgn*)

La función signo, es una función real definida como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (1.1.49)$$

Como $\operatorname{sgn}(x) = -\operatorname{sgn}(-x)$, la función sgn es impar. La función sgn no es absolutamente integrable, por lo que no se cumple la condición de suficiencia de la transformada de Fourier; sin embargo, es posible evaluar su transformada de Fourier en el límite [10].

Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones, de manera que cada función esté definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{n}}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -e^{\frac{x}{n}}, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (1.1.50)$$

En el límite cuando n tiende a infinito, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} e^{-\frac{x}{n}}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -e^{\frac{x}{n}}, & \text{si } x < 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases} \\ &= \operatorname{sgn}(x). \end{aligned} \quad (1.1.51)$$

Por lo que la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ converge a la función $\operatorname{sgn}(x)$. Con esto, una forma de obtener la transformada de Fourier de la función signo es mediante la transformada de Fourier de la sucesión de funciones (1.1.50), es

decir,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f_n(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-i2\pi\nu x} dx \\
&= - \int_{-\infty}^0 e^{\frac{x}{n}} e^{-i2\pi\nu x} dx + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{n}} e^{-i2\pi\nu x} dx \\
&= - \int_{-\infty}^0 e^{x(\frac{1}{n}-i2\pi\nu)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(\frac{1}{n}+i2\pi\nu)} dx \\
&= - \frac{1}{\frac{1}{n} - i2\pi\nu} \lim_{N \rightarrow \infty} e^{x(\frac{1}{n}-i2\pi\nu)} \Big|_{x=-N}^{x=0} \\
&\quad - \frac{1}{\frac{1}{n} + i2\pi\nu} \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-x(\frac{1}{n}+i2\pi\nu)} \Big|_{x=0}^{x=N} \\
&= \frac{1}{i2\pi\nu - \frac{1}{n}} + \frac{1}{\frac{1}{n} + i2\pi\nu}.
\end{aligned} \tag{1.1.52}$$

Como la sucesión $\{f_n(x)\}$ es monótona, decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$, por el teorema de convergencia monótona [11] se llega a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t)e^{-i2\pi\nu x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)e^{-i2\pi\nu x} dx \right]. \tag{1.1.53}$$

Con esto, la transformada de Fourier de la función signo, está dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}[f_n(t)] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{i2\pi\nu - \frac{1}{n}} + \frac{1}{\frac{1}{n} + i2\pi\nu} \right] \\
&= \frac{1}{i2\pi\nu} + \frac{1}{i2\pi\nu} \\
&= \frac{2}{i2\pi\nu} \\
&= -\frac{i}{\pi\nu}.
\end{aligned} \tag{1.1.54}$$

1.1.4. Teorema de convolución

La convolución entre dos funciones dadas, $f(x)$ y $g(x)$, está definida por la función

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds, \tag{1.1.55}$$

y se denota como $h(x) = f(x) * g(x)$ [9].

Teorema de convolución. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones. Si $\mathcal{F}[f(x)] = F(\nu)$ y $\mathcal{F}[g(x)] = G(\nu)$, entonces,

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = F(\nu)G(\nu). \quad (1.1.56)$$

Demostración: La transformada de Fourier de $f(x) * g(x)$, está dada por

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds \right] e^{-i2\pi\nu x} dx. \quad (1.1.57)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)g(x-s)|ds \right] |e^{-i2\pi\nu x}| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(s)g(x-s)|ds \right] dx. \end{aligned} \quad (1.1.58)$$

Como f y g son absolutamente integrables, la integral (1.1.58) toma un valor finito. De esto, por el teorema de Fubini se puede intercambiar el orden de integración de la ecuación (1.1.57) [12], es decir,

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x-s)e^{-i2\pi\nu x} dx \right] ds. \quad (1.1.59)$$

Por la propiedad de traslación de la transformada de Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-s)e^{-i2\pi\nu x} dx = e^{-i2\pi\nu s} G(\nu). \quad (1.1.60)$$

Sustituyendo (1.1.60) en (1.1.59), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x) * g(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i2\pi\nu s} G(\nu) ds \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i2\pi\nu s} ds \right] G(\nu) \\ &= F(\nu)G(\nu). \end{aligned} \quad (1.1.61)$$

■

Haciendo una demostración análoga para la convolución $g(x) * f(x)$, se llega a que la convolución entre funciones es conmutativa.

Este teorema, afirma que la convolución en el dominio de frecuencia es una multiplicación entre funciones en lugar de la integral de la multiplicación de funciones, lo que puede simplificar algún problema dado en donde esté involucrada la convolución entre funciones.

1.1.5. Transformada de Fourier en dimensión n

La transformada de Fourier de una función de dos variables $f(x_1, x_2)$, está definida mediante

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x_1, x_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-2\pi i(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} dx_1 dx_2 \\ &= F(\nu_1, \nu_2),\end{aligned}\tag{1.1.62}$$

mientras que la transformada inversa se define por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[F(\nu_1, \nu_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_1, \nu_2) e^{2\pi i(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} d\nu_1 d\nu_2 \\ &= f(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{1.1.63}$$

En general, el par de transformadas de Fourier para una función f en \mathbb{R}^n está dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(\mathbf{x})] &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i2\pi\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \\ &= F(\boldsymbol{\nu}),\end{aligned}\tag{1.1.64}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[F(\boldsymbol{\nu})] &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{\nu}) e^{i2\pi\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{x}} d\boldsymbol{\nu} \\ &= f(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{1.1.65}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, $d\boldsymbol{\nu} = (d\nu_1, d\nu_2, \dots, d\nu_n)$ y $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{x}$ representa el producto interno usual para vectores en \mathbb{R}^n [14].

Convolución entre dos funciones de n variables

La definición de convolución para funciones definidas sobre los números reales se puede extender a \mathbb{R}^n . Para funciones $f, g \in \mathbb{R}^n$, se define la convolución como

$$f(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad (1.1.66)$$

y se cumple que

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{x}) * g(\mathbf{x})] = \mathcal{F}[f(\mathbf{x})]\mathcal{F}[g(\mathbf{x})], \quad (1.1.67)$$

en donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ [14].

1.2. Transformada de Hilbert

A principios del siglo XX, el matemático alemán David Hilbert obtuvo un par de ecuaciones integrales que relacionan la parte real e imaginaria de una función analítica dentro del círculo unitario, lo que dio lugar a lo que hoy se conoce como la transformada de Hilbert sobre el círculo. En esa misma época, el matemático inglés Godfrey Harold Hardy estudió la relación encontrada por Hilbert, pero sobre la recta real, obteniendo así la transformada de Hilbert en \mathbb{R} . En 1924, Hardy fue quien le dio nombre a esta transformada, en honor a las contribuciones de Hilbert [15].

La transformada de Hilbert de una función $f(x)$ de variable real, es un operador \mathcal{H} definido como la convolución entre $f(x)$ y $\frac{1}{\pi x}$ [8]. Esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[f(x)] &= f(x) * \frac{1}{\pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{x - s} ds. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Como el integrando de (1.2.1) tiene una singularidad en $s = x$, se toma el valor principal de Cauchy, denotado por P , mediante el cual se permite asignar valores a integrales impropias. Para esta ecuación integral, el valor

principal de Cauchy se representa por

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s} ds = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{f(s)}{x-s} ds + \int_{x+\epsilon}^{\infty} \frac{f(s)}{x-s} ds \right]. \quad (1.2.2)$$

1.2.1. Transformada de Hilbert sobre la recta real

Para llegar a la relación encontrada por Hardy, se parte de algunos resultados de la teoría de funciones analíticas u holomorfas. Sea una función de variable compleja $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con A un conjunto abierto. Para cada $z \in A$, se tiene que $f(z) = w$ y $w = u + iv$, de ahí que f se puede expresar en términos de un par de funciones $u(x, y), v(x, y)$ con valores reales: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Se dice que f es *analítica* u *holomorfa* en A si tiene derivada en todo punto del dominio. Si $f(z)$ es continua, $u, v \in \mathcal{C}^1$ y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.2.3)$$

entonces f es analítica en A . El que f sea analítica, implica que las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son *armónicas*, esto es, que tanto u como v son de clase \mathcal{C}^2 y satisfacen la ecuación de Laplace,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

en los puntos de A [16].

La relación encontrada por Hardy (la transformada de Hilbert en la recta real) es una consecuencia de dos resultados importantes de la teoría de funciones analíticas: el *teorema integral de Cauchy* y la *fórmula integral de Cauchy*. El primero afirma que, si $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica sobre y en el interior de una curva cerrada simple $\Gamma \subset A$ orientada positivamente, con $f'(z)$ continua en Γ , entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (1.2.5)$$

Por otra parte, la fórmula integral de Cauchy afirma que para un punto z_0 interior a Γ ,

$$f(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (1.2.6)$$

es decir, los valores de la función dentro de Γ están determinados por los valores que toma la función sobre Γ .

Sea $f(z)$ una función analítica en la mitad superior del plano complejo y supóngase que $f(z)$ tiende a cero cuando z tiende a infinito. Del teorema integral de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy, al considerar el contorno descrito en la Figura 1.1, se tiene que

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} i2\pi f(z_0), & \text{para } z_0 \text{ dentro de } \Gamma, \\ 0, & \text{para } z_0 \text{ fuera de } \Gamma. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

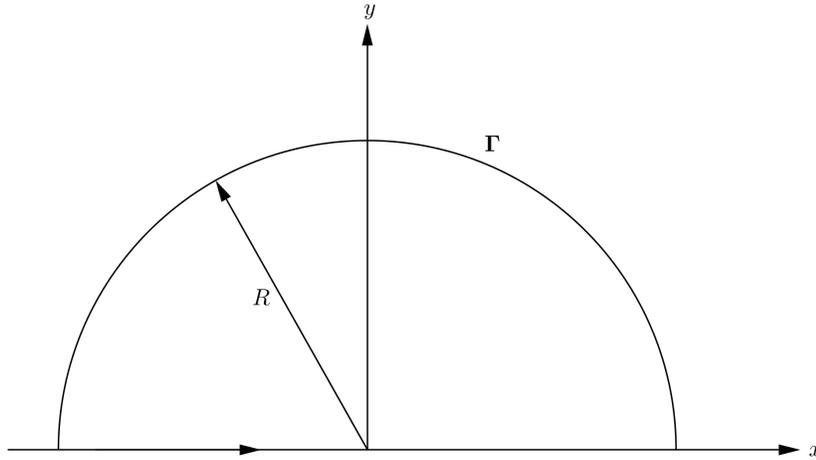


Figura 1.1. Curva cerrada Γ orientada positivamente.

Para evaluar la integral (1.2.7) cuando el punto de discontinuidad está sobre el eje real, el contorno Γ se puede modificar haciendo una media circunferencia con centro en dicho punto, llámese x_0 , y radio ε . De esta manera, se

obtiene un nuevo contorno (Figura 1.2) sobre el cual la integral

$$\int \frac{f(z)}{z - x_0} \quad (1.2.8)$$

es cero y se puede expresar como la suma de cuatro integrales:

$$\int_{-R}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - x_0} dz + \int_{x_0+\varepsilon}^R \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - x_0} dz \quad (1.2.9)$$

$$= 0.$$

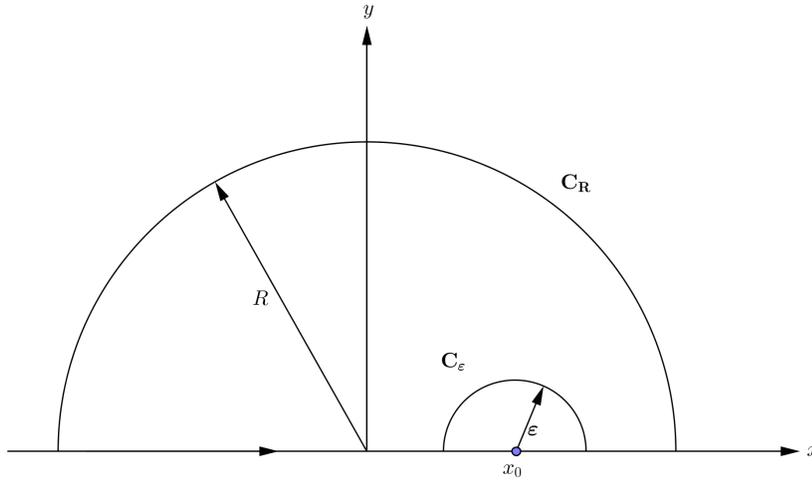


Figura 1.2. Contorno formado por las medias circunferencias C_R y C_ε , y la unión de los intervalos $(-R, x_0 - \varepsilon)$ y $(x_0 + \varepsilon, R)$. La curva C_R está orientada positivamente y la curva C_ε se recorre en sentido negativo.

En la ecuación (1.2.9), la suma de las integrales

$$\int_{-R}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0+\varepsilon}^R \frac{f(x)}{x - x_0} dx \quad (1.2.10)$$

cuando ε tiende a cero, se simplifica a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{x_0-\varepsilon} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0+\varepsilon}^R \frac{f(x)}{x - x_0} dx \right] = P \int_{-R}^R \frac{f(x)}{x - x_0} dx, \quad (1.2.11)$$

donde P denota el valor principal de Cauchy.

Para la integral

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - x_0} dz \quad (1.2.12)$$

en la ecuación (1.2.9), se tiene que $z = \varepsilon e^{i\theta} + x_0$ para z sobre C_ε . Tomando el límite cuando ε tiende a cero, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - x_0} dz \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\pi}^0 \frac{f(\varepsilon e^{i\theta} + x_0) i \varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta \right] \\ &= i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\pi}^0 f(\varepsilon e^{i\theta} + x_0) d\theta \right] \\ &= i f(x_0) \int_{\pi}^0 d\theta \\ &= -i\pi f(x_0). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Por último, como $f(z)$ tiende a cero cuando z tiende a infinito, la integral

$$\int_{C_R} \frac{f(z)}{z - x_0} dz \quad (1.2.14)$$

es igual a cero cuando R tiende a infinito [15].

Como f es analítica en la mitad superior del plano complejo, el radio R puede ser tan grande como se desee. En el límite cuando R tiende a infinito, al juntar los resultados de las integrales (1.2.11), (1.2.13) y (1.2.14), la ecuación (1.2.9) se simplifica a

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx - i\pi f(x_0) = 0. \quad (1.2.15)$$

De ahí,

$$f(x_0) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx. \quad (1.2.16)$$

Dado que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, si $y = 0$ se tiene que $f(x) = u(x) +$

$iv(x)$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 f(x_0) &= \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-x_0} dx + i \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x-x_0} dx \\
 &= -\frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x-x_0} dx + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x-x_0} dx \\
 &= \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x_0-x} dx - \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x_0-x} dx.
 \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

Tomando por separado la parte real y la parte imaginaria de $f(x_0)$ de la ecuación (1.2.17), se tiene que

$$u(x_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x_0-x} dx, \tag{1.2.18}$$

y

$$v(x_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x_0-x} dx. \tag{1.2.19}$$

Las ecuaciones (1.2.18) y (1.2.19), indican que conociendo únicamente la parte real de una función analítica f sobre la recta real, es posible encontrar su armónica conjugada y viceversa.

A las ecuaciones (1.2.18) y (1.2.19) encontradas por Hardy, se les conoce como el par de transformadas de Hilbert sobre la recta real, de las cuales (1.2.19) es la transformada de Hilbert de la función $u(x)$ y (1.2.18) es la transformada inversa de Hilbert de $v(x)$.

1.2.2. Transformada de Hilbert en el espacio de frecuencia

En la mayoría de las aplicaciones, la transformada de Hilbert se trabaja en el espacio de frecuencias. De la ecuación (1.2.1) y por el teorema de convolución,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} &= \mathcal{F}\left[f(x) * \frac{1}{\pi x}\right] \\
 &= \mathcal{F}[f(x)] \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi x}\right].
 \end{aligned} \tag{1.2.20}$$

De la ecuación (1.1.54), la transformada de Fourier de la función signo es $\mathcal{F}[\text{sgn}(x)] = -\frac{i}{\pi\nu}$, y por la propiedad de simetría de la transformada de Fourier $\mathcal{F}\left[-\frac{i}{\pi x}\right] = \text{sgn}(-\nu)$. Además, como el operador \mathcal{F} es lineal, se llega a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi x}\right] &= -\frac{\text{sgn}(-\nu)}{i} \\ &= \frac{\text{sgn}(\nu)}{i} \\ &= -i\text{sgn}(\nu)\end{aligned}\tag{1.2.21}$$

De esto, la transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de una función $f(x)$ se expresa como

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} = -i\text{sgn}(\nu)F(\nu),\tag{1.2.22}$$

donde $F(\nu)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$.

Al expresar $F(\nu)$ en términos de su amplitud y fase, la ecuación (1.2.22) se escribe como

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} = -i\text{sgn}(\nu) |F(\nu)| e^{i\theta}.\tag{1.2.23}$$

Si $\nu < 0$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} &= i |F(\nu)| e^{i\theta} \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} |F(\nu)| e^{i\theta} \\ &= e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} |F(\nu)|.\end{aligned}\tag{1.2.24}$$

Y si $\nu > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x)]\} &= -i |F(\nu)| e^{i\theta} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} |F(\nu)| e^{i\theta} \\ &= e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} |F(\nu)|.\end{aligned}\tag{1.2.25}$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de $\mathcal{H}[f(x)]$ se interpreta como la transformada de Fourier de la función $f(x)$ con su espectro fase de Fourier rotado $\pm\frac{\pi}{2}$.

1.2.3. Transformada de Hilbert en dimensión n

La forma natural de generalizar a la transformada de Hilbert para una función $f(x_1, x_2)$, es mediante la convolución 2-dimensional entre las funciones $f(x_1, x_2)$ y $h(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2 x_1 x_2}$. Esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[f(x_1, x_2)] &= (f * h)(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{\pi^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s_1, s_2)}{(x_1 - s_1)(x_2 - s_2)} ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

En general, la transformada de Hilbert de una función de n variables, se define por

$$\mathcal{H}[f(\mathbf{x})] = \frac{1}{\pi^n} P \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\mathbf{s})}{\prod_{k=1}^n (x_k - s_k)} ds, \quad (1.2.27)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $d\mathbf{s} = (ds_1, ds_2, \dots, ds_n)$ y P denota el valor principal de Cauchy en cada integral [15].

Transformada de Hilbert n -dimensional en el espacio de frecuencia

De la ecuación (1.2.27), se tiene que la transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de una función f de n variables es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(\mathbf{x})]\} &= \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\pi^n} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{s})}{\prod_{k=1}^n (x_k - s_k)} ds \right\} \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mathbf{s})}{\prod_{k=1}^n (x_k - s_k)} e^{-2\pi i \nu \cdot \mathbf{x}} ds dx \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{s}) ds \prod_{k=1}^n P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu_k x_k}}{x_k - s_k} dx_k \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{s}) ds \prod_{k=1}^n (-P) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu_k x_k}}{s_k - x_k} dx_k. \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Como la convolución entre dos funciones f y g es conmutativa, se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu_k x_k}}{s_k - x_k} dx_k &= -P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu_k (s_k - x_k)}}{x_k} dx_k \\ &= e^{-2\pi i \omega_k s_k} (-P) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \nu_k x_k}}{x_k} dx_k. \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

Al hacer el cambio de variable $x_k = -y_k$, se llega a

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i \nu_k y_k}}{y_k} dy_k = \mathcal{F} \left[\frac{1}{y_k} \right]. \quad (1.2.30)$$

Como la transformada de Fourier de la función $\text{sgn}(y_k)$ es $-\frac{i}{\pi \nu_k}$, utilizando la propiedad de simetría de \mathcal{F} , se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{1}{y_k} \right] &= -\frac{\pi \text{sgn}(-\nu_k)}{i} \\ &= -i\pi \text{sgn}(\nu_k), \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(\mathbf{x})]\} &= \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \prod_{k=1}^n (e^{-2\pi i \nu_k s_k}) (-\pi i \text{sgn}(\nu_k)) \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{s}) e^{2\pi i (\nu_1 s_1 + \nu_2 s_2 + \dots + \nu_n s_n)} d\mathbf{s} (-\pi i)^n \prod_{k=1}^n \text{sgn}(\nu_k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{s}) e^{2\pi \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{s}} d\mathbf{s} (-i)^n \prod_{k=1}^n \text{sgn}(\nu_k) \\ &= (-i)^n \prod_{k=1}^n \text{sgn}(\nu_k) F(\boldsymbol{\nu}), \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

donde $F(\boldsymbol{\nu})$ es la transformada de Fourier de la función f [17].

En particular, la transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de una función de dos variables, $f(x_1, x_2)$, es

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x_1, x_2)]\} = -\text{sgn}(\nu_1) \text{sgn}(\nu_2) F(\nu_1, \nu_2). \quad (1.2.33)$$

1.3. Señales

Existen diversas aplicaciones de la transformada de Fourier y de la transformada de Hilbert en el área de procesamiento de señales. Una rama de estudio del procesamiento de señales, es el procesamiento de imágenes digitales, la cual está estrechamente relacionada con el reconocimiento de patrones en imágenes digitales. Una señal, es una representación matemática de la evolución de una magnitud respecto de algún o algunos parámetros. Se puede considerar como una función f , cuyas variables independientes son los parámetros con respecto a los cuales varía [18].

Si las N variables independientes de una señal real f toman cualquier valor real, se dice que la señal es continua y se denota como una función de N variables continuas, $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Por otra parte, si toman valores de algún subconjunto numerable de \mathbb{R} , la señal es discreta y se denota con las variables independientes entre corchetes, $f[n_1, n_2, \dots, n_N]$.

1.3.1. Imagen digital

Una imagen digital se puede definir como una señal bidimensional discreta y finita $I[n_1, n_2]$, donde n_1, n_2 son las coordenadas espaciales de la imagen y la amplitud de I en cualquier punto (n_1, n_2) representa la intensidad de la imagen en ese punto. A cada coordenada (n_1, n_2) se le denomina píxel.

El término *nivel de gris* se usa para referirse a la intensidad de imágenes monocromáticas. En dicha representación, la intensidad de cada punto en la imagen es un tono de gris que va desde el negro hasta el blanco [19]. Para el sistema digital de reconocimiento de patrones en imágenes digitales desarrollado en este trabajo, se trabajó con imágenes en escala de grises únicamente.

Una imagen $I[n_1, n_2]$ en escala de grises, con $n_1 = 0, 1, \dots, M - 1$ y $n_2 = 0, 1, \dots, N - 1$, se puede representar como una matriz de M renglones por N

columnas, en la cual cada entrada es un número real que denota la intensidad de gris de un píxel.

1.3.2. Señal analítica

En el área de procesamiento de señales, para el caso de señales con una sola variable independiente, la transformada de Hilbert tiene diversas aplicaciones, las cuales se basan principalmente en la construcción de una señal compleja denominada *señal analítica*.

En la sección 1.2.1, se establecieron las relaciones entre la parte real y la parte imaginaria de una función analítica $f(x) = u(x, 0) + iv(x, 0)$:

$$\begin{aligned} v(x_0) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)}{x_0 - x} dx \\ u(x_0) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x)}{x_0 - x} dx, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

es decir, conociendo $u(x)$ se puede calcular $v(x)$ y viceversa. Las ecuaciones (1.3.1), constituyen el par de transformadas de Hilbert para una función de una variable real; de ahí que es viable utilizar esta transformada para el procesamiento de señales reales de una variable.

A partir de una señal real $u(x)$, es posible llevar a cabo un procedimiento análogo para construir una señal compleja $f(x)$, con el fin de extraer ciertas características de $u(x)$, como la amplitud local y la fase local. En 1946, Gabor propuso utilizar la transformada de Hilbert de $u(x)$ para construir dicha señal compleja [20], llamándola señal analítica:

$$f(x) = u(x) + i\mathcal{H}[u(x)]. \quad (1.3.2)$$

Al representar a una señal analítica $f(x)$ en forma polar,

$$f(x) = A(x)e^{i\theta(x)}, \quad (1.3.3)$$

se obtiene la amplitud local $A(x)$ y la fase local $\theta(x)$ de la señal $u(x)$, donde

$$A(x) = \sqrt{u(x)^2 + \mathcal{H}[u(x)]^2}, \quad \theta(x) = \arctan \frac{\mathcal{H}[u(x)]}{u(x)}. \quad (1.3.4)$$

La transformada de Fourier de una señal analítica $f(x) = u(x) + i\mathcal{H}[u(x)]$, está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)] &= \mathcal{F}\{u(x) + i\mathcal{H}[u(x)]\} \\ &= U(\nu) + i[-i\operatorname{sgn}(\nu)U(\nu)] \\ &= U(\nu)[1 + \operatorname{sgn}(\nu)],\end{aligned}\tag{1.3.5}$$

donde $U(\nu)$ es la transformada de Fourier de la señal u . De la ecuación (1.3.5), se obtiene que

$$F(\nu) = \begin{cases} 2U(\nu), & \text{si } \nu > 0, \\ U(0), & \text{si } \nu = 0, \\ 0, & \text{si } \nu < 0. \end{cases}\tag{1.3.6}$$

Construir una señal bidimensional compleja que tenga las mismas características que la señal analítica, no es posible mediante la transformada de Hilbert de una función $f(x_1, x_2)$ definida en la ecuación (1.2.26). Aun cuando la señal analítica en dimensión dos no está definida como tal, en los trabajos de Felsberg y Sommer [21], Larkin y colaboradores [22] y Lorenzo [23], por mencionar algunos, se presentan diferentes propuestas para construir una señal bidimensional compleja para obtener características como la amplitud y la fase local de una señal, o bien, para demodular señales bidimensionales.

1.4. Funciones discretas

Para hablar del reconocimiento de patrones en imágenes digitales utilizando las transformadas de Fourier y de Hilbert, es necesario contar con la definición de dichas transformadas integrales para funciones de variable discreta, debido a que una imagen digital es una función discreta bidimensional.

En general, una función discreta tiene como dominio un conjunto numerable; en este trabajo sólo se toman en cuenta funciones discretas finitas con valores en los números naturales.

1.4.1. Transformada discreta de Fourier

La transformada de Fourier de una función discreta $f[n]$, con $n = 0, 1, \dots, N-1$, es una función $F[k]$ definida como

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D[f[n]] &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= F[k],\end{aligned}\tag{1.4.1}$$

donde $k = 0, 1, \dots, N-1$ y \mathcal{F}_D representa la transformada discreta de Fourier [24]. Dada la función $F[k]$, es posible obtener $f[n]$ mediante

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_D^{-1}[F[k]] &= \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{i2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= f[n],\end{aligned}\tag{1.4.2}$$

para $n = 0, 1, \dots, N-1$. Como $n = 0, 1, \dots, N-1$ y $k = 0, 1, \dots, N-1$, se dice que $f[n]$ y $F[k]$ son funciones discretas de longitud N .

A partir de la ecuación (1.4.1), sin tomar en cuenta el factor $\frac{1}{N}$ (pasándolo a la transformada inversa), la transformada de Fourier de una función discreta $f[n]$, con $n = 0, 1, \dots, N-1$, se puede expresar como

$$F[k] = f[0] + f[1]W^k + f[2]W^{2k} + \dots + f[N-1]W^{(N-1)k},\tag{1.4.3}$$

donde $k = 0, 1, \dots, N-1$ y $W = e^{-\frac{i2\pi}{N}}$. De esto, calcular $F[0], F[1], \dots, F[N-1]$ implica realizar aproximadamente N^2 sumas y N^2 multiplicaciones, es decir, el cálculo requiere $O(N^2)$ operaciones aritméticas; por lo que el determinar la función $F[k]$ mediante la ecuación (1.4.3) no es viable en términos computacionales.

Transformada rápida de Fourier

Debido a las limitaciones computacionales de la transformada discreta de Fourier, comúnmente se utiliza un algoritmo desarrollado por Cooley y

Tukey denominado *transformada rápida de Fourier* [25]. Con este algoritmo, se obtiene el mismo resultado que utilizar la transformada discreta de Fourier realizando únicamente $O(N \log(N))$ operaciones aritméticas.

Por ejemplo, el cálculo de la transformada de Fourier de una función discreta $f[n]$, con $n = 0, 1, 2, 3$, equivale a calcular las ecuaciones

$$\begin{aligned} F[0] &= f[0] + f[1] + f[2] + f[3], \\ F[1] &= f[0] + f[1]W + f[2]W^2 + f[3]W^3, \\ F[2] &= f[0] + f[1]W^2 + f[2]W^4 + f[3]W^6, \\ F[3] &= f[0] + f[1]W^3 + f[2]W^6 + f[3]W^9, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

con $W = e^{-i2\pi\frac{1}{4}}$, realizándose 12 sumas y 9 multiplicaciones. En la ecuación (1.4.4), para cada $n = 0, 1, 2, 3$, se tiene que

$$\begin{aligned} W^n &= e^{-i2\pi\frac{n}{4}} \\ &= \cos\left(2\pi\frac{n}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{n}{4}\right) \\ &= \cos\left(2\pi\frac{n}{4} + 2\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(2\pi\frac{n}{4} + 2\pi\right) \\ &= \cos\left(2\pi\left(\frac{n}{4} + 1\right)\right) + i \operatorname{sen}\left(2\pi\left(\frac{n}{4} + 1\right)\right) \\ &= \cos\left(2\pi\left(\frac{n+4}{4}\right)\right) + i \operatorname{sen}\left(2\pi\left(\frac{n+4}{4}\right)\right) \\ &= e^{-i2\pi\frac{n+4}{4}} \\ &= W^{n+4}, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

lo que indica que W^n tiene periodo 4. De esto, las ecuaciones en (1.4.4) se reescriben como

$$\begin{aligned} F[0] &= f[0] + f[1] + f[2] + f[3], \\ F[1] &= f[0] + f[1]W + f[2]W^2 + f[3]W^3, \\ F[2] &= f[0] + f[1]W^2 + f[2] + f[3]W^2, \\ F[3] &= f[0] + f[1]W^3 + f[2]W^2 + f[3]W^1. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Reacomodando los términos de las ecuaciones (1.4.6) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 F[0] &= (f[0] + f[2]) + (f[1] + f[3]) \\
 F[1] &= (f[0] + f[2]W^2) + (f[1] + f[3]W^2)W \\
 F[2] &= (f[0] + f[2]) + (f[1] + f[3])W^2 \\
 F[3] &= (f[0] + f[2]W^2) + (f[1] + f[3]W^2)W^3,
 \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

se determina la transformada de Fourier de la función discreta $f[n]$ mediante 12 sumas y 7 multiplicaciones, de las nueve multiplicaciones que se tenían originalmente. Cuando N es muy grande, se observa la relevancia de anidar las operaciones al reducirse el error de redondeo generado por las operaciones de multiplicación. A esta forma de calcular $F[k]$ se le denomina algoritmo de la transformada rápida de Fourier.

1.4.2. Convolución discreta

Al igual que para funciones de variable continua, la convolución de funciones discretas juega un papel fundamental para determinar la transformada discreta de Hilbert y, la relación entre ésta y la transformada de Fourier.

Para las funciones discretas y finitas $f[n]$ y $g[n]$, ambas de longitud N , la convolución está dada por

$$f[n] * g[n] = \sum_{m=0}^{N-1} f[m]g[n-m], \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \tag{1.4.8}$$

Análogamente al caso continuo, el teorema de la convolución es

$$\mathcal{F}_D[f[n] * g[n]] = F[k]G[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{1.4.9}$$

donde $F[k]$ y $G[k]$ representan a la transformada de Fourier discreta de f y g , respectivamente [24].

1.4.3. Transformada discreta de Hilbert

Así como la transformada de Hilbert sobre la recta real de una función $f(x)$ es la convolución entre dos funciones de una variable continua, esto es

$$\mathcal{H}[f(x)] = f(x) * h(x), \quad (1.4.10)$$

con $h(x) = \frac{1}{\pi x}$, la transformada discreta de Hilbert de una función discreta $f[n]$ se define como la convolución discreta entre $f[n]$ y $h[n]$, es decir,

$$\mathcal{H}_D[f[n]] = f[n] * h[n]. \quad (1.4.11)$$

En la sección 1.2.2, se determinó la función $H(\nu) = -i \operatorname{sgn}(\nu)$ a partir de la transformada de Fourier de $h(x) = \frac{1}{\pi x}$. Para el caso de funciones discretas, conviene partir de la versión discreta de $H(\nu)$ para encontrar $h[n]$ (Figura 1.3).

$$\begin{array}{ccc} h(x) = \frac{1}{\pi x} & \xrightarrow{\mathcal{F}[h(x)]} & H(\nu) = -i \operatorname{sgn}(\nu) \\ & & \downarrow \text{Discretizar} \\ & & H[k] \\ & \xleftarrow{\mathcal{F}_D^{-1}[H[k]]} & h[n] \end{array} \quad (1.4.12)$$

Figura 1.3. Esquema del método para determinar la función análoga a $\frac{1}{\pi x}$ para los casos: variable continua en frecuencia, variable discreta en frecuencia y variable discreta.

Supóngase que se tiene una función $f[n]$ discreta y finita de longitud N , con $F[k]$ su transformada de Fourier. Si N es par, al considerar el origen en $\frac{N}{2}$, se tiene que [26]

$$H[k] = \begin{cases} -i, & \text{si } 1 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1, \\ 0, & \text{si } k = 0, k = \frac{N}{2}, \\ i, & \text{si } \frac{N}{2} + 1 \leq k \leq N - 1, \end{cases} \quad (1.4.13)$$

y si N es impar,

$$H[k] = \begin{cases} -i, & \text{si } 1 \leq k \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0, & \text{si } k = 0, k = \frac{N}{2}, \\ i, & \text{si } \frac{N+1}{2} \leq k \leq N-1. \end{cases} \quad (1.4.14)$$

Entonces, para N par o impar,

$$H[k] = -i \operatorname{sgn} \left(\frac{N}{2} - k \right) \operatorname{sgn}(k). \quad (1.4.15)$$

La función $h[n]$ se obtiene tomando la transformada discreta inversa de Fourier de $H[k]$, es decir

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{i2\pi \frac{kn}{N}}, \quad (1.4.16)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Si N es par, entonces

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} H[k] e^{i2\pi \frac{kn}{N}} + \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} H[k] e^{i2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= -i \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} e^{i2\pi \frac{kn}{N}} + i \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} e^{i2\pi \frac{kn}{N}} \\ &= -i \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left[\cos \left(2\pi \frac{kn}{N} \right) + i \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{kn}{N} \right) \right] \\ &\quad + i \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \left[\cos \left(2\pi \frac{kn}{N} \right) + i \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{kn}{N} \right) \right] \\ &= i \left[- \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos \left(2\pi \frac{kn}{N} \right) + \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \cos \left(2\pi \frac{kn}{N} \right) \right] \\ &\quad + \left[\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{kn}{N} \right) - \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{kn}{N} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Por la propiedad de simetría de la función coseno y su periodicidad de $2\pi n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \cos\left(2\pi \frac{kn}{N}\right) = - \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \cos\left(-2\pi \frac{kn}{N} + 2\pi n\right) \\
& = - \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(-2\pi \frac{\left(k + \frac{N}{2}\right)n}{N} + 2\pi n\right) \\
& = - \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(2\pi \left(N - \left(k + \frac{N}{2}\right)\right) \frac{n}{N}\right) \\
& = - \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(2\pi \left(\frac{N}{2} - k\right) \frac{n}{N}\right) \\
& = - \cos\left(2\pi \left(\frac{N}{2} - 1\right) \frac{n}{N}\right) - \cos\left(2\pi \left(\frac{N}{2} - 2\right) \frac{n}{N}\right) \\
& \quad - \dots - \cos\left(2\pi \left(\frac{N}{2} - \left(\frac{N}{2} - 2\right)\right) \frac{n}{N}\right) \\
& \quad - \cos\left(2\pi \left(\frac{N}{2} - \left(\frac{N}{2} - 1\right)\right) \frac{n}{N}\right) \\
& = - \cos\left(2\pi \left(\frac{N}{2} - 1\right) \frac{n}{N}\right) - \cos\left(2\pi \left(\frac{N}{2} - 2\right) \frac{n}{N}\right) \\
& \quad - \dots - \cos\left(2\pi \frac{2n}{N}\right) - \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right) \\
& = - \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos\left(2\pi \frac{kn}{N}\right).
\end{aligned} \tag{1.4.18}$$

Análogamente, de la propiedad de antisimetría de la función seno y su periodicidad de $2\pi n$, se llega a

$$- \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{kn}{N}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{kn}{N}\right). \tag{1.4.19}$$

De las ecuaciones (1.4.18) y (1.4.19), la ecuación (1.4.17) se simplifica a

$$h[n] = 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{kn}{N}\right). \tag{1.4.20}$$

Similarmente, para N impar se tiene que

$$h[n] = 2 \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{kn}{N} \right). \quad (1.4.21)$$

Tomando en cuenta cómo se define la convolución discreta, la transformada discreta de Hilbert de una señal discreta $f[n]$ de longitud N , es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D [f[n]] &= h[n] * f[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} h[n-m] f[m], \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

donde $h[n]$ está dada por la ecuación (1.4.20) o (1.4.21).

1.4.4. Transformada discreta de Fourier bidimensional

La transformada discreta de Fourier de una función $f[n_1, n_2]$, donde $n_1 = 0, 1, \dots, M-1$ y $n_2 = 0, 1, \dots, N-1$, es una función $F[k_1, k_2]$ dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_D [f[n_1, n_2]] &= \frac{1}{MN} \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f[n_1, n_2] e^{[-2\pi i (\frac{k_1 n_1}{M} + \frac{k_2 n_2}{N})]} \\ &= F[k_1, k_2], \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

y la correspondiente transformada inversa de Fourier es,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_D^{-1} [F[k_1, k_2]] &= \sum_{k_1=0}^{M-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} F[k_1, k_2] e^{[2\pi i (\frac{k_1 n_1}{M} + \frac{k_2 n_2}{N})]} \\ &= f[n_1, n_2]. \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

La ecuación (1.4.23) requiere de $O(M^2 \times N^2)$ operaciones [13], las cuales se pueden reducir a $O(M \log(M) \times N \log(N))$ generalizando el algoritmo de la transformada rápida de Fourier a funciones de dos variables discretas.

1.4.5. Transformada discreta de Hilbert bidimensional

La transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de una función $f(x_1, x_2)$, se define como

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}[f(x_1, x_2)]\} = \text{sgn}(\nu_1)\text{sgn}(\nu_2)F(\nu_1, \nu_2). \quad (1.4.25)$$

Siguiendo un procedimiento similar al del caso de funciones discretas de una variable, la transformada de Hilbert en el espacio de frecuencias de una función $f[n_1, n_2]$ está dada por

$$\mathcal{F}_D\{\mathcal{H}_D[f[n_1, n_2]]\} = H[k_1, k_2]F[k_1, k_2], \quad (1.4.26)$$

donde $F[k_1, k_2]$ es la transformada discreta de Fourier de la función $f[n_1, n_2]$ y $H[k_1, k_2]$ es la versión discreta de la multiplicación de dos funciones signo, una en cada dirección.

De la ecuación (1.4.26), es posible calcular la transformada de Hilbert de la función discreta $f[n_1, n_2]$, a partir de la transformada discreta inversa de Fourier:

$$\mathcal{H}_D[f[n_1, n_2]] = \mathcal{F}_D^{-1}[H[k_1, k_2]F[k_1, k_2]]. \quad (1.4.27)$$

1.5. Transformada de Hilbert radial

Las principales aplicaciones de la transformada de Hilbert en dimensión uno se basan en la construcción de la señal analítica a partir de una señal real; sin embargo, también se puede utilizar para la detección de bordes de señales. Por ejemplo, si se desea detectar los bordes de un pulso rectangular dado por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 3 \leq x \leq 7, \\ 0 & \text{si } 3 \geq x \geq 7, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

se puede utilizar la transformada de Hilbert de $f(x)$. En la Figura 1.4 se muestran las gráficas de la función $f(x)$ y del valor absoluto de su transformada de Hilbert $\mathcal{H}[f(x)]$, en donde se observa que $|\mathcal{H}[f(x)]|$ toma valores más altos en los puntos correspondientes a las esquinas de $f(x)$.

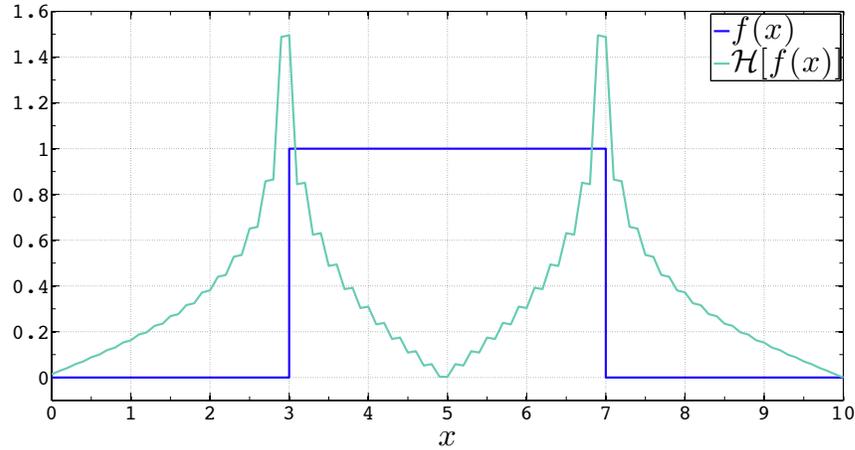


Figura 1.4. Pulso rectangular y el valor absoluto de su transformada de Hilbert.

Es natural intentar sacar provecho de estas propiedades o atributos que cumple la transformada de Hilbert en dimensión uno para funciones de dos variables, pero en general, no se obtienen resultados análogos.

Se han propuesto diferentes transformadas para extender a dimensión dos las principales aplicaciones de la transformada de Hilbert. En algunos casos, es útil usar la transformada de Hilbert unidimensional para detectar bordes de alguna función $f(x_1, x_2)$ en dos direcciones, es decir, calcular $\mathcal{H}[f(x_1)]$ y $\mathcal{H}[f(x_2)]$. Sin embargo, esto sólo funciona para detectar bordes en esas direcciones.

Davis y colaboradores [2], definen una transformada de Hilbert que permite el realce o la detección de bordes para funciones o señales bidimensionales sin las limitaciones antes mencionadas, la cual denominan transformada de Hilbert radial. La idea de esta propuesta, es utilizar la función $e^{iP\theta}$ en lugar de $\text{sgn}(\nu_1)\text{sgn}(\nu_2)$ en la ecuación (1.2.33), lo que da lugar a la definición de

la transformada radial de Hilbert:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}_R[f(x_1, x_2)]\} = e^{iP\theta}F(\nu_1, \nu_2), \quad (1.5.2)$$

donde $\theta = \arccos\left(\frac{\nu_1}{r}\right)$ con $r = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ para $(\nu_1, \nu_2) \neq (0, 0)$ y $\theta = 0$ en el origen, $F(\nu_1, \nu_2)$ es la transformada de Fourier de la función f y P es cualquier número entero.

Pei y Ding [3], proponen una generalización de la transformada de Hilbert radial dada por Davis y colaboradores [2], la cual denominan *transformada de Hilbert radial generalizada* y la definen por

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}_{RG}[f(x_1, x_2)]\} = \Phi(\theta)F(\nu_1, \nu_2), \quad (1.5.3)$$

donde $\Phi(\theta)$ es cualquier función. En el caso particular en que $\Phi(\theta) = e^{iP\theta}$ con $\theta = \arccos\left(\frac{\nu_1}{r}\right)$ y $r = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$, se obtiene la ecuación (1.5.2).

Para una función discreta $f[n_1, n_2]$ donde $n_1 = 0, 1, \dots, M - 1$ y $n_2 = 0, 1, \dots, N - 1$, la ecuación (1.5.3) se modifica a

$$\mathcal{F}\{\mathcal{H}_{RGd}[f[n_1, n_2]]\} = \Phi[\theta]F[k_1, k_2], \quad (1.5.4)$$

donde $F[k_1, k_2]$ representa la transformada discreta de Fourier de $f[n_1, n_2]$, con $k_1 = 0, 1, \dots, M - 1$ y $k_2 = 0, 1, \dots, N - 1$.

Capítulo 2

Fundamentos del reconocimiento de patrones

En este capítulo, se presentan algunos fundamentos del procesamiento de imágenes digitales que son base para el desarrollo de sistemas de reconocimiento de patrones.

2.1. Transformada de Fourier de una imagen

El representar la información de la imagen en el dominio de frecuencia tiene ventajas a la hora de aplicar algunos algoritmos y de determinar ciertas propiedades de la imagen [28].

La transformada de Fourier de una imagen $I[n_1, n_2]$ en escala de grises es otra imagen $I_F[k_1, k_2]$ del mismo tamaño; generalmente se calcula mediante la transformada rápida de Fourier de I , denotada por

$$\mathcal{F}_F[I[n_1, n_2]] = I_F[k_1, k_2], \quad (2.1.1)$$

y su inversa como

$$\mathcal{F}_F^{-1}[I_F[k_1, k_2]] = I[n_1, n_2]. \quad (2.1.2)$$

Así como para funciones de una variable continua, la ecuación (2.1.1) se puede expresar en términos de su amplitud y fase. Es común que el espectro de amplitud de Fourier de una imagen tenga valores de intensidad entre 0 y 10^6 . Debido a esto, al visualizar dicho espectro se pierden detalles correspondientes a los valores de intensidad menores, por lo que generalmente se visualiza bajo una transformación logarítmica [19].

2.1.1. Invariancia a posición

La propiedad de traslación de la transformada de Fourier de una función $f(x)$, ecuación (1.1.42), se puede generalizar a funciones de dos variables. Si $F(\nu_1, \nu_2)$ es la transformada de Fourier de $f(x_1, x_2)$, entonces

$$\mathcal{F}[f(x_1 - \alpha, x_2 - \beta)] = e^{-i2\pi(\alpha\nu_1 + \beta\nu_2)} F(\nu_1, \nu_2). \quad (2.1.3)$$

De esto, como

$$\begin{aligned} |e^{-i2\pi(\alpha\nu_1 + \beta\nu_2)}| &= |e^{-i2\pi\alpha\nu_1} e^{-i2\pi\beta\nu_2}| \\ &= |e^{-i2\pi\alpha\nu_1}| |e^{-i2\pi\beta\nu_2}| \\ &= 1, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

se tiene que

$$|\mathcal{F}[f(x_1, x_2)]| = |\mathcal{F}[f(x_1 - \alpha, x_2 - \beta)]|, \quad (2.1.5)$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ [13].

Para una imagen digital $I[n_1, n_2]$ representada en escala de grises, la ecuación (2.1.5) también es válida, es decir, el módulo de la transformada rápida de Fourier de I es,

$$|\mathcal{F}_F[I[n_1, n_2]]| = |\mathcal{F}_F[I[n_1 - a, n_2 - b]]|, \quad (2.1.6)$$

para $a, b \in \mathbb{N}$.

En base a esta propiedad de la transformada de Fourier, es posible elaborar un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante

a posición, es decir, un sistema que sea capaz de identificar un objeto en una imagen trasladado en cualquier dirección. Por ejemplo, en la Figura 2.1 se muestra el espectro de amplitud de Fourier de dos imágenes con el mismo objeto pero en diferente posición.

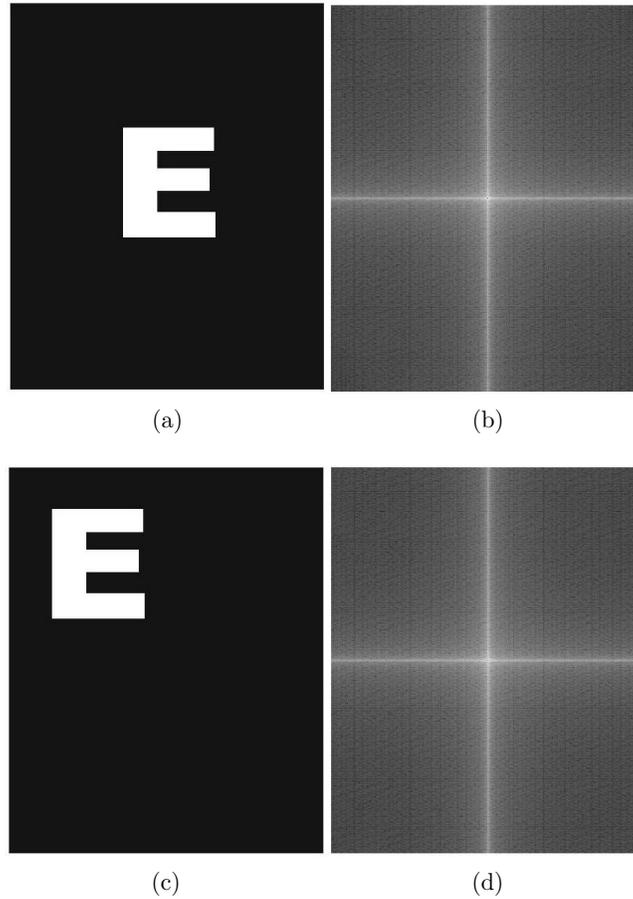


Figura 2.1. Ejemplificación de la invariancia a posición del módulo de la transformada de Fourier de una imagen. a) Imagen I . b) $|\mathcal{F}_F[I]|$. c) Imagen J . d) $|\mathcal{F}_F[J]|$. Ambos espectros de amplitud se muestran bajo una transformación logarítmica por cuestiones de visualización.

2.2. Filtrado de imágenes

El filtrado de imágenes digitales es una técnica muy utilizada en el procesamiento de imágenes digitales. Existen filtros para resaltar o suavizar bordes en imágenes, remover distintos tipos de ruido, entre otros. En el área de reconocimiento de patrones, se pueden utilizar filtros en imágenes digitales con el fin de obtener ciertas características que permitan hacer una clasificación o identificación entre imágenes. A los filtros utilizados en imágenes digitales, también se les conoce como máscaras.

Una forma de aplicar un filtro a una imagen $I[n_1, n_2]$ es mediante la convolución discreta. Este procedimiento se conoce como filtrado espacial cuando las operaciones se llevan a cabo en cada píxel $[n_1, n_2]$ de la imagen I y como filtrado frecuencial cuando se trabaja en el dominio de la transformada de Fourier de I [19]. En ambos casos, el filtrar una imagen da como resultado otra imagen del mismo tamaño que la original.

2.2.1. Filtrado espacial

Si se tiene una imagen $I[n_1, n_2]$ en escala de grises de tamaño $M \times N$ y un filtro o máscara de convolución $w[n_1, n_2]$ de tamaño $m \times n$, el proceso de filtrado mediante la convolución entre w e I está dado por la ecuación

$$\begin{aligned} w[n_1, n_2] * I[n_1, n_2] &= \sum_{s_1=-a}^a \sum_{s_2=-b}^b w[s_1, s_2] I[n_1 - s_1, n_2 - s_2] \\ &= \hat{I}[n_1, n_2], \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

en donde $a = (m-1)/2$, $b = (n-1)/2$, $n_1 = 0, 1, \dots, M-1$, $n_2 = 0, 1, \dots, N-1$, e $\hat{I}[n_1, n_2]$ es la imagen filtrada [27].

La ecuación 2.2.1 consiste en multiplicar punto a punto la matriz $w[n_1, n_2]$ de $m \times n$ por una submatriz de la imagen del mismo tamaño centrada en algún píxel, y luego asignar al valor de dicho píxel en la imagen filtrada

$w[n_1, n_2] * I[n_1, n_2]$ el resultado de sumar cada multiplicación. Al hacer este proceso en cada píxel de la imagen, se obtiene la imagen filtrada [19].

2.2.2. Filtrado en frecuencia

El filtrado en frecuencia, está fundamentado por el teorema de convolución discreta, el cual afirma que la convolución discreta en el dominio de frecuencia es una multiplicación punto a punto de matrices o producto Hadamard. De esto, el filtrado en frecuencia de una imagen $I[n_1, n_2]$ se define como $W[k_1, k_2] \odot |I_F[k_1, k_2]|$, donde $I_F[k_1, k_2]$ es la transformada rápida de Fourier de I , $W[k_1, k_2]$ es el filtro a utilizar y el símbolo \odot denota la multiplicación punto a punto.

La imagen filtrada, se obtiene tomando la transformada inversa rápida de Fourier, es decir,

$$\hat{I}[n_1, n_2] = \mathcal{F}_F^{-1} \left\{ \hat{\mathcal{F}}_F[I[n_1, n_2]] \right\}, \quad (2.2.2)$$

donde $\hat{\mathcal{F}}_F[I[n_1, n_2]]$ es la imagen resultante de aplicar el filtro W en el dominio de frecuencias.

En el área de reconocimiento de patrones en imágenes digitales, no siempre es necesario obtener la imagen $\hat{I}[n_1, n_2]$ de la ecuación (2.2.2), basta con trabajar con el espectro de amplitud de Fourier de $\hat{\mathcal{F}}_F[I[n_1, n_2]]$ para hacer la clasificación o identificación.

Capítulo 3

Sistema de reconocimiento de patrones invariante a posición y rotación

Como se observa en la ecuación (2.1.6), al trabajar con el espectro de amplitud de Fourier de las imágenes digitales, se obtiene directamente un sistema de reconocimiento de patrones que es invariante a posición. El invariante a rotación no es directo, para lograrlo se construyeron máscaras binarias de anillos concentricos, con las cuales se calculan firmas unidimensionales que son invariantes a traslación y rotación.

3.1. Máscaras Hilbert

Partiendo de la versión discreta de la transformada de Hilbert radial generalizada, ecuación (1.5.3), se propone que

$$\Phi[\theta] = e^{ir\theta}, \quad (3.1.1)$$

con $\theta = \cos \frac{k_1}{r^2}$ y $r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ para $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$, y $\theta = 0$ en $(k_1, k_2) = (0, 0)$, donde k_1 y k_2 representan las variables discretas en el plano de frecuen-

cia. Como la función $\Phi[\theta]$ toma valores complejos en el espacio de frecuencia, se puede expresar como una función $H[k_1, k_2] = Re[H] + iIm[H]$. Las funciones $Re[H]$ e $Im[H]$, correspondientes a la parte real e imaginaria de $H[k_1, k_2]$, se muestran en la figura 3.1 vistas sobre el plano (k_1, k_2) , las cuales se pueden representar como imágenes digitales en escala de grises.

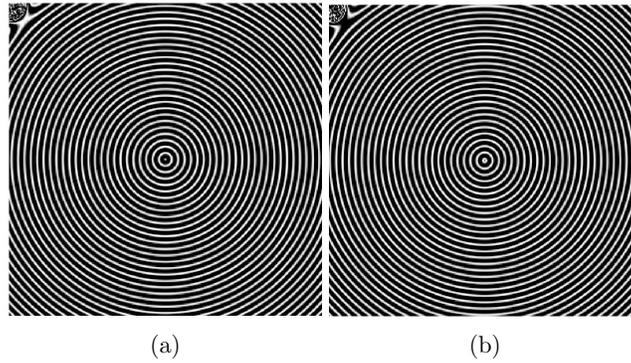


Figura 3.1. a) Parte real de $H[k_1, k_2]$: $Re[H]$. b) Parte imaginaria de $H[k_1, k_2]$: $Im[H]$.

Al filtrar en frecuencia a las imágenes $Re[H]$ e $Im[H]$ con un disco binario D , se generan las máscaras H_R y H_I (Figura 3.2), es decir,

$$\begin{aligned} H_R &= Re[H] \odot D, \\ H_I &= Im[H] \odot D. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

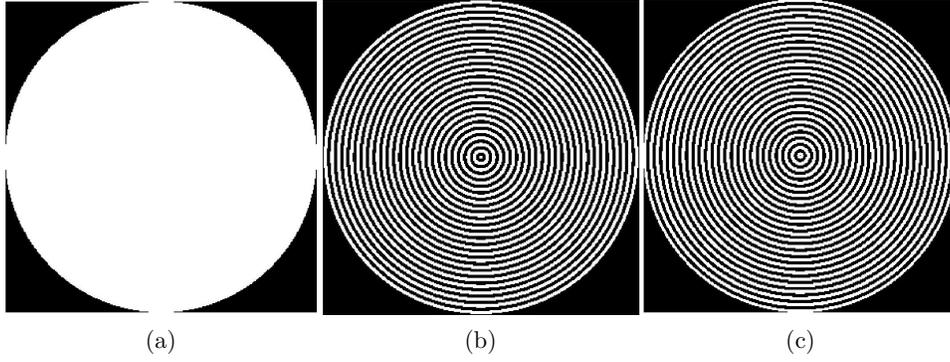


Figura 3.2. a) Disco binario D . b) Máscara H_R . c) Máscara H_I .

Para obtener las firmas invariantes a traslación y rotación, se filtra el módulo de la transformada rápida de Fourier de la imagen con las máscaras H_R y H_I . En la Figura 3.3, se muestra un ejemplo de dicho proceso.

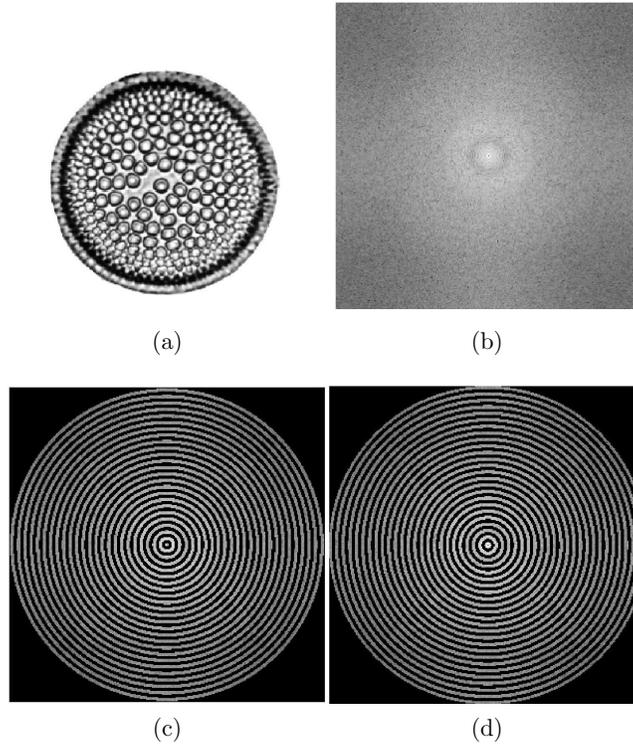


Figura 3.3. Filtros H_R y H_I actuando sobre el espectro de amplitud de Fourier de la imagen. a) Imagen I . b) Módulo de la transformada de Fourier de I . c) Espectro de amplitud de Fourier filtrado con H_R . d) Espectro de amplitud de Fourier filtrado con H_I . Por cuestiones de visualización, las imágenes de los espectros de amplitud se muestran bajo una transformación logarítmica.

3.2. Firmas unidimensionales invariantes a traslación y rotación

En la Figura 3.3 se observa que el resultado de filtrar $|\mathcal{F}_F[I]|$ con H_R y H_I , genera en ambos casos una imagen con anillos de color negro (que representa al valor de intensidad 0) y anillos de distintos tonos de gris (valores

de intensidad diferentes de cero).

Para cada imagen se obtienen dos arreglos de números f_R y f_I , denominados *firmas de la imagen*. La primera se determina a partir del espectro de amplitud de Fourier de la imagen filtrado por H_R , y la otra utilizando el filtro H_I .

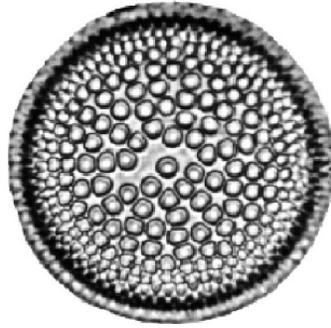
Para una imagen dada I , la firma f_R es

$$f_R = [s_1, s_2, \dots, s_N], \quad (3.2.1)$$

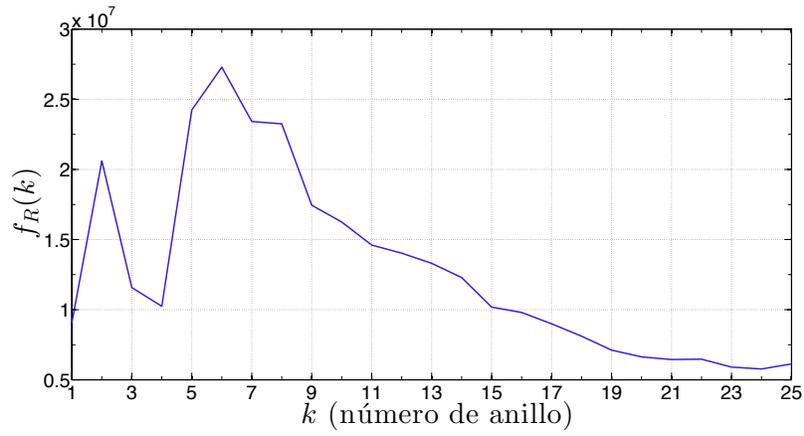
donde s_k es la suma de las intensidades de los píxeles del k -ésimo anillo (sin considerar a los anillos en negro y numerados en orden ascendente del centro hacia afuera) en la imagen $|\mathcal{F}_F[I]| \odot H_R$ y N es el número de dichos anillos en la imagen (Figura 3.3). Análogamente, se determinó la firma

$$f_I = [\hat{s}_1, \hat{s}_2, \dots, \hat{s}_M], \quad (3.2.2)$$

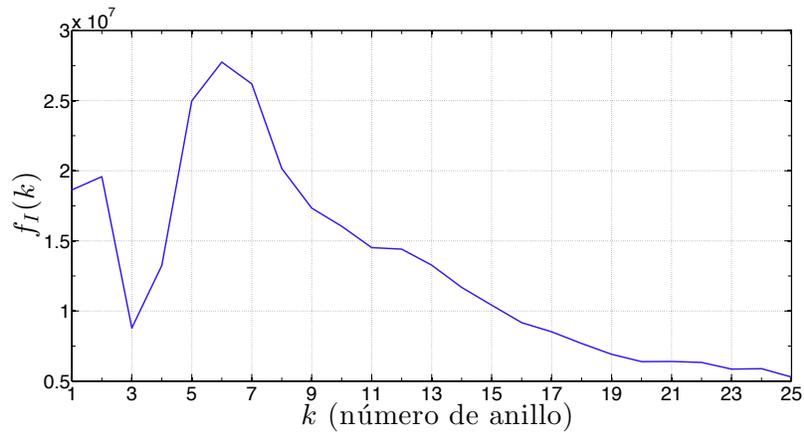
correspondiente a la imagen $|\mathcal{F}_F[I]| \odot H_I$. En la Figura 3.4, se muestran las firmas de la imagen en la Figura 3.3 (a).



(a)



(b)



(c)

Figura 3.4. Firmas correspondientes a una imagen. a) Imagen I . b) Firma f_R . c) Firma f_I .

Capítulo 4

Plano de clasificación y nivel de confianza del sistema de reconocimiento de patrones

El sistema de reconocimiento de patrones se tiene que entrenar con una base de datos de imágenes de referencia. En la Figura 4.1, se muestra una base de datos formada por imágenes digitales en escala de grises de fósiles de diatomeas.

Las diatomeas son una de las fuentes básicas para la formación de materia orgánica en el océano y participan activamente en la sedimentación. La presencia de diatomeas en paleoambientes marinos ha sido usada para el estudio de cambios climáticos y de procesos geomorfológicos [29].

El objetivo de todo sistema de reconocimiento de patrones, es hacer una clasificación de imágenes digitales que no estén en la base de datos (denominadas imágenes problema) a partir de las imágenes de referencia, de tal forma que identifique automáticamente si una imagen problema es igual a una imagen de referencia.

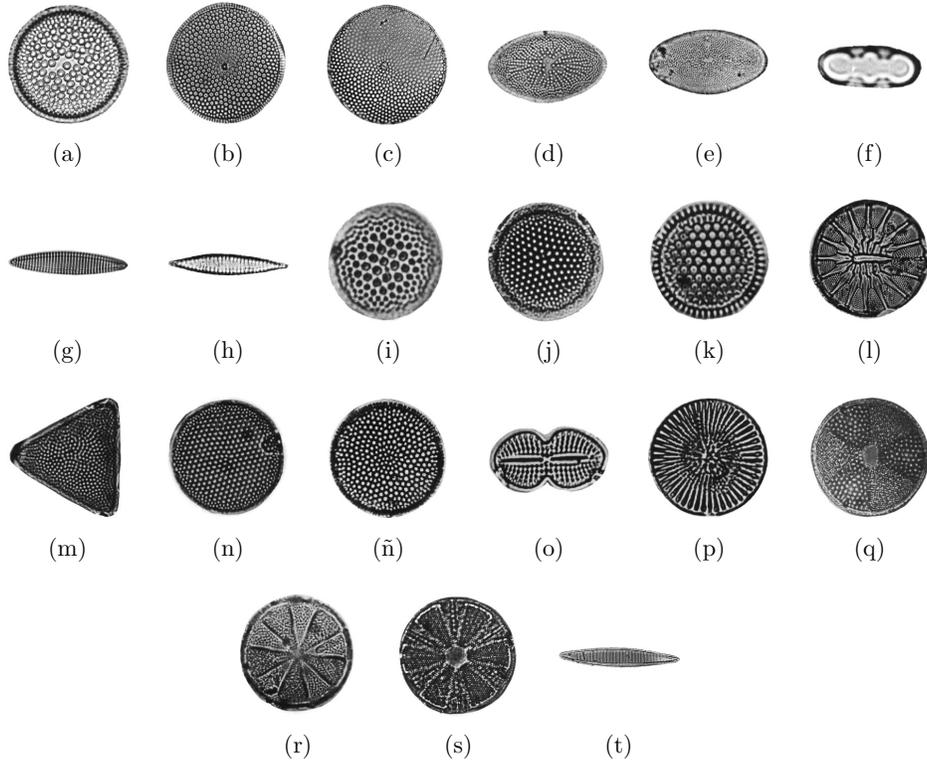


Figura 4.1. Base de datos de imágenes de referencia: fósiles de diatomeas. (a) A: *Actinocyclus ingens* - Rattray. (b) B: *Azpeitia* sp. (c) C: *Azpeitia nodulifera* - (Schmidth) Fryxell et Sims. (d) D: *Actinocyclus ellipticus* - Grunow in van Heurck. (e) E: *Actinocyclus ellipticus* var *moronensis* - (Deby ex Rattray) Kolbe. (f) F: *Denticulopsis praedimorpha* - Barron ex Akiba. (g) G: *Nitzschia praereinholdii* - Schrader. (h) H: *Bogorovia praepaleacea* - (Schrader) Jouse. (i) I: *Thalassiosira oestruppii* var 1. (j) J: *Thalassiosira oestruppii* var 2. (k) K: *Thalassiosira domifacta* - (Hendey) Jouse. (l) L: *Asteromphalus imbricatus* - Wallich. (m) M: *Pseudotriceratium cinnamomeum* - (Greville) Grunow. (n) N: *Thalassiosira kozlovii* - Makarova. (o) O: *Coscinodiscus radiatus* - Ehrenberg. (p) P: *Diploneis bombus* - Cleve-Euler in Backman et Cleve-Euler. (q) Q: *Stephanodiscus* sp. (r) R: *Actinoptychus undulatus* - (Bailey) Ralf. (s) S: *Actinoptychus bipunctatus* - Lohman. (t) T: *Actinoptychus splendens* - (Shadbolt) Ralf ex Pritchard. (u) U: *Nitzschia reinholdii* - Kanaya emend Barron & Baldauf.

Para entrenar al sistema, cada imagen de la Figura 4.1 se rotó un ángulo $\Delta\theta k$, con $k = 0, 1, \dots, 359$ y $\Delta\theta = 1^\circ$; por lo que, para cada imagen de referencia se tienen 360 imágenes. Por ejemplo, de la diatomea A se obtuvo el conjunto de imágenes $\{A_0, A_1, A_2, \dots, A_{359}\}$, donde la imagen A_k corresponde a la diatomea A rotada k grados, con $k = 0, 1, \dots, 359$. De esta forma, la base de datos de imágenes de entrenamiento tiene 7560 elementos.

Posteriormente, se calculan las firmas de cada imagen de entrenamiento mediante el procedimiento descrito en la sección 3.2. Por ejemplo, para la diatomea A , se obtuvieron los dos conjuntos de firmas

$$\left\{ f_R^{A_k} | k = 0, 1, \dots, 359 \right\} \quad (4.0.1)$$

y

$$\left\{ f_I^{A_k} | k = 0, 1, \dots, 359 \right\}. \quad (4.0.2)$$

Para cada firma $f_R^{A_k}$ del conjunto (4.0.1) se calculó el escalar real $P_R^{A_k}$, denominado *potencia de la firma* $f_R^{A_k}$, a partir de la ecuación

$$P_R^{A_k} = \frac{\sum_{n=1}^N \left[f_R^{A_k}(n) \right]^2}{N}, \quad (4.0.3)$$

donde N es el tamaño de la firma, lo que dio lugar al conjunto

$$P_R^A = \left\{ P_R^{A_k} | k = 0, 1, \dots, 359 \right\}. \quad (4.0.4)$$

Análogamente, a partir del conjunto (4.0.2) se determinó el conjunto

$$P_I^A = \left\{ P_I^{A_k} | k = 0, 1, \dots, 359 \right\}. \quad (4.0.5)$$

Entonces, a cada imagen A_k le corresponden dos números reales: $P_R^{A_k}$ y $P_I^{A_k}$, $k = 0, 1, \dots, 359$.

La media muestral de los conjuntos P_R^A y P_I^A , está dada por

$$\bar{X}_{P_R^A} = \frac{\sum_{k=0}^{359} P_R^{A_k}}{360}, \quad \bar{X}_{P_I^A} = \frac{\sum_{k=0}^{359} P_I^{A_k}}{360}, \quad (4.0.6)$$

y la desviación estándar de cada media por

$$\sigma_{P_R^A} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{359} (P_R^{A_k} - \bar{X}_{P_R^A})^2}{n-1}}, \quad \sigma_{P_I^A} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{359} (P_I^{A_k} - \bar{X}_{P_I^A})^2}{n-1}}. \quad (4.0.7)$$

El teorema del límite central afirma que, si de una población con una distribución cualquiera con media μ y desviación estándar σ se extraen muestras aleatorias de n observaciones, entonces, cuando n es grande, la distribución muestral de las medias muestrales \bar{X} se distribuye de manera aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar $EE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, conocida como error estándar [30].

Para el ejemplo de la diatomea A , de una muestra de 360 imágenes se calcularon los estimadores $P_R^{A_k}$, $k = 0, 1, \dots, 359$. Por el teorema del límite central, al ser considerablemente grande la muestra, las potencias $P_R^{A_k}$ tienen una distribución normal. Además $\bar{X}_{P_R^A}$ tiende a $\mu_{P_R^A}$ y $EE_{P_R^A} = \sigma_{P_R^A}/\sqrt{360}$, donde $\mu_{P_R^A}$ es la media poblacional. Análogamente, lo anterior se cumple para las potencias $P_I^{A_k}$.

Como las potencias de las firmas obtenidas a partir de la imagen A tienen una distribución normal, se pueden generar intervalos de confianza. Siguiendo la metodología de las gráficas de los diagramas de cajas, se construyeron los intervalos de confianza del 95.4% para cada uno de los dos conjuntos de las potencias de las firmas y, a partir de ahí, se construyó el rectángulo de confianza del 95.4% graficando los valores $\bar{X}_{P_R^A} \pm 2EE_{P_R^A}$ en el eje horizontal y $\bar{X}_{P_I^A} \pm 2EE_{P_I^A}$ en el eje vertical, que se muestra en color azul en la Figura 4.2. En la misma gráfica, la coordenada de las medias muestrales ($\bar{X}_{P_R^A}$, $\bar{X}_{P_I^A}$) se indica en rojo y el rectángulo en color cian corresponde al formado por $\bar{X}_{P_R^A} \pm EE_{P_R^A}$ y $\bar{X}_{P_I^A} \pm EE_{P_I^A}$, que es el rectángulo de confianza del 68.3%.

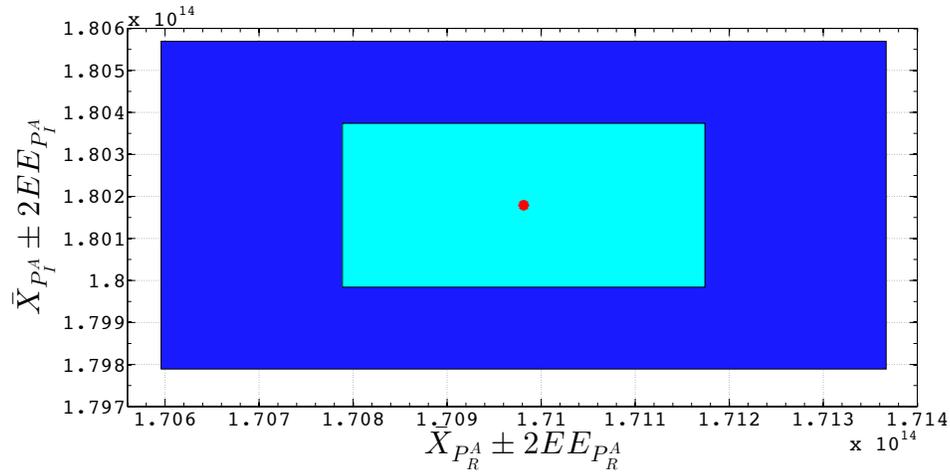


Figura 4.2. Rectángulo de confianza del 95.4% en color azul, rectángulo de confianza del 68.3% en color cian y el punto rojo indica la coordenada $(\bar{X}_{P_R^A}, \bar{X}_{P_I^A})$.

Siguiendo un procedimiento análogo para cada imagen digital en la base de datos de imágenes de referencia, se construyen los rectángulos de confianza para generar el plano de clasificación. En la Figura 4.3 se muestra el plano de clasificación para las imágenes en escala de grises de fósiles de diatomeas de la Figura 4.1.

Para que se observe con claridad que el sistema de reconocimiento de patrones clasifica eficientemente cada una de las imágenes problema, se presentan dos ampliaciones en las Figura 4.4 y Figura 4.5, donde se observa que ninguno de los rectángulos se traslapa. Logrando de esa manera el objetivo de tener un único plano de clasificación y así reducir el tiempo de cómputo al momento de indentificar a los objetos en las imágenes digitales.

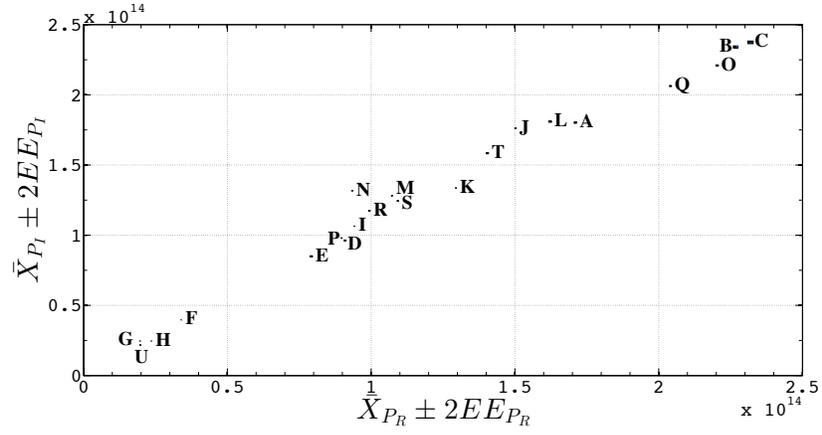


Figura 4.3. Plano de clasificación de las imágenes de fósiles de diatomeas de la Figura 4.1.

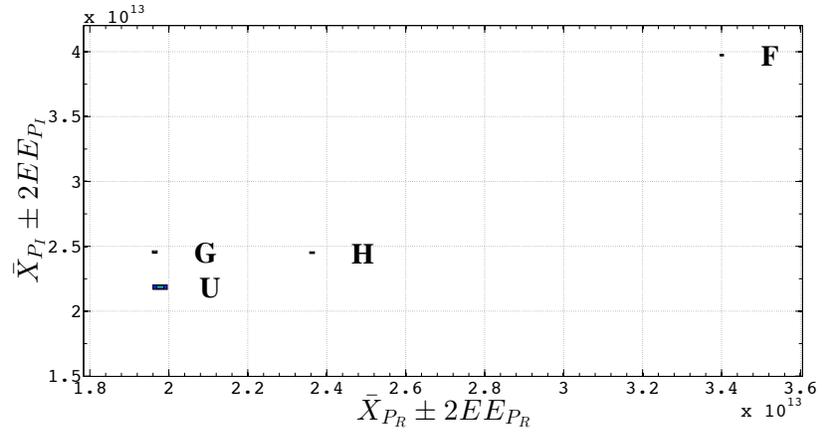


Figura 4.4. Amplificación de la Figura 4.3 correspondientes a los rectángulos de confianza de diatomeas G , U , H y F .

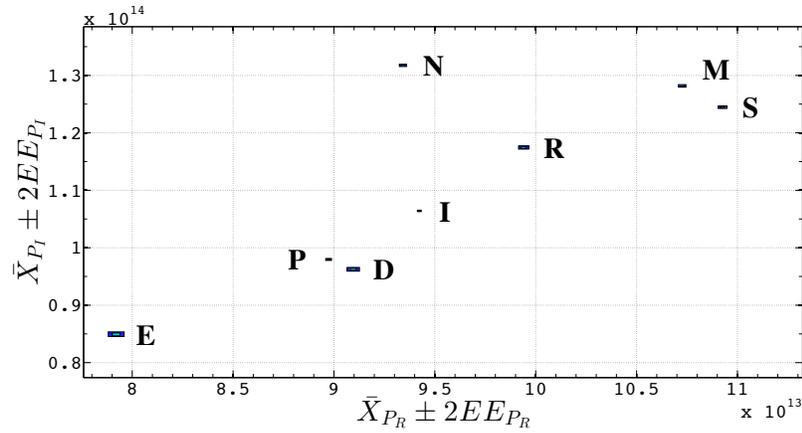


Figura 4.5. Amplificación de la Figura 4.3 correspondientes a los rectángulos de confianza de diatomeas E , P , D , I , N , R , M y S .

En el reconocimiento de patrones en imágenes digitales, el tiempo de cómputo es un factor determinante, debido a la gran cantidad de imágenes que se manejan. Solorza y Álvarez-Borrego [31], proponen las máscaras binarias de anillos concéntricos denominadas *máscaras Fourier* (M_R) y *máscaras Bessel* (B_P), las cuales son generadas en un tiempo mayor al utilizado para generar las máscaras Hilbert H_R y H_I . En la tabla 4.1, se muestra la comparación del tiempo promedio en que se genera H_R , M_R y B_P , obtenido a partir de una muestra de 50 elementos para cada caso. La máquina utilizada para este análisis es una: iMac con procesador 2.4 GHz Intel Core 2 Duo, memoria 2 GB 667 MHz DDR2 SDRAM.

Tabla 4.1: Tiempo de cómputo promedio.

Máscara	Tiempo (segundos)
H_R	0.0206242682705
M_R	0.5236733341570
B_P	0.1167171006915

Conclusiones

Después de presentar y desarrollar parte de la teoría de las transformadas de Fourier y de Hilbert, más allá de construir una base teórica para la implementación de un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales invariante a posición y rotación, quedaron plasmados algunos conceptos, desarrollos y resultados que pueden servir como guía para futuros trabajos.

A partir de la teoría y del estudio de las aplicaciones de la transformada de Hilbert se logró proponer un par de máscaras binarias de anillos concéntricos (*máscaras Hilbert*), mediante las cuales se obtienen firmas unidimensionales invariantes a translación y rotación para una imagen dada. Además, a partir de la potencia de las firmas se pudo construir un único plano de clasificación, a diferencia de los múltiples planos de clasificación empleados en los sistemas de reconocimiento de patrones por correlación.

Por otra parte, el tiempo promedio en que se generan las máscaras Hilbert es considerablemente menor al tiempo en que se generan las máscaras binarias de anillos Bessel y Fourier, reduciéndose así considerablemente el tiempo de cómputo empleado por el sistema para clasificar imágenes digitales. De esto, la implementación de las máscaras Hilbert se puede catalogar como parte del desarrollo de una nueva técnica más eficiente para obtener la invarianza a rotación en un sistema de reconocimiento de patrones en imágenes digitales.

El sistema de reconocimiento de patrones implementado permite recono-

cer y clasificar los distintos tipos de fósiles de diatomeas de la base de datos con la que se trabajó. De la misma forma, es posible obtener resultados análogos para el reconocimiento de distintos objetos capturados en imágenes digitales a escala de grises, sin importar la posición y la orientación de estos.

Referencias

- [1] Shih, F.Y., *Image Processing and Pattern Recognition. Fundamentals and Techniques*. Wiley (2010).
- [2] Davis, J.A., McNamara, D.E., Cottrell, D.M., *Image processing with the radial Hilbert transform: theory and experiments*. Optics Letters 25, 99-101 (2000).
- [3] Pei, S.C., Ding, J.J., *The generalized Radial Hilbert Transform and its applications to 2-D edge detection (any direction or specified directions)*. Acoustics, Speech, and Signal Processing 3, 357-360 (2003).
- [4] González, G., *Series de Fourier, Transformadas de Fourier y Aplicaciones*. Divulgaciones Matemáticas 5, 43-60 (1997).
- [5] Conway, J., *A Course in Functional Analysis*. 2da. ed. Springer, New York (1990).
- [6] Birkhoff, G., Kreyszig, E., *The establishment of Functional Analysis*. Historia Mathematica 11, 258-321 (1984).
- [7] Rees, C.S., Shah, A.M., Stanojevic, V., *Theory and applications of Fourier Analysis*, Marcel Dekker Inc. New York (1981).
- [8] Debnath, L., Bhatta, D., *Integral transforms and their applications*. 2da. ed. Chapman and Hall/CRC, (2007).
- [9] Hsu, H.P., *Análisis de Fourier*. 1ra. ed. Prentice Hall, Mexico (1998).
- [10] Lam, E., *The Fourier Transform and Its Applications*. Notas de clase, Universidad de Hong Kong (2008). En línea: www.eee.hku.hk/work8501/WWW2008/

- [11] Galaz, F., *Medida e integral de Lebesgue en \mathbb{R}^n* . Oxford University Press México, México(2002).
- [12] Priestley, H.A., *Introduction to Integration*. Oxford University Press, New York (1997).
- [13] Bracewell, R., *Fourier Analysis and Imaging*. 1ra. ed. Springer, New York (2003).
- [14] Osgood, B., *Lecture Notes for The Fourier Transform and its Applications*. Notas de clase, Electrical Engineering Department, Stanford University (2007).
- [15] King, F.W., *Hilbert Transforms. Volumen 1*. Cambridge University Press, New York (2009).
- [16] Churchill, R.V., Brown, J.W., *Variable Compleja y Aplicaciones*. 5ta. ed. McGraw-Hill, (1992).
- [17] Stark, H., *An extension of the Hilbert Transform Product Theorem*. Proceedings of the IEEE 59, 1359-1360 (1971).
- [18] Artés, A., Pérez, F., *Comunicaciones digitales*. Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones, Universidad Carlos III Madrid (2012).
- [19] González, R.C., Woods, R.E., Eddins, S.L., *Digital Image Processing using MATLAB*. 2da. ed. Tata McGraw-Hill, New York (2010).
- [20] Gabor, D., *Theory of communication*. Journal of the Institute of Electrical Engineers 93, 429-457 (1946).
- [21] Felsberg, M., Sommer, G., *The Monogenic Signal*. IEE Transactions on Signal Processing 49, 3136-3144 (2001).
- [22] Larkin, K.G., Bone, D.J., Oldfield, M.A., *Natural demodulation of two-dimensional fringe patterns. I. General background of the spiral phase quadrature transform*. J. Opt. Soc. Am. A. 18, 1862-1870 (2001).
- [23] Lorenzo, J.V., *An Approach to the 2D Hilbert Transform for Image Processing Applications*. Image Analysis and Recognition, 4th International Conference, ICIAR. Springer, pp. 157-165, Motreal (2007).

- [24] Bracewell, R., *The Fourier Transform and its Applications*, 3ra. ed. McGraw-Hill, New York (2000).
- [25] Cooley, J.W., Tukey, J.W., *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*. Mathematics of Computation 19, 297-301 (1965).
- [26] Johansson, M. *The Hilbert Transform*. Tesis de maestría, Mathematics/Applied mathematics, Vaxjo University (1999).
- [27] Pinilla, C., Alcalá, A., Ariza, F.J., *Filtrado de imágenes en el dominio de frecuencia*. Revista de teledetección 12, 1-5 (1997).
- [28] Buron, M.E., *La transformada de Fourier en el procesamiento de imágenes digitales*. Universidad Nacional del Sur, Argentina (2012).
- [29] Álvarez J., Solorza, S., *Reconocimiento de patrones en imágenes digitales de fósiles de diatomeas*. Notas de clase.
- [30] Mendenhall, W., Beaver, R.J., *Introducción a la probabilidad y estadística*, Thomson, 12va. ed. México (2008).
- [31] Solorza, S., Álvarez, J., *Position and rotation-invariant pattern recognition system by binary masks*. Journal of Modern Optics 62, (2015).