

Universidad Autónoma de Baja California

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS E INGENIERÍA

COORDINACIÓN DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

FOLIO No. 048

Tijuana, B. C., a 19 de noviembre de 2010

C. NOHE RAMÓN CAZAREZ CASTRO

Pasante de: Doctor en Ciencias

Presente

El tema de trabajo y/o tesis para su examen profesional, en la
Opción TESIS

Es propuesto, por los CC. Dres. Luis Tupak Aguilar Bustos, Oscar Castillo López
y Antonio Rodríguez Díaz.

Quienes serán responsables de la calidad de trabajo que usted presente,
referido al tema "Diseño de Controladores Inteligentes Difusos Tipo-2 para Sistemas
Mecánicos no Suaves".

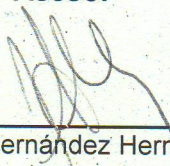
el cual deberá usted desarrollar, de acuerdo con el siguiente orden:

- I.- INTRODUCCIÓN
- II.- PRELIMINARES
- III.- CASO DE ESTUDIO
- IV.- DISEÑO DE CONTROLADORES
- V.- CONCLUSIONES



Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

Asesor



Q. Noemí Hernández Hernández

Sub-Director Secretario

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE BAJA CALIFORNIA

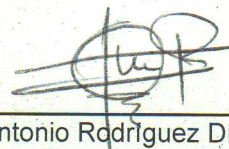


FACULTAD DE CIENCIAS
QUÍMICAS E INGENIERÍA



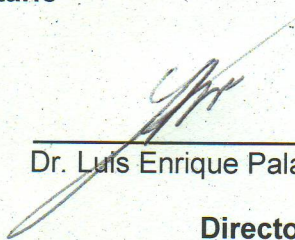
Dr. Oscar Castillo López

Asesor



Dr. Antonio Rodríguez Díaz

Asesor



Dr. Luis Enrique Palafox Maestre

Director

TESIS DEFENDIDA POR

Nohé Ramón Cázarez Castro

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

Codirector del Comité

Dr. Oscar Castillo López

Codirector del Comité

Dra. Elba Patricia Melin Olmeda

Miembro del Comité

Dr. Guillermo Licea Sandoval

Miembro del Comité

Dr. Antonio Rodríguez Días

Miembro del Comité

Diciembre de 2010

Universidad Autónoma de Baja California



PROGRAMA DE POSGRADO
MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA

DISEÑO DE CONTROLADORES INTELIGENTES DIFUSOS TIPO-2
PARA SISTEMAS MECÁNICOS NO SUAVES

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta:

NOHÉ RAMÓN CÁZAREZ CASTRO

Tijuana, Baja California, México, Diciembre de 2010

RESUMEN de la tesis de **NOHÉ RAMÓN CÁZAREZ CASTRO**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS. Tijuana, Baja California, Diciembre de 2010.

DISEÑO DE CONTROLADORES INTELIGENTES DIFUSOS TIPO-2 PARA SISTEMAS MECÁNICOS NO SUAVES

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

Codirector de Tesis

Dr. Oscar Castillo López

Codirector de Tesis

Esta tesis presenta el análisis y diseño de controladores difusos tipo-2 para sistemas mecánicos no suaves. Métodos empíricos y formales han sido considerados en el diseño de los controladores. Se propone como caso de estudio la regulación de salida para un servomecanismo con juego mecánico (backlash) no lineal. El problema es el diseño de un controlador difuso tipo-2 tal que se obtenga un sistema en lazo cerrado en el cual todas las trayectorias están acotadas y la carga del mecanismo sea regulado a la posición deseada mientras se atenúan las influencias de perturbaciones externas. La importancia adicional del estudio radica en que la posición del servomotor es la única medición disponible para retroalimentar.

Palabras Clave: lógica difusa tipo-2, observadores, sistemas mecánicos no suaves, backlash.

ABSTRACT of the thesis presented by **NOHÉ RAMÓN CÁZAREZ CASTRO**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of DOCTOR IN SCIENCES. Tijuana, Baja California, December 2010.

DESIGNING INTELLIGENT TYPE-2 FUZZY CONTROLLERS FOR DYNAMIC NONSMOOTH MECHANICAL SYSTEMS

This thesis addresses the analysis and design of type-2 fuzzy logic controllers for nonsmooth mechanical systems. Empirical and formal methods has been considered in the controllers design. The output regulation problem for a servomechanism with nonlinear backlash is proposed as a case of study. The problem is to design a feedback controller so as to obtain the closed-loop system in which all trajectories are bounded and the load of the driver is regulated to a desired position while also attenuating the influence of external disturbances. The servomotor position is the only measurement available for feedback. The proposed extension is far from trivial because of the nonminimum phase properties of the system.

Keywords: type-2 fuzzy logic, observers, nonsmooth mechanical systems, backlash.

A ustedes

Agradecimientos

A todos quienes les deba agradecer, por lo que les deba agradecer.

En especial al pueblo de México por financiar mis estudios a través de CONACyT.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	x
I. Introducción	1
I.1 Objetivos	3
I.1.1 Objetivos Específicos	3
I.2 Organización del documento	4
II. Preliminares	5
II.1 Sistemas inteligentes	5
II.1.1 Conjuntos y sistemas difusos	5
II.1.2 Algoritmos genéticos	11
II.2 Sistemas mecánicos no suaves	12
III. Caso de estudio	16
III.1 Modelo dinámico	16
III.2 Planteamiento del problema	18
III.3 Plataforma de experimentación	21
IV. Diseño de controladores	23
IV.1 Diseño empírico	23
IV.1.1 Controladores empíricos difusos tipo-1	23
IV.2 Diseño con algoritmos genéticos	28
IV.2.1 Metodología para construir algoritmos genéticos para evolu- cionar controladores difusos	28
IV.2.2 Algoritmos genéticos para evolucionar controladores difusos tipo-1	29

Contenido (continuación)

	Página
IV.2.3 Algoritmos genéticos para evolucionar controladores difusos tipo-2	36
IV.2.4 Comparación	40
IV.2.5 Resultados añadiendo perturbaciones	45
IV.3 Diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov	47
IV.3.1 Diseño de controladores difusos tipo-1, usando la síntesis difusa de Lyapunov	47
IV.3.2 Diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov para controladores difusos tipo-2	54
IV.4 Diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov para un sistema observado	60
IV.4.1 Diseño del observador	60
IV.4.2 Diseño de controladores difusos, usando la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema observado	61
IV.5 Comparación	67
V. Conclusiones	69
V.1 Problemas abiertos	70
REFERENCIAS	72
A. Estabilidad en sentido de Lyapunov	76
A.1 Conceptos básicos	77
A.2 Método directo de Lyapunov	82

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Sistema de inferencia difusa tipo-1.	7
2	Sistema de inferencia difusa tipo-2.	10
3	Curvas de modelos estáticos de fricción: (a) fricción viscosa, (b) fricción de Coulumb, (c) Coulumb más fricción estática y (d) fricción de Stribeck.	13
4	a) Modelo de zona-muerta para backlash; b) Aproximación monótona para el modelo de zona-muerta	17
5	Plataforma de experimentación.	21
6	Backlash histéresis antes de la compensación.	22
7	Diagrama del sistema en lazo cerrado.	22
8	Granulación de la variable de entrada error para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.	24
9	Granulación de la variable de entrada cambio de error para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.	25
10	Granulación de la variable de entrada control para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.	25
11	Superficie de control obtenida para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.	26
12	Resultados obtenidos para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.	27
13	Genotipo para los controladores difusos tipo-1.	31
14	Evolución del algoritmo genético para optimizar sistemas difusos tipo-1.	33
15	Fenotipo de los <i>mejores</i> controladores difusos tipo-1 diseñados por el algoritmo genético. Renglones de arriba abajo: <i>error</i> , <i>change of error</i> y <i>control</i>	35
16	Superficie de control del controlador difuso tipo-1 diseñado por el algoritmo genético.	36
17	Resultados del controlador difuso tipo-1 diseñado por el algoritmo genético.	37

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
18	Genotipo para controladores difusos tipo-2.	38
19	Evolución del algoritmo genético para optimizar sistemas difusos tipo-2.	40
20	Fenotipo de los <i>mejores</i> controladores difusos tipo-2 diseñados por el algoritmo genético. Renglones de arriba a abajo: <i>error</i> , <i>change of error</i> y <i>control</i>	42
21	Superficie de control del controlador difuso tipo-2 diseñado por el algoritmo genético.	43
22	Resultados del controlador difuso tipo-2 diseñado por el algoritmo genético.	43
23	Resultados del controlador difuso tipo-1 diseñado por el algoritmo genético, añadiendo ruido en el lazo de retroalimentación.	46
24	Resultados del controlador difuso tipo-2 diseñado por el algoritmo genético, añadiendo ruido en el lazo de retroalimentación.	46
25	Conjunto de funciones de membresía tipo-1 obtenidas de la la síntesis difusa de Lyapunov. De arriba a abajo: x_1 , x_2 y u	51
26	Superficie de control para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).	52
27	Respuesta del sistema (17)-(21) para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov.	53
28	Trayectorias de x_1 para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).	53
29	Trayectorias de V y $\dot{V}$ para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).	54
30	Conjunto de funciones de membresía tipo-2 obtenidas de la síntesis difusa de Lyapunov. De arriba a abajo: $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ y $\tilde{u}$	57
31	Superficie de control para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).	58
32	Respuesta del sistema (17)-(21) para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov.	59

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
33	Trayectorias de x_1 para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).	59
34	Trayectorias de V y $\dot{V}$ para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).	60
35	Respuesta del sistema (44)-(45) para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov.	64
36	Respuesta del sistema (44)-(45) para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov.	65

Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Parámetros nominales del mecanismo.	22
II	Reglas difusas para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.	26
III	Reglas IF-THEN difusas para el diseño genético de controladores difusos tipo-1.	29
IV	Parámetros del algoritmo genético.	32
V	Resultados obtenidos por el algoritmo genético en el diseño de sistemas difusos tipo-1.	34
VI	Datos de los <i>mejores</i> controladores difusos tipo-1 diseñados por el algoritmo genético.	34
VII	Resultados obtenidos por el algoritmo genético en el diseño de sistemas difusos tipo-2.	41
VIII	Datos de los <i>mejores</i> individuos encontrados por el algoritmo genético.	41
IX	Comparación entre los resultados obtenidos por los controladores difusos tipo-1 y tipo-2 diseñados con algoritmos genéticos.	44
X	Comparación entre los resultados de los sistemas difusos tipo-1 y tipo-2 encontrados por el algoritmo genético aplicando ruido.	47
XI	Representación matricial de las reglas IF-THEN difusas obtenidas de la síntesis difusa de Lyapunov.	50
XII	Comparación para los resultados de los controladores tipo-1 y tipo-2 para el sistema (44)-(45).	66
XIII	Comparación entre los resultados obtenidos por los controladores difusos tipo-1 y tipo-2 diseñados con algoritmos genéticos.	67

Capítulo I

Introducción

Un problema importante en la ingeniería de control es un diseño robusto que establezca en forma asintótica una planta mientras atenúa la influencia de las variaciones de los parámetros y las perturbaciones externas. En la última década, este problema se ha estudiado mucho y considerables esfuerzos de investigación han dado lugar al desarrollo de metodologías de diseño sistemático de sistemas retroalimentados no lineales. Un estudio de estos métodos, fundamental en este sentido se da en Isidori (2000).

El diseño de sistemas difusos es una tarea pesada que los profesionales de la lógica difusa enfrentan cada vez que intentan utilizarla como una solución a algún problema. El diseño de los sistemas de lógica difusa implica al menos dos etapas: el diseño de la base de reglas y el diseño de las funciones de membresía.

Ha habido algunas publicaciones sobre el diseño de sistemas difusos tipo-1, por ejemplo Grefenstette (1986) presenta algoritmos genéticos como un método de optimización de parámetros de control, los autores optimizan los parámetros del sistema en lazo cerrado pero no del sistema difuso tipo-1. En Lee y Takagi (1993) se utilizan algoritmos genéticos para optimizar todos los parámetros de un sistema difuso tipo-1. En Melin y Castillo (2001) se presenta una hibridación de las redes neuronales y algoritmos genéticos para optimizar un sistema difuso tipo-1. Un algoritmo genético jerárquico se propone en Castillo *et al.* (2004) para optimizar las reglas y los parámetros de las funciones de membresía de un sistema difuso tipo-1.

Los sistemas difusos tipo-2 [Mendel (2001)] son una generalización de los sistemas

difusos tipo-1 [Zadeh (1975a), Zadeh (1975b), Zadeh (1975c)] que nos permiten hacer frente a la incertidumbre inducida en un sistema por el ruido, las fricciones, el juego mecánico, en lo sucesivo “backlash”, etc. En los últimos años se ha visto un creciente interés en la investigación de las teorías y aplicaciones de los sistemas difusos tipo-2, motivada por los sectores académico e industrial. En Hagrass (2007) se presenta una revisión amplia de los sistemas difusos tipo-2 en aplicaciones de control, y en Sepulveda *et al.* (2007) se presenta una comparación entre sistemas difusos tipo-1 y tipo-2, estableciendo parámetros para determinar la conveniencia de utilizar uno sobre el otro. Un controlador difuso equipado con un algoritmo de entrenamiento tal que cumpla con las condiciones de funcionamiento de un controlador H_∞ que debe ser satisfecho por un sistema no lineal de múltiples entradas y múltiples salidas con perturbaciones externas, se presenta en Lin *et al.* (2009).

Los sistemas difusos tipo-2 nos permiten enfrentar la incertidumbre, modelada en forma de funciones de membresía tipo-2, trayendo un nuevo problema en el diseño de sistemas difusos. En Castillo *et al.* (2008) se demuestra que haciendo una modificación uniforme a los parámetros de las funciones de membresía hasta un cierto límite, el sistema en lazo cerrado conserva algunas propiedades como la estabilidad, pero se pierde o gana en algunas otras propiedades como el rendimiento. Sobre el diseño de sistemas difusos tipo-2, en Juang y Hsu (2009) se propone un método de clasificación difuso tipo-2 por intervalo para generar reglas automáticamente.

El problema del caso de estudio presentado en esta tesis fue reportado por primera vez en Aguilar *et al.* (2007), donde el problema de controlar sistemas de fase no mínima se resolvió usando control H_∞ no lineal, sin proporcionar evidencia experimental de robustez. En esta tesis se proponen soluciones al problema usando principalmente sistemas difusos tipo-2, diseñados de manera empírica, usando paradigmas de computación

inteligente y siguiendo metodologías formales de teoría de control moderno. El hecho de que el sistema en cuestión se presente como de fase no mínima, lo hace un sistema mecánico no suave, el cual, además, presenta los fenómenos de fricción y backlash.

El problema consiste en regular la posición de salida de un mecanismo compuesto por una carga acoplada a un motor a través de una cadena de engranes, donde únicamente se tiene para retroalimentación la posición del motor y se desea controlar la posición de la carga.

I.1 Objetivos

El presente documento se dedica al problema de generar controladores inteligentes difusos tipo-2 para el control de sistemas mecánicos no suaves. Se plantea que el sistema difuso debe modelar las incertidumbres generadas por fricción y por backlash, permitiendo alcanzar los objetivos de control. Para el caso particular de backlash, se considera el caso en el cual se desea posicionar la masa de un servomecanismo compuesto de una carga acoplada a un motor a través de una cadena de engranes, teniendo mediciones únicamente en el actuador.

Cuando se usa un sistema difuso como controlador, la estabilidad se prueba experimentalmente, es objetivo de esta tesis hacer un diseño tal que se garantice la estabilidad en el sistema en lazo cerrado.

I.1.1 Objetivos Específicos

A partir de los objetivos generales, se derivan los siguientes objetivos específicos:

- Diseñar controladores inteligentes difusos tipo-2 para sistemas Euler-Lagrange.

- Resolver el problema de fricción en sistemas Euler-Lagrange.
- Resolver el problema de backlash en sistemas Euler-Lagrange.

I.2 Organización del documento

La tesis esta organizada como sigue: En el Capítulo II se presentan los preliminares teóricos de sistemas inteligentes y de sistemas mecánicos no suaves, el caso de estudio se describe en el Capítulo III, mientras que el diseño de controladores se presenta en el Capítulo IV con sus respectivos resultados para finalmente en el Capítulo V, presentar las conclusiones.

Capítulo II

Preliminares

En este capítulo se presentan las herramientas que serán empleadas en los capítulos posteriores. Específicamente, este capítulo se divide en las siguientes dos secciones:

- Sistemas Inteligentes.
- Sistemas mecánicos no suaves.

II.1 Sistemas inteligentes

En esta sección se presenta una breve revisión de los fundamentos de los sistemas inteligentes, en particular se revisan los sistemas difusos, tanto de tipo-1 como de tipo-2 y los algoritmos genéticos, tópicos utilizados el resto de la tesis.

II.1.1 Conjuntos y sistemas difusos

Conjuntos y sistemas difusos tipo-1

Un conjunto difuso tipo-1, denotado A es caracterizado por una función de membresía tipo-1 $\mu_A(z)$ [Castillo y Melin (2008)], donde $z \in Z$, siendo Z el dominio de definición de la variable, por ejemplo,

$$A = \{(z, \mu(z)) | \forall z \in Z\} \quad (1)$$

donde $\mu(z)$ es llamada la *función de membresía* tipo-1 del conjunto difuso A . La función de membresía tipo-1 mapea cada elemento de Z a un grado de membresía (o valor de membresía) entre 0 y 1.

Los sistemas difusos tipo-1 (también llamados sistemas de inferencia difusa) son ambas cosas, sistemas intuitivos y numéricos que mapean de valores numéricos reales a valores numéricos reales. Cada sistemas difuso tipo-1 esta asociado con un conjunto de reglas con muchas y significativas interpretaciones lingüísticas, tal como:

$$R^l : \text{IF } y \text{ is } A_1^l \text{ AND } \dot{y} \text{ is } A_2^l \text{ THEN } u \text{ is } B_1^l, \quad (2)$$

que se puede obtener ya sea a partir de datos numéricos, o de expertos familiarizados con el problema en cuestión. En particular (2) esta en la forma de una regla difusa tipo Mamdani [Mamdani y Assilian (1975)-Mamdani (1976)]. Con base en este tipo de declaraciones, acciones se combinan con reglas en un formato antecedente-consecuente, y luego se agregan de acuerdo a la teoría de razonamiento aproximado para producir un mapeo no lineal del espacio de entrada $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ al espacio de salida W , donde $A_k^l \subset U_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, y la variable lingüística de salida es denotada por u .

Un conjunto difuso tipo-1 consiste de cuatro elementos básicos (ver Figura 1): el ***fusificador tipo-1*** (***type-1 fuzzifier***), la ***base de reglas tipo-1*** (***type-1 fuzzy rule-base***), la ***máquina de inferencia difusa tipo-1*** (***type-1 inference engine***), y el ***defusificador tipo-1*** (***type-1 defuzzifier***). El ***type-1 fuzzy rule-base*** es una colección de reglas en la forma de (2), las cuales se combinan en la ***type-1 inference engine***, para producir una salida difusa. El ***type-1 fuzzifier*** mapea valores numéricos reales en conjuntos difusos tipo-1, los cuales son subsecuentemente usados como entradas para la ***type-1 inference engine***, mientras que el ***type-1 defuzzifier*** mapea los conjuntos difusos tipo-1 producidos por la ***type-1 inference engine*** en

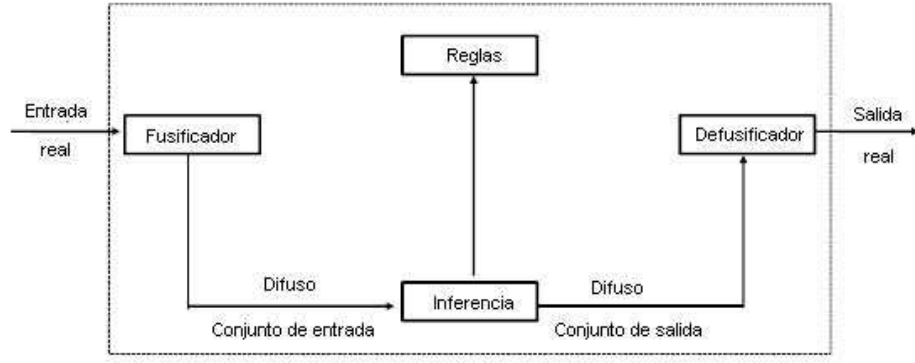


Figura 1. Sistema de inferencia difusa tipo-1.

valores numéricos reales.

En esta tesis, para calcular el valor numérico de salida (crisp output) de la Figura 1, calculamos principalmente el centroide (Centroid of Area - COA -) [Castillo y Melin (2008)] como *type-1 defuzzifier*. El COA está definido como:

$$\tau_m = u_{COA} = \frac{\int_u \mu_A(u) u du}{\int_u \mu_A(u) du}, \quad (3)$$

donde $\mu_A(u)$ es el conjunto difuso agregado de salida. Esta es la estrategia de defuzzificación más ampliamente adoptada, que recuerda el cálculo de los valores esperados de las distribuciones de probabilidad.

Conjuntos y sistemas difusos tipo-2

Al igual que el concepto de conjunto difuso tipo-1, el concepto de conjunto difuso tipo-2 fue introducido por Zadeh [Zadeh (1975a), Zadeh (1975b), Zadeh (1975c)] como una extensión del concepto de conjunto difuso tipo-1 ordinario.

Un conjunto difuso tipo-2, denotado como $\tilde{A}$ está caracterizado por una función de membresía tipo-2 $\mu_{\tilde{A}}(z, \mu(z))$ [Mendel y John (2002)], donde $z \in Z$ y $\mu \in J_z \subseteq [0, 1]$,

por ejemplo,

$$\tilde{A} = \{((z, \mu(z)), \mu_{\tilde{A}}(z, \mu(z))) | \forall z \in Z, \forall \mu(z) \in J_z \subseteq [0, 1]\}, \quad (4)$$

en el cual $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(z, \mu(z)) \leq 1$. $\tilde{A}$ puede tambien ser expresada como [Mendel y John (2002)]:

$$\tilde{A} = \int_{z \in Z} \int_{\mu(z) \in J} \mu_{\tilde{A}}(z, \mu(z)) / (z, \mu(z)), \quad (5)$$

donde $J_z \subseteq [0, 1]$ y $\int \int$ denotan la unión sobre todos los z y $\mu(z)$ admisibles [Mendel y John (2002)].

J_z es llamada la función de membresía primaria de z , donde $J_z \subseteq [0, 1] \forall z \in Z$ [Mendel y John (2002)]. La incertidumbre en la función de membresía primaria de un conjunto difuso tipo-2 $\tilde{A}$, consiste de una región acotada que es llamada la huella de incertidumbre (*footprint of uncertainty* (FOU) [Mendel y John (2002)]). Esta es la unión de todas las funciones de membresía primarias.

Un conjunto difuso tipo-2 por intervalos $\tilde{A}$ es a la fecha el tipo de conjuntos difusos tipo-2 más usado, y es el único tipo de conjuntos difusos tipo-2 considerado en las simulaciones y experimentos hechos en estas tesis. Este tipo de conjuntos difusos se describen como

$$\tilde{A} = \int_{z \in Z} \int_{\mu(z) \in J_z} 1 / (z, \mu(z)) = \int_{z \in Z} \left[\int_{\mu(z) \in J_z} 1 / \mu(z) \right] / z, \quad (6)$$

donde z es la *variable primaria* (*primary variable*), $J_z \subseteq [0, 1]$ es la *función membresía primaria* (*primary membership function*) de z , $\mu(z)$ es la *variable secundaria* (*secondary variable*), y $\int_{\mu(z) \in J_z} 1 / \mu(z)$ es la *función de membresía secundaria* (*secondary membership function*) en z . Se debe tener en cuenta que (6) significa que $\tilde{A} : Z \rightarrow \{[a, b] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. La incertidumbre sobre $\tilde{A}$ se transmite por la unión de todas las funciones de membresías primarias, llamada la FOU de $\tilde{A}$ [FOU($\tilde{A}$)], por

ejemplo,

$$\text{FOU}(\tilde{A}) = \bigcup_{z \in X} J_z = \{(z, \mu(z)) : \mu(z) \in J_z = [\underline{A}(z), \overline{A}(z)] \subseteq [0, 1]\}. \quad (7)$$

Se debe tener en cuenta que un conjunto difuso tipo-2 también puede ser representado como

$$\tilde{A} = 1/\text{FOU}(\tilde{A}), \quad (8)$$

en el entendido de que esto significa poner un grado secundario a cada uno de todos los puntos de $\text{FOU}(\tilde{A})$.

Un sistema difuso descrito usando al menos un conjunto difuso tipo-2 es llamado sistema difuso tipo-2 (o sistema de inferencia difusa tipo-2). Los sistemas difusos tipo-1 son incapaces de lidiar directamente con la incertidumbre, esto se debe a que utilizan conjuntos difusos tipo-1, los cuales no son inciertos. Por otra parte, los sistemas difusos tipo-2 son muy útiles en circunstancias en que es difícil determinar incertidumbres exactas y medibles [Mendel (2001)].

Se sabe que los sistemas difusos tipo-2 nos permiten modelar y reducir al mínimo los efectos de las incertidumbres en sistemas difusos basados en reglas. Por desgracia, los sistemas difusos tipo-2 son más difíciles de usar y de entender que los sistemas difusos tipo-1, por lo que su uso todavía no se ha extendido.

De manera similar a un sistema difuso tipo-1, un sistema difuso tipo-2 incluye un *fusificador tipo-2* (*type-2 fuzzifier*), una *base de reglas tipo-2* (*type-2 fuzzy rule-base*), una *máquina de inferencia difusa tipo-2* (*type-2 inference engine*) y sustituye el *defusificador tipo-1* por un *procesador de salida* (*output processor*). El *procesador de salida* incluye un *reductor de tipo* (*type-reducer*) [Mendel (2001)] y un *defusificador tipo-2* (*type-2 defuzzifier*); este genera un conjunto difuso tipo-1 de salida (del *reductor de tipo*), o un valor numérico real

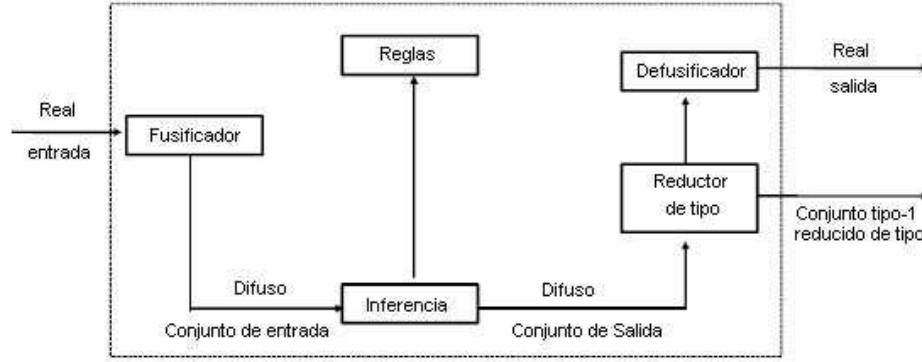


Figura 2. Sistema de inferencia difusa tipo-2.

(del **defusificador tipo-2**). De nuevo un sistema difuso tipo-2 está caracterizado por reglas IF-THEN, pero sus antecedentes y consecuentes son ahora conjuntos difusos tipo-2, véase (9). Los sistemas difusos tipo-2 se pueden utilizar cuando las circunstancias son demasiado inciertas para determinar los grados exactos de membresía. Un modelo de un sistema difuso tipo-2 se muestra en la Figura 2.

$$R^l : \text{IF } y \text{ is } \tilde{A}_1^l \text{ AND } \dot{y} \text{ is } \tilde{A}_2^l \text{ THEN } u \text{ is } \tilde{B}_1^l, \quad (9)$$

Se debe tener en cuenta que para ambos, los sistemas difusos tipo-1 y tipo-2, en la **base de reglas** estamos describiendo las reglas IF-THEN siguiendo la definición de reglas difusas tipo Mamdani [Mamdani y Assilian (1975)-Mamdani (1976)].

En esta tesis estamos usando el *reductor de tipo Centroide* (CTR) [Mendel (2001)] como **defusificador tipo-2**, el CTR se define como:

$$\tau_m = \int_{\theta_j \in J_N} \cdots \int_{\theta_N \in J_{u_N}} [f_{u_1}(\theta_1) \star \cdots \star f_{u_N}(\theta_N)] / \frac{\int u_i \theta_i d\theta}{\int \theta_i d\theta}. \quad (10)$$

En Mendel (2001) puede encontrarse una definición detallada de (10).

II.1.2 Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son métodos de optimización que no dependen de derivadas, están basados en los conceptos de selección natural y el proceso evolutivo [Castillo y Melin (2005)]. Fueron propuestos e investigados por primera vez por Holland (1975). Como una herramienta de optimización de propósito general, los algoritmos genéticos se están mudando de los sectores académicos y se han encontrado aplicaciones importantes para estos en muchas áreas. Su popularidad se puede atribuir a la independencia que tienen de derivación de funciones y la incorporación de otras características reportadas por Castillo y Melin (2005).

La idea principal de un algoritmo genético es mantener una **población** (*population*) de soluciones para un problema, misma que evoluciona en el tiempo a través de un proceso de competencia y variación controlada. Cada individuo de la población representa una probable solución al problema específico, y cada individuo tiene asociada una *aptitud* (*fitness*) para determinar cuáles individuos son usados para formar (mediante reproducción sexual y mutación) nuevos en el proceso de competencia.

La reproducción sexual de los algoritmos genéticos consiste básicamente en un **proceso de selección** (**selection process**) [Holland (1975)], donde un conjunto de individuos son seleccionados para ser pasados a través de una **operación de cruce** (**crossover operation**) [Holland (1975)], la cual consiste en tomar un par de individuos e intercambiar sus genes de un (o más) punto de cruce hasta el final del cromosoma. La **mutación** (**mutation**) [Holland (1975)] consiste en cambiar uno o más genes seleccionados aleatoriamente de un cromosoma de alguno de los individuos de la población.

La **función objetivo** (*objective function*) [Holland (1975)] de un algoritmo genético es un valor de *aptitud* que el método debe maximizar o minimizar.

II.2 Sistemas mecánicos no suaves

En esta sección se presentan algunos de los modelos de fricción que hacen que a un sistema mecánico se le considere no suave, para iniciar considérese el modelo dinámico

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau + F(\dot{q}), \quad (11)$$

donde $q \in \mathbf{R}^n$ es el vector de posición, $\tau \in \mathbf{R}^m$, $m < n$ es el par de entrada, $M(q)$ es la matriz de inercia, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas, y $g(q)$ es el vector gravitacional. Además, en el modelo (11) $F(\dot{q})$ representa la dinámica no suave del sistema.

Algunos ejemplos de dinámicas no suaves son los modelos de fricción. La fricción es un fenómeno altamente no lineal, el cual es difícil de describir por un modelo general simple. Se han propuesto muchos modelos como los reportados por Armstrong-Hélouvry *et al.* (1994) y Olsson *et al.* (1998) para capturar las características de la fricción. Esos modelos pueden ser clasificados en dos clases: modelos estáticos y modelos dinámicos [Olsson *et al.* (1998)]. Un modelo estático de fricción proporciona un mapeo estático entre la velocidad y la fuerza de fricción, mientras que un modelo dinámico de fricción proporciona una relación entre la velocidad y fuerza de fricción. A continuación se describirán algunos modelos estáticos de fricción (para ver modelos dinámicos se recomienda consultar a Olsson *et al.* (1998)).

Los modelos estáticos de fricción, como el clásico modelo de fricción de Coulumb, han sido usados durante mucho tiempo para describir la fuerza de fricción que actúa en sistemas mecánicos. La Figura 3 muestra algunas curvas de fricción de algunos de los modelos estáticos más usados. Esas curvas de fricción, excepto la curva de fricción lineal viscosa, son discontinuas a velocidad cero. Estos modelos discontinuos de fricción son frecuentemente usados en combinación con la fricción lineal viscosa.

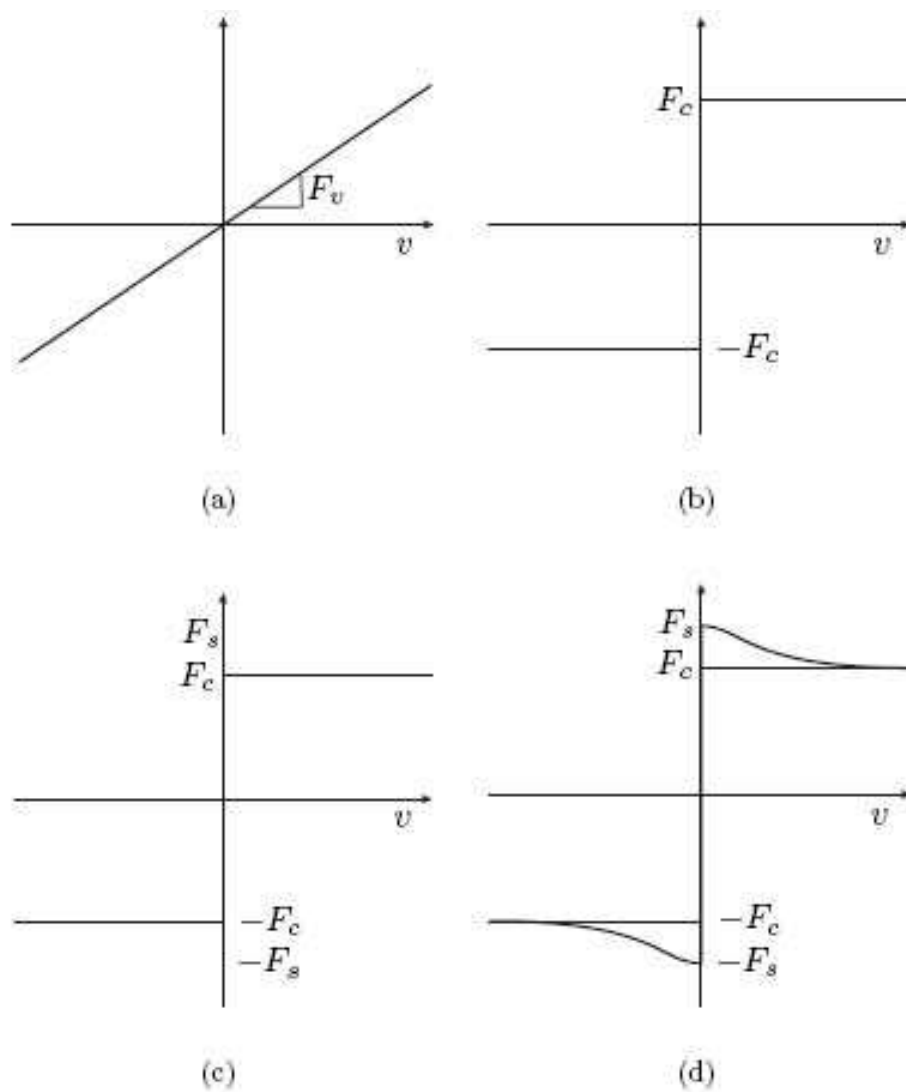


Figura 3. Curvas de modelos estáticos de fricción: (a) fricción viscosa, (b) fricción de Coulumb, (c) Coulumb más fricción estática y (d) fricción de Stribeck.

El modelo de fricción lineal viscosa está dado por

$$F = F_v v, \quad (12)$$

donde $F_v > 0$ es el coeficiente de amortiguamiento, v es la velocidad y F es la fuerza de fricción correspondiente. El clásico modelo de fricción de Coulomb esta descrito por

$$F = F_c \text{sign}(v), \quad (13)$$

con F_c como el nivel de fricción de Coulomb y

$$\text{sign}v = \begin{cases} 1 & \text{si } v > 0 \\ 0 & \text{si } v = 0 \\ -1 & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (14)$$

El modelo clásico de fricción de Coulomb (13) con la función signo (14) no describe adecuadamente la fuerza de fricción a velocidad cero porque en velocidad cero la fuerza de fricción puede ser solo cero. Un remedio para este problema es redefinir la función signo (14) como una función evaluada por tramos

$$\text{Sign}(v) \in \begin{cases} \{1\} & \text{si } v > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } v = 0 \\ \{-1\} & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (15)$$

El modelo de fricción de Coulomb, debido a su simplicidad, es usualmente usado en la literatura de control para analizar la dinámica de un sistema en lazo-cerrado y para describir controladores de sistemas mecánicos con fricción, en particular en esta tesis, el modelo (15) es usado más adelante.

La fuerza de fricción estática, que contrarresta la fuerza externa en reposo, fue propuesto por Morin (1833). Observaciones experimentales mostraron que el nivel de

fricción estática es más alto que el nivel de fricción de Coulomb como se puede ver en la Figura 3(c). El modelo de fricción que describe este fenómeno esta dado por

$$F = \begin{cases} F_c & \text{si } v > 0 \\ \min\{|F_{ex}|, F_s\} \text{sign}(F_{ex}) & \text{si } v = 0 \\ -F_c & \text{si } v < 0 \end{cases} \quad (16)$$

donde F_{ex} es la fuerza externa y $F_s > F_c$ es el nivel de fricción estática. Esta probado por Armstrong y Amin (1996) que este modelo de fricción es inadecuado para ser considerado para comportamientos de ciclos límite observados experimentalmente en sistemas de control PID (proporcional integral derivativo).

Capítulo III

Caso de estudio

En este capítulo se describe el modelo matemático de la planta usada en las simulaciones y experimentos hechos en el proyecto de investigación del cual emana esta tesis.

III.1 Modelo dinámico

El modelo dinámico de la posición angular $q_i(t)$ de un motor de corriente directa y la $q_o(t)$ de la carga acoplada a éste a través de una cadena de engranes está dado por

$$\begin{aligned} J_0 N^{-1} \ddot{q}_0 + f_0 N^{-1} \dot{q}_0 &= T + w_0 \\ J_i \ddot{q}_i + f_i \dot{q}_i + T &= \tau_m + w_i, \end{aligned} \tag{17}$$

en lo sucesivo, J_0 , f_0 , $\ddot{q}_0$ y $\dot{q}_0$ son, respectivamente, la inercia de la carga y el reductor, la fricción viscosa, la aceleración de salida, y la velocidad de salida. La inercia del motor, la fricción viscosa del motor, la aceleración del motor, y la velocidad del motor están denotadas por J_i , f_i , $\ddot{q}_i$ y $\dot{q}_i$, respectivamente. El par de entrada τ_m sirve como una acción de control, y T denota el par transmitido. Las perturbaciones externas $w_i(t)$ y $w_0(t)$, se introducen a la ecuación (17) del modelo dinámico del mecanismo para tomar en cuenta las discrepancias desestabilizadoras del modelo debidas a los fenómenos no lineales difíciles de modelar, de la fricción y el backlash.

El par T transmitido a través de un backlash con amplitud j , típicamente se modela

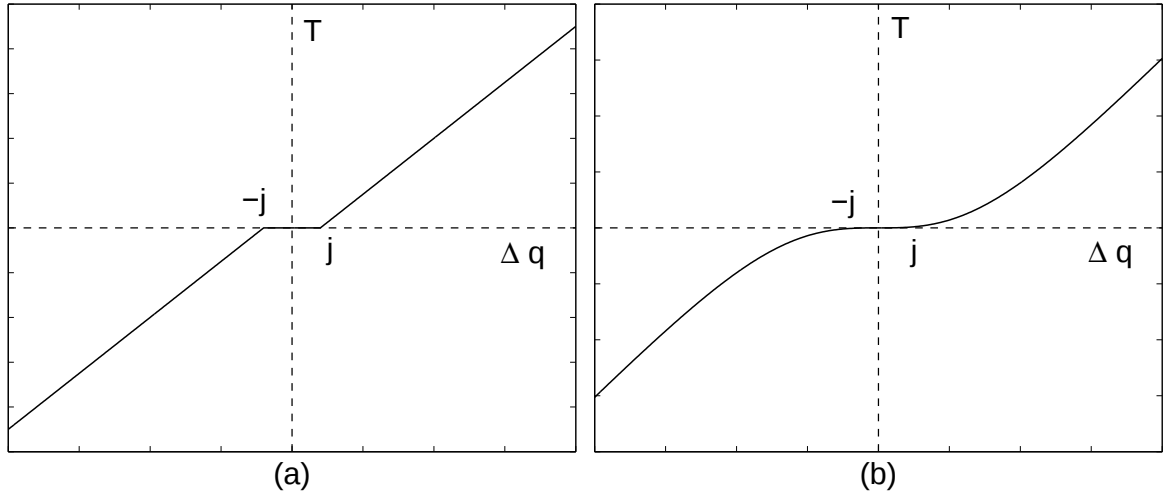


Figura 4. a) Modelo de zona-muerta para backlash; b) Aproximación monótona para el modelo de zona-muerta

como una zona-muerta característica (Nordin *et al.*, 2001, p. 7)]:

$$T(\Delta q) = \begin{cases} 0 & |\Delta q| \leq j \\ K\Delta q - Kj \operatorname{sign}(\Delta q) & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (18)$$

con

$$\Delta q = q_i - Nq_0, \quad (19)$$

donde K es la rigidez, y N es la tasa de reducción. La curva característica de este modelo se representa en la Figura 4. La posición $q_i(t)$ proveida por el servomotor es la única medida disponible en el sistema, el modelo anterior (17)-(19) es de fase no mínima debido a que junto con el origen, el sistema no forzado posee un conjunto de múltiples valores de equilibrio (q_i, q_0) con $q_i = 0$ y $q_0 \in [-j, j]$.

Para evitar el lidiar con un sistema de fase no mínima, reemplazamos el modelo de backlash (18) con su aproximación monótona:

$$T = K\Delta q - K\eta(\Delta q), \quad (20)$$

donde

$$\eta = -2j \frac{1 - \exp \left\{ -\frac{\Delta q}{j} \right\}}{1 + \exp \left\{ -\frac{\Delta q}{j} \right\}}. \quad (21)$$

Esta aproximación de backlash está inspirada en Merzouki *et al.* (2004). Junto al sistema de transmisión (17) sujeto a las medidas de la posición del motor, se muestra una aproximación de fase mínima del servomotor subyacente, que opera bajo las incertidumbres $w_i(t)$ y $w_0(t)$ que deben ser atenuadas. Como hecho, estas incertidumbres implican discrepancias entre el modelo físico (18) de backlash y su aproximación (20) y (21).

III.2 Planteamiento del problema

Para plantear formalmente el problema, se introduce el vector de estado de desviaciones

$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ con

$$x_1 = q_0 - q_d,$$

$$x_2 = \dot{q}_0,$$

$$x_3 = q_i - Nq_d,$$

$$x_4 = \dot{q}_i,$$

donde x_1 es el error de posición de la carga, x_2 es la velocidad de la carga, x_3 es la desviación de la posición del motor de su valor nominal, y x_4 es la velocidad del motor. La posición nominal del motor Nq_d ha sido establecida con antelación, de tal manera que se pueda garantizar que $\Delta q = \Delta x$, donde

$$\Delta x = x_3 - Nx_1.$$

Entonces, el sistema (17)-(21), representado en términos del vector de desviación x , toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= J_0^{-1}[KNx_3 - KN^2x_1 - f_0x_2 + KN\eta(\Delta q) + w_o], \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= J_i^{-1}[\tau_m + KNx_1 - Kx_3 - f_ix_4 + K\eta(\Delta q) + w_i].\end{aligned}\tag{22}$$

La dinámica cero

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= J_0^{-1}[-KN^2x_1 - f_0x_2 + KN\eta(-Nx_1)],\end{aligned}\tag{23}$$

de la versión no perturbada del sistema (22) con respecto a la salida

$$y = x_3,\tag{24}$$

se obtiene formalmente (vease Isidori (1995) para detalles) mediante la especificación de la ley de control que mantiene la salida de forma idéntica a cero. El resultado siguiente, extraído de Orlov (2005), garantiza que el error del sistema (22) y (24) sea globalmente de fase no mínima.

Teorema 1 *Sea la no linealidad η regulada por (21). Entonces el sistema (23) es asintóticamente estable en forma global.*

Prueba. Para empezar, consideremos una función de Lyapunov de la forma

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}KN^2J_0^{-1}x_1^2 + 2j^2KJ_0^{-1}\left(2\ln\frac{e^{Nx_1/j} + 1}{2} - \frac{Nx_1}{j}\right).\tag{25}$$

Como

$$2\ln\frac{e^{Nx_1/j+1} + 1}{2} \geq \frac{Nx_1}{j}$$

para todo $x_1 \in \mathbf{R}$, por inspección, la función V , regulada por (25), resulta ser definida positiva.

Entonces, se calcula la derivada temporal de la función de Lyapunov alrededor de las trayectorias de (23)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -J_0^{-1} \left(KN^2 x_1 + f_0 x_2 + 2jKN \frac{e^{Nx_1/j} - 1}{e^{Nx_1/j} + 1} \right) x_2 + KN^2 J_0^{-1} x_1 x_2 \\ &\quad + 2j^2 K J_0^{-1} \left(\frac{4Ne^{Nx_1/j}}{2j(e^{Nx_1/j} + 1)} x_2 - \frac{Nx_2}{j} \right) \\ &= -J_0^{-1} f_0 x_2^2 \leq 0.\end{aligned}\tag{26}$$

Ahora se puede concluir que la dinámica cero del sistema (23) no tiene soluciones triviales en $x_2 = 0$, donde la derivada temporal de la función de Lyapunov es igual a cero. De hecho, si $x_2 = 0$, entonces debido a (23)

$$\frac{Nx_1}{j} + 2 \frac{1 - e^{Nx_1/j}}{1 + e^{Nx_1/j}} = 0,\tag{27}$$

concluyendo que $x_1 = 0$. Para reproducir esta última conclusión, es suficiente representar (27) en términos de $\nu = Nx_1/j$

$$\nu + 2 \frac{1 - e^\nu}{1 + e^\nu} = 0,\tag{28}$$

y notar que el lado izquierdo de (28) es una función estrictamente creciente de ν pues por inspección su derivada es positiva definida

$$1 - \frac{4e^\nu}{(1 + e^\nu)^2} = \frac{(1 - e^\nu)^2}{(1 + e^\nu)^2} > 0\tag{29}$$

para todo $\nu \neq 0$.

Para completar la prueba, solo falta aplicar el principio de invariancia de LaSalle-Krasovski [Krasovski (1963)] al sistema (22)-(29).

El objetivo de la regulación difusa de salida del sistema no lineal (17)-(19) con backlash (20) y (21), es pues, el diseño de un controlador difuso con el fin de obtener

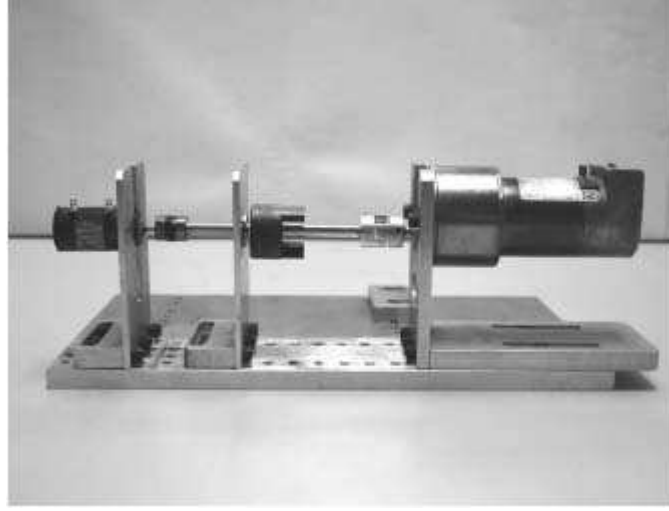


Figura 5. Plataforma de experimentación.

el sistema en lazo cerrado en el que todas estas trayectorias están acotadas y la salida $q_0(t)$ asintóticamente decae a una posición deseada q_d a medida que $t \rightarrow \infty$ mientras que atenúa la influencia de las perturbaciones externas $w_i(t)$ y $w_0(t)$.

III.3 Plataforma de experimentación

Para realizar experimentos usamos el modelo dinámico (17)-(21), el cual consiste en un motor DC ligado a una carga mecánica a través de una cadena de engranes con contactos imperfectos, este modelo es obtenido de Aguilar *et al.* (2007), la Figura 5 muestra la plataforma de experimentación. Los parámetros del modelo dinámico (17)-(21) se muestran en la Tabla I y son obtenidos del fabricante, mientras que $N = 3$, $j = 0.2$ [rad], y $K = 5$ [N-m/rad]. Esta plataforma experimental se encuentra instalada en el Laboratorio de Robótica y Control de CITED-IPN.

La gráfica de la Figura 6 revela el efecto de backlash de la cadena de engranes.

El diagrama general de control se muestra en la Figura 7.

Tabla I. Parámetros nominales del mecanismo.

Descripción	Notación	Valor	Unidad
Inercia del motor	J_i	2.8×10^{-6}	Kg-m^2
Inercia de la carga	J_o	1.07	Kg-m^2
Fricción viscosa del motor	f_i	7.6×10^{-7}	N-m-s/rad
Fricción viscosa de la carga	f_o	1.73	N-m-s/rad

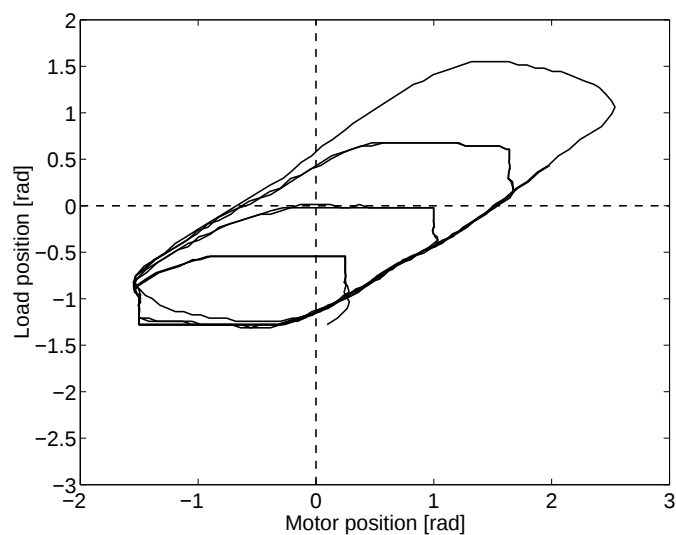


Figura 6. Backlash histéresis antes de la compensación.

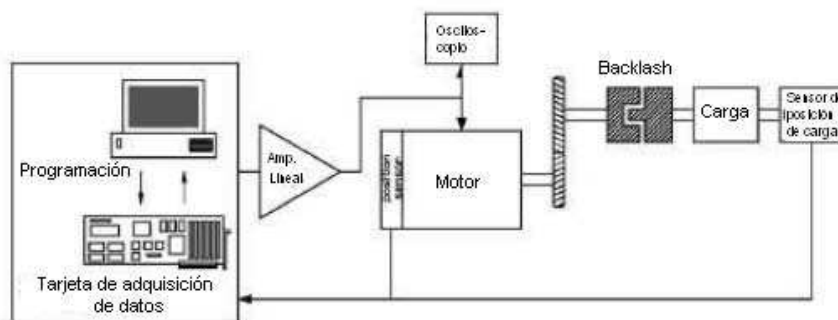


Figura 7. Diagrama del sistema en lazo cerrado.

Capítulo IV

Diseño de controladores

En este capítulo se presenta el diseño de controladores difusos tipo-1 y tipo-2 para sistemas mecánicos no suaves, se inicia con el diseño empírico en base al conocimiento que se tiene del funcionamiento del mecanismo, para pasar a hacer una optimización del diseño inicial con el uso de algoritmos genéticos. Con la finalidad de proveer de resultados formales en base a técnicas tradicionales de control, se plantea el diseño de controladores en base a la síntesis difusa de Lyapunov propuesta por Margaliot y Langholz (1998), misma que se usa para el diseño de controladores pero basados en un observador diseñado para el caso se estudio presentado.

IV.1 Diseño empírico

Los resultados descritos en este apartado son retomados de Cazarez-Castro *et al.* (2008c) y Cazarez-Castro *et al.* (2009b).

IV.1.1 Controladores empíricos difusos tipo-1

Diseño de controladores empíricos difusos tipo-1

Para resolver el problema de regulación de salida, se formula una base de conocimientos con reglas de dos entradas (*error - error -* y *cambio de error - change of error -*) y una salida (*control - control -*) en la forma (2) de reglas IF-THEN.

La granulación de las funciones de membresía se hace de tal manera que se tienen

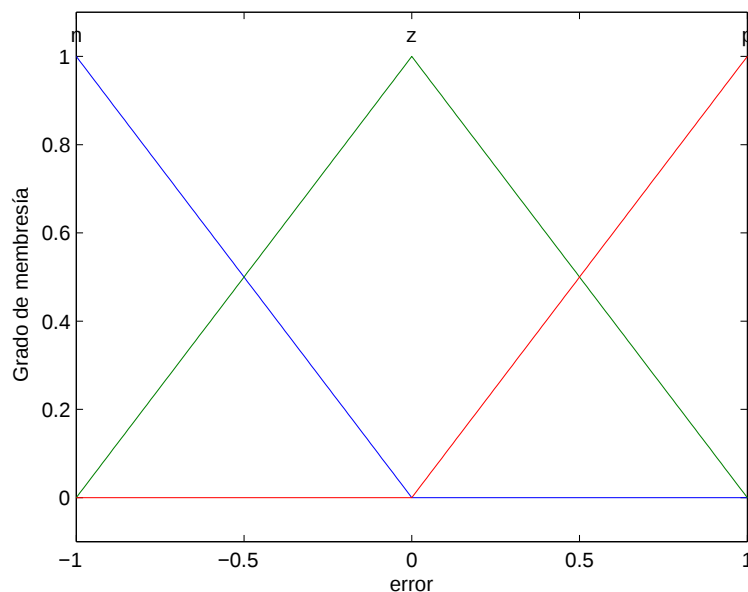


Figura 8. Granulación de la variable de entrada **error** para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.

tres funciones de membresía para cada una de las dos variables de entrada y la variable de salida, estas funciones de membresía son *negativo* (n), *cero* (z) y *positivo* (p) y se muestran en las Figuras 8, 9 y 10 para cada una de las variables.

Estas variables de entrada y salida se combinan en reglas difusas de la forma de (2), para este caso, se seleccionan las siete reglas mostradas en la Tabla II. Para el proceso de inferencia, se usa la inferencia difusa de tipo Mamdani [Mamdani y Assilian (1975)-Mamdani (1976)], con mínimo como operador de disyunción, máximo como operador de conjunción, mínimo como operador de implicación, máximo como operador de agregación y promedio de máximos como método de defusificación.

Con la combinación de las reglas, variables, funciones de membresía y parámetros del sistema difuso, se obtiene la superficie de control mostrada en la Figura 11.

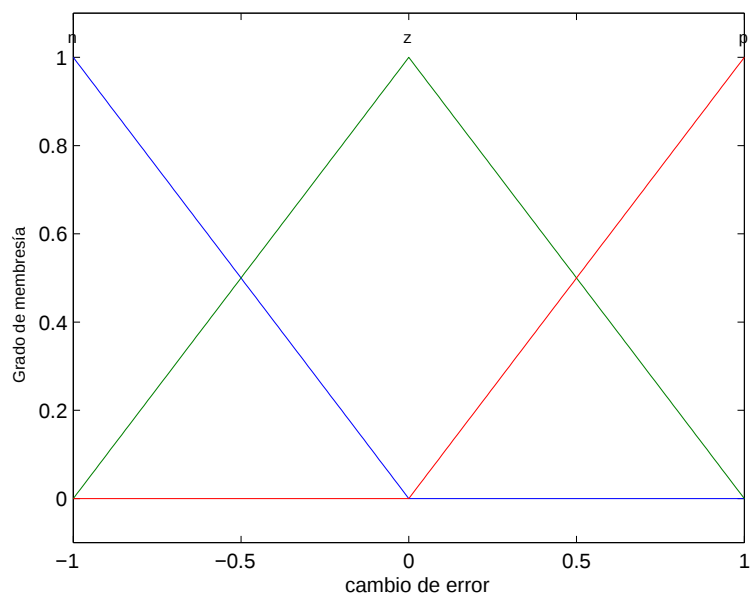


Figura 9. Granulación de la variable de entrada **cambio de error** para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.

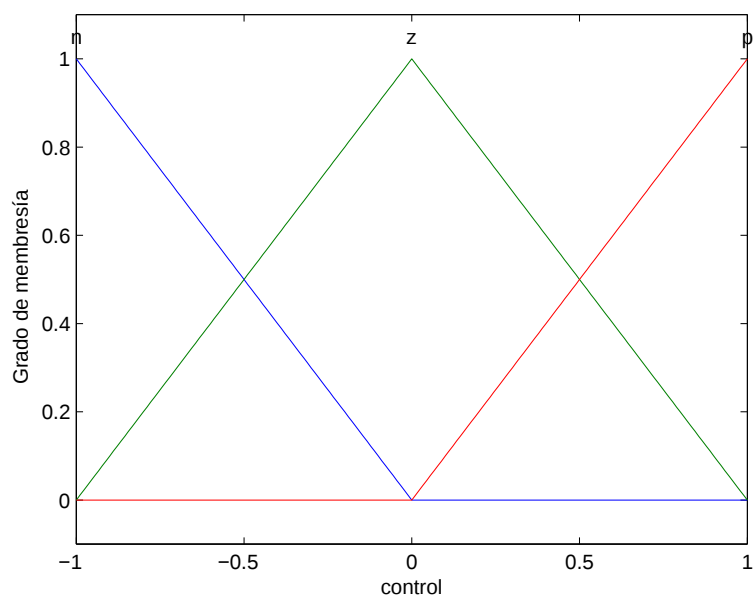


Figura 10. Granulación de la variable de entrada **control** para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.

Tabla II. Reglas difusas para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.

No.	<i>error</i>	<i>cambio de error</i>	<i>control</i>
1	n	n	p
2	n	p	z
3	n	z	p
4	p	p	n
5	p	n	z
6	p	z	n
7	z	z	z

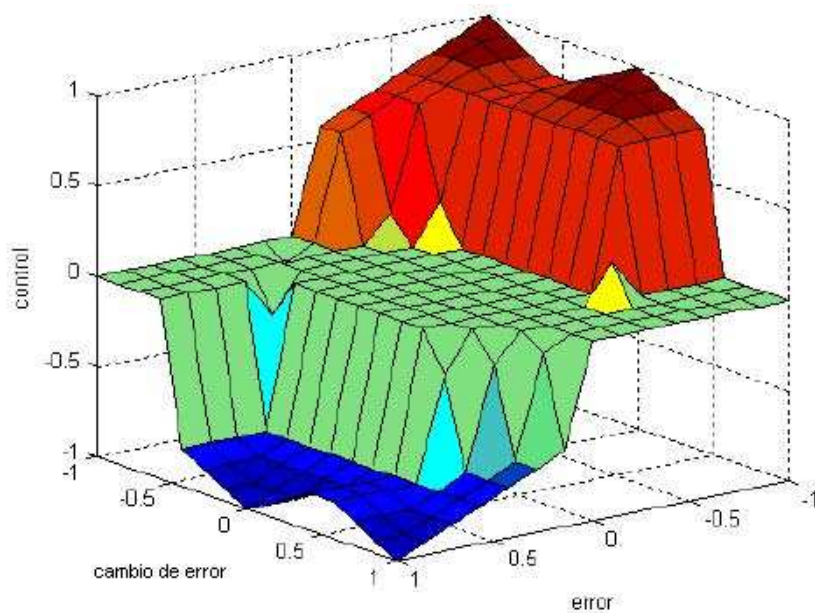


Figura 11. Superficie de control obtenida para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.

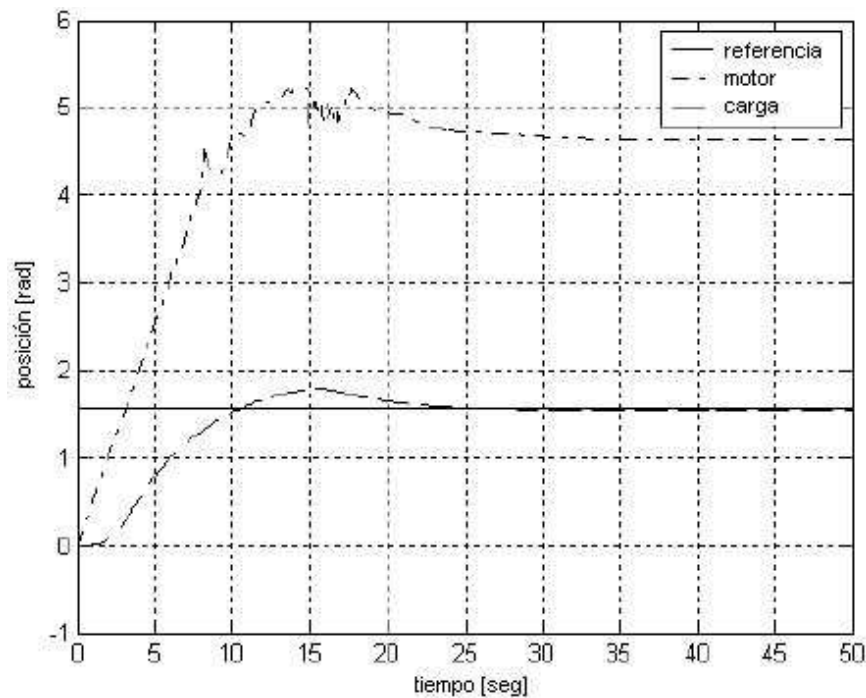


Figura 12. Resultados obtenidos para el diseño de controladores empíricos difusos tipo-1.

Resultados del diseño de controladores empíricos difusos tipo-1

Los experimentos se ejecutan para el sistema en lazo cerrado, y se considera la posición angular del motor como la única información disponible para retroalimentación. El objetivo es que la carga se mueva de su posición inicial estática $q_0(0) = 0[\text{rad}]$ a la posición deseada $q_d = \pi/2[\text{rad}]$. Para ilustrar el tamaño del dominio de atracción, la posición inicial de la carga se selecciona razonablemente alejado de la posición deseada.

Las trayectorias resultantes se muestran en la Figura 12, la cual demuestra que el regulador estabiliza el movimiento de la carga alrededor de la posición deseada y atenúa las perturbaciones externas.

IV.2 Diseño con algoritmos genéticos

Los resultados descritos en este apartado son retomados de Cazarez-Castro *et al.* (2008a), Cazarez-Castro *et al.* (2008d), Cazarez-Castro *et al.* (2008b) y Cazarez-Castro *et al.* (2009a).

IV.2.1 Metodología para construir algoritmos genéticos para evolucionar controladores difusos

Para evolucionar los parámetros de las funciones de membresía difusas de controladores difusos para lograr el objetivo de control, se propone la siguiente metodología:

1. Diseñar la estructura del distema difuso: seleccionando las variables de entrada y salida, su granulación y el tipo de funciones de membresía a ser usadas, además de las reglas difusas para el sistema de inferencia.
2. Identificar los parámetros necesarios para representar las funciones de membresía seleccionadas.
3. Construir un cromosoma ordenando los parámetros de las funciones de membresía de cada variable.
4. Diseñar la función objetivo.
5. Seleccionar el tipo de operaciones genéticas y sus parámetros.
6. Implementar las restricciones necesarias para construir individuos válidos.
7. Ejecutar el algoritmo genético para evolucionar los controladores difusos.

Tabla III. Reglas IF-THEN difusas para el diseño genético de controladores difusos tipo-1.

No.	error	change of error	control
1	n	n	p
2	n	z	p
3	n	p	z
4	z	n	z
5	z	z	z
6	z	p	z
7	p	n	z
8	p	z	n
9	p	p	n

IV.2.2 Algoritmos genéticos para evolucionar controladores difusos tipo-1

Diseño de la estructura del controlador difuso tipo-1

Para resolver el problema de regulación difusa de salida, se implementa un sistema difuso de dos-entradas y una-salida.

La elección de cada $\mu_{B^i}(z)$ dependerá del conocimiento heurístico de los expertos sobre la planta que se desea controlar. En este caso se seleccionan funciones de membresía triangulares tipo-1 para cada una de las variables de entrada (***error*** y ***change of error***) y salida (***control***), cada una de estas variables se granulan en tres funciones de membresía triangulares tipo-1 *negative* (**n**), *zero* (**z**) y *positive* (**p**).

Estas variables de entrada y salida se combinan con reglas difusas en la forma de (2), se seleccionaron nueve reglas difusas, las cuales se muestran en la Tabla III.

Para el proceso de inferencia se selecciona el tipo Mamdani [Mamdani y Assilian (1975)-Mamdani (1976)], con mínimo como operador de disyunción, máximo como operador de conjunción, mínimo como operador de implicación, máximo como operador de agregación y COA (3) como método de defusificación.

Identificar los parámetros necesarios para representar las funciones de membresía tipo-1 seleccionadas

Las funciones de membresía difusa triangulares tipo-1 están definidas como

$$\mu(z) = \begin{cases} 0, & z \leq a \\ \frac{z-a}{b-a}, & a \leq z \leq b \\ \frac{c-z}{c-b}, & b \leq z \leq c \\ 0, & c \leq z, \end{cases} \quad (30)$$

donde z es el valor numérico a ser fusificado, y se puede observar que una función de membresía difusa tipo-1 requiere de un dominio de definición z y tres parámetros a , b y c para ser definida, donde a , b y c son constantes tal que $a \leq b \leq c$ [Castillo y Melin (2005)].

Construir un cromosoma ordenando los parámetros de las funciones de membresía tipo-1 de cada variable

En este caso se usa un algoritmo genético para optimizar los parámetros de las funciones de membresía tipo-1 de un sistema difuso, considerando figuras triangulares para cada función de membresía tipo-1, se codifica cada individuo (solución -sistema difuso-) en un cromosoma de 27 genes reales, donde son representadas cada una de las tres variables, con cada una de sus tres funciones de membresía; en este cromosoma se están

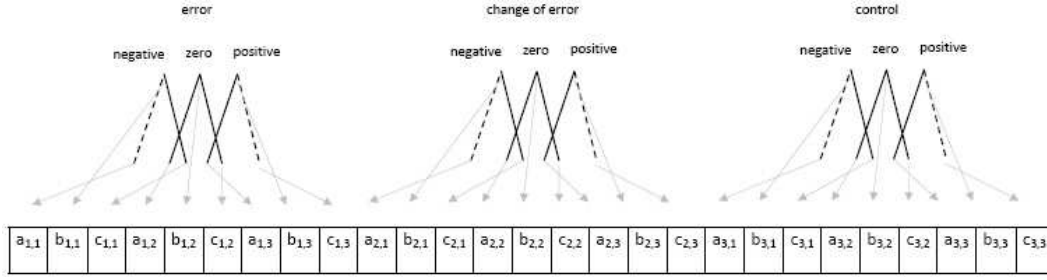


Figura 13. Genotipo para los controladores difusos tipo-1.

representando los tres parámetros necesarios para representar la función de membresía *negative*, tres parámetros para *zero* y los tres parámetros necesarios para representar la función de membresía *positive*. Esto es lo que se llama genotipo [Goldberg (1989)] de una población.

El cromosoma del genotipo que se propone se muestra en la Figura 13.

Diseño de la función objetivo

En el proceso de optimización se desea minimizar la función objetivo

$$\text{fitness}_i = \min \left(\frac{\sum |x_1|}{n} \right). \quad (31)$$

Seleccionar el tipo de operadores genéticos y sus parámetros

El conjunto de operadores genéticos seleccionados y sus parámetros se muestran en la Tabla IV.

Implementar las restricciones necesarias para construir individuos válidos

En este caso particular, se implementan las siguientes restricciones:

Tabla IV. Parámetros del algoritmo genético.

Parámetro	Valor
Representación	real
Tamaño de población	10
Generaciones	40
Método de selección	ruleta
Método de cruce	Scattered
Taza de cruce	0.8
Método de mutación	Gaussian
Taza de mutación	0.1
Elitismo	2

1. El parámetro central de la función de membresía triangular tipo-1 *negative* debe ser menor que el parámetro central de la función de membresía triangular tipo-1 *zero*.
2. El parámetro central de la función de membresía triangular tipo-1 *positive* debe ser mayor que el parámetro central de la función de membresía triangular tipo-1 *zero*.
3. En cada función de membresía triangular, los parámetros a , b y c deben satisfacer la restricción impuesta a (30).

Ejecutar el algoritmo genético para evolucionar los sistemas difusos tipo-1

Se ejecutan simulaciones para los controladores difusos tipo-1 usando la posición del motor como retroalimentación, estos individuos se prueban en simulaciones numéricas

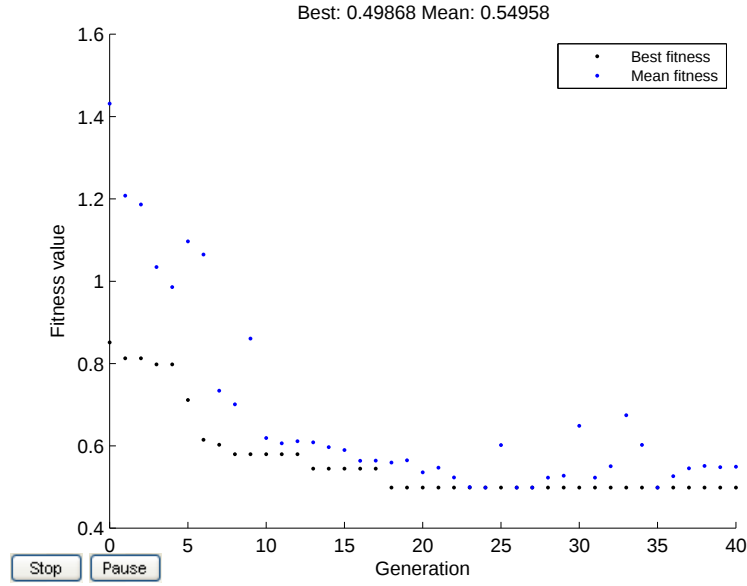


Figura 14. Evolución del algoritmo genético para optimizar sistemas difusos tipo-1.

usando Matlab® y Simulink®.

El algoritmo genético se implementa usando la Matlab Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox®. En las simulaciones, la carga debe moverse de su posición inicial estática $q_0(0) = 0[\text{rad}]$ a la posición deseada $q_d = \pi/2[\text{rad}]$. Para ilustrar el tamaño del dominio de atracción, la posición inicial de la carga se selecciona razonablemente lejos de la posición deseada.

El algoritmo genético se ejecuta en una PC Computer con procesador Intel Pentium de 2.4 GHz y 512 Mb de RAM. La ejecución concluye satisfactoriamente en cerca de 200 horas, la evolución del algoritmos genético se muestra en la Figura 14, y la solución se concentra en la Tabla V, donde la mejor solución (mínimo valor de aptitud) es el mismo para los individuos 1, 2, 4, 6, 7, 8 y 9, el cromosoma de estos individuos se muestra en la Tabla VI. En la Figura 15 se muestra el fenotipo [Castillo y Melin (2005)] del sistema difuso tipo-1 con sus nueve funciones de membresía tipo-1.

Tabla V. Resultados obtenidos por el algoritmo genético en el diseño de sistemas difusos tipo-1.

Individuo	Aptitud [rad]
1	0.4987
2	0.4987
3	0.7048
4	0.4987
5	0.6399
6	0.4987
7	0.4987
8	0.4987
9	0.4987
10	0.6604

Tabla VI. Datos de los *mejores* controladores difusos tipo-1 diseñados por el algoritmo genético.

Variable	Función de membresía	a	b	c
error	negative	-1.5000	-1.0000	-0.5377
	zero	-0.1173	-0.1173	2.3416
	positive	-0.5380	1.0000	1.5000
change of error	negative	-1.5000	-1.0000	0.0258
	zero	-0.4957	0.6905	0.6905
	positive	-0.5658	1.0000	1.5000
control	negative	-1.5000	-1.0000	-0.6166
	zero	-0.6619	0.7550	0.7550
	positive	0.0800	1.0000	1.5000

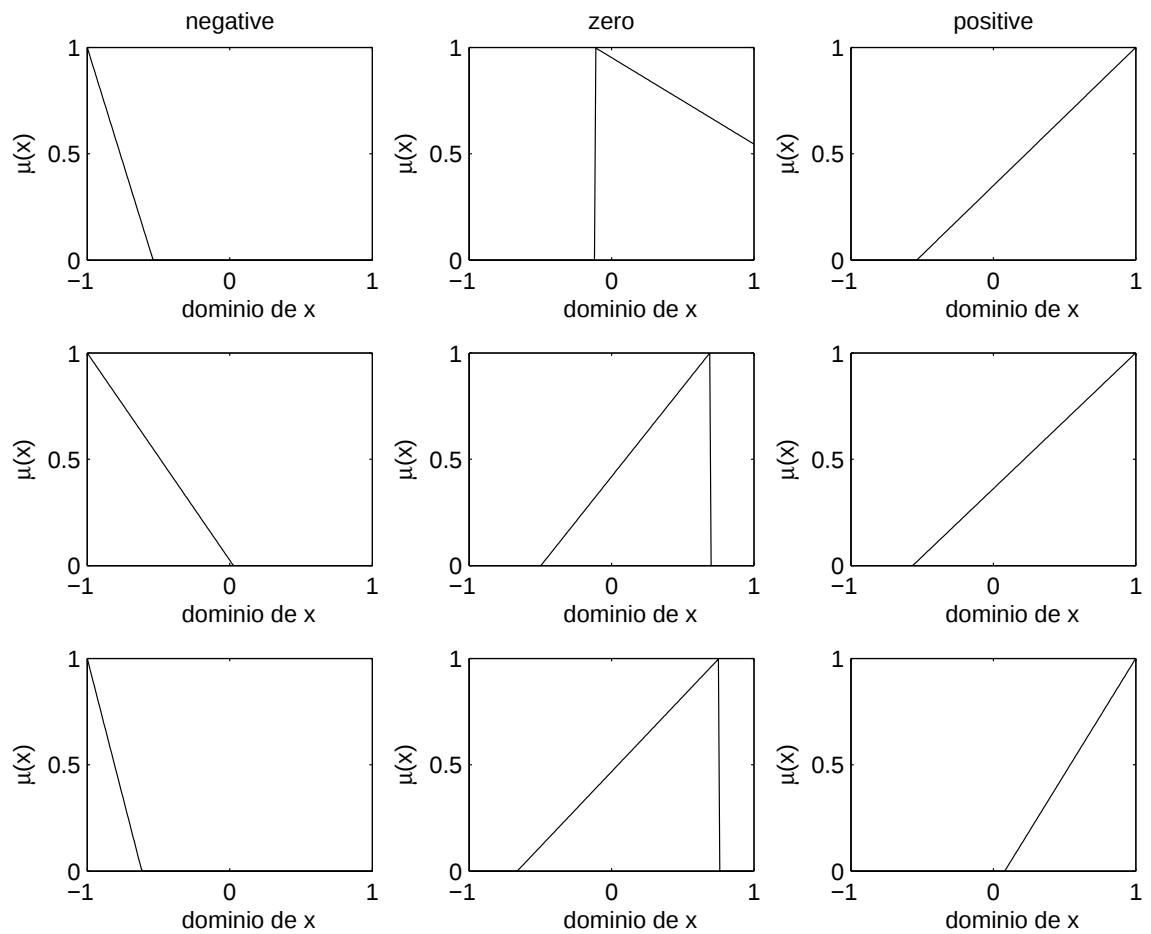


Figura 15. Fenotipo de los *mejores* controladores difusos tipo-1 diseñados por el algoritmo genético. Renglones de arriba abajo: *error*, *change of error* y *control*

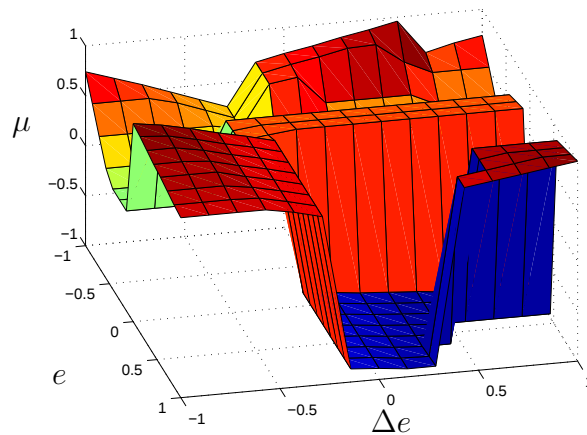


Figura 16. Superficie de control del controlador difuso tipo-1 diseñado por el algoritmo genético.

Resultados obtenidos por el controlador difuso tipo-1 diseñado por el algoritmo genético

Ejecutando simulaciones del sistema en lazo cerrado (17)-(21) con el sistema difuso tipo-1 diseñado por el algoritmo genético, se obtienen los siguientes resultados: la superficie de control de la Figura 16 y la salida de la Figura 17. Se puede observar que las trayectorias de la carga alcanzan la posición deseada tal cual fue predicho.

IV.2.3 Algoritmos genéticos para evolucionar controladores difusos tipo-2

Como muchas de las especificaciones de esta sección son las mismas que las de la Sección IV.2.2, en esta sección solo se especifican los cambios hechos para extender la explicación al caso de sistemas difusos tipo-2.

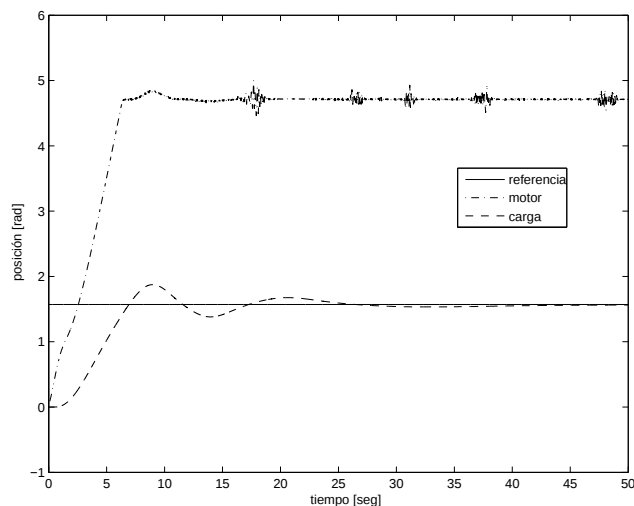


Figura 17. Resultados del controlador difuso tipo-1 diseñado por el algoritmo genético.

Diseño de la estructura del controlador difuso tipo-2

Se seleccionan funciones de membresía triangulares difusas tipo-2 por intervalos para cada variable. Las variables de entrada y salida se combinan en reglas difusas de la forma (9).

Para el proceso de inferencia, se usa el tipo Mamdani [Mamdani y Assilian (1975)-Mamdani (1976)] para tipo-2 propuesto por Mendel (2001), y CRT (10) como método de defusificación.

Identificar los parámetros necesarios para representar las funciones de membresía tipo-2 seleccionadas

En esta tesis se usan la Type-2 Fuzzy Logic Toolbox reportada por Castro *et al.* (2007a)-Castro *et al.* (2007b), por lo que se requieren seis parámetros para parametrizar cada función de membresía triangular tipo-2 por intervalos, esto es, cada función de membresía triangular tipo-2 por intervalos es parametrizada por dos funciones de membresía triangulares tipo-1, así, las restricciones de la Sección IV.2.2 ahora aplican para cada

par de parámetros a , b y c .

Construir un cromosoma ordenando los parámetros de las funciones de membresía tipo-2 de cada variable

En esta tesis se usa un algoritmo genético para optimizar los parámetros de las funciones de membresía tipo-2 de los controladores difusos, considerando funciones de membresía triangulares tipo-2 por intervalos, se codifica cada individuo (solución) en un cromosoma de 54 genes reales, en el cual se representan cada una de las seis variables, con cada una de sus tres funciones de membresía triangulares tipo-2 por intervalos; en este cromosoma se representan los seis parámetros necesarios para representar las funciones de membresía triangulares tipo-2 por intervalos *negative*, seis parámetros para *zero* y los seis parámetros necesarios para representar a *positive*. El cromosoma del fenotipo que se usa se muestra en la Figura 18.

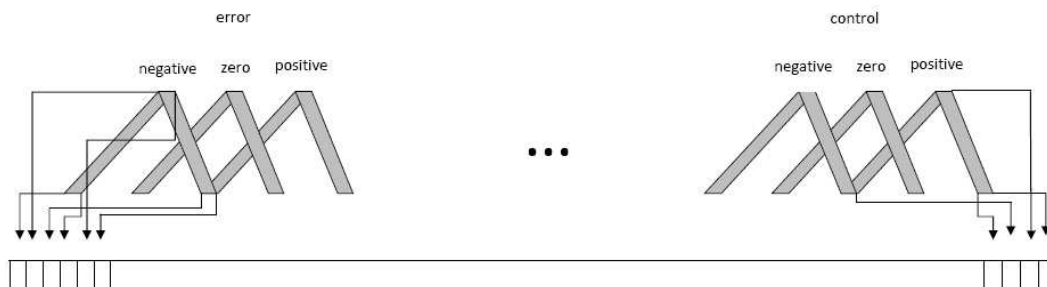


Figura 18. Genotipo para controladores difusos tipo-2.

Diseño de la función objetivo

En este proceso de optimización se quiere minimizar la misma función objetivo (31) de la Sección IV.2.2.

Seleccionar el tipo de operaciones genéticas y sus parámetros

El conjunto de parámetros del algoritmo genético es el mismo mostrado en la Tabla IV.

Implementar las restricciones necesarias para construir individuos válidos

En este caso particular, se implementan las siguientes restricciones:

1. Los parámetros centrales de la función de membresía triangular tipo-2 por intervalos *negative* deben ser menores que los parámetros centrales de la de *zero*.
2. Los parámetro centrales de la función de membresía triangular tipo-2 por intervalos *positive* deben ser mayores que los parámetros centrales de la de *zero*.
3. En cada función de membresía triangular tipo-2 por intervalos los tres pares de parámetros a , b and c deben satisfacer la restricción impuesta por Castro *et al.* (2007a)-Castro *et al.* (2007b).

Ejecutar el algoritmo genético para evolucionar los sistemas difusos tipo-2

De nuevo, se ejecutan simulaciones usando la posición del motor como retroalimentación, estas simulaciones son hechas usando Matlab®y Simulink®. Todos los parámetros de simulación son los mismos de la Sección IV.2.2.

El algoritmo genético se ejecuta en una PC Computer con procesador Intel Pentium de 2.4 GHz y 512 Mb de RAM. La ejecución concluye de manera satisfactoria en cerca de 350 horas, la evolución del algoritmo genético se muestra en la Figura 19, y la solución se concentra en la Tabla VII, donde la mejor solución (mínimo valor de aptitud) es el mismo para los individuos número 5, 6, 7, 8 y 9, el cromosoma de estos individuos es el de la Tabla VIII. En la Figura 20 se muestra el fenotipo [Castillo y Melin (2005)] del

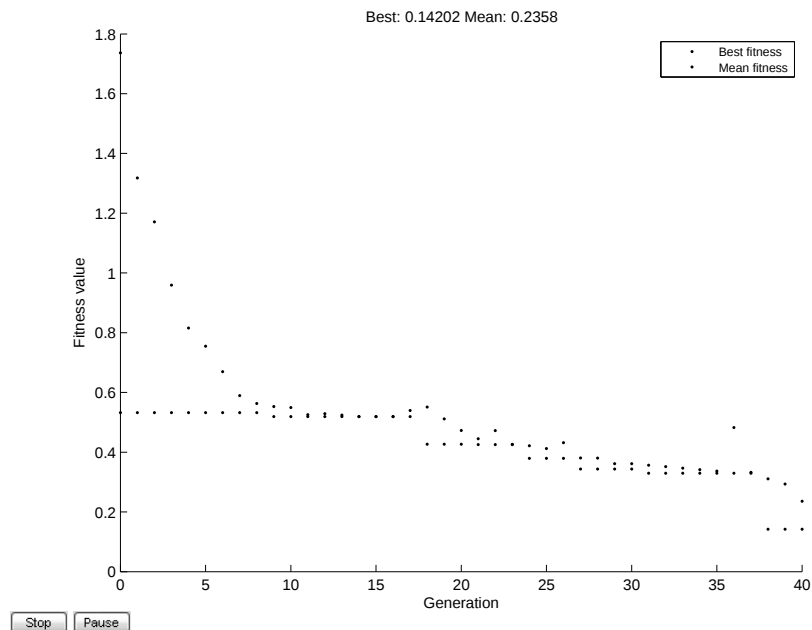


Figura 19. Evolución del algoritmo genético para optimizar sistemas difusos tipo-2.

sistema de inferencia difusa tipo-2 con sus nueve funciones de membresía triangulares tipo-2 por intervalos optimizadas.

Resultados obtenidos por el controlador difuso tipo-2 diseñado por el algoritmo genético

Ejecutando simulaciones del sistema en lazo cerrado (17)-(21) con el sistema difuso tipo-2 diseñado por el algoritmo genético, se obtienen los siguientes resultados: la superficie de control de la Figura 21 y la salida de la Figura 22. Se puede observar que las trayectorias de la carga alcanzan la posición deseada tal cual fue predicho.

IV.2.4 Comparación

El método implementado en esta sección para diseñar controladores difusos tipo-1 y tipo-2 se comporta de manera satisfactoria, cada uno con características particulares.

Tabla VII. Resultados obtenidos por el algoritmo genético en el diseño de sistemas difusos tipo-2.

Individuo	Aptitud [rad]
1	0.3296
2	0.3296
3	0.3296
4	0.3296
5	0.1420
6	0.1420
7	0.1420
8	0.1420
9	0.1420
10	0.3296

Tabla VIII. Datos de los *mejores* individuos encontrados por el algoritmo genético.

Variable	μ	a1	b1	c1	a2	b2	c2
error	negative	-1.0000	0.2176	0.2176	0.3012	0.4293	0.4293
	zero	-0.1982	-0.1982	-0.1912	-0.4260	0.8378	0.8378
	positive	0.2669	0.2669	1.0000	-0.5479	-0.5479	1.0000
change of error	negative	-1.0000	0.3504	0.6897	0.0926	0.9659	0.9659
	zero	-0.6963	-0.6963	-0.1490	-0.4170	0.0000	0.4005
	positive	0.2611	0.4405	1.0000	-0.9561	-0.9561	1.0000
control	negative	-1.0000	0.4586	0.4586	-0.6673	0.7247	0.7247
	zero	-0.4571	-0.4571	0.7067	0.0446	0.0446	0.0446
	positive	0.6220	0.9432	1.0000	-0.0605	-0.0605	1.0000

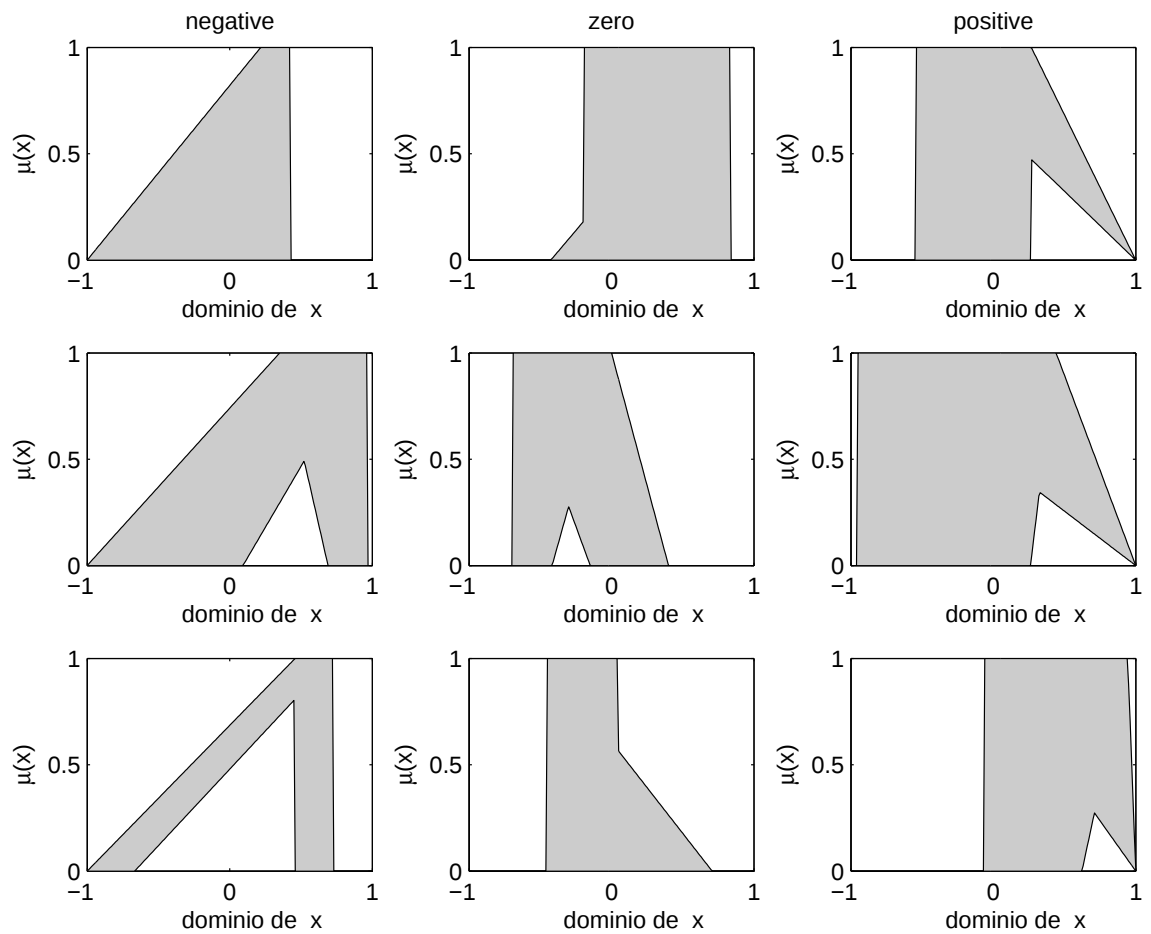


Figura 20. Fenotipo de los *mejores* controladores difusos tipo-2 diseñados por el algoritmo genético. Renglones de arriba a abajo: *error*, *change of error* y *control*

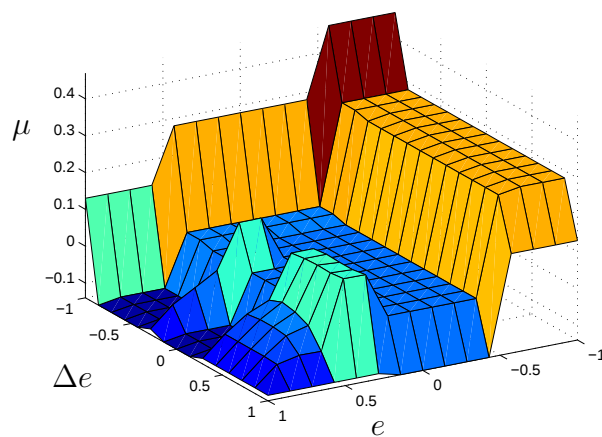


Figura 21. Superficie de control del controlador difuso tipo-2 diseñado por el algoritmo genético.

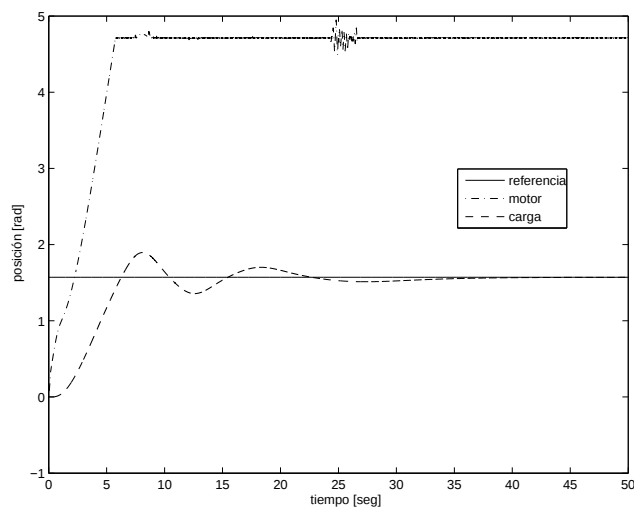


Figura 22. Resultados del controlador difuso tipo-2 diseñado por el algoritmo genético.

Tabla IX. Comparación entre los resultados obtenidos por los controladores difusos tipo-1 y tipo-2 diseñados con algoritmos genéticos.

Controlador	tiempo de		ISE	IAE	ITAE	ITSE
	sobrepico [rad]	asentamiento [sec]				
tipo-1	1.7059	14.5254	650.0983	2.4438×10^3	4.1093×10^3	4.4868×10^3
tipo-2	1.6514	9.4689	551.7236	1.0085×10^3	2.9564×10^3	2.7546×10^3

La Tabla IX resume los resultados obtenidos del promedio en treinta ejecuciones del GA, donde los índices de rendimiento calculados son la integral del cuadrado del error (Integral of Square Error -ISE-), la integral del valor absoluto del error (Integral of Absolute Error -IAE-), la integral del tiempo multiplicado por el cuadrado del error (Integral of Time multiply Square Error -ITSE-) y la integral del tiempo multiplicado por el valor absoluto del error (Integral of Time multiply Absolute Error -ITAE-), los cuales están definidos como:

$$ISE = \int_0^T x_1(t)^2 dt, \quad (32)$$

$$IAE = \int_0^T |x_1(t)| dt, \quad (33)$$

$$ITSE = \int_0^T t x_1(t)^2 dt, \quad (34)$$

y

$$ITAE = \int_0^T t |x_1(t)| dt, \quad (35)$$

respectivamente.

IV.2.5 Resultados añadiendo perturbaciones

Para evaluar la robustez de los controladores difusos tipo-1 y tipo-2 diseñados por los algoritmos genéticos, se implementan simulaciones añadiendo ruido en el sistema en lazo cerrado, esto es, se suma una señal de ruido en la salida de la ecuación (24), y la nueva salida del sistema se define como

$$y = x_3 + w, \quad (36)$$

donde

$$w = \sin(t). \quad (37)$$

La Figura 23 muestra una simulación del sistema en lazo cerrado con ruido, y usando el controlador difuso tipo-1 encontrado en la Sección IV.2.2, y la Figura 24 muestra una simulación del sistema en lazo cerrado usando el controlador difuso tipo-2 encontrado en la Sección IV.2.3. Puede observarse que las trayectorias de la carga alcanzan la posición deseada como se predice, pero el motor muestra un comportamiento perturbado debido al ruido (36)-(37) agregado al sistema en lazo cerrado. Es importante ver que las trayectorias de la carga alcanzan la trayectoria deseada porque los sistemas difusos están procesando las incertidumbres agregadas al sistema con el ruido, la Tabla X permite concluir que el sistema difuso tipo-2 tiene mejores resultados que el tipo-1 porque en todos los parámetros de diseño medidos, el sistema difuso tipo-2 tiene mejor comportamiento que el tipo-1, estos resultados son obtenidos del promedio en treinta ejecuciones del GA.

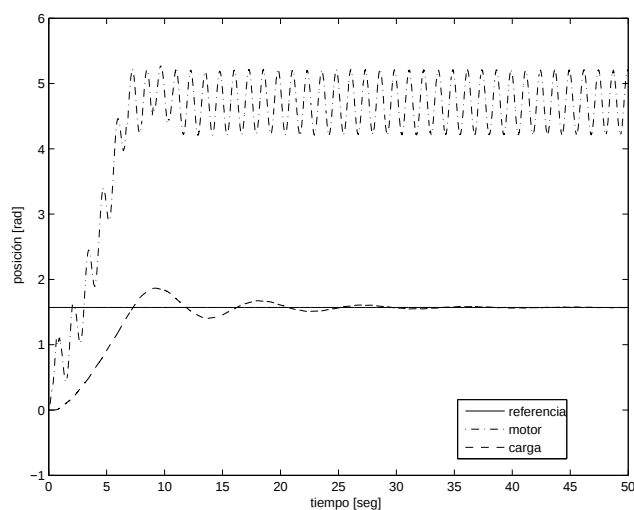


Figura 23. Resultados del controlador difuso tipo-1 diseñado por el algoritmo genético, añadiendo ruido en el lazo de retroalimentación.

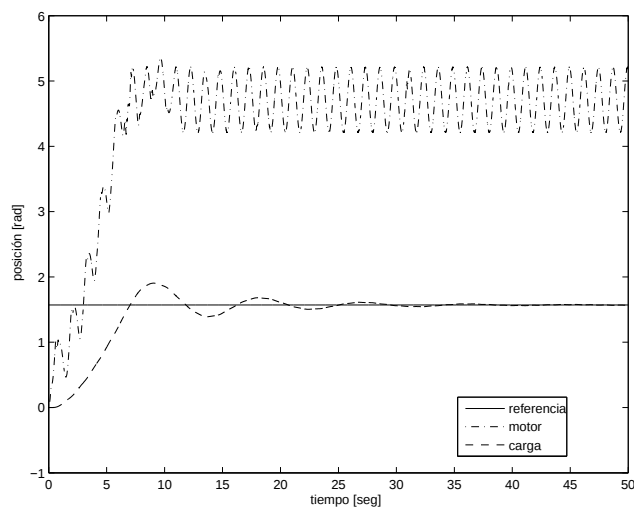


Figura 24. Resultados del controlador difuso tipo-2 diseñado por el algoritmo genético, añadiendo ruido en el lazo de retroalimentación.

Tabla X. Comparación entre los resultados de los sistemas difusos tipo-1 y tipo-2 encontrados por el algoritmo genético aplicando ruido.

Controlador	tiempo de		ISE	IAE	ITAE	ITSE
	sobrepico [rad]	asentamiento [sec]				
tipo-1	1.9452	13.6684	633.1284	3.0568×10^3	3.9586×10^4	3.9258×10^3
tipo-2	1.7758	10.0016	593.8564	1.4258×10^3	3.1258×10^4	2.7367×10^3

IV.3 Diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov

Los resultados descritos en este apartado son retomados de Cazarez-Castro *et al.* (2009c) y Cazarez-Castro *et al.* (2009d).

IV.3.1 Diseño de controladores difusos tipo-1, usando la síntesis difusa de Lyapunov

El diseño de controladores difusos tipo-1, usando la síntesis difusa de Lyapunov

Para aplicar la síntesis difusa de Lyapunov, asumimos lo siguiente:

1. El sistema (17)-(21) tiene realmente dos grados de libertad, los cuales son x_1 y x_2 , respectivamente. Por lo tanto por (22), $\dot{x}_1 = x_2$.
2. Los estados x_1 y x_2 son las únicas variables medibles.
3. Las ecuaciones (17)-(21) no son necesariamente conocidas.

4. La aceleración angular $\dot{x}_2$ es proporcional a τ_m , esto es, cuando τ_m incrementa (decrementa) $\dot{x}_2$ incrementa (decrementa).
5. Las condiciones iniciales $x(0) = (x_1(0), x_2(0))^T$ pertenecen al conjunto $\aleph = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon\}$ donde x^* es el punto de equilibrio.

El *objetivo de control* es diseñar una base de reglas como el controlador difuso $\tau_m = \tau_m(x_1, x_2)$ para estabilizar el sistema (17)-(21).

El Teorema 15 (ver apéndice A) establece condiciones que ayudan en el diseño del controlador difuso y asegura estabilidad asintótica. La prueba puede ser encontrada en Khalil (2002).

El diseño del controlador difuso procede como sigue. Se introduce la función candidata de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2), \quad (38)$$

la cual es una función positiva definida y radialmente desacotada. La derivada temporal de $V(x_1, x_2)$ resulta en:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2\dot{x}_2, \quad (39)$$

Para garantizar la estabilidad en el punto de equilibrio $(x_1^*, x_2^*)^T = (0, 0)^T$ se desea tener:

$$x_1x_2 + x_2\dot{x}_2 \leq 0. \quad (40)$$

Ahora se pueden derivar condiciones suficientes tal que la desigualdad (40) persista: Si x_1 y x_2 tienen signos opuestos, entonces $x_1x_2 < 0$ y (40) persistirá si $\dot{x}_2 = 0$; si x_1

y x_2 son ambas positivas, entonces (40) persistirá si $\dot{x}_2 < -x_1$; si x_1 y x_2 son ambas negativas, entonces (40) persistirá si $\dot{x}_2 > -x_1$.

Se pueden trasladar estas condiciones a las siguientes reglas difusas:

- If x_1 is *positive* and x_2 is *positive* then $\dot{x}_2$ must be *negative big*.
- If x_1 is *negative* and x_2 is *negative* then $\dot{x}_2$ must be *positive big*.
- If x_1 is *positive* and x_2 is *negative* then $\dot{x}_2$ must be *zero*.
- If x_1 is *negative* and x_2 is *positive* then $\dot{x}_2$ must be *zero*.

Sin embargo, usando el conocimiento de que $\dot{x}_2$ es proporcional a u , se puede reemplazar cada $\dot{x}_2$ con u para obtener la siguiente base de reglas difusas para el controlador:

- If x_1 is *positive* and x_2 is *positive* then u must be *negative big*.
- If x_1 is *negative* and x_2 is *negative* then u must be *positive big*.
- If x_1 is *positive* and x_2 is *negative* then u must be *zero*.
- If x_1 is *negative* and x_2 is *positive* then u must be *zero*.

Esta base de reglas difusas puede ser representada como en la Tabla XI.

Es interesante notar que la partición difusa para x_1 , x_2 , y u se derivan elegantemente de la expresión (39). Como $\dot{V} = x_2(x_1 + \dot{x}_2)$, y como se requiere que $\dot{V}$ sea negativa, es natural examinar los signos de x_1 y x_2 ; así, la partición difusa obvia es *positivo -positive-*, *negativo -negative-*. La partición para $\dot{x}_2$, llamada *negativo grande -negative big-*, *cero -zero-* y *positivo grande -positive big-* se obtiene de manera similar cuando introducimos los valores lingüísticos *positive*, *negative* para x_1 y x_2 en (39). Para asegurar que $\dot{x}_2 < -x_1$ ($\dot{x}_2 > -x_1$) se satisfaga incluso si no conocemos la magnitud

Tabla XI. Representación matricial de las reglas IF-THEN difusas obtenidas de la síntesis difusa de Lyapunov.

No.	error	change of error	control
1	positive	positive	negative big
2	negative	negative	positive big
3	positive	negative	zero
4	negative	positive	zero

exacta de x_1 , solo si esta es *positive(negative)*, se debe configurar $\dot{x}_2$ para que sea *negative big(positive big)*. Obviamente, es también posible iniciar con una partición dada, predefinida, para las variables y después incertar cada valor en la expresión para $\dot{V}$ para encontrar las reglas. Aunque, sin importar lo que venga primero, se ve que la síntesis difusa de Lyapunov transforma la síntesis clásica de Lyapunov del mundo de las cantidades matemáticas exactas al mundo de *computing with words* (cómputo con palabras) propuesto por Zadeh (1996), y retomado posteriormente por Mendel (2007).

Para completar el diseño del controlador, debemos modelar los términos lingüísticos en las reglas difusas usando funciones de membresía difusa y determinar un método de inferencia. Siguiendo a Castillo *et al.* (2008), caracterizamos los términos lingüísticos *positive*, *negative*, *negative big*, *zero* and *positive big*. Las funciones de membresía tipo-1 se muestran en la Figura 25. Hasta este momento, se ha diseñado sistemáticamente el controlador difuso siguiendo el criterio de estabilidad de Lyapunov.

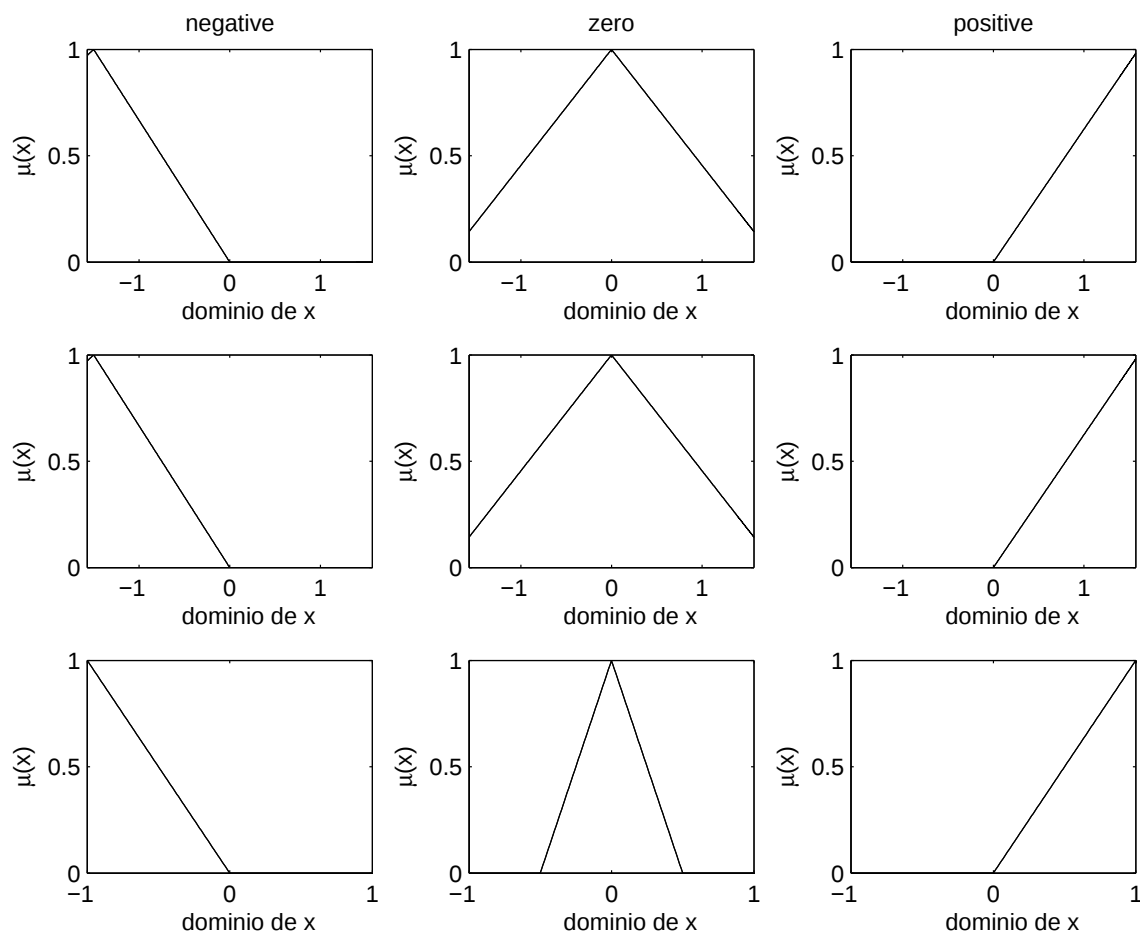


Figura 25. Conjunto de funciones de membresía tipo-1 obtenidas de la la síntesis difusa de Lyapunov. De arriba a abajo: x_1 , x_2 y u .

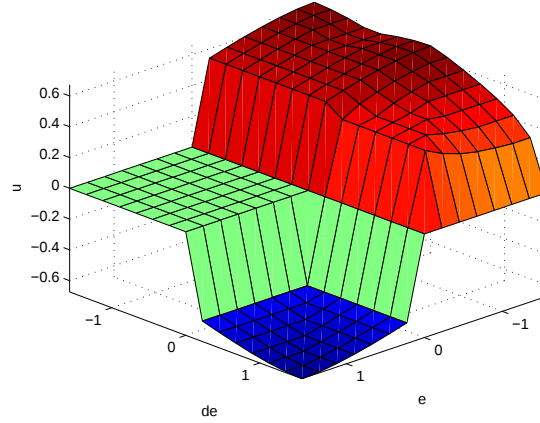


Figura 26. Superficie de control para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).

Resultados del diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov para controladores difusos tipo-1

Para ejecutar experimentos usamos el modelo dinámico (17)-(21) y la plataforma experimental mostrada en la Figura 5.

Al ejecutar experimentos del sistema en lazo cerrado (17)-(21) con el controlador difuso tipo-1 diseñado se tienen los siguientes resultados: la superficie de control de la Figura 26, y se obtiene la respuesta del sistema y trayectorias de x_1 de las Figuras 27 y 28 respectivamente, esto es, $q_0 \rightarrow q_d$ mientras $x_0 \rightarrow 0$. En la Figura 29 se muestran las trayectorias para (38) y (39), satisfaciendo el Teorema 15.

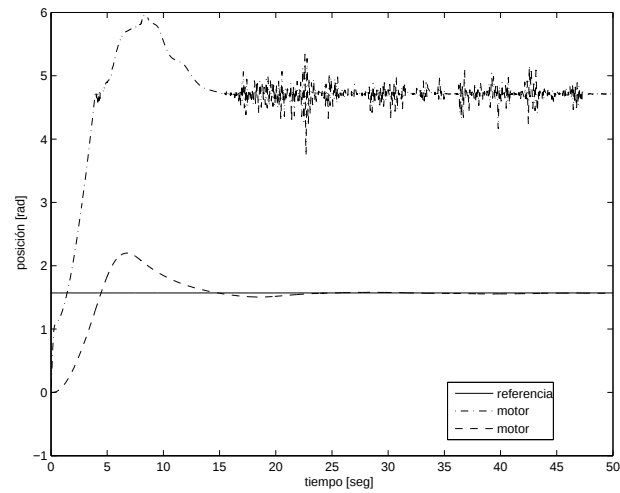


Figura 27. Respuesta del sistema (17)-(21) para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov.

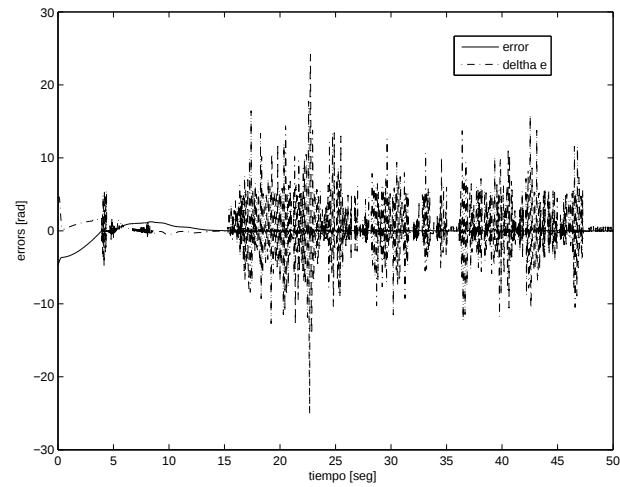


Figura 28. Trayectorias de x_1 para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).

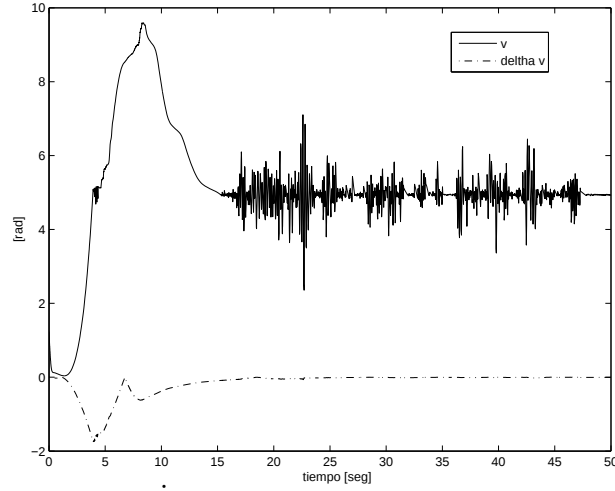


Figura 29. Trayectorias de V y $\dot{V}$ para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).

IV.3.2 Diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov para controladores difusos tipo-2

El diseño de controladores difusos tipo-2, usando la síntesis difusa de Lyapunov

Como para el caso de tipo-1, para aplicar la síntesis difusa de Lyapunov, asumimos lo siguiente:

1. El sistema (17)-(21) tiene realmente dos grados de libertad, los cuales son $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$, respectivamente. Por lo tanto por (22), $\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2$.
2. Los estados $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ son las únicas variables medibles.
3. Las ecuaciones (17)-(21) no son necesariamente conocidas.
4. La aceleración angular $\ddot{\tilde{x}}_2$ es proporcional a τ_m , esto es, cuando τ_m incrementa (decrementa) $\ddot{\tilde{x}}_2$ incrementa (decrementa).

5. Las condiciones iniciales $\tilde{x}(0) = (\tilde{x}_1(0), \tilde{x}_2(0))^T$ pertenecen al conjunto $\aleph = \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \|\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^*\| \leq \varepsilon\}$ donde $\tilde{\mathbf{x}}^*$ es el punto de equilibrio.

El *objetivo de control* es diseñar una base de reglas como el controlador difuso $\tau_m = \tau_m(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ para estabilizar el sistema (17)-(21).

El Teorema 15 (ver apéndice A) establece condiciones que ayudan en el diseño del controlador difuso y asegura estabilidad asintótica. La prueba puede ser encontrada en Khalil (2002).

El diseño del controlador difuso procede como sigue. Se introduce la función candidata de Lyapunov

$$V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{1}{2} (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2), \quad (41)$$

la cual es una función positiva definida y radialmente desacotada. La derivada temporal de $V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ resulta en:

$$\dot{V}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1 \dot{\tilde{x}}_1 + \tilde{x}_2 \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 \dot{\tilde{x}}_2, \quad (42)$$

Para garantizar la estabilidad en el punto de equilibrio $(\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*)^T = (0, 0)^T$ se desea tener:

$$\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 \dot{\tilde{x}}_2 \leq 0. \quad (43)$$

Ahora se pueden derivar condiciones suficientes tal que la desigualdad (43) persista: Si $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ tienen signos apostados, entonces $\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 < 0$ y (43) persistirá si $\dot{\tilde{x}}_2 = 0$; si $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ son ambas positivas, entonces (43) persistirá si $\dot{\tilde{x}}_2 < -\tilde{x}_1$; si $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ son ambas negativas, entonces (43) persistirá si $\dot{\tilde{x}}_2 > -\tilde{x}_1$.

Se pueden trasladar estas condiciones a las siguientes reglas difusas:

- If $\tilde{x}_1$ is *positive* and $\tilde{x}_2$ is *positive* then $\dot{\tilde{x}}_2$ must be *negative big*.
- If $\tilde{x}_1$ is *negative* and $\tilde{x}_2$ is *negative* then $\dot{\tilde{x}}_2$ must be *positive big*.
- If $\tilde{x}_1$ is *positive* and $\tilde{x}_2$ is *negative* then $\dot{\tilde{x}}_2$ must be *zero*.
- If $\tilde{x}_1$ is *negative* and $\tilde{x}_2$ is *positive* then $\dot{\tilde{x}}_2$ must be *zero*.

Sin embargo, usando el conocimiento de que $\dot{\tilde{x}}_2$ es proporcional a $\tilde{u}$, se puede reemplazar cada $\dot{\tilde{x}}_2$ con $\tilde{u}$ para obtener la siguiente base de reglas difusas para el controlador:

- If $\tilde{x}_1$ is *positive* and $\tilde{x}_2$ is *positive* then $\tilde{u}$ must be *negative big*.
- If $\tilde{x}_1$ is *negative* and $\tilde{x}_2$ is *negative* then $\tilde{u}$ must be *positive big*.
- If $\tilde{x}_1$ is *positive* and $\tilde{x}_2$ is *negative* then $\tilde{u}$ must be *zero*.
- If $\tilde{x}_1$ is *negative* and $\tilde{x}_2$ is *positive* then $\tilde{u}$ must be *zero*.

Esta base de reglas difusas puede ser representada también como en la Tabla XI, claro está, ahora las funciones de membresía difusa son de tipo-2.

Para completar el diseño del controlador, debemos modelar los términos lingüísticos en las reglas difusas usando funciones de membresía difusa y determinar un método de inferencia. Siguiendo a Castillo *et al.* (2008), caracterizamos los términos lingüísticos *positive*, *negative*, *negative big*, *zero* y *positive big*. Las funciones de membresía tipo-2 se muestran en la Figura 30. Hasta este momento, se ha diseñado sistemáticamente el controlador difuso siguiendo el criterio de estabilidad de Lyapunov. Nótese que no se están desplegando las funciones de membresía centrales para los antecedentes, esto se debe a que se detectó que dichas funciones de membresía no son consideradas por la síntesis difusa de Lyapunov.

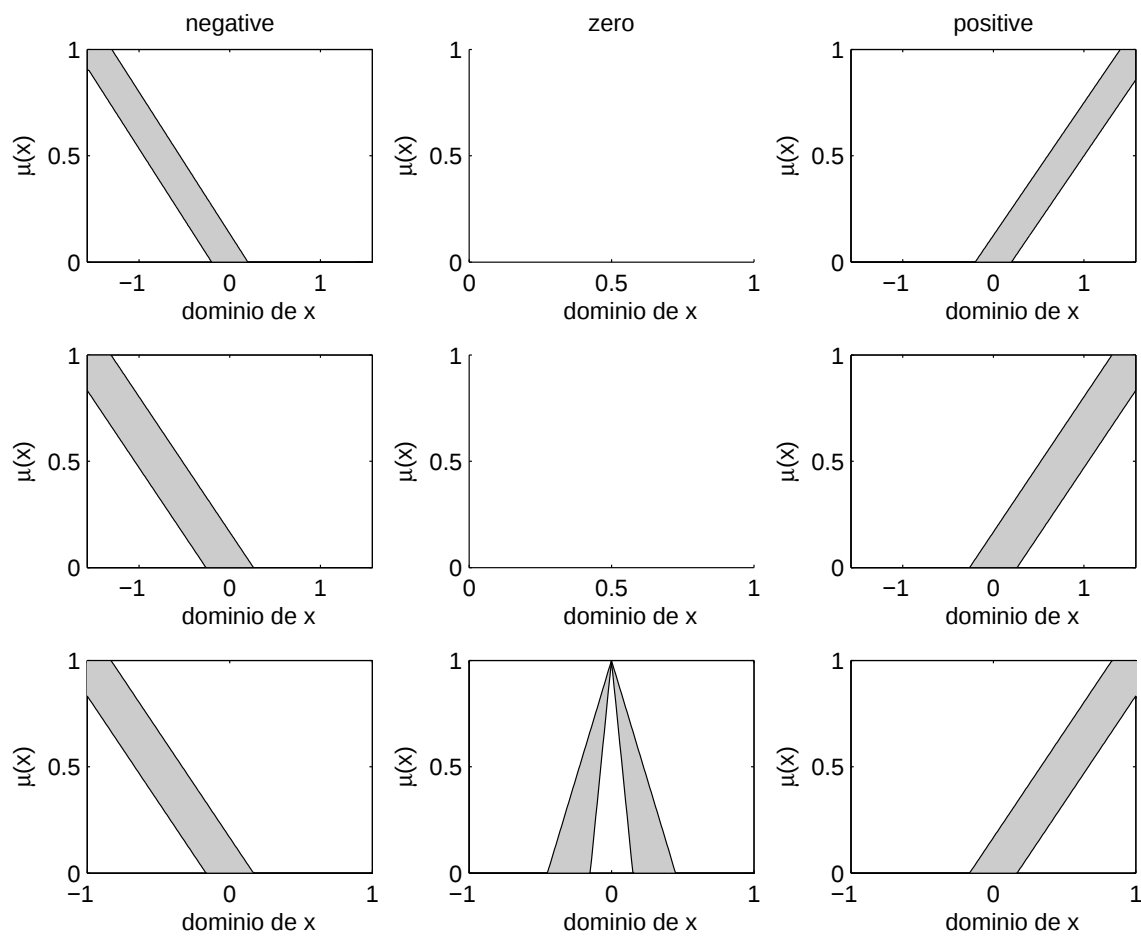


Figura 30. Conjunto de funciones de membresía tipo-2 obtenidas de la síntesis difusa de Lyapunov. De arriba a abajo: $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ y $\tilde{u}$.

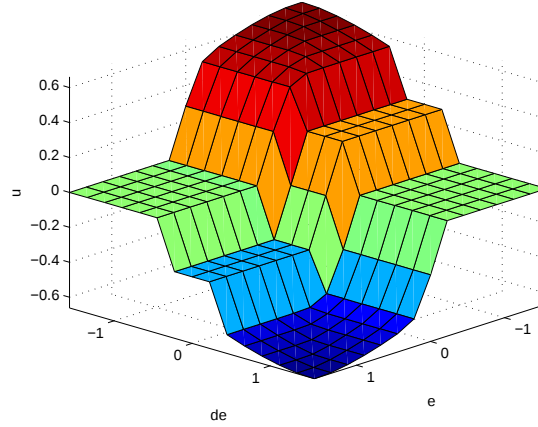


Figura 31. Superficie de control para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).

Resultados del diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov para controladores difusos tipo-2

Para ejecutar experimentos usamos el modelo dinámico (17)-(21) y la plataforma experimental mostrada en la Figura 5.

Al ejecutar experimentos del sistema en lazo cerrado con el controlador difuso tipo-2 diseñado, se tienen los siguientes resultados: la superficie de control de la Figura 31, y se obtiene la respuesta del sistema y trayectorias de $\tilde{x}_1$ de las Figuras 32 y 33 respectivamente, esto es, $q_0 \rightarrow q_d$ mientras $\tilde{x}_0 \rightarrow 0$. En la Figura 34 se muestran las trayectorias para (41) y (42), satisfaciendo el Teorema 15.

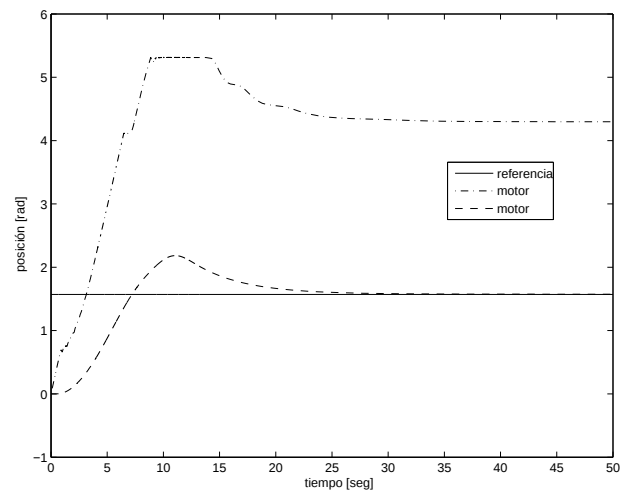


Figura 32. Respuesta del sistema (17)-(21) para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov.

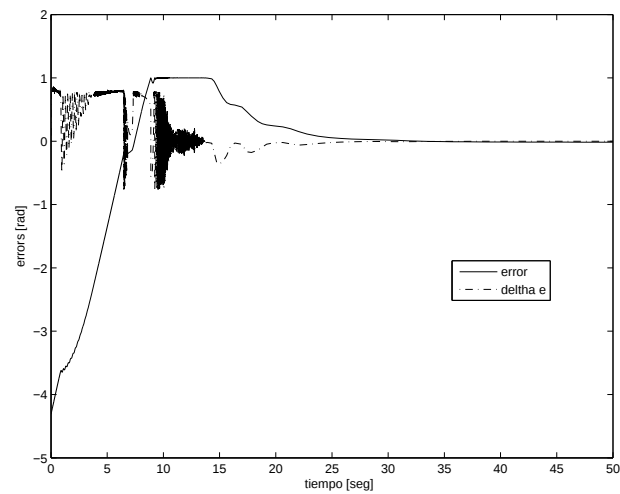


Figura 33. Trayectorias de x_1 para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).

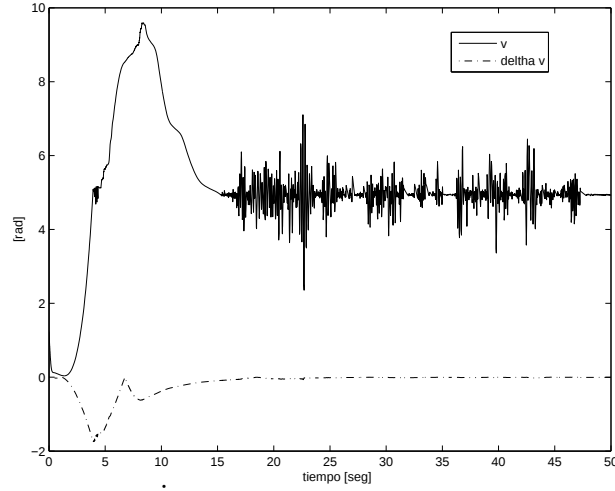


Figura 34. Trayectorias de V y $\dot{V}$ para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema (17)-(21).

IV.4 Diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov para un sistema observado

IV.4.1 Diseño del observador

La meta es diseñar un controlador difuso que use las mediciones de la posición angular del motor, únicamente. Para este propósito, se introduce el siguiente estimador de estados del motor

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \alpha_1(x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= J_0^{-1}[KNx_3 - KN^2\hat{x}_1 - f_0\hat{x}_2 + KN\eta(\Delta\hat{q})] + \alpha_2(x_1 - \hat{x}_1)\end{aligned}\tag{44}$$

donde α_1 y α_2 son constantes positivas, y

$$\Delta\hat{q} = \Delta\hat{x} = x_3 - N\hat{x}_1.\tag{45}$$

Claramente, la dinámica cero de los errores de estimación

$$e_1 = x_1 - \hat{x}_1, \quad e_2 = x_2 - \hat{x}_2\tag{46}$$

son descritos por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - \alpha_1 e_1 \\ \dot{e}_2 &= J_0^{-1} K N [-N e_1 - (K N)^{-1} f_0 e_2 + \eta(-N x_1) - \eta(-N \hat{x}_1)] - \alpha_2 e_1.\end{aligned}\quad (47)$$

Para verificar que los estados estimados $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ decaen asintóticamente a los estados (x_1, x_2) , considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(e_1, e_2) = \frac{1}{2} e_2^2 + \frac{1}{2} (K N^2 J_0^{-1} + \alpha_2) e_1^2. \quad (48)$$

La derivada temporal de V a lo largo de las soluciones de (47) produce

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -(K N^2 J_0^{-1} + \alpha_2) \alpha_1 e_1^2 - f_0 J_0^{-1} e_2^2 + e_2 J_0^{-1} K N [\eta(-N x_1) - \eta(-N \hat{x}_1)] \\ &\leq -(K N^2 J_0^{-1} + \alpha_2) \alpha_1 e_1^2 - f_0 J_0^{-1} e_2^2 + J_0^{-1} K N |e_2| \\ &\leq -(K N^2 J_0^{-1} + \alpha_2) \alpha_1 \|e\|_2^2 + J_0^{-1} K N |e|, \forall \|e\| \geq \mu\end{aligned}\quad (49)$$

donde α_1 y α_2 han sido seleccionados tal que la desigualdad $(K N^2 J_0^{-1} + \alpha_2) \alpha_1 > f_0 J_0^{-1}$ se satisfaga, y

$$\mu = \frac{J_0^{-1} K N}{(K N^2 J_0^{-1} + \alpha_2) \alpha_1}.$$

Se debe puntualizar que los estados estimados del motor se usan únicamente para el diseño de los controladores difusos, reduciendo así el grado de dificultad que se tiene cuando se considera un controlador con todos los estados.

IV.4.2 Diseño de controladores difusos, usando la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema observado

El diseño de controladores difusos, usando la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema observado

Para aplicar la síntesis difusa de Lyapunov, asumimos lo siguiente:

1. El sistema (44)-(45) tiene dos grados de libertad, los cuales son $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$, respectivamente. Por lo tanto por (22), $\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2$.
2. Los estados $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ son las únicas variables medibles.
3. Las ecuaciones (44)-(45) no son necesariamente conocidas.
4. La aceleración angular $\dot{\hat{x}}_2$ es proporcional a τ_m , esto es, cuando τ_m incrementa (decrementa) $\dot{\hat{x}}_2$ incrementa (decrementa).
5. Las condiciones iniciales $\hat{x}(0) = (\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0))^T$ pertenecen al conjunto $\aleph = \{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^2 : \|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}^*\| \leq \varepsilon\}$ donde $\hat{x}^*$ es el punto de equilibrio.

El *objetivo de control* es diseñar una base de reglas como el controlador difuso $\tau_m = \tau_m(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ para estabilizar el sistema (44)-(45).

El Teorema 15 (ver apéndice A) establece condiciones que ayudan en el diseño del controlador difuso y asegura estabilidad asintótica. La prueba puede ser encontrada en Khalil (2002).

El diseño del controlador difuso procede como sigue. Se introduce la función candidata de Lyapunov

$$V(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{1}{2} (\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2), \quad (50)$$

la cual es una función positiva definida y radialmente desacotada. La derivada temporal de $V(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ resulta en:

$$\dot{V}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1 \dot{\hat{x}}_1 + \hat{x}_2 \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 \hat{x}_2 + \hat{x}_2 \dot{\hat{x}}_2, \quad (51)$$

Para garantizar la estabilidad en el punto de equilibrio $(\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*)^T = (0, 0)^T$ se desea tener:

$$\hat{x}_1\hat{x}_2 + \hat{x}_2\dot{\hat{x}}_2 \leq 0. \quad (52)$$

Ahora se pueden derivar condiciones suficientes tal que la desigualdad (52) persista: Si $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ tienen signos opuestos, entonces $\hat{x}_1\hat{x}_2 < 0$ y (52) persistirá si $\dot{\hat{x}}_2 = 0$; si $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ son ambas positivas, entonces (52) persistirá si $\dot{\hat{x}}_2 < -\hat{x}_1$; si $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ son ambas negativas, entonces (52) persistirá si $\dot{\hat{x}}_2 > -\hat{x}_1$.

Se pueden trasladar estas condiciones a las siguientes reglas difusas:

- If $\hat{x}_1$ is *positive* and $\hat{x}_2$ is *positive* then $\dot{\hat{x}}_2$ must be *negative big*.
- If $\hat{x}_1$ is *negative* and $\hat{x}_2$ is *negative* then $\dot{\hat{x}}_2$ must be *positive big*.
- If $\hat{x}_1$ is *positive* and $\hat{x}_2$ is *negative* then $\dot{\hat{x}}_2$ must be *zero*.
- If $\hat{x}_1$ is *negative* and $\hat{x}_2$ is *positive* then $\dot{\hat{x}}_2$ must be *zero*.

Sin embargo, usando el conocimiento de que $\dot{\hat{x}}_2$ es proporcional a u , se puede reemplazar cada $\dot{\hat{x}}_2$ con u para obtener la siguiente base de reglas difusas para el controlador:

- If $\hat{x}_1$ is *positive* and $\hat{x}_2$ is *positive* then u must be *negative big*.
- If $\hat{x}_1$ is *negative* and $\hat{x}_2$ is *negative* then u must be *positive big*.
- If $\hat{x}_1$ is *positive* and $\hat{x}_2$ is *negative* then u must be *zero*.
- If $\hat{x}_1$ is *negative* and $\hat{x}_2$ is *positive* then u must be *zero*.

Esta base de reglas difusas también puede ser representada como en la Tabla XI.

Para completar el diseño del controlador, debemos modelar los términos lingüísticos en las reglas difusas usando funciones de membresía difusa y determinar un método de inferencia. Siguiendo a Castillo *et al.* (2008), caracterizamos los términos lingüísticos

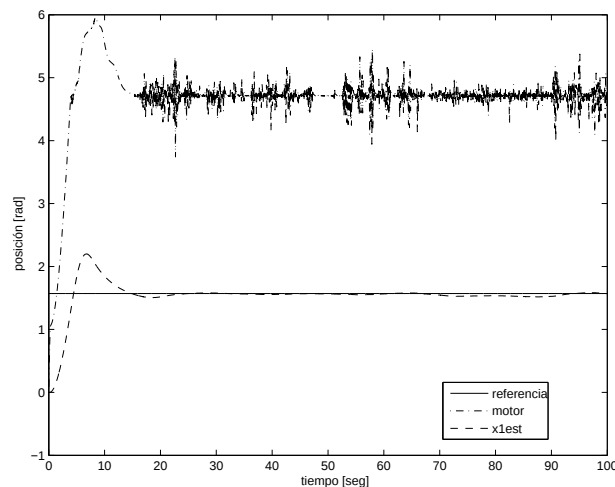


Figura 35. Respuesta del sistema (44)-(45) para el controlador difuso tipo-1 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov.

positive, negative, negative big, zero and positive big. Las funciones de membresía tipo-1 correspondientes son las mismas mostradas en la Figura 25, y las de tipo-2 son las mismas mostradas en la Figura 30. Hasta este momento, se ha diseñado sistemáticamente el controlador difuso siguiendo el criterio de estabilidad de Lyapunov.

Resultados del diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov para controladores difusos tipo-1, para el sistema observado

Para ejecutar experimentos usamos el modelo dinámico (44)-(45) y la plataforma experimental mostrada en la Figura 5.

Al ejecutar experimentos del sistema en lazo cerrado (44)-(45) con el controlador difuso tipo-1 diseñado se tienen los siguientes resultados: la misma superficie de control de la Figura 26, y se obtiene la respuesta del sistema de la Figura 35.

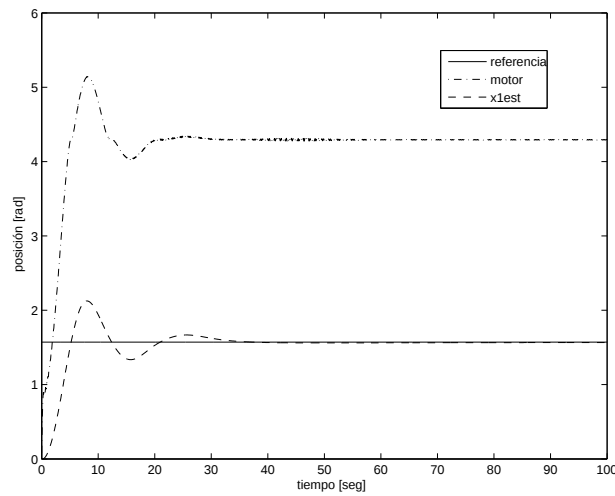


Figura 36. Respuesta del sistema (44)-(45) para el controlador difuso tipo-2 diseñado siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov.

Resultados del diseño basado en la síntesis difusa de Lyapunov para controladores difusos tipo-2, para el sistema observado

Para ejecutar experimentos usamos el modelo dinámico (44)-(45) y la plataforma experimental mostrada en la Figura 5.

Al ejecutar experimentos del sistema en lazo cerrado (44)-(45) con el controlador difuso tipo-2 diseñado, se tienen los siguientes resultados: la misma superficie de control de la Figura 31, y se obtiene la respuesta del sistema de la Figura 36.

Comparación

Ambos enfoques, tipo-1 y el tipo-2, resuelven el problema de regulación, la Tabla XII concentra algunas medidas que pueden ayudar a hacer una comparación entre las dos opciones presentadas en esta sección, la decisión sobre cual es mejor, depende de las características deseadas sobre la respuestas del sistema.

La Tabla XII muestra los criterios de desempeño (medidas de error) definidos en las ecuaciones (32)-(35), estos criterios son los principales en la optimización de sistemas

Tabla XII. Comparación para los resultados de los controladores tipo-1 y tipo-2 para el sistema (44)-(45).

controlador	tiempo de		sobre			
	asentamiento	pico	ISE	IAE	ITSE	ITAE
tipo-1	14 s	2.1997	69.5435	378.0656	502.7248	3.9626×10^3
tipo-2	30 s	1.9319	9.0649	62.7072	84.3383	704.6125

de control.

El tiempo de asentamiento es menor para el controlador difuso tipo-1 que para tipo-2, y el sobre pico es mayor para el controlador difuso tipo-1 que para tipo-2, lo cual significa que el controlador difuso tipo-1 tiene un tiempo de asentamiento más corto, pero a costa de tener un mayor sobre pico, lo cual puede inducir una dinámica no deseada para el mecanismo, en cambio, el controlador difuso tipo-2 tiene un menor sobre pico, a costa de tener un tiempo de asentamiento mayor. Además, para las cuatro medidas de desempeño los valores para el controlador difuso tipo-2 es menor que para el tipo-1, lo cual significa que el controlador difuso tipo-2 es mejor que tipo-1.

Debido a que para cualquier criterio sobre estas medidas, la mejor respuesta corresponde al valor mínimo en el criterio elegido, los valores de la Tabla XII valores sirven como punto de partida para aplicar algún método de optimización, ya sea analítico o basado en el paradigma de computación inteligente, para mejorar el desempeño de los controladores.

Tabla XIII. Comparación entre los resultados obtenidos por los controladores difusos tipo-1 y tipo-2 diseñados con algoritmos genéticos.

Controlador	tiempo de		ISE	IAE	ITAE	ITSE
	sobrepico [rad]	asentamiento [sec]				
tipo-1	1.5265	24.2942	NA	NA	NA	NA
tipo-1	1.7059	14.5254	650.0983	2.4438×10^3	4.1093×10^3	4.4868×10^3
tipo-2	1.6514	9.4689	551.7236	1.0085×10^3	2.9564×10^3	2.7546×10^3
tipo-1	1.9452	13.6684	633.1284	3.0568×10^3	3.9586×10^4	3.9258×10^3
tipo-2	1.7758	10.0016	593.8564	1.4258×10^3	3.1258×10^4	2.7367×10^3
tipo-1	2.1997	14	69.5435	378.0656	502.7248	3.9626×10^3
tipo-2	1.9319	30	9.0649	62.7072	84.3383	704.6125

IV.5 Comparación

A manera de resumen, la Tabla XIII concentra los resultados obtenidos con los tres criterios de diseño considerados en esta tesis: *empírico*, *con algoritmos genéticos* y *basados en la síntesis difusa de Lyapunov*. La primera sección de la tabla muestra los resultados obtenidos con los controladores difusos tipo-1 diseñados de manera empírica, la segunda sección muestra los resultados obtenidos con los controladores difusos tipo-1 y tipo-2 diseñados utilizando algoritmos genéticos, mismo criterio que es usado en los resultados de la tercera sección pero añadiendo ruido al lazo de retroalimentación, y finalmente, la cuarta sección muestra los resultados obtenidos con los sistemas difusos obtenidos con la síntesis difusa de Lyapunov para el sistema observado (44)-(45).

No se puede concluir que un controlador es mejor que otro puesto que se consideran

varios criterios de desempeño, como se mencionó en secciones anteriores de este documento, la decisión final de cuál controlador usar, queda sujeto a las necesidades de la aplicación.

Capítulo V

Conclusiones

En esta tesis se presentan contribuciones en el diseño de controladores difusos tipo-1 y tipo-2, en particular se resuelve el problema de diseñar controladores difusos para sistemas mecánicos no suaves.

Aprovechando las características propias de los sistemas difusos, se parte con un diseño empírico de sistemas difusos tipo-1, mismo que genera resultados satisfactorios puesto que se logra resolver el problema de regulación.

Una vez verificado que el diseño empírico arroja buenos resultados, se migra a un diseño apoyado del poder de optimización proveído por los algoritmos genéticos, proponiendo una metodología que permite diseñar sistemas difusos tipo-1 y tipo-2. Si bien es cierto que el tiempo de evolución de los algoritmos genéticos resultó ser largo, el costo computacional vale la pena puesto que tanto para el tipo-1 como para el tipo-2, los sistemas difusos diseñados por el algoritmo genético, resultan en controladores que resuelven el problema de control de manera satisfactoria.

Inspirados en Castillo *et al.* (2008), trabajo previo realizado por el grupo de investigación, se plantea hacer el diseño con base en la síntesis difusa de Lyapunov, tanto para sistemas difusos tipo-1 como para tipo-2. Para ambos casos, Lyapunov nos provee de sistemas difusos que resuelven el problema de regulación, y con el afán de verificar la robustés de los controladores diseñados, se hacen experimentos en los cuales se hacen presentes perturbaciones inducidas al sistema en forma de ruido, concluyendo robustes, puesto que los sistemas en lazo cerrado, como prevé Lyapunov, convergen a

las posiciones deseadas.

En este trabajo se confirma que el diseño de controladores difusos se complica en la medida en la que aumenta el número de variables involucradas en el sistema, motivo por el cual, el observador (44)-(45) diseñado para el sistema (17)-(21), resulta de gran ayuda, puesto que a partir del observador (44)-(45) y la síntesis difusa de Lyapunov, se logra el diseño de controladores difusos tipo-1 y tipo-2, que garantizan que el objetivo de control se alcanzará para el problema en cuestión.

Así, los enfoques presentados en esta tesis resultan válidos, contribuyendo en la teoría del diseño de sistemas difusos, tanto de tipo-1 como de tipo-2.

V.1 Problemas abiertos

Si bien es verdad que en esta tesis se logra hacer aportaciones en el diseño de controladores difusos tipo-2 para sistemas mecánicos no suaves, también es verdad que quedan algunos problemas abiertos para continuar con la línea de investigación.

Debido a que el sistema en lazo cerrado para los controladores diseñados siguiendo la síntesis difusa de Lyapunov presentan chattering, se pretende en el corto plazo continuar con la investigación para lograr la eliminación del chattering, sin perder las condiciones de estabilidad dadas por la teoría de Lyapunov.

Para formalizar aún más los resultados obtenidos en esta tesis, y poder hacer una generalización a otro tipo de sistemas, a largo plazo se pretende hacer investigación sobre las condiciones que debe satisfacer el sistema en lazo cerrado para garantizar via una prueba de Lyapunov, que el sistema en lazo cerrado presenta condiciones de estabilidad.

También resulta interesante el incursionar en otros métodos tradicionales e in-

teligentes para apoyar en el diseño de sistemas difusos, métodos como programación lineal, programación dinámica, optimización por nube de partículas, colonia de hormigas, redes neuronales, entre otros.

Referencias

- Aguilar, L. T., Orlov, Y., Cadiou, J. C., y Merzouki, R. (2007). Nonlinear H_∞ -output regulation of a nonminimum phase servomechanism with backlash. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **129**(4): 544–549.
- Armstrong, B. y Amin, B. (1996). Pid control in the presence of static friction: a comparison of algebraic and describing function analysis. *Automatica*, **32**(5): 679–692.
- Armstrong-Hélouvry, B., Dupont, P., y Canudas de Wit, C. (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, **30**(7): 1083–1138.
- Castillo, O. y Melin, P. (2005). *Hybrid Intelligent Systems for Pattern Recognition Using Soft Computing: An Evolutionary Approach for Neural Networks and Fuzzy Systems*. Springer-Verlag, Berlin.
- Castillo, O. y Melin, P. (2008). *Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Vol. 223. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, primero edición. Book (ISBN: 978-3-540-76283-6).
- Castillo, O., Lozano, A., y Melin, P. (2004). Hierarchical genetic algorithms for fuzzy system optimization in intelligent control. En *Fuzzy Information, 2004. Processing NAFIPS '04. IEEE Annual Meeting of the*, Vol. 1, páginas 292 – 297 Vol.1.
- Castillo, O., Aguilar, L. T., Cazarez, N., y Cardenas, S. (2008). Systematic design of a stable type-2 fuzzy logic controller. *Journal of Applied Soft Computing*, **8**(3): 1274–1279.
- Castro, J., Castillo, O., y Melin, P. (2007a). An interval type-2 fuzzy logic toolbox for control applications. *Fuzzy Systems Conference, 2007. FUZZ-IEEE 2007. IEEE International*, páginas 1–6.
- Castro, J. R., Castillo, O., y Martinez, L. G. (2007b). Interval type-2 fuzzy logic toolbox. *Journal of Engineering Letters*, **15**(1): 89–98. online version.
- Cazarez-Castro, N., Aguilar, L., y Castillo, O. (2008a). Hybrid genetic-fuzzy optimization of a type-2 fuzzy logic controller. *Hybrid Intelligent Systems, 2008. HIS '08. Eighth International Conference on*, páginas 216–221.
- Cazarez-Castro, N., Aguilar, L., y Castillo, O. (2008b). Genetic optimization of a type-2 fuzzy controller for output regulation of a servomechanism with backlash. *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 2008. CCE 2008. 5th International Conference on*, páginas 268–273.

- Cazarez-Castro, N., Aguilar, L., Castillo, O., y Cardenas-Maciel, S. (2008c). *Soft Computing for Hybrid Intelligent Systems*, Vol. 154 de *Studies in Computational Intelligence*, capítulo Fuzzy Control for Output Regulation of a Servomechanism with Backlash, páginas 19–28. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Cazarez-Castro, N., Aguilar, L., Castillo, O., y Rodriguez, A. (2008d). Optimizing type-1 and type-2 fuzzy logic systems with genetic algorithms. *Research in Computing Science*, **39**: 131–153.
- Cazarez-Castro, N., Aguilar, L., y Castillo, O. (2009a). Fuzzy logic control with genetic membership function parameters optimization for the output regulation of a servomechanism with nonlinear backlash. *Expert Systems with Applications*.
- Cazarez-Castro, N., Aguilar, L., y Castillo, O. (2009b). *Evolutionary Design of Intelligent Systems in Modeling, Simulation and Control*, Vol. 254 de *Studies in Computational Intelligence*, capítulo Controlling Unstable Non-Minimum-Phase Systems with Fuzzy Logic: The Perturbed Case, páginas 245–258. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Cazarez-Castro, N., Aguilar, L., y Castillo, O. (2009c). Designing type-1 fuzzy logic controllers via fuzzy lyapunov synthesis for nonsmooth mechanical systems. *Congreso Anual 2009 de la Asociacion de Mexico de Control Automatico.*, páginas cd-rom.
- Cazarez-Castro, N. R., Aguilar, L. T., y Castillo, O. (2009d). Designing type-2 fuzzy logic system controllers via fuzzy lyapunov synthesis for the output regulator of a servomechanism with nonlinear backlash. En *SMC'09: Proceedings of the 2009 IEEE international conference on Systems, Man and Cybernetics*, páginas 268–273, Piscataway, NJ, USA. IEEE Press. ISBN 978-1-4244-2793-2.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA. ISBN 0201157675.
- Grefenstette, J. (1986). Optimization of control parameters for genetic algorithms. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, **16**(1): 122–128.
- Hagras, H. (2007). Type-2 flcs: A new generation of fuzzy controllers. *Computational Intelligence Magazine, IEEE*, **2**(1): 30–43.
- Holland, J. M. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, MI.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA. ISBN 3540199160.

- Isidori, A. (2000). A tool for semi-global stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, **45**(10): 1817 – 1827.
- Juang, C.-F. y Hsu, C.-H. (2009). Reinforcement ant optimized fuzzy controller for mobile-robot wall-following control. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, **56**(10): 3931–3940.
- Kelly, R. y Santibáñez, V. (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Pearson, Madrid. ISBN 84-205-3831-0.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, tercero edición. ISBN 0-13-067389-7.
- Krasovski, N. (1963). *Problems of the theory of stability of motion*. Stanford Univ. Press.
- Lee, M. y Takagi, H. (1993). Integrating design stage of fuzzy systems using genetic algorithms. En *Fuzzy Systems, 1993., Second IEEE International Conference on*, páginas 612 –617 vol.1.
- Lin, T.-C., Liu, H.-L., y Kuo, M.-J. (2009). Direct adaptive interval type-2 fuzzy control of multivariable nonlinear systems. *Eng. Appl. Artif. Intell.*, **22**(3): 420–430.
- Mamdani, E. (1976). Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers. *J. Man-Machine Studies*, **8**: 669–678.
- Mamdani, E. y Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with fuzzy logic controller. *J. Man- Machine Studies*, **7**(1): 1–13.
- Margaliot, M. y Langholz, G. (1998). Adaptive fuzzy controller design via fuzzy lyapunov synthesis. En *Fuzzy Systems Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., The 1998 IEEE International Conference on*, Vol. 1, páginas 354–359 vol.1.
- Melin, P. y Castillo, O. (2001). Intelligent control of complex electrochemical systems with a neuro-fuzzy-genetic approach. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, **48**(5): 951 –955.
- Mendel, J. (2001). *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Mendel, J. (2007). Computing with words: Zadeh, turing, popper and occam. *IEEE Comput. Intell. Mag.*, **2**(4): 10–17.
- Mendel, J. y John, R. (2002). Type-2 fuzzy sets made simple. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, **10**(2): 117–127.

- Mendel, J. M., John, R. I., y Liu, F. (2006). Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, **14**(6): 808–821.
- Merzouki, R., Cadiou, J., y M’Sirdi, N. (2004). Compensation of friction and backlash effects in an electrical actuator. *J. System and Control Engineering*, **218**(12): 75–84.
- Morin, A. (1833). New friction experiments carried out at metz in 1831-1833. En *Proccedings of the French Royal Academy of Sciences*.
- Nordin, M., Bodin, P., y Gutman, P. (2001). *Adaptive Control of Nonsmooth Dynamic Systems*, capítulo New Models and Identification Methods for Backlash and Gear Play, páginas 1–30. Springer, Berlin.
- Olsson, H., Åström, K., Canudas, C., Gäfvert, M., y Lischinsky, P. (1998). Friction models and friction compensations. *European Journal of Control*, **4**(3).
- Orlov, Y. (2005). Finite time stability and quasihomogeneous control synthesis of uncertain switched systems with application to underactuated manipulators. En *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC ’05. 44th IEEE Conference on*, páginas 4566–4571.
- Sepulveda, R., Castillo, O., Melin, P., Rodriguez-Diaz, A., y Montiel, O. (2007). Experimental study of intelligent controllers under uncertainty using type-1 and type-2 fuzzy logic. *Inf. Sciences*, **177**(10): 2023–2048.
- Zadeh, L. (1996). Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, **4**(2): 103–111.
- Zadeh, L. A. (1975a). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - i. *Inf. Sci.*, **8**(3): 199–249.
- Zadeh, L. A. (1975b). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - ii. *Inf. Sci.*, **8**(4): 301–357.
- Zadeh, L. A. (1975c). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - ii. *Inf. Sci.*, **9**(1): 43–80.

Apéndice A

Estabilidad en sentido de Lyapunov

Este apéndice es tomado de Kelly y Santibáñez (2003), se presentan conceptos y teoremas básicos de la teoría de Lyapunov y en particular, el denominado *segundo método de Lyapunov* o *método directo de Lyapunov*.

La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n \quad \forall t \geq 0, \quad (53)$$

donde el vector $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ se refiere al estado del sistema dinámico representado por (53) y $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$ se denomina la condición inicial o estado inicial. La función $\mathbf{f} : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ es una función continua en t y $\mathbf{x}(t)$, y se supone que es tal que:

- La Ecuación (53) tiene una solución única en el intervalo $[0, \infty)$ correspondiente a cada condición inicial de $\mathbf{x}(0)$.
- Si $\mathbf{x}(t)$ es la solución de (53) correspondiente a la condición inicial $\mathbf{x}(0)$, entonces $\mathbf{x}(t)$ depende de una manera continua del estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

So la función $\mathbf{f}$ no depende explícitamente de tiempo, i.e., $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, luego la Ecuación (53) se denomina autónoma. Si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$ con $\mathbf{A}(t)$ una matriz cuadrada de dimensión n y siendo $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones únicamente de t - o constantes -, entonces la Ecuación (53) es lineal. En caso contrario es no lineal.

A.1 Conceptos básicos

Entre los conceptos básicos de la teoría de Lyapunov destacan los siguientes: equilibrio, estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial. Cada uno de ellos será tratado a continuación. Primeramente, se presenta el concepto de equilibrio, el cual, a pesar de su sencillez, juega un papel clave en la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Definición 2 (Equilibrio) *Un vector constante $\mathbf{x}_e \in \mathbf{R}^n$ es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema (53) si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \forall t \geq 0$.*

Como consecuencias inmediatas de la definición de equilibrio, y excluyendo casos “patológicos”, se tiene que si la condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$ es justamente un equilibrio ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e \in \mathbf{R}^n$), entonces se satisface:

- $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e, \forall t \geq 0$.
- $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}, \forall t \geq 0$.

Tradicionalmente se supone que el origen del espacio de estado $\mathbf{R}^n$, esto es $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$, es el equilibrio de (53). Si éste no es el caso, puede demostrarse que mediante un cambio adecuado de coordenadas, cualquier equilibrio de (53) puede trasladarse al origen del espacio de estado.

En general, una ecuación diferencial puede tener más de un equilibrio, inclusive un número infinito de ellos. Sin embargo, también puede ocurrir que una ecuación no posea equilibrio alguno.

Definición 3 (Estabilidad) *El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) de la Ecuación (53) si para cada número $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$, tal que: $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$.*

En la definición anterior la constante $\delta(\leq \varepsilon)$ no es única. Si existe una constante δ que satisfaga la condición de la definición, entonces cualquier $\alpha\delta$ con $\alpha \leq 1$ también la satisface.

Debe tenerse claro que la definición de estabilidad requiere la existencia de un $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$ y no para algún $\varepsilon > 0$.

Finalmente, se deberá interpretar claramente la Definición 3 de estabilidad y no establecer, como suele suceder en ocasiones por confusión, que para cada constante $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que: $\| \mathbf{x}(0) \| < \varepsilon \Rightarrow \| \mathbf{x}(t) \| < \delta \forall t \geq 0$.

Lo expuesto anteriormente significaría que el origen es un equilibrio estable si para toda condición inicial acotada, las soluciones también están acotadas. Esto último, no es necesario ni tampoco es suficiente para estabilidad en sentido de Lyapunov. La estabilidad del origen debe ser interpretada como dada una pequeña discrepancia de la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ con respecto al equilibrio (origen), la solución $\mathbf{x}(t)$ correspondiente permanecerá acotada. Nótese que se habla de valores pequeños de la condición inicial y no para toda condición inicial.

Definición 4 (Estabilidad asintótica) *El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable de (53) si:*

1. *El origen es estable.*
2. *El origen es atractivo, es decir, existe un número $\delta' > 0$ tal que: $\| \mathbf{x}(0) \| < \delta' \Rightarrow \| \mathbf{x}(t) \| \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$.*

La asignación del nombre de estabilidad asintótica en la definición anterior es desafortunada, induciendo a confusión, ya que podrá interpretarse como que el equilibrio es estable cuando $t \rightarrow \infty$ (asintóticamente), siendo que la definición claramente indica

en la condición 1) que el equilibrio debe ser estable. Podría pensarse que la condición 1) es superflua ya que ésta es implicada por la condición 2). Sin embargo, tal implicación no es cierta.

Definición 5 (Estabilidad asintótica global) *El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global de la ecuación (53) si:*

1. *El origen es estable.*
2. *El origen es atractivo globalmente, es decir, $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$, $\forall \mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$.*

De la definición anterior se deduce que un equilibrio asintóticamente estable globalmente implica que dicho equilibrio es también asintóticamente estable, pero lo contrario es falso.

Definición 6 (Estabilidad exponencial global) *El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un equilibrio exponencialmente estable en forma global de (53) si existen constantes positivas α y β tales que: $\|\mathbf{x}(t)\| < \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\beta t}$, $\forall t \geq 0$, $\forall \mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$.*

De acuerdo con las definiciones anteriores, un equilibrio exponencialmente estable en forma global es también un equilibrio asintóticamente estable en forma global. Lo contrario, sin embargo, no es necesariamente verdadero.

Definición 7 (Inestabilidad) *El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un equilibrio inestable de la ecuación (53) si éste no es estable.*

El concepto de equilibrio (origen) inestable es equivalente a enunciar que existe al menos un $\varepsilon > 0$ para el cual no es posible encontrar un $\delta > 0$ tal que: $\|\mathbf{x}(0)\| <$

$\delta \Rightarrow \| \mathbf{x}(t) \| < \epsilon \ \forall t > 0$, en otras palabras, si existe al menos un $\epsilon > 0$, el cual se desea que acote la norma de la solución $\| \mathbf{x}(t) \|$ y no existe ninguna condición inicial $\mathbf{x}(0) \neq 0 \in \mathbf{R}^n$ cuya solución $\mathbf{x}(t)$ lo satisfaga ($\| \mathbf{x}(t) \| < \epsilon \ \forall t > 0$), entonces el origen es inestable. El importante subrayar que en ningún momento se afirma que la solución $\mathbf{x}(t)$ deba "crecer" indefinidamente.

Algunos autores prefieren hablar de propiedades de estabilidad de sistemas en un equilibrio dado, en vez de propiedades de estabilidad de un equilibrio de un sistema.

Definición 8 (Función definida positiva localmente y función definida positiva)

Una función continua $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ es una función definida positiva localmente si:

- $W(0) = 0$.
- $W(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ pero con $\| x \|$ pequeña.

Una función continua $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ es una función definida positiva si:

- $W(0) = 0$.
- $W(x) > 0 \ \forall x \neq 0$.

De acuerdo con la definición anterior es obvio que una función definida positiva es también una función definida positiva localmente. También, de acuerdo a las definiciones de función definida positiva y de matriz definida positiva, una función cuadrática $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de la forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ con $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, es una función definida positiva si y sólo si $P > 0$.

Si $W(\mathbf{x})$ es una función definida positiva, entonces a $-W(\mathbf{x})$ se le referirá como función definida negativa.

A continuación se presenta la definición de otros conceptos útiles sobre funciones.

Definición 9 (Función radialmente desacotada y función menguante) *Una función continua $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ es una función radialmente desacotada si:*

- $W(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

Una función continua $V : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ es una función menguante (globalmente), si existe una función definida positiva $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ tal que $V(t, \mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x}) \forall t \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Naturalmente, si $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva independiente de t , es decir, $V(t, \mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$, luego $V(\mathbf{x})$ es trivialmente una función menguante.

Con abuso de la nomenclatura, se dirá que una función dependiente del tiempo $V : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ es definida positiva si existe una función definida positiva $W : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ tal que $V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}), \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

También se dirá que $V(t, \mathbf{x})$ es radialmente desacotada si $W(\mathbf{x})$ lo es.

Definición 10 (Función candidata de Lyapunov) *Una función $V : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$ es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ si:*

- $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva localmente.
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t}$ es una función continua con respecto a t y $\mathbf{x}$.
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ es una función continua con respecto a t y $\mathbf{x}$.

En otras palabras, una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es cualquier función definida positiva localmente y continuamente diferenciable - es decir, con derivadas parciales continuas -.

La derivada temporal de una función de Lyapunov juega un papel clave en la extracción de conclusiones sobre los atributos de estabilidad para los equilibrios de las ecuaciones diferenciales. Por este motivo, se presenta la siguiente definición:

Definición 11 (Derivada de una función candidata de Lyapunov) Sea $V(t, \mathbf{x})$ una función candidata de Lyapunov para la ecuación (53). La derivada de $V(t, \mathbf{x})$ a lo largo de las trayectorias de (53), denotada por $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ vendrá dada por $\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} f(t, \mathbf{x})$.

Obsérvese de la definición anterior, que si $V(\mathbf{x})$ no depende explícitamente de tiempo, y la Ecuación (53) es autónoma, entonces $\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ la cual tampoco depende explícitamente del tiempo.

Definición 12 (Función de Lyapunov) Una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ para la Ecuación (53) es una función de Lyapunov para (53) si su derivada a lo largo de las trayectorias de (53) satisface $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0 \forall t \geq 0$ al menos para $\|\mathbf{x}\|$ pequeña.

A.2 Método directo de Lyapunov

Con los preliminares anteriores, ahora pueden presentarse los teoremas fundamentales de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Los teoremas presentados vendrán dados sin demostraciones.

Teorema 13 (Estabilidad) El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un estado de equilibrio estable de la Ecuación (53), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ tal que su derivada temporal satisfaga $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0, \forall t \geq 0$ al menos para $\|\mathbf{x}\|$ pequeña.

El teorema anterior da condiciones suficientes para estabilidad del equilibrio en el sentido de Lyapunov. Conviene apuntar que la conclusión del teorema se mantiene obviamente si $\dot{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}) \leq 0$ para todo $t \geq 0$ y para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, o si la función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva (globalmente) en lugar de ser definida positiva localmente. El siguiente teorema, permite establecer resultados de estabilidad del equilibrio y además, acotamiento de las soluciones.

Teorema 14 (Estabilidad y acotamiento de las soluciones) *El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un equilibrio estable, y las soluciones $\mathbf{x}(t)$ están acotadas para toda condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$, si existe una función candidata de Lyapunov que sea definida positiva (globalmente), radialmente desacotada, $V(t, \mathbf{x})$, tal que su derivada temporal satisfaga $\dot{\mathbf{V}} \leq 0 \forall t \geq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.*

Teorema 15 (Estabilidad asintótica global) *El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un estado de equilibrio asintóticamente estable en forma global de (53), si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ definida positiva (globalmente), radialmente desacotada, y menguante, tal que su derivada satisfaga:*

- $\dot{\mathbf{V}}(t, \mathbf{0}) = 0, \quad \forall t \geq 0.$
- $\dot{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}) < 0, \quad \forall t \geq 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n.$

La condición impuesta por el teorema anterior sobre $\dot{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x})$ equivale a requerir que $\dot{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x})$ sea una función definida negativa (globalmente). Es conveniente apuntar que más allá de la conclusión de estabilidad asintótica global enunciada en el teorema, en realidad, las condiciones establecidas son suficientes para garantizar un resultado de estabilidad más fuerte llamado estabilidad sintótica global en forma *uniforme*.

En el caso de que la Ecuación (53) sea autónoma, la función candidata de Lyapunov no suele depender explícitamente del tiempo, por lo que es trivialmente menguante, de modo que para que el origen sea un equilibrio asintóticamente estable en forma global es suficiente que la función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ sea definida positiva (globalmente), y radiamente desacotada, a la vez que su derivada $\dot{V}(\mathbf{x})$ sea una función negativa (globalmente).

El siguiente resultado presenta condiciones necesarias para la existencia de ciertas propiedades globales de estabilidad de equilibrios en ecuaciones diferenciales autónomas.

Teorema 16 *Considérese la ecuación diferencial autónoma $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$, $\forall t \geq 0$.*

La existencia de un único estado de equilibrio es una condición necesaria para que éste sea asintóticamente estable en forma global.

La prueba del Teorema 16 es inmediata observando que el concepto de estabilidad citado implica $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, donde $\mathbf{x}_e$ es el equilibrio analizado. Debido a la globalidad de la citada propiedad de estabilidad, la convergencia de la solución $\mathbf{x}(t)$ al equilibrio $\mathbf{x}_e$ debe verificarse para toda condición inicial. Claramente, éste no sería el caso si además de $\mathbf{x}_e$ existen más estados de equilibrio, ya que si la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ fuese exactamente alguno de esos otros estados de equilibrio, entonces la solución $\mathbf{x}(t)$ permanecería ahí para todo $t \geq 0$.

Nótese que el Teorema 16 no establece, como condición necesaria de estabilidad de un equilibrio, la existencia de un único estado de equilibrio. Es importante mencionar, que pueden coexistir equilibrios con propiedades locales de estabilidad, e incluso, equilibrios estables con equilibrios inestables.

Debido a que las propiedades globales de estabilidad implican la existencia de un único equilibrio para el sistema descrito por la ecuación diferencial respectiva, se permite hablar no solo de las propiedades de estabilidad global de dicho equilibrio, sino también de dichas propiedades para el sistema que representan, es decir, afirmaciones como "este sistema es asintóticamente estable en forma global" serían correctas.

El siguiente teorema es una versión simplificada del denominado teorema de LaSalle.

Teorema 17 (LaSalle) *Considérese la ecuación diferencial autónoma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, cuyo origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un equilibrio. Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ definida positiva (globalmente) y radialmente desacotada tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.*

Defínase el conjunto Ω como $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$. Si $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, entonces el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

Una manera práctica para probar la condición del teorema de LaSalle es la siguiente. Primeramente, se determinan los componentes (o sus combinaciones) del vector de estado $\mathbf{x}$ tales que al anularse impliquen que $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$. A continuación se consideran dichos componentes como nulos y sus derivadas temporales sucesivas también se toman como nulas. Luego se emplean estas consideraciones en la ecuación original $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Finalmente, si de ahí pueden concluirse que las restantes variables de estado (aquellas cuyos valores no afectan $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$, son nulas, esto querrá decir que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única condición inicial en Ω para la cual la solución $\mathbf{x}(t)$ permanecerá en Ω .

La aplicación del teorema de LaSalle para establecer estabilidad asintótica global, no requiere que $-\dot{V}(\mathbf{x})$ sea una función definida positiva. Sin embargo, recuérdese que este teorema sólo puede emplearse en ecuaciones diferenciales autónomas.

Los teoremas anteriores son comunmente los más empleados en el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov.