

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA



ANÁLISIS DE LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUJO

OSCILATORIO MEDIANTE EL MÉTODO DE

APROXIMACIÓN ASINTÓTICA A BAJAS FRECUENCIAS.

TESIS

Que para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta

**Elia Leyva Sánchez**

Dirigida por:

**Alejandro Adolfo Lambert Arista**

Mexicali Baja California, enero de 2014

# Abstract

**Abstract** of the thesis, presented by Elia Leyva Sánchez, in order to obtain the DOCTORATE IN SCIENCE, Mexicali, Baja California, México. January, 2014.

## ASYMPTOTIC APPROXIMATION A HEAT TRANSFER IN OSCILLATORY FLOW

Approved by:

*Dr. Alejandro Adolfo Lambert Arista*

*Tesis Advisor*

We obtained a more simple expression for the response in the frequency domain of the velocity profiles and temperature, using the asymptotic approximation method. The mathematical model obtained contemplates various different flow regimes and nature of the flowing fluid. Analyzed the velocity profiles and temperature. We found that the heat transfer fluid in

oscillatory regime to a cylindrical device whose ends have different temperatures, contributes to higher heat transfer, this is verified by evaluating the effective thermal diffusivity.

Keywords: *thermal diffusivity, heat transfer, asymptotic approximation.*

# Resumen

**Resumen** de la tesis que Elia Leyva Sánchez, presenta como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS. Mexicali, Baja California, México. Enero de 2014.

## APROXIMACIÓN ASINTÓTICA A LA TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUJO OSCILATORIO

Resumen aprobado por:

Dr. Alejandro Adolfo Lambert Arista

Director de Tesis

Se obtiene una expresión más sencilla para la respuesta en el dominio de las frecuencias de los perfiles de velocidad y de temperatura, mediante el método de aproximación asintótica. El modelo matemático obtenido contempla distintos regímenes del flujo y distinta naturaleza

del fluido que fluye. Se analizaron los perfiles de velocidad y de temperatura. Se encontró que el transporte de calor de fluidos en régimen oscilatorio para un dispositivo cilíndrico, cuyos extremos tienen distintas temperaturas, contribuye a una mayor transferencia de calor, verificando esto por medio de la evaluación de la difusividad térmica efectiva.

Palabras clave: *difusividad térmica, transferencia de calor, aproximación asintótica.*

# Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por permitirme realizar este proyecto brindando su valioso apoyo económico; a la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) y al Instituto de Ingeniería campus Mexicali, por permitirme ingresar al programa de formación de investigadores y culminar este proyecto de tesis; al Dr. Alejandro Adolfo Lambert Arista gracias por su comprensión y su acertada asesoría y dirección; al Dr. Benjamin Sálas Valdéz exdirector del Instituto de Ingeniería, por siempre brindarme su apoyo en lo académico y en lo administrativo; a la Dra. Gisela Montero Alpírez actual directora del Instituto de Ingeniería por siempre tener la disposición de ayudarme. A los Maestros y Doctores del programa MYDCI, por compartir en las clases sus conocimientos y experiencia en lo académico; A los Sinodales por contribuir con su experiencia al enriquecimiento de éste proyecto de tesis. A las secretarias, con especial cariño a Dolores y Norma, y al personal administrativo por su buen trato y atención; a mi amiga Ruth Elba Rivera Castellon por su trato cálido y la confianza, gracias por compartir tu espacio de trabajo para culminar esta investigación; a mi amiga Marlene Zamora Machado por los proyectos compartidos en

lo académico y en lo familiar. Finalmente mi amor y gratitud a mi compañero el Dr. Octavio Lázaro Mancilla y a mis hijos David Leyva Sánchez y Ievelia Lázaro Leyva por su apoyo incondicional, su paciencia y comprensión.

# Dedicatoria

*A Octavio, Al .: MSMA, al .: MSHM, al .: VSA  
y a Don Conrado Leyva*

# Índice general

Abstract	I
Resumen	III
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VII
Lista de figuras	X
Lista de tablas	XIII
<b>1. Introducción.</b>	
1.1. Definición del problema . . . . .	2
1.2. Antecedentes . . . . .	4
1.3. Objetivo . . . . .	11
1.4. Esquema general de la tesis . . . . .	12

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IX
<b>2. Modelo Matemático</b>	<b>13</b>
2.1. Solución por método de Bessel. . . . .	15
2.1.1. Solución de la ecuación de balance de cantidad de movimiento. . . . .	17
2.1.2. Solución de la ecuación de balance de energía. . . . .	19
2.2. Adimensionamiento . . . . .	20
2.2.1. Adimensionamiento de la ecuación de balance de cantidad de movimiento	21
2.2.2. Adimensionamiento de la ecuación de balance de energía. . . . .	23
<b>3. Aproximación asintótica.</b>	<b>27</b>
3.1. Aproximación asintótica la de velocidad. . . . .	27
3.1.1. Aproximación Asintótica de la velocidad para $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \ll 1$ . . . . .	28
3.1.2. Aproximación Asintótica de la velocidad para $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \gg 1$ . . . . .	32
3.2. Aproximación asintótica de la temperatura . . . . .	35
3.2.1. Aproximación asintótica de la temperatura para bajas frecuencias, $\alpha \rightarrow 0$ .	35
3.2.2. Aproximación asintótica de la temperatura para altas frecuencias, $\alpha \rightarrow$	
$\infty$ . . . . .	37
<b>4. Análisis de la aproximación asintótica</b>	<b>40</b>
4.1. Análisis de la aproximación asintótica de la velocidad. . . . .	41
4.1.1. Análisis de velocidad instantánea para distintos regímenes del flujo y	
naturalezas del fluido. . . . .	43

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	X
4.1.2. Análisis general con Variación de $\alpha$ y $De$ para velocidad en el centro del tubo en $\bar{t}$ fijo. . . . .	51
4.2. Análisis de la aproximación asintótica de la temperatura. . . . .	54
4.2.1. Análisis de la temperatura para distintos regímenes del flujo. . . . .	56
4.3. Comparación de la aproximación asintótica de la $\bar{V}$ y de la $\bar{T}$ con sus respectivas formas de Bessel. . . . .	62
4.3.1. Velocidad Bessel vs Velocidad Asintótica. . . . .	64
4.3.2. Temperatura Bessel vs Velocidad Asintótica. . . . .	71
<b>5. Difusividad Térmica Efectiva.</b>	<b>77</b>
5.1. Cálculo de $\kappa_e$ mediante las aproximaciones asintóticas $\bar{V}$ y $\bar{T}$ . . . . .	78
5.2. Evaluación y análisis de la $\kappa_e$ . . . . .	82
<b>6. Conclusiones.</b>	<b>86</b>
<b>A. Aproximación asintótica para la velocidad.</b>	<b>93</b>
<b>B. Aproximación asintótica de la temperatura.</b>	<b>103</b>
<b>C. Desarrollo de la Difusividad Térmica Efectiva.</b>	<b>112</b>

# Índice de figuras

1.1. Dispositivo cilíndrico con flujo unidireccional, donde $t_i$ es la temperatura inicial, $t_f$ la temperatura final, $x$ dirección axial, $r$ radio del tubo con $t_i \gg t_f$ . . . . .	3
1.2. Forma de dispositivos para el transporte de fluidos con distintos propósitos. a) Para calentamiento o enfriamiento de fluidos en piscinas; b) Para enfriamiento de calderas y c) para el transporte de plasma en el sistema circulatorio. . . . .	6
1.3. Dispositivo de Lambert para análisis de transporte de calor en ducto cilíndrico aislado. . . . .	7
4.1. Corte transversal para perfil de velocidades. . . . .	42
4.2. Perfil de velocidad para flujo Newtoniano. . . . .	44
4.3. Perfil de velocidades para un flujo constante oscilatorio con naturaleza viscoelástica con $2 \leq \bar{t} \leq 2,5$ . . . . .	45
4.4. Perfil de velocidades para un fluido oscilatorio de naturaleza viscosa con $2,125 \leq \bar{t} \leq 2,4125$ . . . . .	47

4.5. Perfil de velocidades para un flujo en régimen oscilatorio de naturaleza elástica con $1,68 \leq \bar{t} \leq 1,755$ . . . . .	48
4.6. Perfiles de velocidad de un flujo tipo tapón. Para el caso (a) $\alpha = 10$ . . . . .	50
4.7. Perfiles de velocidad de un flujo tipo tapón con $0 \leq \bar{t} \leq 0,1$ . . . . .	51
4.8. Evaluación global de la velocidad para distintos valores de Womersley y Deborah, con $\bar{t}$ fijo y $r = 0$ cada caso. . . . .	52
4.9. Análisis de velocidad global para distintos valores de Womersley y Deborah, con $\bar{t}$ fijo y $\bar{r} = 0$ en cada caso. . . . .	54
4.10. Temperatura instantánea para flujo constante. . . . .	57
4.11. Perfiles de temperatura para flujo oscilatorio con $10 \leq \bar{t} \leq 100$ e incrementos de 1. . . . .	60
4.12. Perfiles de temperatura para flujo en régimen oscilatorio con $1 < \bar{t} < 15$ e incrementos de 0,5. . . . .	61
4.13. Gráfica superior: perfiles de velocidad de la aproximación asintótica y de Bessel del $H_2O$ ; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades. . . . .	67
4.14. Gráfica superior: perfiles de velocidad de la aproximación asintótica y de Bessel del $H_2O$ ; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades. . . . .	68
4.15. Gráfica superior: perfiles de velocidad de la aproximación asintótica y de Bessel del $CPyCl/NaSal$ ; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades. . . . .	69

4.16. Gráfica superior: perfiles de velocidad de la aproximación asintótica y de Bessel del <i>SAE40</i> ; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.	70
4.17. Gráfica de los errores entre la aproximación asintótica y de solución de Bessel del $H_2O$ , $\bar{r} = 0$ .	71
4.18. Gráfica superior: perfiles de temperatura de la aproximación asintótica y de Bessel del $H_2O$ ; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.	73
4.19. Gráfica superior: perfiles de temperatura de la aproximación asintótica y de Bessel del ( <i>CPyCl/NaSal</i> ); gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.	74
4.20. Gráfica superior: perfiles de temperatura de la aproximación asintótica y de Bessel del <i>SAE40</i> ; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.	75
4.21. Gráfica de dispersión de los errores entre la aproximación asintótica y las solución de Bessel para el <i>CPyCl/NaSal</i> .	76
5.1. Difusividad térmica efectiva para el Agua a $20^\circ C$ .	83
5.2. Difusividad térmica efectiva para el <i>CPyCl/NaSal</i> a $20^\circ C$ .	84
5.3. Difusividad térmica efectiva para el <i>SAE 40</i> a $20^\circ C$ .	85

# Índice de tablas

4.1. Criterios de clasificación de los parámetros adimensionales. . . . .	41
4.2. Valores numéricos de los parámetros adimensionales para la velocidad. . . . .	43
4.3. Superposición de los términos de las ecuaciones de velocidad para $\alpha \ll 1$ . . . . .	49
4.4. Criterios de clasificación de los parámetros adimensionales de la temperatura. . . . .	55
4.5. Valores numéricos de los parámetros adimensionales $\alpha$ y $Re$ . . . . .	56
4.6. Superposición de los términos de las ecuaciones de temperatura para $\alpha$ y $Re$ . . . . .	62
4.7. Comparación de las formas analíticas de la solución para la velocidad. . . . .	65
4.8. Criterios de evaluación de los flujos de trabajo. . . . .	66
4.9. Formas analíticas de la solución para la temperatura por método. . . . .	72
4.10. Criterios de evaluación de los fluidos de trabajo. . . . .	72
4.11. Análisis ANOVA de los errores entre la aproximación asintótica y Bessel. . . . .	76
5.1. Criterios de evaluación de los fluidos de trabajo. . . . .	83

# Capítulo 1

## Introducción.

El procedimiento general para predecir el comportamiento de un sistema es la modelación, en ésta los modelos se construyen para imitar el comportamiento del sistema, tal es el caso de los modelos matemáticos, que en la actualidad son los más utilizados en la mayoría de las ciencias exáctas [1].

Los fundamentos y métodos que se aplican en la modelación matemática poseen notable unidad conceptual y generalidad. Estas características tienen importantes consecuencias prácticas, y son las que conducen a un gran ahorro de esfuerzos y de recursos [1].

El uso de la modelación matemática para el análisis del fenómeno de flujo a través de dispositivos y los principios de su movimiento, así como los fenómenos macroscópicos que son inherentes a estos principios, en la mayoría de los casos son extremadamente complejos de modelar. Desde el punto de vista matemático, esto se debe en gran parte a la no linealidad de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, obtenidas a través de las leyes físicas inherentes al

## *CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.*

sistema y a las condiciones de contorno debidas a la interfaz del fluido, las cuales dificultan la obtención de las soluciones analíticas y en caso de obtenerlas, la gran mayoría son muy complicadas de analizar.

Una forma de afrontar la construcción del modelo matemático es a través de la hipótesis del continuo, en ella se considera sólo un parte ínfima del fluido y se asume que conserva las características del comportamiento igual que el fluido total. A través de ésta consideración esa parte se nombra volumen de control infinitesimal, y se realiza un balance entre el fluido de entrada y el de salida, permitiendo determinar los efectos básicos de equilibrio del flujo, como conservación de masa, de cantidad de movimiento y de energía. Dicho modelo se expresa como un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, las cuales revelan los parámetros dimensionales que gobiernan el comportamiento del flujo y la naturaleza del fluido [3] [2].

Al no existir para el caso general una solución analítica, los especialistas han generado diversos caminos, por ejemplo, se ha disminuido la complejidad de las ecuaciones diferenciales parciales, considerando algunas restricciones sobre el tipo de régimen, como flujo estacionario, o sobre su naturaleza, como flujo incompresible, las ecuaciones se simplifican y la solución se encuentra por métodos analíticos cuya expresión es sencilla. Otra restricción sobre su naturaleza es considerar el flujo no viscoso, llamado también flujo ideal, generando el modelo matemático llamado ecuación de Euler, el cual posee varias soluciones analíticas.

Sin embargo el comportamiento real de un fluido comprende distintos regímenes del flujo

como el constante ya sea laminar o turbulento, o el pulsante, o el oscilatorio. También comprende distintas naturalezas del fluido como el no elástico, elástico, viscoelástico o viscoso. Al asumir estas consideraciones las ecuaciones diferenciales parciales son no lineales, lo cual dificulta la búsqueda de métodos analíticos generales para su resolución, y cuando existe la solución comprende expresiones matemáticas complicadas, como combinaciones lineales de funciones de Bessel, cuya expresión está basada en series de potencia infinitas. Por ejemplo, un sólo término estaría conformado por,

$$J(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - a)^{k-\gamma}$$

con distintas variables y parámetros que contribuyen a extender la teoría del análisis para los distintos casos, si es el objetivo estar apegado a la realidad.

Por tanto, la búsqueda de técnicas matemáticas analíticas alternativas que contribuyan a la generación de soluciones más sencillas de interpretar y que posean parámetros adimensionales que consideren la mayor parte de los regímenes de comportamiento, así como las distintas naturalezas del fluido, son de gran ayuda para los especialistas en el estudio de la mecánica de fluidos o de reología, y por tanto objeto de estudio del presente trabajo.

En las siguientes secciones presentamos la definición del problema, los antecedentes, el objetivo de esta investigación y el esquema general de la tesis, en el cual describe de manera sintética los capítulos mediante los cuales se logró cumplir con el objetivo de este trabajo de investigación, así como las observaciones y conclusiones derivadas de la misma.

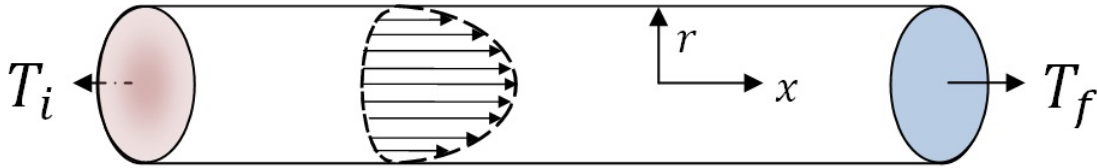
## 1.1. Definición del problema

Los estudios teóricos de mecánica de fluidos y de transferencia de calor se basan casi siempre en algún tipo de solución aproximada de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos asociados al sistema físico en estudio[4]. Hay dos enfoques básicos para la obtención de este tipo de soluciones. Una de ellas es introducir una aproximación discretizada, tal como en diferencias finitas, elementos finitos, o métodos espectrales, los cuales convierten las ecuaciones en derivadas parciales no lineales en un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales, y luego tratan de resolverlas numéricamente. Aunque este enfoque no deja de tener sus propias dificultades, a menudo es posible obtener soluciones en un amplio intervalo de parámetros. De hecho, en las manos de un investigador experimentado y cuidadoso, el uso de métodos numéricos ha llegado a un punto que a menudo puede ser utilizado como un complemento o incluso una sustitución para los experimentos de laboratorio. Por supuesto, hay que recordar que las soluciones numéricas son siempre aproximaciones de la solución exacta, su interpretación y uso deben ser tratados con cuidado debido a la propagación de errores en el cálculo computacional. La segunda clase de técnica que ha sido muy eficaz en el contexto de la mecánica de fluidos y la transferencia de calor o de masa, la cual es el objeto de estudio de este trabajo, es el método analítico conocido como técnica asintótica.

La idea central de este enfoque es obtener soluciones analíticas aproximadas basándose de una jerarquía sistemática de las aproximaciones de las ecuaciones básicas. Ya que el cálculo analítico a veces es más fácil o más conveniente que los métodos numéricos, los cuales pueden

requerir instalaciones de cómputo muy grandes. Una característica principal de este enfoque analítico es que a menudo produce mayor y más inmediatamente el conocimiento físico. Las aproximaciones analíticas también pueden servir como punto de referencia fundamental para los métodos numéricos [5].

La formulación de la aproximación asintótica que se presenta en esta investigación es para



**Figura 1.1:** Dispositivo cilíndrico con flujo unidireccional, donde  $t_i$  es la temperatura inicial,  $t_f$  la temperatura final,  $x$  dirección axial,  $r$  radio del tubo con  $t_i \gg t_f$ .

obtener las soluciones de las ecuaciones básicas del movimiento de fluidos, es decir, construir las aproximaciones asintóticas para los campos de velocidad y temperatura. Éstos se desarrollan en régimen oscilatorio, donde el fluido está contenido en un tubo cilíndrico aislado de sección transversal constante cuyos extremos tienen distinta temperatura como se muestra en la Figura 1.1.

## 1.2. Antecedentes

El fenómeno de flujo de fluido a través de un tubo ha sido muy estudiado, uno de los trabajos investigativos teórico experimental primordial es el realizado por Reynolds, donde analiza las circunstancias que determinan si el movimiento del agua es directo o sinuoso. Con su estudio generó el conocido número de Reynolds que es una relación adimensional de la velocidad, el diámetro del tubo y la viscosidad cinemática del fluido, Reynolds [6].

En el aspecto práctico de su investigación describe la relación de las leyes de la resistencia al movimiento del agua en las tuberías, en la cual generaliza la ley para todas las velocidades y todos los diámetros que está representada por una ecuación de dos términos, la ahora conocida viscosidad cinemática [3] [6].

El agua como fluido ha sido ampliamente estudiado e incluso tiene una rama de la física exclusivamente para su estudio, la hidrodinámica. Sin embargo, en la naturaleza existen diversos fluidos líquidos, los cuales poseen distintos grados de viscosidad. Así mismo, la naturaleza ha creado mecanismos de transporte para estos fluidos. Por ejemplo, internamente los mamíferos poseen un sistema de ramificaciones con forma de ductos cónicos o casi cilíndricos, llamadas venas, arterias y vasos capilares, por los cuales fluye el plasma sanguíneo. Este es un fluido líquido que está compuesto de una mezcla de sustancias que alimenta a todo el cuerpo.

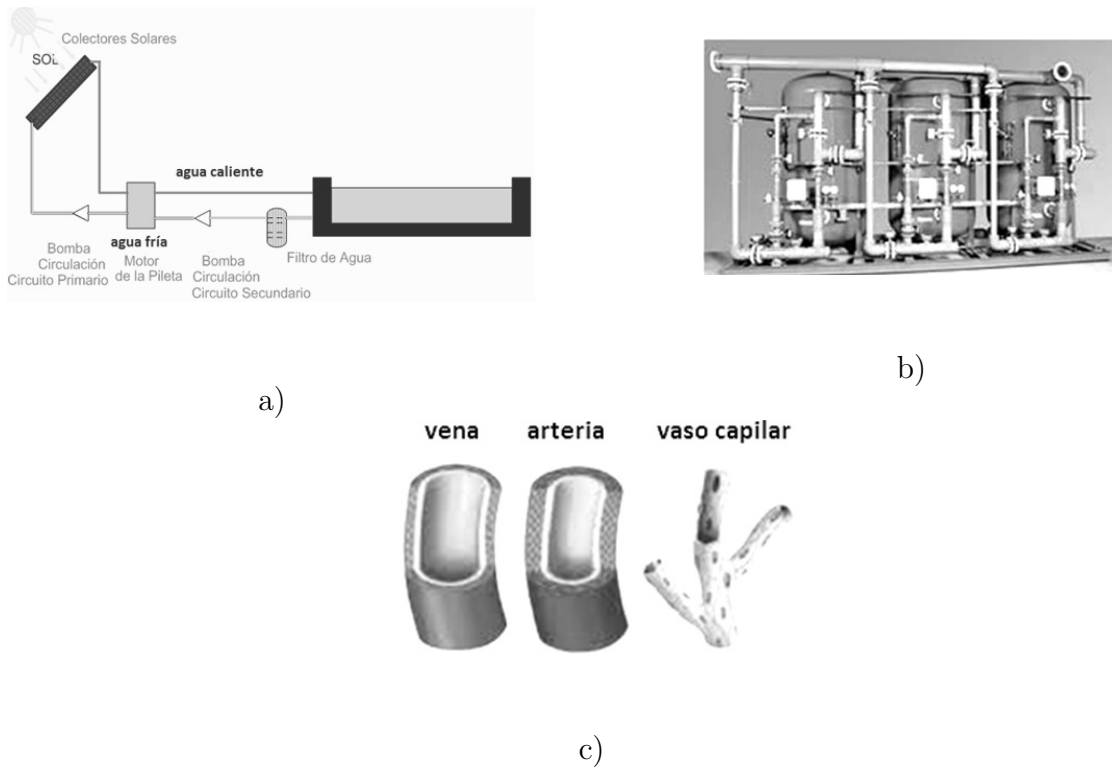
El hombre por su parte, imitando a la naturaleza ha diseñado distintos dispositivos cilíndricos para el transporte de fluidos, por ejemplo, para calentar el agua de piscinas con el fin de

generar un costo menor en el proceso para la industria turística. También para enfriar ciertos procesos químicos en la elaboración de bebidas en la industria alimentaria o en la elaboración de medicamentos en la industria farmacéutica, los cuales aun están en perfeccionamiento.

Las dimensiones de estos dispositivos cilindros abarcan distintos diámetros y longitud, por ejemplo en la industria hay dispositivos de gran longitud con diámetros muy amplios, como los usados para calentar agua en procesos químicos industriales o enfriamiento de calderas, unos ejemplos se muestran en las Figuras 1.2 a y b. Por el contrario las venas, arterias y vasos capilares en el cuerpo de los mamíferos son ductos de diámetro y longitud pequeños, en la Figura 1.2 c se muestra una ampliación de estos.

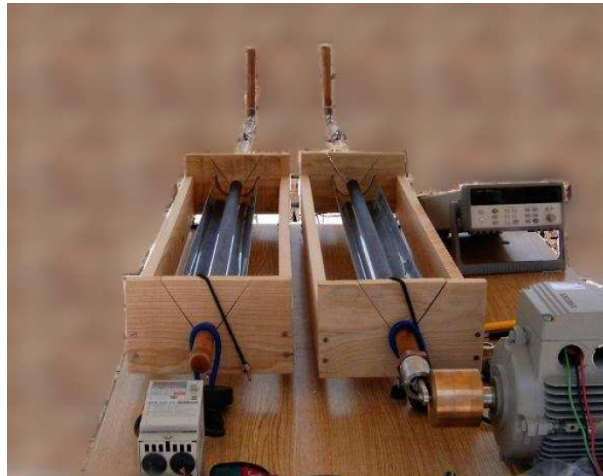
Los ductos varían en su firmeza y solidez, siendo mayormente rígidos los utilizados en la industria o flexibles y porosos como los vasos capilares en la naturaleza, cuya capacidad de expansión o contracción automática le permite mantener su estructura casi cilíndrica.

Los ductos cilíndricos son conectados a otros dispositivos que permiten llevar los fluidos de un sitio a otro, como las máquinas de bombeo para transportar a una cierta velocidad el agua, aire, gases refrigerantes, aceites, etc. El cuerpo de los mamíferos utiliza el corazón como mecanismo de bombeo y su movimiento se conoce como tren de pulso, el cual genera un flujo llamado pulsante. Cada minuto el corazón provoca cincuenta pulsos o más de casi la misma intensidad para llevar la sangre a todo el cuerpo a través de las venas, arterias y vasos capilares.



**Figura 1.2:** Forma de dispositivos para el transporte de fluidos con distintos propósitos. a) Para calentamiento o enfriamiento de fluidos en piscinas; b) Para enfriamiento de calderas y c) para el transporte de plasma en el sistema circulatorio.

La importancia de estudiar los fluidos a través de estos dispositivos es la mejora en el transporte ya sea de masa o de calor, esto se logra analizando cuál comportamiento del flujo de fluido es el adecuado para lograr estos objetivos. Por ejemplo los fluidos fluyen en distintas formas, pudiendo ser constante con dos variantes, laminar o turbulento. También se puede poner a oscilar a través de un gradiente de presiones, por ejemplo con una bomba, generando ya sea un flujo pulsante u oscilante. Un ejemplo es la investigación realizada por Lambert



**Figura 1.3:** Dispositivo de Lambert para análisis de transporte de calor en ducto cilíndrico aislado.

[7] [13], cuyo arreglo experimental está construido de tal forma que el fluido en el dispositivo de la izquierda de la Figura 1.3 se mantiene con flujo cero y el de la derecha se somete a oscilación con el fin de analizar, si poner a oscilar el flujo incrementa el transporte de calor.

Los distintos regímenes del comportamiento del flujo influyen en el transporte de calor. Así mismo, el tipo de fluido contribuye a mejorar dicho transporte. Por tanto, al realizar una investigación del comportamiento de un flujo se debe tomar en cuenta su régimen y su naturaleza. Si el modelo es matemático, entonces obtener para este modelo una forma explícita de estas características es ideal.

Diversos especialistas han realizado estudios generando amplio conocimiento sobre el transporte de fluidos dentro de dispositivos en ductos de forma cilíndrica. Por mencionar alguno de ellos, se tiene el caso del análisis de Chatwin [8] quien analizó como se dispersa un contaminan-

te en un flujo oscilatorio dentro de un tubo. Posteriormente Kurzweg [9] analizó el problema de la transferencia de calor encontrando que los flujos oscilatorios mejoran el transporte axial de calor. Mas tarde del Ríó y Castrejón [11] realizan estudios sobre la permeabilidad dinámica de fluidos los cuales se desarrollan en dispositivos cilíndricos capilares, a la par del Ríó y López [12] analizan la mejora de la respuesta dinámica de un fluido viscoelástico que fluye en un tubo. Lambert [7] [13] realiza estudios sobre fluidos viscoelásticos que oscilan en tubos dentro de un colector solar donde analiza la mejora de transporte de calor. Actualmente Serrano estudió el flujo pulsátil en tubos de sección circular cuya aplicación práctica se dirigió a mejorar la comprensión del flujo sanguíneo en arterias [18], sus estudios se basaron en los resultados obtenidos por J. R. Womersley sobre flujo pulsátil [19].

Estas investigaciones evolucionan desde sus inicios con un flujo unidireccional a través de un tubo, independiente del tiempo llamado flujo laminar, a la de un flujo al que se le aplica un gradiente de presiones, llamado flujo oscilatorio. Que si se considera su análisis tridimensional se transforma en un problema muy complicado en su expresión teórica. Las soluciones de las ecuaciones del modelo matemático de estos fenómenos físicos, son cada vez más complejas con el aumento de la velocidad del fluido líquido a través del cilindro. En general, para fluidos newtonianos, el objetivo básico es entender la física del flujo, la cual se describe mediante su movimiento y temperatura.

El movimiento del fluido en todas las circunstancias se rige por las ecuaciones de Navier Stokes. Los principales problemas de mecánica de fluidos y de transferencia de calor por

convección no están en la complejidad de los principios físicos implícitos, sino más bien en el intento de comprender y describir este fenómeno fascinante y complicado. Desde el punto de vista matemático, el problema principal no es la derivación de las ecuaciones que lo representa sino su solución.

Si bien crear dispositivos físicos para el análisis de este fenómeno es de gran interés y genera información en lo real concreto del fenómeno, estos no cubriría un experimento que incluyera todo el universo de posibilidades tanto para modelar todo tipo de tamaños en las dimensiones del dispositivo, así como para todo tipo de régimen del flujo y todo tipo de naturaleza del fluido, que de ser posible, esto generaría un gran costo en tiempo y recursos materiales.

Por ejemplo existen tres regímenes principales el estático, el constante laminar y el constante turbulento. Si tomamos sólo el laminar, este puede ponerse a pulsar u oscilar. Encontrar las frecuencias de pulsación u oscilación que generan la máxima velocidad del flujo o que genera un máximo transporte de calor, se transforma de un problema concreto discreto en lo real, a un problema real continuo, con un número infinito de posibilidades a analizar para abarcar todas las frecuencias, lo cual costaría mucho tiempo realizar.

Resolver una situación semejante, solo es posible con una de las más importantes herramientas creadas por el hombre, las matemáticas, que estan a disposición de los investigadores para crear mediante ellas modelos abstractos, construidos con ecuaciones de diversos tipos, que incluyen de los fenómenos físicos su geometría, sus propiedades físicas, el campo donde estos se desarrollan (velocidades, eléctrico, gravitacional, térmico, etc.) en el cual están incluidas

las escalas del espacio, del tiempo o ambas.

Estos modelos pueden resolverse y evaluarse continuamente para cada uno de los parámetros y variables que intervienen en el modelo e identificar cuales son los valores que optimizan el fenómeno. Por ejemplo, hallar las condiciones del régimen del flujo y la naturaleza del fluido que generan una máxima velocidad y/o un máximo transporte de calor.

Con este enfoque, utilizamos las herramientas matemáticas que nos permitieron encontrar de forma general las soluciones de los campos de velocidades y de temperaturas, la aproximación asintótica, que facilita el estudio de problemas complejos en los que aparece algún parámetro el cual se haga tender a un valor específico. Es decir, la aproximación a sintótica proviene de una expansión asintótica expresada como serie formal de funciones tomadas de una sucesión que tiene la propiedad de que al truncar la serie en un número finito de términos, proporciona una aproximación a una función dada cuando el argumento tiende a un valor particular. Dando lugar a una expresión finita de terminos. Que simplifica la evaluación de la solución obtenita y en consecuencia su análisis [20].

### **1.3. Objetivo**

Utilizar el método de aproximación asintótica para simplificar la expresión de las soluciones que modelan los campos de velocidad y de temperatura de un flujo, que a su vez incluyan parámetros adimensionales con los cuales se describa el comportamiento de distintos tipos de regímenes de flujo, naturaleza del fluido y dimensión del dispositivo donde se desarrolla.

## 1.4. Esquema general de la tesis

El desarrollo para la obtención de los resultados planteados en el objetivo de la presente investigación se exponen con la siguiente estructura.

**Capítulo 2.** Presentación y descripción del modelo matemático a resolver. Descripción de su solución analítica por método de Bessel, adimensionamiento de las ecuaciones de velocidad y la de temperatura con el fin de prepararlas para construir la nueva solución.

**Capítulo 3.** Presentación y descripción del método de aproximación asintótica. Obtención de las aproximaciones asintóticas para la velocidad y la temperatura para altas y bajas frecuencias de oscilación.

**Capítulo 4.** Análisis de las aproximaciones asintóticas de la velocidad y de la temperatura para distintos valores de los parámetros que intervienen en su modelo matemático de solución. Comparación de las aproximaciones asintóticas con la solución exacta.

**Capítulo 5.** Cálculo analítico y evaluación numérica de la difusividad térmica con las aproximaciones asintóticas obtenidas para la velocidad y la temperatura.

**Capítulo 6.** Desarrollo de conclusiones, observaciones y descripción del trabajo futuro.

# Capítulo 2

## Modelo Matemático

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fenómeno de flujo de fluido incompresible dentro de un dispositivo con temperatura distinta en los extremos del dispositivo son:

a) ecuación de balance de masa,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

b) ecuación de balance de cantidad de movimiento

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \mu \cdot \tau, \quad (2.2)$$

c) ecuación de balance de energía

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + \mu \Phi \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $\tau$  y  $T$  representan el vector velocidad, el vector de presiones, el tensor de esfuerzos viscosos y el vector de temperaturas, respectivamente. Mientras  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $c$  y  $k$  son la densidad,

la viscosidad dinámica, el calor específico y la conductividad térmica respectivamente, los cuales se consideran constantes. En la ecuación (2.3),  $\Phi$  representa la función de disipación y el término  $\mu\Phi$  es la disipación viscosa o razón de conversión irreversible de energía mecánica a energía interna vía efectos viscosos. Para el análisis este término será considerado despreciable debido a que sólo es importante cuando se trabaja con fluidos con viscosidad alta, como es el caso de los aceites. El tensor de esfuerzos viscosos  $\tau$  de la ecuación constitutiva (2.2) depende de la naturaleza del fluido de trabajo. En el caso de un Fluido Newtoniano está dado por el término

$$\tau = -\mu\nabla\mathbf{v} \quad (2.4)$$

Para el caso Viscoelástico se considera el modelo lineal de Maxwell [10], esto es,

$$t_m \frac{\partial\tau}{\partial t} = -\mu\nabla\mathbf{v} - \tau \quad (2.5)$$

donde  $t_m$  es el tiempo de relajación de Maxwell. Sí  $t_m \rightarrow 0$  la ecuación constitutiva del fluido Newtoniano se recupera.

Se considera que el flujo se desarrolla sólo en la dirección axial y que el campo de velocidad no depende de la coordenada axial. Tal suposición es razonable cuando se analiza el flujo en un tubo recto en una región suficientemente alejada de los extremos del tubo. Además se asume que las condiciones del flujo son tales que no existe desprendimiento de capa límite. En tal caso, tenemos que el vector velocidad está expresado como  $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$  de manera que se satisface automáticamente la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles y el término no lineal de la ecuación (2.2) es idénticamente cero, en consecuencia la ecuación de

cantidad de movimiento se reduce a

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \cdot \tau, \quad (2.6)$$

y la ecuación de energía, despreciando la disipación viscosa, queda como

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (2.7)$$

siendo  $\kappa = \frac{k}{\rho c}$  la difusividad térmica del fluido. Puesto que las ecuaciones (2.1) y (2.6) están desacopladas de la ecuación (2.7), el campo de velocidades puede ser determinado a partir de la ecuación (2.6) usando las relaciones constitutivas (2.4) o (2.5) y la condición de no deslizamiento en la pared del tubo. Una vez obtenido el campo de velocidades se determina el de temperaturas.

En la Sección 2.1 se presentan las soluciones analíticas exactas que se han obtenido para las ecuaciones (2.6) y (2.7), así como algunas de sus aplicaciones. En la Sección 2.2 se adimensiona el sistema para reducir el número y complejidad de las variables del sistema, con el fin de simplificar y facilitar su estudio. Posteriormente en la Sección 2.3, se presenta el desarrollo de la obtención de la aproximación asintótica como solución de los perfiles de velocidad y los de temperatura.

## 2.1. Solución por método de Bessel.

Distintas consideraciones, procedimientos analíticos y numéricos se han aplicado para la resolución de éstas ecuaciones [7] [11]. Los investigadores coinciden en realizar un cambio

a coordenadas cilíndricas, debido a la forma del dispositivo donde se desarrolla el flujo, así como el cambio de dominio del tiempo a la frecuencia para facilitar su resolución y análisis, quedando expresada la ecuación (2.6) como

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{\rho(t_m\omega^2 - i\omega)}{\mu} V = \frac{1 + i\omega t_m}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (2.8)$$

cuyas condiciones de frontera son  $V(r = a, \omega) = 0$  y  $V(r = 0, \omega) = \text{arbitraria}$ . Así mismo, se asume que las oscilaciones del fluido generan un gradiente grande de temperatura en la dirección radial lo que provoca que el fluido cercano a la región de las paredes del tubo tenga una temperatura diferente de aquella en el centro del flujo, dando como resultado que grandes cantidades de calor se transfieran radialmente en cada ciclo y, por lo tanto, sean transportadas axialmente. Debido a lo anterior, el gradiente transversal de temperatura es mucho mayor que el gradiente axial, de tal forma que la difusión de calor axial es mucho menor que la radial, así  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$  es mucho mayor que  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , con lo cual se asume que  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$  y  $\frac{\partial T}{\partial x} = \gamma$  es constante. Así la ecuación (2.7) se expresada por,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{j\omega}{\kappa} T = \frac{v_x}{\kappa} \gamma \quad (2.9)$$

Las ecuaciones (2.8) y (2.9) se consideran Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no Homogeneas correspondientes a ecuaciones de Bessel de orden cero, cuyas soluciones exactas se presentan en las siguientes secciones.

### 2.1.1. Solución de la ecuación de balance de cantidad de movimiento.

La solución de la ecuación (2.8) tiene la forma

$$V(r, \omega) = V_c(r, \omega) + V_p(r, \omega) \quad (2.10)$$

donde  $V_c(r, \omega)$  corresponde a la parte de la EDO Homogenea y  $V_p(r, \omega)$  a la integral particular de la EDO de la parte no homogenea, así

$$V_c(r, \omega) = c_1 J_0(\beta_v r) + c_2 Y_0(\beta_v r)$$

por tanto

$$V(r, \omega) = c_1 J_0(\beta_v r) + c_2 Y_0(\beta_v r) + V_p(r, \omega)$$

donde  $J_0$  y  $Y_0$  son las funciones de Bessel del primer y segundo tipo, respectivamente, mientras que  $\beta_v$  es un parámetro que aparece en las ecuaciones de Bessel para la velocidad, expresado como

$$\beta_v^2(\omega) = \begin{cases} \frac{-i\omega\rho}{\mu} & \text{caso Newtoniano} \\ \frac{\rho}{\mu t_m} [(t_m\omega)^2 - i\omega t_m] & \text{caso Viscoelástico} \end{cases} \quad (2.11)$$

Como  $Y_0(r)$  diverge cuando  $r = 0$ , y la solución debe ser acotada en ese punto, entonces se asume que  $c_2 = 0$ , con lo cual la solución general exacta queda expresada como

$$V(r, \omega) = \phi(\omega) \left[ 1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} \frac{dP}{dx} \right] \quad (2.12)$$

donde,

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_v^2 \mu} & \text{caso Newtoniano} \\ \frac{1 + i\omega t_m}{\beta_v^2 \mu} & \text{caso Viscoelástico} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$J_0(\beta_v r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\beta_v r}{2} \right)^{2n}$$

y

$$J_0(\beta_v a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\beta_v a}{2} \right)^{2n}$$

con  $\Gamma(n) = n!$ . Ésta solución permite un tratamiento analítico del problema. Sin embargo la expresión infinita de las funciones  $J_0$  dificultan su cálculo, aunado a ello, se encuentran los valores de los tres parámetros dimensionales que aumentan los casos posibles para su prueba y evaluación numérica. Lo cual empuja al especialista a escoger un método eficaz de truncamiento de las formas  $J_0$  y restringir los valores de los parámetros dimensionales.

### 2.1.2. Solución de la ecuación de balance de energía.

La expresión de la ecuación (2.9) también corresponde a una EDO no Homogénea, sin embargo para esta ecuación se propone la solución

$$T(r, x, t) = \gamma x + \gamma f(r, t)$$

retomando el estudio de Kurzweg de 1985 [9], que supone un gradiente de temperatura axial constante, la temperatura  $T$  toma la forma,

$$T(r, x, t) = \gamma [x + ag(r)e^{-i\omega t}]$$

siendo  $a$  el radio interno del tubo y  $g$  una función que describe la dependencia radial que tiene la temperatura, y está dada por,

$$g(r) = \frac{\Phi(\omega) P_x}{\kappa(\beta_v^2 - \beta_T^2)} \left[ \frac{\beta_v J_1(\beta_v a) J_0(\beta_T r)}{\beta_T J_0(\beta_v a) J_1(\beta_T a)} + \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} + \frac{\beta_v^2 - \beta_T^2}{\beta_T^2} \right] \quad (2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} J_1(\beta_v a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(2+n)} \left( \frac{\beta_v a}{2} \right)^{2n+1} \\ J_0(\beta_T r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\beta_T r}{2} \right)^{2n} \\ J_0(\beta_T a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\beta_T a}{2} \right)^{2n} \\ J_1(\beta_T a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(2+n)} \left( \frac{\beta_T a}{2} \right)^{2n+1} \end{aligned}$$

con  $\Gamma(n) = n!$ ,  $\beta_T^2 = i\frac{\omega}{\kappa}$  y  $J_0(\beta_v r)$ ,  $J_0(\beta_v a)$ ,  $\Phi(\omega)$ ,  $\beta_v$  definidas como en la ecuación (2.12).

Esta solución conserva las condiciones de frontera para  $T$ , y por tanto para  $g$ . Se asume

que existe simetría con respecto al eje del dispositivo en  $(r = 0)$  y que existe una frontera adiabática en  $(r = a)$ , es decir,

$$\begin{aligned}g'(r = 0) &= 0 \\g'(r = a) &= 0\end{aligned}\tag{2.15}$$

Bajo estas condiciones fue posible establecer la anterior simplificación dada por la ecuación (2.14), que es una solución aproximada del campo de temperaturas y permite un tratamiento analítico del problema. Sin embargo, para efectos de análisis, las funciones de Bessel dadas por los términos  $J_0$  y  $J_1$  dificultan, al igual que en la velocidad, los cálculos, porque su expresión analítica es infinita, teniendo que recurrir de nueva cuenta a la búsqueda de simplificaciones mediante otras metodologías, y en consecuencia complicando el análisis. Así mismo, la ecuación contiene cuatro parámetros dimensionales que hay que considerar para las evaluaciones numéricas de la temperatura extendiendo el trabajo de análisis.

## 2.2. Adimensionamiento

El análisis dimensional, es un método teórico útil para reducir una serie de variables dimensionales en un número más reducido de grupos adimensionales [3] [14] [15]. Con ello también se logra presentar de forma compacta las soluciones analíticas. Básicamente reduce en número y complejidad las variables experimentales que intervienen en un fenómeno físico dado, como el considerado en esta investigación. Particularmente el fenómeno posee siete variables

dimensionales, la velocidad  $v$ , la presión  $p$ , el tiempo  $t$ , el tiempo de relajación  $t_m$ , la temperatura  $T$ , el radio del tubo  $r$  y la longitud axial  $x$ , las cuales están definidas a través de cuatro variables primarias, masa, tiempo, temperatura y longitud que gobiernan dimensionalmente al fenómeno. Sean  $a$  la longitud del radio del tubo,  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  la viscosidad cinemática, para definir las siguientes variables dimensionales,  $V_c = \frac{P_x a^2}{\mu}$  velocidad característica y  $t_c = \frac{a^2}{\nu}$  tiempo característico, además sea  $\omega_c = \omega t_m$  la frecuencia característica, las cuales se usan para establecer las siguientes variables adimensionales  $\bar{x} = \frac{x}{a}$ ,  $\bar{r} = \frac{r}{a}$ ,  $\bar{V} = \frac{V}{V_c}$ ,  $\bar{T} = \frac{T}{a\gamma}$  y  $\bar{t} = \frac{t}{t_c}$ .

Se presentan en las siguientes secciones los desarrollos para adimensionar las ecuaciones constitutivas de balance de cantidad de movimiento y balancen de energía.

### 2.2.1. Adimensionamiento de la ecuación de balance de cantidad de movimiento

La ecuación (2.8), expresada para este fenómeno como

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{\rho(t_m \omega^2 - i\omega)}{\mu} V = \frac{1 + i\omega t_m}{\mu} \frac{dP}{dx}$$

Se transforma al sustituir las variables adimensionales en

$$\begin{aligned} \frac{V_c}{a^2} \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{r}^2} + \frac{V_c}{a^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} + \frac{\rho}{\mu} \left( \frac{t_m \omega_c^2}{t_m^2} - i \frac{\omega_c}{t_m} \right) V_c \bar{V} &= \frac{1 + i \frac{\omega_c}{t_m} t_m}{\mu} \frac{dP}{dx} \\ \frac{V_c}{a^2} \left[ \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} + \frac{\rho a^2}{\mu t_m} (\omega_c^2 - i \omega_c) \bar{V} \right] &= \frac{i \omega_c + 1}{\mu} \frac{dP}{dx} \\ \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} + \frac{\rho a^2}{\mu t_m} (\omega_c^2 - i \omega_c) \bar{V} &= \frac{a^2}{\mu V_c} (i \omega_c + 1) \frac{dP}{dx} \\ \frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} - \frac{\rho a^2 \omega_c}{\mu t_m} i (i \omega_c + 1) \bar{V} &= \frac{a^2}{\mu V_c} (i \omega_c + 1) \frac{dP}{dx} \end{aligned}$$

Si en la última expresión del desarrollo se reemplaza por su equivalente a  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ ,  $t_c = \frac{a^2}{\nu}$ ,

$t = t_c \bar{t}$  y se asigna  $\frac{dP}{dx} = P_x e^{-i \omega t} = P_x e^{-i \omega t_c \bar{t}} = P_x e^{-i \frac{a^2 \omega}{\nu} \bar{t}}$ , la ecuación se expresa como

$$\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} - i \frac{a^2 \omega}{\nu} (i \omega_c + 1) \bar{V} = \frac{a^2 P_x}{\mu V_c} (i \omega_c + 1) e^{-i \frac{a^2 \omega}{\nu} \bar{t}} \quad (2.16)$$

Renombrando en la ecuación anterior a  $\frac{a^2 \omega}{\nu} = \alpha^2$ , y como  $\frac{a^2 P_x}{\mu V_c} = 1$ , la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} - i \alpha^2 (i \omega_c + 1) \bar{V} = (i \omega_c + 1) e^{-i \alpha^2 \bar{t}} \quad (2.17)$$

Asignando  $De = \frac{\nu t_m}{a^2}$ , entonces  $\alpha^2 = \frac{\omega_c}{De}$  y en consecuencia  $\omega_c = \alpha^2 De$ . Sustituyendo  $\omega_c$  en la

ecuación (2.17) se tiene que

$$\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} - i \alpha^2 (i \alpha^2 De + 1) \bar{V} = (i \alpha^2 De + 1) e^{-i \alpha^2 \bar{t}} \quad (2.18)$$

Para simplificar aún más la expresión de la ecuación diferencial, se renombran los coeficientes adimensionales, tal que,  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} = \alpha^2(i\alpha^2 De + 1)$  y  $\mathcal{P}_{\alpha^2, De} = (i\alpha^2 De + 1)$  con lo cual la expresión de la ecuación se expresa de forma sintética y elegante,

$$\frac{d^2\bar{V}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} - i\mathcal{R}_{\alpha^2, De}\bar{V} = \mathcal{P}_{\alpha^2, De}e^{-i\alpha^2\bar{t}} \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) está expresada sólo en términos adimensionales, y las condiciones de frontera se conservan, es decir,

$$\bar{V}(\bar{r} = 1) = 0, \text{ no deslizamiento}$$

$$\bar{V}(\bar{r} = 0) = \text{finita, acotamiento}$$

La importancia de ésta expresión está en que los parámetros  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$  y  $\mathcal{P}_{\alpha^2, De}$  dependen solo de dos parámetros adimensionales,  $\alpha$ , cuyo valor como ya se mencionó, establece el régimen en que se desarrolla el flujo, y  $De$  brinda la naturaleza del fluido. Proporcionando con ello la capacidad de analizar distintos tipos de flujos de fluido en forma general. En el siguiente capítulo se construye su resolución mediante el método de aproximación asintótica y se analizan los resultado bajo los criterios de estos dos parámetros.

### 2.2.2. Adimensionamiento de la ecuación de balance de energía.

La forma analítica de la ecuación (2.9) para los propósitos del adimensionamiento se expresa como,

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{i\omega}{\kappa} T = \frac{V}{\kappa} \gamma \quad (2.20)$$

Al sustituir las variables adimensionales en (2.20) se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (\bar{T} a \gamma)}{d(a\bar{r})^2} + \frac{1}{a\bar{r}} \frac{d(\bar{T} a \gamma)}{d(a\bar{r})} - \frac{i\omega}{\kappa} \bar{T} a \gamma &= \frac{V\gamma}{\kappa} \\ \frac{a\gamma}{a^2} \frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{r}^2} + \frac{a\gamma}{a^2 \bar{r}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{r}} - \frac{i\omega a \gamma}{\kappa} \bar{T} &= \frac{V\gamma}{\kappa} \\ \frac{\gamma}{a} \frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{r}^2} + \frac{\gamma}{a\bar{r}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{r}} - \frac{i\omega a \gamma}{\kappa} \bar{T} &= \frac{V\gamma}{\kappa} \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación por el término  $\frac{a}{\gamma}$ , se reduce a

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{r}} - \frac{i\omega a^2}{\kappa} \bar{T} = \frac{Va}{\kappa}$$

Introduciendo  $\nu$  y sustituyendo  $T_c$  por su equivalente,  $a\gamma$ , en la ecuación anterior, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{r}} - \frac{i\omega a^2 \nu}{\kappa \nu} \bar{T} &= \frac{Va^2 \gamma}{\kappa a \gamma} \\ \frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{r}} - \frac{i\nu a^2 \omega}{\kappa \nu} \bar{T} &= \frac{Va}{\kappa} \end{aligned}$$

Como  $\alpha^2 = \frac{a^2 \omega}{\nu}$  y  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$  sustituyendo esos valores en la ecuación anterior para tener la forma simplificada siguiente

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{r}} - i\alpha^2 Pr \bar{T} = \frac{Va}{\kappa} \quad (2.21)$$

Si se toma  $Pe_L = \frac{aV}{\kappa}$ , y además se considera su equivalencia para difusión térmica donde

$Pe_L = RePr$ , la ecuación (2.19) queda expresada como

$$\frac{d^2\bar{T}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{r}} - j\alpha^2 Pr\bar{T} = RePr \quad (2.22)$$

La ecuación adimensional (2.22) para la temperatura, se asumirá que cumple con las siguientes condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{r} = 0) &= \textit{finita} \\ \bar{T}(\bar{r} = 1) &= \bar{T}_w \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $\bar{T}_w$ , es la temperatura de la pared del tubo.

La estructura analítica de esta ecuación se encuentra regida por tres números adimensionales, uno es  $\alpha$ , Womersley, ya mencionado en la sección anterior, el cual representa la relación entre la frecuencia del flujo y los efectos viscosos, brindando el tipo de oscilación en que se desarrolla el flujo; otro es  $Re$  número de Reynolds, cuyo valor está relacionado con el tipo de régimen en que se desarrolla el flujo, que puede ser laminar, transitorio, turbulento o una transición respectiva entre ellos; y  $Pr$  número de Prandl mediante el cual se relacionan la viscosidad cinemática del flujo y la velocidad de difusión o difusividad térmica, así un valor elevado de  $Pr$  indica que la transferencia de calor por convección es mucho mayor que la de conducción.

Una vez planteadas las dos ecuaciones adimensionales en el siguiente capítulo se define el

método de aproximación asintótica y posteriormente se presentan los desarrollos de la obtención de las aproximaciones asintóticas a los perfiles de velocidad y los de temperatura, para los criterios relacionados con el tipo de régimen en que se desarrolla el flujo y la naturaleza en la que se presenta el fluido.

# Capítulo 3

## Aproximación asintótica.

En esta capítulo se presenta el método general para obtener una solución de una EDO no Lineal adimensional mediante el método de aproximación o solución asintótica, considerando el comportamiento a escala. Dicha solución se obtiene a partir de las ecuaciones que gobiernan el flujo de fluido oscilatorio dentro de un dispositivo con forma tubular y sus condiciones de frontera. El análisis de dicha solución se enfoca para los distintos valores de los números adimensionales  $\alpha$ ,  $De$ ,  $Re$  y  $Pr$  con los cuales se caracterizarán los perfiles de velocidad y de temperatura del fenómeno en cuestión.

### 3.1. Aproximación asintótica la de velocidad.

El análisis que conduce a la solución analítica por el método de Bessel, y que es el más utilizado en el campo de la investigación [7] [12] [13], es sencillo, sólo se requiere el recono-

cimiento de las ecuaciones de Bessel de orden cero dentro de la EDO, y la forma general, de las soluciones  $J_0(v)$  y  $Y_0(v)$ . Sin embargo, la evaluación de esta solución para cualquier frecuencia adimensional arbitraria de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$  requiere un esfuerzo considerable, por lo tanto sólo se toma en cuenta el caso límite de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \ll 1$ . La solución para  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \gg 1$  es muy difícil de obtener de la solución exacta. Así la aproximación asintótica se basa en despreciar los términos que tienden asintóticamente hacer pequeños en comparación con otros términos en la solución. Esto permite analizar el fenómeno tanto para valores  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \ll 1$  como para  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \gg 1$ , ambos casos límites, como se podrá apreciar en los siguientes desarrollos.

### 3.1.1. Aproximación Asintótica de la velocidad para $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \ll 1$ .

Proponiendo  $\bar{V} = e^{-i\alpha^2 \bar{t}} H(\bar{r})$  como solución de la ecuación (2.19), se obtiene al sustituirla,

$$\frac{d^2 H}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH}{d\bar{r}} - i\mathcal{R}_{\alpha^2, De} H = \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De} e^{-i\alpha^2 \bar{t}}}{e^{-i\alpha^2 \bar{t}}}$$

simplificando,

$$\frac{d^2 H}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH}{d\bar{r}} - i\mathcal{R}_{\alpha^2, De} H = \mathcal{P}_{\alpha^2, De} \quad (3.1)$$

cuyas condiciones de frontera son:

$$H(\bar{r} = 1) = 0, \text{ no deslizamiento}$$

$$H(\bar{r} = 0) = \text{finita, acotamiento}$$

La solución asintótica para la ecuación (3.1) con esas condiciones de frontera, se obtiene proponiendo  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \rightarrow 0$ , lo cual implica que  $\mathcal{P}_{\alpha^2, De} \rightarrow 1$ . Si aplicamos este límite a la ecuación (3.1), esta se reduce a la forma

$$\frac{d^2 H}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH}{d\bar{r}} = 1 \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) tiene por solución

$$H_0(\bar{r}) = \frac{1}{4}(\bar{r}^2 - 1) \quad (3.3)$$

y una primer solución de la velocidad está dada por,

$$\bar{V}(\bar{r}) = \frac{1}{4}(\bar{r}^2 - 1)e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$$

Si se toma solo la parte imaginaria de  $\bar{V}$ , entonces

$$\bar{V}(\bar{r}) = \frac{1}{4}(1 - \bar{r}^2)\text{sen}(\alpha^2 \bar{t}) \quad (3.4)$$

ésta solución modela el flujo constante oscilatorio, es decir, que si  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \rightarrow 0$ , el problema se reduce a un flujo de Poiseuille cuasiestacionario con un gradiente de presión senoidal instantáneo. Este resultado no es sorprendente, pero si cabe señalar, que la solución (3.4) fue más fácil de obtener en este caso, ya que directamente se aproximó a la ecuación diferencial en lugar de resolver primero el problema general y luego hallar una aproximación a dicha solución.

Por supuesto, que el caso límite, no contiene ninguna influencia de la inercia. Para determinar

esos efectos pequeños de la inercia, usamos valores de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$  pequeños pero distintos de cero, y aplicamos una solución aproximada de  $H(\bar{r})$  cuya forma es una expansión asintótica, en que sus términos sucesivos son proporcionales a  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , tal que la solución aproximada es una expansión expresada como,

$$H(\bar{r}) = H_0(\bar{r}) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} H_1(\bar{r}) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 H_2(\bar{r}) + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) \quad (3.5)$$

$H(\bar{r})$  es regular, ya que tiene la misma forma en todo el dominio,  $0 \leq \bar{r} \leq 1$ . El término  $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3)$  converge a cero cuando  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \rightarrow 0$  y representa todos los términos de  $H(\bar{r})$  con potencias de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$  mayores de 2. Sí en la ecuación (2.21) se sustituye la ecuación (3.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_0}{d\bar{r}^2} + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{d^2 H_1}{d\bar{r}^2} + \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{d^2 H_2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH_0}{d\bar{r}} + \\ \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH_1}{d\bar{r}} + \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{dH_2}{d\bar{r}} - i\mathcal{R}_{\alpha^2, De} H_0 - \\ i\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 H_1 + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) = \mathcal{P}_{\alpha^2, De} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3)$  se considera despreciable. Sustituyendo en (3.5) las condiciones de frontera, se obtiene,

$$H_0(1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} H_1(1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 H_2(1) + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) = 0 \quad (3.7)$$

Asumiendo que el parámetro  $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3)$  es asintóticamente pequeño pero a su vez arbitrario, esto es, que las soluciones (3.4) y (3.5) se satisfacen para cada valor pequeño, pero arbitrario

de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$ . Reescribiendo la ecuación (3.6) en la forma

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_0}{d\bar{r}} \right) - \mathcal{P}_{\alpha^2, De} \right] + \\ & \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) - iH_0 \right] + \\ & \mathcal{R}_{\alpha^2 De}^2 \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) - iH_1 \right] + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Es esta última ecuación se supone que los términos en cada nivel de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$ , individualmente tienden a cero. Además se asume que  $H_0(1) = H_1(1) = H_2(1) = 0$ . Para obtener la forma de las funciones  $H_1(\bar{r})$  y  $H_2(\bar{r})$  se considera que se cumple las siguientes igualdades.

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = iH_0, H_1(1) = 0 \text{ y } H_1(0) = \textit{finita} \quad (3.9)$$

y

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = iH_1, H_2(1) = 0 \text{ y } H_2(0) \textit{ acotado} \quad (3.10)$$

con  $H_0$  dado por (3.3), se obtiene la solución para (3.9) integrando dos veces con respecto de  $\bar{r}$  y aplicando las condiciones de frontera, se tiene como resultado,

$$H_1 = \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) \quad (3.11)$$

Considerando a  $H_1$  dada por (3.11), y realizando un proceso similar, la solución de la ecuación (3.10) esta dada por

$$H_2 = -\frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \quad (3.12)$$

Sustituyendo las expresiones de  $H_0$ ,  $H_1$  y  $H_2$  en la expansión asintótica (3.7) se tiene que

$H(\bar{r})$  toma la forma

$$H(\bar{r}) = \frac{1}{4}(\bar{r}^2 - 1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) \quad (3.13)$$

Ahora, sustituyendo en la solución propuesta para la expansión  $\bar{V} = H(\bar{r}) e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$ , se obtiene,

$$\bar{V}(\bar{r}) = \left[ \frac{1}{4}(\bar{r}^2 - 1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \quad (3.14)$$

Esta última ecuación es la aproximación asintótica de la velocidad para valores de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \ll 1$ , ella modela la velocidad de un flujo desarrollado a bajas frecuencias. La forma analítica de la velocidad se ha reducido drásticamente, y hay una simplicidad contrastante en comparación con la solución proporcionada por el método de Bessel. El desarrollo completo para la obtención de esta expansión asintótica se encuentra descrita a detalle en el Apéndice A. En la siguiente sección se presenta el desarrollo de la expansión para altas frecuencias.

### 3.1.2. Aproximación Asintótica de la velocidad para $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \gg 1$

Cuando en el movimiento del fluido existe un gradiente de presión, la aceleración no puede exceder al gradiente de presión. En su lugar, se espera que las condiciones de aceleración y el gradiente de presión se mantengan en equilibrio, incluso cuando  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \rightarrow \infty$ . Para construir

la aproximación asintótica a la velocidad para altas frecuencias se propone la velocidad,

$$\bar{V}(\bar{r}) = \bar{H}(\bar{r})e^{-i\alpha^2\bar{t}}$$

sustituyendola en la ecuación (2.18) esta queda ahora expresada como,

$$\frac{d^2\bar{H}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{d\bar{H}}{d\bar{r}} - i\mathcal{R}_{\alpha^2,De}\bar{H} = \mathcal{P}_{\alpha^2,De} \quad (3.15)$$

Se requiere que la forma de  $\bar{H}$  converga conforme aumente el valor de  $\mathcal{R}_{\alpha^2,De}$ , entonces para este efecto se propone,

$$\bar{H}(\bar{r}) = \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2,De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2,De}}H \quad (3.16)$$

Sustituyendo  $H$  en la ecuación (3.15) se obtiene,

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{\alpha^2,De}}\frac{d^2H}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\mathcal{R}_{\alpha^2,De}}\frac{1}{\bar{r}}\frac{dH}{d\bar{r}} - iH = 1 \quad (3.17)$$

Sí hacemos tender  $\mathcal{R}_{\alpha^2,De} \rightarrow \infty$  entonces la ecuación (3.17) se reduce ha

$$-iH = 1$$

Por lo tanto

$$H_0(\bar{r}) = i \quad (3.18)$$

esta es una primera aproximación de la solución, la cual implica el balance entre los términos de aceleración y el gradiente de presión. A través de esta se propone la aproximación asintótica mediante la siguiente expansión que se asume como regular,

$$H = H_0(\bar{r}) + \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2,De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2,De}}H_1(\bar{r}) + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\mathcal{P}_{\alpha^2,De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2,De}}\right)^2\right] \quad (3.19)$$

Si sustituimos  $\bar{H}$  en la ecuación en (3.16) se tiene que

$$\begin{aligned}
\bar{H}(\bar{r}) &= \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} H(\bar{r}) \\
&= \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} \left[ H_0(\bar{r}) + \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} H_1(\bar{r}) + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^{-2}) \right] \\
&= \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} H_0 + \left( \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} \right)^2 H_1(\bar{r}) + \mathcal{O} \left[ \left( \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} \right)^2 \right] \\
&= \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} H_0 + \mathcal{O} \left[ \left( \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

En ésta última expresión de  $\bar{H}(\bar{r})$ , el término  $\mathcal{O} \left[ \left( \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} \right)^2 \right]$  se considera despreciable. Entonces al sustituir  $H_0$  en  $\bar{H}(\bar{r})$  se obtiene

$$\bar{H}(\bar{r}) = \frac{i\mathcal{P}_{\alpha^2, De}}{\mathcal{R}_{\alpha^2, De}} \quad (3.20)$$

Cómo  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} = \alpha^2(i\alpha^2 De + 1)$  y  $\mathcal{P}_{\alpha^2, De} = (i\alpha^2 De + 1)$ , entonces

$$\bar{H}(\bar{r}) = \frac{i}{\alpha^2} \quad (3.21)$$

Como  $\bar{V}(\bar{r}) = \bar{H}(\bar{r})e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$ , sustituyendo  $\bar{H}(\bar{r})$ , se obtiene

$$\bar{V} = \frac{i}{\alpha^2} e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \quad (3.22)$$

Ésta es la aproximación asintótica para la velocidad cuando  $\mathcal{R}_{\alpha^2 De} \rightarrow \infty$ , que modela un flujo oscilatorio en altas frecuencias. Su forma analítica es sintética y evidencia la dependencia de la velocidad con la frecuencia de oscilación. Su evaluación numérica es muy sencilla. En el siguiente capítulo se presenta un análisis de ambas aproximaciones asintóticas a la velocidad para distintos valores de los parámetros adimensionales  $\alpha$ ,  $De$  y  $t_c$ .

## 3.2. Aproximación asintótica de la temperatura

Siguiendo un procedimiento semejante para la obtención de las aproximaciones asintóticas para la velocidad con los dos casos límites analizados para  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \rightarrow 0$  y  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \rightarrow \infty$ , para la temperatura haremos suposiciones similares, sólo que ahora los casos límites serán: bajas frecuencias  $\alpha \rightarrow 0$  y altas frecuencias  $\alpha \rightarrow \infty$ .

### 3.2.1. Aproximación asintótica de la temperatura para bajas frecuencias, $\alpha \rightarrow 0$ .

Para cumplir con los requerimiento de las condiciones de frontera en la construcción de la aproximación asintótica se realiza un renombramiento de la variable  $\bar{T}$ , cuyas condiciones en este caso son

$$\bar{T}(\bar{r} = 1) = \bar{T}_w$$

$$T(\bar{r} = 0) = \textit{finita}$$

Sea  $\bar{T}^* = \bar{T} - \bar{T}_w$ . Sustituyendo  $\bar{T} = \bar{T}^* + \bar{T}_w$  en la ecuación (2.22) que modela las temperaturas, ésta queda ahora expresada como,

$$\frac{d^2 \bar{T}^*}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{T}^*}{d\bar{r}} - i\alpha^2 Pr \bar{T}^* = Pr(Re + i\alpha^2 \bar{T}_w) \quad (3.23)$$

cuyas condiciones de frontera ahora son

$$\bar{T}^*(\bar{r} = 1) = 0$$

$$\bar{T}^*(\bar{r} = 0) = \textit{finita}$$

Asumiendo como una solución al perfil de temperaturas  $\bar{T}^* = e^{-i\alpha^2\bar{t}}H(\bar{r})$ . Cuyas condiciones de frontera estan definidas como

$$H(\bar{r} = 1) = 0$$

$$H(\bar{r} = 0) = \textit{finita}$$

Sustituyendo  $\bar{T}^*$  en la ecuación (3.23) se obtiene,

$$\frac{d^2\bar{H}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{d\bar{H}}{d\bar{r}} - i\alpha^2 Pr\bar{H} = Pr(Re + i\alpha^2\bar{T}_w)e^{i\alpha^2\bar{t}} \quad (3.24)$$

Para construir la forma analítica de  $H(\bar{r})$  a bajas frecuencias, se asume que  $\alpha \rightarrow 0$ , con lo cual la ecuación anterior se reduce a,

$$\frac{d^2\bar{H}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{d\bar{H}}{d\bar{r}} = PrRe \quad (3.25)$$

Para efectos de análisis y búsqueda de la aproximación asintótica, se utilizó las condiciones iniciales para  $\bar{H}$  y se procedió entonces a encontrar de forma similar la componente  $\bar{H}_0(\bar{r})$  de la ecuación (3.25), con la cuál se construyen todos los términos de la aproximación asintótica.

A través de la metodología se obtuvo,

$$\bar{H}_0 = \frac{PrRe}{4}(\bar{r}^2 - 1) \quad (3.26)$$

Con esa expresión de  $\bar{H}_0$  se obtiene la aproximación asintótica para la temperatura, que toma la siguiente estructura analítica.

$$H(\bar{r}) = \frac{PrPr}{4}(\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + \mathcal{O}(\alpha^6 Pr^3)$$

El procedimiento se encuentra completamente desarrollado a detalle en el apéndice B.

Como  $\alpha \rightarrow 0$  entonces  $\mathcal{O}(\alpha^6 Pr^3)$  se considera despreciable. Sustituyendo la  $H(\bar{r})$  a la solución propuesta  $\bar{T}^* = e^{-i\alpha^2 \bar{t}} H(\bar{r})$ ,

$$\bar{T}^*(\bar{r}) = \left[ \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$$

Como  $\bar{T}^* = \bar{T} - \bar{T}_w$  entonces la aproximación asintótica para el perfil de temperaturas se expresa como

$$\bar{T}(\bar{r}) = \left\{ \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right\} e^{-i\alpha^2 \bar{t}} + \bar{T}_w \quad (3.27)$$

Esta ecuación brinda los perfiles de temperatura para flujos que se desarrollan a bajas frecuencias la cual depende del régimen del flujo y su oscilación así como su capacidad de difundir el calor. Su expresión analítica es sencilla y sólo depende de tres parámetros adimensionales, lo cual simplifica su análisis. Enseguida se determina la forma para los perfiles de temperatura en altas frecuencias de oscilación.

### 3.2.2. Aproximación asintótica de la temperatura para altas frecuencias, $\alpha \rightarrow \infty$ .

Para la ecuación (3.23) se propone una solución,

$$\bar{T}(\bar{r}) = \frac{1}{Pr\alpha^2} \bar{H}(\bar{r}) \quad (3.28)$$

Sustituyendo  $H(\bar{r})$  en la ecuación (3.23) se obtiene,

$$\frac{1}{Pr\alpha^2} \frac{d^2 \bar{H}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{Pr\alpha^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{H}}{d\bar{r}} - i\bar{H} = PrRe \quad (3.29)$$

Sí  $\alpha \rightarrow \infty$  entonces la ecuación (3.29) se reduce ha

$$-i\bar{H} = PrRe$$

Por lo tanto

$$\bar{H}_0(\bar{r}) = iPrRe \quad (3.30)$$

ésta es una primera aproximación de la solución e implica el balance entre los términos de aceleración y el gradiente de presión. A través de la misma se propone la aproximación asintótica mediante la siguiente expansión que se asume regular,

$$\bar{H} = \bar{H}_0(\bar{r}) + \frac{1}{Pr\alpha^2}\bar{H}_1(\bar{r}) + \mathcal{O}(Pr^2\alpha^{-4}) \quad (3.31)$$

Si sustituimos  $\bar{H}$  en la ecuación en (3.28) se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{r}) &= \frac{1}{Pr\alpha^2}\bar{H}(\bar{r}) \\ &= \frac{1}{Pr\alpha^2}\left[\bar{H}_0(\bar{r}) + \frac{1}{\alpha^2}\bar{H}_1(\bar{r}) + \mathcal{O}(Pr^2\alpha^{-4})\right] \\ &= \frac{1}{Pr\alpha^2}\bar{H}_0 + \frac{1}{\alpha^4}\bar{H}_1(\bar{r}) + \mathcal{O}(Pr^2\alpha^{-4}) \\ &= \frac{1}{Pr\alpha^2}\bar{H}_0 + \mathcal{O}(Pr^2\alpha^{-4}) \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo  $\bar{H}_0$  en  $H(\bar{r})$  se obtiene,

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{r}) &= \frac{1}{Pr\alpha^2}iPrRe + \mathcal{O}(Pr^2\alpha^{-4}) \\ &= \frac{iRe}{\alpha^2} + \mathcal{O}(Pr^2\alpha^{-4}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

considerando a  $\mathcal{O}(Pr^2\alpha^{-4})$  despreciable, entonces (3.32) esta dada por,

$$\bar{T}(\bar{r}) = \frac{iRe}{\alpha^2} \quad (3.33)$$

y representa los perfiles de temperaturas para altas frecuencias,  $\alpha \rightarrow \infty$ .

En el siguiente capítulo se presenta una sección donde se aborda a detalle las distintas expresiones y simplificaciones que toman las aproximaciones asintóticas a la temperatura considerando en cada caso de  $\alpha$  distintos valores de  $Pr$ ,  $Re$ ,  $De$  y  $t_c$ .

# Capítulo 4

## Análisis de la aproximación asintótica

Las expresiones obtenidas para la aproximación asintótica a la velocidad poseen tres números adimensionales a variar, específicamente Womersley ( $\alpha$ ), Deborah ( $De$ ) y  $\bar{t}$  los cuales permiten caracterizar el tipo de régimen oscilatorio en que se desarrolla el flujo, la naturaleza del fluido y la frecuencia de oscilación respectivamente. Así mismo, las aproximaciones a la temperatura depende de cuatro parámetros adimensionales  $\alpha$ , Reynolds ( $Re$ ), Prandtl ( $Pr$ ) y  $\bar{t}$ , donde  $Re$  permite caracterizar el tipo de flujo en laminar, transitorio o turbulento y  $Pr$  la forma en como se difunde el calor a través de las capas del flujo.

Tomando en consideración para efectos de analisis las características que brindan estos parámetros a cada una de las variables del flujo, en las siguientes secciones se evaluará cada aproximación asintótica bajo el criterio de los valores numéricos que adquieren cada uno de sus distintos parámetros y el significado correspondiente del efecto que causa en el comportamiento del flujo que se modela con cada aproximación asintótica.

## 4.1. Análisis de la aproximación asintótica de la velocidad.

La aproximación asintótica de la velocidad está dada por la ecuación (3.14) para el caso límite  $R_{\alpha^2, De} \rightarrow 0$ , y por la ecuación (3.21) para el caso límite cuando  $R_{\alpha^2, De} \rightarrow \infty$ . Como se mencionó anteriormente, éstas depende de tres parámetros, los cuales rigen el comportamiento de la solución, por tanto se construyó la Tabla 1, que establece los criterios de análisis, fijando los valores de los parámetros que corresponden a una régimen y a una naturaleza específico.

**Tabla 4.1:** Criterios de clasificación de los parámetros adimensionales.

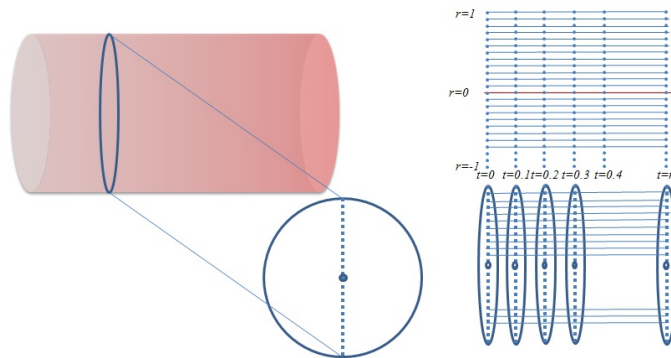
Caso	$\alpha$	$De$	$\bar{t}$	Criterio analizado
1	fijo	fijo	variable	velocidad instantanea en régimen oscilatorio fijo y naturaleza fija
2	variable	fijo	fijo	velocidad instantanea en régimen oscilatorio variable y naturaleza fija
3	fijo	variable	fijo	velocidad instantanea en régimen oscilatorio fijo y naturaleza variable

Específicamente el valor de  $\alpha$  expresa la proporción de la fuerza de inercia transitoria u oscilatoria con respecto de la fuerza de cizallamiento. Sí  $\alpha < 1$ , significa que la frecuencia de oscilación es muy baja permitiendo que se desarrolle un perfil de velocidad parabólico para cada ciclo y se cumple el caso límite de la primer solución dada por la ecuación (3.14).

Sí  $\alpha > 10$  la frecuencia de oscilación es suficientemente grande y da como resultado un perfil de velocidad tipo tapón el cual cumple con el caso límite de la ecuación (3.21). Así los valores asignados a Womersley sobre la aproximación asintótica de la velocidad, permiten dar una clasificación a la forma en como se desarrolla el flujo.

Por otra parte  $De$  es la relación entre el tiempo de relajación y el tiempo experimental, con el cual se clasifica la naturaleza del fluido al sustituir sus valores en la aproximación asintótica, se espera que si  $De < 1$ , el fluido es viscoso; cuando  $De \cong 1$  el fluido es viscoelástico, y sí  $De > 1$  el fluido es elástico.

Con los valores de Womersley y Deborah se construyó la Tabla 4.2 que clasifica al flujo segun



**Figura 4.1:** Corte transversal para perfil de velocidades.

el régimen en que se desarrolla y al fluido segun su naturaleza, respectivamente. Estos valores al ser sustituidos en la aproximación asintótica de la velocidad y evaluarla para un perfil de corte transversal, como el que se muestra en la Figura 4.1, da como resultado distintos perfiles para cada tiempo  $\bar{t}$ . En seguida se discute la variación de los perfiles de velocidad para cada uno de éstos casos.

**Tabla 4.2:** Valores numéricos de los parámetros adimensionales para la velocidad.

Régimen (Womersley)	Naturaleza (Deborah)		
	$De \ll 1$	$De \approx 1$	$De \gg 1$
$\alpha = 0$	constante, newtoniano	constante, viscoelástico	constante, elástico
$0 < \alpha < 1$	newtoniano a bajas frecuencias	viscoelástico a bajas frecuencias	elástico a bajas frecuencias
$\alpha \gg 1$	newtoniano a altas frecuencia	viscoelástico a altas frecuencias	elástico a altas frecuencias

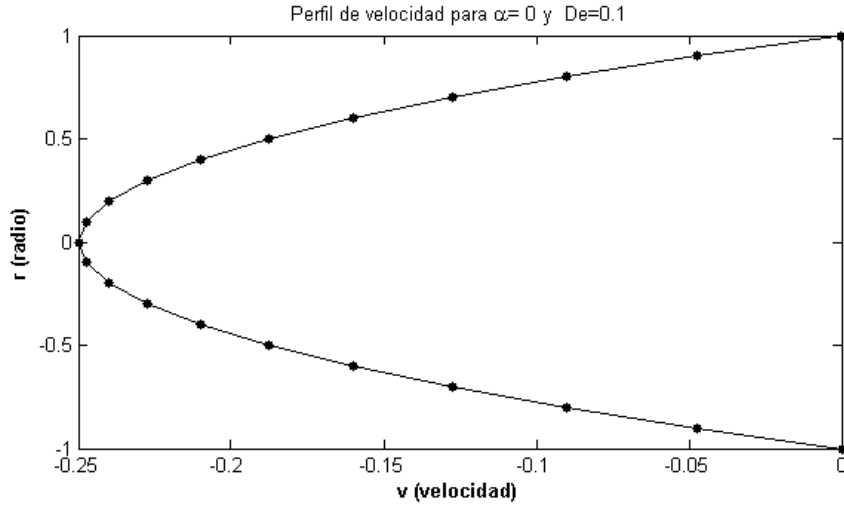
#### 4.1.1. Análisis de velocidad instantánea para distintos regímenes del flujo y naturalezas del fluido.

En éste caso se varía el tiempo  $\bar{t}$  y se analiza como influyen los valores de  $\alpha$  y  $De$  al desarrollo de los perfiles de velocidad bajo la consideración de la clasificación proporcionada en la Tabla 4.2.

**Caso 1. Para  $\alpha = 0$  y  $De$  variable.** La solución de la aproximación asintótica de la velocidad (3.14) se reduce a la forma dada por (3.3)

$$\bar{V}_1(\bar{r}) = \frac{1}{4}(\bar{r}^2 - 1) \quad (4.1)$$

Cuyo perfil es parabólico como se muestra en la Figura 4.2, describiendo un flujo continuo unidireccional no oscilatorio, es decir, que la aproximación asintótica para  $\alpha = 0$ , se reduce a un flujo de Poiseuille, donde la velocidad máxima del flujo se encuentra en el centro del



**Figura 4.2:** Perfil de velocidad para flujo Newtoniano.

dispositivo, fluyendo laminarmente de manera continua.

**Caso 2. Para  $0 < \alpha < 1$  y  $De = 1$ .** La solución de la aproximación asintótica de la velocidad (3.14) se transforma en la siguiente ecuación,

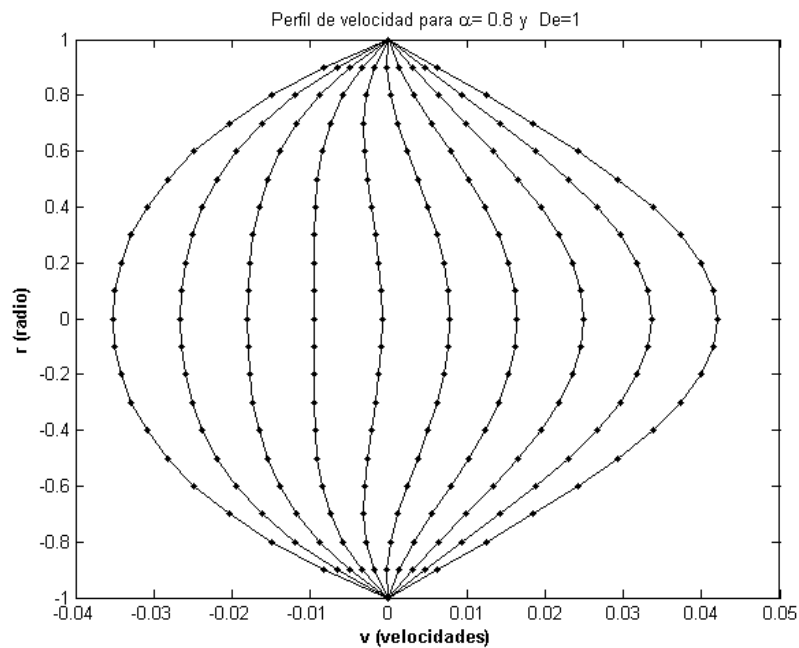
$$\bar{V}_2(\bar{r}) = \left[ \frac{(\bar{r}^2 - 1)}{4} + \frac{i\alpha^2(i\alpha^2 + 1) \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right)}{4^2} - \frac{\alpha^4(i\alpha^2 + 1)^2 \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)}{4^4} \right] e^{-i\alpha^2 t_c}$$

Notamos que el primer término de la ecuación es la velocidad  $V_1$ , si sustituimos el término,

$V_2$  queda expresada como,

$$\bar{V}_2(\bar{r}) = \left[ \bar{V}_1 + \frac{i\alpha^2(i\alpha^2 + 1) \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right)}{4^2} - \frac{\alpha^4(i\alpha^2 + 1)^2 \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)}{4^4} \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \quad (4.2)$$

La expresión de la velocidad en este caso implica que los dos últimos términos son los que dan el carácter viscoelástico al fluido, ya que  $\bar{V}_2$  corresponde a un flujo laminar constante.



**Figura 4.3:** Perfil de velocidades para un flujo constante oscilatorio con naturaleza viscoelástica con  $2 \leq \bar{t} \leq 2,5$ .

Se espera del comportamiento de los perfiles de velocidades en este caso, que al desarrollarse el flujo a través del tiempo, modifiquen su forma parabólica debido tanto a la oscilación impuesta como al carácter viscoelástico de la naturaleza del fluido ya que  $De = 1$ .

En la Figura 4.3 se presenta un ejemplo de tal comportamiento, se observa en la gráfica que el flujo inicia con un perfil parabólico y conforme el tiempo avanza este disminuye su amplitud parabólica debido al movimiento oscilatorio impuesto, así mismo se deforma el perfil tomando forma ondulatoria producido por la viscoelasticidad del fluido, disminuyendo las velocidades más rápidamente en las capas centrales del tubo.

**Caso 3.** Para  $0 < \alpha < 1$  y  $De \ll 1$  o  $De \gg 1$ . Bajo las condiciones de este caso, se espera tener un flujo constante en régimen oscilatorio a bajas frecuencias y naturaleza viscosa para  $De \ll 1$  ó elástica para  $De \gg 1$ . Para estos valores de los parámetros la expresión analítica de la aproximación asintótica a la velocidad esta dada por la ecuación (3.14).

$$\bar{V}_3(\bar{r}) = \left[ \frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$$

El primer término de la velocidad  $\bar{V}_3$  es la velocidad  $\bar{V}_1$ , si además si se sustituye la última expresión del parámetro constante  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} = \alpha^2(i\alpha^2 De + 1) = \alpha^2(i\alpha^2 + 1) + i\alpha^4(De - 1)$  se obtiene,

$$\begin{aligned} \bar{V}_3(\bar{r}) = & \left[ \bar{V}_1 + \left( \alpha^2(i\alpha^2 + 1) + i\alpha^4(De - 1) \right) \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \right. \\ & \left. \left( \alpha^2(i\alpha^2 + 1) + i\alpha^4(De - 1) \right)^2 \frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \end{aligned}$$

Desarrollando y reacomodando los términos, la velocidad queda expresada como,

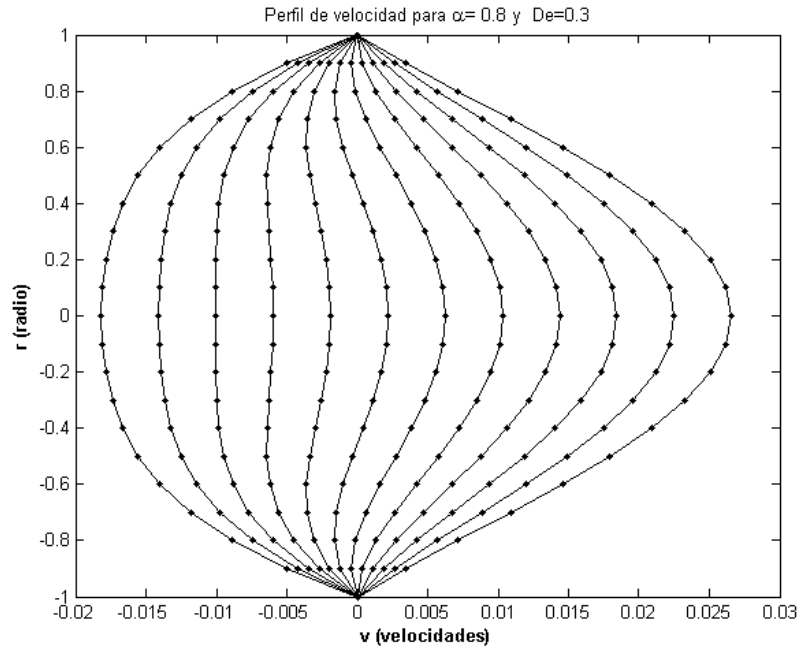
$$\bar{V}_3(\bar{r}) = \left[ \bar{V}_1 + \frac{i\alpha^2(i\alpha^2 + 1) \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right)}{4^2} - \frac{\alpha^4(i\alpha^2 + 1)^2 \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)}{4^4} - \frac{\alpha^4(De - 1) \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right)}{4^2} - \frac{[2\alpha^6(i\alpha^2 + 1)(De - 1) - \alpha^8(De - 1)^2] \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)}{4^4} \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$$

De nueva cuenta se observa que los tres primeros términos corresponden a la ecuación  $\bar{V}_2$ , entoces la velocidad queda expresada como,

$$\begin{aligned} \bar{V}_3(\bar{r}) = & \left[ \bar{V}_2 - \frac{\alpha^4(De - 1) \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right)}{4^2} - \right. \\ & \left. \frac{[2\alpha^6(i\alpha^2 + 1)(De - 1) - \alpha^8(De - 1)^2] \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)}{4^4} \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

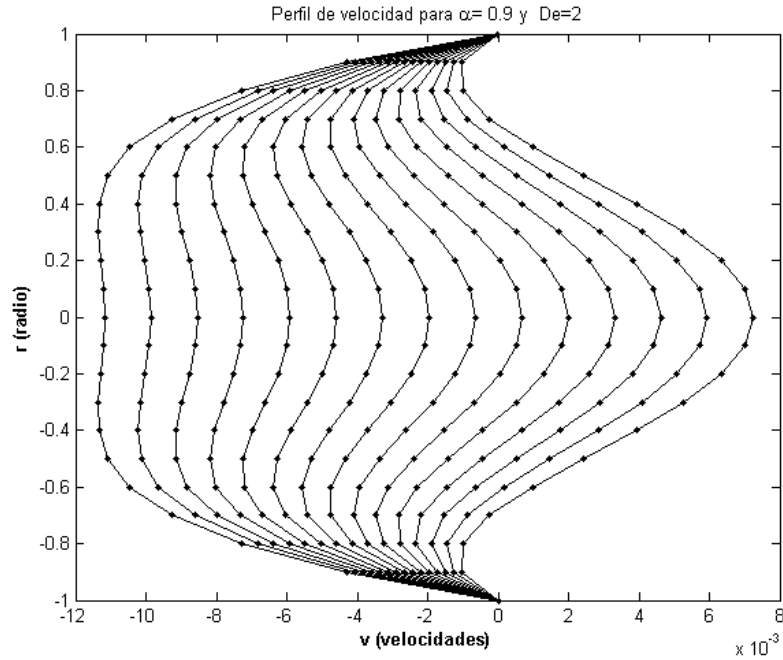
Dadas las formas analíticas de las expansiones asintóticas, es evidente que el método propor-

ciona una superposición de la soluciones para la velocidad. Un ejemplo de este tipo de flujo constante oscilatorio con naturaleza viscosa,  $De \ll 1$ .



**Figura 4.4:** Perfil de velocidades para un fluido oscilatorio de naturaleza viscosa con  $2,125 \leq \bar{t} \leq 2,4125$ .

En la Figura 4.4 se muestra, los perfiles del tipo parabólico, sin embargo debido a su naturaleza, disminuye la velocidad más rápidamente en las capas cercanas a las paredes del tubo, por el contrario, en el centro el tubo disminuye más lentamente, generando perfiles con formas ondulatorias.



**Figura 4.5:** Perfil de velocidades para un flujo en régimen oscilatorio de naturaleza elástica con  $1,68 \leq \bar{t} \leq 1,755$ .

Así mismo en la Figura 4.5 se presentan los perfiles de velocidad para un flujo oscilatorio con naturaleza elástica,  $De \gg 1$ , su comportamiento indica que al tomar la máxima velocidad que se representa por el primer perfil a la derecha con forma parabólica, conforme avanza el tiempo va disminuyendo la velocidad mayormente en el centro del tubo, creando perfiles tipo ondulatorio. Sin embargo, la velocidad para el flujo cercano a las paredes no decrece tan rápido como en el centro del dispositivo, distinguiendo a estos perfiles de la naturaleza viscosa.

En conclusión, las componentes de las tres ecuaciones para la velocidad con  $\alpha \rightarrow 0$ , expresan

un comportamiento específico del flujo que incluye la naturaleza del fluido. Las expresiones de la velocidad obtenidas para todos los casos, observan una superposición de la velocidad  $\bar{V}_3$  con  $\bar{V}_2$  y ésta última con  $\bar{V}_1$ , en la tabla 4.3, se presentan de forma resumida ésta superposición.

**Tabla 4.3:** Superposición de los términos de las ecuaciones de velocidad para  $\alpha \ll 1$ .

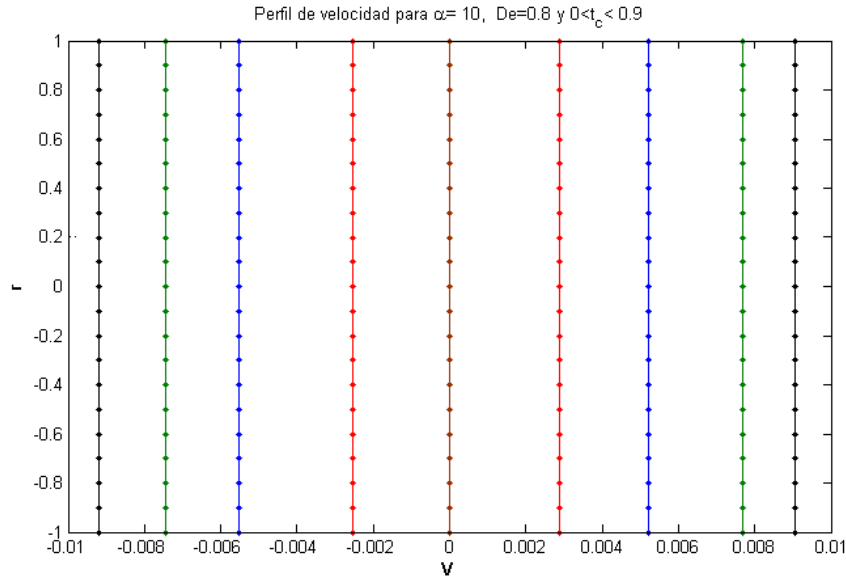
Parámetros	Velocidad	Término
$\alpha = 0$	$\bar{V}_1$	$\frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1)$
$\alpha \ll 1, De = 1$	$\bar{V}_2$	$\bar{V}_1 + \frac{i\alpha^2(i\alpha^2+1)\left(\frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4}\right)}{4^2} - \frac{\alpha^4(i\alpha^2+1)^2\left(\frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9}\right)}{4^4}$
$\alpha \ll 1, De \ll 1$ o $De \gg 1$	$\bar{V}_3$	$\bar{V}_2 - \frac{\alpha^4(De-1)\left(\frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4}\right)}{4^2} - \frac{[2\alpha^6(i\alpha^2+1)(De-1) - \alpha^8(De-1)^2]\left(\frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9}\right)}{4^4}$

**Caso 4. Para  $\alpha \gg 1$  y  $De \ll 1$ .**

Para valores de  $\alpha \gg 1$  los perfiles de velocidad son como los de un flujo tipo tapón, su forma analítica se expresa por la ecuación (3.21)

$$\bar{V} = \frac{i}{\alpha^2} e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$$

Para estos valores de  $\alpha$ , se muestran los perfiles de velocidad en las Figuras 4.6 y 4.7, su forma no alcanza a desarrollar un perfil parabólico, es como una pared, pero avanzan y retroceden debido a la alta frecuencia de oscilación impuesta, las velocidades se vuelven casi homogéneas en toda la sección transversal del tubo. Para ambos casos se ha considerado un fluido de naturaleza viscosa. La diferencia entre ambas gráficas es la frecuencia de oscilación, aumentando el número de oscilaciones del intervalo conforme aumenta el valor de  $\alpha$ , ya que



**Figura 4.6:** Perfiles de velocidad de un flujo tipo tapón. Para el caso (a)  $\alpha = 10$ .

los cruces son menos frecuentes para  $\alpha = 10$ , con un orden de  $10^{-3}$  de distancia entre cada cruce, como se aprecia en la figura 4.6. Conforme el valor de  $\alpha$  aumenta los cruces son más frecuentes del orden de  $10^{-4}$  por ejemplo, para un  $\alpha = 100$ , los cruces se aprecian en la figura 4.7.

Para un fluido viscoelástico corresponde un valor  $De = 1$  y la ecuación se expresa como,

$$\bar{V} = \frac{i}{\alpha^2} e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \quad (4.4)$$

Para este tipo de fluido los perfiles de velocidad no varían mucho para los valores muy grandes de  $\alpha$ .

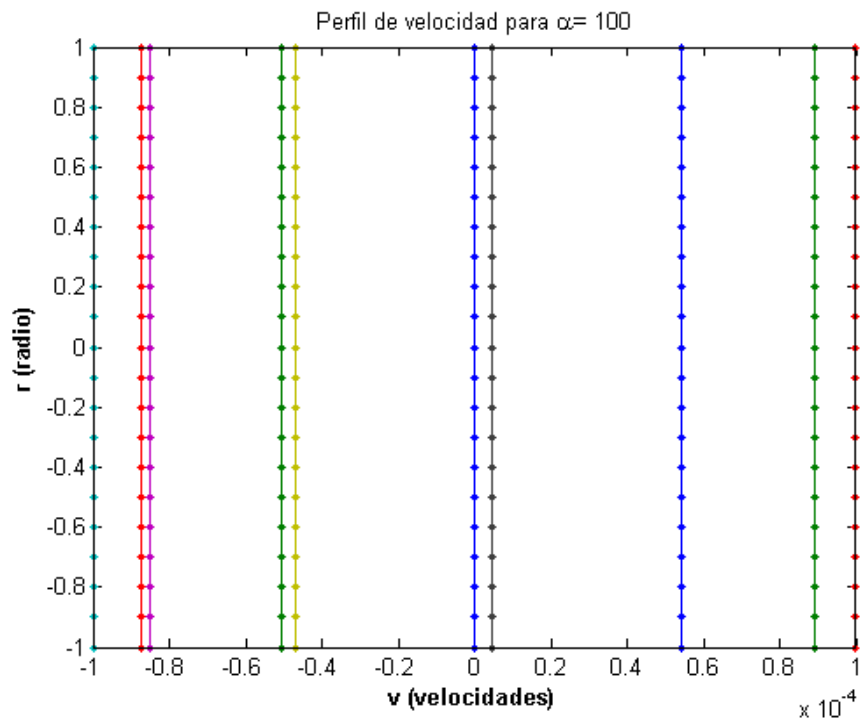
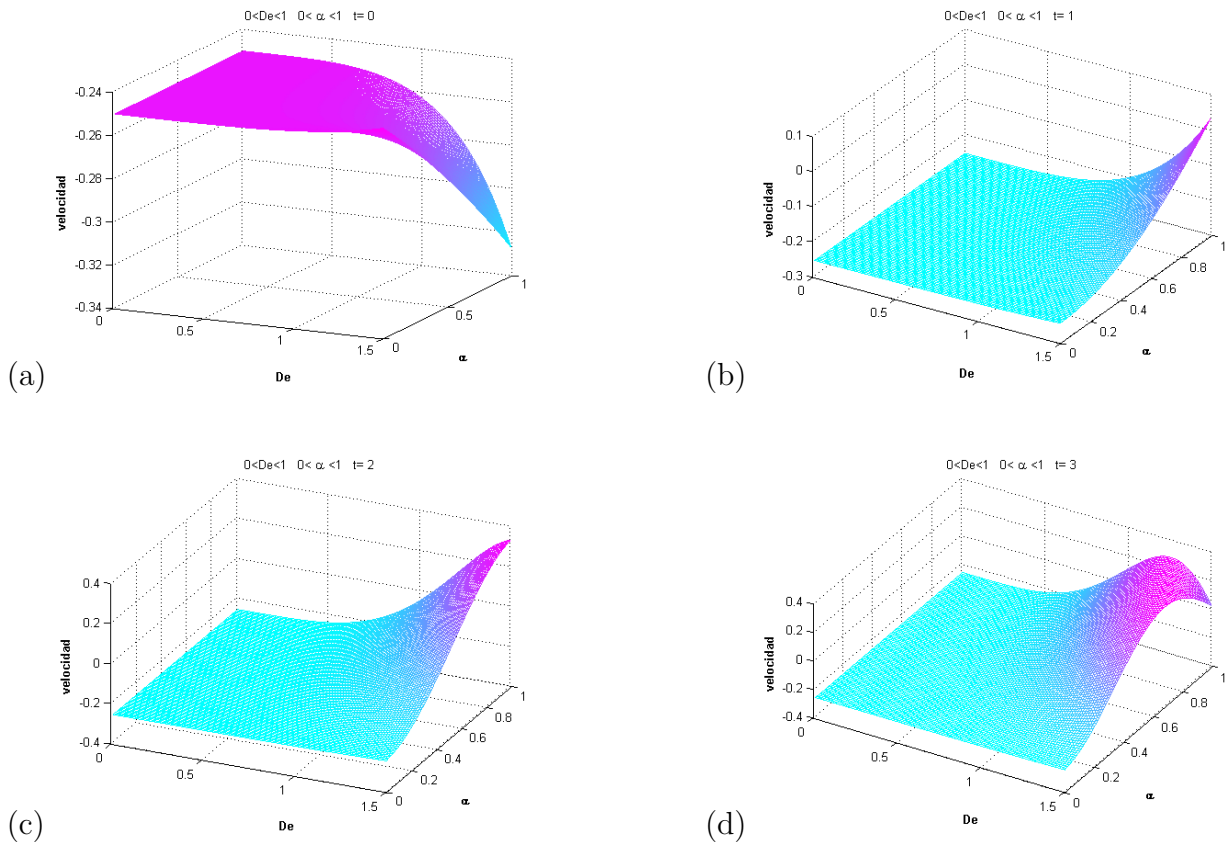


Figura 4.7: Perfiles de velocidad de un flujo tipo tapón con  $0 \leq \bar{t} \leq 0,1$ .

#### 4.1.2. Análisis general con Variación de $\alpha$ y $De$ para velocidad en el centro del tubo en $\bar{t}$ fijo.

Para tener una visión general de como actúa el tipo de régimen y la naturaleza en el comportamiento del flujo, se evaluaron las velocidades en los siguientes intervalos para cada una de los parámetros, específicamente, se tomó Womersley en  $0 < \alpha < 1$ , y Deborah en  $0 < De < 1$ , dejando fijo al tiempo  $\bar{t}$ . Se obtuvieron solo las velocidades en el centro del tubo, es decir, en  $r = 0$ , ya que ahí es donde se experimentan las mínimas y máximas velocidades según la oscilación del flujo y su naturaleza.



**Figura 4.8:** Evaluación global de la velocidad para distintos valores de Womersley y Deborah, con  $\bar{t}$  fijo y  $r = 0$  cada caso.

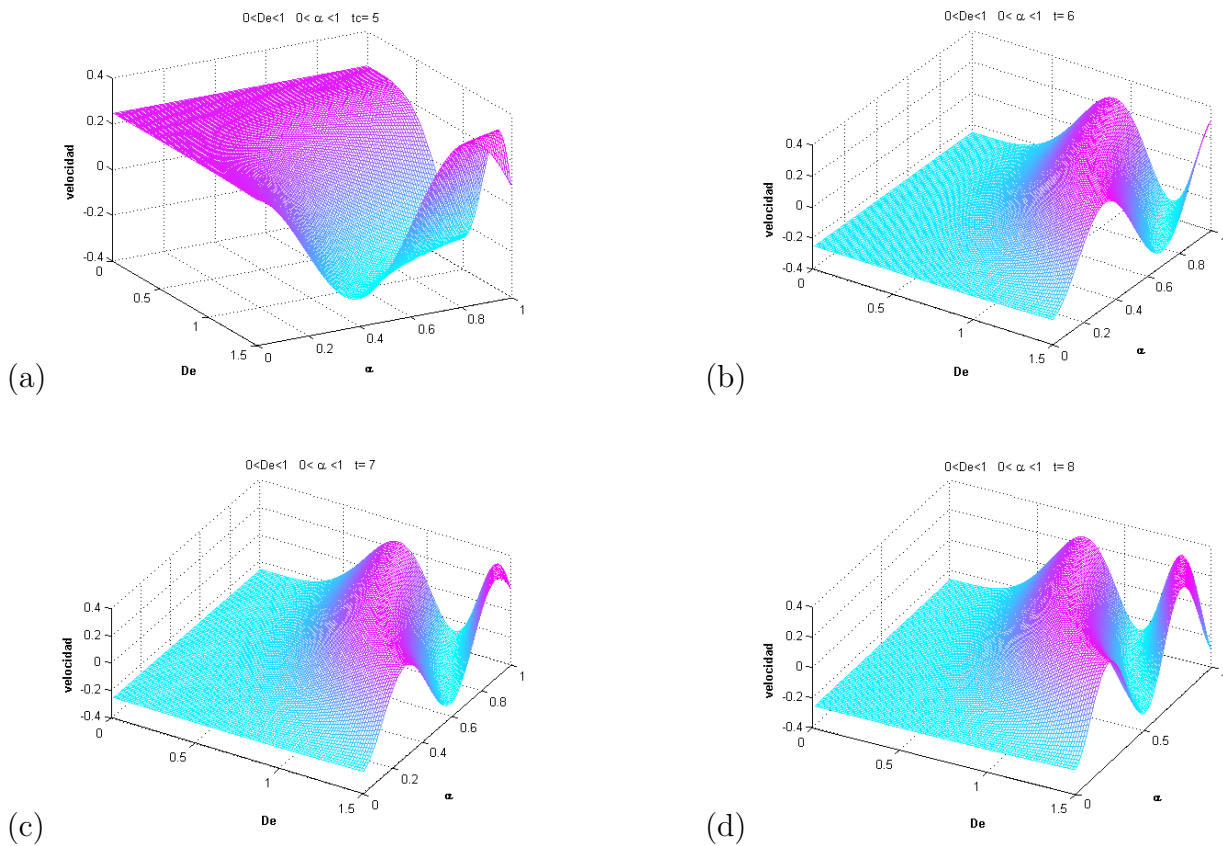
Para  $\bar{t} = 0, 1, 2$  y  $3$  el comportamiento de la velocidad se presenta como una superficie, en la Figura 4.8, los puntos correspondientes observados en las cuatro superficies, son los valores que adquiere la velocidad en el centro del tubo. Se distingue en la Figura 4.8 (a) que los valores de la velocidad son muy cercanos a cero cuando  $\bar{t} = 0$ , esto es lógico, ya que el tiempo  $\bar{t}$  es igual a cero, en consecuencia las velocidades son casi nulas para  $\alpha$  y  $De$  también cercanos al cero, esto implica que el flujo ha comenzado a desarrollarse.

Por otra parte, para valores  $\alpha$  y  $De$  cercanos a la unidad la velocidad aumenta, esto se debe a que la frecuencia de oscilación también aumenta.

Cuando  $\bar{t} = 1$  el flujo ya está desarrollado, elevando la velocidad para valores cercanos a cero de  $\alpha$  y  $De$ , no obstante, para los valores cercanos a la unidad de estos parámetros, la velocidad disminuye debido a la oscilación, ya que en el inicio cuando  $\bar{t} = 0$ , estos valores eran mayores a cero, lo cual implica que el flujo está retrocediendo de  $\bar{t} = 0$  a  $\bar{t} = 1$ . Algo similar sucede cuando  $\bar{t} = 2$  y  $\bar{t} = 3$ , el flujo que avanzó en un inicio al aumentar el tiempo retrocede y viceversa, todo debido a la frecuencia de oscilación brindada por el término  $\alpha$ .

Si el tiempo  $\bar{t} = 5, 6, 7$  y  $8$ , en la Figura 4.9 se aprecia como el flujo oscila en el centro del dispositivo conforme el tiempo avanza, haciéndolo más rápidamente para valores de  $\alpha$  muy cercanos a la unidad y para valores  $De$  iguales o mayores a la unidad.

Observando todos estos comportamientos, se concluye que la aproximación asintótica para la velocidad cumple con las características del comportamiento que se espera para estos valores de los parámetros, que implican distintos tipos de regímenes del flujo y naturaleza del fluido.



**Figura 4.9:** Análisis de velocidad global para distintos valores de Womersley y Deborah, con  $\bar{t}$  fijo y  $\bar{r} = 0$  en cada caso.

## 4.2. Análisis de la aproximación asintótica de la temperatura.

Las expresión de la aproximación asintótica para la temperatura posee cuatro números adimensionales a variar,  $\alpha$ ,  $Re$ ,  $Pr$  y  $\bar{t}$ . Estos permiten analizar la difusión del calor para distintos regímenes del flujo, que varían desde el fluido estacionario, el oscilatorio puro y el turbulento; así como para las distintas capacidades de difusión de calor del fluido. Específicamente el

número de  $Pr$  permite caracterizar la velocidad de advención y la difusión térmica del flujo, con ello se logra hacer un análisis de la estabilidad del transporte de calor en el flujo [16][17].  $\alpha$  brinda el caracter oscilatorio del flujo y  $Re$  si es laminar, transitorio o turbulento. En las siguientes subsecciones se clasifican los parámetros de la ecuación con el fin de analizar el comportamiento los perfiles de temperatura ajustados a cada tipo de régimen del flujo y la capacidad de difusión de calor del fluido, tomando los de la Tabla 4.4.

Para el caso **a**, se presentaran los perfiles de distribución de temperatura instantaneos cambiando el tipo de régimen de laminar a transitorio; en el caso **b** se analiza como afecta la oscilación del flujo a la distribución de temperaturas; con el caso **c** se analiza la capacidad de difusión del fluido para un régimen de comportamiento fijo. Como resultado de esta clasificación, se establece un orden numérico para los parámetros adimensionales de los casos a y b, el cual se expresa en la Tabla 4.5, de ésta tabla se derivan casos numéricos especiales que se discuten en la siguiente sección.

**Tabla 4.4:** Criterios de clasificación de los parámetros adimensionales de la temperatura.

Caso	$\alpha$	$Pr$	$Re$	$t_c$
<b>a.</b> Oscilación fija, régimen variable, difusión fija y naturaleza fija	fijo	fijo	variable	fijo
<b>b.</b> Oscilación variable, régimen fijo , difusión fija y naturaleza fija	variable	fijo	fijo	fijo
<b>c.</b> Oscilación fija, régimen fijo, difusión variable y naturaleza fija	fijo	variable	fijo	fijo

**Tabla 4.5:** Valores numéricos de los parámetros adimensionales  $\alpha$  y  $Re$ .

Oscilación	Régimen del flujo		
	$Re = 0$	$1 < Re \ll 2000$	$2000 < Re < 4000$
$\alpha = 0$	fluido estático	laminar constante	transitorio
$0 < \alpha < 1$	oscilatorio puro a baja frecuencia	oscilatorio laminar	oscilatorio transitorio
$\alpha \gg 1$	oscilatorio puro a alta frecuencia	oscilatorio laminar a alta frecuencias	oscilatorio transitorio a alta frecuencia

### 4.2.1. Análisis de la temperatura para distintos regímenes del flujo.

El presente análisis se establece siguiendo el criterio de orden de los casos para los valores de  $\alpha$  y  $Re$  mostrados en la tabla 4.5, obteniendo una expresión particular de la temperatura para cada tipo de régimen del flujo.

#### Caso 1. Temperaturas instantáneas para $\alpha = 0$ y $Re = 0$ .

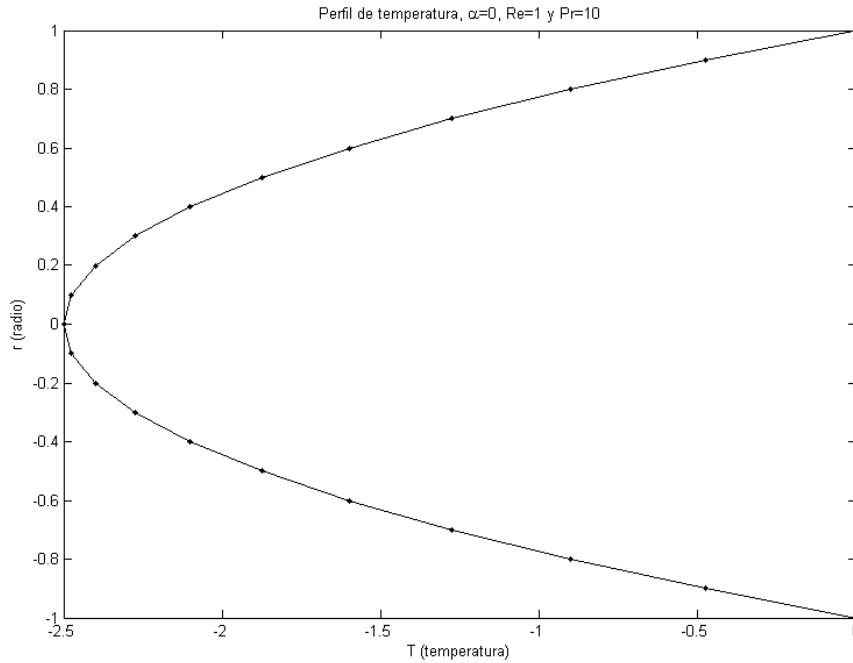
La ecuación de la aproximación asintótica a las temperaturas para el valor asignado a Reynolds y Womersley queda expresada como,

$$\bar{T}_0 = T_w \quad (4.5)$$

su forma analítica sintética se debe a las condiciones impuestas, ya que solo se experimenta el transporte de calor por difusión molecular debido a que el fluido es estático.

#### Caso 2. Temperaturas instantáneas para $0 < \alpha < 1$ y $Re = 0$ .

La aproximación asintótica a la temperatura para un flujo estático en régimen oscilatorio puro, está dado por la ecuación (4.5), es decir solo se experimenta la transferencia de calor por difusión molecular.



**Figura 4.10:** Temperatura instantánea para flujo constante.

### Caso 3. Temperaturas instantáneas para $\alpha = 0$ y $0 \ll Re$ .

Para estos valores de Reynolds y Womersley, la ecuación de la aproximación asintótica a las temperaturas se reduce, las condiciones impuestas a la aproximación asintótica, implican que el flujo fluye unidireccionalmente, es decir, se desarrolla un flujo de Poiseuille.

La ecuación queda expresada como,

$$\bar{T}_1 = \frac{RePr(\bar{r}^2 - 1)}{4} + \bar{T}_0 \quad (4.6)$$

En la Figura 4.10 se observa un perfil de temperaturas para este tipo de flujo, teniendo un perfil parabólico, se observa como varía la temperatura tanto en el centro como cerca de las paredes del tubo.

**Caso 4. Temperaturas instantáneas para  $\alpha \ll 1$  y  $0 \ll Re$ .**

Las condiciones impuestas a este flujo implican que experimenta un régimen laminar constante con oscilaciones a bajas frecuencias. En la Figura 4.11, se muestran los perfiles de temperatura resultantes, éstos oscilan con forme el tiempo avanza, se ha considerado un flujo oscilatorio con  $\alpha = 0,1$  y  $Re = 10, 100$  y  $100$ ; en la Figura 4.12, se muestran otros perfiles de temperatura con  $Re = 100$ , es decir, el fluido es más elásticos y de nuevo se fija  $\alpha = 0,6$  para los mismos valores de  $Re$  que en el caso de la Figura 4.11; Se observa que la temperatura disminuye más rápidamente en el centro del tubo, en comparación al cercano a las paredes, esto se debe a que entrega más calor a las capas centrales. La ecuación de la aproximación asintótica a la temperatura para este caso está dada por (3.25).

$$\bar{T}(\bar{r}) = \left[ \frac{RePr}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 RePr^2}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 RePr^3}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} + T_w$$

Observando la forma analítica de la temperatura vemos que ésta se puede reescribir como,

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{RePr}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 RePr^2}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 RePr^3}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} + T_w e^{-i\alpha^2 \bar{t}} e^{i\alpha^2 \bar{t}} \\ &= \left[ \frac{RePr}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 RePr^2}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 RePr^3}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + T_w e^{i\alpha^2 \bar{t}} \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \\ &= \left[ \frac{RePr}{4} (\bar{r}^2 - 1) + T_w + \frac{i\alpha^2 RePr^2}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 RePr^3}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + T_w e^{i\alpha^2 \bar{t}} - T_w \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \\ &= \left[ T_1 + \frac{i\alpha^2 RePr^2}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 RePr^3}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + T_0 (e^{i\alpha^2 \bar{t}} - 1) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \end{aligned}$$

Reacomodando se observa que la temperatura tiene una superposición con los casos 1 y 3, quedando la temperatura expresada como,

$$\bar{T}_2(\bar{r}) = \left[ T_1 + T_0(e^{i\alpha^2 DeT_c} - 1) + \frac{i\alpha^2 RePr^2}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 RePr^3}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \quad (4.7)$$

**Caso 5. Temperaturas instantáneas para  $\alpha \gg 1$  y  $Re = 0$ .**

En este caso se espera un flujo oscilatorio puro, cuya ecuación esta dada también por (3.32).

$$\bar{T}(\bar{r}) = \frac{iPrRe}{\alpha^2}$$

Como  $\alpha^2 = 2\pi ReSt$ , sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que

$$\bar{T}(\bar{r}) = \frac{iRe}{2\pi ReSt}$$

Por tanto tener un valor de  $Re = 0$ , implica que no hay flujo, pero el fluido vibra en altas frecuencias, cuya ecuación queda expresada como,

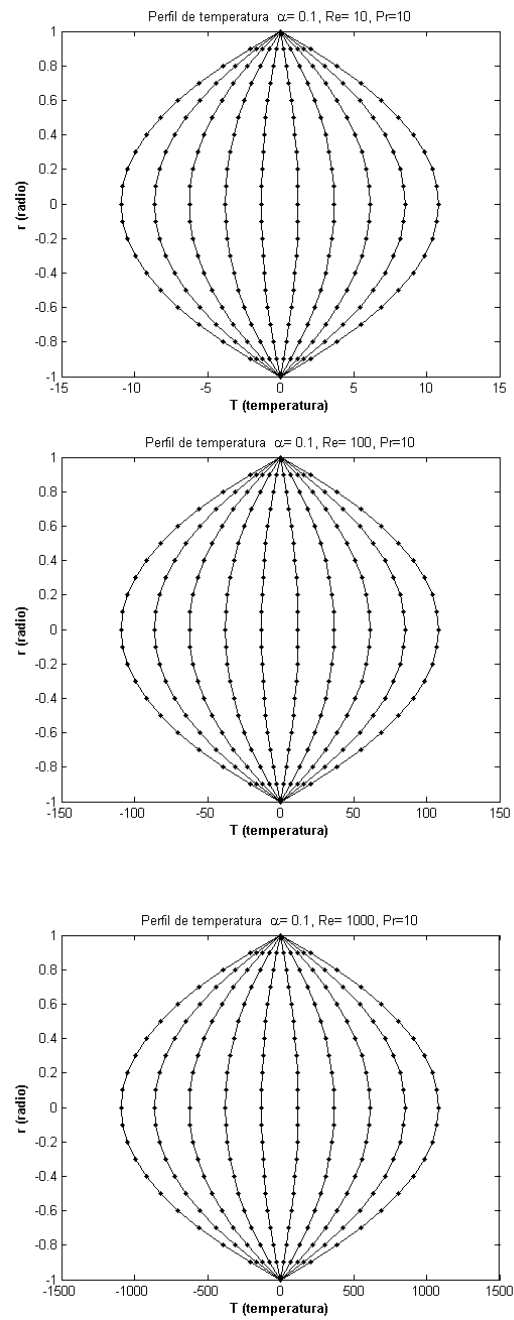
$$\bar{T}_3(\bar{r}) = \frac{i}{2\pi St} \quad (4.8)$$

tendiendo a desarrollar perfiles de temperatura como los que se muestran en la figura 4.13.

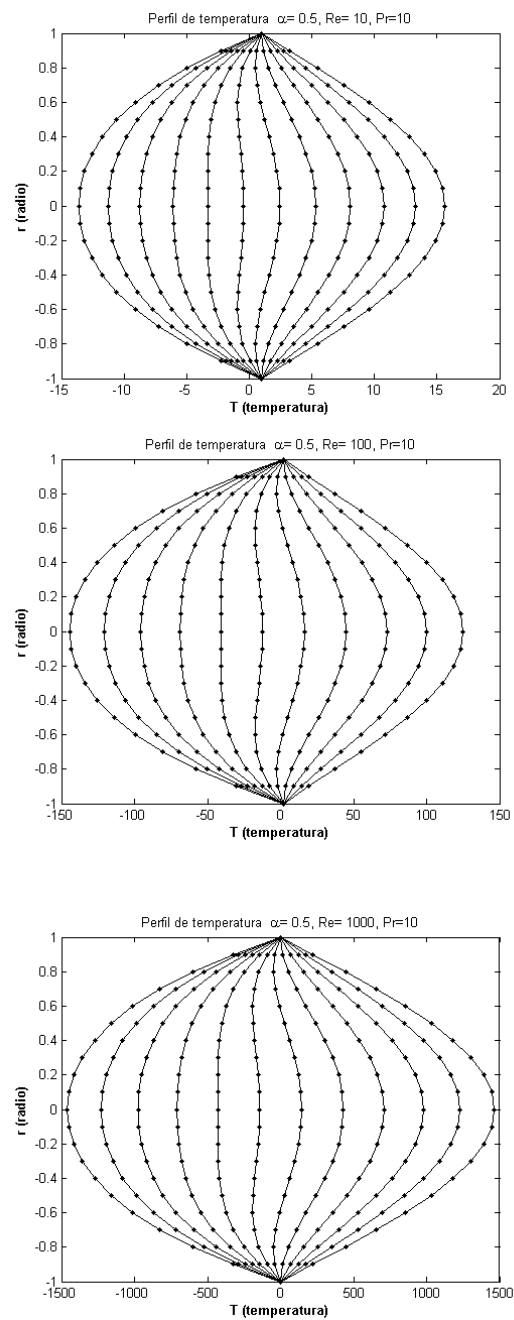
**Caso 6. Temperaturas instantáneas para  $1 \ll \alpha$  y  $0 \ll Re$ .**

Considerar valores de Womersley muy grandes implica poner a oscilar el flujo a altas frecuencias, lo cual es como si se pudiese a vibrar el fluido, además el flujo varía desde un régimen laminar constante hasta el transitorio, la ecuación de la aproximación asintótica a la temperatura para este tipo de caso está dada por (3.35)

$$\bar{T}_4(\bar{r}) = \frac{iRe}{\alpha^2}$$



**Figura 4.11:** Perfiles de temperatura para flujo oscilatorio con  $10 \leq \bar{t} \leq 100$  e incrementos de 1.



**Figura 4.12:** Perfiles de temperatura para flujo en régimen oscilatorio con  $1 < \bar{t} < 15$  e incrementos de 0,5.

Los perfiles de temperatura para un flujo constante oscilatorio en altas frecuencias pierden el perfil parabólico y se vuelven uniformes entoda la parte transversal del tubo como si fuera un tapón.

En resumen, las distintas expresiones generadas para cada uno de los casos impuestos a la expansión asintótica se sintetiza en la Tabla 4.6, donde se muestran las superposiciones de las soluciones segun se incrementa la complejidad del comportamiento del flujo a bajas frecuencias.

**Tabla 4.6:** Superposición de los términos de las ecuaciones de temperatura para  $\alpha$  y  $Re$ .

Parámetros	Temperatura	Término
$\alpha = 0, Re = 0$	$\bar{T}_0$	$T_w$
$\alpha = 0, 0 \ll Re$	$\bar{T}_1$	$\frac{RePr(\bar{r}^2-1)}{4} + \bar{T}_0$
$\alpha \ll 1, 0 \ll Re$	$\bar{T}_2$	$T_1 + T_0(e^{i\alpha^2 DeT_c} - 1) + \frac{i\alpha^2 RePr^2}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 - \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 RePr^3}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)$
$\alpha \gg 1, Re = 0$	$\bar{T}_3$	$\frac{iPr}{2\pi St}$
$\alpha \gg 1, 0 \ll Re$	$\bar{T}_4$	$\frac{iPrRe}{\alpha^2}$

### 4.3. Comparación de la aproximación asintótica de la

$\bar{V}$  y de la  $\bar{T}$  con sus respectivas formas de Bessel.

En el Capítulo 2 se presentaron las soluciones analíticas asumiendo la forma de Bessel para la velocidad y la temperatura, dadas por las ecuaciones (2.19) y (2.23), respectivamente. Ambas

soluciones se obtuvieron conservando las dimensiones reales de las variables y los parámetros incluidos en cada ecuación. Sin embargo, para tener una comparación consistente entre la solución de Bessel y la aproximación asintótica, se utilizó las ecuaciones diferenciales adimensionales para obtener la solución por Bessel de cada ecuación diferencial adimensional, las cuales se presentan a continuación.

La solución de Bessel de la ecuación diferencial adimensional de la velocidad dada por (2.19) se expresa como,

$$\bar{V} = \frac{1}{\alpha^2} \left( 1 - \frac{J_0 \left( \alpha \sqrt{(i\alpha^2 De - 1)\bar{r}} \right)}{J_0 \left( \alpha \sqrt{i\alpha^2 De - 1} \right)} \right) e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \quad (4.9)$$

donde

$$J_0 \left( \alpha \sqrt{(i\alpha^2 De - 1)\bar{r}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\alpha \sqrt{(i\alpha^2 De - 1)\bar{r}}}{2} \right)^{2n}$$

y

$$J_0(\alpha \sqrt{i\alpha^2 De - 1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\alpha \sqrt{i\alpha^2 De - 1}}{2} \right)^{2n}$$

con  $\Gamma(n) = n!$ .

La solución de la ecuación diferencial para la temperatura (3.22) está dada por,

$$\bar{T} = \frac{Re(Re - i\alpha^2 T_w)}{\alpha^4} \left( 1 - \frac{J_0 \left( \alpha \sqrt{Pr\bar{r}} \right)}{J_0 \left( \alpha \sqrt{Pr} \right)} \right) e^{-i\alpha^2 \bar{t}} + T_w \quad (4.10)$$

donde

$$J_0 \left( \alpha \sqrt{Pr\bar{r}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\alpha \sqrt{Pr\bar{r}}}{2} \right)^{2n}$$

y

$$J_0\left(\alpha\sqrt{Pr}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+n)} \left(\frac{\alpha\sqrt{Pr}}{2}\right)^{2n}$$

En las secciones siguientes se presentan las comparaciones de los resultados tanto en lo analítico como en lo numérico para cada par de soluciones sometidas a bajas frecuencias de oscilación. La comparación que corresponde a lo numérico, se probará para tres tipos de fluidos de trabajo conocidos.

#### 4.3.1. Velocidad Bessel vs Velocidad Asintótica.

En la Tabla 4.7 se presentan las formas analíticas de las soluciones obtenidas por ambos métodos, es evidente la asombrosa reducción que experimentan los términos que componen a la velocidad obtenida a través del método de aproximación asintótica. No obstante, surge un primer cuestionamiento, ¿esta reducción reproduce adecuadamente el comportamiento de la velocidad bajo distintos tipos de regímenes del flujo y la naturaleza del fluido en comparación con la solución de Bessel?. Cabe indicar que en las secciones anteriores se mostraron algunos perfiles de  $\bar{V}_{asintótica}$  para distintos casos, así como las adicionales reducciones que ésta experimentaba al considerar ciertos regímenes del flujo, en los cuales no se atendió a ningún fluido de trabajo en particular, sólo se analizó como afectaba cada parámetro al comportamiento de la solución. Para dar respuesta al anterior cuestionamiento, se relizararon evaluaciones numéricas y se compararon sus resultados.

**Tabla 4.7:** Comparación de las formas analíticas de la solución para la velocidad.

Velocidad por método	Expresión analítica
$\bar{V}_{Bessel}$	$\frac{1}{\alpha^2} \left( 1 - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\alpha \sqrt{(i\alpha^2 De - 1) \bar{r}}}{2} \right)^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\alpha \sqrt{(i\alpha^2 De - 1)} }{2} \right)^{2n}} \right) e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$
$\bar{V}_{Asintótica}$	$\left[ \frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$

En la evaluación numéricamente de ambas soluciones, se obtuvo el margen de separación entre sus valores, mediante el error absoluto. Para calcular e interpretar adecuadamente los valores de cada solución, que a su vez, simularon el comportamiento de un fluido real, fue necesario adecuar los parámetros adimensionales  $De$ ,  $\alpha$  y  $\bar{t}$  de las expresiones analíticas, donde éstos dos últimos parámetros brindan el carácter oscilatorio al régimen del flujo. Como el tiempo adimensional  $\bar{t}$  está dado por  $\bar{t} = t/t_c$ , donde  $t_c = \frac{a^2}{\nu}$ , en consecuencia  $\bar{t} = \frac{t\nu}{a^2}$ , mediante esta equivalencia se asignaron los valores del tiempo adimensional para que corresponda adecuadamente para un fluido de trabajo específico. En la Tabla 4.8 se muestran los valores correspondientes para cada parámetro dimensional y adimensional correspondiente a tres flujos de trabajo, a saber, el agua ( $H_2O$ ), fluido ampliamente estudiado [3][6][7][13]; el Cloruro de Potasio de Citilpiridinio ( $CPyCl/NaSal$ ) fluido utilizado para pruebas de viscosidad [7] [13] [22], y el aceite de motor  $SAE40$  [23] [24] que es un aceite ligero, con los cuales se evaluaron ambas velocidades.

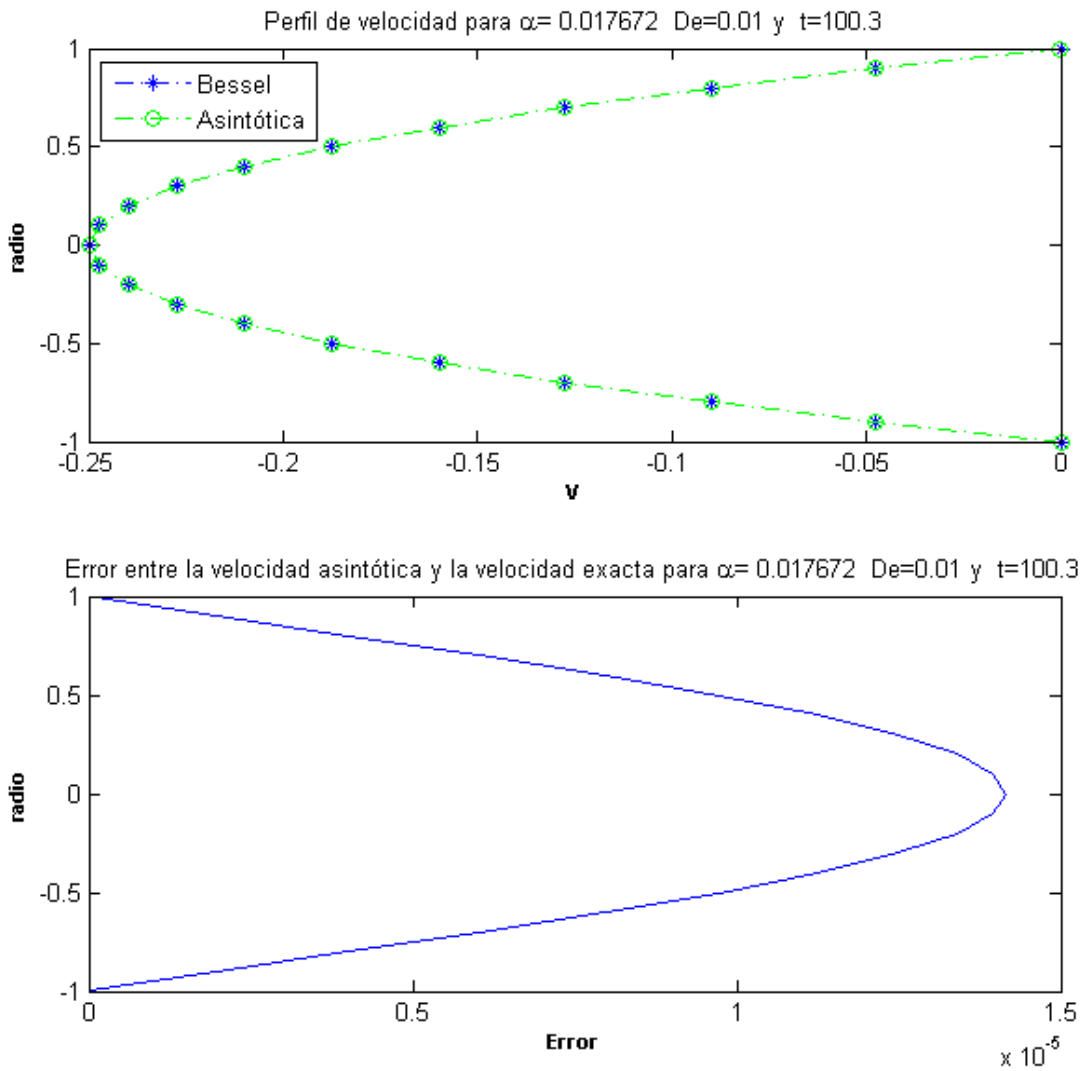
**Tabla 4.8:** Criterios de evaluación de los flujos de trabajo.

Flujo de trabajo	$\nu$	$a$	$t$	$De$
$H_2O$	$1,003 \times 10^{-5} (\frac{cm^2}{ms})$	$0,0001 (cm)$	$1 (ms)$	0,01
$CPyCl/NaSal$	$16,26 (\frac{mm^2}{ms})$	$0,1 (mm)$	$1 (ms)$	0,01
$SAE40$	$7,222 \times 10^{-3} (\frac{cm^2}{ms})$	$0,001 (cm)$	$1 (ms)$	0,01

En la Figura 4.13, se comparan los perfiles de velocidad de la aproximación asintótica y la de Bessel con los parámetros para el Agua de la Tabla 4.8, la proximidad entre los valores tiene un error máximo de  $1,5 \times 10^{-5}$  en el centro del dispositivo, el error va disminuyendo hacia las paredes del tubo, en este caso el tiempo real es  $t = 1ms$ .

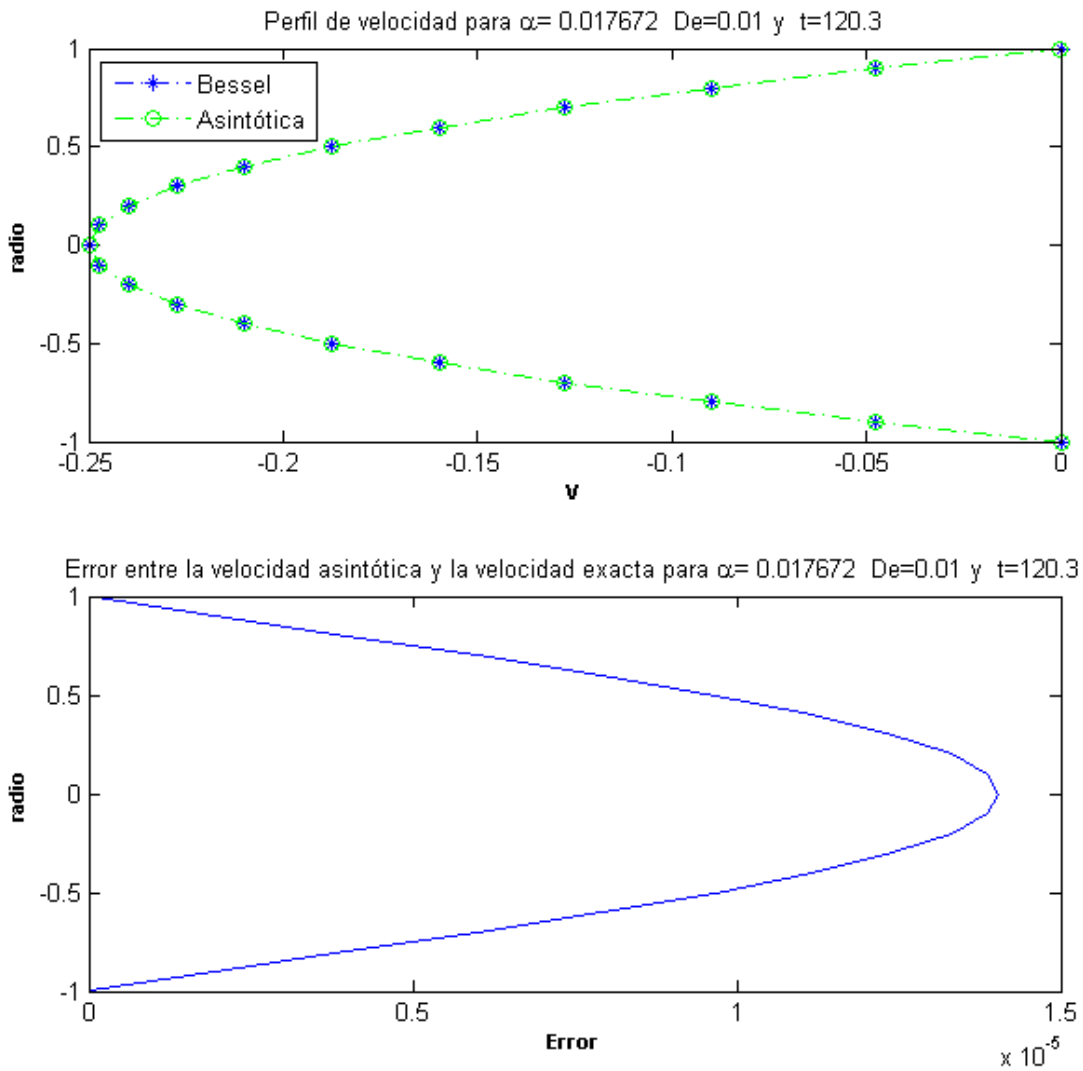
Para un tiempo  $\bar{t} = 100,3$ , el flujo desarrollado oscila lentamente, como se observa en la Figura 4.14, la proximidad de las dos soluciones se conserva, para un tiempo real de  $1,1994ms$  el perfil del error absoluto sigue estando por debajo de  $\bar{t} = 1,5 \times 10^{-5}ms$ .

En el caso del CPyCl/NaSal, los perfiles de velocidad de ambas soluciones se muestran en la Figura 4.15, éstos tienen un error absoluto máximo de  $6 \times 10^{-8}$ , en un tiempo de real de  $t = 1ms$ . Para el aceite SAE 40, las velocidades se muestran la Figura 4.18, se aprecia un error absoluto máximo de  $1 \times 10^{-7}$ , en un tiempo real  $t = 1ms$ .



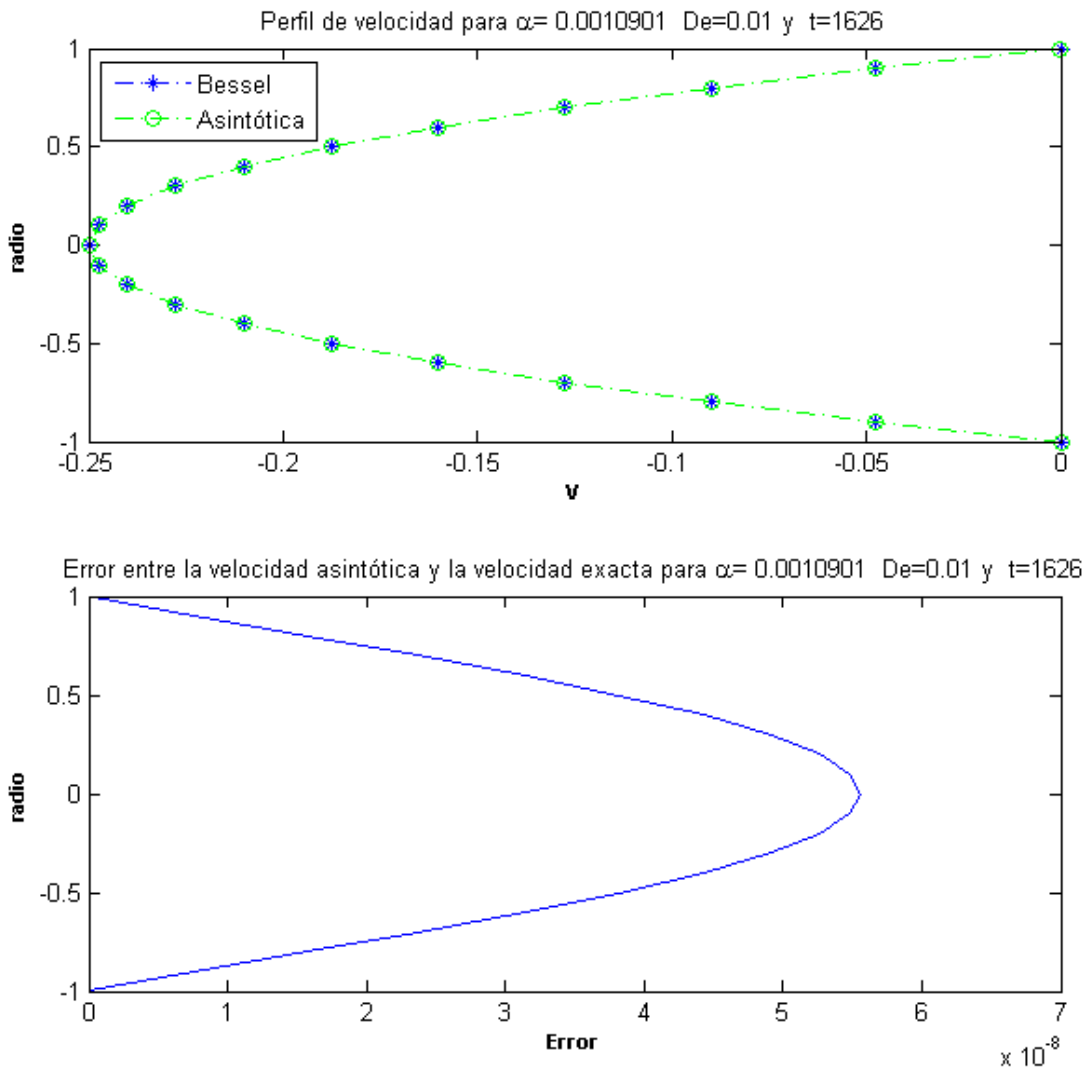
**Figura 4.13:** Gráfica superior: perfiles de velocidad de la aproximación asintótica y de Bessel del  $H_2O$ ; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.

Para tener una certidumbre de que la aproximación asintótica modela adecuadamente los



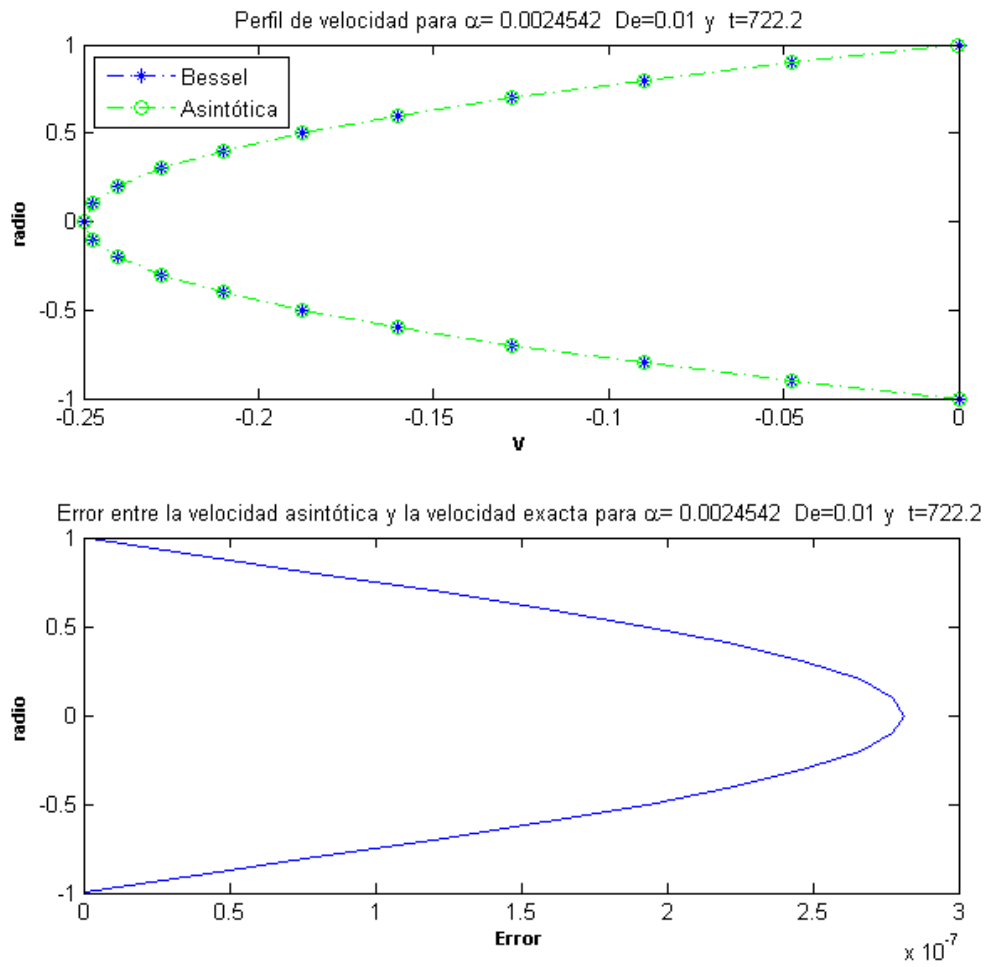
**Figura 4.14:** Gráfica superior: perfiles de velocidad de la aproximación asintótica y de Bessel del  $H_2O$ ; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.

valores de la velocidad, se presenta en la Figura 4.17 la gráfica de los errores entre la aproximación asintótica y la solución de Bessel, fijando el radio  $r = 0$ , variando el valor de la

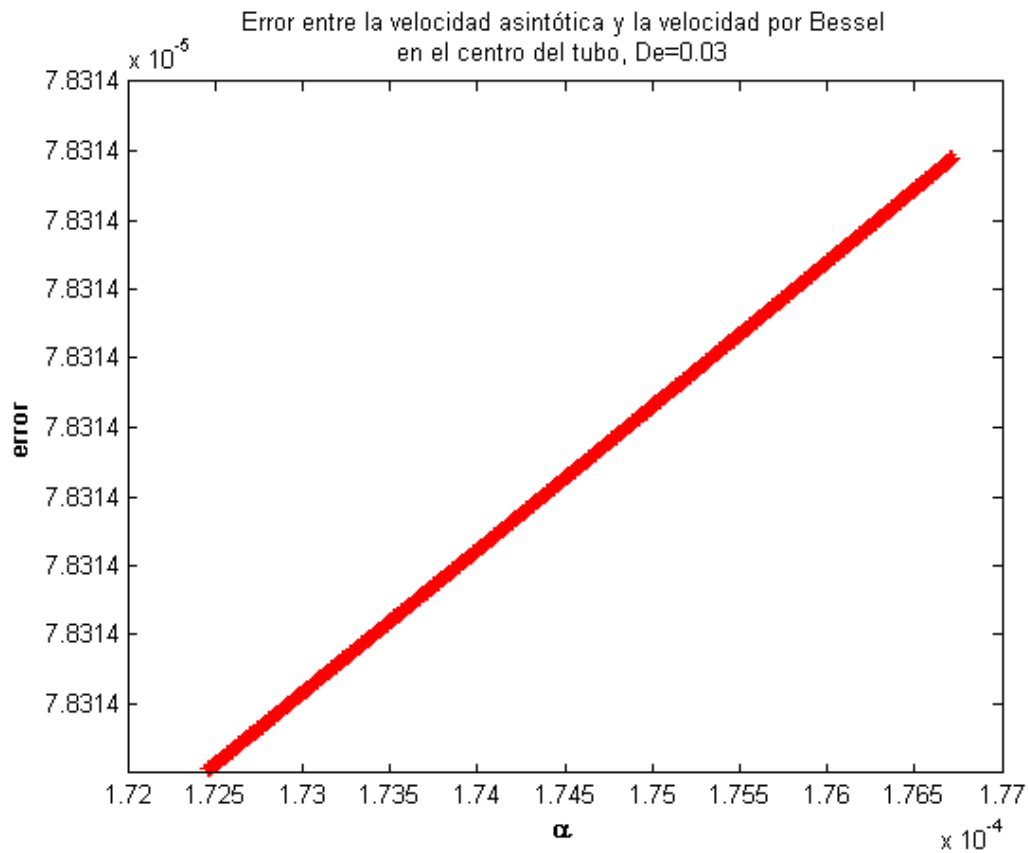


**Figura 4.15:** Gráfica superior: perfiles de velocidad de la aproximación asintótica y de Bessel del *CPyCl/NaSal*; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.

frecuencias de oscilación  $\alpha$ , se observa que conforme más grande es  $\alpha$ , el valor del error crece linealmente pero se conserva por debajo de  $1 \times 10^{-4}$ .



**Figura 4.16:** Gráfica superior: perfiles de velocidad de la aproximación asintótica y de Bessel del *SAE40*; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.



**Figura 4.17:** Gráfica de los errores entre la aproximación asintótica y de solución de Bessel del  $H_2O$ ,  $\bar{r} = 0$ .

#### 4.3.2. Temperatura Bessel vs Velocidad Asintótica.

Semejante al caso de las velocidades, se observa en la Tabla 4.9 las formas analíticas de las soluciones obtenidas por ambos métodos, que igualmente se reducen a un polinomio de orden sexto. Similarmente se comparó los valores numéricos de ambas velocidades para los mismo tres tipos de fluidos de trabajo usados para la velocidad, cuyos parámetros se describen en la Tabla 4.10.

**Tabla 4.9:** Formas analíticas de la solución para la temperatura por método.

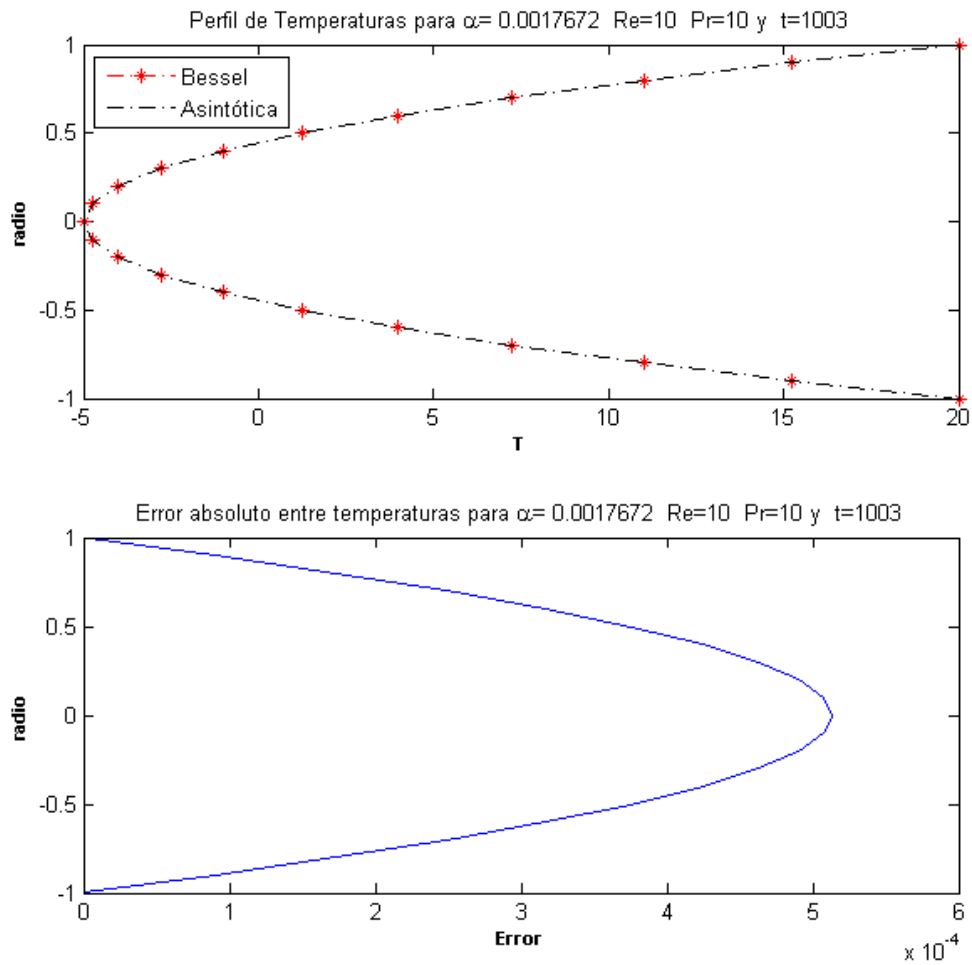
Temperatura	Expresión analítica
$\bar{T}_{Bessel}$	$\frac{-(Re+i\alpha^2 T_w)}{\alpha^2} \left[ 1 - \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\sqrt{-\alpha^2 Pr \bar{r}}}{2} \right)^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+n)} \left( \frac{\sqrt{-\alpha^2 Pr}}{2} \right)^{2n}} \right] e^{-i2\alpha^2 \bar{t}} + T_w$
$\bar{T}_{Asintótica}$	$\left[ \frac{Pr Re}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} + \bar{T}_w$

**Tabla 4.10:** Criterios de evaluación de los fluidos de trabajo.

Flujo de trabajo	$\nu$	$a$	$t$	$Re$	$Pr$	$T_w$
$H_2O$	$1,003x10^{-5}(\frac{cm^2}{ms})$	$0,0001(cm)$	$1(ms)$	10	10	$20^\circ C$
$CPyCl/NaSal$	$16,26(\frac{mm^2}{ms})$	$0,1(mm)$	$1(ms)$	100	10	$20^\circ C$
$SAE40$	$7,222x10^{-3}(\frac{cm^2}{ms})$	$0,001(cm)$	$1(ms)$	100	10	$20^\circ C$

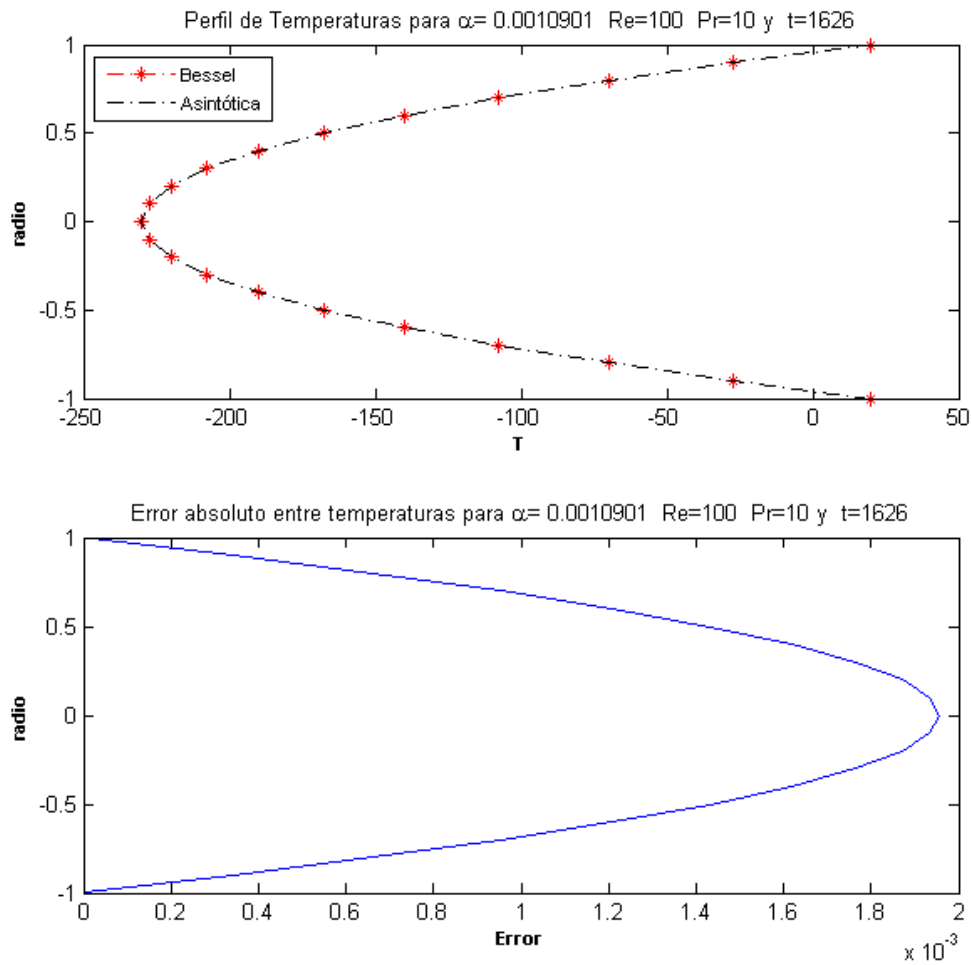
Los valores arrojados por las evaluaciones de las temperaturas bajos estos parámetros se encuentran muy cercanos, tal es el caso de los perfiles de temperatura que al ser comparados, se tiene un error absoluto menor de  $6 \times 10^{-4}$  en un tiempo real  $t = 1ms$ , como se muestra en la Figura 4.18.

Para el Cloruro de Potasio de Cetilpiridinio ( $CPyCl/NaSal$ ), el máximo error absoluto entre los valores de las dos soluciones es menor que  $2 \times 10^{-3}$ , en un tiempo real de  $1ms$  como se muestra en la Figura 4.19.



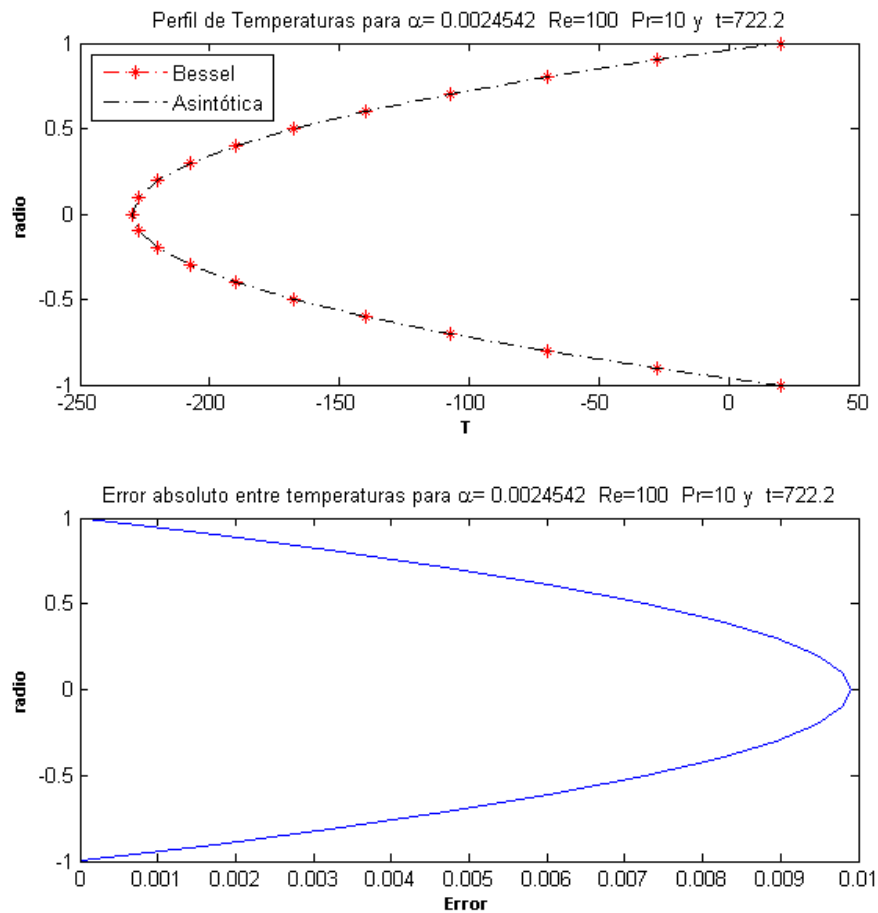
**Figura 4.18:** Gráfica superior: perfiles de temperatura de la aproximación asintótica y de Bessel del  $H_2O$ ; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.

Con respecto del aceite de motor *SAE40*, se observa en la Figura 4.20, que el error absoluto máximo entre los valores de las velocidades es de  $1 \times 10^{-2}$ , en un tiempo real de  $1ms$ . Para verificar que la confinancia entre ambas soluciones se conserva aun cuando se varien los



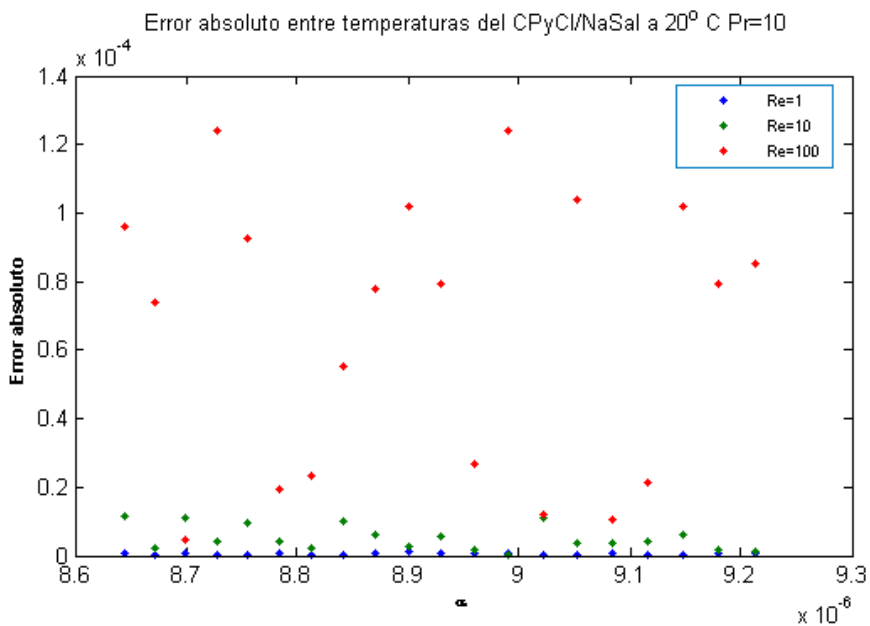
**Figura 4.19:** Gráfica superior: perfiles de temperatura de la aproximación asintótica y de Bessel del (*CPyCl/NaSal*); gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.

parámetros adimensionales, se creó un experimento, donde se fijó el valor del radio en el centro del dispositivo,  $\bar{r} = 0$ , ya que ahí es donde se experimentan las máximas velocidades del flujo, para  $Re = 1, 10$  y  $100$ , y 20 valores distintos aleatorios de  $\alpha$ . En la Figura 4.21 se



**Figura 4.20:** Gráfica superior: perfiles de temperatura de la aproximación asintótica y de Bessel del *SAE40*; gráfica inferior: error absoluto entre los valores de ambas velocidades.

muestran los errores para el *CPyCl/NaSal*. En la Tabla 4.11, se presenta los resultados del método ANOVA que da como resultado que no importa si se varían los parámetros  $\alpha$  y  $Re$ , es decir, estos no afectan a la confinidad de la solución por ambos métodos.



**Figura 4.21:** Gráfica de dispersión de los errores entre la aproximación asintótica y las solución de Bessel para el *CPyCl/NaSal*.

**Tabla 4.11:** Análisis ANOVA de los errores entre la aproximación asintótica y Bessel.

Efecto	<i>SC</i>	<i>GL</i>	<i>CM</i>	$F_0$	$P > F$
Tratamientos	$9,91961 \times 10^{-9}$	19	$5,22085 \times 10^{-10}$	0,28	0,9978
Error	$7,3794 \times 10^{-8}$	40	$1,84485 \times 10^{-9}$		
Total	$8,37136 \times 10^{-8}$	59			

# Capítulo 5

## Difusividad Térmica Efectiva.

Hasta este momento se analizó particularmente como afecta cada parámetro a las aproximaciones asintóticas de la velocidad y la temperatura. Sin embargo, existe otra forma de verificar si las soluciones aproximadas obtenidas modelan adecuadamente el comportamiento del flujo. Un camino es analizar la difusividad térmica efectiva ( $\kappa_e$ ), la cual mide la capacidad del fluido para conducir el calor en relación con su capacidad de almacenar energía térmica. Dentro del campo de la investigación teórica sobre  $\kappa_e$ , uno de los resultados más significativos se encuentran en las publicaciones de Kurzweg [9], donde llega a concluir que en un flujo de fluido en régimen oscilatorio la difusividad térmica efectiva es varios órdenes de magnitud mayor que la difusividad molecular del fluido, concluyendo que se mejora la transferencia de calor usando flujos oscilatorios en comparación con la convección de calor forzada por medio de un flujo unidireccional constante, estos resultados ha sido corroborados en la práctica con un dispositivo físico por Lambert [7] [13]. En consecuencia para el análisis de ésta investiga-

ción se atendera a esas conclusiones, obteniendo y analizando la difusividad térmica a través de las aproximaciones asintóticas de la velocidad y la temperatura y buscando si existe una frecuencia que logre esa mejora en el transporte de calor.

Enseguida se describen los pasos generales para el cálculo de  $\kappa_e$  mediante las aproximaciones asintóticas de la velocidad y la temperatura desarrolladas en este proyecto.

## 5.1. Cálculo de $\kappa_e$ mediante las aproximaciones asintóticas $\bar{V}$ y $\bar{T}$ .

A partir de los resultados que se obtuvieron con el método de aproximación asintótica para la velocidad y la temperatura, tenemos un camino analítico discreto y por tanto más sencillo para el cálculo de la difusividad térmica efectiva, el cual se explica con pasos generales en los siguientes párrafos, el desarrollo minucioso para su obtención se describe en el Apéndice C.

La ecuación para obtener la difusividad térmica efectiva está dada por,

$$\kappa_e = -\frac{1}{4} \int_0^1 \left[ \bar{\bar{T}}\bar{V} + \bar{V}\bar{\bar{T}} \right] d\bar{r} \quad (5.1)$$

donde la doble barra implica el complejo conjugado de la temperatura y la velocidad.

Tomando las ecuaciones de velocidad dada por,

$$\bar{V}(\bar{r}) = \left[ \frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$$

Como  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} = \alpha^2(i\alpha^2 De + 1)$  y  $\mathcal{P}_{\alpha^2, De} = (i\alpha^2 De + 1)$ , sustituyendo sus valores en  $\bar{V}$ , obtenemos,

$$\bar{V}(\bar{r}) = \left[ \frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \alpha^2(i\alpha^2 De + 1) \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \alpha^4(i\alpha^2 De + 1)^2 \frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$$

Reacomodando los términos de  $\bar{V}$  y separando la parte real de la parte imaginaria, ésta se expresa como,

$$\bar{V}(\bar{r}) = \left\{ \frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1) - \frac{\alpha^4 De}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{\alpha^4(\alpha^4 De^2 - 1)}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + i \left[ \frac{\alpha^2}{4} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{2\alpha^6 De}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] \right\} e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$$

Renombrado la parte real y la parte imaginaria de  $\bar{V}$ , se tiene que,

$$A = \frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1) - \frac{\alpha^4 De}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{\alpha^4(\alpha^4 De^2 - 1)}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)$$

y

$$B = \frac{\alpha^2}{4} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{2\alpha^6 De}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)$$

Sea  $\phi = \alpha^2 \bar{t}$ , entonces la velocidad queda expresada como,

$$\bar{V}(\bar{r}) = (A - iB)e^{-i\phi} \quad (5.2)$$

Entonces el conjugado de  $\bar{V}$  se expresa como,

$$\bar{\bar{V}}(\bar{r}) = (A + iB)e^{i\phi} \quad (5.3)$$

Realizando un procedimiento similar a la ecuación de temperatura, tenemos que inicialmente está expresada como,

$$\bar{T}(\bar{r}) = \left[ \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 \bar{t}} + \bar{T}_w$$

Separando las partes real e imaginaria de  $\bar{T}$ , tenemos que éstas se expresan como,

$$\bar{T}(\bar{r}) = \left[ \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\alpha^2 Det_c} + \bar{T}_w e^{-i\alpha^2 \bar{t}} e^{i\alpha^2 \bar{t}}$$

Reacomodando términos y reemplazando  $\alpha^2 \bar{t} = \phi$ ,

$$\bar{T}(\bar{r}) = \left[ \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] e^{-i\phi} + \bar{T}_w e^{-i\phi} e^{i\phi}$$

$$\bar{T}(\bar{r}) = \left\{ \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{i\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + T_w [\cos\phi + i\text{sen}\phi] \right\} e^{-i\phi}$$

Separando la parte real y la parte imaginaria,

$$\bar{T}(\bar{r}) = \left\{ \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + T_w \cos\phi + i \left[ \frac{\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) + T_w \text{sen}\phi \right] \right\} e^{-i\phi}$$

Renombrando la parte real e imaginaria de  $\bar{T}$ , se tiene que

$$C = \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + T_w \cos\phi$$

y

$$D = \frac{\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) + T_w \text{sen}\phi$$

Entonces la ecuación de temperaturas queso expresada como,

$$\bar{T}(\bar{r}) = (C - iD) e^{-i\phi} \quad (5.4)$$

Entonces el conjugado de  $T$  se expresa como,

$$\bar{\bar{T}}(\bar{r}) = (C + iD) e^{i\phi} \quad (5.5)$$

Sustituyendo (5.2), (5.3), (5.4) y (5.5) en la ecuación de la difusividad térmica se obtiene,

$$\begin{aligned} \kappa_e &= -\frac{1}{4} \int_0^1 [\bar{\bar{T}}\bar{V} + \bar{V}\bar{T}] d\bar{r} \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^1 [(C + iD) e^{i\phi} (A - iB) e^{-i\phi} + (A + iB) e^{i\phi} (C - iD) e^{-i\phi}] d\bar{r} \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^1 [(C + iD)(A - iB) + (A + iB)(C - iD)] d\bar{r} \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^1 [AC - iBD + iAD + BD + AC - iAD + iBC + BD] d\bar{r} \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^1 (2AC + 2BD) d\bar{r} \\ &= -\frac{2}{4} \int_0^1 (AC + BD) d\bar{r} \\ \kappa_e &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (AC + BD) d\bar{r} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Sustituyendo la forma correspondiente para cada término  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  en (5.6) se logra tener una expresión más sencilla de  $\kappa_e$ .

$$\begin{aligned} \kappa_e &= -\frac{PrRe}{60} + \left(\frac{94}{2835}\right) \left[\frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^3} - \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) PrRe}{4^3}\right] + \\ &\frac{T_w \cos\phi}{12} - \left(\frac{1}{21}\right) \frac{\alpha^4 De Pr Re}{4^2} + \left(\frac{26694}{280665}\right) \left[\frac{\alpha^8 De Pr^3 Re}{4^5} - \frac{2\alpha^8 De Pr^2 Re}{4^5}\right] + \\ &\left(\frac{7}{30}\right) \left[\frac{\alpha^4 De T_w \cos\phi}{4^2} - \frac{\alpha^2 T_w \sin\phi}{4^2}\right] + \left(\frac{544077}{32837805}\right) \frac{\alpha^8 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr^3 Re}{4^5} + \\ &\left(\frac{17}{105}\right) \left[\frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) T_w \cos\phi}{4^3} - \frac{2\alpha^6 De T_w \sin\phi}{4^3}\right] - \left(\frac{43}{315}\right) \frac{\alpha^4 Pr^2 Re}{4^4} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ahora se tiene una ecuación discreta para el cálculo de la difusividad térmica efectiva, en la siguiente sección se analiza la eficacia calculando  $\kappa_e$  para tres tipos de fluidos newtonianos, a saber, el agua ( $H_2O$ ), el Cloruro de Citilpiridonio en solución de silicato de sodio ( $CPyCl/NaSal$ ) y el aceite de motor con SAE 40.

## 5.2. Evaluación y análisis de la $\kappa_e$ .

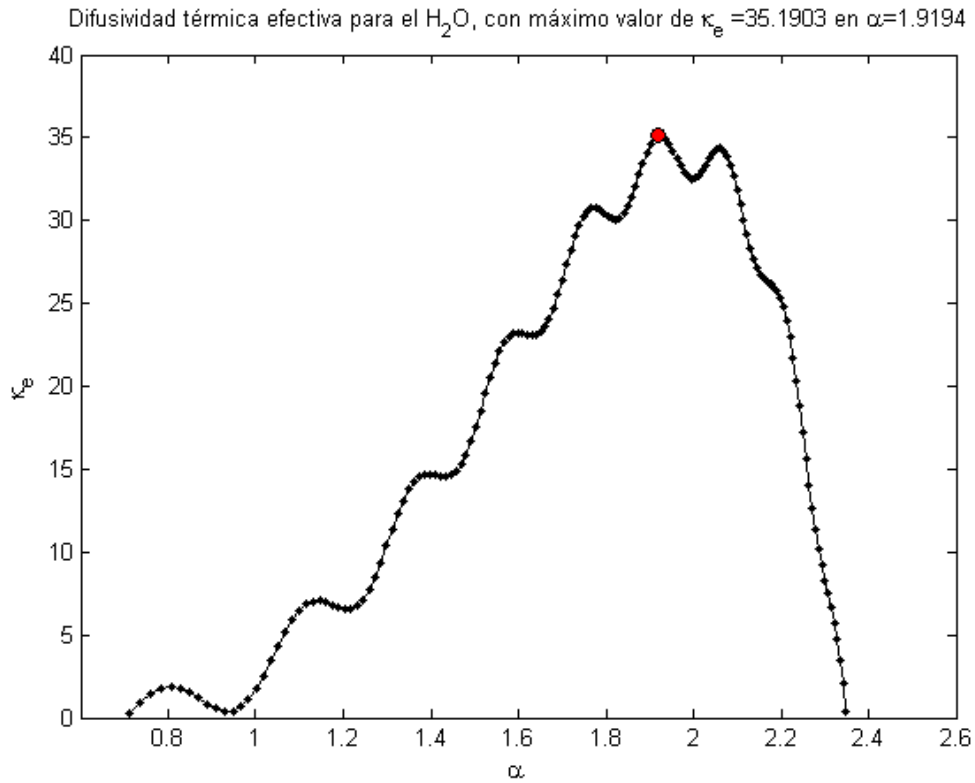
Para efectos de análisis dentro de la ecuación para el cálculo de  $\kappa_e$ , se encuentran presentes los siguientes parámetros  $De$ ,  $Re$ ,  $Pr$ ,  $\alpha$  y  $\bar{t}$ , éstos dos últimos son los que brindan el carácter oscilatorio al régimen del flujo. Dado el adimensionamiento que se aplicó al sistema de ecuaciones, el tiempo adimensional  $\bar{t}$  está dado por  $\bar{t} = t/t_c$ , donde  $t_c = \frac{a^2}{\nu}$ , en consecuencia  $\bar{t} = \frac{t\nu}{a^2}$ , mediante esta equivalencia se asignaran los valores del tiempo adimensional para que corresponda adecuadamente a cada fluido de trabajo. En la siguiente tabla se muestran los valores correspondientes para cada parámetro dimensional y adimensional correspondiente a tres flujos de trabajo con los cuales se calculó  $\kappa_e$ .

El comportamiento de la difusividad térmica efectiva para el caso del agua se muestra en la figura 5.1, la cual experimenta un valor máximo de  $\kappa_e = 35,0479$  en  $\alpha = 1,9710$ , los valores de los parámetros mediante los cuales se evaluó la difusividad térmica efectiva se indican en la Tabla 5.1. El comportamiento de  $\kappa_e$  es el esperado ya que se trata de un flujo Newtoniano.

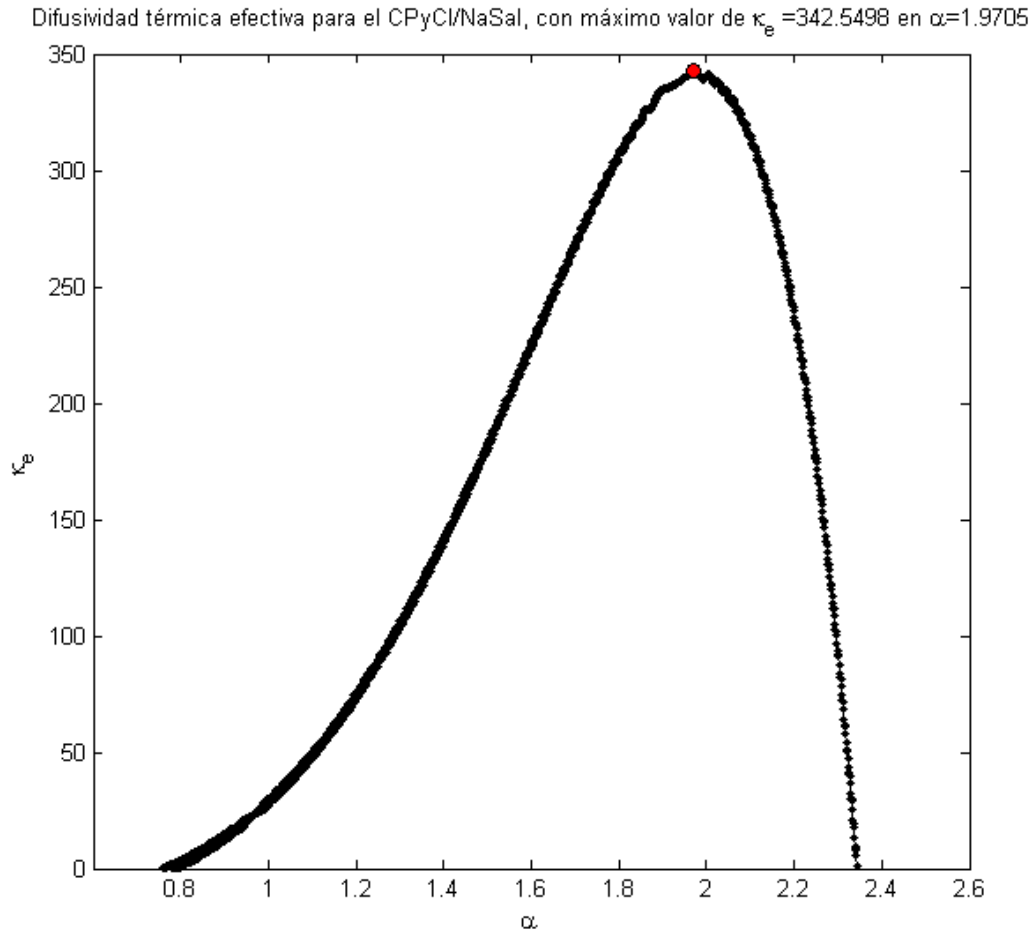
**Tabla 5.1:** Criterios de evaluación de los fluidos de trabajo.

Flujo de trabajo	$\nu$	$a$	$t$	$De$	$Re$	$Pr$	$T_w$
$H_2O$	$1,003 \times 10^{-5} (\frac{cm^2}{ms})$	$0,0001 (cm)$	$1 (ms)$	0,01	10	10	$20^\circ C$
$CPyCl/NaSal$	$16,26 (\frac{mm^2}{ms})$	$0,1 (mm)$	$1 (ms)$	0,01	100	10	$20^\circ C$
$SAE40$	$7,222 \times 10^{-3} (\frac{cm^2}{ms})$	$0,001 (cm)$	$1 (ms)$	0,01	100	10	$20^\circ C$

Dado los valores de los parámetros de la Tabla 2 para el caso del Cloruro de Cetilpiridinio



**Figura 5.1:** Difusividad térmica efectiva para el Agua a  $20^\circ C$ .

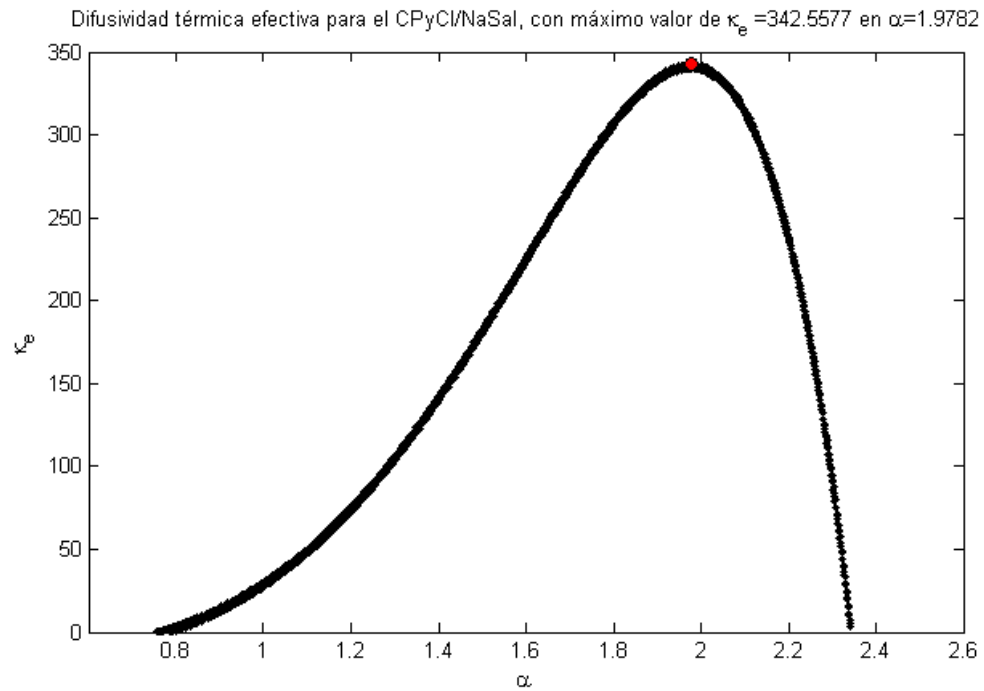


**Figura 5.2:** Difusividad térmica efectiva para el CPyCl/NaSal a  $20^{\circ}C$ .

este experimenta un máximo valor de  $\kappa_e = 6,9781 \times 10^{-5}$  en  $\alpha = 0,0622$ , su comportamiento se muestra en la Figura 5.2.

Con respecto al aceite SAE 40 este experimenta un valor máximo  $\kappa_e = 32,857$  en  $\alpha = 1,9882$ , su comportamiento se muestra en la Figura 5.3.

A partir de la forma discreta desarrollada para el cálculo de la difusividad térmica efectiva,



**Figura 5.3:** Difusividad térmica efectiva para el SAE 40 a  $20^{\circ}\text{C}$ .

se cuenta con una herramienta sencilla y eficiente para el análisis del transporte de calor en fluidos líquidos en régimen oscilatorio a bajas frecuencias.

# Capítulo 6

## Conclusiones.

Los modelos matemáticos obtenidos a través de la aproximación asintótica para la velocidad y la temperatura, cumplen al ser evaluados en los distintos parámetros adimensionales con el comportamiento esperado para los regímenes del flujo y las naturalezas del fluido. Por ejemplo, al calcular con distintos números de Womersley, los perfiles instantáneos que arroja el comportamiento de la velocidad, transitan del régimen constante unidireccional al régimen oscilatorio, tanto para bajas como altas frecuencias.

Así mismo los perfiles de temperatura instantáneos reflejan el comportamiento de un flujo unidireccional constante, donde la temperatura más alta se localiza en el centro del dispositivo y se distribuye homogéneamente de forma radial, sus perfiles también muestran como se distribuye la temperatura para flujos en altas frecuencias de oscilación, reflejando un perfil constante tipo tapón.

Con el cálculo de la difusividad térmica efectiva, se confirma lo descubierto por los investiga-

dores [9] [7] [13], que poner a oscilar el flujo contribuye a incrementar el transporte de calor, y que para ciertas condiciones del flujo existe una frecuencia que genera ese máximo valor.

Un logro importante de resaltar en este trabajo, es la reducción en la forma analítica y la sencillez de las ecuaciones que modelan a la velocidad y la temperatura, los cuales se obtuvieron para cada uno de los regímenes generales que presentan los flujos en fenómenos reales, a saber, para flujo Poiseuille, para flujo Newtoniano y para flujo tipo tapón, cada uno de ellos con distinta naturaleza variando desde fluido viscoso, viscoelástico y elástico, así mismo con distinta capacidad advectiva difusiva.

Una de las utilidades de esta investigación es la contribución al acervo de la mecánica de fluidos y de la reología, generando con los resultados obtenidos herramientas, ya sea para los estudiantes o los investigadores en el área, con un lenguaje matemático sencillo, y con la cual tienen la posibilidad de sustituir las ecuaciones diferenciales parciales de tipo Bessel que se pueden presentar en sus desarrollos teóricos al estudiar fenómenos de transporte como el aquí presentado.

Algunas de las actividades investigativas que derivarían del presente desarrollo, es darse a la tarea de establecer una aproximación asintótica donde se considere no solo flujo unidireccional, sino en dos dimensiones, axial y transversal, generalizando el tratamiento del régimen de flujo de fluido. Así mismo, generar una herramienta para modelar más eficientemente los perfiles de temperatura con régimen oscilatorio en altas frecuencias de oscilación. Otro trabajo interesante es la contrastación de la aproximación asintótica con los resultados de las

soluciones mediante los métodos numéricos que resuelven ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales sobre fenómenos similares al analizado en esta investigación, esto por mencionar algunas de las líneas posibles de investigación a futuro, en las cuales se vaya generando un grupo de investigadores en el área de la modelación matemáticas para fenómenos físicos y que coadyuve a la formación de nuevos investigadores.

# Bibliografía

- [1] HERREA, I. and PINDER, G.F. *Mathematical modeling in science and Approach*. Willey, First edition, 2012.
- [2] ALLEN, M.B. HERRERA, I. and HERRERA, I. *Numerical Modeling in Science and Engineering*. Wiley-Interscience Publication, 1988.
- [3] WHITE, F.M. *Mecánica de fluidos*. Mc Graw Hill, sexta edición, 2008.
- [4] SIMON, T.W. and SEUME, J.R. *A Survey of Oscillating Flow in Stirling Engine Heat Exchangers*. NASA, 1988.
- [5] GARY LEAL, L., *Advanced Transport Phenomena*. Primera edición. Cambridge University Press, 2007.
- [6] REYNOLDS, O. *An experimental Investigation of the Circumstances which Determine wheter the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resisnce in Parallel Channels*. The Royal Society is collaborating with JSTOR, Proceedings of the Royal Society of London, 1883.

- [7] LAMBERT ARISTA, A.A. *Tesis: Transferencia de calor en fluidos viscoelásticos oscilando dentro de un colector solar*. Tesis Posgrado de Ingeniería, UNAM, 2005.
- [8] CHATWIN, P. C. *On the longitudinal dispersion of passive contaminant in oscillating flows in tubes*. J. Fluid Mech., 71:513-527, 1975.
- [9] KURZWEIG, U.H. *Enhanced heat conduction in fluids subjected to sinusoidal oscillations*. J. Heat Transfer 107, 459-462, 1985.
- [10] MORRISON, F.A. *Understanding Rheology*. Oxford University Press, 2001.
- [11] DEL RÍO, J.A. y CASTREJÓN PITA, J.R. *Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos*, Revista Mexicana de Física, 8, 2003.
- [12] DEL RÍO, J.A. LÓPEZ DE HARO, M. y M. AND WHITAKER, S. *Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube*. Phys. Rev. E, 58:6323-6327, 1998; 64:39901(E), 2001.
- [13] LAMBERT, A.A. CUEVAS, S. J. y DEL RÍO, A. *Enhanced heat transfer using oscillatory flows in solar collectors*. ELSEVIER, Solar Energy 80 1296-1302, 2006.
- [14] MARTÍNEZ, A. PANDO, V. DEL RÍO, J. *Generalización al teorema  $\pi$  de Buckingham con algunas aplicaciones*. Disponible en: WWW.oasificacion.com. 2007.
- [15] HERRANZ, A. ARENAS, A. *Análisis Dimensional y sus aplicaciones*. Universidad de Murcia, Vol 1. 1989.

- [16] ROSAS, A. y HERRERA, I. *El número de Peclety su significación en la modelación de transporte difusivo de contaminantes*. Memoria del 4to Congreso Internacional y 2do Congreso Nacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, UMSNH-SMMNI-CIMNE, México 2007.
- [17] ROSAS, A. *El número de Peclet y su significación en la modelación de transporte difusivo de contaminantes*. Tesis Posgrado de la Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [18] SERRANO, A. *Estudio del flujo pulsátil en conductos de sección transversal con aplicación al flujo en arterias*. Tesis de Posgrado de la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. 2012.
- [19] WOMERSLEY, J.R., *Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known*. Journal Physiol, vol. 127, 1955, p. 553-563.
- [20] TOLANO, M.I., *Introducción a la Teoría de perturbaciones*. Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Universidad de Sonora. Disponible en: <http://lic.mat.uson.mx/tesis/140TesisInesGilT.pdf>
- [21] ESPINOSA, C.F., *Modelación de flujo laminar y transferencia de calor en haz de tubos*. Tesis de grado. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Chile. 2012.

- [22] KIM, N. J., PIPE, C.J., AHN, K.H., LEE, S.J. and MCKINLEY, G.H., *Capillary breakup extensional rheometry of a wormlike micellar solution*. Korea-Australia Rheology Journal. Vol. 22, No. 1, March 2010 pp. 31-41.
- [23] MACHUCA, A.P. y YÉPEZ, J.A., *Diseño, Construcción y experimentación de un viscosímetro Saybolt y desarrollo de un sistema de control temperatura en cascada para el laboratorio de fluidos de la facultad de Mecánica*. Tesis de Grado. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Colombia. 2009.
- [24] MUÑOZ, M.A., *Innovación tecnológica en sistemas de bombeo para fluidos de alta viscosidad*. Tesis de Maestría. Instituto Politécnico Nacional. México. 2010.

# Apéndice A

## Aproximación asintótica para la velocidad.

A continuación se describe el desarrollo paso a paso para la obtención de cada una de los términos que conforman la aproximación asintótica a la velocidad.

Para obtener la aproximación asintótica se considera que se presenta el caso límite cuando  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \ll 1$  en la ecuación,

$$\frac{d^2 \bar{V}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{V}}{d\bar{r}} - i\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \bar{V} = \mathcal{P}_{\alpha^2, De} e^{-i\alpha^2 \bar{t}}$$

para este caso se considera que existe la solución dada por  $\bar{V} = e^{-i\alpha^2 \bar{t}} H(\bar{r})$ , sustituyéndola en la ecuación anterior, esta queda expresada ahora como,

$$\frac{d^2 H}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH}{d\bar{r}} - i\mathcal{R}_{\alpha^2, De} H = \frac{\mathcal{P}_{\alpha^2, De} e^{-i\alpha^2 \bar{t}}}{e^{-i\alpha^2 \bar{t}}}$$

la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 H}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH}{d\bar{r}} - i\mathcal{R}_{\alpha^2, De} H = \mathcal{P}_{\alpha^2, De} \quad (\text{A.1})$$

las condición de frontera para ésta nueva ecuación son: de no deslizamiento  $H(\bar{r} = 1) = 0$  y de acotamiento  $H(\bar{r} = 0) = \textit{finita}$ .

Si se aplica la condición del caso límite  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \rightarrow 0$  a la ecuación (A.1), esto implica que  $\alpha \rightarrow 0$ , esto implica que  $\mathcal{P}_{\alpha^2, De} \rightarrow 1$ . Con lo cual se reduce la forma de ésta a,

$$\frac{d^2 H}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH}{d\bar{r}} = 1 \quad (\text{A.2})$$

La solución para la ecuación (A.2) con esas condiciones de frontera se obtienen a través del método simple de integración, acomodando los términos en la ecuación (A.2).

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d(\bar{r} \frac{dH}{d\bar{r}})}{d\bar{r}} = 1 \quad (\text{A.3})$$

multiplicando por  $\bar{r}$  ambas partes de la ecuación,

$$\frac{d(\bar{r} \frac{dH}{d\bar{r}})}{d\bar{r}} = \bar{r} \quad (\text{A.4})$$

integrando,

$$\int d(\bar{r} \frac{dH}{d\bar{r}}) = \int \bar{r} d\bar{r} \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{r} \frac{dH}{d\bar{r}} = \frac{\bar{r}^2}{2} + c \quad (\text{A.6})$$

aplicando la condición inicial  $H(r = 0) = \textit{finita}$  y arbitraria, es decir que  $\frac{dH}{d\bar{r}} \neq 0$ , entonces sustituyendo en (A.6), se tiene que,

$$(0) \frac{dH}{d\bar{r}} = \frac{(0)^2}{2} + c \quad (\text{A.7})$$

esto implica que  $c = 0$ , por tanto

$$\bar{r} \frac{dH}{d\bar{r}} = \frac{\bar{r}^2}{2} \quad (\text{A.8})$$

dividiendo ambas partes de la ecuación entre  $\bar{r}$  la ecuación se expresa como,

$$\frac{dH}{d\bar{r}} = \frac{\bar{r}}{2} \quad (\text{A.9})$$

integrando en ambas partes de la igualdad

$$\int dH = \frac{1}{2} \int \bar{r} d\bar{r} \quad (\text{A.10})$$

se obtiene

$$H = \frac{\bar{r}^2}{4} + c \quad (\text{A.11})$$

aplicando la condición inicial  $H(\bar{r} = 1) = 0$  se obtiene que

$$0 = \frac{1}{4} + c \quad (\text{A.12})$$

esto implica que  $c = -\frac{1}{4}$ , sustituyendo su valor en (A.11),  $H(\bar{r})$  queda expresada como,

$$H(\bar{r}) = \frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1) \quad (\text{A.13})$$

Cómo  $\bar{V} = H(\bar{r})e^{-i\alpha^2\bar{t}}$ , entonces una primer solución a la velocidad está dada por la siguiente ecuación,

$$\bar{V}(\bar{r}) = \frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1) e^{-i\alpha^2\bar{t}} \quad (\text{A.14})$$

Esto implica que cuando  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \rightarrow 0$ , el problema se reduce a un flujo de Poiseuille cuasies-tacionario al cual se le está aplicando un gradiente de presión instantáneo. Es importante

señalar que la solución (A.15) fue más fácil de obtener por este método, en el que directamente se aproximó a la ecuación diferencial en lugar de resolver primero el problema exacto y luego hallar la aproximación a dicha solución a través de reducir los términos de las series de Bessel que son en este caso infinitas y con coeficientes factoriales.

Por supuesto, que el caso límite, no contiene ninguna influencia de la inercia. Para determinar los efectos pequeños de la inercia, se usan los valores de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$  distintos de cero, y se aplica una solución aproximada de  $H(\bar{r})$  cuya forma es una expansión asintótica en que sus términos sucesivos son proporcionales a  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$H(\bar{r}) = H_0(\bar{r}) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} H_1(\bar{r}) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 H_2(\bar{r}) + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) \quad (\text{A.15})$$

Esta expansión es regular, ya que tiene la misma forma en todo el dominio,  $0 \leq \bar{r} \leq 1$ . El término  $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3)$  es convergente a cero cuando  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \rightarrow 0$ . Sí en la ecuación (A.1) se sustituye la ecuación (A.16) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_0}{d\bar{r}^2} + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{d^2 H_1}{d\bar{r}^2} + \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{d^2 H_2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH_0}{d\bar{r}} + \\ \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH_1}{d\bar{r}} + \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{dH_2}{d\bar{r}} - i\mathcal{R}_{\alpha^2, De} H_0 - \\ i\mathcal{R}_{\omega, \bar{v}}^2 H_1 + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) = \mathcal{P}_{\alpha^2, De} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

donde  $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3)$  representa todos los términos proporcionales a  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3$  y de orden mayor.

Los cuales se han supuesto despreciables. Sustituyendo en (A.16) las condiciones de frontera se tiene que

$$H_0(1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} H_1(1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 H_2(1) + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) = 0 \quad (\text{A.17})$$

Asumiendo que el parámetro  $\mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3)$  es asintóticamente pequeño pero a su vez arbitrario, esto es, que las solución (A.16) y (A.17) se satisfacen para cada valor pequeño, pero arbitrario de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$ . Reescribiendo la ecuación (A.17) en la forma

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_0}{d\bar{r}} \right) - \mathcal{P}_{\alpha^2, De} \right] + \\ & \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) - iH_0 \right] + \\ & \mathcal{R}_{\alpha^2 De}^2 \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) - iH_1 \right] + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Es esta última ecuación se supone que los términos en cada nivel de  $\mathcal{R}_{\alpha^2, De}$ , individualmente tienden a cero, si se observa su forma ésta es muy parecida a la ecuación (A.18). Además se asume que  $H_0(1) = H_1(1) = H_2(1) = 0$ . Para obtener la forma de las funciones  $H_1(\bar{r})$  y  $H_2(\bar{r})$  se considera que se cumple las siguientes igualdades.

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_0}{d\bar{r}} \right) - \mathcal{P}_{\alpha^2, De} = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{R}_{\alpha^2, De} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) - iH_0 \right] = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\mathcal{R}_{\omega, \bar{V}}^2 \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) - iH_1 \right] = 0 \quad (\text{A.21})$$

Como se asumió que los  $\mathcal{R}_{\omega, \bar{V}}$  son pequeños pero distintos de cero entonces se pueden expresar las ecuaciones anteriores como

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_0}{d\bar{r}} \right) = \mathcal{P}_{\alpha^2, De} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = iH_0 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = iH_1 \quad (\text{A.24})$$

La ecuación (A.23), ya ha sido resuelta, considerando  $\mathcal{P}_{\alpha^2, De} \rightarrow 0$ , y está dada por (A.14),

$$H_0 = \frac{(\bar{r}^2 - 1)}{4}$$

Ésta se utiliza para obtener los demás términos de la aproximación asintótica mediante los siguientes procedimientos.

Para determinar la expresión de  $H_1$ , cuyas condiciones de frontera son  $H_1(1) = 0$  y  $H_1(0) = \text{finita}$ , se utiliza (A.14), el procedimiento que se aplica es el de integración como se muestra a través del siguiente desarrollo,

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = iH_0,$$

Sustituyendo  $H_0$ ,

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = i \frac{(\bar{r}^2 - 1)}{4},$$

Multiplicando la ecuación por  $\bar{r}$  se expresa ahora como,

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = \frac{i}{4} (\bar{r}^3 - \bar{r})$$

Integrando indefinidamente ambas en partes de la igualdad,

$$\int d \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = \frac{i}{4} \int (\bar{r}^3 - \bar{r}) d\bar{r}$$

Se obtiene

$$\bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} = \frac{i}{4} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \frac{\bar{r}^2}{2} \right) + c$$

Aplicando la condición de frontera  $H_1(0) = finita$ ,

$$0 \frac{dH_1}{d\bar{r}} = \frac{i}{4} \left( \frac{0}{4} - \frac{0}{2} \right) + c$$

Da como resultado que  $c = 0$ , la ecuación entonces se expresada como,

$$\bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} = \frac{i}{4} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \frac{\bar{r}^2}{2} \right)$$

Ahora dividiendo ambos miembros de la igualdad entre  $\bar{r}$ , la ecuación queda como,

$$\frac{dH_1}{d\bar{r}} = \frac{i}{4} \left( \frac{\bar{r}^3}{4} - \frac{\bar{r}}{2} \right),$$

Integrando indefinidamente ambos miembros de la ecuación,

$$\int dH_1 = \frac{i}{4} \int \left( \frac{\bar{r}^3}{4} - \frac{\bar{r}}{2} \right) d\bar{r}$$

Se obtiene la siguiente expresión,

$$H_1 = \frac{i}{4} \left( \frac{\bar{r}^4}{4^2} - \frac{\bar{r}^2}{4} \right) + c$$

Aplicando la condición  $H_1(1) = 0$

$$0 = \frac{i}{4} \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4} \right) + c$$

$$0 = \frac{i}{4^2} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) + c$$

Esto implica que  $c = \frac{i}{4^2} \left( \frac{3}{4} \right)$ , sustituyendo en  $H_1$  se tiene que,

$$H_1 = \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 \right) + \frac{i}{4^2} \left( \frac{3}{4} \right)$$

Simplificando la expresión,

$$H_1 = \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) \quad (\text{A.25})$$

Una vez que se obtuvo  $H_1$ , ahora se procede a encontrar  $H_2$  con valores de frontera  $H_2(1) = 0$  y  $H_2(0) = \text{finita}$ , a través de

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = iH_1$$

Sustituyendo  $H_1$  la ecuación diferencial,

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = i \left[ \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) \right]$$

Simplificando,

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = -\frac{1}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right)$$

Multiplicando la ecuación diferencial por  $\bar{r}$ , se tiene que,

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = -\frac{1}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^5}{4} - \bar{r}^3 + \frac{3\bar{r}}{4} \right)$$

Integrando indefinidamente ambos miembros de la ecuación,

$$\begin{aligned} \int d \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) &= -\frac{1}{4^2} \int \left( \frac{\bar{r}^5}{4} - \bar{r}^3 + \frac{3\bar{r}}{4} \right) d\bar{r} \\ \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} &= -\frac{1}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^6}{4(6)} - \frac{\bar{r}^4}{4} + \frac{3\bar{r}^2}{4(2)} \right) + c \\ \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} &= -\frac{1}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^6}{6} - \bar{r}^4 + \frac{3\bar{r}^2}{2} \right) + c \end{aligned}$$

Aplicando la condición de frontera  $H_2(0) = \text{finita}$ , se obtienen que,

$$(0) \frac{dH_2}{d\bar{r}} = -\frac{1}{4^3} \left( \frac{(0)^6}{6} - (0)^4 + \frac{3(0)^2}{2} \right) + c$$

Esto implica que  $c = 0$ , así que la ecuación toma la forma,

$$\bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} = -\frac{1}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^6}{6} - \bar{r}^4 + \frac{3\bar{r}^2}{2} \right)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación diferencial entre  $\bar{r}$ , se obtiene

$$\frac{dH_2}{d\bar{r}} = -\frac{1}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^5}{6} - \bar{r}^3 + \frac{3\bar{r}}{2} \right)$$

Integrando indefinidamente la ecuación,

$$\int dH_2 = -\frac{1}{4^3} \int \left( \frac{\bar{r}^5}{6} - \bar{r}^3 + \frac{3\bar{r}}{2} \right) d\bar{r}$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} H_2 &= -\frac{1}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^6}{36} - \frac{\bar{r}^4}{4} + \frac{3\bar{r}^2}{4} \right) + c \\ H_2 &= -\frac{1}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^6}{4(9)} - \frac{\bar{r}^4}{4} + \frac{3\bar{r}^2}{4} \right) + c \\ H_2 &= -\frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 \right) + c \end{aligned}$$

Sustituyendo la condición de frontera  $H_2(1) = 0$ , se tiene que,

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{4^4} \left( \frac{1}{9} - (1)^4 + 3(1)^2 \right) + c \\ 0 &= -\frac{1}{4^4} \left( \frac{1}{9} + 2 \right) + c \end{aligned}$$

Esto implica que  $c = \frac{1}{4^4} \left( \frac{19}{9} \right)$ , sustituyendo su valor en  $H_2$ ,

$$H_2 = -\frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 \right) + \frac{1}{4^4} \left( \frac{19}{9} \right)$$

Simplificando  $H_2$  queda expresada como,

$$H_2 = -\frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \quad (\text{A.26})$$

Por tanto la aproximación asintótica  $H(\bar{r})$  está dada por,

$$H(\bar{r}) = \frac{1}{4}(\bar{r}^2 - 1) + \mathcal{R}_{\alpha^2, De} \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \mathcal{R}_{\alpha^2, De}^2 \frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, De}^3) \quad (\text{A.27})$$

# Apéndice B

## Aproximación asintótica de la temperatura.

La ecuación de temperaturas propuesta como aproximación asintótica esta expresada como,

$$\frac{d^2 \bar{H}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{H}}{d\bar{r}} - i\alpha^2 Pr \bar{H} = Pr(Re + i\alpha^2 \bar{T}_w) e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \quad (\text{B.1})$$

Cuyas condiciones de frontera están dadas por  $\bar{H}(\bar{r} = 1) = 0$  y  $\bar{H}(\bar{r} = 0) = \textit{finita}$ . Si se considera el caso límite en que  $\alpha \rightarrow 0$  la ecuación anterior queda expresada como,

$$\frac{d^2 \bar{H}}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{H}}{d\bar{r}} = Pr Re \quad (\text{B.2})$$

Si se reacomoda la ecuación diferencial obtenemos la expresión,

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d(\bar{r} \frac{d\bar{H}}{d\bar{r}})}{d\bar{r}} = Pr Re \quad (\text{B.3})$$

multiplicando  $\bar{r}$  en ambas partes de la igualdad se obtiene,

$$\frac{d(\bar{r}\frac{dH}{d\bar{r}})}{d\bar{r}} = PrRe\bar{r} \quad (\text{B.4})$$

Integrando indefinidamente,

$$\int d(\bar{r}\frac{dH}{d\bar{r}}) = PrRe \int \bar{r}d\bar{r} \quad (\text{B.5})$$

se obtiene la ecuación,

$$\bar{r}\frac{dH}{d\bar{r}} = PrRe\frac{\bar{r}^2}{2} + c \quad (\text{B.6})$$

sustituyendo la condición inicial  $H(r = 0) = finita$  en ( B.6) se obtiene,

$$(0)\frac{dH}{d\bar{r}} = PrRe\frac{0}{2} + c \quad (\text{B.7})$$

implicando con ello que  $c = 0$  y la expresión de (B.6) se reduce ha,

$$\bar{r}\frac{dH}{d\bar{r}} = PrRe\frac{\bar{r}^2}{2} \quad (\text{B.8})$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $\frac{1}{\bar{r}}$  se tiene que,

$$\frac{dH}{d\bar{r}} = PrRe\frac{\bar{r}}{2} \quad (\text{B.9})$$

integrando ésta última ecuación,

$$\int dH = PrRe \int \frac{\bar{r}}{2}d\bar{r} \quad (\text{B.10})$$

Se obtiene,

$$H = PrRe\frac{\bar{r}^2}{4} + c \quad (\text{B.11})$$

sustituyendo la condición inicial  $H(\bar{r} = 1) = 0$  en (B.11),

$$0 = PrRe \frac{1}{4} + c \quad (\text{B.12})$$

esto implica que  $c = -\frac{PrRe}{4}$ , sustituyendo este valor en (B.11), se tiene que,

$$\begin{aligned} H &= PrRe \frac{\bar{r}^2}{4} - PrRe \frac{1}{4} \\ &= \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) \end{aligned}$$

Sustituyendo  $H_0$  en la solución propuesta para la temperatura  $\bar{T}^* = e^{-i\alpha^2 \bar{t}} H(\bar{r})$ , se obtiene

$$\bar{T}^* = \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \quad (\text{B.14})$$

Como  $\bar{T}^* = \bar{T} - \bar{T}_w$ , entonces

$$\bar{T} = \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) e^{-i\alpha^2 \bar{t}} + \bar{T}_w \quad (\text{B.15})$$

es una primera aproximación a la solución de temperaturas radiales. Es decir, cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , el problema se reduce a un polinomio de orden dos, en consecuencia, los perfiles de temperatura describen, a través de un corte transversal, un comportamiento parabólico con forme el flujo fluye. Es importante señalar que la solución (B.15) es más fácil de obtener por este método, ya que se ha aproximó directamente de la ecuación diferencial, en el método tradicional primero se resuelve el problema exacto a través de la consideración de la ecuación diferencial de temperatura como tipo Bessel y luego se encuentra la aproximación a la misma, para posteriormente buscar mecanismos que reduzcan los términos de las series de Bessel que son infinitas y con coeficientes indeterminados. Para determinar los efectos pequeños de la

inercia, usamos valores de  $\alpha$  muy pequeños pero distintos de cero, y aplicamos una solución aproximada de  $H(\bar{r})$  cuya forma es una expansión asintótica en que sus términos sucesivos son proporcionales a  $\alpha^2 Pr$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$H(\bar{r}) = H_0(\bar{r}) + \alpha^2 Pr H_1(\bar{r}) + \alpha^4 Pr^2 H_2(\bar{r}) + \mathcal{O}(\alpha^6 Pr^3) \quad (\text{B.16})$$

Esta expansión es regular, ya que tiene la misma forma en todo el dominio  $0 \leq \bar{r} \leq 1$  y converge a cero cuando  $\alpha \rightarrow 0$ . El término  $\mathcal{O}(\alpha^6 Pr^3)$ , representa a todos los términos proporcionales a  $\alpha^2 Pr$  de orden mayor a dos. Los cuales se asumen como despreciables. Sí en la ecuación (B.1) se sustituye la ecuación (B.16) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_0}{d\bar{r}^2} + \alpha^2 Pr \frac{d^2 H_1}{d\bar{r}^2} + \alpha^4 Pr^2 \frac{d^2 H_2}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH_0}{d\bar{r}} + \\ \alpha^2 Pr \frac{1}{\bar{r}} \frac{dH_1}{d\bar{r}} + \alpha^4 Pr^2 \frac{dH_2}{d\bar{r}} - i\alpha^2 Pr H_0 - \\ i\alpha^4 Pr^2 H_1 + \mathcal{O}(\alpha^6 Pr^3) = Pr(Re + i\alpha^2 \bar{T}^*) e^{\alpha^2 Det_c} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Sustituyendo en (B.16) las condiciones de frontera  $H(\bar{r} = 1) = 0$  tenemos que

$$H_0(1) + \alpha^2 Pr H_1(1) + \alpha^4 Pr^2 H_2(1) + \mathcal{O}(\alpha^6 Pr^3) = 0 \quad (\text{B.18})$$

Asumiendo que el parámetro  $\mathcal{O}(\alpha^6 Pr^3)$  es asintóticamente pequeño pero a su vez arbitrario, esto es, que las soluciones (B.17) y (B.18) se satisfacen para cada valor pequeño, pero

arbitrario de  $\alpha^2 Pr$ . Reescribiendo la ecuación (B.17) en la forma

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_0}{d\bar{r}} \right) - Pr(Re + i\alpha^2 \bar{T}^*) e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \right] + \\ & \quad \alpha^2 Pr \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) - iH_0 \right] + \\ & \alpha^4 Pr^2 \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) - iH_1 \right] + \mathcal{O}(\alpha^6 Pr^3) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

La ecuación anterior supone que los términos en cada nivel de  $\alpha^2 Pr$ , individualmente tienden a cero, se observa que su forma es muy parecida a la ecuación (B.17). Además se asume que  $H_0(1) = H_1(1) = H_2(1) = 0$ . Para obtener la expresión de las funciones  $H_1(\bar{r})$  y  $H_2(\bar{r})$  se considera que se cumple las siguientes igualdades.

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_0}{d\bar{r}} \right) - Pr(Re + i\alpha^2 \bar{T}^*) e^{-i\alpha^2 \bar{t}} = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$\alpha^2 Pr \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) - iH_0 \right] = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$\alpha^4 Pr^2 \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) - iH_1 \right] = 0 \quad (\text{B.22})$$

Como se supuso que los  $\alpha^2 Pr$  es muy pequeños pero distintos de cero entonces se pueden expresar las ecuaciones anteriores como

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_0}{d\bar{r}} \right) = Pr(Re + i\alpha^2 \bar{T}^*) e^{-i\alpha^2 \bar{t}} \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = iH_0 \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = iH_1 \quad (\text{B.25})$$

La ecuación (B.24), ya ha sido resuelta y esta dada por (B.14)

$$H_0 = \frac{PrRe}{4}(\bar{r}^2 - 1)$$

Sustituyendo  $H_0$  en la ecuación (B.22), se construye el término  $H_1$  con el proceso siguiente,

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = i \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1)$$

Multiplicando la ecuación por  $\bar{r}$  se expresa ahora como,

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = i \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^3 - \bar{r})$$

Integrando indefinidamente ambas en partes de la igualdad,

$$\int d \left( \bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} \right) = i \frac{PrRe}{4} \int (\bar{r}^3 - \bar{r}) d\bar{r}$$

Se obtiene

$$\bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} = i \frac{PrRe}{4} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \frac{\bar{r}^2}{2} \right) + c$$

Aplicando la condición de frontera  $H_1(0) = finita$ ,

$$0 \frac{dH_1}{d\bar{r}} = i \frac{PrRe}{4} \left( \frac{0}{4} - \frac{0}{2} \right) + c$$

Da como resultado que  $c = 0$ , la ecuación entonces se expresada como,

$$\bar{r} \frac{dH_1}{d\bar{r}} = i \frac{PrRe}{4} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \frac{\bar{r}^2}{2} \right)$$

Ahora dividiendo ambos miembros de la igualdad entre  $\bar{r}$ , la ecuación queda como,

$$\frac{dH_1}{d\bar{r}} = i \frac{PrRe}{4} \left( \frac{\bar{r}^3}{4} - \frac{\bar{r}}{2} \right),$$

Integrando indefinidamente ambos miembros de la ecuación,

$$\int dH_1 = i \frac{PrRe}{4} \int \left( \frac{\bar{r}^3}{4} - \frac{\bar{r}}{2} \right) d\bar{r}$$

Se obtiene la siguiente expresión,

$$H_1 = i \frac{PrRe}{4} \left( \frac{\bar{r}^4}{4^2} - \frac{\bar{r}^2}{4} \right) + c$$

Aplicando la condición  $H_1(1) = 0$

$$0 = i \frac{PrRe}{4} \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4} \right) + c$$

$$0 = i \frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) + c$$

Esto implica que  $c = i \frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{3}{4} \right)$ , sustituyendo en  $H_1$  se tiene que,

$$H_1 = i \frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 \right) + i \frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{3}{4} \right)$$

Simplificando la expresión,

$$H_1 = i \frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) \quad (\text{B.26})$$

Una vez que se obtuvo  $H_1$ , ahora se procede a encontrar  $H_2$  con valores de frontera  $H_2(1) = 0$

y  $H_2(0) = \textit{finita}$ , a través de

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = iH_1$$

Sustituyendo  $H_1$  la ecuación diferencial,

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = i \left[ i \frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) \right]$$

Simplificando,

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = -\frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right)$$

Multiplicando la ecuación diferencial por  $\bar{r}$ , se tiene que,

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) = -\frac{PrRe}{4^2} \left( \bar{r}^5 - \bar{r}^3 + \frac{3\bar{r}}{4} \right)$$

Integrando indefinidamente ambos miembros de la ecuación,

$$\begin{aligned} \int d \left( \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} \right) &= -\frac{PrRe}{4^2} \int \left( \bar{r}^5 - \bar{r}^3 + \frac{3\bar{r}}{4} \right) d\bar{r} \\ \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} &= -\frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^6}{4(6)} - \frac{\bar{r}^4}{4} + \frac{3\bar{r}^2}{4(2)} \right) + c \\ \bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} &= -\frac{PrRe}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^6}{6} - \bar{r}^4 + \frac{3\bar{r}^2}{2} \right) + c \end{aligned}$$

Aplicando la condición de frontera  $H_2(0) = finita$ , se obtienen que,

$$(0) \frac{dH_2}{d\bar{r}} = -\frac{PrRe}{4^3} \left( \frac{(0)^6}{6} - (0)^4 + \frac{3(0)^2}{2} \right) + c$$

Esto implica que  $c = 0$ , así que la ecuación toma la forma,

$$\bar{r} \frac{dH_2}{d\bar{r}} = -\frac{PrRe}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^6}{6} - \bar{r}^4 + \frac{3\bar{r}^2}{2} \right)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación diferencial entre  $\bar{r}$ , se obtiene

$$\frac{dH_2}{d\bar{r}} = -\frac{PrRe}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^5}{6} - \bar{r}^3 + \frac{3\bar{r}}{2} \right)$$

Integrando indefinidamente la ecuación,

$$\int dH_2 = -\frac{PrRe}{4^3} \int \left( \frac{\bar{r}^5}{6} - \bar{r}^3 + \frac{3\bar{r}}{2} \right) d\bar{r}$$

Se obtiene,

$$\begin{aligned}
 H_2 &= -\frac{PrRe}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^6}{36} - \frac{\bar{r}^4}{4} + \frac{3\bar{r}^2}{4} \right) + c \\
 &= -\frac{PrRe}{4^3} \left( \frac{\bar{r}^6}{4(9)} - \frac{\bar{r}^4}{4} + \frac{3\bar{r}^2}{4} \right) + c \\
 &= -\frac{PrRe}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 \right) + c
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la condición de frontera  $H_2(1) = 0$ , se tiene que,

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{PrRe}{4^4} \left( \frac{1}{9} - (1)^4 + 3(1)^2 \right) + c \\
 &= -\frac{PrRe}{4^4} \left( \frac{1}{9} + 2 \right) + c \\
 &= -\frac{PrRe}{4^4} \left( \frac{19}{9} \right) + c
 \end{aligned}$$

Esto implica que  $c = \frac{PrRe}{4^4} \left( \frac{19}{9} \right)$ , sustituyendo su valor en  $H_2$ ,

$$H_2 = -\frac{PrRe}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 \right) + \frac{PrRe}{4^4} \left( \frac{19}{9} \right)$$

Simplificando  $H_2$  queda expresada como,

$$H_2 = -\frac{PrRe}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \tag{B.27}$$

Por tanto la aproximación asintótica  $H(\bar{r})$  está dada por,

$$H(\bar{r}) = \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) + \alpha^2 Pr^2 Re \frac{i}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \alpha^4 Pr^3 Re \frac{1}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + \mathcal{O}(\mathcal{R}_{\alpha^2, D\epsilon}^3) \tag{B.28}$$

# Apéndice C

## Desarrollo de la Difusividad Térmica Efectiva.

La ecuación para obtener la difusividad térmica efectiva está dada por,

$$\kappa_e = -\frac{1}{2} \int_0^1 (AC - BD) d\bar{r} \quad (\text{C.1})$$

en el Capítulo 4 se simplificaron las aproximaciones asintóticas de la velocidad y la temperatura, teniendo que,

$$A = \frac{1}{4} (1 - \bar{r}^2) - \frac{\alpha^4 De}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1)}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)$$

,

$$B = \frac{\alpha^2}{4} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{2\alpha^6 De}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)$$

$$C = \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + T_w \cos\phi$$

y

$$D = \frac{\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) + T_w \sin\phi$$

Sustituyendo  $A, B, C$  y  $D$  en  $\kappa_e$ , ésta queda representada como,

$$\begin{aligned} \kappa_e = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \left[ \frac{1}{4} (\bar{r}^2 - 1) - \frac{\alpha^4 De}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1)}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] \right. \\ \left. \left[ \frac{PrRe}{4} (\bar{r}^2 - 1) - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) + T_w \cos\phi \right] + \right. \\ \left. \left[ \frac{\alpha^2}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) - \frac{2\alpha^6 De}{4^4} \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) \right] \left[ \frac{\alpha^2 Pr^2 Re}{4^2} \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) + T_w \sin\phi \right] \right\} d\bar{r} \quad (C.2) \end{aligned}$$

Separando los términos de la integral se obtiene,

$$\begin{aligned} \kappa_e = -\frac{1}{2} \left[ \frac{PrRe}{4^2} \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1)^2 d\bar{r} - \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^5} \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1) \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} + \frac{T_w \cos\phi}{4} \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1) d\bar{r} - \right. \\ \left. \frac{\alpha^4 De Pr Re}{4^3} \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1) \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) d\bar{r} + \frac{\alpha^8 De Pr^3 Re}{4^6} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} - \right. \\ \left. \frac{\alpha^4 De T_w \cos\phi}{4^2} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) d\bar{r} + \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr Re}{4^5} \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1) \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} - \right. \\ \left. \frac{\alpha^8 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr^3 Re}{4^8} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)^2 d\bar{r} + \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) T_w \cos\phi}{4^4} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} + \right. \\ \left. \frac{\alpha^4 Pr^2 Re}{4^4} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right)^2 d\bar{r} + \frac{\alpha^2 T_w \sin\phi}{4^2} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) d\bar{r} - \right. \\ \left. \frac{2\alpha^8 De Pr^2 Re}{4^6} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} - \frac{2\alpha^6 De T_w \sin\phi}{4^4} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} \right] \end{aligned}$$

Asociando términos semejantes se reduce el número de cálculos de integración,

$$\begin{aligned} \kappa_e = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{PrRe}{4^2} \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1)^2 d\bar{r} - \left[ \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^5} - \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) PrRe}{4^5} \right] \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1) \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} + \right. \\ & \frac{T_w \cos(\phi)}{4} \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1) d\bar{r} - \frac{\alpha^4 De Pr Re}{4^3} \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1) \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) d\bar{r} + \\ & \left. \left[ \frac{\alpha^8 De Pr^3 Re}{4^6} - \frac{2\alpha^8 De Pr^2 Re}{4^6} \right] \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} - \right. \\ & \left. \left[ \frac{\alpha^4 De T_w \cos\phi}{4^2} - \frac{\alpha^2 T_w \sin\phi}{4^2} \right] \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) d\bar{r} - \frac{\alpha^8 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr^3 Re}{4^8} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right)^2 d\bar{r} + \right. \\ & \left. \left[ \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) T_w \cos\phi}{4^4} - \frac{2\alpha^6 De T_w \sin\phi}{4^4} \right] \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} + \frac{\alpha^4 Pr^2 Re}{4^4} \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right)^2 d\bar{r} \right\} \end{aligned}$$

desarrollando los productos en las respectivas integrales se tiene que,

$$\begin{aligned} \kappa_e = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{PrRe}{4^2} \int_0^1 (\bar{r}^4 - 2\bar{r}^2 + 1) d\bar{r} - \right. \\ & \left. \left[ \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^5} - \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) PrRe}{4^5} \right] \int_0^1 \left( \frac{1}{9} \bar{r}^8 - \frac{10}{9} \bar{r}^6 + 4\bar{r}^4 - \frac{46}{9} \bar{r}^2 + \frac{19}{9} \right) d\bar{r} + \right. \\ & \frac{T_w \cos\phi}{4} \int_0^1 (\bar{r}^2 - 1) d\bar{r} - \frac{\alpha^4 De Pr Re}{4^3} \int_0^1 \left( \frac{1}{4} \bar{r}^6 - \frac{5}{4} \bar{r}^4 + \frac{7}{4} \bar{r}^2 - \frac{3}{4} \right) d\bar{r} + \\ & \left. \left[ \frac{\alpha^8 De Pr^3 Re}{4^6} - \frac{2\alpha^8 De Pr^2 Re}{4^6} \right] \int_0^1 \left( \frac{1}{36} \bar{r}^{10} - \frac{13}{36} \bar{r}^8 + \frac{66}{36} \bar{r}^6 - \frac{154}{36} \bar{r}^4 + \frac{157}{36} \bar{r}^2 - \frac{57}{36} \right) d\bar{r} - \right. \\ & \left. \left[ \frac{\alpha^4 De T_w \cos\phi}{4^2} - \frac{\alpha^2 T_w \sin\phi}{4^2} \right] \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^4}{4} - \bar{r}^2 + \frac{3}{4} \right) d\bar{r} - \right. \\ & \frac{\alpha^8 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr^3 Re}{4^8} \int_0^1 \left( \frac{1}{81} \bar{r}^{12} - \frac{2}{9} \bar{r}^{10} + \frac{5}{3} \bar{r}^8 - \frac{524}{81} \bar{r}^6 + \frac{119}{9} \bar{r}^4 - \frac{38}{3} \bar{r}^2 + \frac{361}{81} \right) d\bar{r} + \\ & \left. \left[ \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) T_w \cos\phi}{4^4} - \frac{2\alpha^6 De T_w \sin\phi}{4^4} \right] \int_0^1 \left( \frac{\bar{r}^6}{9} - \bar{r}^4 + 3\bar{r}^2 - \frac{19}{9} \right) d\bar{r} + \right. \\ & \left. \frac{\alpha^4 Pr^2 Re}{4^4} \int_0^1 \left( \frac{1}{16} \bar{r}^8 - \frac{1}{2} \bar{r}^6 + \frac{11}{8} \bar{r}^4 - \frac{3}{2} \bar{r}^2 + \frac{9}{16} \right) d\bar{r} \right\} \quad (C.3) \end{aligned}$$

Integrando cada término en  $\mathcal{K}_e$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
 \kappa_e = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) - \left[ \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^5} - \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr Re}{4^5} \right] \left( \frac{1}{81} - \frac{10}{63} + \frac{4}{5} - \frac{46}{27} + \frac{19}{9} \right) + \right. \\
 & \frac{T_w \cos \phi}{4} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) - \frac{\alpha^4 De Pr Re}{4^3} \left( \frac{1}{28} - \frac{5}{20} + \frac{7}{12} - \frac{3}{4} \right) + \\
 & \left[ \frac{\alpha^8 De Pr^3 Re}{4^6} - \frac{2\alpha^8 De Pr^2 Re}{4^6} \right] \left( \frac{1}{396} - \frac{13}{324} + \frac{66}{252} - \frac{154}{180} + \frac{157}{108} - \frac{57}{36} \right) - \\
 & \left[ \frac{\alpha^4 De T_w \cos \phi}{4^2} - \frac{\alpha^2 T_w \sin \phi}{4^2} \right] \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right) - \\
 & \frac{\alpha^8 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr^3 Re}{4^8} \left( \frac{1}{1053} - \frac{2}{99} + \frac{5}{27} - \frac{524}{567} + \frac{119}{45} - \frac{38}{9} + \frac{361}{81} \right) + \\
 & \left[ \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) T_w \cos \phi}{4^4} - \frac{2\alpha^6 De T_w \sin \phi}{4^4} \right] \left( \frac{1}{63} - \frac{1}{5} + 1 - \frac{19}{9} \right) + \\
 & \left. \frac{\alpha^4 Pr^2 Re}{4^4} \left( \frac{1}{144} - \frac{1}{14} + \frac{11}{40} - \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \right) \right\} \quad (C.4)
 \end{aligned}$$

Reduciendo términos se tiene que,

$$\begin{aligned}
 \kappa_e = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{PrRe}{4^2} \left( \frac{8}{15} \right) - \left[ \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^5} - \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr Re}{4^5} \right] \left( \frac{3008}{2835} \right) + \right. \\
 & \frac{T_w \cos \phi}{4} \left( -\frac{2}{3} \right) - \frac{\alpha^4 De Pr Re}{4^3} \left( -\frac{8}{21} \right) + \left[ \frac{\alpha^8 De Pr^3 Re}{4^6} - \frac{2\alpha^8 De Pr^2 Re}{4^6} \right] \left( -\frac{213552}{280665} \right) - \\
 & \left[ \frac{\alpha^4 De T_w \cos \phi}{4^2} - \frac{\alpha^2 T_w \sin \phi}{4^2} \right] \left( \frac{7}{15} \right) - \frac{\alpha^8 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr^3 Re}{4^8} \left( \frac{69641856}{32837805} \right) + \\
 & \left. \left[ \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) T_w \cos \phi}{4^4} - \frac{2\alpha^6 De T_w \sin \phi}{4^4} \right] \left( -\frac{136}{105} \right) + \frac{\alpha^4 Pr^2 Re}{4^4} \left( \frac{86}{315} \right) \right\} \quad (C.5)
 \end{aligned}$$

Distribuyendo el producto y simplificando términos se obtiene,

$$\begin{aligned}
 \kappa_e = & -\frac{PrRe}{60} + \left( \frac{94}{2835} \right) \left[ \frac{\alpha^4 Pr^3 Re}{4^3} - \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr Re}{4^3} \right] + \\
 & \frac{T_w \cos \phi}{12} - \left( \frac{1}{21} \right) \frac{\alpha^4 De Pr Re}{4^2} + \left( \frac{26694}{280665} \right) \left[ \frac{\alpha^8 De Pr^3 Re}{4^5} - \frac{2\alpha^8 De Pr^2 Re}{4^5} \right] + \\
 & \left( \frac{7}{30} \right) \left[ \frac{\alpha^4 De T_w \cos \phi}{4^2} - \frac{\alpha^2 T_w \sin \phi}{4^2} \right] + \left( \frac{544077}{32837805} \right) \frac{\alpha^8 (\alpha^4 De^2 - 1) Pr^3 Re}{4^5} + \\
 & \left( \frac{17}{105} \right) \left[ \frac{\alpha^4 (\alpha^4 De^2 - 1) T_w \cos \phi}{4^3} - \frac{2\alpha^6 De T_w \sin \phi}{4^3} \right] - \left( \frac{43}{315} \right) \frac{\alpha^4 Pr^2 Re}{4^4} \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

Esta última ecuación es la difusividad térmica efectiva cuando  $\alpha \rightarrow 0$ .