

**UNIVERSIDAD AUTONOMA DE
BAJA CALIFORNIA**

FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS

**SOLUCIONES NUMERICAS DE LA ECUACION
DE LA EIKONAL: SU APLICABILIDAD EN
OCEANOGRAFIA ACUSTICA**



T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
OCEANOLOGO**

PRESENTA:

JOSE MANUEL PUIG DONNELLY

ENSENADA, B.C., FEBRERO DE 1996

**SOLUCIONES NUMERICAS DE LA ECUACION DE
LA EIKONAL: SU APLICABILIDAD EN
OCEANOGRAFIA ACUSTICA**

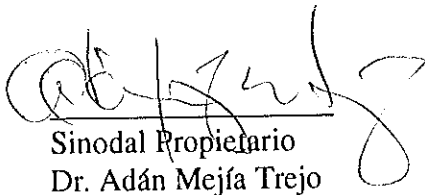
**TESIS
QUE PRESENTA:**

JOSE MANUEL PUIG DONNELLY

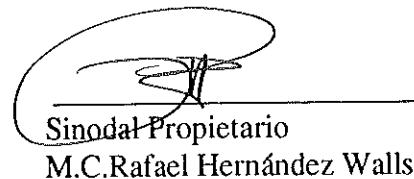
Aprobada por:

A stylized, handwritten signature in black ink, featuring a large, sweeping loop and several vertical strokes.

Presidente del Jurado
Dr. Julio Sheinbaum Pardo

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, circular loop followed by a long, horizontal stroke.

Sinodal Propietario
Dr. Adán Mejía Trejo

A handwritten signature in black ink, featuring a large, circular loop and a long, horizontal stroke.

Sinodal Propietario
M.C. Rafael Hernández Walls

Resumen

Este trabajo comprende la aplicación de una solución numérica de la ecuación de la eikonal, basado en un esquema en diferencias finitas no centradas, para el cálculo de tiempos de arribo de pulsos acústicos en aplicaciones oceanográficas. La transmisión de sonido en el océano es utilizado entre otras cosas como un sensor de las propiedades de estado del agua de mar, tal como en las técnicas de Tomografía y Termometría acústica del océano. El cálculo de tiempos de arribo es un aspecto importante de estas técnicas. La manera clásica de resolver los tiempos de arribo involucra resolver la ecuación de la eikonal, proveniente de buscar una solución en forma de cuasi-ondas planas en la ecuación de onda, mediante una solución por teoría de los rayos. La utilización de trazado de rayos en la oceanografía ha sido muy exitosa, sin embargo para campos de rapidez acústica complejos se vuelven una tarea computacionalmente cara. El desarrollo y aplicación de soluciones numéricas de la eikonal se ha dado en Sismología con bastante éxito, como alternativa a la teoría de rayos. En Oceanografía las soluciones numéricas podrían constituir de igual manera una alternativa eficiente al trazado de rayos. Para experimentar con esta hipótesis, se realizaron dos experimentos numéricos en campos de rapidez acústica representativos de condiciones reales del océano con el esquema propuesto por Van Trier y Symes [1991]. Los resultados se compararon con soluciones analíticas y análogas por teoría de los rayos, con ello se midió la estabilidad, eficiencia relativa y precisión del esquema. Se realizó un tercer experimento para probar la estabilidad del esquema ante contrastes fuertes de rapidez de sonido.

Los resultados demuestran que las soluciones numéricas si tienen capacidad de resolver problemas acústicos en Oceanografía, aunque el esquema utilizado presenta problemas, los cuales son remediabiles con la implementación de otros esquemas más complejos. Sin embargo, la relación probablemente lineal **TAMAÑO DE MALLA-PRECISION-COSTO DE CPU** encontrada indica que el uso de este tipo de soluciones probablemente sea restringido a problemas de distancias horizontales de mesoescala.

Agradecimientos

Al Dr. Julio Sheinbaum por su apoyo, su paciente ayuda y sus consejos en la dirección y elaboración de esta tesis.

Al Dr. Adán Mejía Trejo y al M.C. Rafael Hernández Walls por sus revisiones meticulosas y consejos valiosos.

Al CICESE por la facilitación de equipo de computo y material de referencia.

Al CONACYT por el apoyo económico brindado dentro del proyecto “Corrientes y remolinos en el Golfo de México y Mar Caribe” (clave 1002-T9111).

Al Dr. Pedro Ripa por la facilitación de la estación de trabajo *Tajamar*, con la cual se realizaron todos los experimentos de esta tesis.

Al Oc. Rafael García Krasovsky por dejarme utilizar su computadora, malgastar sus hojas y por su buena amistad.

A la FCM por todo lo que me ha enseñado.

A los “amigos”, los “compas” y la banda de San Miguel.

Al mar y sus olas, por ser una fuente de inspiración y buenos ratos.

Este trabajo forma parte de los proyectos “Corrientes y remolinos del Golfo de México y Mar Caribe” (clave 002-T9111) y “Asimilación de datos en modelos oceánicos”, (clave 1000-T9111).

Dedicado a mis Padres:

Gracias por todo el amor, cariño y apoyo.

Contenido

Lista de figuras	vii
Lista de Variables	xii
1 INTRODUCCION	1
2 OBJETIVO GENERAL	9
2.1 OBJETIVOS PARTICULARES	9
3 FUNDAMENTOS TEORICOS	10
3.1 CARATERISTICAS ACUSTICAS DEL OCEANO	10
3.2 DERIVACION DE LA ECUACION DE ONDA PARA PRESION	14
3.3 OBTENCION DE LA ECUACION DE LA EIKONAL	16
3.4 TEORIA DE RAYOS: Solución clásica de la ecuación de la eikonal	21
4 SOLUCIONES NUMERICAS	26
4.1 SOLUCIONES VISCOSAS Y LEYES DE CONSERVACION: método de Van Trier y Symes, 1991	27
4.2 EL ESQUEMA NUMERICO	29
5 METODOLOGIA	34
6 RESULTADOS	38
6.1 EL PERFIL LINEAL	38

6	RESULTADOS	38
6.1	EL PERFIL LINEAL	38
6.1.1	ESTRUCTURA DEL CAMPO DE RAPIDEZ	38
6.1.2	LA SOLUCION POR RAYOS	38
6.1.3	EXPERIMENTO UNO	41
6.2	EL PERFIL PARABOLICO	49
6.2.1	ESTRUCTURA DEL CAMPO DE RAPIDEZ	49
6.2.2	SOLUCION POR RAYOS	49
6.2.3	EXPERIMENTO DOS	52
6.3	EL CAMPO DE RAPIDEZ DE SONIDO PERTURBADO	61
6.3.1	EXPERIMENTO TRES	61
7	DISCUSIONES Y CONCLUSIONES	67
A	Código del esquema utilizado	73
	Bibliografía	76

Lista de Figuras

- 1 Sección $N - S$ a lo largo del meridiano $30.5^\circ W$, que ejemplifica la estructura acústica del océano. Las isolíneas son de c , siendo su variabilidad más importante en la horizontal. Esta característica permite que a una primera aproximación pueda definirse a $c = c(z)$. Modificado de Clay y Medwin [1972]. 13

- 2 (a) Perfil $c(z)$ típico que produce una guía de ondas. (b) En término de rayos, la energía acústica es “atrapada” por el canal, pudiendo viajar en ella miles de kilómetros. Modificado de Brekhovskikh y Lysanov [1977]. 13

- 3 En una solución de la ecuación de onda por medio de la ecuación de la eikonal, los frentes de onda son dados por $\tau(x, y, z) = cte$, los rayos son trayectorias ortogonales a estos frentes que sigue la energía, χ , γ y ϵ son ángulos que hace el rayo con los ejes x, y y z respectivamente. Modificado de Apel [1987]. 19

- 4 (a) En el caso en donde $c = c(z)$ solamente, la trayectoria de los rayos puede ser trazada con el ángulo χ que hacen éstos con el eje x . (b) El elemento de arco ds es la variable con la cual se parametriza la eikonal. Ambas modificadas de Brekhovskikh y Lysanov [1977]. 24

- 5 El esquema considera tres nodos del radio n , en el cálculo de un nodo de radio $n+1$, por lo que los calculos avanzan en anillos. El signo de la función de flujo determina en que dirección se implementa el operador en diferencias finitas. 30
- 6 Como ejemplo, en una transmisión de 100 km, la malla polar tiene que ser definida con un radio máximo de 100 km, esto hace que la discretización sea ineficiente, ya que sólo aproximadamente el 15 % de los nodos totales de la malla quedan dentro de las fronteras del fondo y la superficie. 31
- 7 En las fronteras, la aproximación es forzada para que sólo se tomen cuenta nodos que caen dentro del campo, el error de este forzamiento es del mismo orden de magnitud que el del esquema [Van Trier y Symes, 1991] 33
- 8 (a) El perfil lineal, aquí $c(z)$ es función de la presión hidrostática solamente, Modificado de Brekhovskikh y Lysanov [1977]. (b) El perfil parabólico, el cual es función de temperatura, salinidad y presión, en z_p se produce un mínimo, el cual forma el canal de sonido. Modificado de Munk y Wunsch [1983]. 35
- 9 (a) Perfil lineal utilizado para constriuir el campo de rapidez de sonido. (b) Estructura del campo de rapidez, aquí $c = c(z)$ 44
- 10 Rayos calculados para el campo de rapidez del experimento uno, éstos son semicírculos. El rayo número cuatro tiene el mayor ángulo de disparo y su punto de retorno es justo en el fondo. . . . 45

- 11 Imágen del campo de los primeros tiempos de arribo para el experimento uno, que muestra la capacidad del esquema en resolver este tipo de perfil de c . El origen del pulso se encuentra en la coordenada $(0,0)$. Las isolíneas son isócronas y constituyen los frentes de onda; empiezan desde el primer segundo, con intervalos de un segundo en las primeras diez y cinco segundos en las restantes. . . 46
- 12 Sobreposición de los rayos calculados a los frentes de onda. Todos los rayos calculados corresponden a los frentes de onda, *e.g.*, los rayos inciden perpendicularmente sobre los frentes de onda. . . . 47
- 13 Diferencia en tiempos de arribo en milisegundos de la solución numérica y los rayos, en la trayectoria de éstos. Aquí el rayo uno tiene el menor ángulo de disparo. La tendencia sobresaliente es que el error aumenta conforme nos alejamos del origen. 48
- 14 (a) Características del perfil parabólico utilizado en el experimento dos. (b) Estructura y dimensiones del campo de rapidez construido. 55
- 15 Rayos calculados para el campo de rapidez del experimento dos. Estos en forma son sinusoidales perfectas. El rayo número uno es el que tiene el mayor ángulo de disparo y experimenta punto de retorno de su primer ciclo justo en la superficie. El ángulo de disparo decrece monotonicamente para cada rayo posterior. . . . 56

- 16 Imagen del campo de los primeros tiempos de arribo del experimento dos, que muestra la capacidad del esquema en resolver este tipo de perfil, siendo éste más representativo de las condiciones reales del océano. El origen del pulso se encuentra en (0,1300) y el tiempo de arribo aumenta conforme avanzamos en x positiva. Las isócronas empiezan desde el primer segundo, con intervalos de un segundo en las primeras diez y cinco segundos en las restantes. 57
- 17 Sobreposición de los rayos calculados a los frentes de onda del experimento dos. El rayo axial (#7, color verde) es el que debe de tener mayor correspondencia con los frentes de onda, y se observa que esto si se cumple en el primer ciclo de los rayos. 58
- 18 Diferencia en tiempos de arribo en milisegundos entre la solución numérica y la solución por teoría de los rayos. El rayo uno tiene el mayor ángulo de disparo y decrece para cada rayo. La tendencia sobresaliente del error es de aumentar conforme nos alejamos del origen del pulso y realmente no se observa una correspondencia de el error con el ángulo de disparo. 59
- 19 Error promedio en milisegundos calculado para cada curva de error mostrado en la figura 18 , reafirma que no existe relación entre el ángulo de disparo y el error. 60
- 20 Error promedio en milisegundos calculado para cada curva de la figura 18 , hasta antes del kilómetro 40 de distancia horizontal. Ahora si encontramos una relación entre el ángulo disparo y error, siendo el rayo axial (rayo 7) el que tiene el menor error. 60

- 21 (a) Variación del coeficiente de la parábola superior a lo largo del eje x . (b) Perfiles de rapidez de sonido a lo largo del eje x en el campo perturbado. 63
- 22 Campo de $\frac{\delta c}{c}$ que delimita la perturbación en $c(x, z)$ del experimento tres, podría ser representativo de la perturbación en $c(x, z)$ que causa un lente de agua caliente, relativo a un océano mas frio. 64
- 23 Campo de los primeros tiempos de arribo en segundos resultado del experimento tres. El origen del pulso está en (0,1300). Esta muestra la capacidad del esquema en resolver campos de rapidez acústica más complejos. 65
- 24 Diferencia en tiempos de arribo en milisegundos que produce la perturbación en c , notesé que es confinado a los primeros 1300 metros de profundidad y a los últimos 15 km de distancia horizontal, sugiriendo que las mediciones acústicas son espacialmente integradoras. 66
- 25 Lineas de igual ángulo de la malla que se utilizó en el experimento dos. Nótese la concentración de nodos en los primeros kilómetros de distancia horizontal y el grado de separación en la orilla opuesta, esto resulta en un pobre muestreo del campo de rapidez y los patrones de error observado en las figuras 13 y 18 68

Lista de Variables

a Razón de cambio adiabático de la rapidez del sonido con la profundidad, para el perfil lineal.

a_+ y a_- Coeficientes asociados a la curvatura del perfil parabólico.

α y β Coeficientes asociados a la expresión analítica de rapidez del sonido.

A Amplitud.

c Rapidez de sonido.

c_0 Rapidez del sonido en la superficie del mar.

c_p Mínimo de rapidez de sonido en un perfil típico que produce un canal de sonido.

c_r Rapidez de sonido en el punto de retorno de un rayo.

$\vec{C_g}$ Velocidad de grupo

δ Denota perturbación o variación.

dr y $d\theta$ Discretización de radio y ángulo

ds Incremento de arco.

D Distancia horizontal comprendida por un ciclo.

F Función de flujo.

f Frecuencia

g Aceleración de la gravedad

h Profundidad del océano.

$\vec{k}$ Vector número de onda

K Coeficiente de los rayos.

l Lentitud del sonido, inverso la rapidez($1/c$).

λ_0 Longitud de onda.

m Pendiente de la relación lineal de T y S .

n Índice de refracción del medio $\frac{c_0}{c}$.

p Presión.

R Radio de un segmento de arco, inverso su curvatura.

ρ Densidad.

r y θ Coordenadas polares.

s Trayectoria de un rayo.

S Salinidad.

t Tiempo.

τ Función tiempo de arribo.

T Temperatura.

Θ Función de Fase.

u Derivada parcial de la función de fase con respecto al ángulo θ .

U Vector velocidad.

w Frecuencia angular.

x, y y z Coordenadas cartesianas, z denota profundidad.

χ, γ y ϵ Angulos que traza un rayo respecto a los ejes coordenados x, y y z respectivamente.

χ_0 Angulo de disparo que hace un rayo con el eje x .

z_r Profundidad del punto de retorno de un rayo.

z_p Profundida del eje del canal de sonido.

INTRODUCCION

Una de las herramientas que utiliza el oceanólogo físico para atacar el problema de comprender la física del océano es la observación. De ella obtiene toda la información empírica sobre el océano, siendo limitada basicamente por la calidad y capacidad de instrumentos y/o técnicas de medición. La vista, una de las herramientas de observación más rudimentaria del hombre; y los satélites, una de las más avanzadas, sólo penetran las primeras decenas de metros de profundidad. El sonido a frecuencias adecuadas, puede ser escuchado a miles de kilómetros de su origen, por lo que no resulta sorprendente que muchos organismos marinos lo utilizan desde hace millones de años como un instrumento para la percepción de su entorno.

Los primeros intentos del hombre en utilizar el sonido como sensor en el océano fueron después de la tragedia del Titánic, en donde se implementaron sonares debajo del agua para la detección de icebergs. Durante las guerras mundiales, necesidades de carácter militar impulsaron la investigación científica de las propiedades acústicas del océano y con ello la utilización de sonares más potentes en la búsqueda de submarinos, minas, buques y mediciones batimétricas precisas [Clay y Medwin, 1977]. En este corto período se dieron descubrimientos importantes, tales como el canal de sonido, que hace que las señales acústicas se transmitan extraordinariamente bien hasta el grado de poder atravesar cuencas oceánicas enteras en tiempos bastante cortos [Apel, 1987]. En los períodos de postguerra, los sonares se implementaron para la detección de organismos pelágicos.

Si uno analiza la naturaleza física de la propagación del sonido, puede ver que el sonido como sensor tiene una aplicación más fundamental: la detección de cambios en las propiedades de estado del océano. Las señales de sonido son ondas de compresión que causan oscilaciones rápidas en el campo de densidad, que a la vez inducen perturbaciones en el campo de presión. La rapidez¹ con que viajan estas señales, definida en la ecuación de onda lineal, es [Knox, 1989]:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \quad (1.1)$$

siendo c la rapidez del sonido una razón de cambio parcial de la presión p respecto a la densidad ρ bajo condiciones de entropía constante, evaluada a una densidad promedio de un océano en reposo ρ_0 . Qué tan rápido viaja una señal de sonido depende entonces de la rapidez con que responde el campo de presión ante una perturbación en el campo de densidad del medio.

Imaginemos ahora un pulso sónico originado en alguna región del océano y supongamos que éste intersecta un receptor a una distancia horizontal r . La trayectoria que toma el pulso acústico está en función de los cambios de rapidez de sonido que encuentra en su avance. El tiempo que tarda en llegar al receptor, es decir, recorrer dicha trayectoria, está en función de la longitud de la trayectoria y las variaciones del inverso de la rapidez del sonido en ésta. Si uno mide el tiempo de arribo, y conoce la trayectoria, uno puede irse a la inversa, es decir, determinar la rapidez con la cual viajó el sonido. Si se conoce la relación de la rapidez del sonido con la densidad uno puede inferir la densidad del agua en la trayectoria. En el océano la densidad es una función de la temperatura, la

¹Nótese que se define una rapidez y no una velocidad, esto se debe a que la expresión 1.1 no es una función vectorial.

salinidad y la presión. Temperatura y salinidad tienden a estar correlacionadas, si tomamos como ejemplo la comunmente utilizada relación lineal [Knox, 1989]:

$$S = S_0 + mT \quad (1.2)$$

donde un valor típico de m es .1ppm($^{\circ}C^{-1}$) [Knox, 1989] vemos que la magnitud de un cambio fraccional en la rapidez del sonido relativo a una perturbación en el campo de densidad en el océano es [Munk y Wunsch, 1979]:

$$\frac{\delta c}{c} = \alpha \delta T + \beta \delta S = \alpha \delta T (1 + \beta m \alpha^{-1})$$

donde δ denota una perturbación, α y β son coeficientes de temperatura y salinidad asociados a la rapidez del sonido, con valores típicos de $\alpha = 3.2 \times 10^3 ^{\circ}C^{-1}$ y $\beta = 1.0 \times 10^3 ppm^{-1}$ [Munk y Wunsch, 1979]. De esta expresión vemos que la variación fraccional de sonido se debe principalmente a perturbaciones de temperatura en la mayor parte del océano (salvo en latitudes altas en las que S domina) por lo que es factible obtener estimaciones de temperatura apartir de estas mediciones acústicas.

En 1979, Walter Munk y Carl Wunsch conciben la idea y la maquinaria matemática para aprovechar este principio. Propusieron inferir las propiedades tridimensionales de temperatura de un volumen de agua en el océano, utilizando como información los tiempos de arribo de pulsos acústicos a lo largo de múltiples transectos que entrecruzan este volumen, la llamada tomografía acústica del océano ² Una de las ventajas de esta técnica, es la cantidad de información

²Por su similitud a la técnica médica de tomografía

obtenida relativa a mediciones convencionales; con m anclajes, técnicas convencionales (termistores, CTD's, etc) rinden m mediciones puntuales, pero m anclajes consistiendo de e emisores y r receptores rinden $e * r$ observaciones. Otra ventaja es la velocidad con que se llevan acabo las mediciones, comparable a un crucero que pudiese desarrollar 3000 nudos [Knox, 1989]. En dos experimentos de factibilidad; uno realizado en 1981 [OTG, 1982] y el otro en 1983 [Knox, 1989], queda comprobada en principio su idea.

Otro proyecto que desea utilizar las capacidades sensoriales del sonido es el proyecto de Termometría Acústica del Oceano (ATOC), una ramificación de la Tomografía Acústica [Munk y Forbes, 1989]. En este experimento intentan utilizar series de tiempo de "tiempos de arribo", de transmisiones acústicas a escalas de cuencas oceánicas para detectar el llamado "*calentamiento global*", la hipótesis es que el calentamiento será detectado en un patrón de tiempos de arribo cada vez más cortos. La ventaja de trabajar con este tipo de mediciones es que son espacialmente integradoras y por tal, filtran el ruido de pequeña escala que afecta a las mediciones puntuales [Munk y Forbes, 1989]. Sin embargo, la utilización de pulsos acústicos y sus tiempos de arribo, no se limitan a la detección de propiedades de estado; Cornuelle³ menciona que se tiene pensado medir la razón de crecimiento del piso oceánico, utilizando un arreglo triangular acústico de un emisor (por encima de una cordillera) y dos receptores (uno en cada lado de la cordillera en cuestión).

³Comunicación personal, 1995
Scripps Institution of Oceanography, La Jolla California 92073-0230.

Algunas de las tareas primordiales en estos experimentos de acústica oceánica es la simulación numérica, la determinación de las trayectorias que toma la energía acústica y más aún la estimación de los tiempos de arribo [Munk y Wunsch, 1979]. Estas tareas se resuelven a través de la búsqueda de soluciones a la ecuación de onda.

Una solución exacta de la ecuación de onda, cuando la rapidez del sonido es constante, es la solución de ondas planas, en la cual las perturbaciones acústicas conforman frentes de onda que en todo punto son perpendiculares al sentido de propagación de la señal. El océano siendo un medio en donde la rapidez del sonido no varía mucho, es un candidato excelente para buscar una solución de esta naturaleza; donde la idealización de algunos aspectos de las condiciones acústicas del océano, producen un error que en muchos casos no es más grande que la incertidumbre de medición [Jensen, 1994].

Cuando las características acústicas del océano permiten una solución en forma de cuasi-ondas planas de la ecuación de onda y suponiendo que las frecuencias de onda utilizadas son grandes, uno puede llegar a la llamada ecuación de la eikonal ⁴. Esta relaciona la forma de los frentes de onda con el índice de refracción del medio y al resolverla por el método de las características, lleva a una serie de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que describen las trayectorias por las cuales viaja la energía acústica, las llamadas ecuaciones de rayos.

A pesar de que la teoría de los rayos ha probado ser muy eficiente en la tomografía, y en la oceanografía en general, en algunos campos de rapidez acústica

⁴Una ecuación diferencial parcial, de primer orden, no lineal

(especialmente los complejos), calcular rayos se vuelve una tarea computacionalmente cara y difícil, frecuentemente se encuentran cáusticas donde estas soluciones no son válidas, *i.e* los rayos no penetran o se pueden cruzar entre sí [Van Trier y Symes, 1991]. En tales casos es necesario aplicar otras soluciones de la ecuación de onda, *e.g.*, integración de la ecuación de onda parabólica o una expansión en modos normales [Munk y Wunsch, 1979]. Sin embargo, existen soluciones numéricas a la ecuación de la eikonal que potencialmente pueden ser mejores, en algunos aspectos, a las soluciones de teoría de rayos.

La idea de resolver numéricamente la ecuación de la eikonal fue desarrollada por sismólogos, en un principio Vidale [1988], posteriormente Van Trier y Symes [1991], Qin *et. al.* [1992] y recientemente Hole y Zelt [1995]. Estas soluciones han mostrado tener varias ventajas sobre el trazado de rayos. Una ventaja es que son métodos más robustos y rápidos, porque calculan los tiempos de arribo para todos los puntos de un campo de rapidez dado ⁵. Otra ventaja de este tipo de soluciones es que estiman correctamente el tiempo de arribo en cáusticos y sombras, lugar donde los rayos no penetran [Van Trier y Symes, 1991].

Estas soluciones numéricas podrían constituir una alternativa computacional más barata, eficiente y precisa que el método clásico de trazado de rayos, en problemas de acústica oceánica. Su aplicación en problemas oceanográficos es nuevo, posiblemente siendo este trabajo el primer intento, por lo que, aunque presentamos este tipo de soluciones como una alternativa eficiente a la teoría de los rayos, no probamos directamente este punto, si no la factibilidad de su aplicación. Para llegar a esto, realizamos experimentos numéricos con el esquema en

⁵Contrario al cálculo de la trayectoria de los rayos, donde para cada punto en la misma estructura de rapidez, es necesario la determinación de los rayos que intersectan cada uno de estos puntos.

diferencias finitas propuesto por Van Trier y Symes [1991] en campos de rapidez de sonido representativos de condiciones “reales” del océano. Este esquema numérico se juzgó el más sencillo y por lo tanto el más adecuado para los propósitos de esta tesis. Los juicios sobre el funcionamiento y capacidad del esquema numérico se basaron en comparaciones con soluciones dadas por teoría de rayos.

La utilidad oceanográfica se enfocó a la tomografía y termometría acústica del océano, aunque existen otras aplicaciones. En la sección de fundamentos teóricos describimos brevemente las características acústicas del océano esenciales en la transmisión de sonido; posteriormente desarrollamos y describimos brevemente la teoría lineal de ondas, y su expresión matemática: *la ecuación de onda lineal*. Analizamos también las soluciones en la aproximación de ondas planas que llevan a la ecuación de la eikonal y por último su solución clásica, la teoría de los rayos. En la sección tres investigamos las soluciones numéricas de la ecuación de la eikonal y en particular detalle el esquema de Van Trier y Symes [1991].

En la sección cuatro, la metodología, describimos los experimentos numéricos y las bases de comparación de los resultados obtenidos con soluciones analíticas equivalentes por teoría de los rayos. En la sección de resultados se muestran a detalle las soluciones numéricas de los experimentos realizados, las soluciones por teoría de los rayos y las comparaciones realizadas; discutimos un poco lo obtenido y básicamente sentamos las bases con la cual en la sección de discusiones y conclusiones llegamos a que el método de Van Trier y Symes [1991] es capaz resolver campos de rapidez acústicos representativos de el océano y aunque presente problemas el esquema polar, estos son remediabiles implementando esquemas más complejos como el de Vidale [1988] ó el de Hole y Zelt [1995]. Con este trabajo entonces, se demuestra que las soluciones numéricas de la ecuación

de la eikonal pueden llegar a ser una alternativa eficiente a la teoría de los rayos en algunas aplicaciones oceanográficas y por tanto es rentable seguir investigando su aplicación.

OBJETIVO GENERAL

Resolver la ecuación de la eikonal por diferencias finitas y experimentar su aplicación en problemas de oceanografía acústica, como una alternativa a la solución por el método de trazado de rayos.

2.1 OBJETIVOS PARTICULARES

- Determinar la magnitud y las características del error de la solución por diferencias finitas de la ecuación de la eikonal, comparando los tiempos de arribo en perfiles de rapidez del sonido clásicas que tienen soluciones exactas en las ecuaciones de rayos.
- Determinar la estabilidad y eficiencia del esquema numérico ante una aplicación oceanográfica más compleja.

FUNDAMENTOS TEORICOS

3.1 CARATERISTICAS ACUSTICAS DEL OCEANO

Una de las variables acústicas de fundamental importancia, es la rapidez con que puede viajar el sonido en el medio, la cual es función de la densidad y la compresibilidad del agua de mar. Aunque se puede llegar a una expresión de c a través de expresiones precisas de las ecuaciones de estado [Apel, 1987], por lo general se trabaja con expresiones empíricas obtenidas de mediciones directas de c bajo variaciones de temperatura, salinidad y profundidad, tal como [Brekhovskikh y Lysanov, 1977], [Jensen, 1994], [Clay y Medwin, 1977]:

$$c = 1449.2 + 4.6T - .0055T^2 + .00024T^3 + (1.34 - .01T)(S - 35) + .016z \quad (3.3)$$

donde T es la temperatura en $^{\circ}C$, S la salinidad en ppm y z es la profundidad en metros. como regla general c oscila entre los 1450 y 1540 $[m/s]$ y aumenta conforme se incrementa la temperatura, la salinidad y la presión [Brekhovskikh y Lysanov, 1977].

La característica física más notable del océano es su naturaleza inhomogénea. Existen dos tipos de inhomogeneidades: las regulares y las aleatorias. Las regulares llevan a que la distribución espacial de T , S y P en la mayor parte de los océanos, provoque que el gradiente vertical de c en estas regiones sea tres órdenes de magnitud mayor que en la horizontal [Brekhovskikh y Lysanov, 1977] y a una primera aproximación la estructura de c pueda ser considerada como horizontalmente homogénea, con variación sólo en la vertical (ver fig.1). Esta es

una de las características físicas del océano que simplifican el manejo matemático del problema acústico.

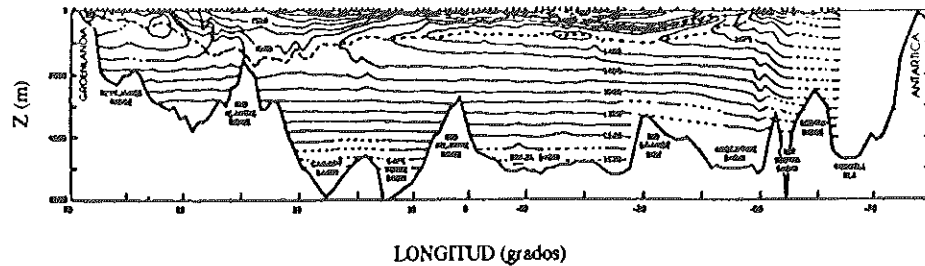
Los perfiles $c(z)$ varían espacialmente de acuerdo a las regiones del océano y temporalmente de acuerdo a las estaciones del año y/o cambios diurnos de T y S . A profundidades mayores de un kilómetro, la variación vertical de T y S es débil y el incremento de c se debe casi exclusivamente al incremento en la presión hidrostática. En regiones profundas del océano, el perfil típico $c(z)$, es aquel para el cual la rapidez de sonido experimenta un mínimo a una cierta profundidad z_p . Arriba de esta z_p , $c(z)$ se incrementa debido al aumento de temperatura (asociado al calentamiento por radiación solar), abajo de esta profundidad $c(z)$ crece por el incremento en la presión hidrostática (ver fig.2a).

Si una fuente de sonido se encuentra cerca de z_p , parte de la energía acústica es atrapada en lo que se llama el canal de sonido (CS), propagándose en él sin atenuarse por choques con el fondo o la superficie (fig.2b), siendo así como surge el mecanismo básico de transmisión de sonido a grandes rangos de distancias.

La distancia máxima de propagación de sonido en el CS, está limitada principalmente por la pérdida de transmisión de energía acústica, la cual entre otros, es el efecto sumado de procesos de atenuación y pérdidas de energía por dispersión.

Se ha demostrado experimentalmente que la atenuación es proporcional a f^2 o la frecuencia al cuadrado [Clay y Medwin, 1977], entre mayor sea la frecuencia mayor será su atenuación. Por lo general, los experimentos acústicos en el océano se limitan a frecuencias en el rango de uno a algunas centenas de ciclos por segundo [Clay y Medwin, 1977], el límite a frecuencias bajas impuesto por la incapacidad técnica de producir tales frecuencias. Ello explica por qué las ondas

acústicas pueden viajar miles de kilometros en el CS, sin ser atenuadas a un nivel que sea perceptible.



Figural: Sección $N - S$ a lo largo del meridiano $30.5^\circ W$, que ejemplifica la estructura acústica del océano. Las isolíneas son de c , siendo su variabilidad más importante en la horizontal. Esta carcterística permite que a una primera aproximación pueda definirse a $c = c(z)$. Modificado de Clay y Medwin [1972].

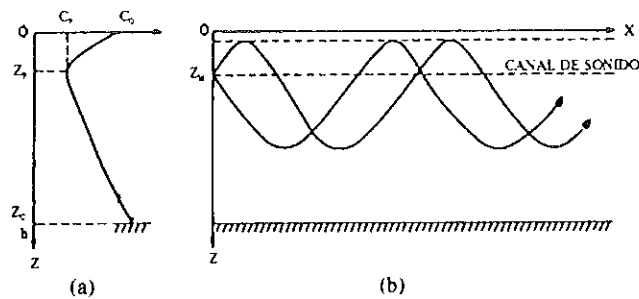


Figura2: (a) Perfil $c(z)$ típico que produce una guía de ondas. (b) En término de rayos, la energía acústica es "atrapada" por el canal, pudiendo viajar en ella miles de kilómetros. Modificado de Brekhovskikh y Lysanov [1977].

3.2 DERIVACION DE LA ECUACION DE ONDA PARA PRESION

Las ondas acústicas pueden describirse matemáticamente utilizando ecuaciones de movimiento linealizadas, suponiendo que son perturbaciones pequeñas respecto a un estado en reposo. Las ecuaciones de movimiento a tratar son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - \rho g \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (3.5)$$

siendo 3.4 la ecuación de continuidad, y 3.5 la ecuación de movimiento. Estas expresiones son para un fluido no viscoso sin transferencia de calor, ya que suponemos que las vibraciones que causan estos movimientos oscilatorios son rápidos y débiles. Las variables $\rho, \mathbf{u}$ y p son la densidad, velocidad y presión del fluido en coordenadas eulerianas, g es la aceleración de la gravedad y $\hat{\mathbf{e}}_3$ es un vector unitario en la dirección z .

Como ya se mencionó, lo que vamos a buscar es una linealización de estas ecuaciones, donde las variables son el efecto sumado de una perturbación sobre un estado de reposo inicial. Por lo que:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$

$$p = p_0 + p_1$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$$

donde $\mathbf{u}_0 = 0$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones anteriores, despreciando términos no lineales y reteniendo sólo los términos de orden mayor puede ser

demostrado que se llega a [Jensen, 1994]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \quad (3.6)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \rho_1 g \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (3.7)$$

Necesitamos una ecuación que cierre el sistema, ya que tenemos cinco variables y sólo cuatro ecuaciones. Esta ecuación debe relacionar la presión y densidad del agua, por lo que tal relación tiene que ser una ecuación de estado [Knox, 1989]. Una buena aproximación es suponer que la presión se puede expandir en una Serie de Taylor, reteniendo solamente el término de primer orden [Knox, 1989]:

$$p = p(\rho_0) + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0). \quad (3.8)$$

Recordando que $p = p_0 + p_1$ obtenemos:

$$p_1 = p - p_0 = p - p(\rho_0) = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) = \rho_1 \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \rho_1 c^2, \quad (3.9)$$

donde c^2 es definida como la rapidez de fase de la onda, que corresponde a la derivada $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0}$ bajo condiciones adiabáticas.

Sustituyendo la igualdad 3.9 en la ecuación 3.7 obtenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \rho_1 c^{-2} g \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (3.10)$$

La escala espacial de el primer término del lado derecho involucra la escala espacial de onda acústica y es mucho más grande que el segundo término, 15,000:1 para longitudes de onda de 15 cm o 100 mHz [Knox, 1989]. Este último se puede despreciar, por lo que :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1. \quad (3.11)$$

Sustituyendo la igualdad 3.9 en la ecuación 3.6:

$$c^{-2} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0, \quad (3.12)$$

derivando con respecto a t obtenemos:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + c^2 \rho_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{u}_1)}{\partial t} = 0, \quad (3.13)$$

si cambiamos el orden de la derivada en el segundo término y utilizamos la igualdad 3.11:

$$\rho_0 \left(\frac{-\nabla^2 p_1}{\rho_0} + \frac{\nabla p_1 \cdot \nabla \rho_0}{\rho_0^2} \right) = -\nabla^2 p_1 + \frac{\nabla p_1 \cdot \nabla \rho_0}{\rho_0}. \quad (3.14)$$

Por último, sustituyendo 3.14 en 3.13 llegamos a:

$$c^{-2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla^2 p_1 + \frac{\nabla p_1 \cdot \nabla \rho_0}{\rho_0} = 0.$$

Por los mismos argumentos anteriores [Knox, 1989] podemos despreciar el último término y olvidar los subíndices para obtener finalmente la expresión de la ecuación de onda lineal para presión:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2(x, y, z) \nabla^2 p = 0. \quad (3.15)$$

3.3 OBTENCION DE LA ECUACION DE LA EIKONAL

Una solución sencilla de la ecuación 3.15 se da cuando la rapidez de sonido es constante. Las ondas acústicas bajo estas circunstancias y a una distancia considerable de su origen conforman sinusoidales perfectas, donde los frentes de onda

forman planos perpendiculares al sentido de propagación [Kinsler y Frey, 1980], siendo la razón por la cual esta solución es denominada “solución de ondas planas”. Vimos en la sección 3.1, que las variaciones de $c(x, y, z)$ en el océano son muy pequeñas, y por tanto, podemos esperar a una primera aproximación, que las ondas transmitidas en éste a una distancia considerable de su origen se comporten como una “onda plana”, donde los frentes de onda van a ser suavemente curvados por las variaciones de c [Apel, 1987]. La aproximación consiste en incluir la dependencia espacial de las variables involucradas en la solución en forma de onda “plana”. Dicha solución es [Knox, 1989]:

$$p = A(x, y, z, t) \exp^{i\Theta(x, y, z, t)} \quad (3.16)$$

el cual es localmente aproximada a una sinusoidal [Lighthill, 1978], p es presión, A es una función de amplitud suave que varía mucho más lentamente que Θ , una función de fase local. Una justificación de esta formulación puede ser encontrada en Lighthill [1978] o en Brekhovskikh y Lysanov [1977], pero básicamente es consistente con las propiedades de una onda sinusoidal en un medio homogéneo. Esta función de fase cumple con [Lighthill, 1978]:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\vec{k}; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \omega; \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0 \quad (3.17)$$

donde la primera expresión define un número de onda local $\vec{k}$ y la segunda define una frecuencia angular local ω , la cual es independiente del tiempo. Estas dos están ligadas por la relación de dispersión [Lighthill, 1978]:

$$\omega \approx c(x, y, z) \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (3.18)$$

que es una aproximación de la relación de dispersión de una onda plana $\omega = ck$.

Sustituyendo a 3.16 en 3.15 obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 A &= c^{-2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + A \left(|\nabla \Theta|^2 - c^{-2} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)^2 \right) \\ \nabla^2 \Theta &= c^{-2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + 2A^{-1} \left(c^{-2} \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \nabla A \nabla \Theta \right).\end{aligned}$$

Utilizando la formulación de la fase local 3.17 y suponiendo que la amplitud A varía mucho más lentamente que la fase θ , y con la ayuda de un análisis dimensional de términos [Jensen, 1994], las ecuaciones anteriores se pueden expresar como:

$$-\frac{\nabla^2 A}{A} + |\nabla \Theta|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.19)$$

$$\nabla A \nabla \Theta = -\frac{A}{2} \nabla^2 \Theta. \quad (3.20)$$

La ecuación 3.20 describe el comportamiento de la amplitud A , conocida como la ecuación de transporte. Si tomamos el límite de frecuencias grandes, *i. e.*, el límite $\omega \rightarrow \infty$ 3.19 se reduce a:

$$|\nabla \Theta|^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3.21)$$

En el caso acústico $\Theta = \omega(\tau(x, y, z) - t)$, donde t es el tiempo. Haciendo el cambio de variable $\nabla \Theta = \omega \nabla \tau$, donde τ es una relación de fase o función de tiempo de arribo, llegamos a:

$$|\nabla \tau|^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{k^2}{\omega^2}, \quad (3.22)$$

esta ecuación es la llamada ecuación de la eikonal, siendo τ la eikonal¹.

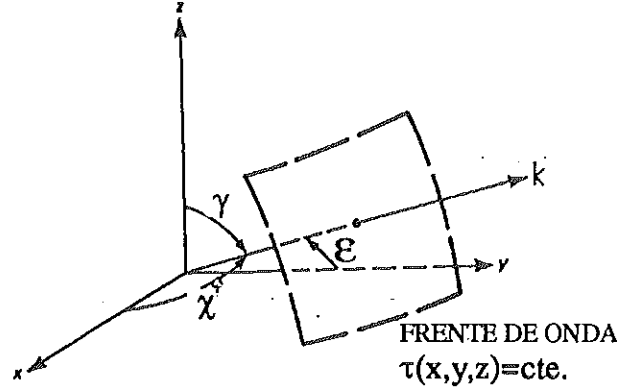


Figura3: En una solución de la ecuación de onda por medio de la ecuación de la eikonal, los frentes de onda son dados por $\tau(x, y, z) = cte$, los rayos son trayectorias ortogonales a estos frentes que sigue la energía, χ, γ y ϵ son ángulos que hace el rayo con los ejes x, y y z respectivamente. Modificado de Apel [1987].

Tal expresión busca llegar a una descripción de la propagación acústica en términos de frentes de ondas dados por $\tau = cte$ y trayectorias o rayos (fig.3). La solución de 3.22 rinde el tiempo de arribo o el tiempo de viaje de una señal [Vidale, 1988].

Para que τ sea una solución de 3.22 y ésta una buena aproximación de 3.15, no es suficiente satisfacer la condición $\omega \rightarrow \infty$. Un análisis dimensional [Boyles, 1984] nos muestra qué condiciones se tienen que cumplir. Lo que se busca es que:

$$\lambda_0^2 \frac{\nabla^2 A}{A^2} \ll (\nabla \tau)^2$$

donde $\lambda_0 = 2\pi/\omega$, es la longitud de onda.

¹ *eikonos*= Imagen en griego

Utilizando el hecho de que la razón $c_0/c \approx 1$, donde c_0 es la rapidez de fase en la superficie, puede ser demostrado que se llega a [Boyles, 1984], [Brekhovskikh y Lysanov, 1977], [Knox, 1989]:

- $\lambda_0 \nabla^2 \tau \ll 1$

Esto implica que el Laplaciano de τ no debe cambiar representativamente en una longitud de onda. La primera derivada de τ nos da la dirección de propagación del frente, mientras que su segunda es la razón de cambio de esta dirección, lo que traduce la condición anterior a que la curvatura de las trayectorias de propagación no debe cambiar mucho en una longitud de onda.

- $\lambda_0 \nabla n \ll n^2 - 1$

donde n es el índice de refracción del medio, ó c_0/c y esto significa que el n no debe cambiar significativamente en una longitud de onda.

Y por último

- $\lambda_0 \nabla \ln A \ll 1$

Lo que implica que el cambio fraccional en amplitud (A) debe ser igualmente insignificante en una longitud de onda.

3.4 TEORIA DE RAYOS: Solución clásica de la ecuación de la eikonal

La energía contenida en una onda sinusoidal viaja a una velocidad de grupo $\vec{Cg}$ [Lighthill, 1978] y resulta ser que la trayectoria que toma esta energía, en el caso de las ondas acústicas, es ortogonal a los frentes de onda. Tales trayectorias son dadas por:

$$\frac{dX}{dt} = \vec{Cg} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (3.23)$$

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial X} = -|k|\nabla \vec{Cg} \quad (3.24)$$

y son los llamados rayos. Un desarrollo formal y de mucho mayor profundidad puede verse en Lighthill [1978]. En una analogía con mecánica, estas ecuaciones expresan la trayectoria que seguiría una partícula con velocidad $\vec{Cg}$. La relación de dispersión dicta en que dirección viaja la energía respecto a los frentes de onda. En el caso de anisotropía, *i.e.*, ondas internas, los rayos son paralelos a los frentes de onda [Lighthill, 1978]. En el caso de isotropía, el caso de una relación de una dispersión como 3.18, las trayectorias que toma la energía dependen de la magnitud del vector número de onda, por tanto, siempre son perpendiculares a los frentes de onda. Como las ondas acústicas son no dispersivas $|Cg|$ iguala la velocidad de fase c , significando que la energía acústica viaja a la velocidad de fase. Buscar una solución en términos de estas ecuaciones es de mucha utilidad, ya que rinden la trayectoria de la señal y además una estimación de la variación de la energía acústica en sus trayectorias.

Estos rayos también son llamados “geométricos” [Vidale, 1988] porque se pueden obtener por construcción geométrica, parametrizando la ecuación de la

eikonal con cualquier variable que aumenta monotónicamente a lo largo de la trayectoria que conforman estos rayos, siendo común utilizar la longitud de arco. Sea r un punto sobre la trayectoria S y ds un incremento infinitesimal en la longitud de arco del rayo (fig.4b). Entonces $\frac{dr}{ds}$ es un vector unitario en la dirección del rayo, sin embargo $\frac{\nabla\tau}{\|\nabla\tau\|}$ también lo es. Igualando estos dos términos y utilizando la igualdad de la ecuación 3.22, obtenemos las ecuaciones para la geometría de los rayos en términos de la eikonal:

$$\frac{w}{k_0 c} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial\tau}{\partial x} \quad \frac{w}{k_0 c} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial\tau}{\partial y} \quad \frac{w}{k_0 c} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial\tau}{\partial z} \quad (3.25)$$

donde $\tau(x(s), y(s), z(s))$

Sin embargo, τ es una función desconocida, por lo que es conveniente reescribir estas ecuaciones en función de una variable conocida. Derivando con respecto a s llegamos a las expresiones deseadas, en términos de c :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{w}{k_0 c} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w}{k_0 c} \right) \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{w}{k_0 c} \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w}{k_0 c} \right) \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{w}{k_0 c} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{w}{k_0 c} \right) \quad (3.28)$$

Estas ecuaciones son análogas a las expresiones que se derivan de pedir que el tiempo de arribo en las trayectorias cumpla con:

$$\delta\tau = \delta \int \frac{1}{c(x, y, z)} ds = 0; \quad (3.29)$$

esto es que la primera variación de la integral de tiempo de arribo iguale a cero.

Esto es llamado el principio de Fermat y pide que el tiempo de viaje en la trayectoria sea un extremo, lo que significa que un cambio infinitesimal en la trayectoria del rayo produce un cambio de segundo orden en el tiempo de arribo, por lo que el tiempo de arribo en los rayos es estacionario. Feynman (1965) explica que no es que el extremo siempre sea un mínimo, si no que la trayectoria que toma la onda es tal que existen un número grande de trayectorias cercanas que difieren a segundo orden en el tiempo de arribo.

Las ecuaciones 3.28 expresan lo mismo que las ecuaciones 3.24, esto es, las variaciones a lo largo de la trayectoria de un rayo son producto del índice de refracción y trazan la trayectoria de los rayos dada la posición inicial y el campo de rapidez de sonido. Cuando consideramos un problema acústico independiente de variaciones horizontales de c , *i.e.* donde $c = c(z)$ solamente, las ecuaciones 3.28 se simplifican a:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{k_0 c} \frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{k_0 c} \cos \chi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\omega}{k_0 c} \right) = 0; \quad \frac{\omega}{k_0 c} \cos \chi = cte. \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\omega}{k_0 c} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{\omega}{k_0 c} \right); \quad (3.31)$$

la primera ecuación puede ser reescrita como:

$$\frac{\cos \chi}{c} = \frac{1}{c_r}; \quad (3.32)$$

donde χ es el ángulo que hace el rayo con el eje x y c_r es la rapidez de sonido en el punto de retorno del rayo $\chi = 0$ (ver figura 4a). Esta expresión no es más que la expresión para la ley de Snell en un medio bidimensional con una variación continua de la rapidez del sonido.

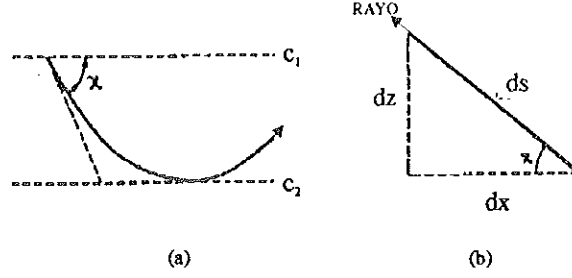


Figura4: (a) En el caso en donde $c = c(z)$ solamente, la trayectoria de los rayos puede ser trazada con el ángulo χ que hacen éstos con el eje x . (b) El elemento de arco ds es la variable con la cual se parametriza la eikonal. Ambas modificadas de Brekhovskikh y Lysanov [1977].

Por otra parte, la segunda expresión de 3.31 queda como:

$$\frac{d\chi}{ds} = -\frac{\cos \chi}{c} \frac{dc}{dz} = -\frac{\cos \chi_0}{c_0} \frac{dc}{dz} = -K \frac{dc}{dz} = -\frac{1}{R}. \quad (3.33)$$

La ecuación anterior indica que la curvatura de un rayo $\frac{d\chi}{ds}$ es directamente proporcional al gradiente $\frac{dc}{dz}$. El coeficiente K es el llamado parámetro de los rayos y es constante para cada rayo, según su ángulo de disparo χ_0 .

De la figura 4b se puede inferir que la distancia horizontal que recorre un rayo está dada por $\frac{dx}{dz} = \cot \chi$ ó [Boyles, 1984]:

$$x_1 - x_0 = \int_{z_0}^{z_1} \cot \chi = \int_{z_0}^{z_1} \frac{Kc}{\sqrt{1 - K^2 c^2}} dz. \quad (3.34)$$

Se deduce de esta misma figura (4b) que el tiempo es dado por la integración de la lentitud $\frac{1}{c}$ sobre la trayectoria, utilizando la igualdad $dt = \frac{ds}{c}$ [Knox, 1989, Jensen, 1994, Boyles, 1984]:

$$\tau(s) = \int_0^s \frac{1}{c(s)} ds = \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{c\sqrt{1-K^2c^2}} dz. \quad (3.35)$$

La longitud de la trayectoria del rayo, según la figura 4, se obtiene usando $ds = \frac{dz}{\sin\chi}$, y por tanto:

$$s_1 - s_0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sin\chi} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{1}{\sqrt{1-K^2c^2}} dz. \quad (3.36)$$

Para ciertas expresiones analíticas de $c(z)$ las ecuaciones 3.34, 3.35 y 3.36 tienen soluciones exactas, sin embargo, para resolver los rayos que intersectan a un emisor y a un receptor en un campo de c que no tiene expresión analítica, se utilizan los llamados métodos de disparo, basados en la ley de Snell, ó métodos de doblamiento basados en el principio de Fermat [Berryman, 1990]. Una vez que se encuentra la trayectoria se pueden resolver numéricamente las ecuaciones anteriores y al final del proceso conocer las trayectorias que tomó el sonido, la longitud de éstas y el tiempo de arribo, obteniendo así una imagen completa de la propagación del sonido dado el campo de c . Además uno puede calcular la atenuación de las ondas que representan estos rayos, calculando el campo de presión debido a la sumatoria de las contribuciones que los rayos hacen a este campo, en base a su intensidad y fase [Officer, 1958]. Para obtener la intensidad uno necesita resolver la ecuación de transporte.

Estos métodos de solución son los comunmente utilizados, tanto en sismología [Vidale, 1988] como en oceanografía [Jensen, 1994, Knox, 1989], sin embargo en el siguiente capítulo veremos la posibilidad de obtener soluciones numéricas de la ecuación de la eikonal como alternativa a la técnica de rayos.

SOLUCIONES NUMERICAS

Las soluciones numéricas de la ecuación de la eikonal intentan resolver el problema de calcular tiempos de arribo en términos de frentes de onda, a través de la obtención de $|\nabla\tau|^2$. Hasta ahora todos los esquemas son basados en diferencias finitas (aproximan el operador de τ) y como resuelven los tiempos de arribo sobre una malla constituyen métodos más completos y eficientes que la teoría de rayos, en el sentido de que nos dan el tiempo de arribo en cualquier punto; además el hecho de que incluyan efectos de difracción, pueden calcular correctamente el tiempo de arribo en cáusticas y zonas de sombra. El problema mas grande de su aplicabilidad es la inestabilidad numérica, producto de variaciones fuertes en el campo de rapidez c .

Vidale [1988] introduce las soluciones numéricas de la ecuación de la eikonal, el propone aproximar la ecuación de la eikonal con diferencias finitas, resolviendo directamente los tiempos de arribo con una extrapolación de onda plana y/u onda esférica, en una secuencia de “*cuadros en expansión*”. Sin embargo, este algoritmo es complicado porque necesita un ordenamiento de los nodos en los cuadros de expansión, además parece tener dificultades en estructuras de rapidez con contrastes fuertes, porque el método de “*cuadros en expansión*” viola el principio de causalidad, resultando en inestabilidad numérica o una mala estimación de los tiempos de arribo [Qin *et al.*, 1992].

Qin *et al.* [1992] propone una mejoría al método de Vidale, postulando que los cálculos sigan “*frentes de onda en expansión*” lo cual mitiga el problema de inestabilidad y hace el algoritmo más ameno a la vectorización.

Van Trier y Symes [1991] proponen un esquema numérico en diferencias finitas, basado en trabajos sobre leyes de conservación hiperbólicas, soluciones viscosas y teoría de shocks como son los de Lax [1971], Harten, Lax y Hyman [1976] y Harten, Lax y Van Leer [1983]. Este esquema en coordenadas polares resulta ser más sencillo, vectorizable y estable numéricamente que el esquema original de Vidale.

Recientemente Hole y Zelt [1995] han propuesto mejoras del esquema de Vidale, las cuales eliminan por completo el problema de inestabilidad y que lo hacen totalmente vectorizable.

Las limitaciones básicas de estos esquemas es que sólo calculan los primeros tiempos de arribo y no pueden calcular eventos de reflexión.

Se juzgó que el esquema de Van Trier y Symes [1991] es el más sencillo, por lo cual se decidió utilizarlo para los propósitos de esta tesis, veremos más adelante que la utilización del esquema en coordenadas polares puede traer complicaciones en aplicaciones oceanográficas de grandes distancias horizontales. Por brevedad sólo describimos aquí el método de Van Trier y Symes.

4.1 SOLUCIONES VISCOSAS Y LEYES DE CONSERVACION: método de Van Trier y Symes, 1991

Por simplicidad trataremos con el caso en dos dimensiones. La ecuación de la eikonal en dos dimensiones en coordenadas polares es la siguiente [Van Trier y Symes, 1991]:

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\frac{\partial \tau}{\partial \theta}}{r}\right)^2 = l^2(\theta, r) \quad (4.37)$$

donde τ es la función de fase o la eikonal y l es la lentitud de sonido del medio.

Si despejamos $\frac{\partial \tau}{\partial r}$ y nombramos $u = \frac{\partial \tau}{\partial \theta}$, obtenemos:

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \pm \sqrt{l^2 - \left(\frac{u}{r}\right)^2}. \quad (4.38)$$

Derivando todo con respecto a θ , llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \tau}{\partial r} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial F(u)}{\partial \theta} \quad (4.39)$$

donde $F = \pm \sqrt{l^2 - \left(\frac{u}{r}\right)^2}$ es llamada una función de flujo. La ecuación 4.39 se denomina una ley de conservación hiperbólica, porque su integral ¹ :

$$\frac{d}{dr} \int_b^a u(\theta, r) d\theta = F(u(b)) - F(u(a)) \quad (4.40)$$

representa la conservación local de u para un intervalo de θ [a,b]. Estas leyes de conservación aparecen en modelos de dinámica de gases.

Por lo general en las soluciones de este tipo de ecuaciones de conservación se producen discontinuidades. Estas introducen problemas en la búsqueda de una solución. Uno de los problemas es que la solución no va a satisfacer la ecuación en el sentido clásico, esto es, de poder ser evaluada en cualquier punto. Por ello es necesario admitir soluciones “promedio”². Además, las discontinuidades hacen que el número de soluciones no clásicas sea muy grande y que sea difícil saber cuál es la “correcta”. Para remediar esta situación se introducen términos de viscosidad en la ecuación de conservación³. Estos términos disipativos suavizan

¹En la derivación de esta integral se ha invertido el orden de la integral y la derivada en el término del lado izquierdo de la ecuación 4.39 y se ha sustituido por la expresión de $\frac{\partial u}{\partial r}$.

²Llamadas frecuentemente soluciones débiles ó soluciones no clásicas.

³Generalmente un operador laplaciano [Lax, 1973].

los gradientes, reduciendo las discontinuidades. La solución se obtiene entonces, tomando el límite de la ecuación de conservación cuando el término de viscosidad tiende a cero, llamada una solución de viscosidad desvaneciente. Van Trier y Symes [1991] observan que para los gradientes de la ecuación de la eikonal con términos de viscosidad, la solución estable es el campo de primeros arribos, basándose en evidencia teórica, pero más que nada, en evidencia numérica.

4.2 EL ESQUEMA NUMERICO

Como u es un gradiente de la función de fase, la integral de u es la diferencia en tiempo de arribo en el intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b u(\theta, r) d\theta = \tau(b, r) - \tau(a, r)$$

Si no hay un cambio en la lentitud del sonido en el intervalo $[a, b]$, el tiempo de arribo es conservado. Los tiempos de arribo en un incremento de radio $r + dr$ son:

$$\tau(b, r + dr) - \tau(a, r + dr) = \tau(b, r) - \tau(a, r) + dr[F(b, r) - F(a, r)].$$

Es fácil ver entonces de esta ecuación que el esquema numérico en diferencias finitas a primer orden que resuelve esta ecuación de conservación, es:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta r} = \frac{1}{\Delta \theta} \begin{cases} F(u_j^n) - F(u_{j-1}^n) & \text{si } F'(u_j^n) \text{ y } F'(u_{j-1}^n) \leq 0 \\ F(u_{j+1}^n) - F(u_j^n) & \text{si } F'(u_{j+1}^n) \text{ y } F'(u_j^n) > 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

donde u_j^n es la representación discretizada de $u(\theta, r)$ en la malla $\theta_j = j\Delta\theta, r_n = n\Delta r$.

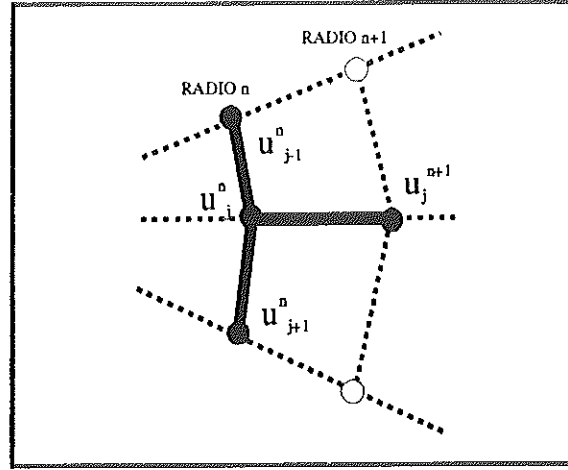


Figura5: El esquema considera tres nodos del radio n , en el cálculo de un nodo de radio $n+1$, por lo que los calculos avanzan en anillos. El signo de la función de flujo determina en que dirección se implmenta el operador en diferencias finitas.

Dependiendo del signo de las derivadas de la función de flujo en los tres puntos considerados $(j+1, j, j-1)$, el esquema utiliza una aproximación en diferencias finitas hacia adelante o hacia atrás (fig.5) en . Esta derivada indica la dirección de máximo cambio en los tres puntos, respecto al campo de c , y el cambio es forzado por la aparición de discontinuidades en las variables de flujo. El éxito de este tipo de esquemas para resolver leyes de conservación se debe a que imitan el comportamiento de un flujo continuo, tomando siempre la información para el cálculo de un evento local, de información en la dirección de eventos que ya ocurrieron ó información de “*corriente arriba*” [Van Trier y Symes, 1991], es decir busca información en la dirección donde ya llegó la señal.

Cuando el signo de la derivada de la función de flujo $F(u)$ cambia en los tres puntos considerados, u se resuelve de la siguiente manera:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta r}{\Delta \theta} [\Delta_+ F_-(u_j^n) + \Delta_- F_+(u_j^n)] \quad (4.42)$$

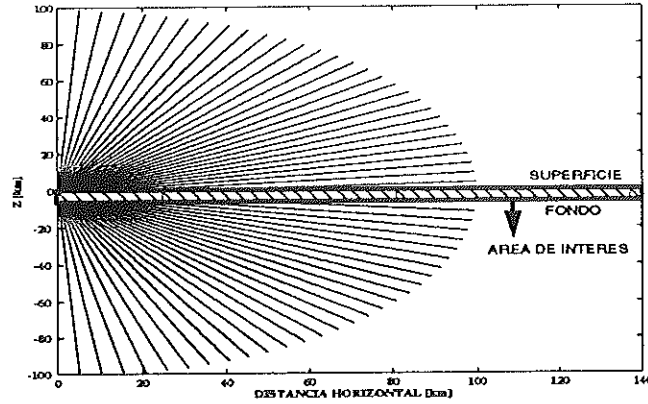


Figura6: Como ejemplo, en una transmisión de 100 km, la malla polar tiene que ser definida con un radio máximo de 100 km, esto hace que la discretización sea ineficiente, ya que sólo aproximadamente el 15 % de los nodos totales de la malla quedan dentro de las fronteras del fondo y la superficie.

Donde:

$$F_+(u) = F(\max(u, \tilde{u}))$$

$$F_-(u) = F(\min(u, \tilde{u}))$$

y

$$\Delta_+ F = F(u_{j+1}) - F(u_j)$$

$$\Delta_- F = F(u_j) - F(u_{j-1})$$

siendo definida $\tilde{u}$ como $F'(\tilde{u}) = 0$.

Hay que notar que la derivada de la función de flujo $F'(u)$ es con respecto a u . De la ecuación 4.38 se puede ver que $F(u)$ puede tomar dos signos. La elección del signo es análogo en teoría de rayos a escoger un signo del ángulo de disparo de los rayos, con respecto al eje x . El signo positivo denota un ángulo positivo de disparo y *viceversa*.

La condición inicial es $u(\theta, 0) = 0$ y los cálculos avanzan en anillos de incremento Δr , hasta completar la malla. Los tiempos de arribo se encuentran integrando la ecuación 4.38 sobre r con una simple regla trapezoidal.

El origen de la malla polar se centra en el origen del pulso. Si uno quiere resolver un campo de c de D kilometros en la horizontal, tiene que definir una malla de D longitud de máximo radio, que hace que la malla se extienda, desde el origen D kilometros en ambas direcciones de la vertical (ver figura 6). Para la aplicaciones oceanográficas donde las escalas horizontales son típicamente dos o tres ordenes de magnitud mayores que las verticales esto presenta una ineficiencia, tanto en memoria como en tiempo de computo. En lo particular se mitigó el problema de tiempo de procesamiento (tiempo de CPU) implementando una búsqueda en cada avance de anillo, de los nodos que caen dentro de las fronteras del campo (el fondo y la superficie) y solo se resuelven los nodos que estan dentro de este límite. Para los nodos de la "orilla" se forza la aproximación haciendo que el tiempo de arribo de estos nodos se calcule con información de adentro del campo ver figura 7, lo que implica un fondo y superficie transparente, ya que asumimos que las ondas salen a través de éstas sin interactuar con ellas y sin regresar posteriormente al campo.

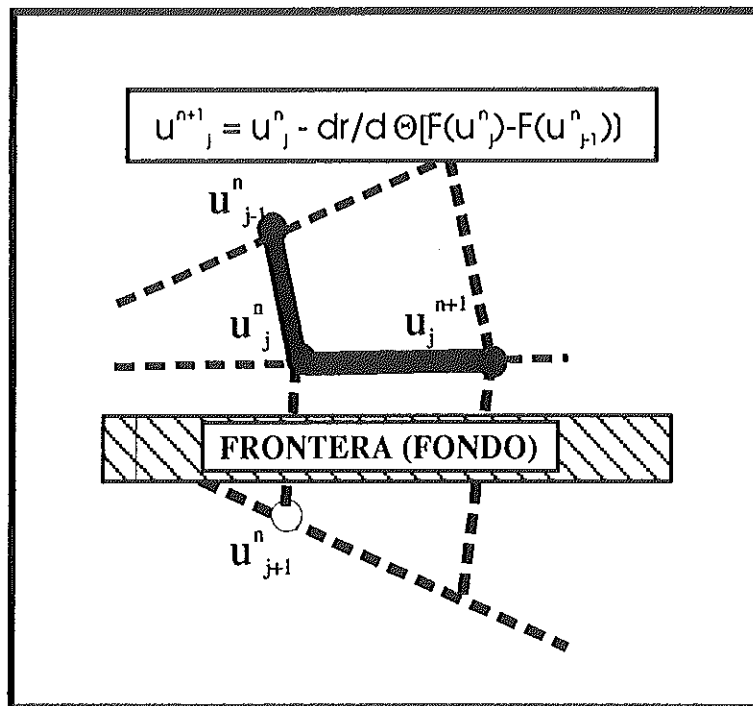


Figura7: En las fronteras, la aproximación es forzada para que sólo se tomen en cuenta nodos que caen dentro del campo, el error de este forzamiento es del mismo orden de magnitud que el del esquema [Van Trier y Symes, 1991].

METODOLOGIA

El propósito fundamental de este trabajo es probar si las soluciones numéricas de la ecuación de la eikonal sirven para propósitos oceanográficos, en concreto la estimación de tiempos de arribo de pulsos acústicos. La teoría de rayos es la solución clásica a este problema y es ampliamente comprobada, por lo cual es el candidato lógico para basar juicios sobre estos esquemas numéricos.

Se realizaron entonces dos experimentos simulando la transmisión de sonido en un corte $x - z$ del océano, donde se supuso que el campo de rapidez de sonido es dado simplemente por los siguientes perfiles de rapidez de sonido:

- EL PERFIL LINEAL

Se crea bajo condiciones adiabáticas, es decir, $c(z)$ es puramente función de la presión hidrostática (fig.8a). Aunque las condiciones oceanográficas para las cuales vamos a extender este perfil son hipotéticas, en la realidad, tales condiciones surgen en mares someros(200-300m) en latitudes altas, bajo condiciones de invierno, donde existe una homogenización completa de la columna de agua [Knox, 1989]. Tal es el caso de aguas fuera de la costa de Groenlandia [Knox, 1989] y aguas profundas del mar de Japón [Brekhovskikh y Lysanov, 1977]. La expresión analítica del perfil es:

$$c(z) = c_0(1 + az) \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.43)$$

siendo c_0 la rapidez del sonido en la superficie $z = 0$, h la profundidad máxima del océano y a el gradiente adiabático de rapidez de sonido.

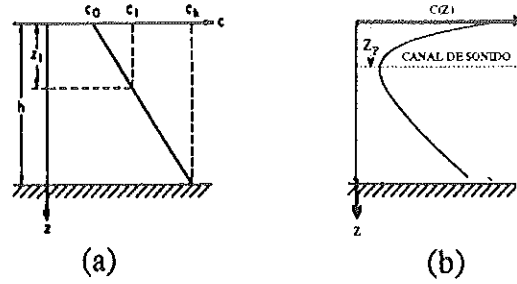


Figura8: (a) El perfil lineal, aquí $c(z)$ es función de la presión hidrostática solamente, Modificado de Brekhovskikh y Lysanov [1977]. (b) El perfil parabólico, el cual es función de temperatura, salinidad y presión, en z_p se produce un mínimo, el cual forma el canal de sonido. Modificado de Munk y Wunsch [1983].

• EL PERFIL PARABOLICO

Este perfil es una idealización de las características generales del verdadero canal de sonido (CS), común en aguas de latitudes medias, tal perfil es dado por [Munk y Wunsch, 1983]:

$$c^2 = \frac{c_p^2}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{a_\pm^2}}} \quad z_p = 0 \quad z_+ \leq z \leq z_- \quad (5.44)$$

donde c_p es la rapidez del sonido en el eje del canal. Por razones analíticas z_p es considerado como 0, z es positivo hacia arriba y negativo hacia abajo de z_p . El subíndice $\pm$ de a permite que el perfil tenga diferentes pendientes en las parábolas hacia arriba y abajo de z_p (fig.8b).

El perfil lineal se utilizó en el experimento uno y el perfil parabólico en el experimento dos.

La razón por la cual se escogieron estos perfiles, es porque al sustituirlas en las ecuaciones de los rayos 3.34 y 3.35 producen soluciones exactas. Con estas soluciones procedimos a construir una imagen de los primeros tiempos de arribo

en rayos puramente refractados (sin reflexión), identificando los rayos asociados a el frente de onda de los primeros tiempos de arribo. La evaluación de la solución numérica se basó en tres criterios:

- Estabilidad numérica ¿ Se resolvió o no el campo de τ ?
- La correspondencia visual entre la trayectoria de estos rayos y los frentes de onda dados por la solución numérica. Los rayos por definición deben ser perpendiculares en todo punto de su trayectoria a los frentes de onda
- La diferencia en tiempos de arribo entre ambas soluciones.

Se realizó un tercer experimento para probar la estabilidad numérica del esquema ante campos de rapidez de sonido más complejos. Cuando uno desea una aproximación más realista de la estructura acústica del océano introduce una variabilidad en la horizontal de c , es decir $c = c(x, z)$, y es esta la razón por la cual en algunos casos las trayectorias de los rayos en estos campos se vuelven caóticos [Smith *et al.*, 1992]. Esta es una de las razones por la cual se propone la utilización de soluciones numéricas y por tanto simulamos la transmisión de sonido en un campo bidimensional de rapidez de sonido dado al introducir una variación horizontal del perfil parabólico.

Además el experimento se prestó para probar numericamente el hecho de que las mediciones acústicas son espacialmente integrales [Munk y Wunsch, 1979]. Munk y Forbes (1982) argumentan que por tanto, este tipo de mediciones son las más adecuadas para detectar la señal del llamado calentamiento global, ya que, contrario a mediciones puntuales, no sufren de contaminaciones locales de ruido.

Se supuso que este campo “perturbado” partió de un estado inicial “no perturbado”, en este caso un campo de rapidez dado por el perfil parabólico sin variación horizontal. La perturbación en c debería de producir un cambio detectable en el campo de los tiempos de arribo al comparar ambas soluciones.

En este último experimento, no se compararon los resultados con una solución por teoría de rayos, porque lo único que se quiso probar es la estabilidad numérica del esquema y su sensibilidad ante cambios en c , por lo que los criterios de evaluación fueron:

- ¿ Se resolvió el campo de τ o no?
- La diferencia en tiempos de arribo entre las soluciones del campo “perturbado” y el campo “no perturbado”.

Todos los experimentos se realizaron con una codificación del esquema en el lenguaje MATLAB (ver apéndice) y se procesaron en una H.P. 755, con 250 megas de RAM y 4 Gigas de disco duro. Estos experimentos se describen con más detalle en los resultados. 2

RESULTADOS

6.1 EL PERFIL LINEAL

6.1.1 ESTRUCTURA DEL CAMPO DE RAPIDEZ

Para fines experimentales se modeló la transmisión de un pulso acústico cuyo origen fué situado en la superficie. La transmisión fué confinada al plano $x - z$, en la dirección positiva del eje x . Por razones de simplicidad el océano en cuestión se consideró con un fondo plano y para dimensionarlo realísticamente se le dió una profundidad de $5000m$. La dimensión horizontal del campo fué de $58.6km$; el porqué de esta longitud se hará evidente en la sección subsecuente de la solución por rayos. Definimos de acuerdo a Brekhovkikh (1991) las condiciones comunes del perfil lineal

$$\begin{aligned} a &= 1.2e^{-5}m^{-1} \\ c_0 &= 1450ms^{-1} \end{aligned} \tag{6.45}$$

Tal expresión produce un perfil mostrado en la figura 9a. Este perfil se utilizó para calcular los campos de rapidez de sonido, haciendo que $c(x, z) = c(z)$, mostrado en la figura 9b.

6.1.2 LA SOLUCION POR RAYOS

Una característica importante de estos rayos es que son semicírculos [Knox, 1989], si sustituimos la expresión para $c(z)$ 5.43 en la ecuación 3.33:

$$\frac{d\chi}{ds} = -K \frac{dc}{dz} = -K \frac{d(c_0(1 + az))}{dz} = -ac_0K = -\frac{1}{R}$$

podemos inferir que los rayos son semicírculos porque mantienen radio y curvatura constante.

El mecanismo de transmisión ó de guía de ondas es dado por la canalización de los rayos. Esta surge por tres razones: las reflexiones con la superficie, las reflexiones con el fondo y la refracción debido al incremento de $c(z)$ con la profundidad. Los rayos que son disparados con ángulos de disparo χ_0 negativos (ver fig.4), y por ende parten hacia el fondo, tenderán a ser refractados hacia la superficie, sin embargo solamente los rayos que cumplan con:

$$0 \leq \chi_0 \leq \chi_{0max}, \quad (6.46)$$

serán los que no se encuentren con el fondo. El límite χ_{0max} se obtiene al considerar que el rayo con el mayor χ_0 posible sin incidir con el fondo es aquel que experimente su punto de retorno $\chi = 0$ justo antes del fondo. Al sustituir estas expresiones en la ley de Snell (ec. 3.32), obtenemos:

$$\chi_{0max} = \cos^{-1} \left(\frac{1}{1 + ah} \right) \approx .338 \text{ rad} \approx 19.37^\circ. \quad (6.47)$$

Los rayos que cumplen con 6.46 despues de ser refractados a la superficie, sufren una reflexión con ella, considerando la como un reflector perfecto, causa que el rayo parta hacia el fondo nuevamente con χ_0 y por ende mantiene sus mismas características.

La distancia horizontal D recorrida entre reflexiones sucesivas es denominada un ciclo y está dada por [Brekhovskikh y Lysanov, 1977]:

$$D = \frac{2}{\cos \chi_0} \left| \frac{1}{a} \int_{\chi_0}^0 \cos \chi d\chi \right| = \frac{2}{a} \tan \chi_0 \quad (6.48)$$

Donde podemos ver que los rayos con χ_0 mayores viajarán una mayor distancia. Para el caso de 6.45 la distancia máxima de un ciclo es:

$$D_{max} = \frac{2}{a} \tan \chi_{0max} \approx 58.6 km.$$

Esta distancia es importante ya que va a ser la distancia horizontal máxima del campo de $c(z)$ en el cual los tiempos de arribo no son asociados a reflexiones. Esto es evidente por las razones siguientes. Un receptor puede ser intersectado por un número infinito de rayos que sólo difieren entre sí, en el número de reflexiones con la superficie o ciclos; por lo que un emisor y receptor separados una distancia horizontal D serán intersectados por un número infinito de rayos que satisfacen [Brekhovskikh y Lysanov, 1977]:

$$\chi_{0N} = \tan^{-1} \left(\frac{aD}{2N} \right) \quad N = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (6.49)$$

la cual puede ser derivada de 6.48. El tiempo de arribo asociado a estos rayos para un ciclo completo esta dado por [Brekhovskikh y Lysanov, 1977]:

$$t = \frac{1}{ac_0} \left| \int_{\chi_0}^{\chi_r=0} \frac{d\chi}{\cos \chi} \right| = \frac{1}{ac_0} \ln \left(\frac{1 + \text{sen} \chi_0}{1 - \text{sen} \chi_0} \right) \quad (6.50)$$

que no es más que parametrizar 3.35 con el ángulo χ . Expandiendo en serie de potencias y olvidando los términos de cuarto orden y mayor [Brekhovskikh y Lysanov, 1977] resulta:

$$t_N \approx \frac{2N\chi_0}{ac_0} \left(1 + \frac{1}{6}\chi_0^2 \right). \quad (6.51)$$

De aquí podemos inferir que entre más grande sea N mayor será el tiempo de arribo. Como regla general entre más cerca viaje de la superficie un rayo,

mayor será su tiempo de viaje. Podemos entonces, representar el campo de los primeros tiempos de arribo independientes de reflexiones, con el primer ciclo de los rayos que cumplen con 6.46 y además que cumplen con 6.49 con $N = 1$, el cual nos asegura estos tiempos de arribo son los más rápidos y por tanto, los primeros en llegar.

Para trazar los rayos en el espacio, basta con sustituir la expresión de $c(z)$ en las ec. 3.35 y 3.34 de rayos:

$$x = \int_0^z \frac{Kc}{\sqrt{1 - K^2 c^2}} dz = -\frac{\sqrt{1 - K^2 c_0^2 (1 + az)^2}}{aKc_0} \quad (6.52)$$

Los tiempos de arribo asociados a estas trayectorias son dados por:

$$t = \int_0^z \frac{1}{c\sqrt{1 - K^2 c^2}} dz = -\frac{1}{ac_0} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - K^2 c_0^2 (1 + az)^2}}{Kc_0(1 + az)} \right)$$

Con estas ecuaciones trazamos la trayectoria (fig.10) y calculamos los tiempos de arribo de cuatro rayos que cumplen con las siguientes características:

RAYO	$\approx \chi_0 [^\circ]$	D [m]	$Z_r (\chi = 0)$ [m]	t(un ciclo) [s]
1	8	23,440	820.1	16.1127
2	11.9	35,160	1,834.2	24.0719
3	15.7	46,880	3,233.9	31.9192
4	19.4	58,600	5000	39.6243

6.1.3 EXPERIMENTO UNO

Se resolvió el campo de τ antes mencionado con la solución numérica de la eikonal, discretizandolo de la siguiente manera:

$$dr = 20m$$

$$d\theta = \frac{\pi}{250} rad$$

donde $d\theta$ cumple con la condición de estabilidad de *Courant-Friedrichs-Lewys* (CFL) $\frac{dr}{d\theta} \approx C_{max} = 1540ms^{-1}$. Tal discretización del campo de rapidez produce una matriz de trabajo de $2931 \times 251 = 735,681$ elementos o nodos, en el cual por el forzamiento de las fronteras y por las dimensiones del campo, sólo se utilizó aproximadamente el 15%.

Como se está resolviendo para rayos con χ_0 negativas, el signo de la función de flujo se escogió negativa.

En la figura 11 se muestra la solución obtenida, es decir, el campo de los primeros tiempos de arribo en segundos y es una interpolación de la solución en coordenadas polares a una malla cartesiana con una luz de malla de 50 m. La escala de tonos (oscuros-ligeros-osuros) denota incrementos en los tiempos de arribo. Las isócronas que constituyen los frentes de onda o frentes de fase constante, empiezan desde el primer segundo, con un intervalo de un segundo en las diez primeras isócronas y cinco segundos en las restantes.

Esta solución nos da el primer tiempo de arribo en cualquier punto dentro del campo, sin embargo no nos dice nada sobre la trayectoria que tomó la energía.

Posteriormente sobrepusimos los rayos calculados para ver la correspondencia con los frentes de onda (isócronas), mostrado en la figura 12. En ésta se puede observar una buena correspondencia visual de los rayos calculados con los frentes de onda. Los rayos al igual que los frentes de onda tienden a ser divergentes. Cabe mencionar que el esquema numérico llena los espacios donde el rayo con χ_0 no penetra.

Para medir la precisión del esquema se interpolaron los resultados con un método bivariado [Akima, 1980] a las trayectorias de estos rayos y se compararon los resultados de ambas soluciones de la siguiente manera:

$$E = SR - SN \quad (6.53)$$

donde:

SR=Solución por Rayos.

SN=Solución Numérica.

Este error se muestra en la figura 13, para cada rayo calculado. La tendencia del error es de incrementar con la distancia horizontal. El valor máximo de error es de 6 ms, correspondiente a la trayectoria del rayo 4, cuyo ciclo D , es el mayor $\approx 58.6 \text{ km}$. En todas las comparaciones se muestra que el esquema tiende a sobrestimar los tiempos de arribo, es decir, la solución por rayos rinde tiempos de arribo más cortos, ya que el error caracterizado por 6.53 es negativo en todos los casos.

En todas las comparaciones se observa en los primeros 3 km de distancia horizontal un “ruido” u oscilaciones del error de casi 2ms. También es notable el pico en el rayo cuatro, cerca del kilómetro treinta, justo donde el rayo toca el fondo (orilla de la malla). Las razones de estas particularidades no se debe al esquema, si no probablemente se debe a una extrapolación del código de interpolación, en la sección subsecuente se discutirá esto.

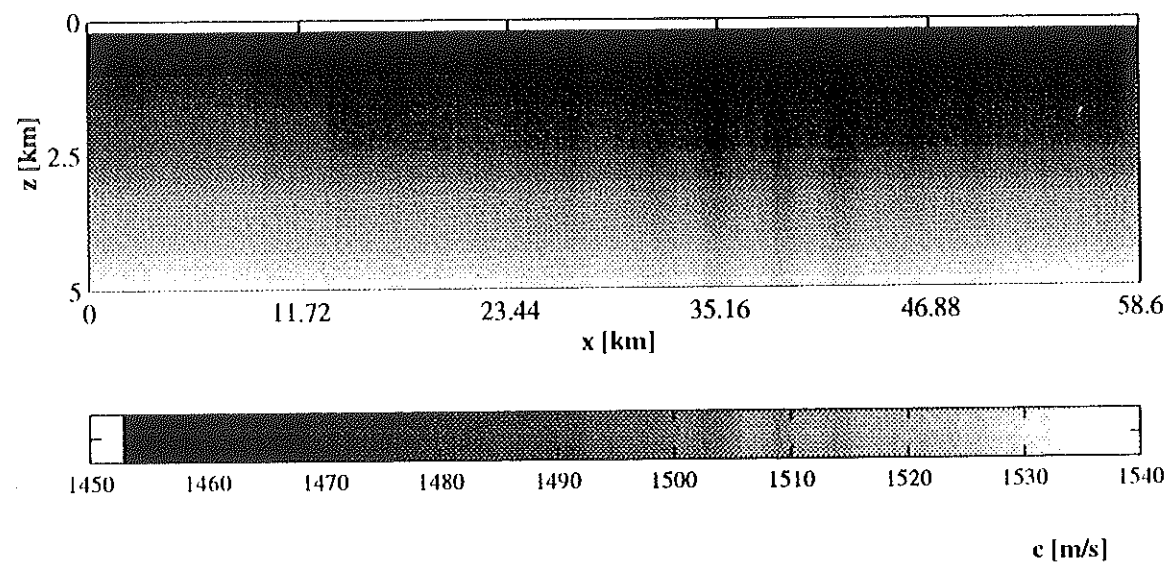
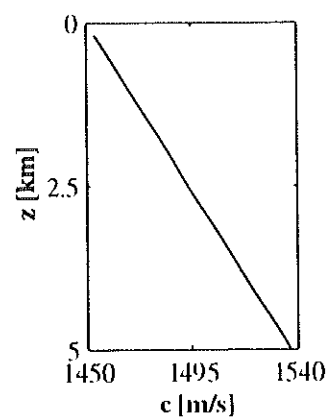


Figura 9: (a) Perfil lineal utilizado para construir el campo de rapidez de sonido. (b) Estructura del campo de rapidez, aquí $c = c(z)$.

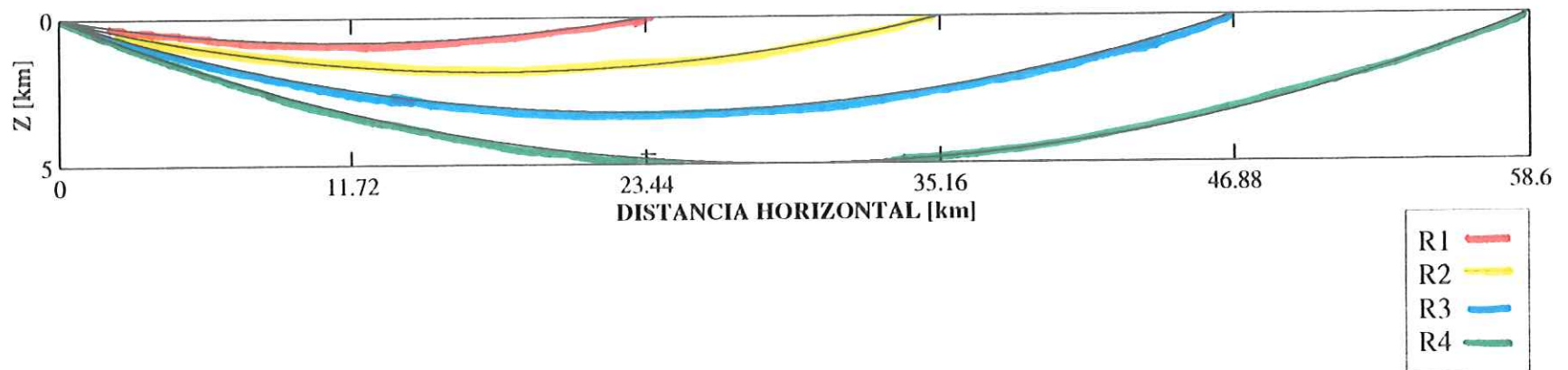


Figura 10: Rayos calculados para el campo de rapidez del experimento uno, éstos son semicírculos. El rayo número cuatro tiene el mayor ángulo de disparo y su punto de retorno es justo en el fondo.

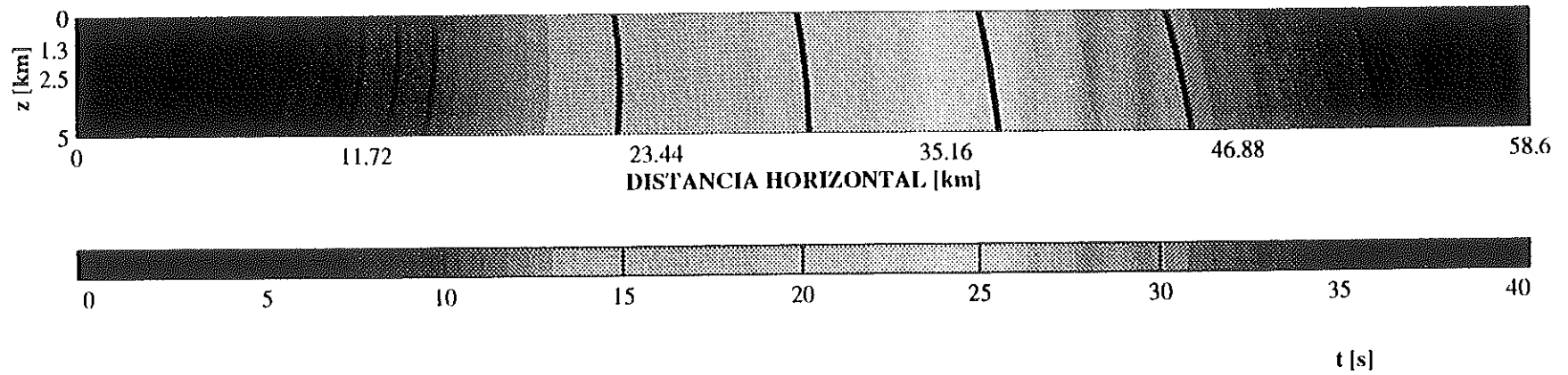


Figura 11: Imagen del campo de los primeros tiempos de arribo para el experimento uno, que muestra la capacidad del esquema en resolver este tipo de perfil de c . El origen del pulso se encuentra en la coordenada (0,0). Las isolíneas son isócronas y constituyen frentes de onda; empiezan desde el primer segundo, con intervalos de un segundo en las primeras diez y cinco segundos en las restantes.

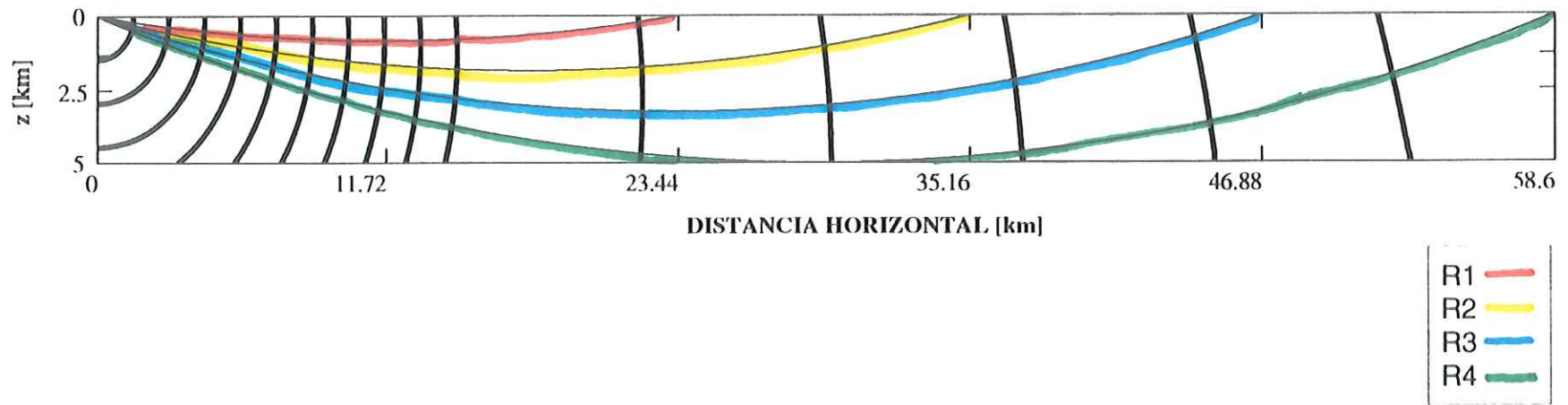


Figura 12: Sobreposición de los rayos calculados a los frentes de onda. Todos los rayos calculados corresponden a los frentes de onda, e.g., los rayos inciden perpendicularmente sobre los frentes de onda.

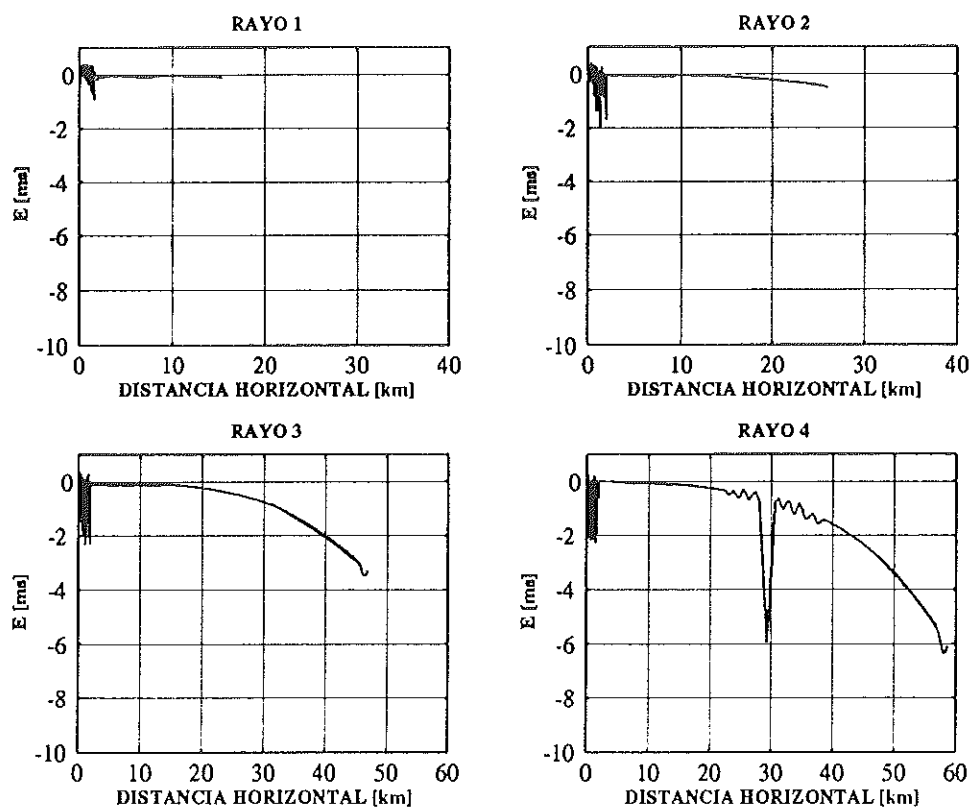


Figura13: Diferencia en tiempos de arribo en milisegundos de la solución numérica y los rayos, en la trayectoria de éstos. Aquí el rayo uno tiene el menor ángulo de disparo. La tendencia sobresaliente es que el error aumenta conforme nos alejamos del origen.

6.2 EL PERFIL PARABOLICO

6.2.1 ESTRUCTURA DEL CAMPO DE RAPIDEZ

El perfil se caracterizó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}c_p &= 1500ms^{-1} \\ a_- &= 30e^3m \\ a_+ &= 15e^3m\end{aligned}\tag{6.54}$$

que produce una variación de c en la vertical mostrado en la figura 14a. Esta variación es diminuta, sin embargo por razones de estabilidad del esquema y capacidad de computo, se encontró que los coeficientes propuestos fueron más adecuados para fines experimentales.

Se creo entonces, un campo de c para un océano de fondo plano, de $h = 5000km$ y para la simulación de una transmisión de 100 km en distancia horizontal ¹ (fig.14b). El origen de sonido se colocó en el eje del canal $z_p = 1300m$.

6.2.2 SOLUCION POR RAYOS

La forma que asumirán los rayos disparados en la cercanía de z_p son sinusoides perfectas [Munk y Wunsch, 1983]. Otra vez la tarea aquí es construir una solución por rayos que represente el campo de los primeros tiempos de arribo que no son asociados a reflexiones. En el caso de este perfil trataremos con rayos que son puramente refractados y usando ángulos de disparo χ_0 positivos, *e.g.*, que parten hacia la superficie. Los ciclos D de los rayos aquí se pueden caracterizar como positivos y negativos, esto es, un ciclo en la parte superior de z_p y uno abajo de

¹Por razones de capacidad en memoria RAM.

ésta. Las características de estos ciclos dependen de las características de cada perfil arriba y abajo de z_p . De aquí en adelante el subíndice ‘-’ denota un ciclo abajo de z_p y el subíndice ‘+’ denota uno arriba de éste. Por el hecho de que $c(z)$ aumenta desde z_p hacia la superficie, algunos rayos tenderán a ser refractados hacia el eje del canal otra vez, y estos cumplen con:

$$0 \leq \chi_0 \leq \chi_{0max}$$

donde χ_{0max} cumple con la ley de Snell:

$$\chi_{0max-pos} = \cos^{-1} \left(1 - \left(\frac{z_p}{a_+} \right)^2 \right) \approx 1.23 \text{ rad} \approx 7.03^\circ \quad (6.55)$$

razonando que el rayo con máximo ángulo de disparo sea aquel que experimente su punto de retorno ($\chi = 0$) justo antes de llegar a la superficie. El rayo completará un ciclo cuando llegue nuevamente al eje del canal y el mismo mecanismo de refracción vuelve a funcionar por el hecho de que $c(z)$ aumenta con la profundidad y por tanto los rayos que van hacia el fondo tienden a ser doblados hacia arriba. Para que no choquen con el fondo tienen que cumplir con:

$$\chi_{0max-neg} = \cos^{-1} \left(1 - \left(\frac{3700m}{30e^3m} \right)^2 \right)^2 \approx 246 \text{ rad} \approx 14.12^\circ.$$

Por lo que los rayos que cumplen con 6.55 completan ciclos dobles y constituyen rayos puramente refractados. La distancia horizontal de estos dobles ciclos es dado por las contribuciones del ciclo negativo y el ciclo positivo [Munk y Wunsch, 1983]:

$$D = D_- + D_+$$

donde $D_{\pm} = \pi a_{\pm} \cos \chi_0$

Entre mayor sea el ángulo de disparo, mayor será la distancia horizontal recorrida. El tiempo de arribo de estos dobles ciclos es dado por

[Munk y Wunsch, 1983]:

$$t = t_+ + t_-$$

$$\text{donde } t_{\pm} = \frac{a \pm \pi}{2c_p} (1 + \cos^2 \chi_0)$$

De esta ecuación parece ser que entre mayor sea χ_0 , menor será el tiempo de arribo, sin embargo este no es el caso, ya que este perfil produce una separación en el tiempo de los frentes de onda o una llamada dispersión anómala [Munk y Wunsch, 1983], por lo que los rayos axiales o los rayos con el menor ángulo de disparo son los asociados a los primeros tiempos de arribo. Podemos tratar de representar este campo de tiempos de arribo con rayos de χ_0 que cumplen con 6.55 y esperamos que entre menor sea χ_0 mayor será la correspondencia a los primeros tiempos de arribo. Uno puede trazar estos rayos y calcular el tiempo de viaje en la trayectoria sustituyendo nuevamente $c(z)$ en las ecuaciones 3.34 y 3.35 para obtener:

$$x = \int_0^z \frac{Kc}{\sqrt{1 - K^2 c^2}} dz = a K c_p \sin^{-1} \left(\frac{z}{a \sqrt{1 - K^2 c_p^2}} \right) \quad (6.56)$$

y:

$$t = \int_0^z \frac{1}{c \sqrt{1 - K^2 c^2}} dz = \frac{a}{c_p} \sin^{-1} \left(\frac{z}{a \sqrt{1 - K^2 c_p^2}} \right) \left(\frac{1 + K^2 c_0^2}{2} \right) + \frac{z}{2c_p} \sqrt{1 - K^2 c_p^2 - \left(\frac{z}{a} \right)^2} \quad (6.57)$$

hay que recordar que aquí $z_p = 0$, por lo que $-3700 \leq z \leq 1300$

Se trazaron siete rayos (fig. 15) con las siguientes características:

RAYO	$\approx \chi_0 [^\circ]$	$D_+ [m]$	$Z_{ret} [m]$	$D_- [m]$	$Z_r [m]$	$D[m] = D_- + D_+$	$t[s] = t_- + t_+$
1	4.97	46,947	0	93,893	3900	140,840	93.8938
2	4.07	47,005	231.9	94,010	3402	140,101	94.0102
3	3.17	47,052	470	94103	2959.9	141,161	94.1035
4	2.27	47,807	705.4	94,174	2489.2	141,260	94.1737
5	1.37	47,110	940.4	94,221	2018.2	141,330	94.2208
6	.47	47,122	1176.5	94,245	1547.1	141,370	94.2446
7	0	47,123.89	-1300	94,247.78	-1300	141,372	94.2478

6.2.3 EXPERIMENTO DOS

Se resolvió el campo de $c(z)$ antes mencionado, para ello la discretización fué:

$$dr = 25 \text{ m}$$

$$d\theta = \frac{\pi}{310} \text{ rad}$$

donde $d\theta$ cumple con la condición de estabilidad de CFL, tal discretización produjo una matriz de trabajo de $4001 \times 311 = 1,244,341$ elementos, donde solamente alrededor del 15% de ellos cayeron dentro de las fronteras. Como ahora se modeló para rayos con χ_0 positivas, el signo de la función de flujo se escogió positiva.

La figura 16 muestra el campo de los primeros tiempos de arribo en segundos, obtenido de la interpolación bilineal de los resultados en coordenadas polares a una malla cartesiana con luz de malla de 50m. La escala de tonos denota nuevamente incremento en los tiempos de arribo. Las primeras diez isócronas se separan por un segundo empezando desde la isócrona de un segundo, las restantes se separan por cinco segundos. Los primeros frentes de onda tienen una curvatura uniforme, mientras que los últimos cuatro (extremo derecho de la figura)

presentan una curvatura distinta arriba y abajo del eje del canal ($z_p = 1300m$).

Siguiendo la mecánica del experimento uno se sobrepusieron en una gráfica los rayos calculados a los frentes de onda (fig.17) para observar la correspondencia. No se espera que todos los rayos tengan correspondencia, sino solo los rayos con menor ángulo de disparo y especialmente el rayo 7. Uno puede notar una buena correspondencia visual de este rayo en su primer ciclo y los frentes de onda. En el segundo ciclo de este rayos se rompe esta correspondencia, y según los demás rayos, los frentes de onda deben ser más suaves y convexos antes de su punto de retorno del segundo ciclo $\chi = 0$ y cóncavos después de estos. La mejor correspondencia a manera visual de los frentes de onda en el segundo ciclo de los rayos es con los rayos 3 y 4.

Para medir la precisión del esquema y corroborar la correspondencia con los rayos se interpolaron los resultados obtenidos a la trayectoria de éstos y se compararon los tiempos de arribo, caracterizando la diferencia como en 6.53. En la figura 18 se muestra este error del esquema. Aquí el rayo 1 tiene el mayor χ_0 y éste decrece monótonicamente para cada rayo posterior. Todas las comparaciones siguen la misma tendencia, esto es el error se mantiene cerca de cero en los primeros 40 km de distancia horizontal y posteriormente experimenta un crecimiento explosivo. El error en la trayectoria del rayo 1 difiere un poco, ya que presenta un "pico" negativo aproximadamente cerca de su punto de retorno positivo (km 20), justo donde toca la superficie (frontera de la malla), el cual se debe al mismo mecanismo que produjo el "pico" del rayo 4 del experimento uno (ver fig.13). Sin embargo, aparte de esta tendencia no se logra ver una correspondencia entre el error y el ángulo de disparo.

En la figura 19 donde graficamos el error promedio del esquema en la trayectoria de cada rayo, vemos que estos oscilan entre los 25 y 200 ms, sin embargo no muestran una relación con el ángulo de disparo χ_0 . Pensando que el comportamiento del error no se debe tanto a la discretización sino a la malla polar (un pobre muestreo), calculamos nuevamente un promedio del error hasta antes del kilómetro 40 de distancia horizontal (fig.20) donde oscilan entre los .025 y 1.5 ms; y excepto el rayo uno, claramente vemos que si existe una relación error-ángulo de disparo y es como lo esperabamos una reducción en el error promedio conforme disminuye el ángulo de disparo.

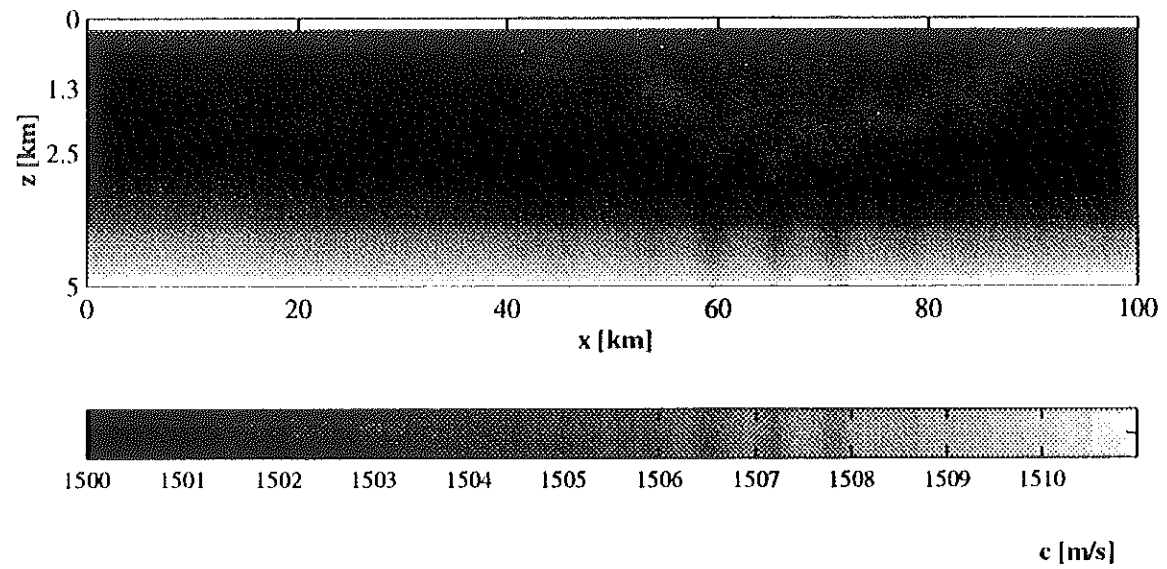
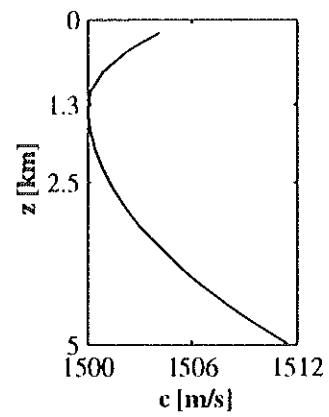


Figura 14: (a) Características del perfil parabólico utilizado en el experimento uno. (b) Estructura y dimensiones del campo de rapidez construido.

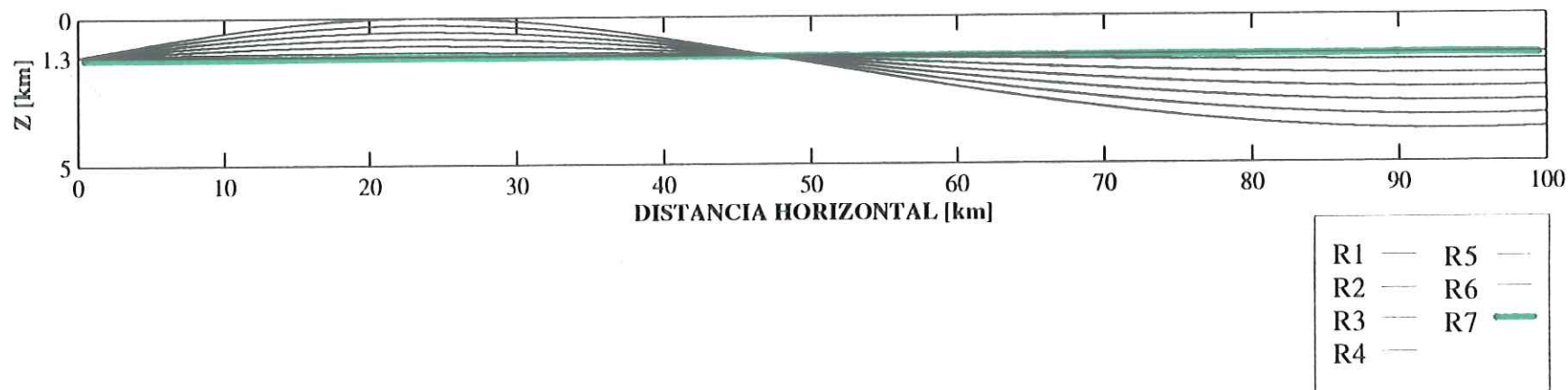


Figura 15: Rayos calculados para el campo de rapidez del experimento dos. Estos en forma son sinusoidales perfectas. El rayo número uno es el que tiene el mayor ángulo de disparo y experimenta su punto de retorno de su primer ciclo justo en la superficie. El ángulo de disparo decrece monotonícamente para cada rayo posterior.

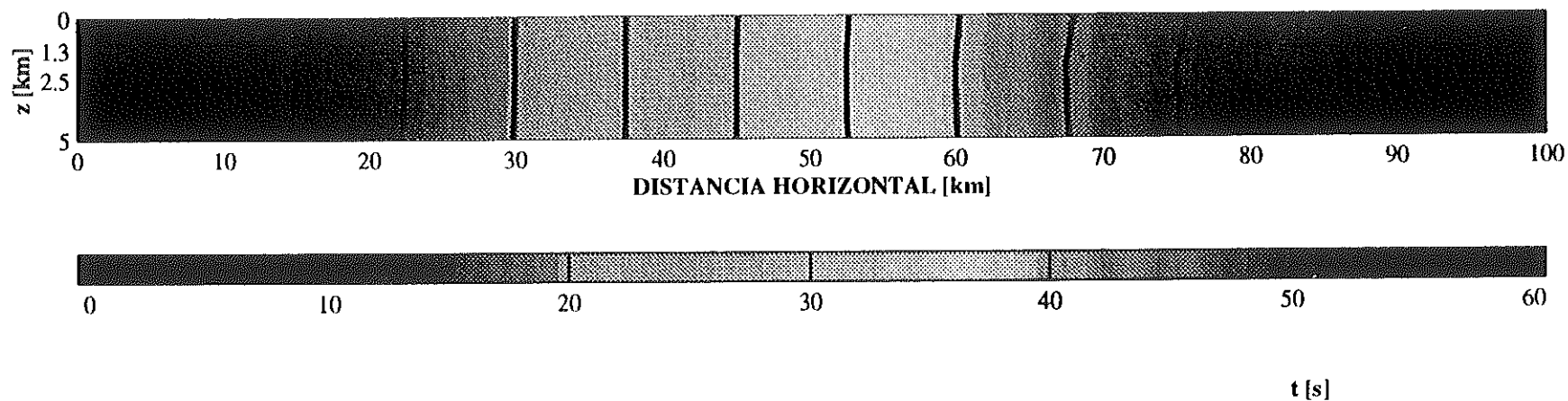


Figura 16: Imagen del campo de los primeros tiempos de arribo del experimento dos, que muestra la capacidad del esquema en resolver este tipo de perfil, siendo éste más representativo de las condiciones reales del océano. El origen del pulso se encuentra en (0,1300) y el tiempo de arribo aumenta conforme avanzamos en x positiva. Las isócronas empiezan desde el primer segundo, con intervalos de un segundo en las primeras diez y cinco segundos en las restantes.

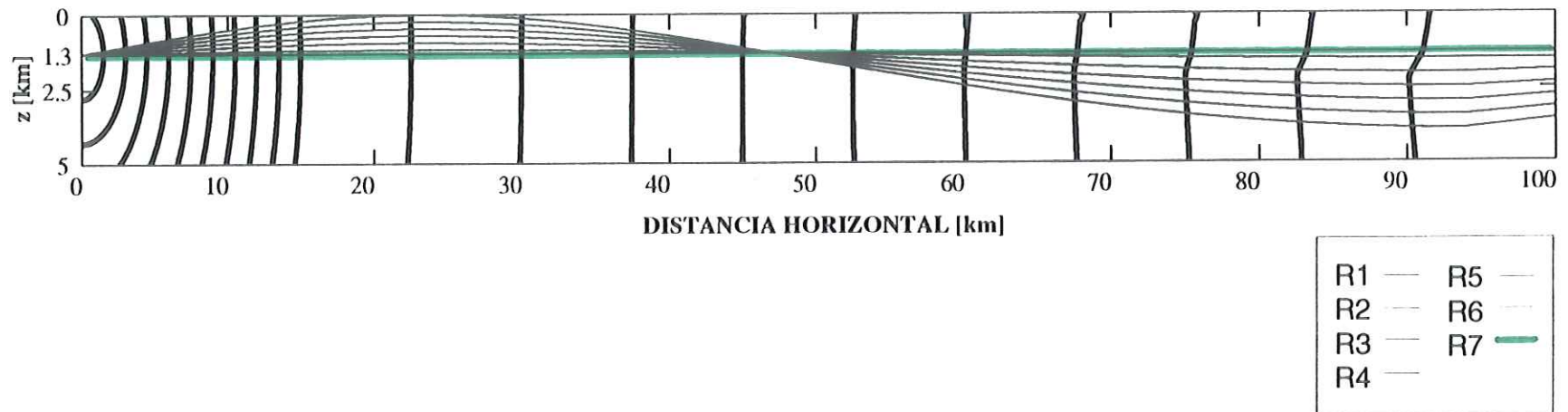


Figura 17: Sobreposición de los rayos calculados a los frentes de onda del experimento dos. El rayo axial (#7, color verde) es el que debe tener mayor correspondencia con los frentes de onda y se observa que esto si se cumple en el primer ciclo de los rayos.

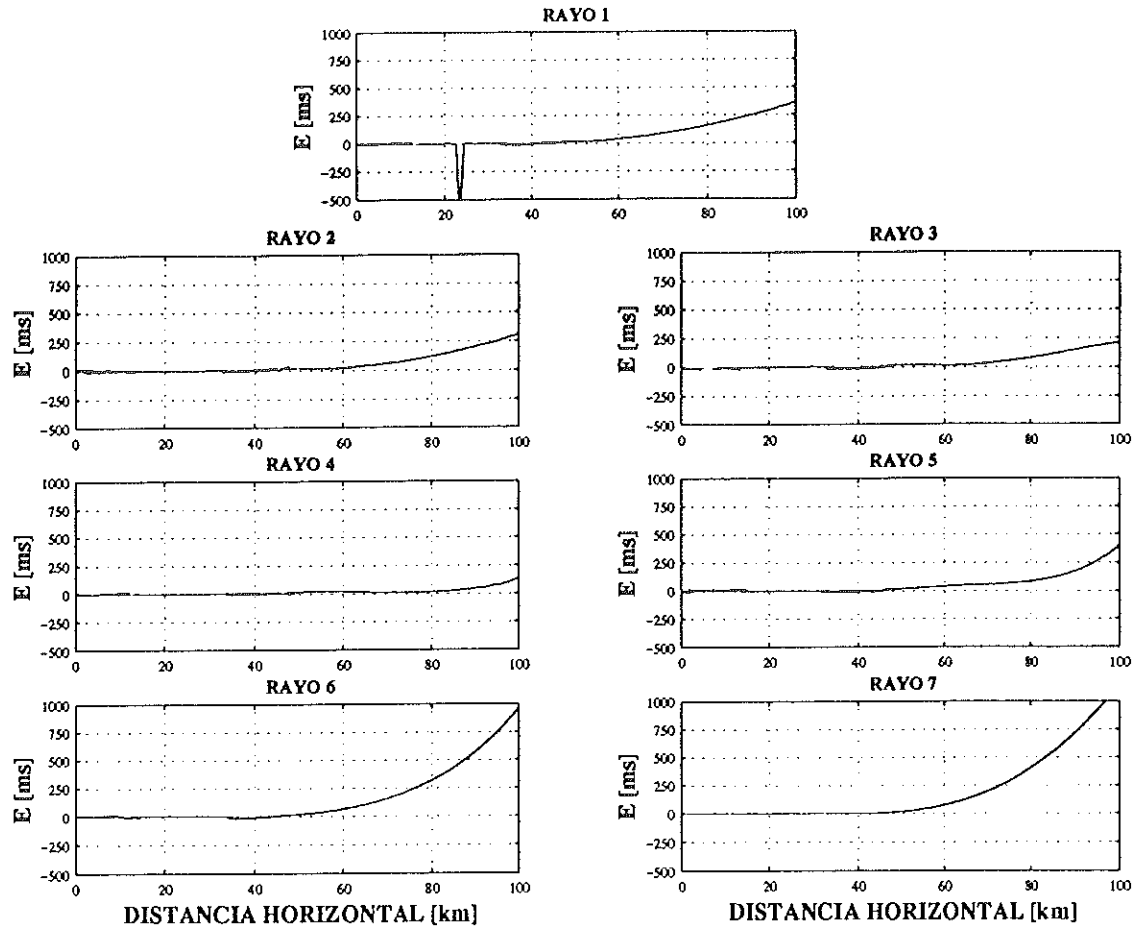


Figura18: Diferencia en tiempos de arribo en milisegundos entre la solución numérica y la solución por teoría de los rayo. El rayo uno tiene el mayor ángulo de disparo y decrece para cada rayo. La tendencia sobresaliente del error es de aumentar conforme nos alejamos del origen del pulso y realmente no se observa una correspondencia de el error con el ángulo de disparo.

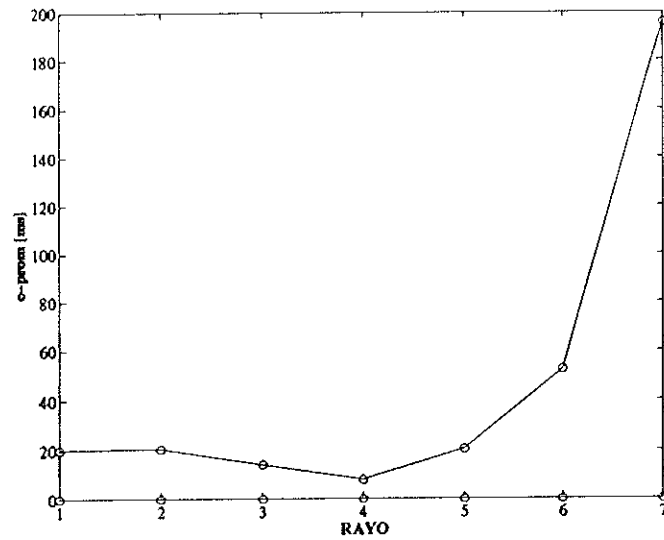


Figura19: Error promedio en milisegundos calculado para cada curva de error mostrado en la figura 18, reafirma que no existe relación entre el ángulo de disparo y el error.

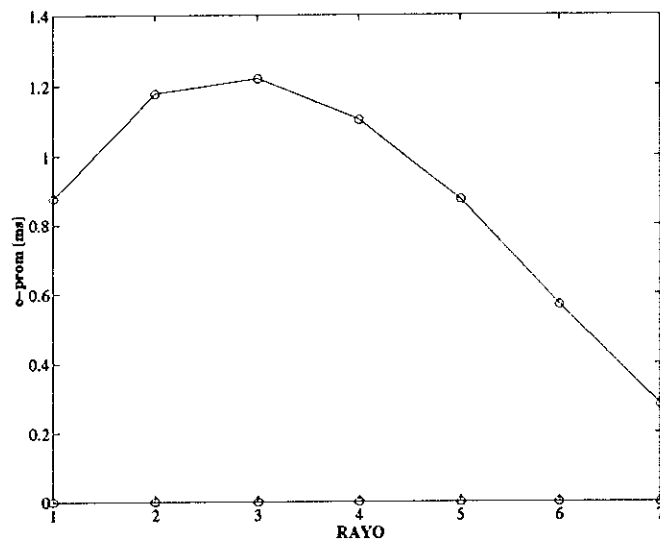


Figura20: Error promedio en milisegundos calculado para cada curva de la figura 18, hasta antes del kilómetro 40 de distancia horizontal. Ahora si encontramos una relación entre el ángulo disparo y error, siendo el rayo axial (rayo 7) el que tiene el menor error.

6.3 EL CAMPO DE RAPIDEZ DE SONIDO PERTURBADO

6.3.1 EXPERIMENTO TRES

Para crear el campo de rapidez perturbado se creo un campo de $c(x, z)$ dado por 5.44, donde a_+ sufre una variación en forma parabólica a lo largo del eje x (fig.21a) y esta produce una variación de c mostrado por los perfiles a lo largo del campo de la figura 21b y un cambio fraccional de c ó $\frac{\delta c}{c}$ máximo de $2.2e^{-3}$ (fig.22). Para resolverlo con el esquema numérico, se discretizó el campo de $c(x, z)$ de la siguiente manera:

$$dr = 25 \text{ m}$$

$$d\theta = \frac{\pi}{250} \text{ rad.}$$

La figura 23 muestra el campo de los primeros tiempos de arribo para el perfil parabólico perturbado². Las isócronas muestran ser cuasicirculares al principio y posteriormente muestran un aplanamiento, en los últimos dos es notorio un avance del frente de onda arriba del eje del canal respecto a la parte del frente de onda abajo del eje del canal. Lo importante de notar es que el esquema si resolvió el campo sin eventos de inestabilidad numérica.

Para medir el efecto de la perturbación en los tiempos de arribo, comparamos los tiempos de arribo obtenidos del campo perturbado, con tiempos de arribo de un campo de dimensiones y discretización idéntica sin perturbar, *e.g.*, $a_+ = 15e^3 \text{ m} = \text{cte}$. Los resultados se compararon de la siguiente manera:

$$DIFF = TA_{INICIAL} - TA_{PERTURBADO}$$

donde

²Perturbado en el sentido que $c = c(x, z)$, ya que a_+ varía parabólicamente a lo largo de x .

$TA_{INICIAL}$ = Tiempos de arribo obtenidos del campo no perturbado.

$TA_{PERTURBADO}$ =Tiempos de arribo obtenidos del campo perturbado.

En la figura 24 se muestra la diferencia en tiempo de arribo que produce la perturbación. La diferencia máxima en tiempo de arribo es de 155 ms aproximadamente y la perturbación en tiempos de arribo, denotada por tonos más ligeros que se vuelven oscuros nuevamente, se restringe a los últimos 15 km del eje x y arriba del eje del canal (1300 m de z). La tonalidad oscura del resto del campo muestra que no hay cambio en los tiempos de arribo ($DIFF = 0$).

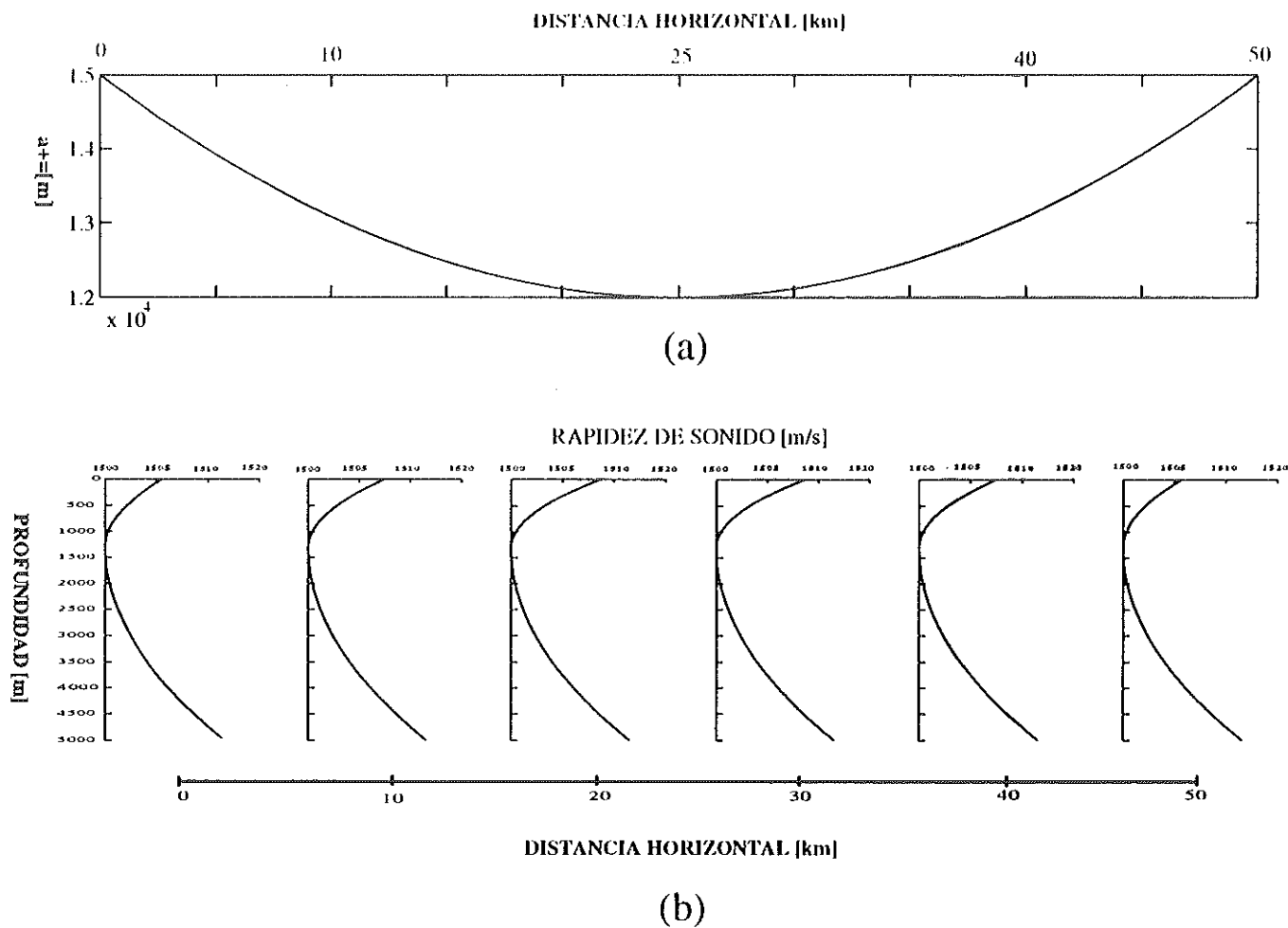


Figura 21: (a) Variación del coeficiente de la parábola superior a lo largo del eje x . (b) Perfiles de rapidez de sonido a lo largo del eje x en el campo perturbado.

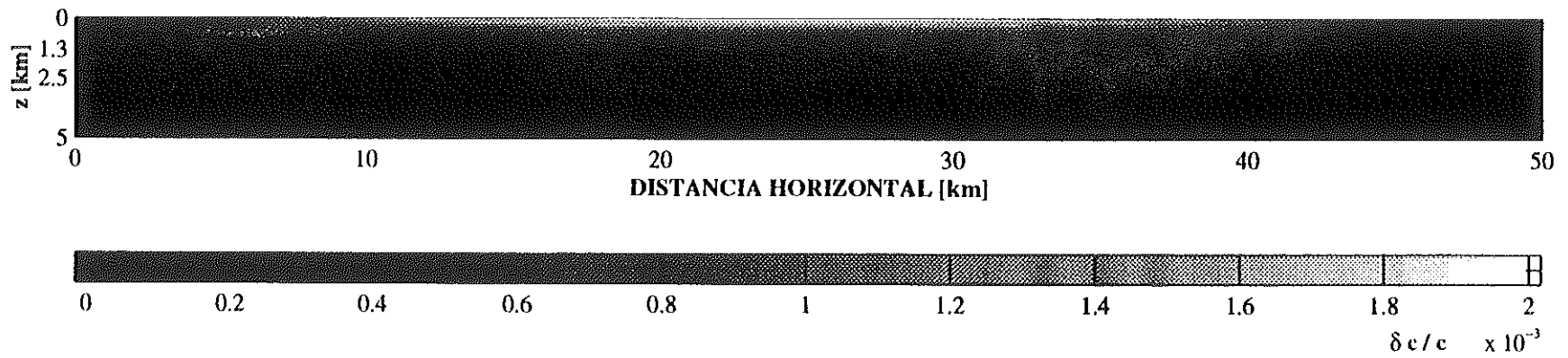


Figura 22: Campo de $\frac{\partial c}{c}$ que delimita la perturbación en $c(x,z)$ del experimento tres, podría ser representativo de la perturbación en $c(x,z)$ que causa un lente de agua caliente, relativa a un océano de agua más fría.

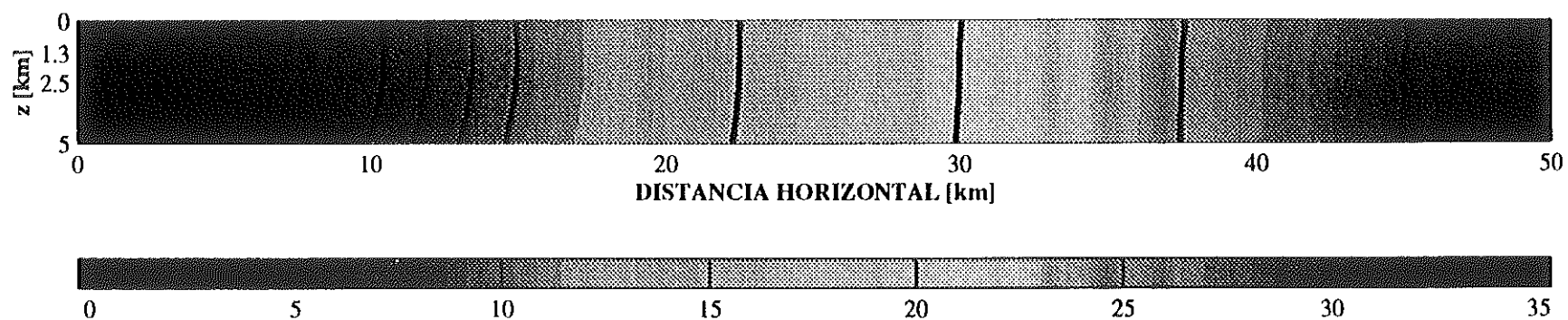


Figura 23: Campo de los primeros tiempos de arribo en segundos resultado del experimento tres. El origen del pulso está en (0,1300). Esta muestra la capacidad del esquema en resolver campo de rapidez acústica más complejos.

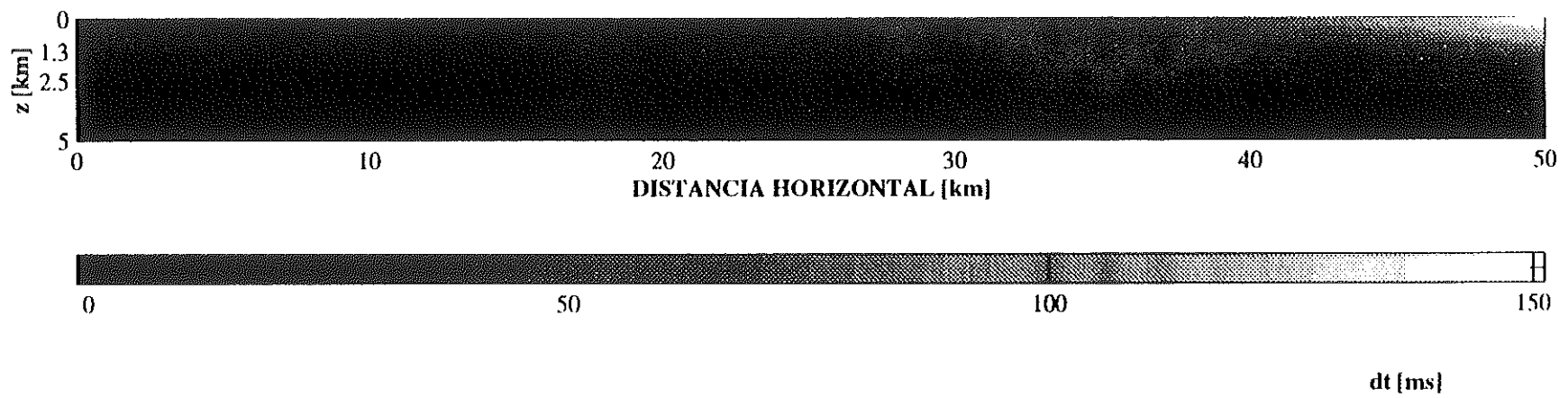


Figura 24: Diferencia en tiempos de arribo en milisegundos que produce la perturbación en c , notesé que es confinado a los primeros 1300 metros de profundidad y a los últimos 15 km de distancia horizontal, sugiriendo que las mediciones acústicas son espacialmente integradoras.

DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

La naturaleza de la solución numérica es por frentes de onda o frentes de fase constante. Estos llenan el campo de $\tau(x, z)$ que se desea resolver y por tal, este tipo de soluciones son llamados robustos. Si uno requiere el tiempo de arribo en cualquier punto del campo, basta con interpolar, o si se tiene suerte, que este punto coincida con un nodo en la malla, es suficiente con extraer su valor.

La capacidad del esquema numérico para resolver problemas oceanográficos se demuestra en los tres experimentos, sin embargo, uno puede argumentar en contra de esto siendo que los campos de rapidez utilizados son una idealización de las características acústicas reales del océano y el éxito del esquema numérico en resolverlos no garantiza su éxito en resolver campos reales. Sin embargo estas idealizaciones son representativas del comportamiento, la magnitud y la variabilidad de c en el océano, por lo que la capacidad del esquema para resolverlas es una buena indicación.

La aplicabilidad, utilidad y caracterización de la naturaleza aproximada de este esquema numérico se basó en la comparación con soluciones equivalentes de teoría de rayos. Estas soluciones no sólo son soluciones exactas de las ecuaciones de los rayos, sino también son soluciones exactas de la ecuación de la eikonal, por que estas comparaciones pueden ser algo fuertes en el sentido que soluciones numéricas de las ecuaciones de los rayos también tienen un error asociado.

El error del esquema en calcular los primeros tiempos de arribo se comportó distintamente en los dos experimentos, en el experimento 1, la tendencia es a sobreestimar los tiempos de arribo (fig.13), es decir, la solución por rayos rinde

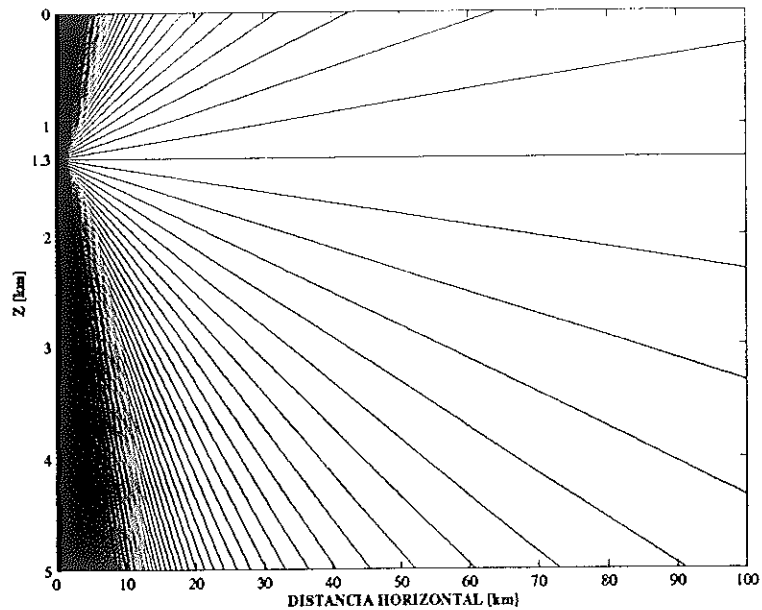


Figura 25: Líneas de igual ángulo de la malla que se utilizó en el experimento dos. Nótese la concentración de nodos en los primeros kilómetros de distancia horizontal y el grado de separación en la orilla opuesta, esto resulta en un pobre muestreo del campo de rapidez y los patrones de error observado en las figuras 13 y 18

tiempos más cortos y en el experimento dos (fig.18) ocurre lo contrario. Esto se puede deber a dos razones: las diferentes propiedades refractivas de los perfiles utilizados causa que el error del esquema se comporte de manera distinta o que los rayos calculados en el experimento dos no son asociados a los primeros tiempos de arribo, sin embargo el error promedio para cada rayo (fig.13 y fig.18) sigue el patrón que esperamos y la magnitud del error es razonable, por lo que favorecemos la primera explicación.

El patrón del error que es igual para ambos experimentos, es el de aumentar conforme nos alejamos del origen del pulso fig.13 y fig.18 y de una manera explosiva cerca de la orilla opuesta de la malla. La razón fundamental de este

comportamiento es la malla polar (fig.25). El espaciamiento entre nodos en esta malla sigue el mismo patrón que el error, una distancia muy corta cerca del origen y posteriormente un crecimiento explosivo cerca de la orilla. Esta es la razón por el comportamiento de los frentes de onda en el experimento dos (fig.16) y por la no correspondencia con los rayos calculados despues del kilómetro 40 de distancia horizontal (fig.17).

Las mediciones tomograficas rinden una precisión de $\pm 1ms$ [Munk *et al.*, 1982], el cual es alcanzable con una mayor discretización y en si con una reducción en el paso de radio, sin embargo esto crea una relación PRECISION-TAMAÑO DE MALLA- COSTO DE CPU que puede ser una limitante de precisión en la aplicación de estos esquemas en problemas acústicos de distancias horizontales grandes, tal como se ha limitado el uso de soluciones por diferencias finitas de la ecuación de onda (ec. 3.15) [Jensen, 1994].

Los “picos” observados en el rayo 4 del experimento uno (fig.13) y el rayo 1 del experimento dos (fig.18) que parecen restarle validez al esquema, se deben a una extrapolación de la rutina de interpolación, ya que estas posiciones, que son los puntos de retorno de los rayos, seguramente quedaron fuera de las fronteras, como el nodo u_{j+1}^n de la figura 7, además en los dos casos, el error es de la misma magnitud, el cual es indicativo que se deben al mismo proceso. Esto no presenta ser un problema, ya que uno puede escoger la posición de los receptores para que queden bastante adentro de las fronteras.

El esquema presentó ser estable en los experimentos realizados. Las causas de inestabilidad numérica son los contrastes en c o el índice de refracción. Estos causan que la función de flujo del esquema numérico se vuelva imaginario. La condición de estabilidad de C.F.L. nos da algo de garantía en cuanto a que

determina la discretización adecuada, sin embargo los problemas de estabilidad en la malla polar se vuelven mayores conforme nos alejamos del origen ya que la distancia entre los nodos crece y por tanto también el contraste de c . Entonces, la cuestión de estabilidad es de discretización, pero ¿hasta que punto es más económico una mayor discretización que una solución por rayos?.

Van Trier y Symes argumentan que su esquema es más estable que otros en calcular los tiempos de arribo en campos con fuertes contrastes de c , sin embargo hemos encontrado que la discretización en coordenadas polares es muy ineficiente, en ambos experimentos sólo alrededor del 15% de los nodos de la malla utilizada cayeron dentro de las fronteras. En cambio un esquema cartesiano aprovecharía el 100%, el problema es la estabilidad. Pero realmente la variabilidad de c en el océano es cuando menos una orden de magnitud menor que en la sismología y quizá el esquema cartesiano de Vidale no encuentre problemas, además las mejoras propuestas por Hole y Zelt [1995] componen los problemas de inestabilidad y según Aldrige [1991] ¹ este esquema presenta ser más rápido en tiempo de CPU que el de Van Trier y Symes [1991].

Existe la posibilidad de inferir a partir de los gradientes de los tiempos de arribo la trayectoria que toma la energía acústica o los rayos [Berryman, 1990], con el cual se podría completar la solución, ya que tendríamos además de los tiempos de arribo, la trayectoria que tomó la energía acústica.

La eficiencia de este tipo de soluciones respecto a soluciones por trazado de rayos no fue probada. el código implementado (vease apéndice) para resolver los campos de τ en los tres experimentos, no es el más eficiente tanto en memoria, como en tiempo de computo y podría ser mejorado. Para resolver la malla más

¹Citado en [Hole y Zelt, 1995]

grande (experimento dos) el esquema utilizó aproximadamente 200 minutos de tiempo de CPU en la H.P. 755. El siguiente paso en una investigación de esta naturaleza debe de probar la eficiencia de este esquema en campos de c reales y compararlo tanto en precisión, como en tiempo de CPU con una solución numérica de trazado de rayos.

El experimento tres fué la prueba más severa de la estabilidad del esquema numérico ya que es una complicación del campo de $c(z)$ a $c(x, z)$ y porque prueba la naturaleza física de las transmisiones acústicas. Estas son mediciones espacialmente integrales, por lo tal un frente de onda que pasa por una perturbación como la de la figura 22 sentirá de inmediato el cambio en $c(x, z)$, sin embargo no es reflejado en los tiempos de arribo hasta mucho despues, tal como se puede apreciar en la figura 24. Es decir el efecto de $\frac{\delta c}{c}$ en los tiempos de arribo es integral, aumenta conforme avanzan los frentes de onda en x . La perturbación máxima en $c(x, z)$ si asumimos una relación T-S tal como 1.2 corresponde a un calentamiento de $6^{\circ}C$, el cual es el valor de calentamiento que sugieren [Munk y Forbes, 1989] por el efecto de invernadero. Este calentamiento, si es que está sucediendo, es a escalas horizontales de cuencas oceánicas por lo que la señal de este calentamiento reflejado en los tiempos de arribo sería mucho mayor que 150 ms. A la escala que se está trabajando, la perturbación es representativa de un lente de agua caliente, el cual es detectada y demuestra el enorme potencial de este tipo de mediciones.

En resumen podemos concluir que:

- Las soluciones numéricas de la ecuación de la eikonal según los resultados de este trabajo tienen la capacidad de resolver problemas acústicos en la oceanografía.

- La estabilidad numérica y la precisión requerida en tiempos de arribo para utilidad tomográfica es alcanzable, sin embargo depende de la discretización, el cual produce una relación PRECISION-TAMAÑO DE MALLA- COSTO DE CPU que podría en ciertos casos limitar el uso de este tipo de soluciones, por las distancias horizontales involucradas en los problemas oceanográficos.
- El esquema numérico en coordenadas polares de Van Trier y Symes [1991], que si bien sirvió para contestar la pregunta fundamental de este trabajo, ha demostrado ser no adecuado para la oceanografía por la ineficiencia de muestreo de la malla, por el efecto de la malla en la estabilidad numérica y la precisión de los tiempos de arribo.
- Tomando en cuenta lo anterior las investigaciones subsecuentes deberían de empezar por implementar el esquema propuesto por Hole y Zelt [1995], ya que aunque sea el esquema más complicado en cartesianas, es el más estable, más rápido y ofrece la posibilidad de calcular tiempos de arribo debido a reflexiones.
- Una aplicación que vale la pena explorar es la de calcular refracción de oleaje, el cual es resuelto clásicamente por trazado de rayos.

Apéndice

A. Código del esquema implementado

Código del esquema de Van Trier y Symes (1991)

```
%Nombre:      Fase.m
%Función:      Resuelve la ecuación de la eikonal con un esquema en diferencias
                finitas sobre una malla en coordenadas polares.
%Autor:        Jos'e Manuel Puig
                Trabajo de tesis de licenciatura
%Lenguaje:     Matlab    ver 4.2
```

```
%***** VARIABLES
```

```
% dr= Incremento de radio en metros
% dt= Incremento de angulo en radianes
% h= Profundidad del oceano(siempre negativo) [m]
% P= Profundidad del emisor(siempre negativo) [m]
% A= Alcance de los calculos (r) en metros
% r= Vector de radio
% Theta = Vector de ángulo
% u= Matriz de dt/dtheta
% ur= Matriz de dt/dr
% l= Matrz de tiempos de arrivo
% f= Funcion de flujo
% df= Derivada de la funcion de flujo
```

```
%*****DIMENSIONES
```

```
%Distancias:      Metros
%Tiempo            Segundos
```

```
%***** INICIALIZACION DE VARIABLES
```

```
clear
P = -1300
h = -5000
a = -1
load campos          % LEE ARCHIVO DEL CAMPO DE RAPIDEZ
                    % DONDE ADEMAS SE ENCUENTRA INFORMACION
                    % SOBRE dr, dt , r y theta
```


- [25] Tolstoy, I. and Clay, C.S. (1987). Ocean Acoustics. **American Institute of Physics, for the Acoustical Society of America**, 381 pp.
- [26] Van Trier, J. and Symes, W.W. (1991). Upwind finite difference calculation of traveltimes. **Geophys.**, 56(6):812-821.
- [27] Vidale, J. (1988). Finite difference calculations of travel times. **Bull. Seis. Soc. of Amer.**, 78(6): 2062-2076.
- [28] Wood, A.(1966). Acoustics. **Dover Publications, Inc., N.Y.** 594 pp.