

Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ciencias



**Contribuciones de caja de piones y kaones al momento  
magnético anómalo del muón**

TESIS

para obtener el Título de

**Físico**

Presenta:

**Dayanne Francisco Martinez Vega**

Ensenada, Baja California, México

Junio de 2025



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
FACULTAD DE CIENCIAS,  
CAMPUS ENSENADA.



**Contribuciones de caja de piones y kaones al momento magnético  
anómalo del muón**

TESIS

PARA CUBRIR LOS REQUISITOS NECESARIOS PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**Físico**

PRESENTA

**Dayanne Francisco Martinez Vega**

**354647.**

A quien el Comité de Tesis autoriza el trabajo terminal y de acuerdo con el  
Art. 19 del R.G.E.P.E.P, emite los siguientes votos aprobatorios mediante rubrica:

*Adnan Bashir*

Dr. Adnan Bashir

DIRECTOR

*[Signature]*

Dr. Jonathan Lozano De la Parra

SINODAL

*[Signature]*

Dr. Ramon Carrillo Bastos

SINODAL

*[Signature]*

Dr. Roberto Romo Martínez

SINODAL

*[Signature]*

Dr. Alberto Hernández Maldonado

SINODAL

**Resumen** de la tesis de **Dayanne Francisco Martínez Vega** presentada como requisito parcial para la obtención de la **Licenciatura en Física**. Ensenada, Baja California, México. agosto de 2023.

**Contribución de caja de piones y kaones al momento magnético anómalo del muón**

Resumen aprobado: \_\_\_\_\_

Dr. Adnan Bashir

La publicación de los resultados del momento magnético anómalo medidos en Fermi National Accelerator Laboratory (FNAL) en 2021, puso en cuestión la exactitud del modelo estándar. Desde entonces la comunidad científica ha buscado reducir el error en los cálculos teóricos. La principal fuente de incertidumbre se encuentra en las interacciones hadrónicas, las cuales se dividen en las contribuciones por Hadronic Vacuum Polarization (HVP) y Hadronic Light by Light (HLbL) scattering. Tras la reducción de la incertidumbre causada por HVP en publicaciones recientes, el enfoque se está volviendo a la segunda contribución, la cual será analizada en este trabajo.

Palabras Clave: **Física de partículas, cromodinámica cuántica, momento magnético anómalo, mesones, física de altas energías**

*Para mi mamá y mi hermano*

*«El esfuerzo hacia las cumbres es suficiente para llenar el corazón de un hombre. Hay que imaginarse a Sísifo feliz.»*

*Albert Camus*

## Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Adnan Bashir por la oportunidad de trabajar con el, a pesar de la distancia, su gran paciencia y su preparación hicieron esto posible.

Agradezco al Dr. Angel Miramontes por su apoyo a lo largo de este trabajo, por resolver las dudas que me surgían y por siempre estar ahí, sin su ayuda esto no habría sido posible.

Agradezco a SECIHTI por el apoyo brindado por el programa de becas para ayudantes de investigación SNI III.

A todos mis profesores de la Facultad de Ciencias, gracias por todo el conocimiento que nos comparten, en especial a la Dra. Angelina González y al Dr. Roberto Romo.

Le agradezco enormemente a mi familia, siempre me apoyaron y me dieron las herramientas para lograr mis metas, gracias mamá por siempre darlo todo por nosotros, gracias a Raúl mi pequeño hermano, gracias abuela por siempre estar presente, gracias a mi tía Gema por ser como mi hermana mayor, a mis tías Victoria y Alicia por el apoyo y consejos que me han dado, a mi abuelo, que ya no esta entre nosotros, pero cuya influencia me llevo por este camino.

Iridian gracias por estar conmigo todo este tiempo, por traerme tanta felicidad, por hacerme salir de mi zona de confort, gracias por creer en mi y por el

bien que me haces.

A la familia de Iridian, por aceptarme y siempre apoyar a mi familia.

Agradezco a los amigos que hice dentro y fuera de la carrera, a Diego, Ernesto, Jorge, Gibrán, David R., David J., Luis Castañeda, Jesús, Nataly, Brayton, a Sebastián por alentarme a seguir en la carrera, a Luis Daniel y José Luis por ser mis compañeros de trabajo casi toda la universidad, gracias a todos ellos, por los buenos tiempos que vivimos en las *banquitas*.

Un agradecimiento especial para Ariana Ishihara, por ayudar a corregir mis múltiples errores.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>10</b>
2.1. Electrodinámica clásica . . . . .	10
2.1.1. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	10
2.1.2. Momento magnético clásico . . . . .	11
2.2. Mecánica cuántica no relativista . . . . .	15
2.2.1. La ecuación de Schrödinger . . . . .	15
2.2.2. Espín . . . . .	17
2.2.3. Partícula con espín en presencia de un campo magnético .	18
2.2.4. Ecuación de Pauli-Schrödinger . . . . .	23
2.3. Mecánica cuántica relativista . . . . .	25
2.3.1. Notación relativista . . . . .	25
2.3.2. Ecuación de Klein-Gordon . . . . .	28
2.3.3. La ecuación de Dirac . . . . .	29
2.3.4. Matrices gamma . . . . .	31
2.3.5. Densidad y corriente de probabilidad . . . . .	32
2.3.6. Partícula en reposo . . . . .	33
2.3.7. Partícula libre con momento . . . . .	36
2.3.8. Contenido de espín . . . . .	38

2.3.9.	Normalización . . . . .	39
2.3.10.	Antipartículas . . . . .	41
2.4.	Electrodinámica cuántica . . . . .	42
2.4.1.	Interpretación de Feynman-Stueckelberg . . . . .	42
2.4.2.	Formulación lagrangiana . . . . .	43
2.4.3.	El campo del fotón . . . . .	45
2.4.4.	El lagrangiano de la electrodinámica cuántica . . . . .	46
2.4.5.	Teoría de perturbaciones . . . . .	47
2.4.6.	Reglas de Feynman para QED . . . . .	49
2.5.	Cromodinámica cuántica . . . . .	51
2.5.1.	El modelo de quarks . . . . .	51
2.5.2.	El lagrangiano de la cromodinámica cuántica . . . . .	53
2.5.3.	Reglas de Feynman para QCD . . . . .	56
<b>3.</b>	<b>Contribuciones al momento magnético anómalo de un leptón</b>	<b>60</b>
3.1.	Momento magnético anómalo en QED . . . . .	60
3.2.	Contribuciones hadrónicas . . . . .	69
<b>4.</b>	<b>Metodología</b>	<b>71</b>
4.1.	Contribución de dispersión HLbL a $a_\mu$ . . . . .	71
4.1.1.	Descomposición BTT del tensor HLbL . . . . .	74
4.2.	Factores de forma electromagnéticos . . . . .	77
4.2.1.	Estructura interna de mesones . . . . .	78
4.2.2.	Ecuación de Bethe-Salpeter . . . . .	81
4.2.3.	Vértice de interacción quark-fotón . . . . .	82
4.3.	Factor de forma electromagnético de un mesón . . . . .	83
<b>5.</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>87</b>
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>95</b>

<b>Appendices</b>	<b>102</b>
<b>A. Estructuras de Lorentz <math>T_i</math></b>	<b>103</b>
<b>B. Representación de parámetros de Feynman para la caja de mesones</b>	<b>107</b>
<b>C. Cálculo del término de auto-interacción del quark</b>	<b>109</b>
<b>D. Cálculo del vértice de interacción quark-fotón</b>	<b>113</b>
<b>E. Cálculo de los términos <math>T_{EE}</math>, <math>T_{EF}</math>, <math>T_{FF}</math></b>	<b>121</b>

# Índice de figuras

1.1. Partículas elementales del modelo estándar, dividido entre leptones, quarks, bosones de la norma (gauge) y el bosón de Higgs (contributors, 2019). . . . .	9
2.1. Diagramas de Feynman asociados al proceso de aniquilación $e^+e^-$ , de acuerdo a la interpretación de Feynman-Stueckelberg (Thomson, 2013). . . . .	42
2.2. Rastros del mesón $\pi$ proveniente de rayos cósmicos, propagándose hasta decaer en un muón (Lattes et al., 1947). . . . .	52
2.3. Una fotografía de la reacción $\pi^-p \rightarrow K^0\Lambda$ tomada en una cámara de burbujas en el Laboratorio Nacional de Berkeley Lawrence en 1954 (Peskin, 2019). . . . .	53
3.1. Diagrama de Feynman para el vértice electromagnético revestido por los propagadores completos (Jegerlehner, 2008). . . . .	62
3.2. Diagrama de Feynman asociado a la función del vértice electromagnético y su descomposición para los diferentes ordenes de teoría de perturbaciones (Jegerlehner, 2008). . . . .	62

3.3.	Diagrama de Feynman para un proceso de dispersión HLbL, donde un fotón real entra al globo que encapsula las interacciones hadrónicas, del que salen tres fotones virtuales que interactúan con un muon. . . . .	70
4.1.	Diagrama de Feynman que representa la propagación de un quark que auto-interactúa con su campo gluónico (Roberts, 2012). . . . .	79
5.1.	Factor de forma eléctrico para el pion, que muestra las bandas de error generadas por una variación del 5 % en el radio de carga del pion. . . . .	87
5.2.	Factor de forma eléctrico para el kaón, con barras de error provenientes de una variación del 5 % en su radio de carga. . . . .	88
5.3.	Factor de forma electromagnético del pion, las bandas azules representan el modelo de interacción de contacto, con una variación de 5 % en el radio de carga, los puntos representan los datos experimentales. . . . .	90
5.4.	Factor de forma electromagnético del kaón, las bandas azules representan el modelo de interacción de contacto, con una variación de 5 % en el radio de carga, los puntos representan los datos experimentales. . . . .	91
5.5.	Gráfica con los diferentes valores para $a_{\mu}^{\pi-box}$ , tomando en cuenta la variación del radio de carga para el factor de forma de interacción de contacto, también se incluyen las contribuciones para Vector Meson Dominance (VMD) y el calculado por Miramontes et al., 2022. . . . .	92

5.6.	Gráfica con los diferentes valores para $a_{\mu}^{K-box}$ , tomando en cuenta la variación del radio de carga para el factor de forma de interacción de contacto, también se incluyen las contribuciones para Vector Meson Dominance (VMD) y el calculado por Miramontes et al., 2022. . . . .	92
5.7.	Factor de forma para el pión calculado por Miramontes et al., 2022 comparado con los datos experimentales. . . . .	93
5.8.	Factor de forma para el kaón calculado por Miramontes et al., 2022, comparado con los datos experimentales. . . . .	93

## Índice de cuadros

I.	Coeficientes del aproximante de Padé para las bandas centrales de los factores de forma. . . . .	89
II.	Contribuciones a $a_\mu$ de los factores de forma para CI. . . . .	89

# 1. Introducción

Uno de los componentes mas importantes de la condición humana es la curiosidad, el querer saber ¿cómo funcionan las cosas?, ¿por qué percibimos la naturaleza de una manera y no de otra? y ¿cómo podemos aprovecharla?, esta necesidad de saber y conocer, nos llevó a desarrollar teorías para describir los fenómenos que observábamos a nuestro alrededor, desde objetos cayendo, el oleaje del mar, hasta las mismas estrellas; estas teorías mejoraron nuestro entendimiento del universo y nos llevaron a nuevos descubrimientos.

Hoy en día la física puede modelar los eventos que podemos ver en la vida cotidiana, desde el vuelo de un ave, el funcionamiento de un aparato electrónico, la comunicación por fibra de vidrio y muchas otras cosas. Pero cuando queremos estudiar fenómenos que están en escalas fuera de lo cotidiano, podemos entender los eventos mediante las cuatro fuerzas fundamentales: la gravitación, la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear fuerte y fuerza nuclear débil.

La primera se centra en como la masa y la energía influyen en el espacio-tiempo y suele utilizarse cuando se estudian objetos celestes, los cuales poseen grandes cantidades de masa. La teoría electromagnética modela la interacción entre partículas u objetos con carga eléctrica. La fuerza nuclear fuerte se encarga de modelar las interacciones entre partículas llamadas quarks, las cuales interactúan mediante la fuerza fuerte para componer partículas llamadas hadrones; ejemplos

de estos son el protón y el neutrón. Esta teoría explica porque los núcleos atómicos se mantienen unidos. Por último, la fuerza nuclear débil es responsable de la desintegración radiactiva de partículas subatómicas.

Tres de estas fuerzas están unificadas bajo el modelo estándar de partículas, el cual modela la interacción entre diferentes campos cuánticos que representan dichas partículas, las partículas elementales que componen esta teoría se agrupan en la figura (1.1). El modelo estándar ha sido muy exitoso y ha visto validación experimental en diferentes ocasiones, desde el descubrimiento del quark top por la colaboración CFD (Abe et al., 1995) y simultáneamente por  $D\emptyset$  (Abachi et al., 1995), la confirmación del neutrino tau por la colaboración DONUT y el descubrimiento del bosón de Higgs en CERN (Chatrchyan et al., 2012).

A pesar de estos éxitos, el modelo estándar no es una teoría perfecta, pues falla al implementar la relatividad general y al describir otros sucesos como la asimetría bariónica, es por esto que la búsqueda de una teoría fundamental de interacción entre las diferentes fuerzas sigue vigente.

Una reciente prueba que nos señala un fallo en el modelo estándar son las mediciones al momento magnético anómalo del muón, realizadas en el laboratorio nacional de Brookhaven en Estados Unidos (Bennett et al., 2004) cuyos datos experimentales difieren del valor teórico. En 2021 el laboratorio Fermilab logró realizar mediciones del momento magnético anómalo con una gran precisión, lo que indica que la diferencia entre el valor teórico y el experimental no se debía a las mediciones del experimento (Abi et al., 2021), con este resultado se obtiene el promedio experimental dado por:

$$a_{\mu}^{EXP} = 116592061(41) \times 10^{-11} \quad (1.1)$$

En preparación para los resultados anteriores, la comunidad científica trabajó en conjunto para llegar a un consenso acerca del valor teórico que precedía el modelo estándar (Aoyama et al., 2020) , cuyo resultado fue

$$a_{\mu}^{SM} = 116591810(43) \times 10^{-11} \quad (1.2)$$

Este valor se encuentra a  $4,2\sigma$  del experimental, lo cual está muy cerca de indicar la presencia de una física desconocida influenciando al momento magnético anómalo del muón. Debido a esto, se busca mejorar las técnicas que se utilizan en el cálculo del valor teórico de  $g-2$ , unas de las áreas a las que nos dirige el consenso de 2020, es a las contribuciones hadrónicas, que no aportan mucho a  $g-2$ , pero que sí aportan una cantidad considerable de error. Estas contribuciones se dividen en la polarización hadrónica del vacío (HVP) y la dispersión hadrónica de luz por luz (HLbL). En este trabajo nos enfocaremos en la contribución proveniente de la dispersión HLbL. Es importante seguir buscando maneras de reducir el error en el cálculo teórico, pues recientemente se publicaron nuevos resultados de Fermilab, los cuales dieron un nuevo promedio al valor experimental (Aguillard et al., 2023), dado por:

$$a_{\mu}^{EXP} = 116592059(22) \times 10^{-11} \quad (1.3)$$

El cual representa una mejora al doble de precisión respecto al experimento del 2021. El reporte más reciente acerca del experimento  $g-2$ , hace una comparación entre este resultado y los que se han obtenido en años recientes de la contribución de la polarización hadrónica del vacío a  $g-2$ , basados en técnicas de lattice (Aguillard et al., 2024), lo cual hace que el valor teórico se acerque más al experimental, indicando que no hay física nueva en juego. Hay que recalcar que

# Standard Model of Elementary Particles

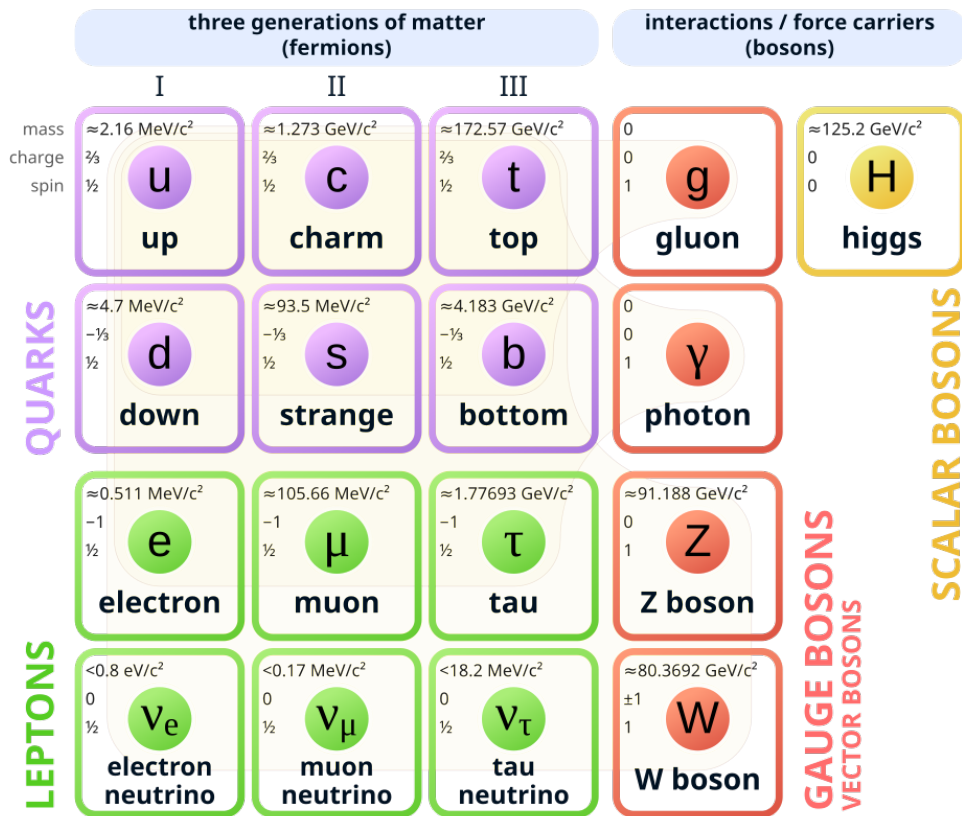


Figura 1.1. Partículas elementales del modelo estándar, dividido entre leptones, quarks, bosones de la norma (gauge) y el bosón de Higgs (contributors, 2019).

estos valores obtenidos por lattice, discrepan de los métodos dispersivos basados en datos experimentales, lo cual en este caso, no denota un gran fallo en la teoría, pues existen discrepancias entre los resultados de las diferentes colaboraciones experimentales. Se espera que los diferentes grupos que trabajan con lattice lleguen a resultados similares.

## 2. Antecedentes

### 2.1. Electrodinámica clásica

#### 2.1.1. Ecuaciones de Maxwell

El electromagnetismo es una de las teorías más exitosas del siglo XIX, esta se formuló a partir de leyes empíricas obtenidas por los mejores científicos de la época como Faraday, Gauss, Ampere y muchos más. Los fenómenos que se observaban en los experimentos de estos científicos, fueron compilados por Maxwell de manera teórica (Maxwell, 1865), el posterior desarrollo de la teoría electromagnética, nos llevó a las siguientes ecuaciones, las cuales son conocidas como las leyes de Maxwell (unidades gaussianas):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.4}$$

Donde  $\vec{B}$  representa el campo magnético,  $\vec{E}$  el campo eléctrico,  $\rho$  es la

densidad de carga,  $\vec{J}$  la densidad de corriente eléctrica y  $c$  la velocidad de la luz, otra ecuación importante del electromagnetismo es la que concierne a la conservación de la carga eléctrica y viene dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J} \quad (2.5)$$

Es posible definir los campos eléctrico y magnético en términos de potenciales que cumplen diferentes identidades. A partir de  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$  y utilizando la ecuación (2.1) obtendremos lo siguiente:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.6)$$

Por otro lado, al usar  $\nabla \times \nabla \phi = 0$  y la ecuación (2.3) llegamos a:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.7)$$

Donde  $\phi$  es el potencial escalar eléctrico y  $\vec{A}$  se conoce como el potencial vectorial magnético, cabe destacar que estas funciones no se encuentran definidas totalmente por las ecuaciones (2.6) y (2.7), es necesario definir la medida (o *gauge*) en el que se trabajará, los potenciales presentan un grado de libertad dado por  $\nabla \cdot \vec{A}$ , el cual es ajustado de acuerdo al problema (D. Griffiths, 1999).

### 2.1.2. Momento magnético clásico

Una de las curiosidades de la teoría electromagnética es que las distribuciones de carga limitadas a un volumen finito, tienden a ser percibidas como cargas

puntuales cuando se está a una distancia considerable de ellas, esto mismo es observable con las distribuciones de corriente eléctrica, claro que sin monopolos magnéticos como dicta la ecuación (2.1), sabiendo esto, utilizamos la siguiente formula para el potencial vectorial magnético (D. Griffiths, 1999):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_{V_0} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.8)$$

Donde  $\vec{r}$  es el vector hacia nuestra zona de prueba,  $\vec{r}'$  es la distancia del origen a la distribución de corriente,  $\vec{J}$  es la densidad de corriente eléctrica y  $V_0$  es el volumen que encierra a la distribución.

Si tomamos un  $\vec{r}$  que este muy lejos, de manera que se cumpla  $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ , podremos expandir el denominador  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  en una serie de Taylor:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3} + \dots \quad (2.9)$$

Como la magnitud de  $\vec{r}$  sera muy grande, podemos quedarnos solo con los primeros términos de la expansión, sustituyendo esto en (2.8) nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int_{V_0} \left( \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3} \right) \vec{J}(\vec{r}') dV' \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c|\vec{r}|} \int_{V_0} \vec{J}(\vec{r}') dV' + \frac{1}{c} \int_{V_0} \vec{J}(\vec{r}') \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^3} dV' \end{aligned} \quad (2.10)$$

Lo anterior se conoce como expansión en términos de momentos multipolares del potencial vectorial magnético, si trabajamos en el régimen de la magnetoestática, es decir, trabajamos con corrientes estables e independientes del tiempo,

nuestra densidad de corriente deberá ser constante, en otro caso, esta crecería linealmente con el tiempo, por lo tanto nuestra ecuación de continuidad sería  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ .

Al primer término de la expansión se le conoce como momento monopolar magnético, de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell, los monopolos magnéticos no existen, por lo que debemos desarrollar un poco mas la expresión, consideremos la siguiente identidad vectorial  $\nabla' \cdot (x' \vec{J}(\vec{r}')) = x' \nabla' \cdot \vec{J} + \nabla' x' \cdot \vec{J}$  y trabajemos con el componente i-ésimo del componente monopolar,

$$A_i^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{c|r|} \int_{V_0} J_i(\vec{r}') dV' \quad (2.11)$$

Sabemos que  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$  por lo que tendremos la siguiente formula  $\nabla' \cdot (x'_i \vec{J}(\vec{r}')) = \hat{x}'_i \cdot \vec{J} = J_i$  sustituimos en la ecuación (2.11),

$$A_i^{(0)}(\vec{r}) = \frac{1}{c|r|} \int_{V_0} \nabla' \cdot (x'_i \vec{J}(\vec{r}')) dV' \quad (2.12)$$

Aplicando el teorema de la divergencia sobre una superficie fuera de la región  $V_0$  donde se anule la integral de manera que  $A_i^{(0)} = 0$ .

Para el término dipolar utilizamos la siguiente expresión, con el objetivo de conseguir una expresión diferente  $(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J} = (\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{r}' - \vec{r} \times (\vec{r}' \times \vec{J})$ , se puede demostrar que  $(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{J} = -(\vec{r} \cdot \vec{J}) \vec{r}'$ , por lo que esta contribución queda definida como:

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{r}) = \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.13)$$

Donde

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_{V_0} (\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')) dV' \quad (2.14)$$

Se conoce como el vector de momento dipolar magnético o simplemente momento magnético, esta es una cantidad con la cual podemos obtener la energía que tendrá la distribución de corriente cuando esta se encuentra en presencia de un campo magnético externo, esta relación está dada por:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (2.15)$$

Donde  $H$  nos dará la energía de la distribución,  $\vec{B}$  es el campo magnético externo (Greiner, 1998). Es posible obtener una relación entre el momento magnético y el momento angular, para esto tomamos una densidad de corriente constante, de esta manera  $\vec{J} = -n|e|\vec{v}$  donde  $\vec{v}$  es la velocidad de la corriente,  $n$  la densidad de partículas, al usar esto obtendremos:

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \int_{V_0} (\vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')) dV' = \frac{1}{2c} \int_{V_0} (\vec{r}' \times (-n|e|\vec{v})) dV' \\ \vec{\mu} &= \frac{-|e|}{2mc} \int_{V_0} (\vec{r}' \times (nm\vec{v})) dV' = \frac{-|e|}{2mc} \int_{V_0} \rho_{masa}(\vec{r}' \times \vec{v}) dV' \end{aligned}$$

Donde  $m$  es la masa de la partícula,  $\rho_{masa}$  es la densidad de masa, de mecánica clásica, sabemos que el momento angular para un cuerpo sólido viene dado por:

$$\vec{L} = \int_{V_0} \rho(\vec{r}' \times \vec{v}) dV' \quad (2.16)$$

Sustituimos en la formula del momento magnético y obtendremos la siguiente relación entre el momento angular y el momento magnético:

$$\vec{\mu} = \frac{-|e|\hbar}{2mc} \vec{L}. \quad (2.17)$$

## 2.2. Mecánica cuántica no relativista

### 2.2.1. La ecuación de Schrödinger

A principios del siglo XX, el campo de la física se vio agitado por el descubrimiento de efectos que las teorías de la época no podían explicar. Tras los estudios de la radiación de cuerpo negro, en los cuales Max Planck solucionó la catástrofe del ultravioleta suponiendo que la energía que irradia el cuerpo, solo puede ser emitida en cantidades definidas, a las que se les llamó *quanta* (Planck, 1914). Diversos científicos de la época siguieron desarrollando las ideas de Planck, lo que llevó al desarrollo de la física cuántica, con esto Erwin Schrödinger postula su ecuación que describe la evolución de los sistemas cuánticos dada por la siguiente expresión:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad (2.18)$$

La cual es conocida como la *Ecuación de Schrödinger*, donde  $|\psi\rangle$  es el vector de estado del sistema,  $\hbar$  es la constante de Planck reducida,  $\hat{H}$  es el operador hamiltoniano correspondiente al sistema (Schrödinger, 1926).

Cuando el hamiltoniano no depende del tiempo, podemos separar la parte

temporal de la espacial de la ecuación, lo que nos lleva a la forma estacionaria de la ecuación de Schrödinger, la cual se reduce a un problema de eigenvalores,

$$\hat{H} |\varphi\rangle = E |\varphi\rangle \quad (2.19)$$

La solución completa viene dada por  $|\psi\rangle = e^{-iEt/\hbar} |\varphi\rangle$ , el operador hamiltoniano se construye de manera análoga a la función hamiltoniana de la mecánica clásica, pero cambiando las variables dinámicas por operadores,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}(\vec{r})^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad (2.20)$$

De los postulados de la mecánica cuántica, se obtiene que el operador de momento está dado por  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ , al proyectar el estado de posición  $\langle\vec{r}|\$  sobre la ecuación de eigenvalores, obtendremos su representación en el espacio de configuración:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) + V(\vec{r})\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \quad (2.21)$$

Si siguiendo la interpretación de Copenhague, el vector de estado de un sistema se relaciona con la probabilidad de la siguiente forma:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int d^3r \psi(\vec{r})^* \psi(\vec{r}) = 1 \quad (2.22)$$

Donde el término  $\rho = \psi(\vec{r})^* \psi(\vec{r})$  es la densidad de probabilidad, recordando la ecuación de continuidad (2.5), podemos encontrar una densidad de corriente de probabilidad, que estará definida como:

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad (2.23)$$

### 2.2.2. Espín

Uno de los experimentos que causó mas discusión a principios del siglo XX, fue llevado a cabo por Otto Stern y Walther Gerlach, en el cual se envían átomos de plata, los cuales son eléctricamente neutros, con sus números cuánticos  $l = 0$ , a través de un campo magnético inhomogeneo hasta una pantalla detectora (Gerlach y Stern, 1922). Se esperaba que el haz de partículas no se viera afectado, lo cual no se cumplió, pues el haz se vio dividido en dos cuando el campo magnético actúa principalmente sobre el eje  $z$ . Se puede demostrar que la fuerza que actúa sobre los átomos de plata es proporcional al número cuántico magnético  $m$ , por lo que se espera un número de haces igual al número de valores que se tiene para  $m$ . Como en el experimento se tienen dos haces, según las reglas de selección de los números cuánticos, el valor del momento angular de la partícula sería  $s = 1/2$  (De La Peña, 2014).

En 1925 Pauli publica su principio de exclusión (Wolfgang, 1925), a lo que Goudsmit descubre que es posible explicar de una manera sencilla dicho principio al introducir otro número cuántico, al que designó  $m_s$ . Con la ayuda de su colega Uhlenbeck, lograron deducir que este nuevo número cuántico añadiría un grado de libertad al electrón, este nuevo grado se conoce como *espín*, el cual es un momento angular intrínseco del electrón (Uhlenbeck y Goudsmit, 1925), la descripción completa de espín fue publicada poco después por Pauli (Wolfgang, 1927).

Resulta que el espín  $1/2$  requiere de una formulación matricial, la cual

estará cimentada en los siguientes operadores:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Estos operadores se conocen como matrices de Pauli y se compilan en el siguiente operador vectorial  $\hat{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ , en este formalismo se elige escribir los eigenestados en la base de  $\sigma_z$ . Aprovechando esto, podemos definir el operador de momento angular de espín,

$$\hat{S} = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma} \quad (2.25)$$

Los operadores sigma siguen las siguientes reglas de conmutación:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (2.26)$$

Donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita. Al usar la delta de Kronecker  $\delta_{ij}$  también podemos ver que:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (2.27)$$

### 2.2.3. Partícula con espín en presencia de un campo magnético

Nos interesa resolver el problema de una partícula cargada con espín en presencia de un campo magnético, la parte espinorial del hamiltoniano del problema

viene dado por:

$$\hat{H} = -\mu \cdot \vec{B} = -g\mu_B B \hat{n} \cdot \hat{\sigma} = -\frac{\hbar B \gamma}{2} \hat{n} \cdot \hat{\sigma} \quad (2.28)$$

Donde  $g$  se conoce como el factor de Landé, Paul Dirac pudo predecir que tendría un valor de dos. Mas adelante Schwinger hizo una corrección implementando la electrodinámica cuántica (Schwinger, 1948),  $B$  es la magnitud del campo magnético,  $\gamma$  encierra las constantes de interacción,  $\hat{n} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$  es el vector unitario en la dirección del campo magnético, donde  $\phi \in [0, 2\pi]$  y  $\theta \in [0, \pi]$ .

Para el estudio de este problema es de gran ventaja calcular la siguiente expresión  $e^{i\theta \hat{n} \cdot \hat{\sigma}}$ , al aprovechar las siguientes propiedades del producto  $\hat{n} \cdot \hat{\sigma}$ ,

$$(\hat{n} \cdot \hat{\sigma})^{2n} = I \quad (2.29)$$

$$(\hat{n} \cdot \hat{\sigma})^{2n+1} = (\hat{n} \cdot \hat{\sigma}) \quad (2.30)$$

Donde  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ , podemos expandir la exponencial en una serie de Taylor, que nos llevará al siguiente resultado:

$$e^{i\theta \hat{n} \cdot \hat{\sigma}} = I \cos \theta + i(\hat{n} \cdot \hat{\sigma}) \sin \theta \quad (2.31)$$

También podemos usar la formula de Baker-Campbell-Hausdorff dada por,

$$e^{-i\theta A} B e^{i\theta A} = B - i\theta[A, B] - \frac{\theta^2}{2!}[A, [A, B]] - \frac{i\theta^3}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (2.32)$$

Para calcular los siguientes productos de operadores:

$$e^{-i\theta\sigma_z} \sigma_x e^{i\theta\sigma_z} = \sigma_x \cos 2\theta + \sigma_y \sin 2\theta \quad (2.33)$$

$$e^{-i\theta\sigma_y} \sigma_z e^{i\theta\sigma_y} = \sigma_z \cos 2\theta + \sigma_x \sin 2\theta \quad (2.34)$$

$$e^{-i\theta\sigma_z} \sigma_y e^{i\theta\sigma_z} = \sigma_y \cos 2\theta - \sigma_x \sin 2\theta \quad (2.35)$$

Al usar estas identidades, podemos reescribir el hamiltoniano de la siguiente manera:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar B\gamma}{2} e^{-i\phi\sigma_z/2} e^{-i\theta\sigma_y/2} \sigma_z e^{i\theta\sigma_y/2} e^{i\phi\sigma_z/2} \quad (2.36)$$

Utilizando esto, podemos obtener los eigenvectores de dicho hamiltoniano,

$$|\psi_{\pm}\rangle = e^{-i\phi\sigma_z/2} e^{-i\theta\sigma_y/2} |\pm\rangle \quad (2.37)$$

Donde  $|\pm\rangle$  son los eigenvectores del operador  $\sigma_z$ , los eigenvalores asociados a los eigenestados del hamiltoniano están dados por  $E_{\pm} = \mp \frac{\hbar B\gamma}{2}$ . También podemos escribir los estados de la siguiente manera:

$$|\psi_{+}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad |\psi_{-}\rangle = \begin{pmatrix} \sin \theta/2 \\ -e^{i\phi} \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Si trabajamos con el estado  $|\psi_{+}\rangle$ , podemos demostrar que el valor esperado de Espín del estado estacionario es de la forma:

$$\langle \psi_+ | \vec{S} | \psi_+ \rangle = \frac{\hbar}{2} (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \quad (2.39)$$

Nos interesa ver el comportamiento de dicho valor esperado cuando el estado puede evolucionar con el tiempo, para hacer más sencillos los cálculos trabajaremos con un campo magnético en la dirección  $z$ , nuestro estado inicial en la base de  $\sigma_z = |+\rangle, |-\rangle$  será:

$$|\psi_+(0)\rangle = \cos(\theta/2) |+\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |-\rangle \quad (2.40)$$

Aplicamos el operador de evolución temporal, aprovechando que los estados son eigenvectores del hamiltoniano  $\hat{H} = -\frac{\hbar B\gamma}{2} \sigma_z$ , tendremos:

$$|\psi_+(t)\rangle = \cos(\theta/2) e^{\frac{iB\gamma t}{2}} |+\rangle + \sin(\theta/2) e^{i(\phi - \frac{B\gamma t}{2})} |-\rangle \quad (2.41)$$

Con esto podemos calcular el valor esperado del espín a través del tiempo, para el componente en  $z$  se tiene que,

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \left[ \left( \langle + | \cos(\theta/2) e^{\frac{-iB\gamma t}{2}} + \langle - | \sin(\theta/2) e^{-i(\phi - \frac{B\gamma t}{2})} \right) \sigma_z \right. \\ \left. \left( \cos(\theta/2) e^{\frac{iB\gamma t}{2}} |+\rangle + \sin(\theta/2) e^{i(\phi - \frac{B\gamma t}{2})} |-\rangle \right) \right] \quad (2.42)$$

En forma matricial

$$\langle S_z \rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-\frac{iB\gamma t}{2}} & e^{-i(\phi - \frac{B\gamma t}{2})} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{\frac{iB\gamma t}{2}} \\ e^{i(\phi - \frac{B\gamma t}{2})} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

El resultado final para el componente  $z$ ,

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos(\theta) \quad (2.44)$$

que corresponde al valor que esperamos del caso estacionario, para el caso de  $\hat{H} = -\frac{\hbar B\gamma \sigma_z}{2}$ , de la misma manera, podemos obtener los valores para los componentes  $x$  y  $y$ ,

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \psi_+(0) | e^{-\frac{iB\gamma t \sigma_z}{2}} \sigma_x e^{\frac{iB\gamma t \sigma_z}{2}} | \psi_+(0) \rangle \quad (2.45)$$

Sea  $\omega = B\gamma$ , utilizamos la formula de Baker-Campbell-Hausdorff

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle \psi_+(0) | \sigma_x \cos(\omega t) + \sigma_y \sin(\omega t) | \psi_+(0) \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \langle \psi_+(0) | \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix} | \psi_+(0) \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta/2)e^{i(\phi - \omega t)} \\ \cos(\theta/2)e^{i\omega t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \cos(\phi - \omega t) \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.46)$$

De manera similar podemos obtener

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin(\phi - \omega t) \sin(\theta) \quad (2.47)$$

#### 2.2.4. Ecuación de Pauli-Schrödinger

Los problemas vistos solo contenían la parte espinorial de la ecuación de Schrödinger, para obtener una descripción completa del electrón usando la mecánica cuántica no relativista, debemos derivar una nueva forma de la ecuación de Schrödinger, para esto nos apoyamos de la siguiente identidad de las matrices de Pauli:

$$(\hat{\sigma} \cdot \hat{A})(\hat{\sigma} \cdot \hat{B}) = \hat{A} \cdot \hat{B} + i\hat{\sigma} \cdot (\hat{A} \times \hat{B}) \quad (2.48)$$

Donde  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  son operadores vectoriales que conmutan con las matrices de Pauli, si sustituimos ambos por el operador de momento, obtendremos,

$$(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})^2 = \hat{p}^2 \quad (2.49)$$

además de esto, si el electrón en cuestión se encuentra en presencia de un campo magnético externo, de mecánica clásica sigue que existe un corrimiento en el valor del momento dado por  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e/c\vec{A}$ , donde  $A$  es el vector potencial magnético de dicho campo magnético, para obtener su análogo cuántico, basta con cambiar las variables dinámicas por sus respectivos operadores, a lo que se le conoce como acoplamiento mínimo, lo que nos llevará a lo siguiente:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[ \hat{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 \psi + V\psi \quad (2.50)$$

Esta se conoce como la ecuación de Pauli-Schrödinger y describe la dinámica de los electrones de espín 1/2 en presencia de un campo magnético externo (De La Peña, 2014). Es posible obtener una versión mas ilustrativa; para esto usamos la ecuación (2.46),

$$\left[ \hat{\sigma} \cdot \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right]^2 = \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + i\hat{\sigma} \cdot \left( \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right) \quad (2.51)$$

Nos enfocamos en el segundo término de la ecuación,

$$\left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \hat{p} \times \hat{p} - \frac{e}{c} \hat{p} \times \vec{A} - \frac{e}{c} \vec{A} \times \hat{p} + \frac{e^2}{c^2} \vec{A} \times \vec{A} \quad (2.52)$$

los términos  $\hat{p} \times \hat{p}$  y  $\vec{A} \times \vec{A}$  se eliminan, si además aplicamos el operador al vector de estado por la derecha, tendremos:

$$\left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi = -\left( \frac{e}{c} \hat{p} \times \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{A} \times \hat{p} \right) \psi \quad (2.53)$$

Si cambiamos el operador de momento por su representación en el espacio de configuración,

$$\left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \times \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi = i\hbar \left( \frac{e}{c} \nabla \times (\vec{A}\psi) + \frac{e}{c} \vec{A} \times (\nabla\psi) \right) \quad (2.54)$$

Si usamos la siguiente identidad del rotacional de un vector multiplicado por una función escalar  $\nabla \times (\vec{A}\psi) = -\vec{A} \times \nabla\psi + \psi\nabla \times \vec{A}$ , tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) \times (\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\psi &= i\hbar(-\frac{e}{c}\vec{A} \times \nabla\psi + \frac{e}{c}(\nabla \times \vec{A})\psi + \frac{e}{c}\vec{A} \times (\nabla\psi)) = \\ &= (\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) \times (\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\psi = \frac{i\hbar e}{c}\vec{B}\psi \end{aligned} \quad (2.55)$$

Lo que nos lleva a la forma final de la ecuación de Pauli-Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{A})^2\psi + (V - \frac{2\mu_B}{\hbar}\hat{S} \cdot \vec{B})\psi \quad (2.56)$$

La cual describe la dinámica de una partícula de espín 1/2 en presencia de un campo magnético externo. Este resultado se obtuvo a través del acoplamiento mínimo y de las propiedades de las matrices de Pauli, lo que sugiere que el espín no es una consecuencia de efectos relativistas. Además, podemos observar que el valor del factor de Landé para la teoría del electrón de espín 1/2 es exactamente 2 (De La Peña, 2014).

## 2.3. Mecánica cuántica relativista

### 2.3.1. Notación relativista

La mecánica cuántica no relativista se basaba en observables de la mecánica clásica. Si queremos una descripción más precisa, debemos implementar los efectos de la teoría relativista. Primero, definimos la notación que utilizaremos para el

desarrollo del trabajo, la cual está cimentada en la notación de subíndices, donde aquellos que estén etiquetados por letras griegas se cuentan de 0 a 3 y los que tienen etiquetas latinas se cuentan de 1 a 3, entonces tendremos el tensor métrico de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Los eventos en el espacio-tiempo de configuración se describen por cuadvectores contravariantes dados por:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) \quad (2.58)$$

Donde el componente  $x^0 \rightarrow ct$  corresponde al componente temporal del cuadvector. También se define el vector  $x_\mu$  que se conoce como un vector covariante. La relación entre los vectores contravariante y covariante

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (2.59)$$

El tensor métrico define el producto punto en el espacio-tiempo de la siguiente manera:

$$x \cdot y = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu \quad (2.60)$$

Este producto punto es un invariante de Lorentz, lo que nos dice que este no cambia ante las rotaciones y las transformaciones especiales de Lorentz (también conocidas como boosts), estas transformaciones relacionan dos marcos de referencia que se mueven con una velocidad relativa y son de la forma:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.61)$$

Estas transformaciones dejan la distancia invariante y dada por:

$$(x - y)^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu) \quad (2.62)$$

Estas transformaciones, en conjunto con con las traslaciones en el espacio tiempo forman el grupo de Poincaré (Jegerlehner, 2008). Usando esto podemos definir un cuadrivector que será muy importante en el trabajo y es el de cuadrimomento

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \quad (2.63)$$

Si obtenemos su magnitud al cuadrado obtendremos,

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \quad (2.64)$$

Si recordamos la famosa relación que existe entre la masa en reposo de una partícula, con la energía y el momento (Einstein, 1905),

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.65)$$

podemos obtener el valor de la magnitud al cuadrado del cuádrimomento,

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (2.66)$$

otro invariante de interés está dado por:

$$x_\mu p^\mu = Et - \vec{x} \cdot \vec{p} \quad (2.67)$$

### 2.3.2. Ecuación de Klein-Gordon

Para intentar construir una ecuación cuántica relativista, debemos definir los operadores en los que basaremos la teoría, lo que nos lleva a la representación en el espacio de configuración del vector de momento:

$$p^\mu = i\hbar\partial^\mu = i\hbar\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \quad (2.68)$$

Como primera aproximación, realizamos la cuantización de la ecuación (2.66) y la aplicamos a una función de onda por la derecha,

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2)\psi = -\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi - m^2 c^2 \psi = 0$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \quad (2.69)$$

Donde  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$  es el operador de d'Alembert, tenemos la expresión (2.69) la cual se conoce como la ecuación de Klein-Gordon la cual describe la teoría de partículas sin espín en el contexto de la relatividad especial (De La Peña, 2014).

### 2.3.3. La ecuación de Dirac

La ecuación de Klein-Gordon describe la teoría cuántica relativista de partículas cargadas con espín cero, por lo que aún hace falta encontrar otra ecuación que pueda describir partículas de espín 1/2.

Tomando esto en cuenta, Dirac consiguió encontrar una ecuación que describe la dinámica de las partículas relativistas de espín 1/2 (Dirac, 1928). Para llegar a ella, factorizamos la relación de energía relativista, dada por la ecuación (2.65).

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = (\beta^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) = 0 \quad (2.70)$$

Desarrollando el lado izquierdo

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2 c^2 \quad (2.71)$$

Del lado derecho tenemos

$$(\beta^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) = \beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda + mc(\beta^\kappa p_\kappa - \gamma^\lambda p_\lambda) - m^2 c^2 = 0 \quad (2.72)$$

Como no tenemos términos lineales del momento en el lado izquierdo de la ecuación, deducimos  $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - m^2 c^2 = 0 \quad (2.73)$$

Si expandimos los subíndices del lado derecho

$$\begin{aligned} \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - m^2 c^2 &= (\gamma^0)^2 p_0^2 + (\gamma^1)^2 p_1^2 + (\gamma^2)^2 p_2^2 + (\gamma^3)^2 p_3^2 \\ &+ (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p_0 p_1 + (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p_0 p_2 \\ &+ (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^0) p_0 p_3 + (\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) p_1 p_2 \\ &+ (\gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^1) p_1 p_3 + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p_2 p_3 - m^2 c^2 \end{aligned} \quad (2.74)$$

Sabemos que esta ecuación debe ser igual a (2.71), por lo que los términos que contienen el anticonmutador de los términos  $\gamma$  deben eliminarse. Esto es  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0$ , si  $\mu \neq \nu$ , también podemos observar que  $(\gamma^0)^2 = 1$ ,  $(\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$ . Estas propiedades se resumen en la siguiente ecuación (D. J. Griffiths, 1987):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.75)$$

Resulta que no hay cantidades escalares que cumplan estos requisitos, por

lo que  $\gamma^\mu$  es un conjunto de matrices de 4x4, que está definido con una relación de anticonmutación entonces

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) = 0 \quad (2.76)$$

Tomamos el primer término de la derecha y lo expresamos en su representación del espacio-tiempo de configuración

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi(x) = 0 \quad (2.77)$$

Donde  $\psi(x)$  es un bi-espinor de cuatro componentes y  $x$  es el cuadrivector de posición. Si introducimos la siguiente notación  $\gamma^\mu\partial_\mu = \not{\partial}$  llegaremos a la siguiente expresión en unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ )

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (2.78)$$

La cual se conoce como la *ecuación de Dirac* y es utilizada para describir la teoría cuántica de las partículas relativistas de espín 1/2, aun que esto último aun no es muy claro, para eso debemos estudiar las matrices  $\gamma$ .

### 2.3.4. Matrices gamma

En la sección anterior se definió la ecuación de Dirac, al mismo tiempo que encontrábamos las propiedades que deben cumplir las matrices gamma que aparecen en ella. Estas propiedades no definen un conjunto único de matrices, si no que proveen una lista de reglas de las cuales podemos obtener un conjunto dado.

La elección de la representación de estas matrices puede variar con el problema que queramos estudiar. La forma de las matrices que utilizaremos es la siguiente (Bjorken y Drell, 1964),

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

Donde  $\sigma_a$  es la a-ésima matriz de Pauli, las identidades y los otros componentes de las matrices son a su vez matrices de 2x2, de manera que la matriz resultante sea de 4x4

### 2.3.5. Densidad y corriente de probabilidad

Podemos encontrar una corriente de probabilidad asociada a la ecuación de Dirac, si definimos el bi-espinor adjunto  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ , este obedecerá la ecuación para el espacio dual

$$\bar{\psi}(i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0 \quad (2.80)$$

Procedemos aplicando el bi-espinor normal por la derecha a la ecuación anterior y el adjunto a la ecuación de Dirac por la izquierda y las sumamos

$$\bar{\psi}(i \overleftarrow{\not{\partial}} + m)\psi + \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi = 0$$

$$\bar{\psi} \overleftarrow{\not{\partial}} \psi + \bar{\psi} \not{\partial} \psi = \bar{\psi} \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$$

Esto es

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \quad (2.81)$$

La cual es la ecuación de continuidad asociada a la ecuación de Dirac, donde  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es la cuatricorrente asociada, su componente cero nos dará la densidad de probabilidad

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \quad (2.82)$$

Podemos observar que es positiva definida, resolviendo uno de los problemas que presentaba la ecuación de Klein-Gordon, además de conseguir que la ecuación describa la dinámica de partículas de espín 1/2 usando las matrices de Pauli para la representación de las matrices gamma.

### 2.3.6. Partícula en reposo

Para la ecuación de Dirac tenemos dos casos de interés para una partícula libre, el primero concierne a una partícula en reposo, que no tendrá parte espacial en el cuádrimomento, su solución será de la forma

$$\psi(x) = Ne^{-ix^\mu p_\mu}u(p) \quad (2.83)$$

Donde  $u(p)$  es un vector columna de cuatro componentes. Al aplicar esta solución en la ecuación (2.78) y eliminando el exponente, tendremos

$$(\gamma^0 E u(p) - m u(p)) = 0$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} E I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -E I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & m I_{2 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E u_a \\ -E u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m u_a \\ m u_b \end{pmatrix}$$

Donde  $u_a, u_b$  son vectores columna de  $2 \times 2$ . Se puede ver de esta ecuación que tendremos dos posibles valores para la energía, que a su vez requerirán que algunos de los componentes de  $u(p)$  sean cero de acuerdo al valor de  $E$ , para la energía positiva tendremos  $u_b = 0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

Las soluciones de energía negativa necesitan que  $u_a = 0$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

Estas cuatro soluciones forman una base completa. Las primeras dos soluciones corresponden a una partícula de espín  $\pm\frac{1}{2}$ . Verificamos usando el operador en la dirección  $z$  para un sistema de dos partículas de espín  $1/2$

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\sigma_z \otimes \sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

$$\hat{S}_z u_1 = \frac{1}{2}u_1, \quad \hat{S}_z u_2 = -\frac{1}{2}u_2 \quad (2.87)$$

Si  $u_3$  y  $u_4$  son soluciones, también lo serán si realizamos el cambio [ $E \rightarrow -E$ ,  $p \rightarrow -p$ ] (convención de Feynman-Stueckelberg), definimos

$$v_1(E, p) = u_4(-E, -p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

$$v_2(E, p) = u_3(-E, -p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tendrán asociadas energías positivas al igual que las soluciones  $u$ , estas tendrán componente  $z$  de espín dado por

$$\hat{S}_z v_1 = -\frac{1}{2}v_1, \quad \hat{S}_z v_2 = \frac{1}{2}v_2 \quad (2.89)$$

Esto nos lleva a otra de las predicciones de esta ecuación. Como podemos ver, asociamos  $v_1$  a  $u_4$  y  $v_2$  con  $u_3$ , porque al aplicar el operador de conjugación de la carga, este toma un electrón de espín positivo (spin up) y lo regresa como un positrón de espín negativo (spin down). Así el conjunto  $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}$  corresponden a pares partícula-antipartícula de spin up o spin down bajo dicho operador.

### 2.3.7. Partícula libre con momento

La partícula libre con momento tendrá una solución de la forma

$$\psi(x) = Ne^{-ix^\mu p_\mu} u(p) \quad (2.90)$$

Al introducir la solución en la ecuación de Dirac,

$$(i\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \quad (2.91)$$

$$\left( \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} - m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} (E - m) & -(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) & -(E + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix} = 0 \quad (2.92)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{E-m} u_b \\ u_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a \\ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{E+m} u_a \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

Estos nos indica que tendremos dos grupos de soluciones, en el primer grupo  $u_a = (1, 0)^t$  o  $u_a = (0, 1)^t$ , el segundo  $u_b = (1, 0)^t$  o  $u_b = (0, 1)^t$ , para encontrar la forma explícita de las soluciones, calculamos la expresión  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z = \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

conociendo esto, la parte espinorial de las soluciones será

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

Donde  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones de energía positiva, dada por  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ , las otras dos corresponden a energías negativas. Usando la convención de Feynman-Stueckelberg para estas soluciones [ $E \rightarrow -E$ ,  $p \rightarrow -p$ ]

$$v_1 = u_4(-E, -p) = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = u_3(-E, -p) = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

las soluciones  $u$  y  $v$  también forman pares partícula-antipartícula como en el caso anterior, a diferencia del mismo, estas soluciones no son eigentestados de

$\hat{S}_z$ , a menos que el momento sea puramente en la dirección  $z$ .

### 2.3.8. Contenido de espín

Sabemos que el electrón es una partícula de espín  $1/2$ , por lo que no esperamos que conserve las propiedades del momento angular que se ve en la teoría cuántica sin espín. Esto se ve más claro cuando usamos la ecuación de Heisenberg

$$i\frac{d\hat{G}}{dt} = [\hat{G}, \hat{H}] + i\frac{\partial\hat{G}}{\partial t} \quad (2.97)$$

El operador de momento angular no depende explícitamente del tiempo, por lo que su evolución temporal depende de su conmutador con el hamiltoniano. De la teoría cuántica ordinaria esperamos que estos operadores conmuten. Entonces buscamos el operador hamiltoniano de Dirac. Comencemos con

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) = \gamma^0 E - \gamma^1 p_1 - \gamma^2 p_2 - \gamma^3 p_3 - m = \gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} - m = 0 \quad (2.98)$$

Si despejamos para  $E$ , utilizando la propiedad  $\gamma^0 \gamma^0 = I$ , identificaremos el hamiltoniano

$$\hat{H} = \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m) \quad (2.99)$$

Estudiamos el caso del componente  $x$  del operador de momento angular orbital  $\hat{L}_x = yp_z - zp_y$

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_x, \hat{H}] &= [yp_z - zp_y, \gamma^0(\gamma^1 p_x + \gamma^2 p_y + \gamma^3 p_z + m)] \\
&= \gamma^0(\gamma^1[yp_z - zp_y, p_x] + \gamma^2[yp_z - zp_y, p_y] + \gamma^3[yp_z - zp_y, p_z]) \\
&= i\gamma^0(\gamma^2 p_z - \gamma^3 p_y)
\end{aligned}$$

$$[\hat{L}_x, \hat{H}] = i\gamma^0(\vec{\gamma} \times \vec{p})_x \quad (2.100)$$

Esto sugiere que el momento angular orbital no es una cantidad conservada. Para corregir esto, debemos considerar que el electrón posee un momento angular intrínseco, por lo que el momento angular total del electrón será la suma de su momento angular orbital y el de espín, de la forma  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ . De la misma manera que obtuvimos la ecuación (2.100), podemos demostrar que

$$[\hat{S}_x, \hat{H}] = -i\gamma^0(\vec{\gamma} \times \vec{p})_x \quad (2.101)$$

Por lo que es claro que la cantidad conservada será el momento angular total

$$[\hat{J}, \hat{H}] = [\hat{L} + \hat{S}, \hat{H}] = 0 \quad (2.102)$$

### 2.3.9. Normalización

Sabemos que las soluciones de la partícula libre en movimiento para la ecuación de Dirac son

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_z+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \quad v_1 = N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

Estas soluciones siguen dos tipos de reglas de ortogonalidad, una dada por la hermiticidad y la otra por el adjunto del espinor. Para el primer caso tenemos:

$$\begin{aligned} u_r^\dagger u_s &= N^2 \frac{2E}{E+m} \delta_{rs} \\ v_r^\dagger v_s &= N^2 \frac{2E}{E+m} \delta_{rs} \end{aligned} \quad (2.104)$$

Como las soluciones describen a dos partículas que tienen la misma energía, buscamos normalizar a un factor de  $2E$ , por lo que  $N = \sqrt{E+m}$ . Usando esto podemos escribir las siguientes relaciones de ortogonalidad en términos del espinor adjunto:

$$\begin{aligned} \bar{u}_r u_s &= 2m \delta_{rs} \\ \bar{v}_r v_s &= -2m \delta_{rs} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Con estas relaciones de ortogonalidad, podemos obtener el valor de la cuatricorriente para la partícula libre

$$j^\mu = 2(E, \vec{p}) \quad (2.106)$$

### 2.3.10. Antipartículas

Dirac derivó su ecuación en un intento de eliminar el problema de las densidades de probabilidad negativas que observaba en las funciones de onda de la ecuación de Klein-Gordon. Dirac logró resolver este problema, además de que su ecuación describe naturalmente el espín del electrón. A pesar de estos triunfos aún tenemos problemas por delante. Las soluciones de la ecuación (2.78) describen cuatro tipos de partículas, con energías iguales pero de signos diferentes y con espín  $\pm 1/2$ , la existencia de dichas soluciones de energía negativa requieren de una reinterpretación de la teoría de Dirac, pues hay que evitar que los estados atómicos decaigan por radiación a estados de energía negativa indefinidamente, lo que sugiere que debemos encontrar una interpretación diferente a la de partículas de la teoría cuántica ordinaria (Bjorken y Drell, 1964).

Como solución a este problema, Dirac imaginó la existencia de un mar de partículas, aplicando el principio de exclusión de Pauli, el cual nos dice que cada uno de los posibles estados cuánticos pueden estar ocupados por un solo electrón. Dirac propuso que este mar de infinitas partículas estaba totalmente ocupado por los estados de energía negativa, lo que solucionaría el problema de la estabilidad de los estados base. Este mar contendría momento total y angular cero, pero carga y energía infinitas. Estas propiedades podrían resultar preocupantes, pero solo hace falta recordar que solo podemos medir diferencias entre niveles energéticos, por lo que no se podría medir la energía infinita del mar. Por el lado de la carga, la inmensa cantidad de ella estaría distribuida a lo largo de todo el espacio, por lo que los campos resultantes no podrían ser medidos experimentalmente.

Por otro lado, existiría la posibilidad de que una partícula con la suficiente energía lograra interactuar con uno de los electrones de energía negativa en el

mar, llevándolo a un estado de energía y carga positiva, lo que se percibiría como un positrón.

Tras el descubrimiento experimental del positrón (Anderson, 1933), quedó claro que la interpretación de partículas singulares de la teoría cuántica de Schrödinger, no es aplicable a una teoría que busque unificar la mecánica cuántica y la relatividad. Esto se debe a que necesitamos describir a múltiples partículas, así como procesos de creación y aniquilación de las mismas. Lo que nos lleva a la teoría cuántica de campos. La primera que estudiaremos es aquella que describe la interacción entre el campo de los electrones y el de los fotones.

## 2.4. Electrodinámica cuántica

### 2.4.1. Interpretación de Feynman-Stueckelberg

Como vimos en las soluciones para la partícula libre con la ecuación de Dirac, la interpretación de Feynman-Stueckelberg dice lo siguiente: Una solución de energía negativa puede ser interpretada como una partícula con energía negativa que se propaga hacia atrás en el tiempo. Esto es equivalente a una antipartícula de energía positiva viajando hacia adelante en el tiempo.

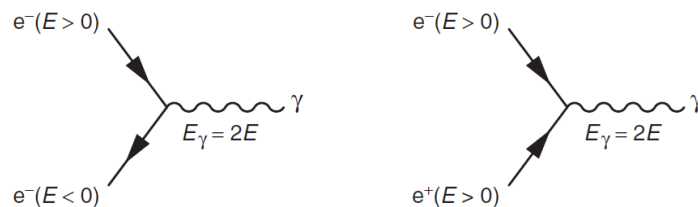


Figura 2.1. Diagramas de Feynman asociados al proceso de aniquilación  $e^+e^-$ , de acuerdo a la interpretación de Feynman-Stueckelberg (Thomson, 2013).

De la figura (2.1), podemos ver que en la izquierda tenemos un electrón

de energía positiva produciendo un fotón, además de un electrón de energía negativa propagándose atrás en el tiempo. Usando la interpretación de Feynman-Stueckelberg podemos ver el mismo proceso en términos de electrones y positrones, donde un positrón de energía positiva que se propaga adelante en el tiempo se aniquila con un electrón, produciendo un fotón (Thomson, 2013).

### 2.4.2. Formulación lagrangiana

En la sección anterior estudiamos la ecuación de Dirac, la cual describe la dinámica del campo de partículas de espín  $\frac{1}{2}$ . Estas partículas reciben el nombre de fermiones. Si, además, estas partículas no interactúan mediante la fuerza fuerte, se les conoce como leptones.

Los resultados obtenidos con esa ecuación eran prometedores. Ahora nos interesa conocer cómo se comportaría al interactuar con otros campos. Usualmente, se parte de realizar el acoplamiento mínimo al lagrangiano de Dirac, sumando el término cinético del nuevo campo. Esta es una aproximación válida, pero utilizaremos una que nos sirva para más adelante.

Trataremos de promover la simetría global  $U(1)$  que exhibe el lagrangiano de Dirac ante el cambio  $\psi(x) \rightarrow e^{i\delta}\psi(x)$ , a una simetría local dada por el cambio:

$$\psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) \tag{2.107}$$

Donde  $\alpha(x)$  es una función escalar, el espinor  $\psi(x)$  es resultado de la ecuación de Dirac, el lagrangiano libre de Dirac

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \quad (2.108)$$

Al realizar el cambio al nuevo espinor tendremos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)e^{ie\alpha(x)}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{-ie\alpha(x)}\psi(x)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)e^{ie\alpha(x)} \left( i\gamma^\mu [e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) (-ie)\partial_\mu \alpha(x) + e^{-ie\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x)] - m e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) \right)$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu (\partial_\mu - ie \partial\alpha(x)) - m) \psi(x)$$

Para construir un lagrangiano invariante ante transformaciones de fase locales, debemos introducir el concepto de derivada covariante de gauge

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu(x), \quad A_\mu(x) = \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.109)$$

Utilizando esto, llegaremos al siguiente lagrangiano invariante ante cambios de fase locales

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \quad (2.110)$$

Para completar este lagrangiano, necesitamos un término que nos dicte la dinámica del campo  $A_\mu(x)$ . Utilizaremos las ecuaciones de Maxwell para esto.

### 2.4.3. El campo del fotón

De la sección 2.1 sabemos que podemos escribir las ecuaciones de Maxwell en términos de los potenciales eléctrico y vectorial magnético. En el gauge de Lorentz ( $\nabla \cdot A + \frac{1}{c}\partial_t\phi = 0$ ). La ecuación (2.2) en términos de los potenciales toma la forma:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \square \phi = 4\pi\rho \quad (2.111)$$

De igual manera, para la ecuación (2.4) tendremos,

$$\square \vec{A} = \frac{-4\pi}{c} \vec{J} \quad (2.112)$$

Definimos los cuadvectores del potencial y la corriente de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A^\mu &= (\phi, \vec{A}), \\ J^\mu &= (c\rho, \vec{J}) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Juntando esto con las ecuaciones (2.124) y (2.125)

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (2.114)$$

En el caso que no tengamos fuentes, la cuadricorriente es cero, por lo que

$$\square A^\mu = 0 \quad (2.115)$$

Lo cual coincide con la ecuación de Klein-Gordon para una partícula de masa cero. Sabemos que los fotones son partículas bosónicas, es decir de espín entero. Por lo que las soluciones a la ecuación homogénea y libre de K-G para el fotón sera de la forma

$$A_\mu = N e^{-ix^\nu p_\nu} \epsilon_\mu(p) \quad (2.116)$$

Donde  $\epsilon_\mu(p)$  describe el espín del fotón,  $N$  es un factor de normalización. Gracias a esto podemos identificar a  $A_\mu$  como el campo del fotón. De electrodinámica sabemos que la parte dinámica del lagrangiano electromagnético está dada por:

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \quad (2.117)$$

Donde  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  es el tensor electromagnético,  $(\partial^\mu A_\mu = 0)$  es el factor de gauge de Lorentz y se introduce mediante un multiplicador de Lagrange (Jegerlehner, 2008).

#### 2.4.4. El lagrangiano de la electrodinámica cuántica

Ahora que conocemos el significado del campo  $A^\mu$  podemos escribir el lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés), teoría de interacción entre los electrones y los fotones.

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2 \quad (2.118)$$

Al expandir  $D^\mu$  obtendremos

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu(x))^2 + e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) \quad (2.119)$$

Sabemos que  $J_{em}^\mu = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ . Si además etiquetamos los términos que solo contienen un solo tipo de campo obtenemos

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{int} \quad (2.120)$$

Donde  $\mathcal{L}_{int} = J_{em}^\mu A_\mu$  es el lagrangiano de interacción, la carga  $e$  que utilizamos es la del electrón, la cual por convención se toma como negativa, de manera  $e = -|e|$ , entonces la carga de un leptón dado sera  $Q_f|e|$ , una colección de leptones cargados entran en la corriente electromagnética como  $J_{em}^\mu = \sum_f Q_f \bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\psi_f(x)$ .

### 2.4.5. Teoría de perturbaciones

Una de las cantidades más importantes de esta teoría es la matriz de dispersión  $S$  la cual contiene los procesos de interacción entre fotones y fermiones,  $S$  viene está dada por:

$$S = T \left( e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(x)} \right) \Big|_{\otimes} \quad (2.121)$$

Donde  $\otimes$  nos indica que solo se toman en cuenta los diagramas de Feynman que no contengan diagramas desconectados sin patas externas, esto corresponde

a la normalización de  $S$ .  $T$  nos dice que los operadores deben estar ordenados temporalmente. Utilizando  $S$  podemos calcular varias cosas, una de las mas básicas es una función de Green, en este caso corresponden al valor esperado de un producto cronológico de campos actuando sobre el vacío (Jegerlehner, 2008).

$$G_{\mu,\alpha\beta}(x, y, \bar{y}) = \langle 0 | T \{ A_\mu(x) \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(\bar{y}) \} | 0 \rangle \quad (2.122)$$

Podemos expresar las funciones de Green de los campos interactuantes mediante la formula de Gell-Mann Low, la cual relaciona el estado del vacío en la teoría interactuante (usualmente en la representación de Heisenberg) con el estado del vacío de la teoría no interactuante en la representación de interacciones (Gell-Mann y Low, 1954),

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T \{ A_\mu(x) \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(\bar{y}) \} | 0 \rangle = \\ & \langle 0 | T \{ A_\mu^{(0)}(x) \psi_\alpha^{(0)}(y) \bar{\psi}_\beta^{(0)}(\bar{y}) e^{i \int d^4 x' \mathcal{L}_{int}(x')} \} | 0 \rangle = \\ & \sum_{n=0}^N \frac{i^n}{n!} \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_n \langle 0 | T \{ A_\mu^{(0)}(x) \psi_\alpha^{(0)}(y) \bar{\psi}_\beta^{(0)}(\bar{y}) \mathcal{L}_{int}(z_1) \cdots \mathcal{L}_{int}(z_n) \} | 0 \rangle \\ & + O(e^{N+1}) \end{aligned} \quad (2.123)$$

Los campos a la derecha son correspondientes a la teoría libre y los valores de expectación del vacío se pueden calcular teniendo en cuenta las propiedades de los campos libres. La expansión del termino exponencial nos llevo a la expansión en teoría de perturbaciones, la cual todavía no está bien definida, pues hace falta regularización y normalización. Dejando de lado esto, la evaluación se hace poniendo los campos en términos de operadores de creación y aniquilación,

se utilizan las relaciones de conmutación o anticonmutación correspondientes, de manera que todos los operadores de aniquilación queden en la derecha y los de creación en la izquierda, lo que se conoce como ordenamiento de Wick, esto para eliminar el vacío. Los términos resultantes pueden ser calculados utilizando las reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés).

### 2.4.6. Reglas de Feynman para QED

Tendremos las siguientes reglas, escritas en el espacio de momentos (Lan-  
caster y Blundell, 2014).

- Se tendrá un factor de  $u^s(p)$  o  $\bar{v}^s(p)$  para un leptón / antileptón entrante de momento  $p$  y espín  $s$ .
- Un factor de  $\bar{u}^s(p)$  o  $v^s(p)$  para un leptón / antileptón saliente de momento  $p$  y espín  $s$ .
- Dibuja todos los vértices como puntos en un plano, los externos tienen sus correspondientes campos  $\psi(y_i)$ ,  $\bar{\psi}(\bar{y}_j)$  o  $A^\mu(x_k)$ , los vértices internos de interacción tendrán  $-ie\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu(z_n)$  los tres campos sobre el punto del vértice  $z_n$ .
- Contrae todos los campos en pares representados por una línea que une dos vértices, los campos de diferentes tipos de partículas se representan por diferentes tipos de línea.
- Por cada línea interna de leptones, se inserta el término:

$$iS_f(p)_{\alpha\beta} = \left(\frac{i}{\not{p}-m+i\varepsilon}\right)_{\alpha\beta}$$

- A cada línea interna de fotones se inserta el término:

$$iD(p, \xi)^{\mu\nu} = -i(g^{\mu\nu} - (i - \xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2})\frac{1}{p^2 + i\varepsilon}$$

- Por cada vértice de interacción se realiza la inserción:

$$ieQ_l(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$$

- Las líneas externas de fotones entrantes contribuyen un factor de vector de polarización  $\epsilon_\mu(p)$ .
- Las líneas externas de fotones salientes contribuyen  $\epsilon_\mu^*(p)$ .
- Conservación del momento y la energía. Por cada vértice escribe  $(2\pi)^4\delta^2(k_1 + k_2 + \dots)$  donde  $k_1, k_2$  son momentos entrantes al vértice, en caso de que sean salientes, irán restándose.
- Integrar sobre los momentos internos, por cada momento interno  $q$  se agrega un factor  $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$
- El resultado de todo esto tendrá como factor un término de  $(2\pi)^4\delta^2(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$  al eliminarlo se obtendrá la amplitud para el proceso deseado.
- la presencia de términos fermiónicos requiere de anti-simetrización, por lo que se incluye un signo negativo entre diagramas que solo difieren por el intercambio de dos fermiones.

Como resultado de implementar estas reglas, se obtiene un diagrama de Feynman. A partir del cual, podemos calcular la amplitud del proceso asociado al diagrama (D. J. Griffiths, 1987). Esta amplitud se puede utilizar para calcular secciones eficaces o tiempos de decaimiento.

## 2.5. Cromodinámica cuántica

### 2.5.1. El modelo de quarks

El estudio de la fuerza nuclear fuerte comenzó con el descubrimiento de partículas provenientes de reacciones nucleares como el protón, neutrón, los mesones  $\pi$ ,  $K$  y otras partículas que ahora se sabe interactúan mediante la fuerza fuerte. Estas no se consideran como partículas elementales, si no que están compuestas de conjuntos de partículas llamadas quarks, los cuales solo pueden ser observados en estados ligados de mas de una partícula (Peskin, 2019). Estas partículas compuestas se conocen como hadrones.

Las partículas mas ligeras que interactúan fuertemente son los mesones  $\pi$ , que poseen masas:

$$\pi^{\pm} = 139,57MeV, \quad \pi^0 = 134,98MeV \quad (2.124)$$

En 1935 Hideki Yukawa encontró que un campo cuántico que obedece la ecuación de Klein-Gordon, al interactuar con una fuente estática presenta un potencial dado por:

$$V(r) = \frac{g^2}{4\pi r} e^{-mr} \quad (2.125)$$

En unidades naturales ( $\hbar = c = 1$ ), es el conocido potencial de Yukawa, que es universalmente atractivo. Al comparar con las distancias a las que se dan las interacciones nucleares, Yukawa propuso la existencia de una partícula

regida por la ecuación de K-G con una masa  $m \approx 200MeV$  (H., 1935). En 1947 Lattes, Occhialini y Powell expusieron emulsión fotográfica a gran altitud, donde capturaron el decaimiento de un pion a un muón (Fig. 2.4).

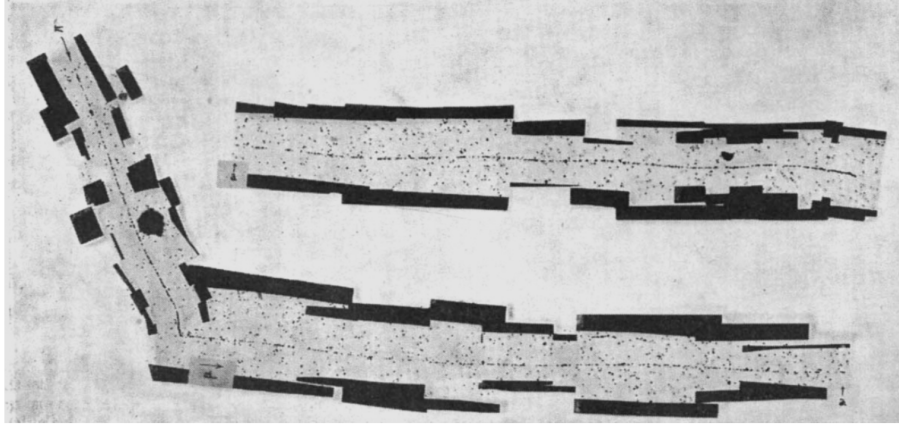


Figura 2.2. Rastros del mesón  $\pi$  proveniente de rayos cósmicos, propagándose hasta decaer en un muón (Lattes et al., 1947).

En los años siguientes se descubrieron más hadrones por medio de rayos cósmicos, hasta que a principios de los 50s se comenzaron a hacer experimentos en aceleradores de partículas. Las colisiones se registraban en cámaras de burbujas, donde las partículas cargadas interactúan con el medio, dejando rastros de burbujas, como lo muestra la Figura 2.5 (Peskin, 2019).

El descubrimiento de estas partículas llevo al desarrollo de la cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés), que es la teoría que describe las interacciones de quarks y los gluones. Existen seis tipos o sabores de quark con carga de color, *up*, *charm*, *top*, *down*, *strange* y *bottom*, que interactúan mediante la fuerza fuerte, la cual es mediada por gluones, que también tienen carga de color por lo que estas partículas mediadoras de fuerza (a diferencia del fotón en QED) también interactúan entre si (Halzen y Martin, 1984).

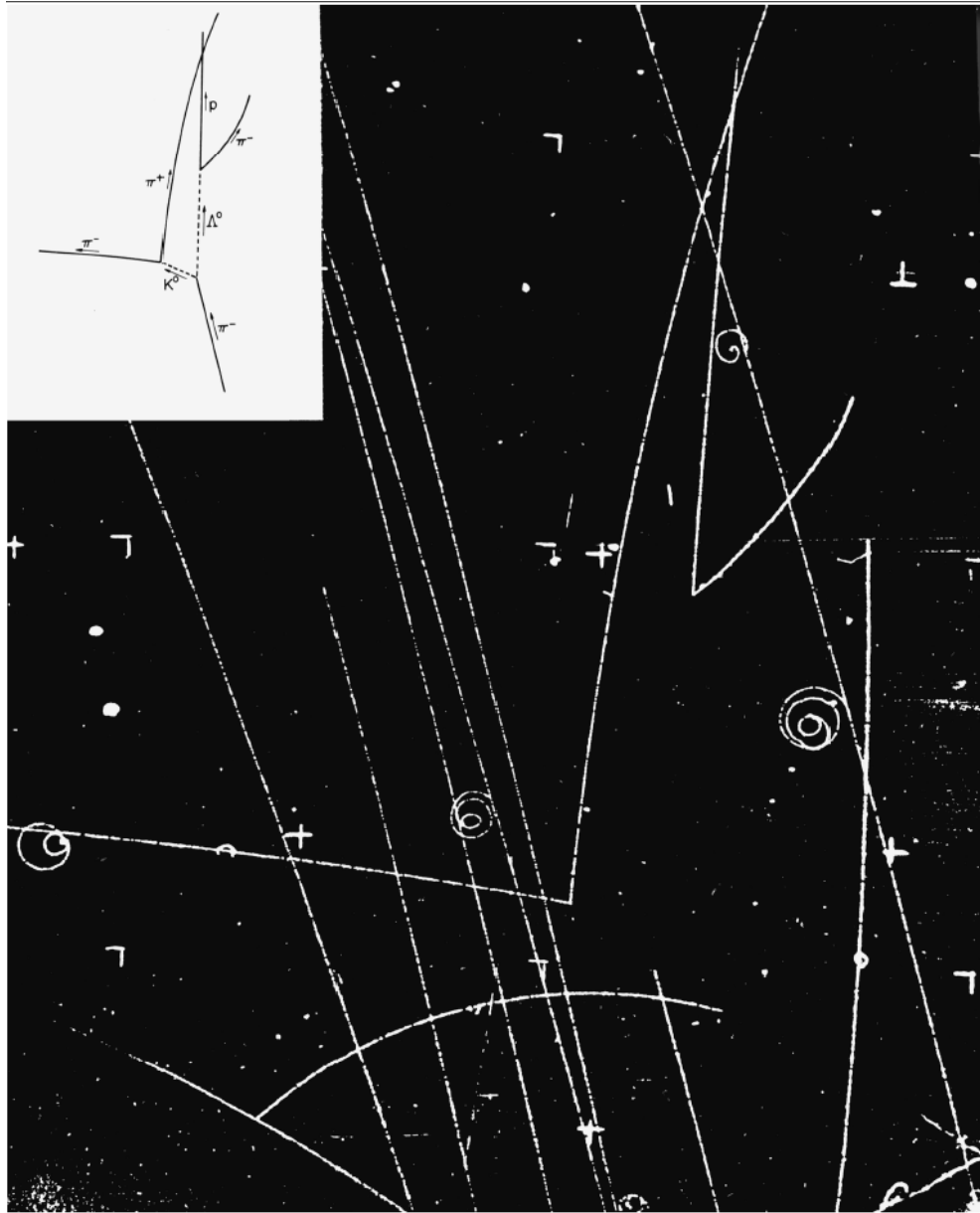


Figura 2.3. Una fotografía de la reacción  $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$  tomada en una cámara de burbujas en el Laboratorio Nacional de Berkeley Lawrence en 1954 (Peskin, 2019).

### 2.5.2. El lagrangiano de la cromodinámica cuántica

Para estudiar esta teoría, pediremos que el lagrangiano de los quarks sea invariante ante cambios de fase locales, como estas partículas son fermiones, serán descritos por el lagrangiano de Dirac. Introduciendo en estas transformaciones,

los generadores del grupo SU(3), lo cuales están relacionados con la carga de color. El lagrangiano para los quarks será:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}_q^j(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi_q^j(x) \quad (2.126)$$

Donde  $q$  es el indice de color y  $j$  el de sabor. De manera análoga al caso de QED, hacemos el cambio  $\psi(x) \rightarrow e^{ig_s\alpha^a(x)t^a}\psi(x)$ , donde  $t^a$  son los generadores del grupo SU(3), el indice  $a$  va de 1 a 8. Estos generadores siguen las siguientes reglas de conmutación

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (2.127)$$

Los generadores son matrices de 3x3. En general las matrices no son conmutativas, estas generan un grupo no abeliano. El símbolo  $f^{abc}$  nos da las constantes reales de estructura del grupo, dicho símbolo es antisimétrico al intercambio de dos indices. Para mantener el lagrangiano invariante, debemos promover el cuadrigradiente a una derivada covariante de gauge dada por (Higuera Angulo, 2018):

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s t^a G_\mu^a(x) \quad (2.128)$$

Los campos  $G_\mu^a$  están asociados a los gluones, este puede ser escrito de la manera  $G_\mu = t^a G_\mu^a$  y se transforma bajo cambios de gauge de la siguiente forma:

$$G_\mu^a(x) \rightarrow G_\mu^{\prime a}(x) = G_\mu^a(x) - \partial_\mu \alpha^a(x) - g_s f^{abc} \alpha^b(x) G_\mu^c(x) \quad (2.129)$$

El lagrangiano se modifica como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_q^j (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_q^j - g_s \bar{\psi}_q^j \gamma^\mu t^a \psi_q^j G_\mu^a \quad (2.130)$$

Para que los campos  $G_\mu^a$  describan explícitamente a los gluones, hace falta incluir el término cinético de dicho campo, este es análogo al del caso de QED. Lo que necesitaremos es el tensor de fuerza para el campo gluónico. El problema está en que los campos  $G_\mu, G_\nu$  no conmutan entre si, este tensor puede ser obtenido con la identidad  $G_{\mu\nu} = \frac{1}{ig_s} [D_\mu, D_\nu]$ . Llegando a la siguiente expresión

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig_s [G_\mu, G_\nu] \quad (2.131)$$

Donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de fuerza gluónica. Podemos usar las reglas de conmutación de los generadores del grupo SU(3), recordando que  $G_{\mu\nu} = t^a g_{\mu\nu}^a$ , para obtener  $G_{\mu\nu}^a$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (2.132)$$

Utilizando esto y añadiendo el término del gauge de Lorentz, tendremos el siguiente lagrangiano.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_q^j (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_q^j - g_s \bar{\psi}_q^j \gamma^\mu t^a \psi_q^j G_\mu^a - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^a)^2 \quad (2.133)$$

El término que introducimos para arreglar el gauge  $(\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^a)^2)$  rompe la simetría de cambios de fase local. Por lo que hace falta la inclusión de los tér-

minos de Faddeev-Popov (Faddeev y Popov, 1967). Los cuales añaden campos fantasma con carga, que corresponderían a partículas de espín cero, pero que anti-conmutan, cosa que viola la estadística del espín, lo que no es problema puesto que estos campos no son observables. Al introducir estos términos, recuperamos la invariancia que perdimos al arreglar el gauge, además de la unitariedad y renormalizabilidad de la teoría. Estos campos fantasma están descritos por el lagrangiano (Jegerlehner, 2008).

$$\mathcal{L}_{Fantasma} = \partial_\mu \bar{\eta}^a \partial^\mu \eta^a + g_s f^{abc} (\partial^\mu \bar{\eta}^a) G_\mu^a \eta^a \quad (2.134)$$

Si sumamos este término al lagrangiano de la ecuación (2.133), obtendremos.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}_q^j (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_q^j - g_s \bar{\psi}_q^j \gamma^\mu t^a \psi_q^j G_\mu^a - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^a)^2 \\ & + \partial_\mu \bar{\eta}^a \partial^\mu \eta^a + g_s f^{abc} (\partial^\mu \bar{\eta}^a) G_\mu^a \eta^a \end{aligned} \quad (2.135)$$

Este es el lagrangiano que describe la dinámica de los quarks, sus interacciones con el campo de los gluones y las auto-interacciones de los últimos. Para comprender los procesos que se llevan a cabo en las interacciones fuertes, hace falta trabajar con las reglas de Feynman para QCD.

### 2.5.3. Reglas de Feynman para QCD

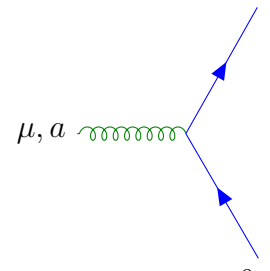
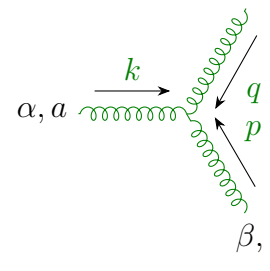
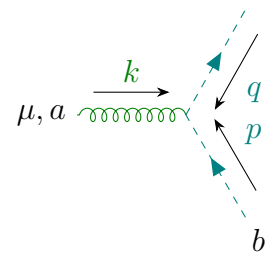
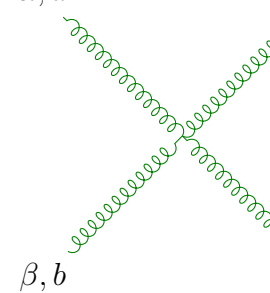
Igual que en el caso de QED, se utilizan los diagramas y las reglas de Feynman para construir las integrales asociadas a un proceso físico. Comenzamos

expresando las reglas de líneas externas para los diagramas (Higuera Angulo, 2018).

- Quark entrante de momento  $p$  se denota por el término  $u(p)$ .
- Quark saliente de momento  $p$  está dado por  $\bar{u}(p)$ .
- Anti-quark entrante de momento  $p$  se denota por  $v(p)$ .
- Anti-quark saliente de momento  $p$  está dado por  $\bar{v}(p)$ .
- Gluon entrante de momento  $k$  se denota por  $\epsilon^\mu(k)$ .
- Gluon saliente de momento  $k$  está dado por  $\epsilon^{\mu*}(k)$ .

Las reglas para líneas internas de partículas, así como los vértices de interacción de estas, están dadas por lo siguiente:

Partícula	Propagadores	
<b>Quark</b>	$i \xrightarrow{p} j$	$iS_0(p) = \delta_{ij} \frac{i}{\not{p} - m},$
<b>Gluon</b>	$\mu, a \xrightarrow{q} \nu, b$	$i\delta^{ab} \Delta_0^{\mu\nu}(q) = -i \frac{\delta^{ab}}{q^2} [g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}],$
<b>Fantasma</b>	$a \xrightarrow{k} b$	$i\delta^{ab} G_0(k) = i \frac{\delta^{ab}}{k^2},$

Partículas	Vértices	
Quark-gluon		$-ig_s t^a \gamma^\mu$
3 Gluones		$-g_s f^{abc} [g^{\alpha\beta} (k-p)^\rho + g^{\beta\rho} (p-q)^\alpha + g^{\rho\alpha} (q-k)^\beta],$
Fantasma-gluon		$g_s f^{abc} q^\mu,$
4 Gluones		$-ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\alpha\beta} g^{\rho\lambda} - g^{\alpha\lambda} g^{\rho\beta}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} - g^{\alpha\rho} g^{\lambda\beta})],$

El resto de las reglas son similares al caso de la electrodinámica cuántica y como vimos en la sección anterior, se expresan de la siguiente manera:

**Conservación del momento y la energía**, por cada vértice escribe  $(2\pi)^4 \delta^2(k_1 + k_2 + \dots)$  donde  $k_1, k_2$  son momentos entrantes al vértice, en caso de que sean salientes, irán restando.

**Integración de momentos internos**, por cada momento interno  $q$  se agrega un factor  $\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$

**Antisimetrización**, la presencia de términos fermiónicos requiere de antisimetrización, por lo que se incluye un signo negativo entre diagramas que solo difieren por el intercambio de dos fermiones.

La constante de acoplamiento  $g_s$  del grupo  $SU(3)$ , se relaciona con el acoplamiento de las interacciones fuertes de la manera  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ . Durante el proceso de renormalización, se llega a que la constante de acoplamiento renormalizada, depende del momento transferido en el proceso a estudiar. Cuando se tiene una gran transferencia de momento, como sería el caso de una colisión profundamente inelástica, se tiene que un desarrollo en teoría de perturbaciones sobre la constante de acoplamiento será convergente. En cambio, si tenemos un intercambio de momento muy bajo, la expansión perturbativa será divergente, por lo que hay casos en los que la teoría de perturbaciones no podría describir los procesos de QCD (Greiner et al., 2006).

### 3. Contribuciones al momento magnético anómalo de un leptón

El momento magnético anómalo se divide por su contribución en las diferentes teorías del modelo estándar, la parte dominante viene de las interacciones electromagnéticas, mientras que las contribuciones de las fuerzas nucleares fuerte y débil son menores. A pesar de esto, el error se ve dominado por las contribuciones hadrónicas de la fuerza nuclear fuerte.

$$a_{e,\mu,\tau} = a_{e,\mu,\tau}^{QED} + a_{e,\mu,\tau}^{QCD} + a_{e,\mu,\tau}^{Weak} \quad (3.1)$$

#### 3.1. Momento magnético anómalo en QED

Para calcular la contribución a  $a_{e,\mu,\tau}$  de la electrodinámica cuántica, utilizaremos las reglas del capítulo anterior para estudiar el momento magnético anómalo de un leptón en QED. Para esto utilizaremos las relaciones de anti-conmutación  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  y conmutación  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\sigma^{\mu\nu}$  de las matrices gamma, al sumar estas relaciones se obtiene:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \quad (3.2)$$

Recordando la ecuación de Dirac en el espacio de momento

$$\gamma^\nu p_\nu u(p) = mu(p)$$

Multiplicamos por  $\gamma^\mu$  por la derecha

$$\gamma^\mu \gamma^\nu p_\nu u(p) = [g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}] p_\nu = m\gamma^\mu u(p)$$

Entonces

$$\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{m} [p^\mu - i\sigma^{\mu\nu} p_\nu] u(p) \quad (3.3)$$

Para el espinor adjunto de momento  $k$ , se tiene

$$\bar{u}(k) \gamma^\mu = \frac{1}{m} \bar{u}(k) [k^\mu + i\sigma^{\mu\nu} k_\nu] \quad (3.4)$$

Podemos estudiar el momento magnético anómalo de un leptón a partir del vértice electromagnético. Utilizamos las reglas de Feynman, la función de Green asociada al vértice revestido por los propagadores completos se ve de la forma:

$$\begin{aligned} G_{\mu,\alpha\beta}(x, y, z) &= \langle 0 | T \{ A_\mu(x) \psi_\alpha(y) \bar{\psi}_\beta(z) \} | 0 \rangle \\ &= \int dx' dy' dz' iD'_{\mu\nu}(x' - x) iS'_f(y' - y)_{\alpha'\alpha} (i\Gamma'_{\alpha'\beta'}(x', y', z')) iS'_f(z' - z)_{\beta'\beta} \end{aligned} \quad (3.5)$$

El diagrama de Feynman asociado a esta función de Green está dado por la figura (3.1), la función del vértice electromagnético por la Fig. (3.2)

Los propagadores  $iD'_{\mu\nu}$  y  $iS'_{f\alpha'\alpha}$  corresponden de manera respectiva a una línea de fotones y leptones con todas sus correcciones radiativas (Jegerlehner, 2008).

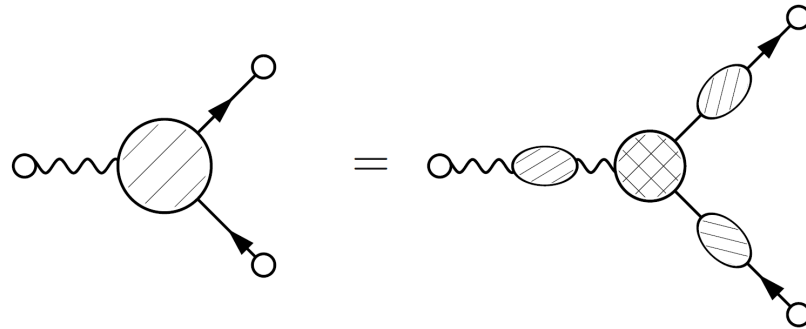


Figura 3.1. Diagrama de Feynman para el vértice electromagnético revestido por los propagadores completos (Jegerlehner, 2008).

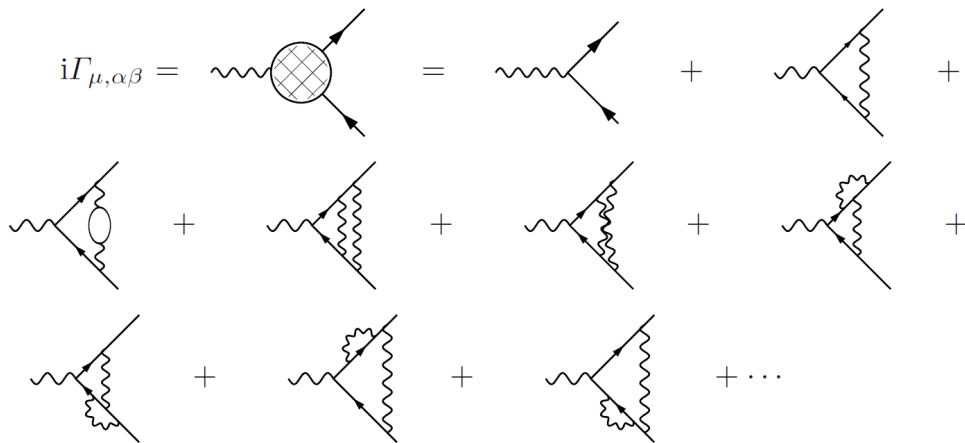


Figura 3.2. Diagrama de Feynman asociado a la función del vértice electromagnético y su descomposición para los diferentes órdenes de teoría de perturbaciones (Jegerlehner, 2008).

Para obtener el momento magnético anómalo del muon nos concentramos en el vértice electromagnético, dado por la figura (3.2). Al cual se le asocia la amplitud que describe la corriente electromagnética de la dispersión de dos muones, uno de momento  $p_1$  y tercer componente de espín  $r_1$ , el otro con momento y componente de espín  $p_2$ ,  $r_2$ ,  $q$  es el momento transferido y está dado por  $q^2 = (p_2 - p_1)^2$ . Para este caso tenemos invariancia traslacional en el espacio-tiempo, por lo que la corriente tiene la forma  $J_{em}^\mu(x) = e^{iPx} j_{em}^\mu(0) e^{-iPx}$ . Si tomamos en cuenta que los estados del muon también son eigenestados del operador de momento (Jegerlehner, 2008) tendremos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(q, p) &= \int d^4x e^{-iqx} \langle \mu(p_2, r_2) | J_{em}^\mu(x) | \mu(p_1, r_1) \rangle \\
&= \int d^4x e^{i(p_2 - p_1 - q)x} \langle \mu(p_2, r_2) | J_{em}^\mu(0) | \mu(p_1, r_1) \rangle \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_2 + p_1) \langle \mu(p_2, r_2) | J_{em}^\mu(0) | \mu(p_1, r_1) \rangle
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Nos enfocamos en el elemento  $\langle \mu(p_2, r_2) | J_{em}^\mu(0) | \mu(p_1, r_1) \rangle$ , el cual está dado por

$$\langle \mu(p_2, r_2) | J_{em}^\mu(0) | \mu(p_1, r_1) \rangle = (-ie) \bar{u}(p_2) \Gamma^\mu(p_1, p_2) u(p_1) \tag{3.7}$$

Si trabajamos en el orden más bajo de la teoría de perturbaciones y aprovechamos las ecuaciones (3.3) y (3.4) esto toma la forma

$$\begin{aligned}
\langle \mu(p_2, r_2) | J_{em}^\mu(0) | \mu(p_1, r_1) \rangle &= (-ie) \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \\
&= (-ie) \left( \frac{1}{2} [\bar{u}(p_2) \gamma^\mu] u(p_1) + \frac{1}{2} \bar{u}(p_2) [\gamma^\mu u(p_1)] \right) \\
&= \frac{-ie}{2m} \bar{u}(p_2) [(p_1 + p_2)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(p_1)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Despejando el término  $(p_1 + p_2)$  obtendremos lo siguiente:

$$(-ie) \bar{u}(p_2) \left( \frac{(p_1 + p_2)^\mu}{2m} \right) u(p_1) = \frac{-ie}{2m} \bar{u}(p_2) [\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu] u(p_1) \tag{3.9}$$

El término que contiene  $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$  está asociado al momento magnético. En este orden de teoría de perturbaciones, se predice que el valor del momento magnético será  $g = 2$ . Regresando a orden de teoría de perturbaciones arbitrario podemos descomponer la función del vértice en términos de otros cuadvectores de la siguiente manera

$$\Gamma^\mu(p_1, p_2) = \gamma^\mu \cdot A + (p_1 + p_2)^\mu \cdot B + q^\mu \cdot C \tag{3.10}$$

Donde  $A, B, C$  son números, los cuales usualmente dependen de  $q^2$ . La función del vértice tiene asociada una identidad de Ward, la cual es análoga a una ecuación de conservación de la corriente dada por  $q_\mu \Gamma^\mu = 0$ . Es claro que el número  $C$  deberá ser directamente cero para cumplir con esta identidad, además los primeros dos términos desaparecen al hacer el producto  $\bar{u}(p_2) [q_\mu \Gamma^\mu] u(p_1)$ . De la ecuación (3.10) conocemos la forma que el término  $(p_1 + p_2)^\mu$  toma dentro del producto, por lo que podemos sustituirlo sin pérdida de generalidad, llegando a la siguiente descomposición de la función del vértice electromagnético (Peskin y

Schroeder, 2018):

$$\Gamma^\mu(p_1, p_2) = \gamma^\mu F_E(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_M(q^2) \quad (3.11)$$

Donde  $F_E$  es el factor de forma eléctrico y  $F_M$  es el factor de forma magnético, estos factores son función de  $q^2$  y además contienen toda la información acerca de la influencia que el campo electromagnético tendría sobre el leptón dado, incluyendo también la información acerca del acoplamiento de los términos eléctricos y magnéticos. Ahora estudiaremos el límite clásico, en el cual  $q^2 = 0$

$$(-ie)\bar{u}(p_2)\Gamma^\mu(p_1, p_2)u(p_1) = (-ie)\bar{u}(p_2)\left[\gamma^\mu F_E(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_M(0)\right]u(p_1) \quad (3.12)$$

Para obtener un resultado, necesitaremos la forma explícita de  $\sigma^{\mu\nu}$  empezamos por el componente  $\mu = 0$

$$\sigma^{0j} = \frac{i}{2}[\gamma^0, \gamma^j] \quad (3.13)$$

$$\sigma^{0j} = \frac{i}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \right] = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^j$$

De manera similar, encontramos que los elementos dados por  $\sigma^{ij}$  son

$$\sigma^{ij} = -i\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Tomando el límite clásico, donde  $E \approx m$  y  $E \gg p$ , las soluciones de la

partícula libre de la ecuación de Dirac se reducen a lo siguiente

$$u(p_1) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

El espinor adjunto será

$$\bar{u}(p_2) = u^\dagger(p_2)\gamma^0 = (\psi_2^\dagger \quad 0) \quad (3.16)$$

Utilizando lo anterior, podemos calcular los componentes de la ecuación (3.7)

$$\langle J_{em}^0(0) \rangle = (-ie) \begin{pmatrix} \psi_2^\dagger & 0 \end{pmatrix} \left[ \gamma^\mu F_E(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_M(0) \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Nos enfocaremos en el segundo término, pues es el que contiene la información del momento magnético

$$\langle J_M^0(0) \rangle = \frac{-ieF_M(0)}{2m} \begin{pmatrix} \psi_2^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma \cdot q \\ \sigma \cdot q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.18)$$

Para el resto de los componentes tenemos

$$\begin{aligned} \langle J_M^i(0) \rangle &= \frac{ieF_M(0)}{2m} \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \psi_2^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_k q_j & 0 \\ 0 & \sigma_k q_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{ieF_M(0)}{2m} \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \psi_2^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma_k q_j) \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{ieF_M(0)}{2m} \epsilon_{ijk} \langle \psi_2 | \sigma_k | \psi_1 \rangle q_j \end{aligned} \quad (3.19)$$

Al interactuar con el campo electromagnético, la amplitud es de la forma  $\mathcal{M} = J_{em}^\mu A_\mu$ , esto es

$$J^i A_i = \frac{ieF_M(0)}{2m} \epsilon_{ijk} \langle \psi_2 | \sigma_k | \psi_1 \rangle q_j A_i \quad (3.20)$$

Identificamos  $B_k(q) = -i\epsilon_{ijk} q_j A_i$  como el campo magnético generado por  $A^\mu$  en el espacio de momentos, entonces

$$J^i A_i = \frac{-eF_M(0)}{2m} \langle \sigma_k \rangle B_k \quad (3.21)$$

El cual resulta muy parecido al hamiltoniano de una partícula con espín 1/2 interactuando con un campo magnético. La relación entre el factor de forma  $F_M(0)$  y el momento magnético queda muy clara (Peskin y Schroeder, 2018), el factor de forma  $F_E(0)$  se asocia al momento dipolar eléctrico, su valor se toma como  $F_E(0) = 1$  debido a que es la condición de renormalización de la carga eléctrica (Jegerlehner, 2008). Utilizando esto, podemos desarrollar  $\mathcal{M} = J_{em}^\mu A_\mu$  con todos sus componentes. En el límite  $q^2 = 0$

$$\mathcal{M} = (-ie)\bar{u}(p_2) \left[ \gamma^\mu F_E(0) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_M(0) \right] u(p_1) A_\mu(q) \quad (3.22)$$

Si usamos el resultado de la ecuación (3.9) en el término de  $F_E$

$$\mathcal{M} = (-ie)\bar{u}(p_2) \left[ \frac{(p_1 + p_2)^\mu}{2m} F_E(0) + [F_E(0) + F_M(0)] \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p_1) A_\mu(q) \quad (3.23)$$

Conocemos el resultado del término que contiene  $\sigma^{\mu\nu}$  por lo que nos enfo-

caremos en el primer término

$$-\frac{ieF_E(0)}{2m}\bar{u}(p_2)[(p_1+p_2)^\mu]u(p_1)A_\mu(q) \quad (3.24)$$

Reescribimos  $(p_1+p_2) \rightarrow P'$

$$-\frac{ieF_E(0)}{2m}\bar{u}(p_2)[(p_1+p_2)^\mu]u(p_1)A_\mu(q) = -\frac{ieF_E(0)}{2m}\langle P'^\mu \rangle A_\mu(q) \quad (3.25)$$

Esto en el espacio de configuración se vería de la forma  $\langle \partial'^\mu \rangle A_\mu$ , si trabajamos en el gauge de Lorentz este término es directamente cero  $\langle \partial'^\mu \rangle A_\mu = 0$ . Por lo que  $\mathcal{M}$  se verá como

$$\mathcal{M} = -\frac{e[F_E(0) + F_M(0)]}{2m}\langle \vec{\sigma} \rangle \cdot \vec{B} \quad (3.26)$$

Sabemos que la condición de renormalización de la carga nos pide que  $F_E(0) = 1$ , por lo que sin pérdida de generalidad podemos reescribir la expresión de la siguiente manera

$$\mathcal{M} = -2[1 + F_M(0)]\mu_B\langle \hat{S} \rangle \cdot \vec{B} \quad (3.27)$$

Donde  $F_2(0)$  se conoce como *momento magnético anómalo* o *factor g-2* y usualmente se escribe como  $a_{e,\mu,\tau}$ , también es usual encontrarlo escrito de la forma

$$a_{e,\mu,\tau} = \frac{g-2}{2} \quad (3.28)$$

Las contribuciones a  $a_{e,\mu,\tau}$  se obtienen mediante correcciones realizadas mediante la teoría de perturbaciones, para la amplitud de dispersión  $\mathcal{M}$ , el momento

magnético anómalo también se suele expresar como una expansión en serie de potencias en términos de la constante de estructura fina

$$a_{e,\mu,\tau} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{e,\mu,\tau}^{(i)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^i \quad (3.29)$$

Donde  $\alpha = e^2/4\pi$  es la constante de estructura fina. **El momento magnético anómalo de los leptones es una consecuencia de fluctuaciones cuánticas.** Estas vienen de las diferentes áreas del modelo estándar de partículas como: La electrodinámica cuántica (QED), la cromodinámica cuántica(QCD) y las interacciones débiles (Weak). Hasta ahora solo hemos visto el caso de la primera área, en este trabajo nos centraremos en una de las contribuciones dadas por la cromodinámica cuántica. Para un tratamiento mas completo de las contribuciones de QED se recomienda revisar el trabajo de Óscar Valdés (Valdés Martínez, 2021).

## 3.2. Contribuciones hadrónicas

Cuando pasamos de estudiar a los leptones en QED (partículas que no interactúan mediante la fuerza fuerte), a otros tipo de partículas que se encuentran en el modelo estándar, la siguiente contribución importante al valor del momento magnético anómalo del muon, viene dada por las interacciones fuertes, las cuales se dividen en dos tipos.

**Polarización hadrónica del vacío (HVP)** los diagramas de este tipo aparecen en términos del orden  $O(\alpha^2)$  en la expansión perturbativa sobre la constante de estructura fina, y se obtienen al sustituir lazos de leptones por quarks. Tomando en cuenta que estos interactúan a su vez con gluones además de fotones,

debido a la escala energética que se requiere para estudiar el momento magnético anómalo, la constante de acoplamiento fuerte es grande y no es posible realizar un tratamiento en teoría de perturbaciones para obtener esta contribución.

**Dispersión hadrónica de luz por luz** (HLbL por sus siglas en inglés), esta contribución aparece en el orden  $O(\alpha^3)$ , y viene dado por la Figura 2.3 (Jegerlehner, 2008), la cual será el enfoque de este trabajo.

Actualmente la incertidumbre en el calculo a causa de los efectos electro-débiles, se encuentra bajo control, por lo que la mayor parte de la incertidumbre viene de las contribuciones hadrónicas. La mayor de estas viene de las interacciones de la polarización hadrónica del vacío, en los últimos años, esta ha sido reducida sistemáticamente, lo cual llevará a que la contribución de incertidumbre mas grande venga de las interacciones de dispersión hadrónica de luz por luz, como se mencionó anteriormente, el enfoque de este trabajo se encontrará en la contribución HLbL provocada por diferentes efectos hadrónicos (Colangelo et al., 2017).

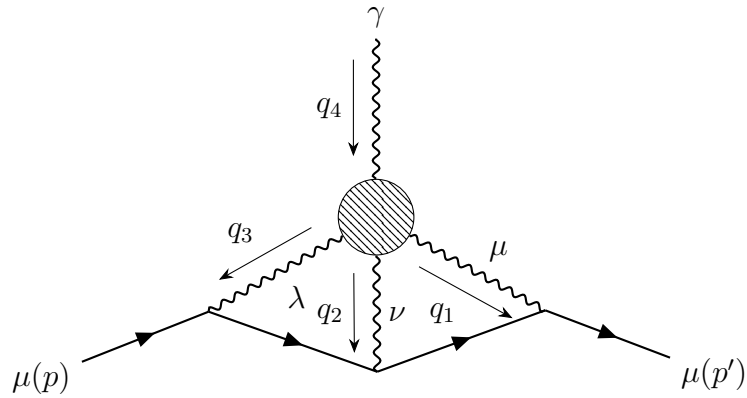


Figura 3.3. Diagrama de Feynman para un proceso de dispersión HLbL, donde un fotón real entra al globo que encapsula las interacciones hadrónicas, del que salen tres fotones virtuales que interactúan con un muon.

## 4. Metodología

Como se mencionó antes, la contribución por HLbL, entra como una inserción a tercer orden en teoría de perturbaciones para la función del vértice electromagnético. La interpretación del diagrama de Feynman de la figura 3.3, nos dice que un campo electromagnético externo interactúa con un muón, mediante tres fotones virtuales, provenientes de un globo de interacción hadrónica que se genera a partir del fotón real externo, las interacciones que ocurren dentro del globo provienen de la cromodinámica cuántica, y deberían tomarse al mayor grado de teoría de perturbaciones posible, desafortunadamente en la escala energética que se estudia al momento magnético anómalo del muón, no es posible realizar una expansión en teoría de perturbaciones para las interacciones hadrónicas, por lo que se debe recurrir a otras metodologías para realizar el estudio, las principales se basan en cálculos dispersivos o de lattice, en este trabajo nos enfocaremos en la primera metodología.

### 4.1. Contribución de dispersión HLbL a $a_\mu$

Para calcular la contribución al vértice electromagnético, proveniente de la dispersión hadrónica de luz por luz, que está representada como el globo de la Figura 3.3, es necesario calcular el tensor de HLbL, el cual es una función de Green para cuatro corrientes electromagnéticas en QCD y está dado por la

expresión:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(q_1, q_2, q_3) &= -i \int d^4x d^4y d^4z e^{-i(q_1 \cdot x + q_2 \cdot y + q_3 \cdot z)} \\ &\langle 0 | T \{ J_{em}^\mu(x) J_{em}^\nu(y) J_{em}^\lambda(z) J_{em}^\rho(0) \} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

Donde las corrientes electromagnéticas incluyen los tres quarks más livianos y están dadas por  $J_{em}^\mu = \bar{q}Q\gamma^\mu q$ , donde  $q = (u, d, s)^T$  contiene los espinores para los quarks en cuestión, con  $Q = \text{diag}(2/3, -1/2, -1/3)$  es una matriz diagonal cuyos elementos son las cargas de cada tipo de quark, además  $q_4 = q_1 + q_2 + q_3$ , como la corriente electromagnética se conserva, el tensor debe cumplir las siguientes relaciones de Ward-Takahashi (WT) (Colangelo et al., 2017).

$$\{q_1^\mu, q_2^\nu, q_3^\lambda, q_4^\rho\} \Pi_{\mu\nu\lambda\rho}(q_1, q_2, q_3) = 0 \quad (4.2)$$

Lo cual requiere lo siguiente,

$$\Pi_{\mu\nu\lambda\rho}(q_1, q_2, q_4 - q_1 - q_2) = -q_4^\sigma \frac{\partial}{\partial q_4^\rho} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, q_4 - q_1 - q_2) \quad (4.3)$$

De esta manera, la contribución debida al tensor HLbL al vértice electromagnético está dada por:

$$\begin{aligned} \langle \mu(p') | (ie) J_\rho(0) | \mu(p) \rangle &= -(ie) \bar{u}(p') \Pi_\rho(p) u(p) \\ &= \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{(-i)^3}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2)^2} \frac{i}{(p' + q_1)^2 - m_\mu^2} \frac{i}{(p - q_2)^2 - m_\mu^2} \\ &\times (-ie)^3 \bar{u}(p') (\gamma^\mu (\not{p}' + \not{q}_1 + m_\mu) \gamma^\lambda (\not{p} - \not{q}_2 + m_\mu) \gamma^\nu) u(p) \\ &\times (ie)^4 \Pi_{\mu\nu\lambda\rho}(q_1, q_2, q_4 - q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Recordamos la descomposición covariante de la función del vértice electromagnético, donde  $q_4 = (p' - p)$ .

$$\bar{u}(p')\Pi_\rho(p, p)u(p) = \bar{u}(p')[\gamma_\rho F_E(q_4^2) + \frac{i\sigma_{\rho\nu}q_4^\nu}{2m}F_M(q_4^2)]u(p) \quad (4.5)$$

La ecuación (4.3) implica que  $\Pi_\rho = q_4^\sigma \Pi_{\rho\sigma}$ , que seguirá la identidad de WT  $q_4^\rho q_4^\sigma \bar{u}(p')\Pi_{\rho\sigma}(p', p)u(p) = 0$ , esto requiere que para el caso de la contribución HLbL  $F_E(0) = 0$ , lo que nos lleva a lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p')\Pi_{\rho\sigma}(p)u(p) \\ &= -ie^6 \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2)^2} \frac{1}{(p' + q_1)^2 - m_\mu^2} \frac{1}{(p - q_2)^2 - m_\mu^2} \\ & \times \bar{u}(p')(\gamma^\mu(\not{p}' + \not{q}_1 + m_\mu)\gamma^\lambda(\not{p} - \not{q}_2 + m_\mu)\gamma^\nu)u(p) \\ & \times \frac{\partial}{\partial q_4^\rho} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, q_4 - q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Al utilizar el método de proyectores de la sección 4.5 encontrada en la referencia (Jegerlehner, 2008), se obtiene que la contribución al momento magnético anómalo del muón por parte de la dispersión hadrónica luz por luz está dada por:

$$a_\mu^{HLbL} = \frac{1}{48m_\mu} Tr\{(\not{p} + m)[\gamma^\rho, \gamma^\sigma](\not{p} + m)\Pi_{\rho\sigma}(p, p)\} \quad (4.7)$$

De forma explícita tendremos la siguiente ecuación integral

$$\begin{aligned} a_\mu^{HLbL} &= -\frac{e^6}{48m_\mu} \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2)^2} \frac{1}{(p' + q_1)^2 - m_\mu^2} \frac{1}{(p - q_2)^2 - m_\mu^2} \\ & \times Tr\{(\not{p} + m)[\gamma^\rho, \gamma^\sigma](\not{p} + m)(\gamma^\mu(\not{p} + \not{q}_1 + m_\mu)\gamma^\lambda(\not{p} - \not{q}_2 + m_\mu)\gamma^\nu)\} \\ & \times \frac{\partial}{\partial q_4^\rho} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, q_4 - q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

### 4.1.1. Descomposición BTT del tensor HLbL

De la misma manera que (Colangelo et al., 2017), descomponemos el tensor  $\Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}$  usando los métodos de Bardeen, Tung (Bardeen y Tung, 1968) y Terrach (Terrach, 1975) (BTT) de la siguiente manera:

$$\Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = \sum_{i=1}^{54} T_i^{\mu\nu\lambda\sigma} \Pi_i \quad (4.9)$$

La descomposición BTT tendrá las siguientes propiedades:

- Las estructuras de Lorentz cumplen la identidad de WT.

$$\{q_1^\mu, q_2^\nu, q_3^\lambda, q_4^\rho\} T_{\mu\nu\lambda\rho}^i(q_1, q_2, q_3) = 0, \quad \forall i \in [1, 54],$$

- Solo hay siete estructuras diferentes, las otras están dadas por versiones cruzadas de estas.
- Las funciones escalares  $\Pi^i(q_1, q_2, -q_1 - q_2)$  están libres de singularidades cinemáticas y ceros.

Las primeras dos propiedades provienen de la simetría gauge y de intercambio entre los fotones virtuales, al hacer esta descomposición, la contribución a  $a_\mu$  queda de la forma.

$$\begin{aligned} a_\mu^{HLbL} &= -\frac{e^6}{48m_\mu} \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2)^2} \frac{1}{(p + q_1)^2 - m_\mu^2} \frac{1}{(p - q_2)^2 - m_\mu^2} \\ &\times Tr\{(\not{p} + m)[\gamma^\rho, \gamma^\sigma](\not{p} + m)(\gamma^\mu(\not{p} + \not{q}_1 + m_\mu)\gamma^\lambda(\not{p} - \not{q}_2 + m_\mu)\gamma^\nu)\} \\ &\times \left( \frac{\partial}{\partial q_4^\rho} \sum_{i=1}^{54} T_{\mu\nu\lambda\sigma}^i(q_1, q_2, q_4 - q_1 - q_2) \right) \Bigg|_{q_4=0} \Pi_i(q_1, q_2, -q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Podemos realizar un cambio de base en la descomposición del tensor  $\Pi^{\mu\nu\lambda\sigma}$ ,

de manera que en el límite  $q_4 \rightarrow 0$  se eliminen 35 de las estructuras  $\hat{T}_i^{\mu\nu\lambda\sigma}$ .

$$\Pi^{\mu\nu\lambda\sigma} = \sum_{i=1}^{54} \hat{T}_i^{\mu\nu\lambda\sigma} \hat{\Pi}_i \quad (4.11)$$

Aprovechando este cambio de variable, podemos contraer la traza que aparece en la ecuación (4.10).

$$\begin{aligned} \hat{T}_i(q_2, q_2; p) = \frac{1}{48m_\mu} \text{Tr} \{ (\not{p} + m) [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] (\not{p} + m) (\gamma^\mu (\not{p} + \not{q}_1 + m_\mu) \\ \gamma^\lambda (\not{p} - \not{q}_2 + m_\mu) \gamma^\nu) \} \left( \frac{\partial}{\partial q_4^\rho} \hat{T}_{\mu\nu\lambda\sigma}^i(q_1, q_2, q_4 - q_1 - q_2) \right) \Big|_{q_4=0} \end{aligned} \quad (4.12)$$

La integral de  $a_\mu^{HLbL}$  queda simplificada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a_\mu^{HLbL} = -\frac{e^6}{48m_\mu} \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2)^2} \frac{1}{(p + q_1)^2 - m_\mu^2} \frac{1}{(p - q_2)^2 - m_\mu^2} \\ \times \sum_{i \in G} \hat{T}_i(q_1, q_2; p) \hat{\Pi}_i(q_1, q_2, -q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Seguindo el trabajo realizado por Colangelo et al. en 2017, se debe realizar una rotación de Wick y una promediación a lo largo de la dirección del momento euclidiano resultante del muón, además de otras técnicas polinómicas, para realizar directamente cinco de las ocho integrales, tomando en cuenta la simetría que presenta  $\hat{T}_i$  ante el cambio  $q_1 \leftrightarrow -q_2$ , se llega a la fórmula maestra para la contribución HLbL al momento magnético anómalo del muón, que queda reducida a

la suma doce integrales.

$$a_{\mu}^{HLbL} = \frac{2\alpha^3}{3\pi^2} \int_0^{\infty} dQ_1 dQ_2 \int_{-1}^1 d\tau \sqrt{1-\tau^2} Q_1^2 Q_2^3 \sum_{i=1}^{12} T_i(Q_1, Q_2, \tau) \bar{\Pi}_i(Q_1, Q_2, \tau) \quad (4.14)$$

Donde  $\bar{\Pi}_i$  son un subconjunto de las funciones  $\hat{\Pi}_i$ , las cantidades  $Q_1, Q_2, Q_3$  son las cantidades cinemáticas para  $(g-2)_{\mu}$ , dadas por:

$$s = q_3^2 = -Q_3^2 = -Q_1^2 - |Q_1| |Q_2| \tau - Q_2^2, \quad t = q_2^2 = -Q_2^2, \quad u = q_1^2 = -Q_1^2, \quad q_4^2 = 0 \quad (4.15)$$

Para facilitar la evaluación numérica de la fórmula maestra, realizamos el siguiente cambio de variables (Eichmann et al., 2015):

$$\begin{aligned} Q_1^2 &= \frac{\tilde{\Sigma}}{3} \left(1 - \frac{r}{2} \cos \phi - \frac{r}{2} \sqrt{3} \sin \phi\right), \\ Q_2^2 &= \frac{\tilde{\Sigma}}{3} \left(1 - \frac{r}{2} \cos \phi + \frac{r}{2} \sqrt{3} \sin \phi\right), \\ Q_3^2 &= Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 \tau + Q_2^2 = \frac{\tilde{\Sigma}}{3} (1 + r \cos \phi), \end{aligned} \quad (4.16)$$

La región de integración estará dada por  $\tilde{\Sigma} \in [0, \infty)$ ,  $r \in [0, 1]$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ , de manera que la fórmula maestra se transforma:

$$a_{\mu}^{HLbL} = \frac{\alpha^3}{432\pi^2} \int_0^{\infty} d\tilde{\Sigma} \tilde{\Sigma}^3 \int_0^1 dr r \sqrt{1-r^2} \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{i=1}^{12} T_i(Q_1, Q_2, \tau) \bar{\Pi}_i(Q_1, Q_2, \tau) \quad (4.17)$$

Donde  $Q_1, Q_2$  y  $\tau$  son funciones de las nuevas variables, se puede separar la contribución HLbL a  $(g-2)$  de la siguiente manera:

$$a_\mu^{HLbL} = a_\mu^{\pi^0\text{-pole}} + a_\mu^{\pi\text{-box}} + a_\mu^{\pi\pi} + \dots \quad (4.18)$$

En la referencia (Colangelo et al., 2015) se demuestra que la representación de las funciones escalares  $\Pi_i$  que se usaron hasta ahora, son matemáticamente equivalentes al cálculo en QED escalar a primer loop, de esta manera usando una parametrización de Feynman, en el límite de interés para (g-2), se llega (Colangelo et al., 2017):

$$\hat{\Pi}_i^{\mathbf{m}\text{-box}}(q_1^2, q_2^2, q_3^2) = F_{\mathbf{m}}^v(q_1^2)F_{\mathbf{m}}^v(q_2^2)F_{\mathbf{m}}^v(q_3^2)\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy I_i(x, y) \quad (4.19)$$

Las 12 estructuras de Lorentz  $T_i$  se podrán encontrar en los apéndices de este trabajo.

## 4.2. Factores de forma electromagnéticos

Muchas interacciones pueden ser modeladas mediante técnicas dispersivas, en estas se estudian las amplitudes de dispersión de una interacción dada, los procesos de dispersión generados por distribuciones espaciales de carga, están parametrizados por factores de forma electromagnéticos, un caso ilustrativo es el de la amplitud de dispersión obtenido por la aproximación de Born para una distribución de carga, dado por:

$$f(\theta, \phi) = F(\mathbf{q})f_{\text{puntual}}(\theta, \phi) \quad (4.20)$$

Donde  $f(\theta, \phi)$ ,  $f_{puntual}(\theta, \phi)$  son las amplitudes de dispersión para una distribución de carga extendida y una puntual respectivamente,  $F(\mathbf{q})$  es el factor de forma electromagnético, dado por la transformada de Fourier de la distribución de carga (De La Peña, 2014):

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(r) e^{iq \cdot r} d^3r \quad (4.21)$$

Donde  $\rho$  es la distribución de carga, estos factores de forma eléctricos son importantes, pues encapsulan toda la información acerca de la estructura de una distribución de carga, como trabajaremos en el área de la cromodinámica cuántica, en un régimen donde no se permite una descripción por teoría de perturbaciones, es necesario implementar un tratamiento dispersivo, donde la información acerca de la estructura interna de los mesones de interés para este trabajo estará contenida dentro de sus factores de forma electromagnéticos.

#### 4.2.1. Estructura interna de mesones

Los mesones son partículas compuestas por dos quarks, los cuales interactúan mediante el intercambio de gluones, el estudio de su estructura interna es complicado, puesto que los gluones pueden interactuar entre ellos a nivel de árbol. Hay diferentes metodologías para el estudio de la estructura interna de los mesones, una herramienta poderosa para la descripción de la física en juego, que además no es perturbativa, son las ecuaciones de Schwinger-Dyson, que son un análogo de las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos cuánticos, estas permiten obtener un conjunto de ecuaciones integrales que relacionan las funciones de Green de la teoría (Roberts, 2012).

Una de estas ecuaciones es la que se conoce como ecuación de gap, la cual tiene la siguiente representación gráfica.

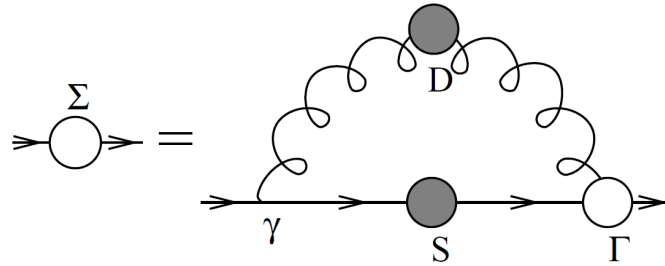


Figura 4.1. Diagrama de Feynman que representa la propagación de un quark que auto-interactúa con su campo gluónico (Roberts, 2012).

Con la cual podemos obtener la siguiente descripción del propagador reves-tido para un quark de sabor  $f$ :

$$S(p)^{-1} = i\gamma \cdot p + m_f + \Sigma(p) \quad (4.22)$$

Donde la auto-interacción del quark esta dada por:

$$\Sigma(p) = \frac{4}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu(q,p) \quad (4.23)$$

Donde  $m_f$  es la masa proveniente del lagrangiano para la corriente de quarks,  $D_{\mu\nu}(p-q)$  es el propagador gluónico y  $\Gamma_\nu(q,p)$  es el vértice de interacción entre quarks y gluones (Hernández-Pinto et al., 2023).

### Interacción de contacto

Otras de las curiosidades mas importantes de la cromodinámica cuántica es la generación dinámica de masa para el gluón en infrarrojo y la saturación de la constante de acoplamiento efectiva de la teoría a largas distancias, esto

llevo al desarrollo del formalismo de la interacción de contacto, donde los quarks interactúan de una manera no dependiente del momento. La interacción estará dada por lo siguiente (Hernández-Pinto et al., 2023):

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = 4\pi\hat{a}_{IR}\delta_{\mu\nu} \quad (4.24)$$

Donde  $\hat{a}_{IR} = \frac{a_{IR}}{m_g^2}$  es el acoplamiento efectivo,  $m_g$  es la masa que se genera dinámicamente para el gluón, el vértice de interacción será  $\Gamma_\nu(q, p) = \gamma_\nu$ , lo cual constituye un truncamiento del tipo Rainbow-ladder sobre las ecuaciones de Schwinger-Dyson, el cual permite una simplificación de los cálculos sin afectar mucho el poder predictivo de la teoría, Para el propagador dentro de la ecuación (4.23), usamos un ansatz del propagador revestido, que tendrá la forma:

$$S(q) = \frac{1}{(i\gamma \cdot q)A(q^2) + B(q^2)}$$

Si comparamos esta expresión con la ecuación de gap para el propagador revestido, podremos ver que  $A(q^2) = 1$  y  $B(q^2) = m_f + \Sigma(q^2)$ , lo que nos deja con:

$$S(q) = \frac{1}{i\gamma \cdot q + M} \quad (4.25)$$

Donde

$$M = m_f + M \frac{4\hat{a}_{IR}}{3\pi} \mathcal{C}(M^2) \quad (4.26)$$

Los resultados obtenidos para  $M$  pueden ser consultados en (Hernández-Pinto et al., 2023), el calculo detallado de la ecuación (4.26) se encuentra en el apéndice

C.

### 4.2.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

La ecuación B-S nos permite estudiar el problema de estados ligados para hadrones compuestos de dos quarks, y está dada por:

$$[\Gamma(k; P)]_{tu} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\chi(q; P)]_{sr} \kappa_{tu}^{rs}(q, k; P) \quad (4.27)$$

Donde  $[\Gamma(k; P)]_{tu}$  representa la amplitud del estado ligado de B-S,  $[\chi(q; P)] = S(q+P)\Gamma S(q)$  es la función de onda de B-S y  $\kappa$  es el kernel de dispersión quark-antiquark,  $r, s, t, u$  son índices de color, sabor y espín, se puede descomponer la amplitud de B-S, para un mesón pseudo-escalar de la manera:

$$\Gamma_{PS}(P) = i\gamma_5 E_{PS}(P) + \frac{1}{2M_R} \gamma_5 \gamma \cdot P F_{PS}(P) \quad (4.28)$$

Donde  $E_{PS}$  y  $F_{PS}$  son las amplitudes de Bethe-Salpeter para el mesón pseudo-escalar dado,  $P$  es el momento total y  $M_R = M_{f1}M_{f2}/(M_{f1} + M_{f2})$  es la masa reducida del sistema.

La ecuación (B-S) tiene solución cuando  $P^2 = -M_m^2$ , donde  $M_m$  es la masa del mesón, utilizando la ecuación de gap y la de Bethe-Salpeter, se puede calcular el factor de forma electromagnético para un mesón (Hernández-Pinto et al., 2023).

### 4.2.3. Vértice de interacción quark-fotón

El vértice de interacción entre quarks y fotones, es uno de los ingredientes principales para el calculo del factor de forma electromagnético de un mesón y sigue una relación de Ward-Takahashi dada por:

$$iP_\mu \Gamma_\mu^\gamma(k_+, k_-, M) = S^{-1}(k_+, M) - S^{-1}(k_-, M) \quad (4.29)$$

Donde  $k_+ = k + 1/2P$  y  $k_- = k - 1/2P$ , la cual se determina de la siguiente ecuación de Bethe-Salpeter:

$$\Gamma_\mu^\gamma(Q, M) = \gamma_\mu - \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \chi_\mu(q_+, q, M) \gamma_\alpha \quad (4.30)$$

Donde  $\chi_\mu(q_+, q, M) = S(q + Q)\Gamma_\mu(Q)S(q)$ , explícitamente la función del vértice tiene la forma:

$$\Gamma_\mu^\gamma(Q, M) = \gamma_\mu - \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q + Q)\Gamma_\mu^\gamma(Q)S(q)\gamma_\alpha \quad (4.31)$$

Como trabajamos en el marco de la interacción de contacto, la función del vértice de interacción no puede depender del momento, por lo que tendrá la forma  $\Gamma_\mu^\gamma(Q, M) = \gamma_\mu P(Q^2)$ , donde  $P(Q^2)$  es una función escalar que depende del momento del fotón, si descomponemos el vértice en sus términos transversales y longitudinales a lo largo del momento  $Q$ , tendremos:

$$\Gamma_\mu^\gamma(Q, M) = \gamma_\mu^T P^T(Q^2) + \gamma_\mu^L P^L(Q^2) \quad (4.32)$$

Donde  $\gamma_\mu^T + \gamma_\mu^L = T_{\mu\nu}\gamma_\nu + L_{\mu\nu}\gamma_\nu = \gamma_\mu$ , además los proyectores transversal y longitudinal tienen la siguiente forma en el espacio euclidiano  $T_{\mu\nu}(Q) = \delta_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2}$  y  $L_{\mu\nu} = \frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2}$ , de esta manera,

$$\gamma_\mu^T(Q) = \gamma_\mu - \frac{\gamma \cdot Q}{Q^2} Q_\mu \quad (4.33)$$

El cálculo detallado de las funciones  $P^L$  y  $P^T$ , puede ser consultado en el apéndice D, donde encontramos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} P^L &= 1 \\ P^T &= \frac{1}{1 + K_\gamma(Q^2, M)} \\ K_\gamma(Q^2, M) &= \frac{4\hat{a}_{IR}}{3\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha(1 - \alpha) Q^2 \bar{\mathcal{C}}_1(\omega) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Donde  $\omega = M^2 + \alpha(1 - \alpha)Q^2$  y  $\bar{\mathcal{C}}(z)_1 = \Gamma(0, z\tau_{UV}^2) - \Gamma(0, z\tau_{IR}^2)$ , donde  $\Gamma(0, a)$  es la función Gamma incompleta.

### 4.3. Factor de forma electromagnético de un mesón

En el esquema de la aproximación de impulso, consideramos un mesón de momento inicial  $k_i = k + Q/2$  y final  $k_f = k - Q/2$ , que interactúa con un fotón

de momento  $Q$ . El vértice de dicha interacción tiene la forma:

$$\Lambda^{M,f_1} = -2k_\lambda F^{PS,f_1} = N_c \int \frac{d^4l}{(2\pi)^2} Tr[\mathcal{G}_\lambda^{M,f_1}] \quad (4.35)$$

Donde

$$\mathcal{G}_\lambda^{M,f_1} = i\Gamma_M(-k_i)S(l+k_i, M_{f_1})i\Gamma_\lambda^\gamma(Q, m_{f_1})S(l+k_f, M_{f_1})i\bar{\Gamma}_M(k_f)S(l, M_{\bar{f}_2}) \quad (4.36)$$

El factor de forma electromagnético total de un mesón se descompone de la siguiente manera:

$$F^M(Q^2) = e_{f_1}F^{M,f_1}(Q^2) + e_{\bar{f}_2}F^{M,\bar{f}_2}(Q^2) \quad (4.37)$$

Si utilizamos las siguientes relaciones  $k_i^2 = (k-Q/2)^2 = k_f^2 = (k+Q/2)^2 = -M_M^2$ , lo que requiere  $(k \cdot Q) = 0$  y  $(k^2 = -M_M^2 - Q^2/4)$ , si multiplicamos (4.35) por  $2k_\lambda$  y despejamos el factor de forma  $F^{PS,f_1}$ , tendremos:

$$F^{PS,f_1}(Q^2) = -2N_c \int \frac{d^4l}{(2\pi)^2} Tr[\frac{k_\lambda}{4k^2} \mathcal{G}_\lambda^{M,f_1}] \quad (4.38)$$

Sabemos que  $(k \cdot Q) = 0$ , por lo que tendremos el siguiente producto  $k_\mu \Gamma_\mu^\gamma(Q) = P^T(Q^2)(\gamma \cdot k)$ , de esta manera,

$$F^{PS,f_1}(Q^2) = \frac{-N_c P^T}{2k^2} \int_l Tr[i\Gamma_M(-k_i)S(l+k_i, M_1)i\gamma \cdot k S(l+k_f, M_1)i\bar{\Gamma}_M(k_f)S(l, M_2)] \quad (4.39)$$

Donde  $\int_l = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^2}$ , al sustituir la ecuación (4.28) dentro del factor de forma

tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
F^{PS,f_1}(Q^2) &= \frac{N_c P^T}{2k^2} \int_l Tr [iE^2 S(l_i, M_1) \gamma \cdot k S(l_f, M_1) S(l, M_2) \\
&\quad - E\bar{F} \{S(l_i, M_1) \gamma \cdot k S(l_f, M_1) \gamma \cdot k_f S(l, M_2) \\
&\quad + \gamma \cdot k_i S(l_i, M_1) \gamma \cdot k S(l_f, M_1) S(l, M_2)\} \\
&\quad - i\bar{F}^2 \gamma \cdot k_i S(l_i, M_1) \gamma \cdot k S(l_f, M_1) \gamma \cdot k_f S(l, M_2)]
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Donde  $l_i = l + k_i$  para el momento final  $l_f = l + k_f$  y  $\bar{F} = \frac{F}{2M_R}$ , podemos ver que el factor de forma tiene la siguiente descomposición

$$F^{PS,f_1}(Q^2) = P^T(Q^2) [E^2 T_{EE}(Q^2) + E\bar{F} T_{EF}(Q^2) + \bar{F}^2 T_{FF}(Q^2)] \tag{4.41}$$

Donde

$$\begin{aligned}
T_{EE}(Q^2) &= \frac{3}{4\pi^2} \left[ \int_0^1 d\alpha \bar{\mathcal{C}}_1(\omega_1) + 2 \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \mathcal{A}_{EE} \bar{\mathcal{C}}_2(\omega_2) \right], \\
T_{EF}(Q^2) &= -\frac{3}{2\pi^2 M_R} \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \left[ \mathcal{A}_{EF}^{(1)} \bar{\mathcal{C}}_1(\omega_2) + (\mathcal{A}_{EF}^{(2)} - \omega_2 \mathcal{A}_{EF}^{(1)}) \bar{\mathcal{C}}_2(\omega_2) \right], \\
T_{FF}(Q^2) &= \frac{3}{4\pi^2 M_R^2} \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \left[ \mathcal{A}_{FF}^{(1)} \bar{\mathcal{C}}_1(\omega_2) + (\mathcal{A}_{FF}^{(2)} - \omega_2 \mathcal{A}_{FF}^{(1)}) \bar{\mathcal{C}}_2(\omega_2) \right]
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\omega_1(M_{f_1}, \alpha, Q^2) &= M_{f_1}^2 + \alpha(1 - \alpha)Q^2, \\
\omega_2(M_{f_1}, M_{f_2}, \alpha, \beta, M_M) &= \alpha M_{f_1}^2 + (1 - \alpha)M_{f_2}^2 - \alpha(1 - \alpha)M_M^2 + \alpha^2 \beta(1 - \beta)Q^2
\end{aligned} \tag{4.43}$$

finalmente

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{EE} &= \alpha(M_{f_1}^2 + M_M^2) + 2(1 - \alpha)M_{f_1}M_{f_2} + (\alpha - 2)M_{f_2}^2, \\
A_{EF}^{(1)} &= (M_{f_2} + M_{f_1}), \\
A_{EF}^{(2)} &= 2M_{f_1}^2M_{f_2} + \alpha M_{f_1}[4M_M^2(\alpha - 1) + \alpha Q^2] \\
&\quad + M_{f_2}[2M_M^2(\alpha - 1)^2 + \alpha Q^2(2\alpha(\beta - 1)\beta + \alpha - 1)], \tag{4.44} \\
A_{FF}^{(1)} &= (3\alpha - 2)M_M^2 + \alpha Q^2 \\
A_{FF}^{(2)} &= 2\alpha(M_M^4(\alpha - 1)^2 + \alpha M_M^2 Q^2(3\alpha\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha + 2\beta - 2\beta^2 - 1)) \\
&\quad - 2M_{f_1}M_{f_2}(2(\alpha - 1)M_M^2 + \alpha Q^2) + 2\alpha M_{f_1}^2 M_M^2
\end{aligned}$$

## 5. Resultados y discusión

Existen diferentes metodologías para la obtención de los factores de forma electromagnéticos para mesones, implementando el análisis basado en interacciones de contacto (CI por sus siglas en inglés) visto anteriormente, se llega a los siguientes factores de forma para los mesones pión y kaón, la bandas de error se obtienen al variar el radio de carga en 5% para cada mesón.

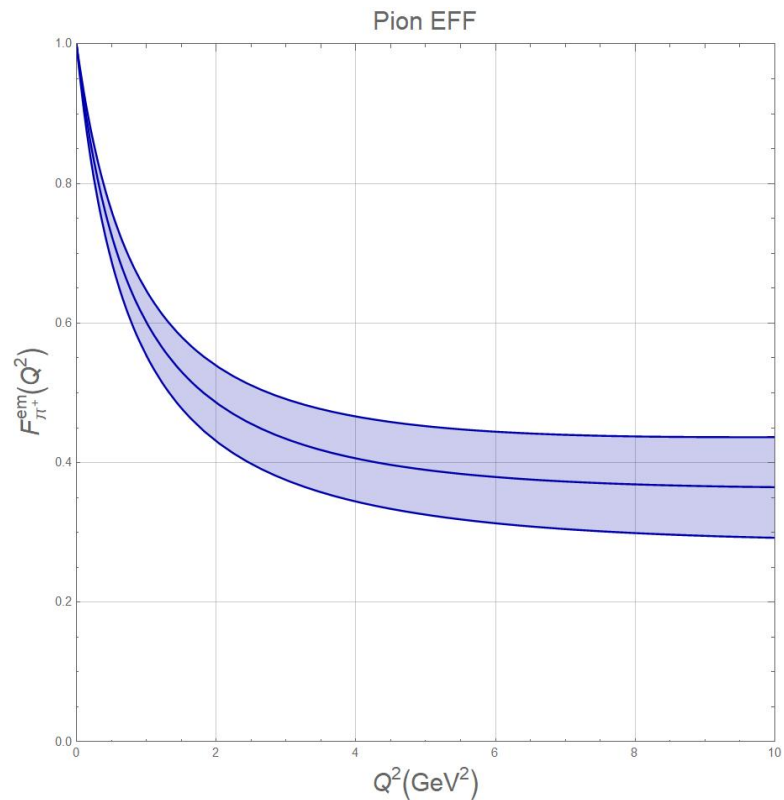


Figura 5.1. Factor de forma eléctrico para el pión, que muestra las bandas de error generadas por una variación del 5% en el radio de carga del pión.

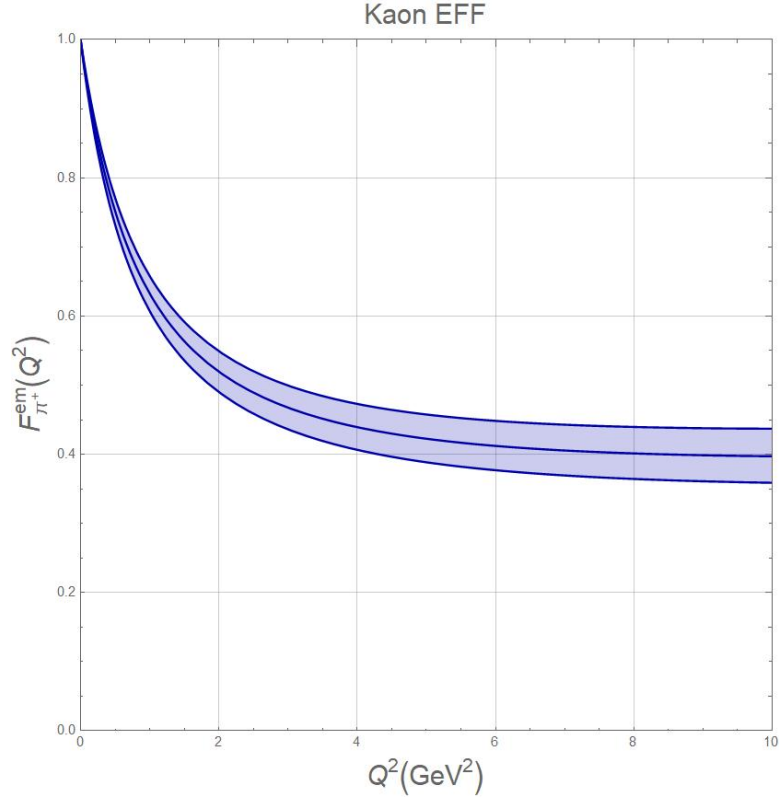


Figura 5.2. Factor de forma eléctrico para el kaón, con barras de error provenientes de una variación del 5% en su radio de carga.

Estos factores de forma fueron obtenidos a partir del trabajo de Roger Hernández (Hernández-Pinto et al., 2023), se hizo un ajuste mediante un aproximante de Padé al set de datos de dicho trabajo, debido al tamaño de la muestra este se construyó de la siguiente forma:

$$F_{\mathbf{M}}^{em}(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{1 + b_1x + b_2x^2} \quad (5.1)$$

Los coeficientes para los aproximantes de Padé están recopilados en la tabla I.

La evaluación numérica de la integral (4.17) se realizó en mathematica utilizando la librería CUBA para integración multidimensional, para esta evaluación se utilizó como benchmark un ansätze para los factores de forma del modelo de dominio de mesones vectoriales (VMD por sus siglas en ingles).

Tabla I. Coeficientes del aproximante de Padé para las bandas centrales de los factores de forma.

Coeficiente	Pion	kaón
$a\_0$	0.999671	0.999611
$a\_1$	0.32811	0.333398
$a\_2$	0.0262687	0.0264025
$b\_1$	1.19104	1.09298
$b\_2$	0.0601881	0.0562799

$$F_{\pi^+}^{VMD}(Q^2) = \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 + Q^2} \quad (5.2)$$

$$F_K^{VMD}(Q^2) = 1 - \frac{Q^2}{2} \left[ \frac{1}{m_\rho^2 + Q^2} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{m_\omega^2 + Q^2} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{m_\phi^2 + Q^2} \right) \right] \quad (5.3)$$

Donde  $m_\mu = 0,1056583745$ ,  $m_\pi = 0,13957039$ ,  $m_\rho = 0,77526$ ,  $m_\omega = 0,78265$ ,  $m_\phi = 1,019461$ ,  $m_K = 0,493677$ ,  $\alpha_{em} = 1/137,035999710$  (Zyla et al., 2020), que nos da los siguientes resultados:

$$a_\mu^{\pi^\pm - box} = -16,4261 \times 10^{-11} \quad (5.4)$$

$$a_\mu^K = -0,500535 \times 10^{-11} \quad (5.5)$$

Ahora podemos comparar los valores con los del calculo para los factores de forma electromagnéticos de CI. Estos datos se muestran en la tabla (II),

Tabla II. Contribuciones a  $a_\mu$  de los factores de forma para CI.

contribución	$r_p -5\%$ (a, $Err_a$ )	$r_p$	$r_p +5\%$
$a_\mu^{\pi^\pm}$	$-21.3322 \times 10^{-11}$	$-22.8736 \times 10^{-11}$	$-24.4295 \times 10^{-11}$
$a_\mu^{K^\pm}$	$-0.87895 \times 10^{-11}$	$-0.947979 \times 10^{-11}$	$-1.02099 \times 10^{-11}$

Para analizar estos resultados, primero compararemos el factor de forma obtenido mediante la interacción de contacto con los datos experimentales para

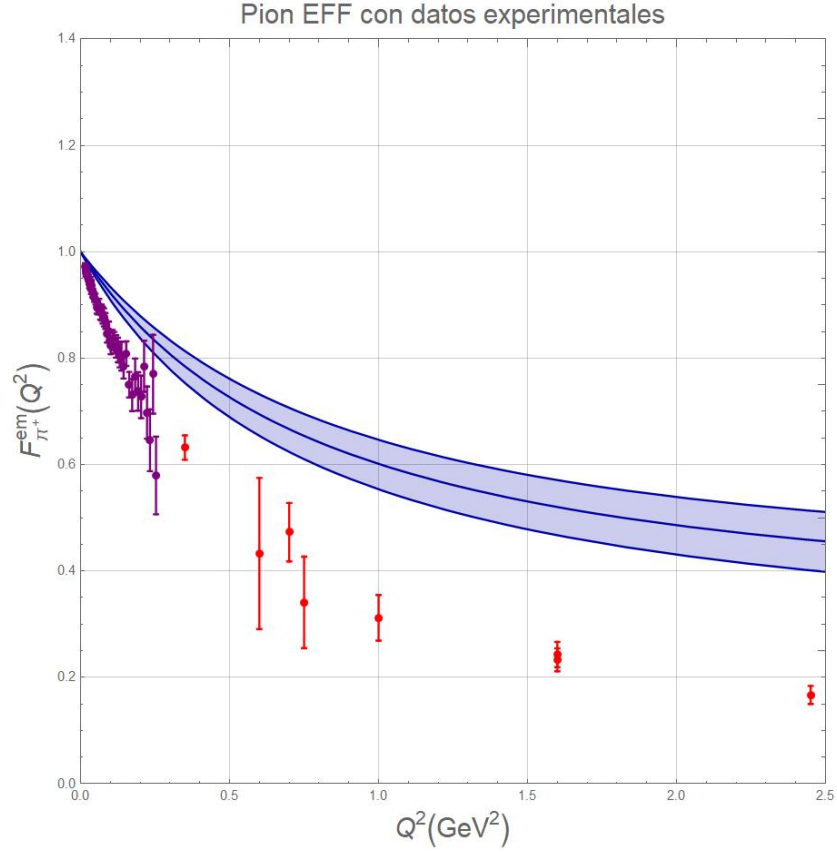


Figura 5.3. Factor de forma electromagnético del pion, las bandas azules representan el modelo de interacción de contacto, con una variación de 5 % en el radio de carga, los puntos representan los datos experimentales.

cada mesón, para el pion tenemos Fig. 5.3 y para el kaon Fig. 5.4.

Segun las figuras 5.5 y 5.6 , podemos observar que el error numérico para la contribución de HLbL de los mesones en interacción de contacto es mucho menor que la incertidumbre resultante de una variación del radio de carga, a pesar de que el error es más pequeño por dos ordenes de magnitud, esto no señala que el calculo sea del todo preciso. Si observamos los factores de forma calculados por Miramontes et al., 2022, en las figuras 5.7 y 5.8, podremos ver que estos concuerdan con los datos experimentales en diferentes rangos de energía, por esto sus resultados se asemejan a los obtenidos con el ansätze de VMD.

Según las figuras 5.3 y 5.4, los factores de forma de interacción de contacto

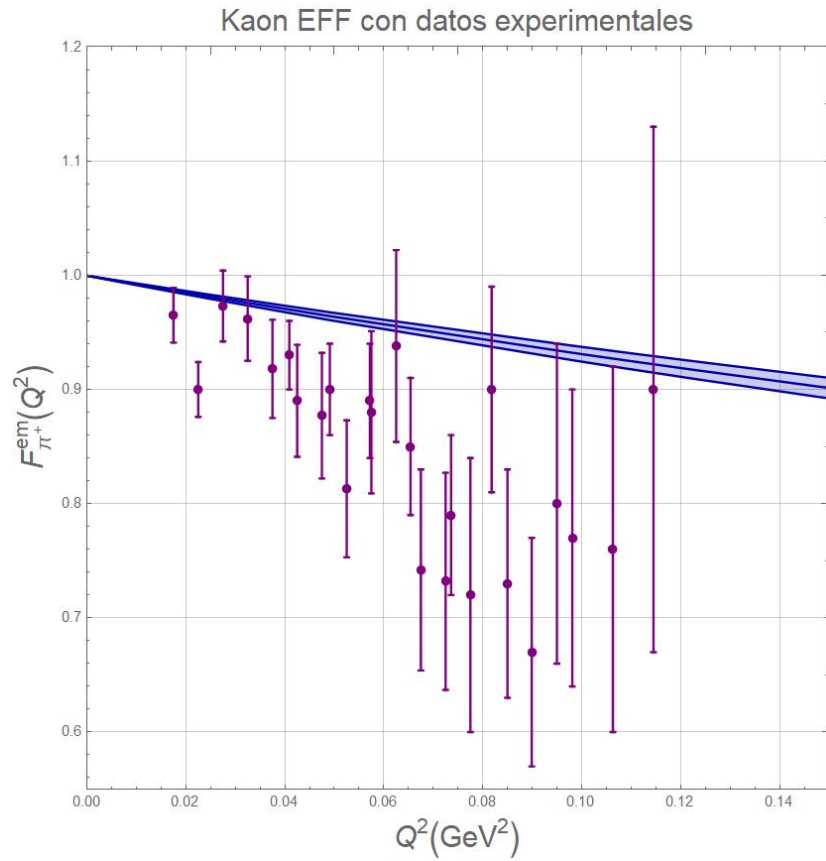


Figura 5.4. Factor de forma electromagnético del kaón, las bandas azules representan el modelo de interacción de contacto, con una variación de 5 % en el radio de carga, los puntos representan los datos experimentales.

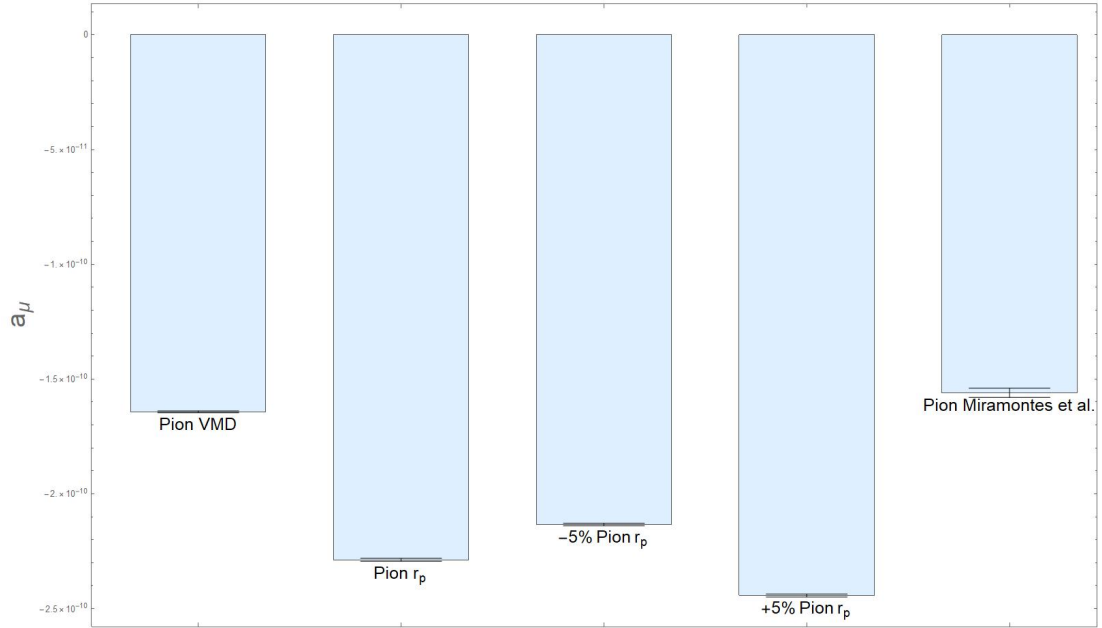


Figura 5.5. Gráfica con los diferentes valores para  $a_\mu^{\pi-box}$ , tomando en cuenta la variación del radio de carga para el factor de forma de interacción de contacto, también se incluyen las contribuciones para Vector Meson Dominance (VMD) y el calculado por Miramontes et al., 2022.

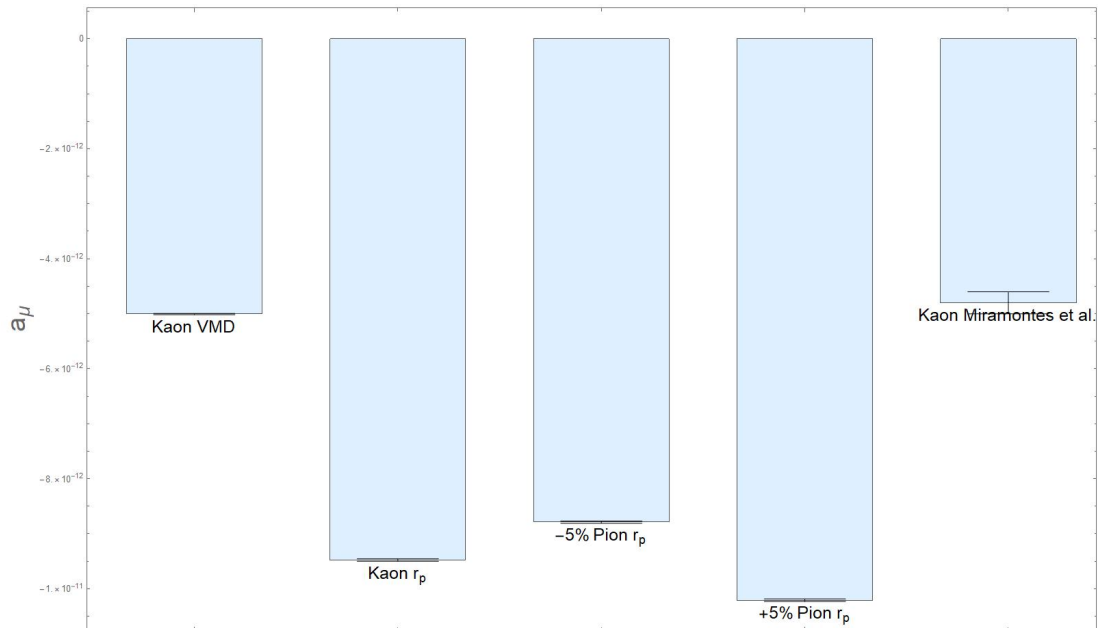


Figura 5.6. Gráfica con los diferentes valores para  $a_\mu^{K-box}$ , tomando en cuenta la variación del radio de carga para el factor de forma de interacción de contacto, también se incluyen las contribuciones para Vector Meson Dominance (VMD) y el calculado por Miramontes et al., 2022.

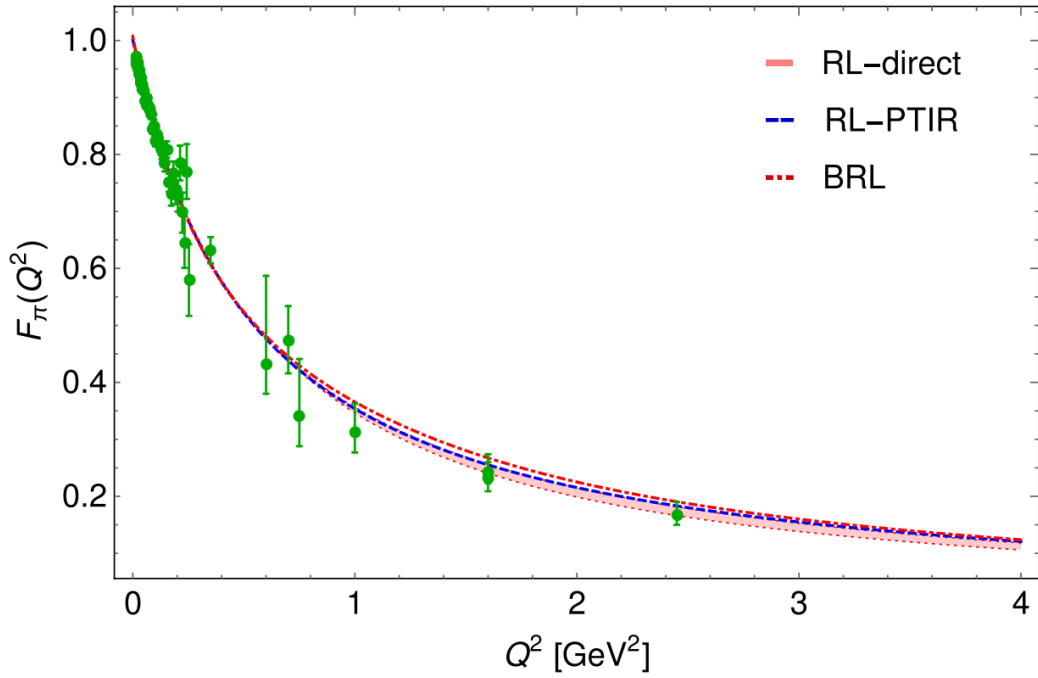


Figura 5.7. Factor de forma para el piòn calculado por Miramontes et al., 2022 comparado con los datos experimentales.

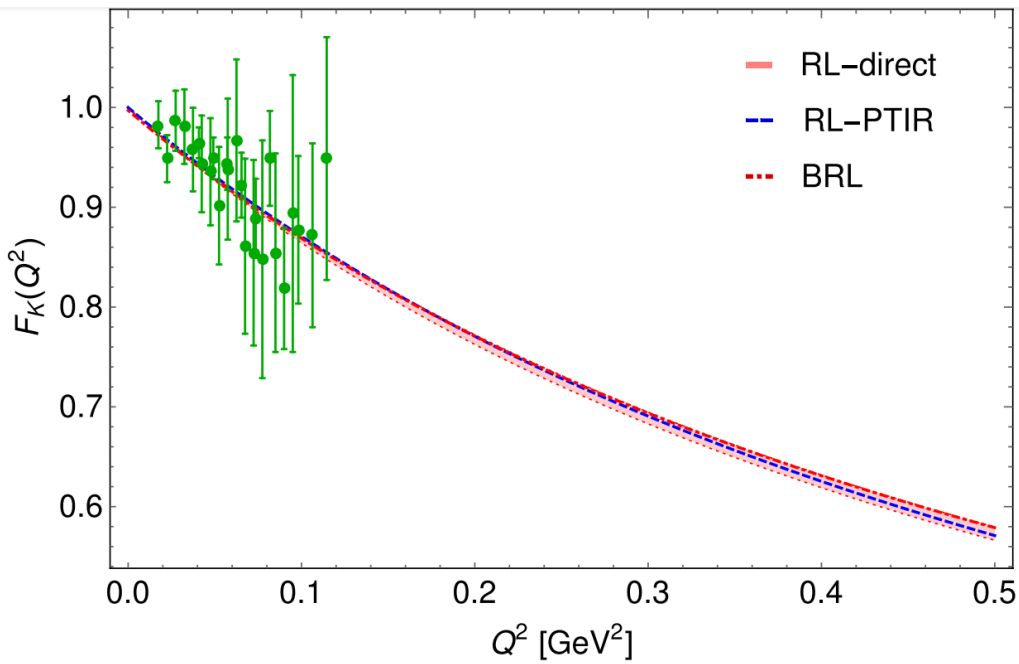


Figura 5.8. Factor de forma para el kaòn calculado por Miramontes et al., 2022, comparado con los datos experimentales.

concuerdan con los datos para bajas energías, capturando así las características no perturbativas de la física hadrónica. Cuando nos situamos a energías mas altas,

la discrepancia entre el factor de CI y el experimental comienza a crecer.

Como el calculo de la contribución HLbL requiere una integración sobre un rango amplio de energías, vemos que el resultado no se asemeja a lo que se espera de esta contribución, otra razón por lo que esto ocurre es que el factor de forma del mesón de interacción de contacto, no decae tan rápidamente como los datos experimentales, una solución a esto podría ser una variación al radio de carga como vemos en la tabla II, esta variación puede acercar el valor de la contribución a aquel esperado por el ansätze, esto solo se puede hacer siempre y cuando este permitido por la teoría.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se calculó la contribución de dispersión hadrónica de luz por luz al momento magnético anómalo del muon ( $a_\mu$ ) dentro del formalismo de la interacción de contacto. Los resultados numéricos obtenidos presentan un error pequeño, lo cual valida la consistencia del modelo de CI. Sin embargo, al compararlos con los resultados de (Miramontes et al., 2022) y el modelo de dominio de mesones vectoriales (VMD), se observa que nuestros resultados son significativamente mayores: un 39 % para el pión y un 75 % para el kaón para la banda central de los factores de forma respecto a VMD.

Como se menciona en el capítulo anterior, estas discrepancias en los resultados se deben a que el modelo de interacción de contacto no es preciso para energías intermedias y altas. A pesar de esto, CI sigue siendo una herramienta valiosa, pues deja tratar de manera analítica muchas de las expresiones necesarias para el cálculo de  $a_\mu^{HLbL}$ .

## Bibliografía

- Abachi, S., Abbott, B., Abolins, M., Acharya, B. S., Adam, I., Adams, D. L., Adams, M., Ahn, S., Aihara, H., Alitti, J., Álvarez, G., Alves, G. A., Amidi, E., Amos, N., Anderson, E. W., Aronson, S. H., Astur, R., Avery, R. E., Baden, A., ... Zylberstejn, A. (1995). Observation of the Top Quark., *74*(14), 2632-2637. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2632>
- Abe, F., Akimoto, H., Akopian, A., Albrow, M. G., Amendolia, S. R., Amidei, D., Antos, J., Anway-Wiese, C., Aota, S., Apollinari, G., Asakawa, T., Ashmanskas, W., Atac, M., Auchincloss, P., Azfar, F., Azzi-Bacchetta, P., Bacchetta, N., Badgett, W., Bagdasarov, S., ... Zucchelli, S. (1995). Observation of Top Quark Production in  $\bar{p}p$  Collisions with the Collider Detector at Fermilab. *Phys. Rev. Lett.*, *74*, 2626-2631. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2626>
- Abi, B., Albahri, T., Al-Kilani, S., Allspach, D., Alonzi, L. P., Anastasi, A., Anisenkov, A., Azfar, F., Badgley, K., Baessler, S., Bailey, I., Baranov, V. A., Barlas-Yucel, E., Barrett, T., Barzi, E., Basti, A., Bedeschi, F., Behnke, A., Berz, M., ... Yoshikawa, C. (2021). Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, *126*.
- Aguillard, D. P., Albahri, T., Allspach, D., Anisenkov, A., Badgley, K., Baessler, S., Bailey, I., Bailey, L., Baranov, V. A., Barlas-Yucel, E., Barrett, T., Barzi, E., Bedeschi, F., Berz, M., Bhattacharya, M., Binney, H. P., Bloom, P.,

- Bono, J., Bottalico, E., ... Zhang, C. (2023). Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm.
- Aguillard, D. P., Albahri, T., Allspach, D., Anisenkov, A., Badgley, K., Baeßler, S., Bailey, I., Bailey, L., Baranov, V. A., Barlas-Yucel, E., Barrett, T., Barzi, E., Bedeschi, F., Berz, M., Bhattacharya, M., Binney, H. P., Bloom, P., Bono, J., Bottalico, E., ... Zhang, C. (2024). Detailed report on the measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.20 ppm. *Phys. Rev. D*, *110*, 032009. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.110.032009>
- Anderson, C. D. (1933). The Positive Electron. *Phys. Rev.*, *43*, 491-494. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.43.491>
- Aoyama, T., Asmussen, N., Benayoun, M., Bijnens, J., Blum, T., Bruno, M., Caprini, I., Carloni Calame, C., Cè, M., Colangelo, G., Curciarello, F., Czyż, H., Danilkin, I., Davier, M., Davies, C., Della Morte, M., Eidelman, S., El-Khadra, A., Gérardin, A., ... Zhevlakov, A. (2020). The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Physics Reports*, *887*, 1-166.
- Bardeen, W. A., & Tung, W.-K. (1968). Invariant Amplitudes for Photon Processes. *Phys. Rev.*, *173*, 1423-1433.
- Bennett, G. W., Bousquet, B., Brown, H. N., Bunce, G., Carey, R. M., Cushman, P., Danby, G. T., Debevec, P. T., Deile, M., Deng, H., Dhawan, S. K., Druzhinin, V. P., Duong, L., Farley, F. J. M., Fedotovitch, G. V., Gray, F. E., Grigoriev, D., Grosse-Perdekamp, M., Grossmann, A., ... Yamamoto, A. (2004). Measurement of the Negative Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.7 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, *92*.
- Bjorken, J. D., & Drell, S. D. (1964). *Relativistic Quantum Mechanics*. Mc-Graw Hill.

Chatrchyan, S., Khachatryan, V., Sirunyan, A., Tumasyan, A., Adam, W., Aguilo, E., Bergauer, T., Dragicevic, M., Erö, J., Fabjan, C., Friedl, M., Frühwirth, R., Ghete, V., Hammer, J., Hoch, M., Hörmann, N., Hrubec, J., Jeitler, M., Kiesenhofer, W., ... Wenman, D. (2012). Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Physics Letters B*, 716(1), 30-61. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.021>

Colangelo, G., Hoferichter, M., Procura, M., & Stoffer, P. (2015). Dispersion relation for hadronic light-by-light scattering: theoretical foundations. *Journal of High Energy Physics*, 2015(9). [https://doi.org/10.1007/jhep09\(2015\)074](https://doi.org/10.1007/jhep09(2015)074)

Colangelo, G., Hoferichter, M., Procura, M., & Stoffer, P. (2017). Dispersion relation for Hadronic light-by-light scattering: two-pion contributions. *Journal of High Energy Physics*, 2017(4).

contributors, W. (2019). File:Standard Model of Elementary Particles.svg - Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Standard\\_Model\\_of\\_Elementary\\_Particles.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles.svg)

De La Peña, L. (2014). *Introducción a la mecánica cuántica* (Primera edición electrónica). Fondo de Cultura Economica.

Dirac, P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778), 610-624. <https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>

Eichmann, G., Fischer, C. S., & Heupel, W. (2015). Four-point functions and the permutation group  $mml:math xmlns:mml="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" d$ . *Physical Review D*, 92(5). <https://doi.org/10.1103/physrevd.92.056006>

Einstein, A. (1905). Does the inertia of a body depend upon its energy content? *Annalen der Physik*, 18, 639-641.

- Faddeev, L., & Popov, V. (1967). Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Physics Letters B*, 25(1), 29-30. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0370-2693\(67\)90067-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(67)90067-6)
- Gell-Mann, M., & Low, F. E. (1954). Quantum Electrodynamics at Small Distances. *Phys. Rev.*, 95, 1300-1312. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.95.1300>
- Gerlach, W., & Stern, O. (1922). The experimental proof of directional quantization in a magnetic field. *Zeitschrift für Physik*, 9.
- Greiner, W. (1998). *Classical Electrodynamics*. Springer.
- Greiner, W., Schramm, S., & Stein, E. (2006). *Quantum Chromodynamics*. Springer.
- Griffiths, D. J. (1987, 15 de marzo). *Introduction to Elementary particles*. Wiley-VCH.
- Griffiths, D. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. Addison-Wesley Professional.
- Gutiérrez-Guerrero, L. X. (2012). *Mesones PION, RHO y los Diquarks: factores de forma* (Tesis doctoral). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- H., Y. (1935). On the Interaction of Elementary Particles. I. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 17, 48-57. [https://doi.org/10.11429/ppmsj1919.17.0\\_48](https://doi.org/10.11429/ppmsj1919.17.0_48)
- Halzen, F., & Martin, A. D. (1984). *"Quarks and leptons: Introductory course in modern particle physics"*. "John Wiley; Sons (WIE)".
- Hernández-Pinto, R. J., Gutiérrez-Guerrero, L. X., Bashir, A., Bedolla, M. A., & Higuera-Angulo, I. M. (2023). Electromagnetic form factors and charge radii of pseudoscalar and scalar mesons: A comprehensive contact interaction analysis. *Physical review*, 107(5). <https://doi.org/10.1103/physrevd.107.054002>

- Higuera Angulo, I. (2018). *Estructura Interna de Mesones Pseudoescalares*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- Jegerlehner, F. (2008). *The anomalous magnetic moment of the Muon*. Springer Science Business Media.
- Lancaster, T., & Blundell, S. J. (2014, 17 de abril). *Quantum field theory for the gifted amateur*. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199699322.001.0001>
- Lattes, C. M. G., Occhialini, G. P. S., & Powell, C. F. (1947). Observations on the Tracks of Slow Mesons in Photographic Emulsions. 1. *Nature*, *160*, 453-456. <https://doi.org/10.1038/160453a0>
- Maxwell, J. (1865). A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society*.
- Miramontes, Á. S., Bashir, A., Raya, K., & Roig, P. (2022). Pion and Kaon box contribution to  $\langle \text{mml:math xmlns:mml="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="inline"} \langle \text{mml:mrow} \langle \text{mml:msubsup} \langle \text{mml:mrow} \langle \text{mml:mi} \rangle \text{a} \langle \text{mml:mi} \rangle \langle \text{mml:sup} \rangle \langle \text{mml:mrow} \rangle \langle \text{mml:math} \rangle \text{.} \textit{Physical review}, *105*(7).$
- Peskin, M. E. (2019, 29 de agosto). *Concepts of Elementary particle Physics*. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198812180.001.0001>
- Peskin, M. E., & Schroeder, D. V. (2018). *An Introduction To Quantum Field Theory*. <https://doi.org/10.1201/9780429503559>
- Planck, M. (1914). The theory of heat radiation.
- Roberts, C. D. (2012). Strong QCD and Dyson-Schwinger Equations.
- Schrödinger, E. (1926). Quantization as an Eigenvalue Problem.
- Schwinger, J. (1948). On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron. *Phys. Rev.*, *73*, 416-417. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.416>

- Tarrach, R. (1975). Invariant amplitudes for virtual compton scattering off polarized nucleons free from kinematical singularities, zeros and constraints. *II Nuovo Cimento A (1965-1970)*, 28(4), 409-422.
- Thomson, M. (2013, 5 de septiembre). *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press.
- Uhlenbeck, G., & Goudsmit, S. (1925). Replacement of the hypothesis of nonmechanical compulsion by a requirement relating to the internal behavior of each individual electron. *Naturwiss*, 13.
- Valdés Martínez, O. (2021). *Correcciones en teoría de perturbación al momento magnético de fermiones cargados en diferentes configuraciones cinemáticas*.
- Wolfgang, P. (1925). About the connection between the termination of the electron groups in the atom and the complex structure of the spectra. *Zeitschrift für Physik*, 31.
- Wolfgang, P. (1927). On the quantum mechanics of the magnetic electron. *Zeitschrift für Physik*, 43.
- Zhang, J.-L., Cui, Z.-F., Ping, J.-L., & Roberts, C. D. (2021). Contact interaction analysis of pion GTMDs. *The European Physical Journal C*, 81(1). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-08791-1>
- Zyla, P. A., Barnett, R. M., Beringer, J., Dahl, O., Dwyer, D. A., Groom, D. E., Lin, C. .-, Lugovsky, K. S., Pianori, E., Robinson, D. J., Wohl, C. G., Yao, W. .-, Agashe, K., Aielli, G., Allanach, B. C., Amsler, C., Antonelli, M., Aschenauer, E. C., Asner, D. M., ... Zheng, W. (2020). Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(8), 083C01. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>

# Appendices

## A. Estructuras de Lorentz $T_i$

El conjunto completo de las funciones del kernel esta dado por las siguientes ecuaciones:

$$T_1 = \frac{Q_1^2 \tau (\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 5) + Q_2^2 \tau (\sigma_2^E - 1)(\sigma_2^E + 5) + 4Q_1 Q_2 (\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2) - 8\tau m_\mu^2}{2Q_1 Q_2 Q_3^2 m_\mu^2} \quad (\text{A.1})$$

$$T_2 = \frac{Q_1 (\sigma_1^E - 1)(Q_1 \tau (\sigma_1^E + 1) + 4Q_2 (\tau^2 - 1)) - 4\tau m_\mu^2}{Q_1 Q_2 Q_3^2 m_\mu^2} + X \frac{8(\tau^2 - 1)(2m_\mu^2 - Q_2^2)}{Q_3^2 m_\mu^2} \quad (\text{A.2})$$

$$T_3 = \frac{1}{Q_3^2} \left( -\frac{2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2)}{m_\mu^2} - \frac{Q_1 \tau (\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 7)}{2Q_2 m_\mu^2} + \frac{8\tau}{Q_1 Q_2} \right. \\ \left. - \frac{Q_2 \tau (\sigma_2^E - 1)(\sigma_2^E + 7)}{2Q_1 m_\mu^2} + \frac{Q_1^2 (1 - \sigma_1^E)}{Q_2^2 m_\mu^2} + \frac{Q_2^2 (1 - \sigma_2^E)}{Q_1^2 m_\mu^2} + \frac{2}{Q_1^2} + \frac{2}{Q_2^2} \right) \\ + X \left( \frac{4}{m_\mu^2} - \frac{8\tau}{Q_1 Q_2} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
T_4 = & \frac{1}{Q_3^2} \left( \frac{4(\tau^2(\sigma_1^E - 1) + \sigma_2^E - 1)}{m_\mu^2} - \frac{Q_1\tau(\sigma_1^E - 5)(\sigma_1^E - 1)}{Q_2m_\mu^2} + \frac{4\tau}{Q_1Q_2} \right. \\
& - \frac{Q_2\tau(\sigma_2^E - 3)(\sigma_2^E - 1)}{Q_1m_\mu^2} + \frac{2Q_2^2(\sigma_2^E - 1)}{Q_1^2m_\mu^2} - \frac{4}{Q_1^2} \\
& \left. + X \left( -\frac{8Q_2^2\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{16Q_2Q_1\tau}{m_\mu^2} - \frac{8Q_1^2}{m_\mu^2} + \frac{16Q_2\tau}{Q_1} + 16 \right) \right) \quad (A.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_5 = & \frac{1}{Q_3^2} \left( Q_1^2 \left( \frac{\tau^2(\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 3) + 4(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2)}{2m_\mu^2} - \frac{4}{Q_2^2} \right) - \frac{Q_2^2\tau^2(\sigma_2^E - 5)(\sigma_2^E - 1)}{2m_\mu^2} \right. \\
& + \frac{Q_1^3\tau(\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 5)}{Q_2m_\mu^2} + Q_1 \left( \frac{Q_2\tau(\sigma_1^E + 5\sigma_2^2 - 6)}{m_\mu^2} - \frac{12\tau}{Q_2} \right) + \frac{2Q_1^4(\sigma_1^E - 1)}{Q_2^2m_\mu^2} \\
& - 4\tau^2 + X \left( Q_1(8Q_2(\tau^3 + \tau) - \frac{2Q_2^3\tau}{m_\mu^2}) + Q_1^2(32\tau^2 - \frac{4Q_2^2(\tau^2 + 1)}{m_\mu^2}) \right. \\
& \left. + Q_1^3 \left( \frac{16\tau}{Q_2} - \frac{10Q_2\tau}{m_\mu^2} - \frac{4Q_1^4}{m_\mu^2} \right) \right) \quad (A.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_6 = & \frac{1}{Q_3^2} \left( \frac{Q_1^2(\tau^2((\sigma_1^E - 22)\sigma_1^E - 8\sigma_2^E + 29) + 2(-5\sigma_1^E + \sigma_2^E + 4))}{2m_\mu^2} \right. \\
& + Q_1 \left( \frac{Q_2\tau(2\tau^2((\sigma_2^E - 3)^2 - 4\sigma_1^E) - 26\sigma_1^E + \sigma_2^E(\sigma_2^E - 12) + 37)}{2m_\mu^2} - \frac{4\tau}{Q_2} \right) \\
& + \frac{Q_2^2(\tau^2(-8\sigma_1^E + \sigma_2^E(5\sigma_2^E - 26) + 29) - 4(\sigma_1^E + 2\sigma_2^E - 3))}{2m_\mu^2} + \frac{Q_1^3\tau(\sigma_1^E - 9)(\sigma_1^E - 1)}{2Q_2m_\mu^2} \\
& + \frac{Q_2^3\tau(\sigma_2^E - 9)(\sigma_2^E - 1)}{Q_1m_\mu^2} + \frac{8Q_2\tau}{Q_1} + \frac{2Q_2^4(1 - \sigma_2^E)}{Q_1^2m_\mu^2} + \frac{4Q_2^2}{Q_1^2} \\
& + X \left( \frac{Q_2Q_1^3(8\tau^3 + 22\tau)}{m_\mu^2} + \frac{Q_1^4(8\tau^2 - 2)}{m_\mu^2} + Q_1^2 \left( \frac{Q_2^2(36\tau^2 + 18)}{m_\mu^2} - 8(\tau^2 + 1) \right) \right. \\
& + \frac{Q_2^4(8\tau^2 + 4)}{m_\mu} + Q_1 \left( \frac{Q_2^3(8\tau^3 + 34\tau)}{m_\mu^2} - 8Q_2\tau(\tau^2 + 5) \right) \\
& \left. - 16Q_2^2(2\tau^2 + 1) - \frac{16Q_2^3\tau}{Q_1} \right) \quad (A.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_7 = & \frac{1}{Q_3^2} \left( \frac{Q_1^2(2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2) - \tau^2\sigma_1^E + 10)\sigma_1^E + 8\sigma_2^E - 19)}{2m_\mu^2} \right. \\
& + Q_1 \left( \frac{Q_2\tau(2\tau^2(\sigma_2^E - 5)(\sigma_2^E - 1) - 2\sigma_1^E + \sigma_2^E(\sigma_2^E + 4) - 3)}{2m_\mu^2} - \frac{4\tau}{Q_2} \right) \\
& + \frac{Q_2^2\tau^2(\sigma_2^E - 5)(\sigma_2^E - 1)}{2m_\mu^2} + \frac{Q_1^3\tau(\sigma_1^E - 9)(\sigma_1^E - 1)}{2Q_2m_\mu^2} + 4\tau^2 \\
& + X \left( \frac{Q_2Q_1^3(8\tau^3 + 6\tau)}{m_\mu^2} + Q_1 \left( \frac{2Q_2^3\tau}{m_\mu^2} - 9Q_2(\tau^3 + \tau) \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{Q_1^4(8\tau^2 - 2)}{m_\mu^2} + Q_1^2 \left( \frac{2Q_2^2(6\tau^2 - 1)}{m_\mu^2} - 8(\tau^2 + 1) \right) \right) \right) \quad (A.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_8 = & \frac{1}{Q_3^2} \left( Q_1^2 \left( \frac{4}{Q_2^2} - \frac{2(2\tau^2 + 1)(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2)}{m_\mu^2} \right) + q_1 \left( \frac{4\tau}{Q_2} - \frac{4Q_2\tau(\tau^2 + 1)(\sigma_2^E - 1)}{m_\mu^2} \right) \right. \\
& - \frac{6Q_1^3\tau(\sigma_1^E - 1)}{Q_2m_\mu^2} + \frac{Q_1^4(2 - 2\sigma_1^E)}{Q_2^2m_\mu^2} \\
& \left. + X \left( \frac{Q_1^4(8\tau^2 + 4)}{m_\mu^2} + Q_1^3 \left( \frac{8Q_2\tau(\tau^2 + 2)}{m_\mu^2} - \frac{16\tau}{Q_2} \right) + Q_1^2 \left( \frac{Q_2^2(8\tau^2 + 4)}{m_\mu^2} - 16\tau^2 \right) \right) \right) \quad (A.8)
\end{aligned}$$

$$T_9 = Q_3^2 \left( \frac{\sigma_1^E - 1}{Q_2^2m_\mu^2} + \frac{\sigma_2^E - 1}{Q_1^2m_\mu^2} - \frac{2}{Q_1^2Q_2^2} \right) + X \left( -\frac{2Q_3^2}{m_\mu^2} + \frac{8Q_2\tau}{Q_1} + \frac{8Q_1\tau}{Q_2} + 8(\tau^2 + 1) \right) \quad (A.9)$$

$$\begin{aligned}
T_{10} = & \frac{1}{2Q_3^2} \left( -\frac{Q_1^2(\tau^2(\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 3) + 2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2))}{m_\mu^2} - \frac{Q_2^3\tau(\sigma_2^E - 1)(\sigma_2^E + 3)}{Q_1m_\mu^2} \right. \\
& - \frac{Q_2^2(\tau^2(\sigma_2^E - 1)(\sigma_2^E + 3) + 2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2))}{m_\mu^2} - \frac{Q_1^3\tau(\sigma_1^E - 1)(\sigma_1^E + 3)}{Q_2m_\mu^2} \\
& + Q_1 \left( \frac{8\tau}{Q_2} - \frac{Q_2\tau((\sigma_1^E + 4)\sigma_1^E + \sigma_2^E(\sigma_2^E + 4) - 10)}{m_\mu^2} \right) + \frac{8Q_2\tau}{Q_1} \\
& + 8\tau^2 + X(-16Q_1^2(\tau^2 - 1) - 16Q_2Q_1\tau(\tau^2 - 1) - 16Q_2^2(\tau^2 - 1)) \\
& \left. + \frac{X}{2} \left( \frac{4Q_2Q_1\tau}{m_\mu^2} + \frac{4Q_1^2}{m_\mu^2} + \frac{4Q_2^2}{m_\mu^2} \right) \right) \quad (A.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{11} = & \frac{1}{2m_\mu^2 Q_1 Q_2^2 Q_3^2} \left( Q_2^5 \tau (-6\sigma_2^E + (\sigma_2^E)^2 + 5) + 8Q_1^5 (-\sigma_1^E + 2Q_2^2 (\tau^2 + 1)X + 1) \right. \\
& + 4Q_2 Q_1^4 \tau (-7\sigma_1^E + 2Q_2^2 (2\tau^2 + 9)X + 7) \\
& + 4Q_2^3 Q_1^3 (2\tau^2 (-3\sigma_1^E - \sigma_2^E + 8Q_2^2 X + 4) - 2(\sigma_1^E + \sigma_2^E - 2) + 5Q_2^2 X) \\
& + Q_2^3 Q_1^2 \tau (8\tau^2 (-\sigma_1^E - \sigma_2^E + 2Q_2^2 X + 2) - 6\sigma_1^E - (\sigma_1^E)^2 - 28\sigma_2^E + 16Q_2^2 X + 35) \\
& + 2Q_2^4 Q_1 (\tau^2 (-10\sigma_2^E + (\sigma_2^E)^2 + 9) - \sigma_1^E - 3\sigma_2^E + 2Q_2^2 X + 4) \\
& - 8m_\mu^2 (-Q_2^3 \tau + 2Q_1^3 (2Q_2^2 (4\tau^2 X + X) - 1) + Q_2 Q_1^2 \tau (4Q_2^2 (\tau^2 + 3)X - 5) \\
& \left. + Q_2^2 Q_1 (2\tau^2 (Q_2^2 X - 1) + 2Q_2^2 X - 1) + 8Q_2 Q_1^4 \tau X) \right)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
T_{12} = & \frac{1}{4m_\mu^2 Q_1 Q_2 Q_3^2} \left( Q_2^2 \tau (-Q_3^2 (\sigma_2^E)^2 + Q_2^2 (6\sigma_2^E - 5) - 8m_\mu^2) \right. \\
& - 2Q_2 Q_1^3 (\tau^2 (2\sigma_1^E + 8Xm_\mu^2 - 1) - 3\sigma_1^E + \sigma_2^E + 8Xm_\mu^2 + 2) \\
& + Q_1^2 \tau (-2Q_2^2 (4\tau^2 - 5) (\sigma_1^E - \sigma_2^E) + Q_3^2 (\sigma_1^E)^2 + 8m_\mu^2 + 8Q_2^4 (2\tau^2 - 3)X) \\
& + 2Q_2^3 Q_1 (\tau^2 (2\sigma_2^E + 8Xm_\mu^2 - 1) + \sigma_1^E - 3\sigma_2^E + 8Xm_\mu^2 - 2Q_2^2 X + 2) \\
& \left. + Q_1^4 \tau (-6\sigma_1^E - 8Q_2^2 (2\tau^2 - 3)X + 5) + 4Q_2 Q_1^5 X \right)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Donde

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{Q_1 Q_2 x} \arctan\left(\frac{zx}{1-zr}\right), \quad x = \sqrt{1-\tau^2}, \\
z &= \frac{Q_1 Q_2}{4m_\mu^2} (1-\sigma_1^E)(1-\sigma_2^E), \quad \sigma_i^E = \sqrt{1 + \frac{4m_\mu^2}{Q_i^2}}, \\
Q_3^2 &= Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + Q_2^2.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

## B. Representación de parámetros de Feynman para la caja de mesones

En el límite de interés, la parametrización de Feynman para la caja de mesones, se ve de la siguiente manera (Colangelo et al., 2017):

$$\hat{\Pi}_i^{\mathbf{m}-box}(q_1^2, q_2^2, q_3^2) = F_{\mathbf{m}}^v(q_1^2)F_{\mathbf{m}}^v(q_2^2)F_{\mathbf{m}}^v(q_3^2)\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy I_i(x, y) \quad (\text{B.1})$$

Donde

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= \frac{8xy(1-2x)(1-2y)}{\Delta_{123}\Delta_{23}}, \\ I_4(x, y) &= \frac{4(1-x-y)(1-2x-2y)\Delta_{21}}{\Delta_{321}^2} \left( \frac{(1-2x-2y)^2}{\Delta_{321}} - \frac{1-x(3-2x)-y(3-2y)}{\Delta_{21}} \right), \\ &+ \frac{16xy(1-2x)(1-2y)}{\Delta_{321}\Delta_{21}}, \\ I_7(x, y) &= -\frac{8xy(1-x-y)(1-2x)^2(1-2y)}{\Delta_{123}^2}, \\ I_{17}(x, y) &= \frac{16xy^2(1-2x)(1-2y)}{\Delta_{123}\Delta_{23}} \left( \frac{1-x-y}{\Delta_{123}} + \frac{1-y}{\Delta_{23}} \right), \\ I_{39}(x, y) &= \frac{8xy(1-x-y)(1-2x)(1-2y)(1-2x-2y)}{\Delta_{123}^3}, \\ I_{54}(x, y) &= -\frac{8xy(1-x-y)(1-2x)(1-2y(x-y))}{\Delta_{321}\Delta_{21}} \left( \frac{1}{\Delta_{321}} + \frac{1}{\Delta_{21}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Además

$$\begin{aligned}\Delta_{ijk} &= M_{\mathbf{m}}^2 - xyq_i^2 - x(1-x-y)q_j^2 - y(1-x-y)q_k^2, \\ \Delta_{ij} &= M_{\mathbf{m}}^2 - x(1-x)q_1^2 - y(1-y)q_j^2.\end{aligned}\tag{B.3}$$

El resto de las funciones se puede obtener con las relaciones de intercambio.

## C. Cálculo del término de auto-interacción del quark

Comenzando con la forma explícita del término de auto-interacción del quark:

$$\begin{aligned}\Sigma(p) &= \frac{4}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (4\pi\hat{a}_{IR}\delta_{\mu\nu}) \gamma_\mu \left( \frac{1}{i\gamma \cdot q + B(q^2)} \right) \gamma_\nu \\ \Sigma(p) &= \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \left( \frac{1}{i\gamma \cdot q + B(q^2)} \right) \gamma_\mu\end{aligned}\tag{C.1}$$

El propagador puede ser manipulado para tener la forma:

$$S(q) = \frac{1}{i\gamma \cdot q + B(q^2)} = \frac{1}{i\gamma \cdot q + B(q^2)} \frac{-i\gamma \cdot q + B(q^2)}{-i\gamma \cdot q + B(q^2)}$$

Utilizando  $(-i\gamma \cdot q)^2 = -q^2 I$ , donde  $I$  es la matriz identidad,

$$S(q) = \frac{-i\gamma \cdot q + B(q^2)}{q^2 + B^2(q^2)}\tag{C.2}$$

Regresando a  $\Sigma(p)$

$$\Sigma(p) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \left( \frac{-i\gamma \cdot q + B}{q^2 + B^2} \right) \gamma_\mu \quad (\text{C.3})$$

observamos que el primer término se elimina, pues es la integral de una función impar sobre un intervalo simétrico,  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu \gamma \cdot q \gamma_\mu}{q^2 + B^2} = 0$ , por lo que tenemos lo siguiente:

$$\Sigma(p) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu B \gamma_\mu}{q^2 + B^2} \quad (\text{C.4})$$

Esta ecuación diverge, por lo que utilizaremos regularización dimensional, que nos modifica la integral:

$$\Sigma(p) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\mu B \gamma_\mu}{q^2 + B^2} \quad (\text{C.5})$$

Si  $B(q^2) = M$ , no depende del momento y utilizamos  $\gamma_\mu \gamma_\mu = dI_{d \times d}$ , para un sistema de dimensión  $d$

$$\Sigma(p) = \frac{d16\pi\hat{a}_{IR}M}{3} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + B^2} \quad (\text{C.6})$$

Como ahora tenemos una función par dentro de la integral, podemos aplicar la siguiente propiedad (Jegerlehner, 2008)

$$\int d^d k f(k) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dr r^{d-1} f(r) \quad (\text{C.7})$$

Utilizando esta ecuación y el cambio de variable  $s = r^2$ , tendremos:

$$\Sigma(p) = \frac{16d\pi^{d/2+1}\hat{a}_{IR}M}{3\Gamma(d/2)(2\pi)^d} \int_0^\infty ds(\sqrt{s})^{d-2} \frac{1}{s+M^2} \quad (\text{C.8})$$

Si regresamos a 4 dimensiones ( $d = 4$ ), la ecuación tendrá la forma:

$$\Sigma(p) = \frac{(4\pi)^3\hat{a}_{IR}M}{3(2\pi)^4} \int_0^\infty ds s \frac{1}{s+M^2} \quad (\text{C.9})$$

De igual manera que el ansatz de la ecuación (C.2), la ecuación de gap (4.22), puede ser manipulada para llegar a la siguiente representación:

$$S(p) = \frac{-i\gamma \cdot p + (m_f + \Sigma(p))}{p^2 + (m_f + \Sigma(p))^2}$$

Recordando la ecuación (C.2), tendremos que:

$$M = m_f + \frac{4\hat{a}_{IR}M}{3\pi} \int_0^\infty ds s \frac{1}{s+M^2} \quad (\text{C.10})$$

Utilizamos la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{s+M^2} = \int_0^\infty dt e^{-t(s+M^2)}$$

Si buscamos que la ecuación este regularizada, acortaremos el rango de integración

$$\frac{1}{s+M^2} = \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} dt e^{-t(s+M^2)} \quad (\text{C.11})$$

De (Hernández-Pinto et al., 2023) se sabe que un valor finito para el regulador  $\tau_{ir}$  previene la creación de quarks, lo cual es deseable pues el confinamiento de los quarks es una de las propiedades mas importantes de la teoría. El regulador  $\tau_{uv}$  no puede ser eliminado ya que juega un papel en muchos procesos dinámicos, lo que nos lleva a la siguiente integral:

$$\int_0^\infty ds s \frac{1}{s + M^2} = \int_0^\infty ds s \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} dt e^{-t(s+M^2)} \quad (\text{C.12})$$

Integrando sobre la variable  $s$ , obtendremos la siguiente solución en términos de la función gamma incompleta:

$$\int_0^\infty ds s \frac{1}{s + M^2} = \mathcal{C}(M^2) = M^2 [\Gamma(-1, \tau_{uv}^2 M^2) - \Gamma(-1, \tau_{ir}^2 M^2)] \quad (\text{C.13})$$

Finalmente

$$M = m_f + M \frac{4\hat{a}_{IR}}{3\pi} \mathcal{C}(M^2)$$

(C.14)

## D. Cálculo del vértice de interacción quark-fotón

Para obtener la forma explícita de las funciones  $P^L$  y  $P^T$ , empezamos aplicando el operador longitudinal a la ecuación (4.31),

$$L_{\mu\nu}\Gamma_\nu^\gamma(Q, M) = \gamma_\mu^L P^L(Q^2) = L_{\mu\nu}(\gamma_\nu - \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q)\Gamma_\nu^\gamma(Q)S(q)\gamma_\alpha) \quad (\text{D.1})$$

Los componentes de  $Q$  y la identidad conmutan con las matrices  $\gamma$ , por lo que obtendremos:

$$\gamma_\mu^L P^L(Q^2) = \gamma_\nu^L - \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) [\frac{Q_\mu Q_\nu}{Q^2} \Gamma_\nu^\gamma(Q)] S(q)\gamma_\alpha$$

Aplicamos la identidad de Ward-Takahashi (4.29) dentro de la integral.

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu^L(P^L(Q^2) - 1) &= -\frac{Q_\mu}{Q^2} \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) [Q_\nu \Gamma_\nu^\gamma(Q)] S(q) \gamma_\alpha =, \\
&= -\frac{Q_\mu}{Q^2} \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) [S^{-1}(q+Q) - S^{-1}(q)] S(q) \gamma_\alpha, \\
&= -\frac{Q_\mu}{Q^2} \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha [S(q) - S(q+Q)] \gamma_\alpha
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Cuando integramos sin utilizar un truncamiento en el ultravioleta, el lado derecho es cero, por lo que obtenemos:

$$P^L(Q^2) = 1 \tag{D.3}$$

Para obtener  $P^T$  aplicamos el proyectador transversal a la función del vértice.

$$T_{\mu\nu} \Gamma_\nu^\gamma(Q, M) = \gamma_\mu^T P^T(Q^2) = T_{\mu\nu} (\gamma_\nu - \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) \Gamma_\nu^\gamma(Q) S(q) \gamma_\alpha) \tag{D.4}$$

Como los componentes de  $T$  conmutan con las matrices  $\gamma$ , tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} \Gamma_\nu^\gamma(Q, M) &= \gamma_\mu^T P^T(Q^2) = \gamma_\mu^T - \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) [\gamma_\mu^T P^T(Q^2)] S(q) \gamma_\alpha, \\
&= \gamma_\mu^T P^T(Q^2) = \gamma_\mu^T - \frac{16\pi\hat{a}_{IR} P^T(Q^2)}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) [\gamma_\mu^T] S(q) \gamma_\alpha, \\
&= \gamma_\mu^T - \frac{16\pi\hat{a}_{IR} P^T(Q^2)}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) [\gamma_\mu - \frac{Q_\mu Q_\alpha}{Q^2} \gamma_\alpha] S(q) \gamma_\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_\mu^T P^T(Q^2) &= \gamma_\mu^T - \frac{16\pi\hat{a}_{IR}P^T(Q^2)}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) \gamma_\mu S(q) \gamma_\alpha \\ &+ \frac{16\pi\hat{a}_{IR}P^T(Q^2)Q_\mu}{3Q^2} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) [Q_\alpha \gamma_\alpha] S(q) \gamma_\alpha\end{aligned}$$

La segunda integral es similar a la que apareció en el caso del componente longitudinal, pero con el vértice electromagnético dado por  $\gamma_\alpha$ , por lo que se anula automáticamente. Nuestra ecuación se reduce de la manera:

$$\gamma_\mu^T P^T(Q^2) = \gamma_\mu^T - P^T(Q^2) \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) \gamma_\mu S(q) \gamma_\alpha \quad (D.5)$$

Multiplicamos toda la ecuación por  $1/P^T$ .

$$\gamma_\mu^T \left(1 - \frac{1}{P^T(Q^2)}\right) = -\frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) \gamma_\mu S(q) \gamma_\alpha \quad (D.6)$$

Sabemos que  $\gamma_\mu^T = \gamma_\mu - \frac{Q \cdot \gamma}{Q^2} Q_\mu$ , si multiplicamos la ecuación por  $\gamma_\mu$  por la derecha.

$$\left(\gamma_\mu - \frac{Q \cdot \gamma}{Q^2} Q_\mu\right) \gamma_\mu \left(1 - \frac{1}{P^T(Q^2)}\right) = -\frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{3} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) \gamma_\mu S(q) \gamma_\alpha \gamma_\mu \quad (D.7)$$

Usamos las siguientes propiedades de las matrices  $\gamma$ ,  $\gamma_\mu \gamma_\mu = 4I$  y  $\not{a} \not{a} = a^2 I$ , donde  $I$  es la identidad de las matrices de 4x4, despejamos para  $1/P^T$  y tendremos:

$$\frac{1}{P^T(Q^2)} = 1 + \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) \gamma_\mu S(q) \gamma_\alpha \gamma_\mu \quad (D.8)$$

Definimos

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha S(q+Q) \gamma_\mu S(q) \gamma_\alpha \gamma_\mu \quad (\text{D.9})$$

De esta manera, el factor de forma transversal del vértice de interacción quark-fotón es (Hernández-Pinto et al., 2023):

$$P^T(Q^2) = \frac{1}{1 + K_\gamma(Q^2)} \quad (\text{D.10})$$

Explícitamente  $K_\gamma$  tiene la forma:

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \frac{-i\gamma \cdot (q+Q) + M}{(q+Q)^2 + M^2} \gamma_\mu \frac{-i\gamma \cdot q + M}{q^2 + M^2} \gamma_\alpha \gamma_\mu \quad (\text{D.11})$$

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\alpha (-i\gamma \cdot (q+Q) + M) \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q + M) \gamma_\alpha \gamma_\mu}{((q+Q)^2 + M^2)(q^2 + M^2)}$$

Reescribimos  $q_+ = q + Q$ , entonces

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\alpha (-i\gamma \cdot q_+ + M) \gamma_\mu (-i\gamma \cdot q + M) \gamma_\alpha \gamma_\mu}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}$$

Desarrollando

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{-\gamma_\alpha \not{q}_+ \gamma_\mu \not{q} \gamma_\alpha \gamma_\mu - iM[\gamma_\alpha \not{q}_+ \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\mu + \gamma_\alpha \gamma_\mu \not{q} \gamma_\alpha \gamma_\mu] - 8M^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}$$

Utilizamos las siguientes propiedades de las matrices gamma en el espacio euclidiano  $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu = -2\gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\nu$  además de  $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\mu = 4\delta_{\nu\rho} I_4$ , lo que nos lleva a lo siguiente:

$$K_\gamma(Q^2) = 16\pi\hat{a}_{IR} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{2\not{q} \gamma_\mu \not{q}_+ \gamma_\mu - iM[4\not{q}_+ + 4\not{q}] - 8M^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}$$

Sabemos que  $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = -2\gamma_\nu$

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{-4(\not{q}\not{q} + \not{q}\not{Q}) - 4iM[\not{Q} + 2\not{q}] - 8M^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}$$

Tenemos  $\not{q}\not{q} = a^2$ , además de la siguiente identidad en el espacio euclidiano (Jegerlehner, 2008):

$$\int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{q_\mu}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} = -\frac{1}{2} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{Q_\mu}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} \quad (\text{D.12})$$

Utilizando esto, la integral  $K_\gamma$ ,

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{16\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{-4(\not{q}\not{q} - \frac{1}{2}\not{Q}\not{Q}) - 4iM[\not{Q} - \not{Q}] - 8M^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)}$$

Desarrollando,

$$K_\gamma(Q^2) = -\frac{16(8)\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}(q^2 - \frac{1}{2}Q^2) + M^2}{(q_+^2 + M^2)(q^2 + M^2)} \quad (\text{D.13})$$

Implementando la siguiente parametrización

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(\alpha A + (1-\alpha)B)^2} \quad (\text{D.14})$$

Además del cambio de variable  $q = q + (1-\alpha)Q$  tendremos:

$$K_\gamma(Q^2) = -\frac{16(8)\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int_0^1 d\alpha \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}(q^2 - 2(1-\alpha)(q \cdot Q) + (1-\alpha)^2Q^2 - \frac{1}{2}Q^2) + M^2}{(q^2 + M^2 + \alpha(1-\alpha)Q^2)^2} \quad (\text{D.15})$$

Como los límites de la integral sobre  $q$  es simétrica y el denominador es par sobre  $q$ , eliminamos los términos del numerador que sean impares en  $q$ ,

$$K_\gamma(Q^2) = -\frac{16(8)\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int_0^1 d\alpha \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}(q^2 + (\frac{1}{2} - \alpha)Q^2 - \alpha(1-\alpha)Q^2) + M^2}{(q^2 + M^2 + \alpha(1-\alpha)Q^2)^2} \quad (\text{D.16})$$

Separando la integral en dos términos:

$$K_{\gamma,1}(Q^2) = \frac{16(4)\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int_0^1 d\alpha \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{\alpha(1-\alpha)Q^2}{(q^2 + M^2 + \alpha(1-\alpha)Q^2)^2} \quad (\text{D.17})$$

$$K_{\gamma,2}(Q^2) = -\frac{16(8)\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int_0^1 d\alpha \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}(q^2 + (\frac{1}{2} - \alpha)Q^2) + M^2}{(q^2 + M^2 + \alpha(1-\alpha)Q^2)^2} \quad (\text{D.18})$$

La segunda integral, en el límite quiral  $Q^2 = 0$ , debe desaparecer para que el vértice de interacción se mantenga finito, por lo que tendremos la siguiente forma

para la integral  $K_\gamma$

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{16(4)\pi\hat{a}_{IR}}{9} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) Q^2 \int \frac{dq^4}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + \omega)^2} \quad (\text{D.19})$$

Donde  $\omega(M, Q^2) = M^2 + \alpha(1-\alpha)Q^2$ , usando coordenadas hiperesfericas, tendremos

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{16(4)\pi\hat{a}_{IR}}{9(2\pi)^4} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) Q^2 \int_0^\infty dq (2\pi^2) q^3 \frac{1}{(q^2 + \omega)^2} \quad (\text{D.20})$$

Haciendo el cambio  $s = q^2$

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{8\hat{a}_{IR}}{9\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) Q^2 \int_0^\infty ds \frac{s}{(s + \omega)^2} \quad (\text{D.21})$$

Podemos utilizar una parametrización de Feynman renormalizada para el término  $\frac{1}{(s+\omega)^2}$ , por lo que tendremos la siguiente ecuación:

$$K_\gamma(Q^2) = -\frac{8\hat{a}_{IR}}{9\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) Q^2 \frac{\partial}{\partial w} \int_0^\infty ds s \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} dt e^{-t(s+\omega)} \quad (\text{D.22})$$

De la ecuación (C.13) sabemos que  $\int_0^\infty ds s \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} dt e^{-t(s+\omega)} = \mathcal{C}(\omega, \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2)$ , tendremos:

$$K_\gamma(Q^2) = -\frac{8\hat{a}_{IR}}{9\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) Q^2 \frac{\partial}{\partial w} \mathcal{C}(\omega, \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) \quad (\text{D.23})$$

Usando la propiedad  $-\frac{\partial}{\partial w} \mathcal{C}(\omega, \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) = \mathbf{C}_1(\omega, \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) = \Gamma(0, \tau_{uv}^2 \omega) - \Gamma(0, \tau_{ir}^2 \omega)$ , llegaremos a la forma final de la integral (Zhang et al., 2021):

$$K_\gamma(Q^2) = \frac{8\hat{a}_{IR}}{9\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) Q^2 \mathbf{C}_1(\omega, \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) \quad (\text{D.24})$$

## E. Cálculo de los términos $T_{EE}$ , $T_{EF}$ , $T_{FF}$

El término  $T_{EE}$  tiene la siguiente forma:

$$T_{EE} = \frac{N_c}{2k^2} \int^\Lambda \frac{d^4l}{(2\pi)^4} Tr[ iS(l_i, M_1) \gamma \cdot k S(l_f, M_1) S(l, M_2)] \quad (\text{E.1})$$

Explícitamente

$$T_{EE} = \frac{iN_c}{2k^2} \int^\Lambda \frac{d^4l}{(2\pi)^4} Tr\left[\frac{-i\gamma \cdot l_i + M_1}{l_i^2 + M_1^2} \gamma \cdot k \frac{-i\gamma \cdot l_f + M_1}{l_f^2 + M_1^2} \frac{-i\gamma \cdot l + M_2}{l^2 + M_2^2}\right]$$

Una propiedad conocida de las matrices  $\gamma$  es que la traza de un producto impar de matrices  $\gamma$  es cero, por lo que eliminamos dichos términos, llegando a lo siguiente:

$$T_{EE} = \frac{-N_c}{2k^2} \int_l Tr \left[ \frac{(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)(\gamma \cdot l) - M_1^2(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l)}{(l_i^2 + M_1^2)(l_f^2 + M_1^2)(l^2 + M_2^2)} - \frac{M_1 M_2 \{(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k) + (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)\}}{(l_i^2 + M_1^2)(l_f^2 + M_1^2)(l^2 + M_2^2)} \right] \quad (\text{E.2})$$

Utilizando las identidades

$$\begin{aligned} Tr[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] &= 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] \\ Tr(\not{a}\not{b}) &= 4(a \cdot b) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

De esta manera la función del numerador  $N$

$$\begin{aligned} N &= Tr[(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)(\gamma \cdot l) - M_1 M_2 \{(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k) + (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)\} \\ &\quad - M_1^2(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l)] \\ N &= Tr[l^2\{(\gamma \cdot l)(\gamma \cdot k) + (\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot k)\} + (\gamma \cdot l)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot k_f)(\gamma \cdot l) \\ &\quad + (\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot k_f)(\gamma \cdot l) - M_1^2(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l) \\ &\quad - M_1 M_2 \{(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k) + (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)\} ] \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\frac{N}{4} = l^2\{(l \cdot k) + 2k^2\} - (M_M^2 + M_1^2)(l \cdot k) - 2M_1 M_2\{(l \cdot k) + k^2\}$$

Sumamos un cero conveniente

$$\frac{N}{4} = (l^2 + M_2^2)\{(l \cdot k) + 2k^2\} - [M_2^2\{(l \cdot k) + 2k^2\} + (M_M^2 + M_1^2)(l \cdot k) + 2M_1 M_2\{(l \cdot k) + k^2\}] \quad (\text{E.5})$$

Para la segunda parte de función denominadora tenemos la siguiente parametrización de Feynman

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \frac{(1 - \alpha)}{(\alpha A + (1 - \alpha)(\beta B + (1 - \beta)C))^3} \quad (\text{E.6})$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(l_i^2 + M_1^2)(l_f^2 + M_1^2)(l^2 + M_2^2)} \\ &= 2 \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \frac{(1 - \alpha)}{(\alpha(l^2 + M_2^2) + (1 - \alpha)(\beta(l_f^2 + M_1^2) + (1 - \beta)(l_i^2 + M_1^2)))^3} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Definimos

$$D = \alpha(l^2 + M_2^2) + (1 - \alpha)(\beta(l_f^2 + M_1^2) + (1 - \beta)(l_i^2 + M_1^2)) \quad (\text{E.8})$$

$$D = \alpha(l^2 + M_2^2) + (1 - \alpha)(l^2 + 2(l \cdot k) + (2\beta - 1)(l \cdot Q) - M_M^2 + M_1^2)$$

$$D = l^2 + \alpha M_2^2 + (1 - \alpha)[2(l \cdot k) + (2\beta - 1)(l \cdot Q) - M_M^2 + M_1^2]$$

Haciendo el cambio de variable  $J = l + (1 - \alpha)[k + 1/2(2\beta - 1)Q]$ , la función  $D$  tendrá la forma

$$D = J^2 + (1 - \alpha)^2[M_M^2 + \beta(1 - \beta)Q^2] + (1 - \alpha)[-M_M^2 + M_1^2] + \alpha M_2^2$$

Con el siguiente cambio  $\alpha' = -\alpha + 1$ , tendremos la siguiente expresión para  $D$

$$D = J^2 + \omega_2 \quad (\text{E.9})$$

Donde  $\omega_2 = \alpha^2\beta(1 - \beta)Q^2 - \alpha(1 - \alpha)M_M^2 + (1 - \alpha)M_2^2 + \alpha M_1^2$ . De esta manera tendremos

$$\frac{1}{(l_i^2 + M_1^2)(l_f^2 + M_1^2)(l^2 + M_2^2)} = 2 \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \frac{\alpha}{(J^2 + \omega_2)^3} \quad (\text{E.10})$$

Ahora debemos hacer el cambio de variable en la función del denominador  $N$ , tras el cambio en la variable  $\alpha$ , tenemos  $J = l + \alpha[k + 1/2(2\beta - 1)Q]$

$$\begin{aligned} \frac{N}{4} = & (l^2 + M_2^2)\{(l \cdot k) + 2k^2\} - 2[ M_2^2\{(J \cdot k) + (2 - \alpha)k^2\} \\ & + (M_M^2 + M_1^2)\{(J \cdot k) - \alpha k^2\} + 2M_1M_2\{(J \cdot k) + (1 - \alpha)k^2\} ] \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Eliminando los términos impares en  $J$ ,

$$\begin{aligned} \frac{N}{4} = & (l^2 + M_2^2)\{(l \cdot k) + 2k^2\} - 2k^2[ M_2^2(2 - \alpha) \\ & - \alpha(M_M^2 + M_1^2) + 2M_1M_2(1 - \alpha) ] \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

El término dado por  $(l^2 + M_2^2)\{(l \cdot k) + 2k^2\}$  permanece igual ya que necesita una parametrización análoga a la vista en la ecuación (C.13), si definimos  $A_{EE} = M_2^2(\alpha - 2) + \alpha(M_M^2 + M_1^2) + 2M_1M_2(\alpha - 1)$

$$\begin{aligned} T_{EE} = & \frac{-4(3)}{2k^2} \left\{ \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{(l \cdot k) + 2k^2}{(l_i^2 + M_1^2)(l_f^2 + M_1^2)} \right. \\ & \left. + 2k^2 \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \int \frac{d^4J}{(2\pi)^4} \frac{A_{EE}}{(J^2 + \omega_2)^3} \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Si utilizamos la siguiente fórmula con el primer término,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{(\alpha A + (1 - \alpha)B)^2} \quad (\text{E.14})$$

Y además hacemos el cambio de variable  $l = q - k - 1/2(1 - 2\beta)Q$ , tendremos:

$$T_{EE} = \frac{-2(3)}{k^2} \left[ \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(q \cdot k) + k^2}{(q^2 + M_1^2 + \alpha(1 - \alpha)Q^2)^2} \right. \\ \left. + 2k^2 \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \int \frac{d^4J}{(2\pi)^4} \frac{A_{EE}}{(J^2 + \omega_2)^3} \right] \quad (\text{E.15})$$

Si pasamos ambas integrales a coordenadas hiperesfericas y eliminamos los términos impares sobre  $q$ ,

$$T_{EE} = \frac{-2(3)(2\pi^2)}{(2\pi)^4} \left[ \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty dq q^3 \frac{1}{(q^2 + M_1^2 + \alpha(1 - \alpha)Q^2)^2} \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \int_0^\infty dq q^3 \frac{A_{EE}}{(q^2 + \omega_2)^3} \right] \quad (\text{E.16})$$

Hacemos el cambio  $s = q^2$  y reescribimos  $\omega_1 = M_1^2 + \alpha(1 - \alpha)Q^2$

$$T_{EE} = \frac{-3}{8\pi^2} \left[ \int_0^1 d\alpha \int_0^\infty ds \frac{s}{(s + \omega_1)^2} \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \int_0^\infty ds s \frac{A_{EE}}{(s + \omega_2)^3} \right] \quad (\text{E.17})$$

Si utilizamos  $\frac{1}{(s+w)^3} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \frac{1}{(s+w)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} dt e^{-t(s+w)}$  en el término con  $A_{EE}$

$$\frac{6}{8\pi^2} \int_0^1 d\alpha \alpha A_{EE} \int_0^1 d\beta \frac{\partial^2}{\partial w^2} \int_0^\infty ds s \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} dt e^{-t(s+w)}$$

Recordando las definiciones  $\int_0^\infty ds s \int_{\tau_{uv}^2}^{\tau_{ir}^2} dt e^{-t(s+w)} = \mathcal{C}(\omega, \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2)$  y  $\bar{\mathcal{C}}_n(z) = (-1)^n \frac{z^{n-1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \mathcal{C}(z)$

$$\frac{6}{8\pi^2} \frac{2}{2} \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \frac{A_{EE}}{w_2} \bar{\mathcal{C}}_2(w_2)$$

Finalmente tendremos

$$T_{EE} = \frac{-3}{8\pi^2} \left[ \int_0^1 d\alpha \bar{\mathcal{C}}_1(\omega_1, \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) + 2 \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \frac{A_{EE}}{\omega_2} \bar{\mathcal{C}}_2(\omega_2, \tau_{ir}^2, \tau_{uv}^2) \right] \quad (\text{E.18})$$

Trabajando los otros factores,

$$T_{EF} = \frac{-3}{2k^2} \int_l^\Lambda Tr[S(l_i, M_1)(\gamma \cdot k)S(l_f, M_1)(\gamma \cdot k_f)S(l, M_2) + (\gamma \cdot k_i)S(l_i, M_1)(\gamma \cdot k)S(l_f, M_1)S(l, M_2)] \quad (E.19)$$

Utilizamos la siguiente propiedad del operador de traza  $Tr[ABC] = Tr[BCA]$ ,

$$T_{EF} = \frac{-3}{2k^2} \int_l^\Lambda Tr[S(l_i, M_1)(\gamma \cdot k)S(l_f, M_1)(\gamma \cdot k_f)S(l, M_2) + S(l_i, M_1)(\gamma \cdot k)S(l_f, M_1)S(l, M_2)(\gamma \cdot k_i)]$$

$$T_{EF} = \frac{-3}{2k^2} \int_l^\Lambda Tr[S(l_i, M_1)(\gamma \cdot k)S(l_f, M_1)\{(\gamma \cdot k_f)S(l, M_2) + S(l, M_2)(\gamma \cdot k_i)\}] \quad (E.20)$$

Desarrollamos el término que esta entre corchetes

$$\begin{aligned} \{(\gamma \cdot k_f)\check{S}(l, M_2) + \check{S}(l, M_2)(\gamma \cdot k_i)\} &= \{(\gamma \cdot k)\check{S}(l, M_2) - \frac{1}{2}(\gamma \cdot Q)\check{S}(l, M_2) \\ &+ \check{S}(l, M_2)(\gamma \cdot k) + \frac{1}{2}\check{S}(l, M_2)(\gamma \cdot Q)\} \quad (E.21) \\ &= \{-i\{(\gamma \cdot k), (\gamma \cdot l)\} + 2M_2(\gamma \cdot k) + \frac{i}{2}[(\gamma \cdot Q), (\gamma \cdot l)]\} \end{aligned}$$

Donde  $\check{S}(l, M) = (l^2 + M^2)S(l, M) = -i\gamma \cdot l + M$  utilizamos la relación de anti-conmutación de las matrices gamma en el espacio euclidiano  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}I_{4x4}$ , omitiendo la identidad,

$$\begin{aligned} \{(\gamma \cdot k_f)\check{S}(l, M_2) + \check{S}(l, M_2)(\gamma \cdot k_i)\} &= \{-2i(l \cdot k) + 2M_2(\gamma \cdot k) \\ &+ i(l \cdot Q) - i(\gamma \cdot Q)(\gamma \cdot l)\} \quad (E.22) \end{aligned}$$

Trabajamos el término que esta fuera de los corchetes de (E.20)

$$\begin{aligned}
\check{S}(l_i, M_1)(\gamma \cdot k)\check{S}(l_f, M_1) &= (-i\gamma \cdot l_i + M_1)(\gamma \cdot k)(-i\gamma \cdot l_f + M_1) \\
&= -(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f) - iM_1[(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k) + (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)] + M_1^2(\gamma \cdot k) \\
&= -(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f) - iM_1[2(l \cdot k) + 2k^2 + (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot Q)] + M_1^2(\gamma \cdot k)
\end{aligned} \tag{E.23}$$

Si multiplicamos la ecuación (E.23) por la derecha con (E.22) e ignoramos los términos que contengan productos impares de matrices gamma,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \check{S}(l_i, M_1)(\gamma \cdot k)\check{S}(l_f, M_1)\{(\gamma \cdot k_f)\check{S}(l, M_2) + \check{S}(l, M_2)(\gamma \cdot k_i)\} = \\
&= -2M_1(l \cdot k)[2(l \cdot k) + 2k^2 + (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot Q)] - 2M_2(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)(\gamma \cdot k) \\
&\quad + M_1(l \cdot Q)[2(l \cdot k) + 2k^2 + (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot Q)] - M_1[2(l \cdot k) + 2k^2](\gamma \cdot Q)(\gamma \cdot l) \\
&\quad + 2M_1^2M_2k^2 - M_1Q^2(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l)
\end{aligned} \tag{E.24}$$

Ahora tomamos la traza

$$\begin{aligned}
N = Tr[\Phi] &= -8M_1(l \cdot k)[2(l \cdot k) + 2k^2 + \frac{1}{2}Q^2] + 8M_1^2M_2k^2 \\
&\quad - 2M_2Tr[(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)(\gamma \cdot k)]
\end{aligned} \tag{E.25}$$

Desarrollamos la traza que nos falta

$$\begin{aligned}
N &= -8M_1(l \cdot k)[2(l \cdot k) - 2M_M^2] + 8M_1^2M_2k^2 \\
&\quad - 8M_2[2(l \cdot k)^2 - k^2l^2 - k^2M_M^2 + 2k^2(l \cdot k)]
\end{aligned} \tag{E.26}$$

De manera similar al factor de forma anterior  $T_{EE}$ , parametrizamos el denominador de la siguiente forma

$$\frac{1}{(l_i^2 + M_1^2)(l_f^2 + M_1^2)(l^2 + M_2^2)} = 2 \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \frac{1}{(q^2 + \omega_2)^3} \quad (\text{E.27})$$

Donde  $q = l + \alpha[k + \frac{1}{2}(2\beta - 1)Q]$  y  $\omega_2 = \alpha^2\beta(1 - \beta)Q^2 - \alpha(1 - \alpha)M_M^2 + (1 - \alpha)M_2^2 + \alpha M_1^2$ , debido al cambio de variable la forma de  $N$  cambiará, si además utilizamos la siguiente ecuación recuperada de (Gutiérrez-Guerrero, 2012)

$$\int_q^\Lambda \frac{(q \cdot p)}{(q^2 + m^2)^n} = \frac{1}{4} \int_q^\Lambda \frac{q^2 p^2}{(q^2 + m^2)^n} \quad (\text{E.28})$$

Llegaremos a lo siguiente:

$$\begin{aligned} N = & 4k^2 \{q^2(M_2 - M_1) + 2M_1^2 M_2 + \alpha M_1 [4M_M^2(\alpha - 1) + \alpha Q^2] \\ & + M_2 [2M_M^2(\alpha - 1)^2 + \alpha Q^2(2\alpha(\beta - 1)\beta + \alpha - 1)] \} \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

Definimos

$$\begin{aligned} A_{EF}^{(1)} &= (M_2 - M_1) \\ A_{EF}^{(2)} &= 2M_1^2 M_2 + \alpha M_1 [4M_M^2(\alpha - 1) + \alpha Q^2] \\ &+ M_2 [2M_M^2(\alpha - 1)^2 + \alpha Q^2(2\alpha(\beta - 1)\beta + \alpha - 1)] \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

Sustituimos esto en la integral original

$$T_{EF} = -\frac{12}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^\infty d\alpha d\beta \alpha \left[ \frac{A_{EF}^{(1)}}{(q^2 + \omega_2)^2} + \frac{(A_{EF}^{(2)} - \omega_2 A_{EF}^{(1)})}{(q^2 + \omega_2)^3} \right] \quad (\text{E.31})$$

De manera similar a  $T_{EE}$  podemos llegar a la forma final de  $T_{EF}$

$$T_{EF} = \frac{-12}{\pi^2} \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \left[ A_{EF}^{(1)} \bar{\mathcal{C}}_1(\omega_2) + \frac{1}{\omega_2} (A_{EF}^{(2)} - \omega_2 A_{EF}^{(1)}) \bar{\mathcal{C}}_2(\omega_2) \right] \quad (\text{E.32})$$

El último término del factor de forma está dado por la siguiente expresión

$$T_{FF} = \frac{-3i}{2k^2} \int_l^\Lambda Tr[ \gamma \cdot k_i S(l_i, M_1) \gamma \cdot k S(l_f, M_1) \gamma \cdot k_f S(l, M_2) ] \quad (E.33)$$

La traza de un producto impar de matrices gamma es cero, por lo que solo mantenemos los pares:

$$\begin{aligned} N &= Tr \left[ (i(\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)(\gamma \cdot k_f)(\gamma \cdot l)) - iM_1^2(\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot k_f)(\gamma \cdot l) \right. \\ &\quad \left. - iM_1M_2( (\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot l_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot k_f) + (\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l_f)(\gamma \cdot k_f) ) \right] \\ &= iTr \left[ (\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot l)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l)(\gamma \cdot k_f)(\gamma \cdot l) + k_i^2 k_f^2 (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l) + M_1^2 M_M^2 (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l) \right. \\ &\quad + k_f^2 (\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot l)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l) + k_i^2 (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l)(\gamma \cdot k_f)(\gamma \cdot l) \\ &\quad \left. - M_1M_2( 2((l \cdot k) + k^2)(\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot k_f) + k^2(\gamma \cdot Q)(\gamma \cdot k_f) + \frac{1}{2}Q^2(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot k_f) ) \right] \\ &= iTr \left[ 2(l \cdot k)(\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot l)(\gamma \cdot k_f)(\gamma \cdot l) - l^2(\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot k_f)(\gamma \cdot l) \right. \\ &\quad + k_i^2 k_f^2 (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l) + M_1^2 M_M^2 (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l) \\ &\quad + k_f^2 (\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot l)(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l) + k_i^2 (\gamma \cdot k)(\gamma \cdot l)(\gamma \cdot k_f)(\gamma \cdot l) \\ &\quad \left. - M_1M_2( 2((l \cdot k) + k^2)(\gamma \cdot k_i)(\gamma \cdot k_f) + k^2(\gamma \cdot Q)(\gamma \cdot k_f) + \frac{1}{2}Q^2(\gamma \cdot k)(\gamma \cdot k_f) ) \right] \end{aligned} \quad (E.34)$$

Al tomar la traza

$$\begin{aligned} -iN &= 8(l \cdot k) \left[ (l \cdot k_i)(l \cdot k_f) - l^2(k_i \cdot k_f) + (l \cdot k_i)(l \cdot k_f) \right] + 4M_M^4(l \cdot k) \\ &\quad - 4l^2 \left[ (k_i \cdot k)(l \cdot k_f) - (k_i \cdot k_f)(l \cdot k) + (l \cdot k_i)(k \cdot k_f) \right] \\ &\quad + 4k_f^2 \left[ (l \cdot k_i)(l \cdot k) - l^2(k_i \cdot k) + (k_i \cdot l)(l \cdot k) + (l \cdot k)(l \cdot k_f) \right. \\ &\quad \left. + (l \cdot k)(l \cdot k_f) - l^2(k \cdot k_f) + (l \cdot k)(l \cdot k_f) \right] \\ &\quad + 4M_1^2 M_M^2(l \cdot k) - M_1M_2 \left[ 8(l \cdot k)k^2 - 2(l \cdot k)Q^2 - 8k^2 M_M^2 \right] \end{aligned} \quad (E.35)$$

Simplificando

$$\begin{aligned}
-iN = & (l \cdot k) \left[ 16(l \cdot k)^2 - 4(l \cdot Q)^2 + 4l^2(3M_M^2 + Q^2) + 4M_M^4 \right] \\
& + 4M_1^2 M_M^2 (l \cdot k) - 2M_1 M_2 \left[ 4(l \cdot k)k^2 - (l \cdot k)Q^2 - 4k^2 M_M^2 \right] \\
& - 4M_M^2 \left[ 4(l \cdot k)^2 - 2l^2 k^2 \right] \quad (E.36)
\end{aligned}$$

Si parametrizamos el denominador de la función  $T_{FF}$  mediante la ecuación (E.6) y hacemos el cambio de variable  $q = l + \alpha[k + 1/2(2\beta - 1)Q]$ , el numerador  $N$  tendrá una forma dada por:

$$\begin{aligned}
-iN = & ((q \cdot k) - \alpha k^2) \left[ 16((q \cdot k) - \alpha k^2)^2 - 4((q \cdot Q) - \frac{\alpha}{2}(2\beta - 1)Q^2)^2 \right. \\
& + 4(q^2 - 2\alpha(q \cdot k) - \alpha(2\beta - 1)(q \cdot Q) \\
& \left. - \alpha^2 M_M^2 - \alpha^2 \beta(1 - \beta)Q^2)(3M_M^2 + Q^2) + 4M_M^4 \right] \\
& - 4M_M^2 \left[ 4((q \cdot k) - \alpha k^2)^2 - 2(q^2 - 2\alpha(q \cdot k) - \alpha(2\beta - 1)(q \cdot Q) \right. \\
& \left. - \alpha^2 M_M^2 - \alpha^2 \beta(1 - \beta)Q^2)k^2 \right] \\
& + 4M_1^2 M_M^2 ((q \cdot k) - \alpha k^2) - 2M_1 M_2 \left[ 4((q \cdot k) - \alpha k^2)k^2 - \right. \\
& \left. ((q \cdot k) - \alpha k^2)Q^2 - 4k^2 M_M^2 \right] \quad (E.37)
\end{aligned}$$

Eliminando los términos impares y aquellos que tengan  $(q \cdot k)(q \cdot Q)$

$$\begin{aligned}
-iN = & -2k^2 \left[ q^2(M_M^2(3\alpha - 2) + \alpha Q^2) + 2\alpha(M_M^4(\alpha - 1)^2 \right. \\
& + \alpha M_M^2 Q^2(3\alpha\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha + 2\beta - 2\beta^2 - 1)) \\
& \left. + 2M_1 M_2(2(\alpha - 1)M_M^2 + \alpha Q^2) + 2\alpha M_1^2 M_M^2 \right] \quad (E.38)
\end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned}
A_{FF}^{(1)} &= (3\alpha - 2)M_M^2 + \alpha Q^2 \\
A_{FF}^{(2)} &= 2\alpha(M_M^4(\alpha - 1)^2 + \alpha M_M^2 Q^2(3\alpha\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha + 2\beta - 2\beta^2 - 1)) \\
&\quad + 2M_1 M_2(2(\alpha - 1)M_M^2 + \alpha Q^2) + 2\alpha M_1^2 M_M^2
\end{aligned} \tag{E.39}$$

Si sumamos un cero conveniente:

$$T_{FF} = 6 \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha \int_q \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 + \omega_2)A_{FF}^{(1)} + (A_{FF}^{(2)} - \omega_2 A_{FF}^{(1)})}{(q^2 + \omega_2)^3} \tag{E.40}$$

De manera similar a cuando calculamos  $T_{EE}$ , llegaremos a lo siguiente:

$$T_{FF} = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^1 d\alpha d\beta \alpha (A_{FF}^{(1)} \bar{\mathcal{C}}_1(\omega_2) + \frac{1}{\omega_2} (A_{FF}^{(2)} - \omega_2 A_{FF}^{(1)}) \bar{\mathcal{C}}_2(\omega_2)) \tag{E.41}$$