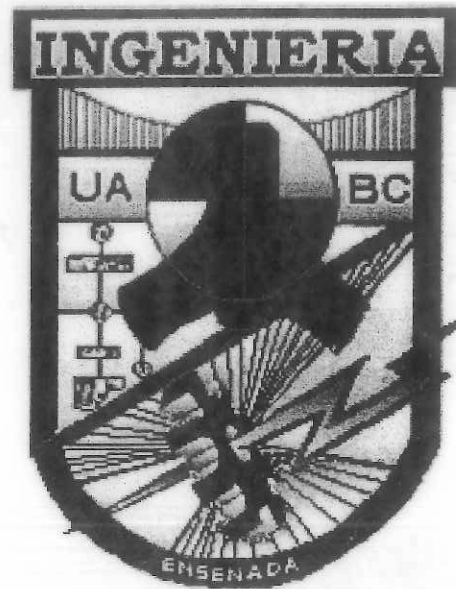


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA ENSENADA



CURSO: RESISTENCIA DE MATERIALES II

CUADERNO DE APUNTES

Autor:

JOEL MELCHOR OJEDA RUIZ

ESTUDIOS PROGRAMA Ph. D.
LEHIGH UNIVERSITY.

MAESTRIA EN INGENIERIA (ESTRUCTURAS)
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO,
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM.

INGENIERO CIVIL ESPECIALIDAD EN
ESTRUCTURAS
INSTITUTO TECNOLOGICO DE TIJUANA

Catedrático de la UABC con más de 15 años de
Docencia

Segunda Edición, Verano 2004

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

1. "Mecánica de Materiales", 5^a edición. James M. Gere, Thomson Learning.
 2. "Mecánica de Materiales", 2^{da} edición. Gere-Timoshenko, Grupo Editorial Iberoamérica.
 3. "Mechanics of Materials", 3rd edition. Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr. & John T DeWolf, Mc Graw Hill.
 4. "Resistencia de Materiales". Ferdinand L. Singer, Harper & Row Publishers Inc.
 5. "Mecánica de Materiales", 3^a edición. R. C. Hibbeler, Prentice Hall.
 6. "Resistencia de Materiales". William A. Nash, Mc Graw Hill.
-

CONTENIDO

CAPÍTULO 1	VIGAS COMPUESTAS	
	1.1 Sección transformada ó equivalente	2
	1.2 Esfuerzos normales en vigas compuestas	4
	1.2.1 Vigas de madera reforzadas con placas de acero	6
	1.2.2 Vigas metálicas compuestas	20
	1.2.3 Vigas de concreto reforzado	27
	1.2.4 Diseño de vigas de concreto reforzado	35
	1.3 Esfuerzos cortantes en vigas compuestas	45
	1.4 Diseño de vigas compuestas	60
CAPÍTULO 2	ESFUERZOS COMBINADOS	
	2.1 Esfuerzos producidos por carga sesgada en vigas de seccion simetrica	72
	2.2 Esfuerzos por carga axial excentrica sobre un eje	82
	2.3 Esfuerzos por carga axial excentrica a dos ejes	93
CAPÍTULO 3	DEFORMACIONES EN VIGAS (FLEXIÓN SIMPLE)	
	3.1 Concepto y métodos	99
	3.2 Método de doble integración	105
	3.3 Método de área de momentos	120
	3.4 Método de la viga conjugada	137
	3.5 Método de superposición	153
CAPÍTULO 4	VIGAS HIPERSTÁTICAS	
	4.1 Tipos de vigas indeterminadas y grados de indeterminación	158
	4.2 Solución de vigas hiperstáticas	
	4.2.1 Por el método de área de momentos	160
	4.2.2 Por el método de la viga conjugada	164
	4.2.3 Por el método de superposición	168
	4.3 Solución de vigas continuas	
	4.3.1 Por el método de área de momentos	172
	4.3.2 Por la ecuación de tres momentos	179

VIGAS COMPUESTAS

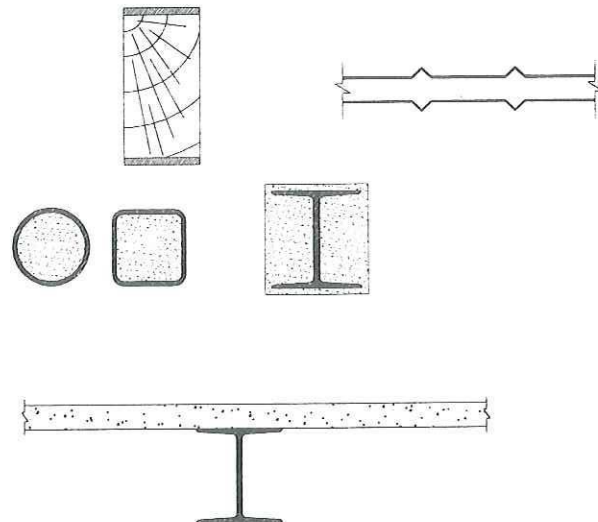
Son aquellas en que la sección está formada por la combinación de dos o más materiales que trabajan en conjunto para proveer la sustentación al sistema de cargas del elemento estructural que están formando.

Este tipo de secciones resulta conveniente en el caso de escasez de materiales estructurales, ya que es posible integrar materiales de distintas características y lograr con ello un elemento estructural suficientemente resistente a la condición de carga de trabajo. Los materiales más comunes son la madera y el acero, aunque el caso más típico está representado por el concreto reforzado. En la actualidad, se emplea la combinación de acero estructural y concreto reforzado en la fabricación de elementos estructurales, combinación que permite un uso eficiente de las características de cada uno de los materiales. La combinación de materiales ligeros con materiales resistentes, es también una alternativa empleada en la industria de la construcción, en donde los elementos así fabricados son considerados en su análisis, como elementos de sección compuesta.

Cuando las secciones están determinadas por la combinación de diferentes materiales, se deja de cumplir la hipótesis que se plantea para el desarrollo de las expresiones de la Resistencia de Materiales para la estimación de esfuerzos y deformaciones en donde se considera homogénea la sección transversal. Al no ser homogénea la sección, los esfuerzos y deformaciones no son proporcionales a la distancia al eje neutro. Sin embargo, existe un recurso para cumplir con los requisitos de homogeneidad en la sección, esto se logra a través de la **sección transformada** (ó equivalente) en donde se especifican las características de uno de los materiales en función del otro, siempre y cuando se asegure que los materiales permanecen en el rango elástico-lineal de deformaciones y esfuerzos y sobre todo, que ambos materiales estén perfectamente adheridos (con ellos se asegura que las deformaciones en el punto de contacto sean las mismas y exista transmisión de esfuerzos hacia el resto de las fibras en la sección transversal).

TIPOS DE VIGAS COMPUESTAS

- Tubos de acero recubiertos con plástico
- Vigas de madera recubiertas con placas de acero
- Vigas "sandwich"
- Secciones tubulares de acero combinadas con concreto
- Secciones laminadas de acero estructural recubiertas de concreto
- "Steel deck"



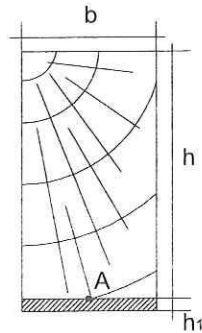
CONSIDERACIONES EN EL ESTUDIO DE VIGAS COMPUESTAS

- Los materiales están perfectamente adheridos
- Las deformaciones unitarias (ϵ) de ambos materiales sean iguales en el punto de unión de los materiales
- Prevalecerá la consideración de secciones transversales planas durante la flexión de las vigas
- Los procedimientos para la determinación de esfuerzos y deformaciones unitarias como fueron desarrollados para vigas homogéneas, no es aplicable al caso de vigas compuestas

SECCION TRANSFORMADA (O EQUIVALENTE)

Procedimiento alternativo para analizar esfuerzos a flexión en una viga compuesta. Por conveniencia, es práctico transformar la sección de la viga en estudio, en una sección equivalente de una viga imaginaria compuesta de un solo material (viga imaginaria homogénea)

Supongamos la siguiente sección de una viga compuesta de dos materiales (acero y madera, por ejemplo) unidos en la superficie de contacto y de dimensiones como las indicadas en la figura



En el punto "A", se determina que las deformaciones unitarias en la madera y el acero son iguales, debido a la adherencia de los materiales en la superficie de contacto, por lo que

$$\epsilon_a = \epsilon_m$$

De acuerdo con la ley de Hooke, la deformación unitaria de un material en el rango elástico-lineal, está determinada por la expresión: $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$

Así, los deformaciones unitarias de los materiales en el punto "A", en términos de el esfuerzo actuante σ , será

$$\left(\frac{\sigma}{E}\right)_a = \left(\frac{\sigma}{E}\right)_m \quad \dots\dots\dots (1)$$

En la sección transformada, se deberá cumplir además, al hacer equivalente las propiedades de uno de los materiales a las propiedades de el otro, que la fuerza a tensión (ó compresión), en el material que se hace equivalente, sea la misma magnitud de fuerza antes y después de efectuar la transformación de el material. Si hacemos equivalente la placa de acero en madera, para obtener la sección transformada homogénea en madera equivalente:

$$P_a = P'_m$$

Puesto que, $\sigma = \frac{P}{A}$

Entónces la igualdad de fuerzas antes y después de la transformación de la sección de acero, en función de el esfuerzo, será

$$\sigma_a A_a = \sigma'_m A'_m \quad \dots\dots\dots (2)$$

De la expresión (1)

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_m} \sigma_m$$

Sustituyendo en la expresión (2)

$$A_a \left(\frac{E_a}{E_m} \sigma_m \right) = \sigma_m A_m' \quad \dots\dots\dots (3)$$

Definiendo la relación modular, n:

$$n = \frac{E_a}{E_m}$$

y utilizando las mismas propiedades de la madera, después de la transformación de la sección de acero en madera equivalente, es decir $\sigma_m = \sigma_m'$

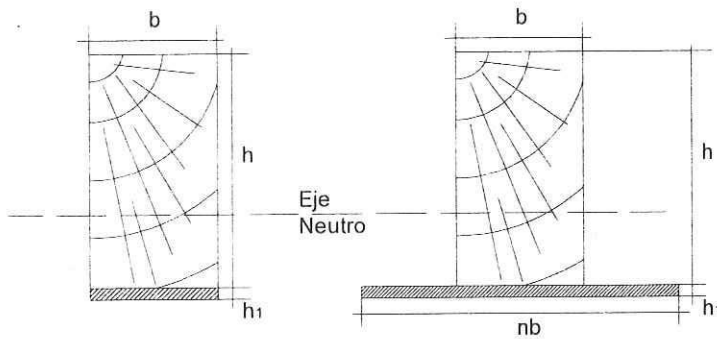
Sustituyendo en la expresión (3)

$$A_a n \sigma_m = A_m' \sigma_m'$$

Simplificando esta expresión

$$A_a n = A_m'$$

Este resultado indica que para obtener la sección equivalente en madera, A_m' , transformando el área de acero, A_a , se deberá multiplicar el área de acero por la relación modular "n".

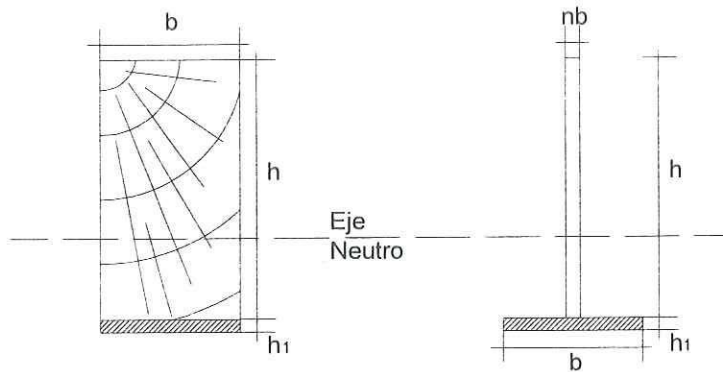


Si se quiere obtener la sección transformada en acero, será necesario obtener el área equivalente en acero A_a' de la sección de madera. En este caso la relación modular será:

$$n = \frac{E_m}{E_a}$$

La relación de áreas queda definida por

$$A_m n = A_a'$$



CONDICIONES PARA OBTENER LA SECCION TRANSFORMADA

1. Deformaciones unitarias (ϵ) iguales en la unión de los diferentes materiales
2. Iguales fuerzas de tensión/compresión al pasar de la sección original a la sección transformada
3. El eje neutro no debe cambiar de posición: el eje neutro pasa por el centroide de la sección transversal

ESFUERZOS EN LA SECCION TRANSFORMADA

En una sección homogénea, los esfuerzos producidos por la flexión, están determinados por la expresión

$$\sigma_x = \frac{-My}{I}$$

Al tener definida la sección transformada (ó equivalente), los esfuerzos producidos por la flexión se podrán determinar aplicando la expresión utilizada para vigas de sección homogénea. En el caso de el esfuerzo en el material que no ha sido transformado, por ejemplo, si la sección es equivalente en madera (la sección de acero se hizo equivalente en madera), este esfuerzo se determina utilizando la expresión

$$\sigma_{xm} = \frac{-My}{I_T}$$

En donde:

σ_{xm} = esfuerzo en la sección de madera en una fibra ubicada a una distancia "y" del eje neutro

M = Momento flexionante actuante en la sección transformada

I_T = Momento de inercia de la sección transformada

y = Distancia desde el eje neutro a la fibra en donde se está determinando el esfuerzo σ_{xm}

Para determinar el esfuerzo en el material que se ha transformado al obtener la sección equivalente, por ejemplo, si la sección es equivalente en madera (la sección de acero se hizo equivalente en madera), se sabe que de acuerdo con la Ley de Hooke

$$\sigma = E \epsilon$$

y que la relación modular "n" se definió como

$$n = \frac{E_a}{E_m}$$

Por lo tanto,

$$E_a = n E_m$$

El esfuerzo en la sección de el material que no se transformó (la placa de acero, para el caso de nuestro ejemplo) está determinado por

$$\sigma_a = E_a \varepsilon$$

Sustituyendo el módulo de elasticidad E_a en función de la relación modular "n"

$$\sigma_a = n E_m \varepsilon = n \sigma_m'$$

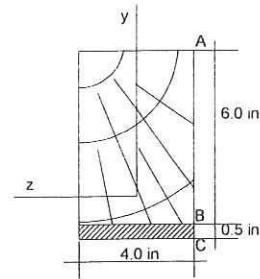
Este resultado indica que, para obtener el esfuerzo producido por flexión en la sección original, en el material que no ha sido transformado, se deberá determinar el nivel de esfuerzo de este material equivalente en la sección transformada y posteriormente se multiplica por el valor de la relación modular "n", o bien

$$\sigma_{sa} = n \sigma_m$$
$$\sigma_{sa} = \frac{-My}{I_T} n$$

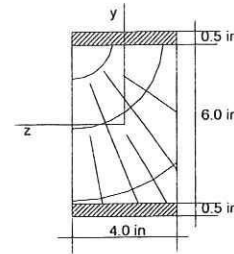
Ejercicio No. 1.1

Determinar los esfuerzos máximos y mínimos, de tensión y compresión en la madera y en el acero de la sección transversal mostrada en la fig., al aplicarse un momento positivo de 60 kips-in

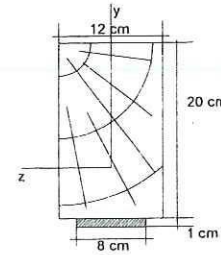
	Sección	Módulo elástico
Madera	4 x 6 in	1,500 ksi
Acero	4 x ½ in	30,000 ksi

**Ejercicio No. 1.2**

Resolver el ejercicio anterior, considerando que la sección transversal se refuerza agregando una placa de acero en la parte superior de la sección. Utilizar las propiedades de los materiales del ejercicio anterior, tanto para la placa de acero como para la madera.

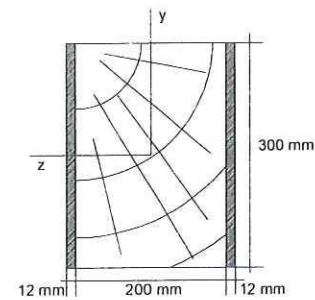
**Ejercicio No. 1.3**

Una viga simplemente apoyada en un tramo de 6 mts de claro, soporta una carga uniformemente distribuida de 500 kg/m, incluido su propio peso. Si $n=20$, determinar los esfuerzos máximos en la sección mostrada en la fig.

**Ejercicio No. 1.4**

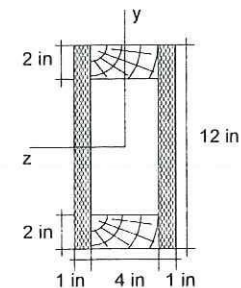
Una viga de Madera de 200x300 mm está reforzada por los lados con placas de acero de 12 mm de espesor (ver fig.). Los respectivos módulos de elasticidad para el acero y la madera son $E_s=204$ GPa y $E_w=8.5$ Gpa. Los esfuerzos permisibles correspondientes son $\sigma_s=120$ Mpa y $\sigma_w=10$ Mpa.

Calcule el momento flexionante permisible máximo M_{max} , cuando la viga está flexionada respecto al eje z.

**Ejercicio No. 1.5**

Una viga en caja hueca está construida con almas de Madera contrachapada y patines de pino (ver fig.). La madera contrachapada es de 1 in de espesor y 12 in de ancho; los patines son de 2 in x 4 in (tamaño real). El módulo de elasticidad de la Madera contrachapada es de 1600 ksi y el del pino es de 1200 ksi.

Si los esfuerzos permisibles son de 2.30 ksi para la Madera contrachapada y de 1.80 ksi para el pino, encuentre el momento flexionante permisible M_{max} cuando la viga se flexiona respecto al eje z.



Solución ejercicio No. 1.1

Módulos de elasticidad del acero y de la madera (Es y Ew respectivamente):

$$E_s := 30000 \text{ ksi}$$

$$E_w := 1500 \text{ ksi}$$

Relación modular n,

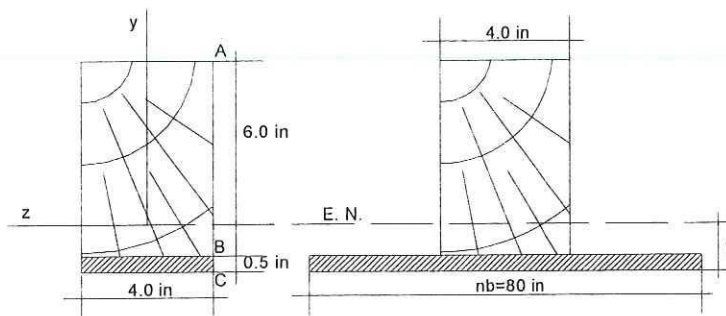
$$n := \frac{E_s}{E_w} \quad n = 20$$

Sección transformada (equivalente en madera):

Ancho equivalente de las placas de acero

$$b := 4 \text{ in}$$

$$b1 := n \cdot b \quad b1 = 80 \text{ in}$$



Sección transversal

Sección transformada

Localización del Eje Neutro:

Elemento	h	b	Ai	yi	A*yi
1	0.5	80	40	0.25	10
2	6	4	24	3.5	84
$\Sigma =$			64		94

$$y := \frac{94}{64} \quad y = 1.469 \text{ in}$$

Momento de inercia I_x de la sección transformada:

$$b1 = 80 \text{ in}$$

$$b2 := 4 \text{ in}$$

$$h1 := 0.5 \text{ in}$$

$$h2 := 6 \text{ in}$$

$$d1 := y - \frac{h1}{2} \quad d1 = 1.219 \text{ in} \quad d2 := \frac{h2}{2} + h1 - y \quad d2 = 2.031 \text{ in}$$

$$I1 := \frac{b1 \cdot h1^3}{12} + b1 \cdot h1 \cdot d1^2$$

$$I2 := \frac{b2 \cdot h2^3}{12} + b2 \cdot h2 \cdot d2^2$$

$$It := I1 + I2$$

$$It = 231.271 \quad \text{in}^4$$

Nivel de esfuerzos actuantes producidos por el momento flexionante.

De acuerdo con la expresión para determinar los esfuerzos por flexión, estos dependen de la distancia de la fibra a el eje neutro:

$$\sigma = - (M y) / It$$

a) Para el acero (esfuerzos multiplicados por "n", pues el acero se transformó a madera equivalente para obtener la sección transformada, distancia negativa, pues se encuentra por debajo de el eje neutro):

$$M := 60 \cdot 1000 \text{ lb-in}$$

Esfuerzo máximo (fibra más alejada de el eje neutro)

$$ya1 := -y$$

$$ya1 = -1.469 \text{ in}$$

$$\sigma a1 := \frac{-M \cdot ya1 \cdot n}{It}$$

$$\sigma a1 = 7620.9 \text{ psi en Tensión}$$

Esfuerzo mínimo

$$ya2 := -(y - h1)$$

$$ya2 = -0.969 \text{ in}$$

$$\sigma a2 := \frac{-M \cdot ya2 \cdot n}{It}$$

$$\sigma a2 = 5026.6 \text{ psi en Tensión}$$

b) Para la madera (distancia positiva y negativa, pues las fibras se encuentran tanto por arriba, como por debajo de el eje neutro):

Esfuerzo máximo (fibra más alejada de el eje neutro)

$$ym1 := (h2 + h1) - y$$

$$ym1 = 5.031 \text{ in}$$

$$\sigma m1 := \frac{-M \cdot ym1}{It}$$

$$\sigma m1 = -1305.3 \text{ psi en Compresión}$$

Esfuerzo mínimo

$$ym2 := -(y - h1)$$

$$ym2 = -0.969 \text{ in}$$

$$\sigma m2 := \frac{-M \cdot ym2}{It}$$

$$\sigma m2 = 251.3 \text{ psi en Tensión}$$

Los esfuerzos máximos en Tensión y Compresión obtenidos para la madera y el esfuerzo máximo a Tensión obtenido para el acero, se deberán comparar con los esfuerzos admisibles de estos materiales y poder determinar si la sección es apropiada por esfuerzos a flexión, si estos esfuerzos determinados son mayores a los esfuerzos admisibles, será necesario rediseñar la sección transversal, ó cambiar las propiedades de los materiales por materiales más resistentes.

Solución ejercicio No. 1.2

Módulos de elasticidad del acero y de la madera (Es y Ew respectivamente):

$$E_s := 30000 \text{ ksi}$$

$$E_w := 1500 \text{ ksi}$$

Relación modular n,

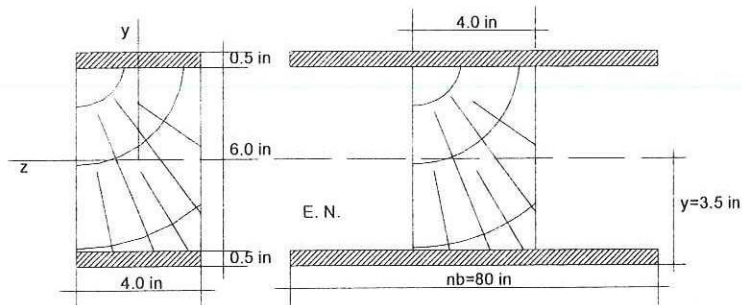
$$n := \frac{E_s}{E_w} \quad n = 20$$

Sección transformada (equivalente en madera):

Ancho equivalente de las placas de acero

$$b := 4 \text{ in}$$

$$b_1 := n \cdot b \quad b_1 = 80 \text{ in}$$



Sección transversal

Sección transformada

Localización del Eje Neutro:

Elemento	h	b	Ai	yi	A*yi
1	0.5	80	40	0.25	10
2	6	4	24	3.5	84
3	0.5	80	40	6.75	270
			$\Sigma =$		364

$$y := \frac{364}{104} \quad y = 3.5 \text{ in}$$

Momento de inercia I_t de la sección transformada:

$b_1 = 80 \text{ in}$	$b_2 := 4 \text{ in}$	$b_3 := 80 \text{ in}$
$h_1 := 0.5 \text{ in}$	$h_2 := 6 \text{ in}$	$h_3 := 0.5 \text{ in}$
$d_1 := y - \frac{h_1}{2}$	$d_2 := \frac{h_2}{2} + h_1 - y$	$d_3 := \frac{h_3}{2} + h_1 + h_2 - y$
$d_1 = 3.25 \text{ in}$	$d_2 = 0 \text{ in}$	$d_3 = 3.25 \text{ in}$

$$I1 := \frac{b1 \cdot h1^3}{12} + b1 \cdot h1 \cdot d1^2 \quad I2 := \frac{b2 \cdot h2^3}{12} + b2 \cdot h2 \cdot d2^2 \quad I3 := \frac{b3 \cdot h3^3}{12} + b3 \cdot h3 \cdot d3^2$$

$$It := I1 + I2 + I3$$

$$It = 918.667 \quad \text{in}^4$$

Nivel de esfuerzos actuantes producidos por el momento flexionante.

De acuerdo con la expresión para determinar los esfuerzos por flexión, estos dependen de la distancia de la fibra a el eje neutro:

$$\sigma = - (M y) / It$$

a) Para el acero abajo de el eje neutro (esfuerzos multiplicados por "n", pues el acero se transformó a madera equivalente para obtener la sección transformada, distancia negativa, pues se encuentra por debajo de el eje neutro):

$$M := 60 \cdot 1000 \text{ lb-in}$$

Esfuerzo máximo (fibra más alejada de el eje neutro)

$$ya1 := -y \quad ya1 = -3.5 \quad \text{in}$$

$$\sigma_{a1} := \frac{-M \cdot ya1 \cdot n}{It} \quad \sigma_{a1} = 4571.8 \quad \text{psi en Tensión}$$

Esfuerzo mínimo

$$ya2 := -(y - h1) \quad ya2 = -3 \quad \text{in}$$

$$\sigma_{a2} := \frac{-M \cdot ya2 \cdot n}{It} \quad \sigma_{a2} = 3918.7 \quad \text{psi en Tensión}$$

b) Para la madera (distancia positiva y negativa, pues las fibras se encuentran tanto por arriba, como por debajo de el eje neutro):

Esfuerzo máximo (fibra más alejada por encima de el eje neutro)

$$ym1 := (h2 + h1) - y \quad ym1 = 3 \quad \text{in}$$

$$\sigma_{m1} := \frac{-M \cdot ym1}{It} \quad \sigma_{m1} = -195.9 \quad \text{psi en Compresión}$$

Esfuerzo máximo (fibra más alejada por debajo de el eje neutro)

$$ym2 := -(y - h1) \quad ym2 = -3 \quad \text{in}$$

$$\sigma_{m2} := \frac{-M \cdot ym2}{It} \quad \sigma_{m2} = 195.9 \quad \text{psi en Tensión}$$

c) Para el acero por encima de el eje neutro (esfuerzos multiplicados por "n", pues el acero se transformó a madera equivalente para obtener la sección transformada, distancia negativa, pues se encuentra por debajo de el eje neutro):

Esfuerzo máximo (fibra más alejada de el eje neutro)

$$ya3 := y \quad ya3 = 3.5 \quad \text{in}$$

$$\sigma_{a3} := \frac{-M \cdot y_{a3} \cdot n}{I_t} \quad \sigma_{a3} = -4571.8 \text{ psi en Compresión}$$

Esfuerzo mínimo

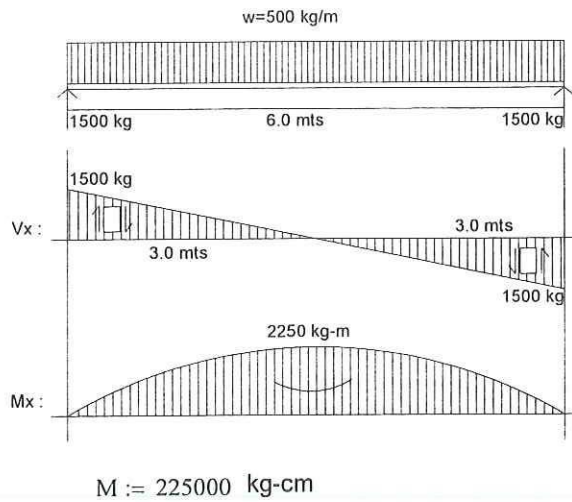
$$y_{a4} := (y - h_3) \quad y_{a4} = 3 \text{ in}$$

$$\sigma_{a4} := \frac{-M \cdot y_{a4} \cdot n}{I_t} \quad \sigma_{a4} = -3918.7 \text{ psi en Compresión}$$

Los esfuerzos máximos en Tensión y Compresión obtenidos para la madera y el esfuerzo máximo a Tensión obtenido para el acero, se deberán comparar con los esfuerzos admisibles de estos materiales y poder determinar si la sección es apropiada por esfuerzos a flexión, si estos esfuerzos determinados son mayores a los esfuerzos admisibles, será necesario rediseñar la sección transversal, ó cambiar las propiedades de los materiales por materiales más resistentes.

Solución ejercicio No. 1.3

Relación modular n , $n := 20$

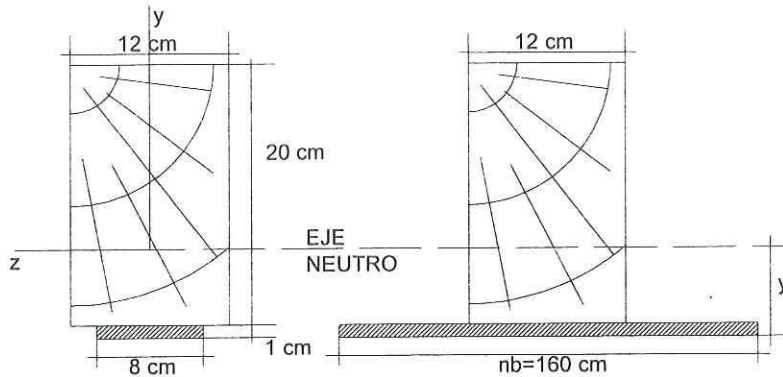


Sección transformada (equivalente en madera):

Ancho equivalente de las placas de acero

$$b := 8 \text{ cm}$$

$$b1 := n \cdot b \quad b1 = 160 \text{ cm}$$



Sección transversal

Sección transformada

Localización del Eje Neutro:

Elemento	h	b	Ai	yi	A*yi
1	1	160	160	0.5	80
2	20	12	240	11	2640
		$\Sigma =$	400		2720

$$y := \frac{2720}{400} \quad y = 6.8 \quad \text{cm}$$

Momento de inercia I_t de la sección transformada:

$$b1 = 160 \quad \text{cm} \qquad b2 := 12 \quad \text{cm}$$

$$h1 := 1.0 \quad \text{cm} \qquad h2 := 20 \quad \text{cm}$$

$$d1 := y - \frac{h1}{2} \quad d1 = 6.3 \quad \text{in} \quad d2 := \frac{h2}{2} + h1 - y \quad d2 = 4.2 \quad \text{in}$$

$$I1 := \frac{b1 \cdot h1^3}{12} + b1 \cdot h1 \cdot d1^2 \qquad I2 := \frac{b2 \cdot h2^3}{12} + b2 \cdot h2 \cdot d2^2$$

$$I_t := I1 + I2$$

$$I_t = 18597.3 \quad \text{cm}^4$$

Nivel de esfuerzos actuantes producidos por el momento flexionante.

De acuerdo con la expresión para determinar los esfuerzos por flexión, estos dependen de la distancia de la fibra a el eje neutro:

$$\sigma = - (M y) / I_t$$

a) Para el acero (esfuerzos multiplicados por "n", pues el acero se transformó a madera equivalente para obtener la sección transformada, distancia negativa, pues se encuentra por debajo de el eje neutro):

Esfuerzo máximo (fibra más alejada de el eje neutro)

$$ya1 := -y \qquad ya1 = -6.8 \quad \text{cm}$$

$$\sigma_{a1} := \frac{-M \cdot ya1 \cdot n}{I_t} \qquad \sigma_{a1} = 1645.4 \quad \text{kg/cm}^2 \text{ en Tensión}$$

Esfuerzo mínimo

$$ya2 := -(y - h1) \qquad ya2 = -5.8 \quad \text{cm}$$

$$\sigma_{a2} := \frac{-M \cdot ya2 \cdot n}{I_t} \qquad \sigma_{a2} = 1403.4 \quad \text{kg/cm}^2 \text{ en Tensión}$$

b) Para la madera (distancia positiva y negativa, pues las fibras se encuentran tanto por arriba, como por debajo de el eje neutro):

Esfuerzo máximo (fibra más alejada de el eje neutro)

$$ym1 := (h2 + h1) - y \qquad ym1 = 14.2 \quad \text{cm}$$

$$\sigma_{m1} := \frac{-M \cdot ym1}{I_t} \qquad \sigma_{m1} = -171.8 \quad \text{kg/cm}^2 \text{ en Compresión}$$

Esfuerzo mínimo

$$y_{m2} := -(y - h1)$$

$$y_{m2} = -5.8 \text{ cm}$$

$$\sigma_{m2} := \frac{-M \cdot y_{m2}}{I_t}$$

$$\sigma_{m2} = 70.2 \text{ kg/cm}^2 \text{ en Tensión}$$

Los esfuerzos máximos en Tensión y Compresión obtenidos para la madera y el esfuerzo máximo a Tensión obtenido para el acero, se deberán comparar con los esfuerzos admisibles de estos materiales y poder determinar si la sección es apropiada por esfuerzos a flexión, si estos esfuerzos determinados son mayores a los esfuerzos admisibles, será necesario rediseñar la sección transversal, ó cambiar las propiedades de los materiales por materiales más resistentes, o incluso se podría recurrir a modificar las condiciones de carga en la viga, como se procede a continuación.

Suponiendo los siguientes esfuerzos admisibles para la madera y el acero:

$$\sigma_{admm} := 80 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{adma} := 1200 \text{ kg/cm}^2$$

De acuerdo con los resultados previos:

$$\sigma_{maxm} := \sigma_{m1}$$

$$\sigma_{maxm} = -171.799$$

$$\sigma_{maxa} := \sigma_{a1}$$

$$\sigma_{maxa} = 1645.4$$

Estos niveles de esfuerzo actuante, están por encima de los niveles admisibles de esfuerzo en los materiales, por lo que para reducir los niveles de esfuerzo actuante, se procede a determinar cuál sería el nivel de carga actuante en la viga para que los esfuerzos actuantes se encuentren dentro de los niveles admisibles.

Momento flexionantes máximo admisible

$$\sigma = -M y / I_T \implies M = -\sigma I_T / y$$

Utilizando el esfuerzo admisible en la madera (esf. en compresión)

$$\sigma := -\sigma_{admm}$$

$$y1 := (h2 + h1) - y$$

$$M_{admm} := \frac{-\sigma \cdot I_t}{y1}$$

$$M_{admm} = 104773.71 \text{ kg-cm}$$

Utilizando el esfuerzo admisible en el acero (esf. en tensión)

$$\sigma := \sigma_{adma}$$

$$y2 := -y$$

$$M_{adma} := \frac{-\sigma \cdot I_t}{y2 \cdot n}$$

$$M_{adma} = 164094.12 \text{ kg-cm}$$

De acuerdo con estos resultados, $M_{adm} \text{ madera} < M_{adm} \text{ acero}$, por lo que la carga "w" que se puede aplicar a la viga, se determina a partir de la condición de Momento máximo admisible y puesto que se tiene una viga simplemente apoyada:

$$M_{max} := M_{admm}$$

$$L := 6 \quad \text{cm}$$

$$w := \frac{8 \frac{M_{\max}}{100}}{L^2} \quad w = 232.83 \quad \text{kg/m}$$

Esta carga "w", será la que produzca el esfuerzo máximo admisible en la madera, no así para el esfuerzo en el acero, por lo que se tendrá el caso de una viga sobre-diseñada, ya que el área de acero está excedido de acuerdo con la cantidad necesaria para que el diseño sea óptimo en términos de que se presenten los niveles de esfuerzos admisibles

Solución ejercicio No. 1.4

Módulos de elasticidad del acero y de la madera (Es y Ew respectivamente):

$$E_s := 204 \text{ MPa}$$

$$E_w := 8.5 \text{ MPa}$$

Relación modular n,

$$n := \frac{E_s}{E_w} \quad n = 24$$

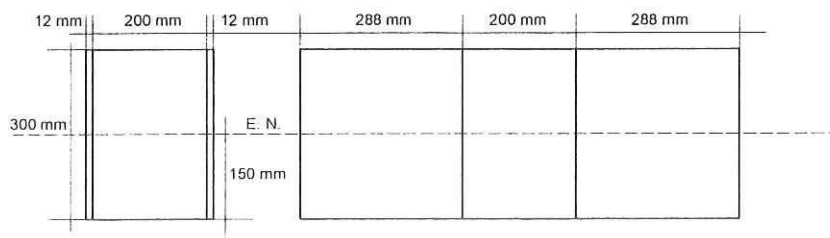
Sección transformada (equivalente en madera):

Ancho equivalente de las placas de acero

$$b := 12 \text{ mm}$$

$$b_1 := n \cdot b \quad b_1 = 288 \text{ mm}$$

$$b_3 := n \cdot b \quad b_3 = 288 \text{ mm}$$



Sección transversal

Sección transformada

Localización del Eje Neutro:

Puesto que la sección transformada es doblemente simétrica, el eje neutro, se localiza a media altura:

$$y := 150 \text{ mm}$$

Momento de inercia I_t de la sección transformada:

$$b_1 = 288 \text{ mm} \quad b_2 := 200 \text{ mm} \quad b_3 = 288 \text{ mm}$$

$$h_1 := 300 \text{ mm} \quad h_2 := 300 \text{ mm} \quad h_3 := 300 \text{ mm}$$

$$I_1 := \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} \quad I_2 := \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} \quad I_3 := \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12}$$

$$I_t := I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_t = 1.746 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

El momento permisible máximo, estará determinado por los esfuerzos máximos en los materiales de la sección transversal:

a) Para el acero (tanto en Tensión como en Compresión, ya que el Eje Neutro está localizado a media altura de la sección):

$$\sigma_s = -(M_s y) / I_t \cdot n$$

$$\sigma_{sadm} := 120 \text{ N/mm}^2 \text{ (en tensión)}$$

$$y := -150 \text{ mm (suponiendo momento positivo)}$$

$$M_s := \frac{-\sigma_{sadm} \cdot I_t}{n \cdot y} \quad M_s = 5.82 \times 10^7 \text{ N-mm} \quad (M_s = 58.2 \text{ kN-m})$$

b) Para la madera (tanto en Tensión como en Compresión, ya que el Eje Neutro está localizado a media altura de la sección):

$$\sigma_w = -(M_w y) / I_t$$

$$\sigma_{wadm} := 10 \text{ N/mm}^2 \text{ (en tensión)}$$

$$y := -150 \text{ mm (suponiendo momento positivo)}$$

$$M_w := \frac{-\sigma_{wadm} \cdot I_t}{y} \quad M_w = 1.164 \times 10^8 \text{ N-mm} \quad (M_w = 116.4 \text{ kN-m})$$

Rige el momento determinado por el esfuerzo admisible de el acero, puesto que $M_w > M_s$ por lo tanto, el momento flexionante permisible máximo, **$M_{max} = 58.2 \text{ kN-m}$**

Solución ejercicio No. 1.5

Módulos de elasticidad de la madera contrachapada y de el pino (E_w y E_p respectivamente):

$$E_w := 1600 \text{ ksi}$$

$$E_p := 1200 \text{ ksi}$$

Relación modular n ,

$$n := \frac{E_w}{E_p} \quad n = 1.333$$

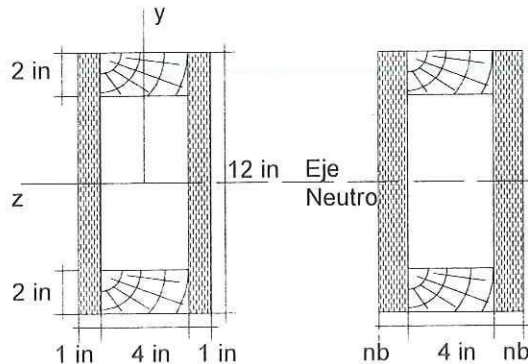
Sección transformada (equivalente en madera):

Ancho equivalente de la madera contrachapada en pino

$$b := 1 \text{ in}$$

$$b_1 := n \cdot b \quad b_1 = 1.333 \text{ in}$$

$$b_4 := n \cdot b \quad b_4 = 1.333 \text{ in}$$



Sección transversal

Sección transformada

Localización del Eje Neutro:

Puesto que la sección transformada es doblemente simétrica, el eje neutro, se localiza a media altura:

$$y := 6 \text{ in}$$

Momento de inercia I_t de la sección transformada:

$$b_1 = 1.333 \text{ in} \quad b_2 := 4 \text{ in} \quad b_3 := 4 \text{ in} \quad b_4 = 1.333 \text{ in}$$

$$h_1 := 12 \text{ in} \quad h_2 := 2 \text{ in} \quad h_3 := 2 \text{ in} \quad h_4 := 12 \text{ in}$$

$$d_1 := 0 \text{ in} \quad d_2 := 5 \text{ in} \quad d_3 := 5 \text{ in} \quad d_4 := 0 \text{ in}$$

$$I_1 := \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + b_1 \cdot h_1 \cdot d_1^2$$

$$I_2 := \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + b_2 \cdot h_2 \cdot d_2^2$$

$$I_3 := \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} + b_3 \cdot h_3 \cdot d_3^2$$

$$I_4 := \frac{b_4 \cdot h_4^3}{12} + b_4 \cdot h_4 \cdot d_4^2$$

$$I_t := I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I_t = 789.333 \text{ in}^4$$

El momento permisible máximo, estará determinado por los esfuerzos máximos en los materiales de la sección transversal:

a) Para la madera contrachapada (tanto en Tensión como en Compresión, ya que el Eje Neutro está localizado a media altura de la sección):

$$\sigma_w = -(M_w y) / I_t \cdot n$$

$$\sigma_{wadm} := 2.3 \text{ ksi (en tensión)}$$

$$y := -6 \text{ in (suponiendo momento positivo)}$$

$$M_w := \frac{-\sigma_{wadm} \cdot I_t}{n \cdot y} \quad M_w = 226.933 \text{ K-in}$$

b) Para el pino (tanto en Tensión como en Compresión, ya que el Eje Neutro está localizado a media altura de la sección):

$$\sigma_p = -(M_p y) / I_t$$

$$\sigma_{padm} := 1.8 \text{ ksi (en tensión)}$$

$$y := -6 \text{ in (suponiendo momento positivo)}$$

$$M_p := \frac{-\sigma_{padm} \cdot I_t}{y} \quad M_p = 236.8 \text{ K-in}$$

Rige el momento determinado por el esfuerzo admisible de la madera contrachapada, puesto que $M_p > M_w$ por lo tanto, el momento flexionante permisible máximo, **Mmax = 226.93 k-in**

VIGAS METALICAS COMPUESTAS

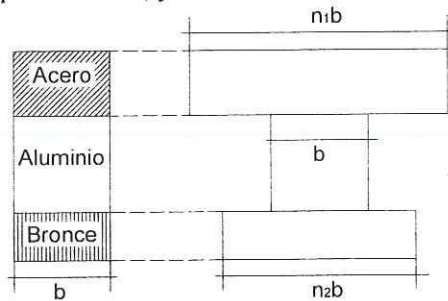
Es el tipo de vigas en donde la sección transversal está compuesta por la combinación de dos o más materiales metálicos.

En el estudio de la resistencia de las secciones metálicas compuestas:

- Los conceptos y metodologías desarrolladas previamente, es aplicable en este tipo de secciones
- Prevalece la limitación de comportamiento en el rango elástico-lineal
- Deberá asegurarse que los diferentes materiales se encuentren debidamente adheridos entre sí en la superficie de contacto

La sección transformada se obtendrá, como en los casos de estudio anterior, haciendo equivalente los diferentes materiales de los que esté compuesta la sección transversal, tomando como referencia las propiedades de uno de ellos, con lo cual se obtendrá una sección homogénea equivalente.

Considérese la siguiente sección transversal compuesta de tres diferentes materiales metálicos: Acero, Aluminio y Bronce; en la cual se toma como referencia el Aluminio (podría tomarse como referencia cualquiera de ellos) y se obtendrá la sección transformada equivalente en aluminio.



Las relaciones modulares n_1 y n_2 se determinan de la siguiente manera

$$n_1 = \frac{E_{\text{acero}}}{E_{\text{aluminio}}} \quad n_2 = \frac{E_{\text{bronce}}}{E_{\text{aluminio}}}$$

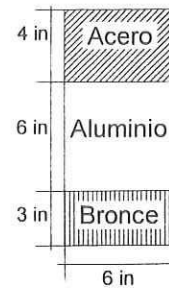
Algunos rangos de propiedades elásticas en estos materiales son

	Módulo elástico, E (ksi)	Esfuerzo de fluencia, σ_y (ksi)
Acero	28,000 – 30,000	30 – 50
Aluminio	10,000 – 11,400	5 – 70
Bronce	14,000 – 17,000	12 -100

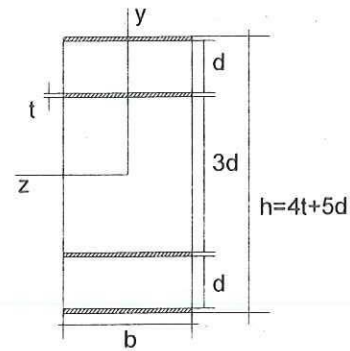
Ejercicio No. 1.6

Determinar la distribución de esfuerzos (σ) y deformaciones unitarias (ϵ) en la sección compuesta mostrada cuando se aplica un momento flexionante positivo de 350 k-ft.

Material	σ_y (ksi)	E (ksi)
Acero	33	29,000
Aluminio	20	10,500
Bronce	30	15,000

**Ejercicio No. 1.7**

En la figura se aprecia la sección transversal de una viga de tiras de aluminio separadas por un plástico de peso ligero. La viga tiene ancho $b=3.0$ in, las tiras de aluminio tienen espesor $t=0.1$ in y los segmentos de plástico tienen Alturas $d=1.2$ in y $3d=3.6$ in. La altura total de la viga es $h=6.4$ in. Los módulos de elasticidad para el aluminio y plástico son $E_a=11\,000$ ksi y $E_p=440$ ksi, respectivamente. Determine los respectivos esfuerzos máximos σ_a y σ_p en aluminio y plástico debidos a un momento flexionante de 8.0 k-in



Solución ejercicio No. 1.6

$$M := 350 \text{ klb-ft}$$

Relación modular n,

Sección	σ_{adm}	E	Rel. mod.	n
Acero	33	29000	$E_a / E_{al} =$	2.76
Aluminio	20	10500	$E_{al} / E_{al} =$	1.00
Bronce	30	15000	$E_{br} / E_{al} =$	1.43

$$n1 := 2.76 \quad n2 := 1.43$$

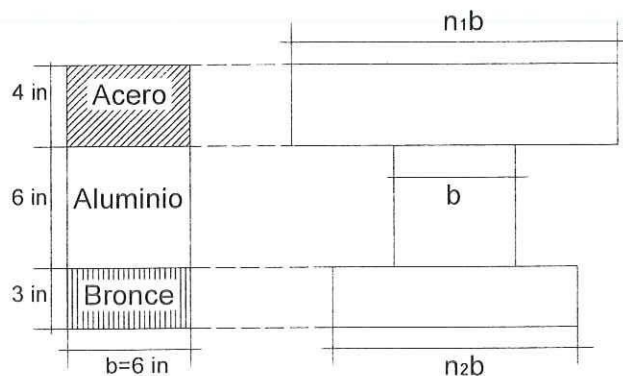
Sección transformada (equivalente en madera):

Ancho equivalente de el acero y el bronce

$$b := 6 \text{ in}$$

$$b1 := n1 \cdot b \quad b1 = 16.56 \text{ in}$$

$$b3 := n2 \cdot b \quad b3 = 8.58 \text{ in}$$



Sección transversal

Sección transformada

Localización del Eje Neutro:

Elemento	h	b	A_i	y_i	$A \cdot y_i$
Acero	4	16.56	66.24	11	728.64
Aluminio	6	6	36	6	216
Bronce	3	8.58	25.74	1.5	38.61
$\Sigma =$					983.25

$$y := \frac{983.25}{127.98} \quad y = 7.683 \text{ in}$$

Momento de inercia I_t de la sección transformada:

$$b1 = 16.56 \text{ in}$$

$$b2 := 6 \text{ in}$$

$$b3 = 8.58 \text{ in}$$

$$h1 := 4 \text{ in}$$

$$h2 := 6 \text{ in}$$

$$h3 := 3 \text{ in}$$

$$d1 := \frac{h1}{2} + h2 + h3 - y$$

$$d2 := \frac{h2}{2} + h3 - y$$

$$d3 := \frac{h3}{2} - y$$

$$d1 = 3.317 \text{ in}$$

$$d2 = -1.683 \text{ in}$$

$$d3 = -6.183 \text{ in}$$

$$I1 := \frac{b1 \cdot h1^3}{12} + b1 \cdot h1 \cdot d1^2$$

$$I2 := \frac{b2 \cdot h2^3}{12} + b2 \cdot h2 \cdot d2^2$$

$$I3 := \frac{b3 \cdot h3^3}{12} + b3 \cdot h3 \cdot d3^2$$

$$It := I1 + I2 + I3$$

$$It = 2030.4 \text{ cm}^4$$

Nivel de esfuerzos actuantes producidos por el momento flexionante.

De acuerdo con la expresión para determinar los esfuerzos por flexión, estos dependen de la distancia de la fibra a el eje neutro:

$$\sigma = - (M y) / It$$

a) Para el acero (esfuerzos multiplicados por "n1", pues el acero se transformó a aluminio equivalente para obtener la sección transformada, distancia positiva, pues se encuentra por arriba de el eje neutro):

Esfuerzo máximo (fibra más alejada de el eje neutro)

$$ya1 := h1 + h2 + h3 - y \quad ya1 = 5.317 \text{ in}$$

$$\sigma_{a1} := \frac{-M \cdot 12 \cdot ya1 \cdot n1}{It} \quad \sigma_{a1} = -30.36 \text{ klb/in}^2 \text{ en Compresión}$$

Esfuerzo mínimo

$$ya2 := h2 + h3 - y \quad ya2 = 1.317 \text{ in}$$

$$\sigma_{a2} := \frac{-M \cdot 12 \cdot ya2 \cdot n1}{It} \quad \sigma_{a2} = -7.52 \text{ klb/in}^2 \text{ en Compresión}$$

b) Para el aluminio (distancia positiva y negativa, pues las fibras se encuentran tanto por arriba, como por debajo de el eje neutro):

Esfuerzo máximo (fibra más alejada de el eje neutro)

$$yal1 := (h2 + h3) - y \quad yal1 = 1.317 \text{ in}$$

$$\sigma_{al1} := \frac{-M \cdot 12 \cdot yal1}{It} \quad \sigma_{al1} = -2.72 \text{ klb/in}^2 \text{ en Compresión}$$

Esfuerzo mínimo

$$yal2 := h3 - y \quad yal2 = -4.683 \text{ in}$$

$$\sigma_{al2} := \frac{-M \cdot 12 \cdot yal2}{It} \quad \sigma_{al2} = 9.69 \text{ klb/in}^2 \text{ en Tensión}$$

c) Para el bronce (distancia negativa, pues las fibras se encuentran por debajo de el eje neutro):

Esfuerzo máximo (fibra más alejada de el eje neutro)

$$y_{br1} := -y \quad y_{br1} = -7.683 \text{ in}$$

$$\sigma_{br1} := \frac{-M \cdot 12 \cdot y_{br1} \cdot n^2}{I_t} \quad \sigma_{br1} = 22.73 \text{ klb/in}^2 \text{ en Tensión}$$

Esfuerzo mínimo

$$y_{br2} := h_3 - y \quad y_{br2} = -4.683 \text{ in}$$

$$\sigma_{br2} := \frac{-M \cdot 12 \cdot y_{br2} \cdot n^2}{I_t} \quad \sigma_{br2} = 13.85 \text{ klb/in}^2 \text{ en Tensión}$$

Los esfuerzos máximos obtenidos para cada uno de los materiales que forman la sección transversal, se deberán comparar con los esfuerzos admisibles y poder determinar si la sección es apropiada por esfuerzos a flexión, si estos esfuerzos determinados son mayores a los esfuerzos admisibles, será necesario rediseñar la sección transversal, ó cambiar las propiedades de los materiales por materiales más resistentes.

Deformaciones unitarias ϵ de los materiales en la sección. Estas se determinan de acuerdo con la Ley de Hooke:

$$\epsilon = \sigma / E$$

a) En el acero

$$E_a := 29000 \text{ ksi}$$

$$\epsilon_{a1} := \frac{\sigma_{a1}}{E_a} \quad \epsilon_{a1} = -0.00105$$

$$\epsilon_{a2} := \frac{\sigma_{a2}}{E_a} \quad \epsilon_{a2} = -0.00026$$

b) En el aluminio

$$E_{al} := 10500 \text{ ksi}$$

$$\epsilon_{al1} := \frac{\sigma_{al1}}{E_{al}} \quad \epsilon_{al1} = -0.00026$$

$$\epsilon_{al2} := \frac{\sigma_{al2}}{E_{al}} \quad \epsilon_{al2} = 0.00092$$

c) En el bronce

$$E_{br} := 15000 \text{ ksi}$$

$$\epsilon_{br1} := \frac{\sigma_{br1}}{E_{br}} \quad \epsilon_{br1} = 0.00152$$

$$\epsilon_{br2} := \frac{\sigma_{br2}}{E_{br}} \quad \epsilon_{br2} = 0.00092$$

Solución ejercicio No. 1.7

Módulos de elasticidad de el aluminio y de el plastico (Ep y Eal respectivamente):

$$E_p := 440 \text{ ksi}$$

$$E_{al} := 11000 \text{ ksi}$$

Relación modular n,

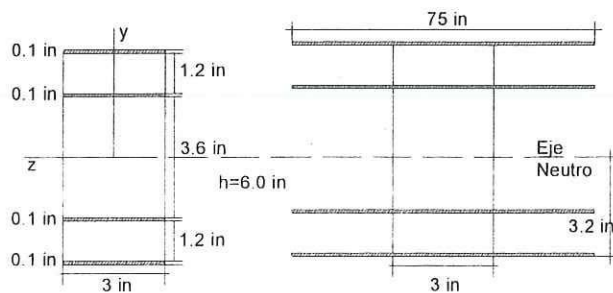
$$n := \frac{E_{al}}{E_p} \quad n = 25$$

Sección transformada (equivalente en plastico):

Ancho equivalente de el aluminio en plastico

$$b := 3 \text{ in}$$

$$b_1 := n \cdot b \quad b_1 = 75 \text{ in}$$



Sección transversal

Sección transformada

Localización del Eje Neutro:

Puesto que la sección transformada es doblemente simétrica, el eje neutro, se localiza a media altura:

$$y := 3.2 \text{ in}$$

Momento de inercia I_x de la sección transformada:

$$b_1 = 75 \text{ in} \quad b_2 := 3 \text{ in} \quad b_3 := 75 \text{ in} \quad b_4 := 3 \text{ in}$$

$$h_1 := 0.1 \text{ in} \quad h_2 := 1.2 \text{ in} \quad h_3 := 0.1 \text{ in} \quad h_4 := 3.6 \text{ in}$$

$$d_1 := 3.15 \text{ in} \quad d_2 := 2.5 \text{ in} \quad d_3 := 1.85 \text{ in} \quad d_4 := 0 \text{ in}$$

$$I_1 := \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + b_1 \cdot h_1 \cdot d_1^2 \quad I_2 := \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + b_2 \cdot h_2 \cdot d_2^2$$

$$I_3 := \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} + b_3 \cdot h_3 \cdot d_3^2 \quad I_4 := \frac{b_4 \cdot h_4^3}{12} + b_4 \cdot h_4 \cdot d_4^2$$

$$I_t := 2 \cdot I_1 + 2 \cdot I_2 + 2 \cdot I_3 + I_4 \quad I_t = 257.728 \text{ in}^4$$

Esfuerzos máximos en el aluminio y el plastico (estarán determinados por las distancias máximas, respecto a la localización de el Eje Neutro)

a) Para el aluminio (tanto en Tensión como en Compresión, ya que el Eje Neutro está localizado a media altura de la sección):

$$M := 8 \text{ k-in}$$

En compresion:

$$y_c := 3.2 \text{ in}$$

$$\sigma_{alc} := \frac{-M \cdot y_c}{I_t} \cdot n$$

$$\sigma_{alc} = -2.483 \text{ ksi (en compresión)}$$

En Tensión:

$$y_t := -3.2 \text{ in}$$

$$\sigma_{alt} := \frac{-M \cdot y_t}{I_t} \cdot n$$

$$\sigma_{alt} = 2.483 \text{ ksi (en Tensión)}$$

b) Para el plastico (tanto en Tensión como en Compresión, ya que el Eje Neutro está localizado a media altura de la sección):

$$M := 8 \text{ k-in}$$

En compresion:

$$y_c := 3.1 \text{ in}$$

$$\sigma_{pc} := \frac{-M \cdot y_c}{I_t}$$

$$\sigma_{pc} = -0.096 \text{ ksi (en compresión)}$$

En Tensión:

$$y_t := -3.1 \text{ in}$$

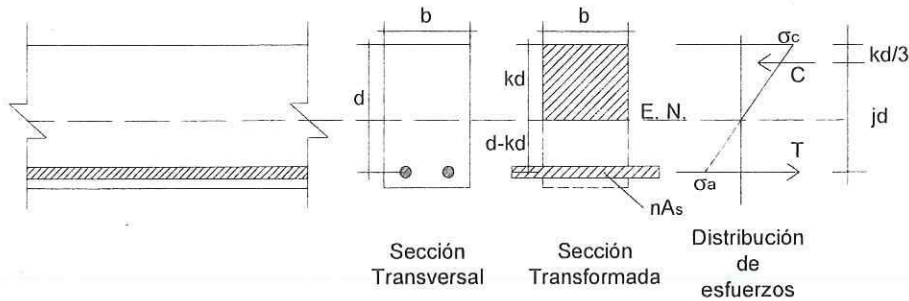
$$\sigma_{pt} := \frac{-M \cdot y_t}{I_t}$$

$$\sigma_{pt} = 0.096 \text{ ksi (en Tensión)}$$

VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

Las vigas de concreto reforzado pueden ser analizadas bajo las consideraciones ya presentadas para secciones compuestas, una de las características que hacen esto posible es que debido a la adherencia que existe entre el acero de refuerzo y el concreto, se puede decir que estos dos materiales en su área de contacto presentarán iguales deformaciones. Sin embargo, deberán hacerse algunas suposiciones con relación a la distribución de esfuerzos:

1. El concreto solo desarrolla esfuerzos a compresión
2. El área de concreto por debajo de el Eje Neutro servirá solo para alojar el acero de refuerzo, es decir, el concreto no desarrollará esfuerzos a tensión
3. Las varillas de acero de refuerzo están sometidas al mismo nivel de esfuerzos como si se encontrara a la misma distancia de el eje neutro



Tomando en cuenta que el momento estático de el área por arriba de el eje neutro es igual a el momento estático de el área por debajo de el eje neutro, entonces

$$(kd)(b) \left(\frac{kd}{2} \right) = nA_s (d - kd)$$

$$\frac{1}{2} (kd)^2 b = nA_s (d - kd)$$

De esta expresión se puede determinar el valor "kd", con lo que queda determinada la localización de el eje neutro (en la sección transformada).

El momentor par resistente se determina en función de la distancia "jd"

$$jd = d - \frac{kd}{3}$$

Con los valores determinados para "jd" y "kd" podrá determinarse con la fórmula de flexión $\left(\sigma = \frac{My}{I} \right)$,

los esfuerzos a compresión y tensión, sin embargo, es más directo calcular el momento resistente mediante el momento par formado por las fuerzas resistentes a compresión y tensión "C" y "T" respectivamente

$$M_c = C * jd, \text{ o bien, } M_T = T * jd$$

De esta manera, la fuerza máxima a compresión "C" resulta

$$C = \frac{1}{2} \sigma_c (bkd)$$

El momento resistente M_c en función de esta fuerza

$$M_c = C * jd = \frac{1}{2} \sigma_c (bkd)(jd)$$

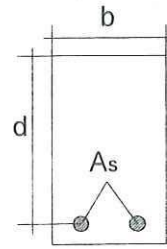
El momento resistente M_T en función de la fuerza a tensión en el acero de refuerzo

$$M_T = T * jd = \sigma_a (A_s)(jd)$$

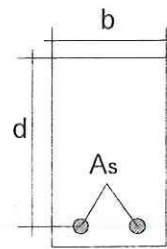
Ejercicio 1.8

Determinar el momento resistente, M_r , de una viga de concreto reforzado de sección transversal con dimensiones: $b=20$ cm y $d=32$ cm, como se muestra en la figura, cuando los esfuerzos, tanto en el acero como en el concreto, alcancen los niveles máximos admisibles, es decir, que los esfuerzos actuantes sean iguales a los esfuerzos admisibles. Considerar $n=10$

	σ_{adm} (kg/cm^2)
Concreto	70.0
Acero	1,600.0

**Ejercicio 1.9**

Determinar los esfuerzos máximos en compresión y en tensión de la viga de concreto reforzado mostrada en la figura, cuando se aplica un momento flexionante positivo de 4,000 kg-m. $b=24$ cm, $d=40$ cm, $A_s=8$ cm². Considerar $n=12$

**Ejercicio 1.10**

Determinar los esfuerzos en el concreto y el acero (usando la sección transformada) de la viga de concreto reforzada mostrada, cuando la sección transversal está sujeta a un momento flexionante de 4,000 kg-m. Comparar los esfuerzos calculados con los esfuerzos permisibles f_c y f_s en el concreto y el acero, hacer comentarios.

Usar: $d=35$ cm, $b=20$ cm

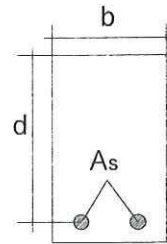
$$A_s=8.6 \text{ cm}^2$$

$$f_c=180 \text{ kg/cm}^2 \quad (f_c=0.5 f'_c)$$

$$f_s=1400 \text{ kg/cm}^2$$

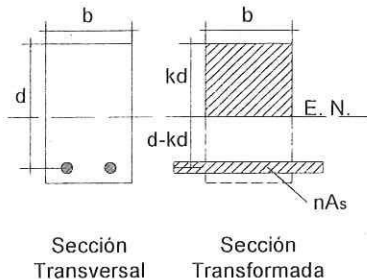
$$E_a=2041 \text{ ton/cm}^2$$

$$E_c=15000 \sqrt{f'_c}$$



Solución ejercicio No 1.8

Sección transversal $b := 20 \text{ cm}$
 $d := 32 \text{ cm}$



Relación modular $n := 10$

Esfuerzos admisibles $\sigma_{cadm} := 70 \text{ kg/cm}^2$

$\sigma_{aadm} := 1600 \text{ kg/cm}^2$

Localización de el eje neutro

Al igual el momento estático de el área de la sección transversal por encima de el eje neutro con el momento estático de el área por debajo de el eje neutro, se tiene

$$b(kd)(kd/2) = nAs(d-kd)$$

$$\frac{1}{2} (kd)^2 b = n d As - n kd As$$

$$\frac{1}{2} (kd)^2 b + n kd As - n d As = 0$$

Para poder determinar el valor de "kd" a partir de la expresión anterior, será necesario determinar el área de acero de refuerzo "As"

Al determinar la cantidad de acero de refuerzo para una condición de falla balanceada (es decir, que se presenten en el mismo instante los esfuerzos admisibles, tanto en el concreto como en el acero), los momentos resistentes, determinados en función de la resistencia de el concreto y de el acero, deberán ser iguales:

Momento resistente en función de el acero de refuerzo

$$M_r = \sigma_a A_s (jd)$$

Momento resistente en función de la fuerza a compresión en el concreto

$$M_r = \frac{1}{2} \sigma_c (b kd) (jd)$$

Igualando estos momentos resistentes

$$\sigma_a A_s (jd) = \frac{1}{2} \sigma_c (b kd) (jd)$$

$$A_s = \frac{1}{2} \sigma_c / \sigma_a (b kd)$$

Haciendo

$$\sigma_c := \sigma_{cadm}$$

$$\sigma_a := \sigma_{aadm}$$

$$C1 := \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_c}{\sigma_a} \cdot b \quad C1 = 0.438$$

El área de acero, queda expresada por

$$A_s = C1 \cdot kd$$

La ecuación para determinar "kd" queda expresada de la siguiente manera

$$\frac{1}{2} (kd)^2 b + n \cdot kd \cdot A_s - n \cdot d \cdot A_s = 0$$

$$\frac{1}{2} (kd)^2 b + n \cdot kd \cdot (C1 \cdot kd) - n \cdot d \cdot (C1 \cdot kd) = 0$$

$$(\frac{1}{2} b + n \cdot C1) (kd)^2 - n \cdot d \cdot (C1 \cdot kd) = 0$$

o bien

$$D1 \cdot kd^2 + D2 \cdot kd = 0$$

en donde

$$D1 := \frac{b}{2} + n \cdot C1 \quad D1 = 14.375$$

$$D2 := -n \cdot d \cdot C1 \quad D2 = -140$$

Resolviendo las raíces para "kd"

$$\text{coef} := \begin{pmatrix} D2 \\ D1 \end{pmatrix} \quad kd := \text{polyroots}(\text{coef})$$

Por lo que el eje neutro queda localizado por el valor

$$kd = 9.739 \text{ cm}$$

La distancia "jd" entre las fuerzas "T" y "C"

$$jd := d - \frac{kd}{3} \quad jd = 28.754 \text{ cm}$$

Con estos resultados, se pueden determinar el área de acero de refuerzo y el momento resistente de la sección transversal

$$A_s := C1 \cdot kd \quad A_s = 4.261 \text{ cm}^2$$

En función de el acero de refuerzo

$$M_{ra} := \sigma_a \cdot A_s \cdot jd \quad M_{ra} = 196024.7 \text{ kg-cm}$$

$$\frac{M_{ra}}{1000 \cdot 100} = 1.96 \text{ Ton-m}$$

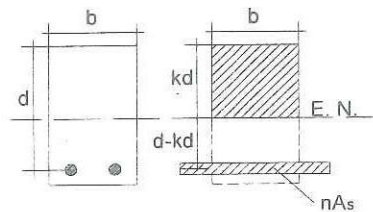
En función de la resistencia de el concreto

$$M_{rc} := \frac{1}{2} \cdot \sigma_c \cdot b \cdot kd \cdot jd \quad M_{rc} = 196024.7 \text{ kg-cm}$$

$$\frac{M_{rc}}{1000 \cdot 100} = 1.96 \text{ Ton-m}$$

Solución ejercicio No 1.9

Sección transversal $b := 24 \text{ cm}$ $A_s := 8 \text{ cm}^2$ $M := 4000 \text{ kg-cm}$
 $d := 40 \text{ cm}$



Sección Transversal Sección Transformada

Relación modular $n := 12$

Localización de el eje neutro

Al igualar el momento estático de el área de la sección transversal por encima de el eje neutro con el momento estático de el área por debajo de el eje neutro, se tiene

$$b(kd)(kd/2) = nA_s(d-kd)$$

$$\frac{1}{2} (kd)^2 b = n d A_s - n kd A_s$$

$$\frac{1}{2} (kd)^2 b + n kd A_s - n d A_s = 0$$

o bien

$$D1 kd^2 + D2 kd + D3 = 0$$

en donde

$$D1 := \frac{1}{2} \cdot b \qquad D1 = 12$$

$$D2 := n \cdot A_s \qquad D2 = 96$$

$$D3 := -n \cdot d \cdot A_s \qquad D3 = -3840$$

Resolviendo las raíces para "kd"

$$\text{coef} := \begin{pmatrix} D3 \\ D2 \\ D1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(\text{coef}) = \begin{pmatrix} -22.33 \\ 14.33 \end{pmatrix}$$

Por lo que el eje neutro queda localizado por el valor

$$kd := \text{polyroots}(\text{coef})_2$$

$$kd = 14.33 \text{ cm}$$

La distancia "jd" entre las fuerzas "T" y "C"

$$jd := d - \frac{kd}{3} \qquad jd = 35.223 \text{ cm}$$

Los esfuerzos en el concreto y acero de refuerzo, se pueden determinar con la expresión $\sigma = M y / I$, sin embargo, usemos el momento resistente para determinar $\sigma_{c,max}$ y $\sigma_{a,max}$

Momento resistente en función de la resistencia de el concreto
 $M_r = C j d \implies C = M / j d$

También

$$C = \frac{1}{2} \sigma_c (b k d) \implies \sigma_c = 2C / (b k d)$$

Por lo tanto,

$$\sigma_c := \frac{2 \cdot \left(\frac{M \cdot 100}{j d} \right)}{b \cdot k d} \quad \sigma_c = 66.038 \text{ kg/cm}^2$$

El esfuerzo máximo a compresión en el concreto es:

$$\sigma_{cmax} := \sigma_c \quad \sigma_{cmax} = 66.038 \text{ kg/cm}^2$$

Para determinar el esfuerzo en el acero de refuerzo, a partir de el momento resistente

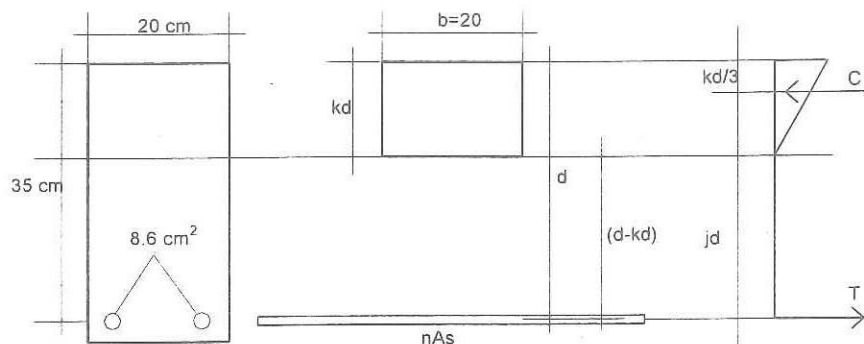
$$M_r = T j d = (\sigma_a A_s) j d$$

Haciendo que el momento resistente sea igual al momento máximo actuante en la sección transversal

$$M_r = M$$

$$\sigma_a := \frac{M \cdot 100}{A_s \cdot j d} \quad \sigma_a = 1419.5 \text{ kg/cm}^2$$

Solución ejercicio No 1.10



$$E_a := 2041000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c := 15000 \cdot \sqrt{180}$$

$$E_c = 2.012 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

Relación modular n:

$$n := \frac{E_a}{E_c} \quad n = 10.142$$

Localización de el eje neutro:

Igualando el momento estático de el área por debajo de el eje neutro, con el área por arriba de el eje neutro:

$$b \cdot (kd) \cdot (kd/2) = nA_s \cdot (d-kd)$$

$$1/2 \cdot b \cdot (kd)^2 + nA_s \cdot (kd) - nA_s \cdot d = 0$$

$$1/2 \cdot (20) \cdot (kd)^2 + (10.14)(8.6) \cdot (kd) - (10.14)(8.6) \cdot (35) = 0$$

$$10 (kd)^2 + 87.2 (kd) - 3052 = 0$$

$$kd := 13.65 \text{ cm}$$

Distancia "jd" entre las fuerzas a compresión "C" y a tensión "T"

$$d := 35 \text{ cm}$$

$$jd := d - \frac{kd}{3} \quad jd = 30.45 \text{ cm}$$

Momento resistente Mr de la sección:

$$Mr = C \cdot jd \quad ; \quad \text{ó} \quad Mr = T \cdot jd$$

Haciendo: Mr = M

$$Mr := 400000 \text{ kg-cm}$$

$$C := \frac{Mr}{jd} \quad C = 13136.3 \quad \text{kg}$$

Por equilibrio:

$$T := C$$

Esfuerzo a compresión en el concreto, σ_c :

$$b := 20 \quad \text{cm}$$
$$\sigma_c := \frac{2 \cdot C}{b \cdot kd} \quad \sigma_c = 96.237 \quad \text{kg/cm}^2$$

Esfuerzo a tensión en el acero, σ_s :

$$A_s := 8.6 \quad \text{cm}^2$$

$$\sigma_s := \frac{T}{A_s} \quad \sigma_s = 1527.5 \quad \text{kg/cm}^2$$

Comparación de esf. permisibles vs. esf. actuantes:

Esf. perm. del concreto $f_c = 90 \text{ kg/cm}^2 < \text{esf. actuante } \sigma_c = 96.237 \text{ kg/cm}^2$

Esf. perm. del acero $f_s = 1400 \text{ kg/cm}^2 < \text{esf. actuante } \sigma_s = 1527.5 \text{ kg/cm}^2$

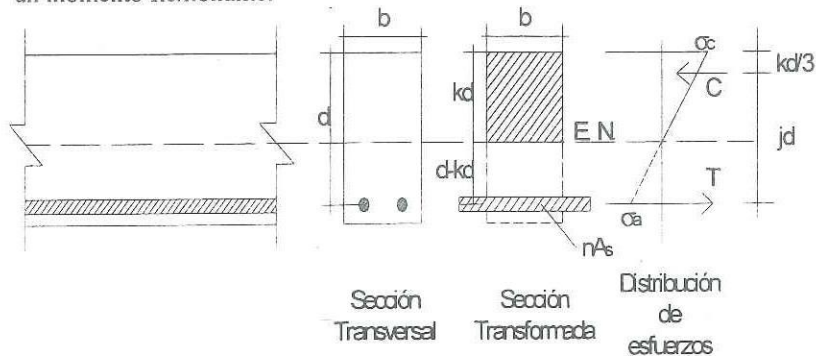
Comentarios:

1. Los esfuerzos actuantes son mayores a los esfuerzos permisibles.
2. La sección no es adecuada para la condición de carga.
3. La viga deberá ser diseñada para que los esfuerzos actuantes en el concreto y en el acero de refuerzo, sean menores (ó iguales) a los esfuerzos permisibles.
4. Deberán incrementarse las dimensiones de la sección transversal y área de acero de refuerzo suministrado.

DISEÑO DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO

En el procedimiento de diseño que se presenta a continuación se considera que tanto el acero de refuerzo como el concreto desarrollan esfuerzos dentro de el límite elástico de comportamiento esfuerzo-deformación, por esta razón el criterio de diseño está basado en la **teoría elástica**.

Con la finalidad de obtener un diseño óptimo, tanto el acero como el concreto, deben alcanzar los niveles máximos admisibles de esfuerzo en el mismo instante al ser sometida la sección transversal a la acción de un momento flexionante.



Por triángulos semejantes, de el diagrama de distribución de esfuerzos:

$$\frac{kd}{\sigma_c} = \frac{d}{\sigma_t + \sigma_c}$$

o bien,

$$\frac{kd}{d} = \frac{\sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c}$$

$$k = \frac{\sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c}$$

Sabemos de la sección transformada, que el esfuerzo a tensión en el acero de refuerzo σ_a

$$\sigma_a = n\sigma_t$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_a}{n}$$

en donde σ_t es el esfuerzo a tensión de el acero de refuerzo en la sección transformada. Con esta expresión, es posible determinar el valor de "k" en función de los esfuerzos admisibles de el concreto y el acero σ_a y σ_c respectivamente

$$k = \frac{\sigma_c}{\frac{\sigma_a}{n} + \sigma_c}$$

El uso de esta expresión, nos permite definir la posición de el eje neutro, puesto que al diseñar la sección, las propiedades de los materiales (esfuerzos admisibles en el acero y concreto) son valores previamente establecidos.

Una vez determinada la posición de el eje neutro, se puede determinar el valor de "j" (que define la distancia entre las fuerzas a compresión "C" y tensión "T" en el concreto y acero de refuerzo respectivamente), con lo cual podremos determinar el momento resistente de la sección, M_r

$$jd = d - \frac{kd}{3}$$

$$j = 1 - \frac{k}{3}$$

Así, el momento resistente de la sección transversal, M_r se determina por

$$M_r = C j d = \frac{1}{2} \sigma_c (b) (kd) j d = \frac{1}{2} \sigma_c k j b d^2$$

$$bd^2 = 2M_r / (\sigma_c k j)$$

Esta última expresión (conocida como “escuadría de la sección”) es útil para determinar las dimensiones de la sección transversal, una vez que se establece un valor, ya sea para el peralte efectivo “ d ”, o bien para el ancho de la sección “ b ”. Se recomienda la siguiente relación al determinar el proporcionamiento de las dimensiones de la sección transversal en vigas:

$$\frac{d}{b} \geq 1.5$$

$$\text{Si tomamos } \frac{d}{b} = 1.5 \quad \rightarrow \quad b = \frac{d}{1.5}$$

La expresión de la esquadria sería

$$bd^2 = \left(\frac{d}{1.5}\right)d^2$$

$$\frac{d^3}{1.5} = \frac{2M_r}{\sigma_c k j}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{3M_r}{\sigma_c k j}}$$

$$\text{Si se considerara } b = \frac{d}{2}$$

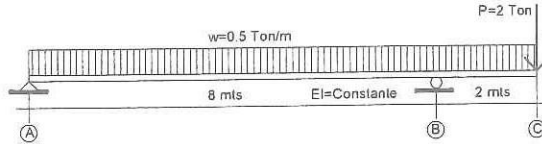
$$d = \sqrt[3]{\frac{4M_r}{\sigma_c k j}}$$

Ejercicio No. 1.11

Diseñar la sección de la viga de concreto reforzado, determinando las dimensiones de la sección transversal y la cantidad de acero de refuerzo, cuando se aplican las condiciones de carga mostradas.

Usar:

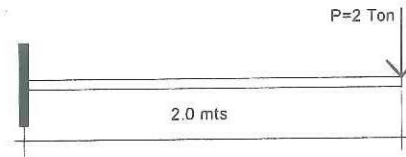
$$\begin{aligned} f'_c &= 100 \text{ kg/cm}^2 \\ f_s &= 1680 \text{ kg/cm}^2 \\ E_c &= 212,200 \text{ kg/cm}^2 \\ E_a &= 2'040,000 \text{ kg/cm}^2 \\ d/b &= 2.0 \end{aligned}$$

**Ejercicio No. 1.12**

Diseñar la viga de concreto reforzado en voladizo mostrada en la fig., determinando las dimensiones de la sección rectangular y cantidad de acero de refuerzo requerido.

Usar:

$$\begin{aligned} f'_c &= 180 \text{ kg/cm}^2 \quad (f_c = 0.5f'_c) \\ f_s &= 1400 \text{ kg/cm}^2 \\ E_a &= 2041 \text{ ton/cm}^2 \\ E_c &= 15000 \sqrt{f'_c} \\ d/b &= 2.0 \end{aligned}$$



Solución ejercicio No. 1.11

$$f_c := 100 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s := 1680 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_a := 2040000 \text{ kg/cm}^2$$

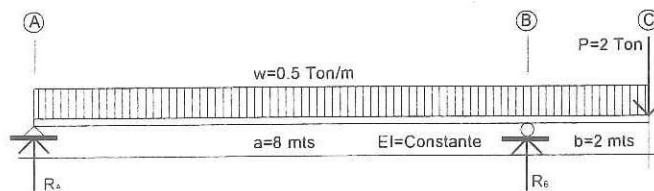
$$E_c := 212000 \text{ kg/cm}^2$$

Relación modular $n := \frac{E_a}{E_c} \quad n = 9.623$

Determinación de el momento máximo actuante

$$w := 0.5 \text{ Ton/m} \quad a := 8.0 \text{ mts}$$

$$P := 2 \text{ Ton} \quad b := 2.0 \text{ mts}$$



Reacciones

Sumatoria de momentos en el apoyo en A:

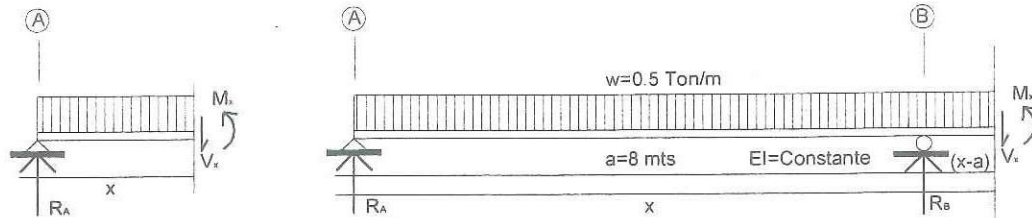
$$R_b \cdot a - w \cdot (a+b)^2 / 2 - P \cdot b = 0$$

$$R_b := \frac{\frac{w \cdot (a+b)^2}{2} + P \cdot (a+b)}{a} \quad R_b = 5.625$$

Por equilibrio de fuerzas verticales:

$$R_a + R_b - w \cdot (a+b) - P = 0$$

$$R_a := -R_b + w \cdot (a+b) + P \quad R_a = 1.375$$



Ecuación de fuerza cortante V_x

Para $0 < x < a$

Para $a < x < (a+b)$

$$R_a - w x - V_x = 0$$

$$R_a + R_b - w x - V_x = 0$$

$$V_x = R_a - w x$$

$$V_x = R_a + R_b - w x$$

Distancia, desde el apoyo izquierdo, en donde la fuerza cortante es cero ($V_x = 0$)

$$x := \frac{R_a}{w} \quad x = 2.75 \quad \text{mts}$$

Fuerza cortante en diferentes puntos de la viga:

$$x_a := 0 \quad V_a := R_a - w \cdot x_a \quad V_a = 1.375$$

$$x_d := x \quad V_d := R_a - w \cdot x_d \quad V_d = 0$$

$$x_b := a \quad V_b := R_a - w \cdot x_b \quad V_b = -2.625$$

$$x_{b1} := a \quad V_{b1} := R_a + R_b - w \cdot x_{b1} \quad V_{b1} = 3$$

$$x_c := a + b \quad V_c := R_a + R_b - w \cdot x_c \quad V_c = 2$$

Ecuación de momento flexionante M_x

Para $0 < x < a$

Para $a < x < (a+b)$

$$- R_a x + w x^2 / 2 + M_x = 0$$

$$- R_a x - R_b (x-a) + w x^2 / 2 + M_x = 0$$

$$M_x = R_a x - w x^2 / 2$$

$$M_x = R_a x + R_b (x-a) - w x^2 / 2$$

Momento flexionante en diferentes puntos de la viga:

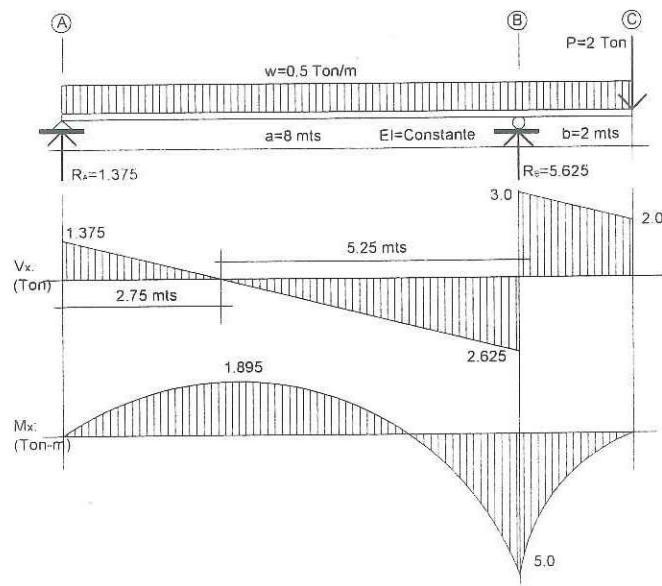
$$x_a := 0 \quad M_a := R_a \cdot x_a - \frac{w \cdot x_a^2}{2} \quad M_a = 0$$

$$x_d := x \quad M_d := R_a \cdot x_d - \frac{w \cdot x_d^2}{2} \quad M_d = 1.891$$

$$x_b := a \quad M_b := R_a \cdot x_b - \frac{w \cdot x_b^2}{2} \quad M_b = -5$$

$$x_{b1} := a \quad M_{b1} := R_a \cdot x_b + R_b \cdot (x_{b1} - a) - \frac{w \cdot x_b^2}{2} \quad M_{b1} = -5$$

$$x_c := a + b \quad M_c := R_a \cdot x_c + R_b \cdot (x_c - a) - \frac{w \cdot x_c^2}{2} \quad M_c = 0$$



$$M_{\max} := -M_b$$

De estos resultados, utilizar como momento máximo flexionante para diseñar la sección

$$M_r := M_{\max} \cdot 1000 \cdot 100$$

$$M_r = 500000 \quad \text{kg-cm}$$

Determinación de los valores "k" y "j" para ser utilizados posteriormente en el cálculo de la escuadría de la sección

$$\sigma_c := f_c \quad \sigma_a := f_s$$

$$k := \frac{\sigma_c}{\frac{\sigma_a}{n} + \sigma_c} \quad k = 0.364$$

$$j := 1 - \frac{k}{3} \qquad j = 0.879$$

Utilizando la relación $b = d / 2$

$$d := \sqrt[3]{\frac{4 \cdot Mr}{\sigma_c \cdot j \cdot k}} \qquad d = 39.686$$

Por lo tanto, el ancho de la sección transversal, será:

$$b := \frac{d}{2} \qquad b = 19.843 \text{ cm}$$

Para efectos prácticos, utilizar $b := 20 \text{ cm}$

Con este ancho "b", deberá revisarse, el valor de el peralte efectivo, para que la escuadría de la sección (bd^2), siga siendo el mismo valor

$$bd^2 = 2Mr / (\sigma_c j k)$$

$$d^2 = 2Mr / (\sigma_c j k b)$$

$$d := \sqrt{\frac{2 \cdot Mr}{\sigma_c \cdot j \cdot k \cdot b}} \qquad d = 39.53$$

El área de acero, se determina a partir de la expresión para el momento resistente:

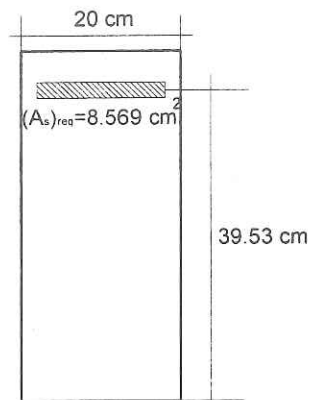
$$Mr = (A_s \sigma_a) j d$$

$$A_s := \frac{Mr}{\sigma_a \cdot j \cdot d} \qquad A_s = 8.569 \text{ cm}^2$$

Si se utilizara varilla #4 ($A_s \text{ var} = 1.27 \text{ cm}^2$)

$$\text{vars} := \frac{A_s}{1.27} \qquad \text{vars} = 6.747$$

Digamos 7#4



Utilizando iguales dimensiones para la sección transversal en toda la longitud de la viga, lo único que variaría, sería la cantidad de el acero de refuerzo. El que se determinó, es para el momento máximo negativo en el apoyo "B" de la viga. Para el caso de el momento máximo positivo

$$M_r := M_d \cdot 1000 \cdot 100$$

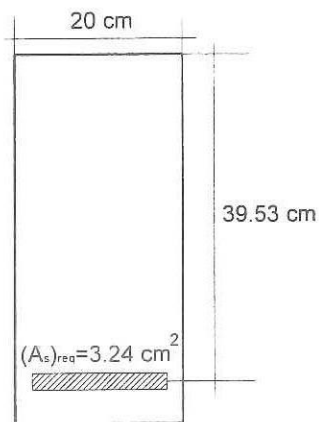
$$M_r = 189062.5 \quad \text{kg-cm}$$

$$A_s := \frac{M_r}{\sigma_a \cdot j \cdot d} \qquad A_s = 3.24 \quad \text{cm}^2$$

Si se utilizara varilla #4 ($A_s \text{ var} = 1.27 \text{ cm}^2$)

$$\text{vars} := \frac{A_s}{1.27} \qquad \text{vars} = 2.551$$

Digamos 3#4



Solución ejercicio No.1.12

$$f_c := 90 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s := 1400 \text{ kg/cm}^2$$

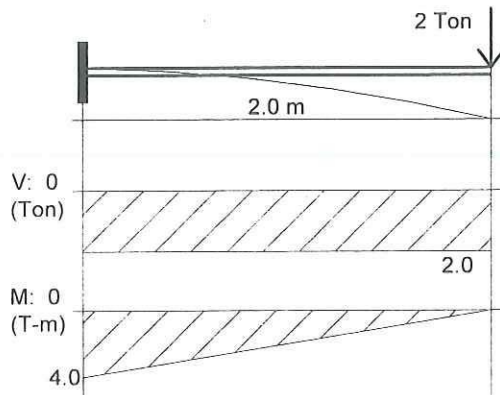
$$E_a := 2041000 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_c := 15000 \cdot \sqrt{180}$$

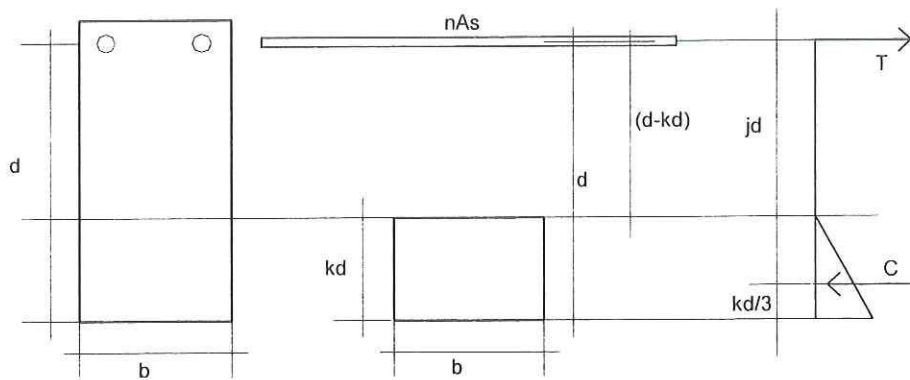
$$E_c = 201246 \text{ kg/cm}^2$$

Relación modular n:

$$n := \frac{E_a}{E_c} \quad n = 10.142$$



Dada la condición de carga y apoyo de la viga, la tensión en la sección transversal ocurrirá en el área por arriba de el eje neutro y la compresión se presentará en el área por debajo de el eje neutro.



Considerando que el acero de refuerzo y el concreto alcancen el nivel de esfuerzo admisible en el mismo instante:

$$\sigma_c := f_c$$

$$\sigma_s := f_s$$

$$k := \frac{\sigma_c}{\frac{\sigma_s}{n} + \sigma_c} \quad k = 0.395$$

Determinación de "j":

$$j := 1 - \frac{k}{3} \quad j = 0.868$$

Módulo de sección bd^2 :

Haciendo $M_r = M$

$$M_r := 400000 \text{ kg-cm}$$

$$bd^2 := \frac{2 \cdot M_r}{\sigma_c \cdot k \cdot j} \quad bd^2 = 25934.51 \text{ cm}^3$$

Si $d / b = 2.0$, $b = d / 2.0$

$$bd^2 = (d / 2.0) (d^2) = 1/2 d^3 = 25934.51 \text{ cm}^3$$

$$d := \sqrt[3]{2(25934.51)} \quad d = 37.294 \text{ cm}$$

Para efectos prácticos, usar

$$b := 20 \text{ cm}$$

$$bd^2 = 25934.51$$

$$d^2 = 25934.51 / b$$

$$d := \sqrt{\frac{25934.51}{b}} \quad d = 36.01 \text{ cm}$$

Determinación de el área de acero de refuerzo requerido.

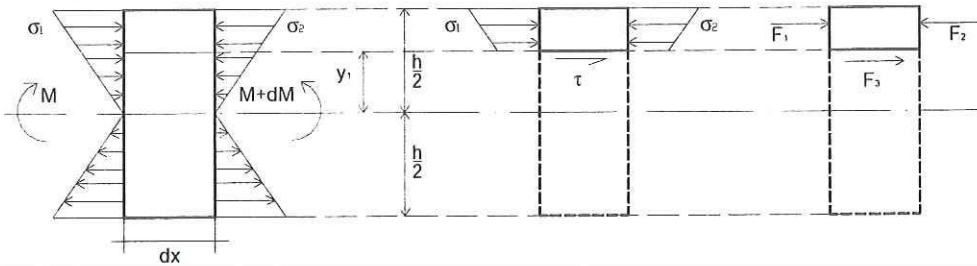
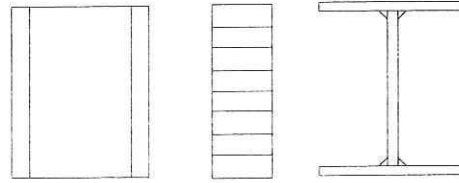
Por equilibrio, $C = T$

$$C := \frac{1}{2} \sigma_c \cdot b \cdot k \cdot d \quad C = 12790.7$$

$$A_s := \frac{C}{\sigma_s} \quad A_s = 9.136 \text{ cm}^2$$

Esfuerzos cortantes en Vigas Compuestas

Al ser construidas las vigas compuestas por la unión de dos o más materiales distintos, será necesario determinar la fuerza cortante que se transmite de un material a otro, para asegurar el comportamiento supuesto, al considerar que las deformaciones en la unión de los materiales, es la misma una vez que se ha presentado el efecto de flexión en la sección transversal.



$$F_1 = \int \sigma_1 dA = \int \frac{My}{I} dA \quad ; \quad F_2 = \int \sigma_2 dA = \int \frac{(M+dM)y}{I} dA$$

Por equilibrio:

$$F_1 + F_3 - F_2 = 0$$

$$F_3 = F_2 - F_1$$

$$F_3 = \int \frac{(M+dM)y}{I} dA - \int \frac{My}{I} dA = \int \frac{(dM)y}{I} dA$$

Si los esfuerzos cortantes τ se distribuyen a través del ancho "b" de la sección transversal de la viga, de manera uniforme: $F_3 = \tau b dx$, en donde "b dx" es el area de la superficie en el corte, entonces

$$F_3 = \int \frac{(dM)y}{I} dA = \tau b dx$$

Por lo que

$$\tau = \frac{dM}{dx} \left(\frac{1}{Ib} \right) \int y dA$$

en donde $\int y dA$ es el momento estático del area definida por la línea de corte, respecto al eje neutro.

Si $Q = \int y dA$ y $\frac{dM}{dx} = V$, entonces

$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

Ahora, si F_3 se divide por la longitud "dx", se obtendrá la fuerza cortante por unidad de distancia (flujo cortante), a lo largo del eje longitudinal de la viga:

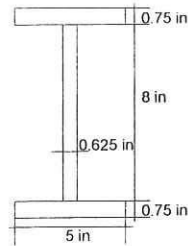
$$F_3 = \int \frac{(dM)y}{I} dA$$

$$\frac{F_3}{dx} = \frac{dM}{dx} \left(\frac{1}{I} \right) \int y dA$$

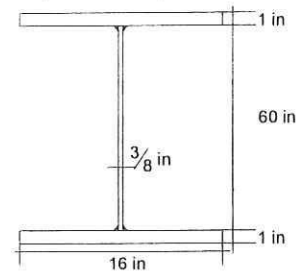
$$\boxed{\frac{F_3}{dx} = \frac{VQ}{I}}$$

Ejercicio No. 1.13

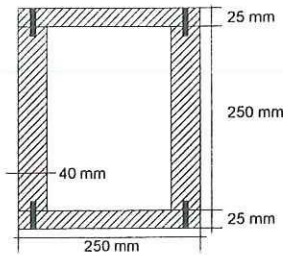
Una Viga "I" prefabricada de acero estructural que sirve como larguero de piso, tiene la sección transversal mostrada. La carga permisible por cortante para las juntas entre el alma y los patines es de 70 lb/in en dirección longitudinal. Determinar la fuerza cortante máxima en la viga.

**Ejercicio No. 1.14**

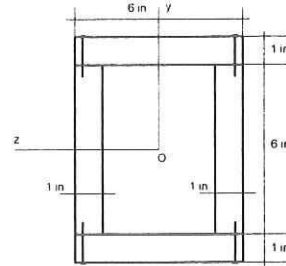
Una trabe armada de acero con la sección transversal mostrada en la figura, está hecha de 2 placas de patín de 16 x 1 in y una placa de alma de 60 x 3/8 in. Las placas están unidas por 4 cordones de soldadura de filete a todo lo largo de la trabe. Si la trabe está sometida a una fuerza cortante de 250 kips, determinar la fuerza "f" (por pulgada de longitud de soldadura) que debe ser resistida por cada cordón de soldadura.

**Ejercicio No. 1.15**

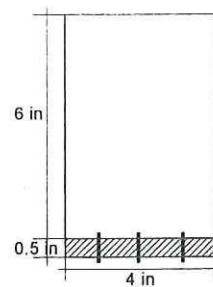
Una viga de cajón de madera está hecha con 2 tablones de 250 x 40 mm y 2 tablones de 250 x 25 mm. Los tablones están clavados con un espaciamiento $s=100$ mm. Determinar la fuerza cortante máxima permisible si cada clavo tiene una fuerza cortante permisible $f=750$ N.

**Ejercicio No. 1.16**

En la fig. se muestra una viga de caja hecha con cuatro tablas de madera de tamaño 6 x 1 in (dimensiones reales). Las tablas están unidas por tornillos cuya carga permisible en cortante es de $F=210$ lb cada una. Calcule el espaciamiento longitudinal máximo permisible s_{max} para los tornillos si la fuerza cortante V es de 1150 lb.

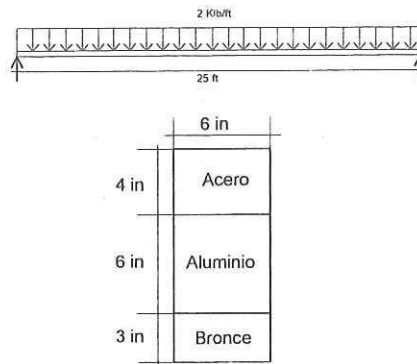
**Ejercicio No. 1.17**

Utilizando los resultados de el ejercicio No.1.1 (localización del eje neutro, momento de inercia I_t y sección transformada), determinar la fuerza cortante máxima (V_{max}) que puede actuar en la sección transversal mostrada, si la union de la placa de acero con la Madera se hace por medio de 3 tornillos con una carga permisible en cortante de $F=210$ lb cada uno y el espaciamiento $s=2$ in a lo largo de la viga.



Ejercicio No. 1.18

Utilizando los resultados de el ejercicio No 1.6 (localizacion del eje neutro, momento de inercia I_t y sección transformada), determinar el esfuerzo cortante τ (en psi) en la union de cada uno de los materiales de la sección mostrada, correspondiente a una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida.



Solución ejercicio No. 1.13

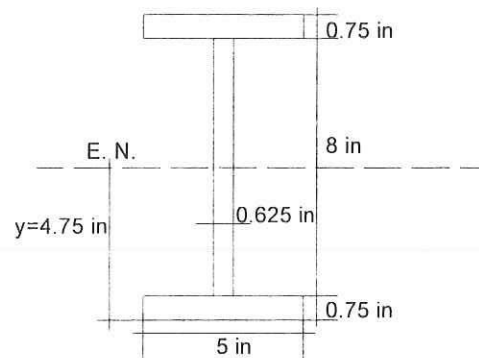
Sabemos que el flujo cortante f , está determinado por

$$f = VQ / I \quad \Rightarrow \quad V = fI / Q$$

por lo tanto la fuerza cortante máxima, estará determinada por:

$$V_{\max} = f_{\text{perm}} I / Q$$

Determinación de el momento de inercia "I" de la sección:



Sección	b	h	Area	di	li
1	5	0.75	3.75	4.375	71.953
2	0.625	8	5	0	26.667
3	5	0.75	3.75	-4.375	71.953
$\Sigma =$					170.573

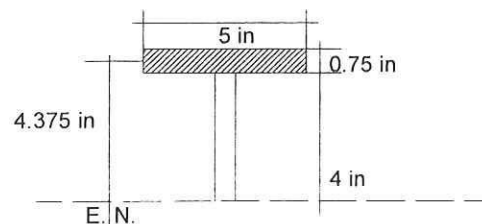
$$I := 170.573 \text{ in}^4$$

Momento estático "Q" de el área por arriba de la unión patín-alma de la sección (en donde se presenta el esfuerzo cortante que actúa sobre los cordones de soldadura), con respecto a el eje neutro :

$$b := 5 \text{ in} \quad h := 9.5 \text{ in}$$

$$t := 0.75 \text{ in}$$

$$d := \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \quad d = 4.375 \text{ in}$$



$$Q := b \cdot t \cdot d \quad Q = 16.406 \text{ in}^3$$

La fuerza cortante máxima que puede ser aplicada en la unión es:

$$f_{\text{perm}} := 70 \text{ lb/in}$$

$$V_{\text{max}} := \frac{f_{\text{perm}} \cdot I}{Q}$$

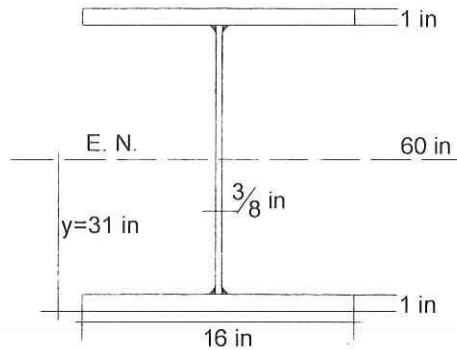
$$V_{\text{max}} = 727.778 \text{ lb}$$

Solución ejercicio No. 1.14

Al tener dos cordones de soldadura en cada una de las uniones alma-patín de la sección, el flujo cortante resistente será

$$2f = VQ / I \quad \Rightarrow \quad f = VQ / 2I$$

Determinación de el momento de Inercia "I" de la sección



Sección	b	h	Area	di	li
1	16	1	16	30.5	14885.33
2	0.375	60	22.5	0	6750.00
3	16	1	16	-30.5	14885.33
$\Sigma =$					36520.67

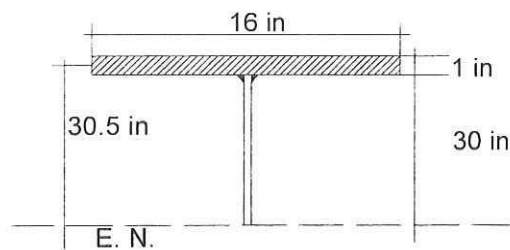
$$I := 36520.67 \text{ in}^4$$

Momento estático "Q" de el área por arriba de la unión patín-alma de la sección (en donde se presenta el esfuerzo cortante que actúa sobre los cordones de soldadura), con respecto a el eje neutro :

$$b := 16 \text{ in} \quad h := 62 \text{ in}$$

$$t := 1.0 \text{ in}$$

$$d := \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \quad d = 30.5 \text{ in}$$



$$Q := b \cdot t \cdot d \quad Q = 488 \quad \text{in}^3$$

Por lo tanto, el flujo cortante actuante "f" en la unión alma-patín

$$V := 250 \quad \text{kips}$$

$$f := \frac{V \cdot Q}{2 \cdot I}$$

$$f = 1.67 \quad \text{k/in}$$

Es decir, 1.67 kips en cada pulgada en cada uno de los cordones de soldadura en la unión.

Solución ejercicio No. 1.15

La capacidad de fuerza cortante de la unión de la madera, está determinada por los dos clavos utilizados, por lo que el flujo cortante es:

$$2f = VQ / I \quad \Rightarrow \quad V = 2f I / Q$$

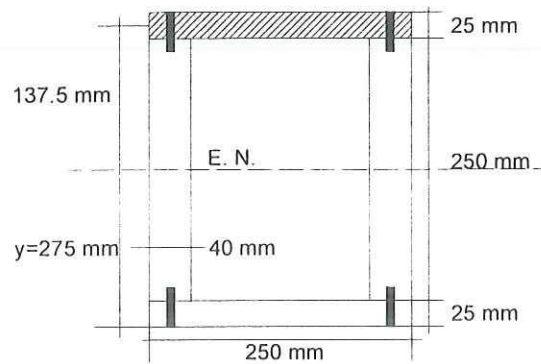
El flujo cortante admisible de la unión, dependerá de la capacidad de fuerza cortante de los clavos y de la separación "s" entre los clavos:

$$f = F / s$$

Por lo tanto la fuerza cortante máxima que puede aplicarse a la unión, es:

$$V_{max} = 2(F / s) I / Q$$

Determinación de el momento de Inercia "I" de la sección



Sección	b	h	Area	di	li
1	25	2.5	62.5	13.75	11848.96
2	4	25	100	0	5208.33
3	4	25	100	0	5208.33
4	25	2.5	62.5	-13.75	11848.96
$\Sigma =$					34114.58

$$I := 34114.58 \text{ in}^4$$

Momento estático "Q" de el área por arriba de la unión patín-alma de la sección (en donde se presenta el esfuerzo cortante que actúa sobre los clavos), con respecto a el eje neutro :

$$b := 25 \text{ cm} \quad h := 30 \text{ cm}$$

$$t := 2.5 \text{ cm}$$

$$d := \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \quad d = 13.75 \text{ cm}$$

$$Q := b \cdot t \cdot d \quad Q = 859.375 \text{ cm}^3$$

La fuerza cortante máxima que puede ser aplicada en la unión es:

$$F_{\text{perm}} := 750 \text{ N} \quad s := 10 \text{ cm}$$

$$V_{\text{max}} := \frac{2 \cdot \left(\frac{F_{\text{perm}}}{s} \right) \cdot I}{Q}$$

$$V_{\text{max}} = 5954.5 \text{ N}$$

Momento estático del área por arriba de la línea de corte, con respecto a el Eje Neutro:

$$a := 1 \text{ in} \quad b := 6 \text{ in}$$

$$Q := (a \cdot b) \cdot (3.5)$$

$$Q = 21 \text{ in}^3$$

La separación máxima de los tornillos a lo largo de la viga, será:

en donde:

$$F := 210 \text{ lb}$$

$$V := 1150 \text{ lb}$$

$$s_{\max} := \frac{2 \cdot F \cdot I}{V \cdot Q}$$

$$s_{\max} = 3.2 \text{ in}$$

Solución ejercicio No. 1.17

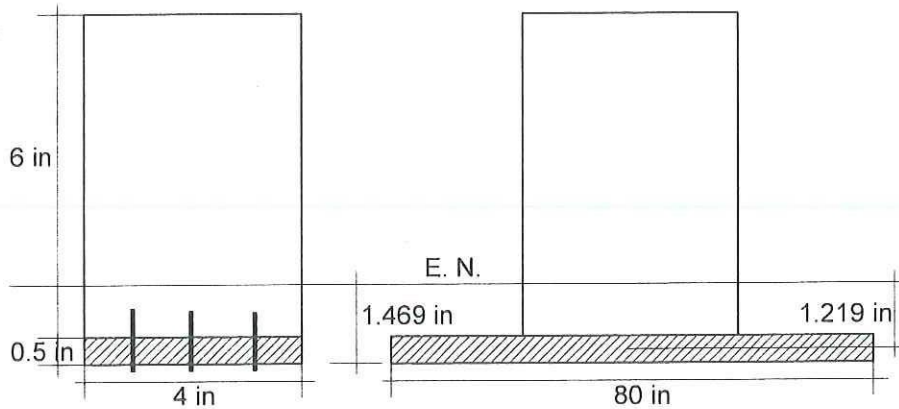
Carga permisible en cortante de cada tornillo:

$$F := 210 \text{ lb}$$

Capacidad a cortante, f , de la unión atornillada:

$$s := 2 \text{ in}$$

$$f := \frac{F}{s} \quad f = 105 \text{ lb/in}$$



Momento estático "Q" de el área por debajo de la línea de corte (a la altura de la sección en donde se lleva a cabo la unión de la madera con la placa de acero):

$$nb := 80 \text{ in}$$

$$t := 0.5 \text{ in}$$

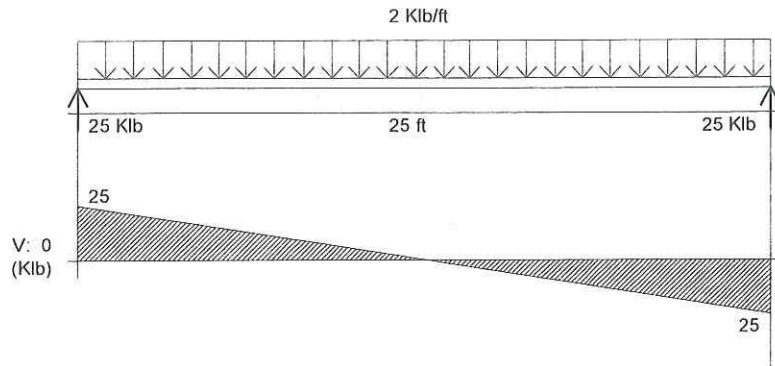
$$Q := nb \cdot t \cdot \left(1.469 - \frac{0.5}{2} \right) \quad Q = 48.76 \text{ in}^3$$

Por lo que el cortante máximo V_{max} , que puede ser aplicado a la sección transversal, será:

$$I_t := 231.27 \text{ in}^4$$

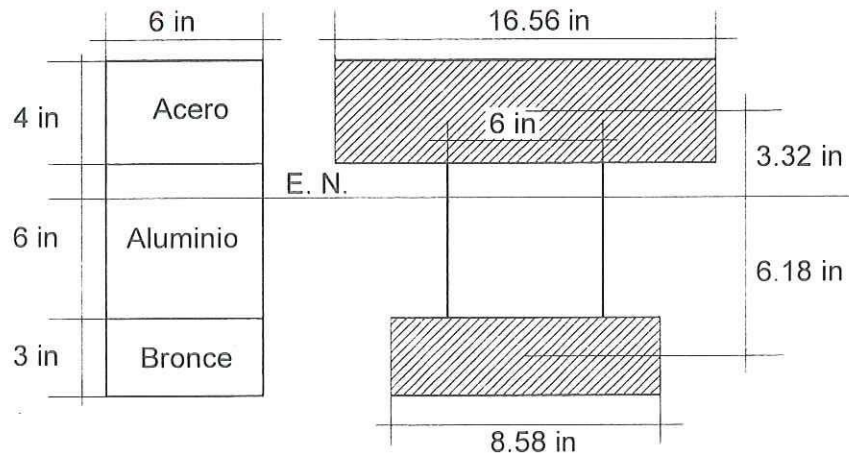
$$V_{max} := \frac{3 \cdot f \cdot I_t}{Q} \quad V_{max} = 1494 \text{ lb}$$

Solución ejercicio 1.18



De el diagrama de fuerza cortante, la fuerza cortante máxima V_{max} , que se presenta a lo largo de la viga, es:

$$V_{max} := 25000 \text{ lb}$$



Previamente (en clase) se determinó el momento de Inercia de la sección transformada I_t :

$$I_t := 2030.43 \text{ in}^4$$

Determinación de el esfuerzo cortante en la unión acero - aluminio:

$$nb := 16.56 \text{ in}$$

$$t := 4 \text{ in}$$

Momento estático de el área por arriba de la línea de corte:

$$Q_{ac_al} := nb \cdot t \cdot (3.32) \quad Q_{ac_al} = 219.917 \text{ in}^3$$

Esfuerzo cortante τ , en la unión, el ancho b, es $b := 6$

$$\tau := \frac{V_{\max} \cdot Q_{ac_al}}{I \cdot b} \quad \tau = 451.294 \text{ psi}$$

Determinación de el esfuerzo cortante en la unión bronce - aluminio:

$$\begin{aligned} nb &:= 8.58 \text{ in} \\ t &:= 3 \text{ in} \end{aligned}$$

Momento estático de el área por abajo de la línea de corte:

$$Q_{br_al} := nb \cdot t \cdot (6.18) \quad Q_{br_al} = 159.073 \text{ in}^3$$

Esfuerzo cortante τ , en la unión, el ancho b, es $b := 6 \text{ in}$

$$\tau := \frac{V_{\max} \cdot Q_{br_al}}{I \cdot b} \quad \tau = 326.436 \text{ psi}$$

DISEÑO DE VIGAS COMPUESTAS

En el diseño de vigas (especificando que los esfuerzos de los materiales están contenidos en el rango elástico-lineal) se considera que los materiales alcancen el nivel de esfuerzos admisibles en el mismo instante, es decir, el nivel de esfuerzo en el material será un dato conocido en el problema, por lo que el diseño de la viga se reducirá a la determinación de las dimensiones de la sección transversal. En el caso de vigas hechas de un solo material (sección homogénea) que sean doblemente simétricas, la determinación de la sección requerida por flexión, se lleva a cabo utilizando el módulo de sección "S", definido de la siguiente manera:

$$S = I / c$$

En donde,

I, es el momento de inercia de la sección transversal

$c = h / 2$, h, es la altura de la sección transversal

El nivel de esfuerzo de la fibra más alejada de el eje neutro, en la sección transversal, en función de el módulo de sección "S", está determinado por:

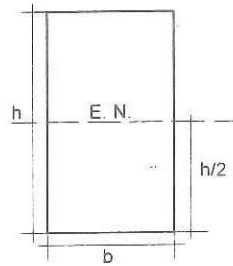
$$\sigma = \frac{My_{\max}}{I_x} = \frac{Mc}{I_x} = \frac{M}{S}$$

De esta expresión, es posible obtener las siguientes relaciones:

$$\sigma = \frac{M}{S} \rightarrow S = \frac{M}{\sigma} \rightarrow M = \sigma S$$

la última de estas es utilizada en la revisión de la capacidad a flexión, conocidas las propiedades de la sección transversal, tanto geométricas, como las de el material empleado.

Como caso particular de las secciones doblemente simétricas, tenemos las secciones rectangulares:



$$S = \frac{I}{c} = \frac{\left(\frac{bh^3}{12}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{bh^2}{6}$$

en donde

c, es la distancia de la fibra más alejada respecto a la localización de el eje neutro, en donde el material se encontrará sometido a el máximo nivel de esfuerzos en la sección transversal

o bien,

$$bh^2 = 6S$$

que representa la fórmula de esquadría de la sección. Las dimensiones de la sección se podrán determinar a partir de la relación h/b , puesto que el módulo de sección "S" se podrá determinar usando

$$S = \frac{M_{\max}}{\sigma_{\text{adm}}}$$

En el caso de vigas de sección transversal que no sean simétricas respecto a el eje neutro, para la determinación de las dimensiones de la sección transversal, se podrá utilizar

$$\sigma = \frac{My}{I_T} \quad \rightarrow \quad I_T = \frac{My}{\sigma}$$

En la sección transformada (por ejemplo, sección compuesta por dos materiales distintos)

$$I_T = I_1 + I_2$$

En este caso el diseño se lleva a cabo a través de un proceso de ensayo y error, proponiendo las dimensiones de la sección de uno de los materiales y determinando las dimensiones de la sección de el otro material en función de

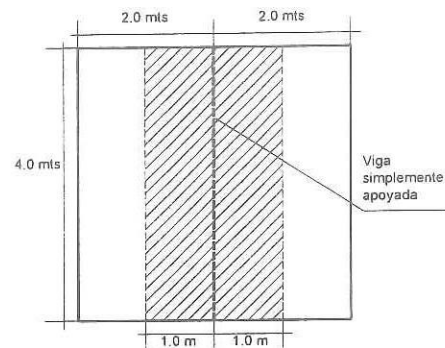
$$I_T = I_1 + nI_2 \quad \rightarrow \quad nI_2 = I_T - I_1$$

En donde el momento de inercia I_1 sería conocido al proponer las dimensiones de la sección de ese material.

Ejercicio No. 1.19

Diseñar la trabe simplemente apoyada que soporta el peso (Carga Muerta y Carga Viva) transmitido por la losa de concreto (peso propio de la losa incluido en la Carga Muerta) mostrada en la figura. Considerar que la losa se encuentra apoyada perimetralmente. Limitar en lo posible el peralte de la sección transversal de la viga a 8 in. proporcionar alternativas de diseño de la sección en:

- Acero
- Madera
- Madera reforzada con placa de acero



Material	E (ksi)	σ_{adm} (ksi)
Acero	29,000	36.0
Madera	1,600	2.3

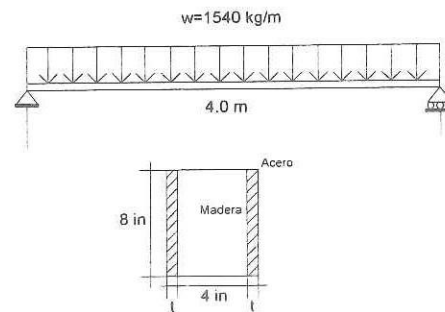
$$C.V. = 170 \text{ kg/m}^2$$

$$C.M. = 600 \text{ kg/m}^2$$

Ejercicio No. 1.20

Determinar el espesor "t" de las placas de acero de refuerzo de la sección transversal mostrada de la viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida $w=1540 \text{ kg/m}$. Utilizar una viga de madera de 4x8 in (dimensiones efectivas), $\sigma_{adm,madera}=2.3 \text{ ksi}$, $\sigma_{adm,acero}=36 \text{ ksi}$, $E_{madera}=1600 \text{ ksi}$, $E_{acero}=29000 \text{ ksi}$.

Determinar además, los esfuerzos máximos actuantes en el acero y en la madera, comparar estos esfuerzos con los esfuerzos admisibles y hacer comentarios.



Solución ejercicio No. 1.19

Propiedades de los materiales para la viga

Acero:

$$E_a := 29000 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{adma} := 36 \text{ ksi}$$

Madera:

$$E_m := 1600 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{admm} := 2.3 \text{ ksi}$$

Dimensiones de losa:

$$a := 2.0 \text{ mts}$$

$$L := 4.0 \text{ mts}$$

Carga en la losa

$$CM := 600 \text{ kg/m}^2$$

$$CV := 170 \text{ kg/m}^2$$

Carga w en la viga, (en kg/m):

Area tributaria de la viga:

$$A_t := 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot L$$

$$A_t = 8 \text{ m}^2$$

Carga combinada en la losa (carga viva + carga muerta)

$$wt := CV + CM$$

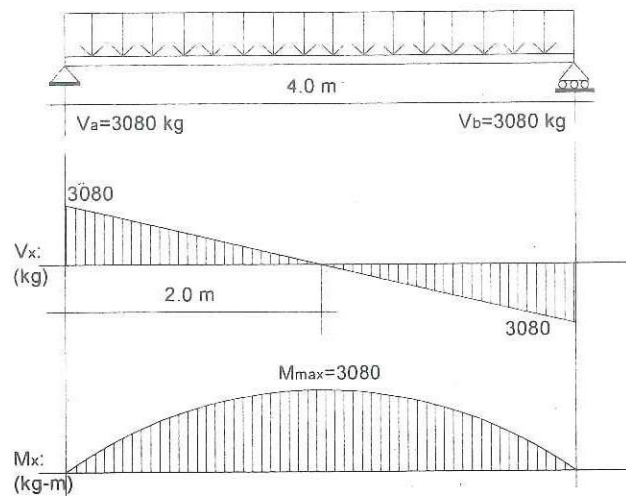
$$wt = 770 \text{ kg/m}^2$$

Carga por unidad de longitud en la viga:

$$w := \frac{wt \cdot A_t}{L}$$

$$w = 1540 \text{ kg/m}$$

$$w = 1540 \text{ kg/m}$$



Determinación de el momento flexionante máximo actuante en la sección

Fuerza cortante en los apoyos:

$$V_a := \frac{w \cdot L}{2}$$

$$V_a = 3080 \text{ kg}$$

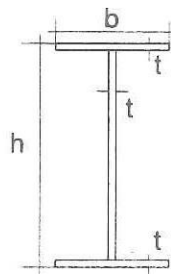
Momento flexionante al centro de el claro:

$$M_{\max} := V_a \cdot \frac{L}{2} - \frac{w \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2} \quad M_{\max} = 3080 \quad \text{kg-m}$$

$$M := M_{\max} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{.454} \cdot \frac{1}{0.3048}$$

$$M = 22.258 \quad \text{klb-ft}$$

a) Dimensiones de la sección transversal en acero



Determinación de el módulo de sección requerido, S_{req}

$$M_{\max} := M \quad M_{\max} = 22.258 \quad \text{klb-ft}$$

$$\sigma_{\max} := \sigma_{\text{adma}} \quad \sigma_{\max} = 36 \quad \text{ksi}$$

$$S_{\text{req}} := \frac{M_{\max} \cdot 12}{\sigma_{\max}} \quad S_{\text{req}} = 7.419 \quad \text{in}^3$$

Momento de inercia requerido, I_{req} :

$$S_{\text{req}} = I_{\text{req}} / c \quad \Rightarrow \quad I_{\text{req}} = S_{\text{req}} c$$

en donde

$c = h / 2$ para el caso de una sección doblemente simétrica

Considerando

$$h := 8 \quad \text{in}$$

$$I_{\text{req}} := S_{\text{req}} \cdot \frac{h}{2} \quad I_{\text{req}} = 29.677 \quad \text{in}^4$$

Utilizando la relación $d / b = 2$

$$d := h$$

$$b := \frac{d}{2} \quad b = 4 \quad \text{in}$$

Proponiendo espesor de placas "t"

$$t := 0.5 \text{ in}$$

Sección	b	h	Ai	yi	li
1	4	0.5	2	3.75	28.167
2	0.5	7	3.5	0	14.292
3	4	0.5	2	-3.75	28.167
					Isum= 70.625

Con el espesor propuesto, $I_{sum} > I_{req}$

Proponiendo espesor de placas "t"

$$t := 0.375 \text{ in}$$

Sección	b	h	Ai	yi	li
1	4	0.375	1.5	3.8125	21.820
2	0.375	7.25	2.71875	0	11.909
3	4	0.375	1.5	-3.8125	21.820
					Isum= 55.549

Con el espesor propuesto, $I_{sum} > I_{req}$

Proponiendo espesor de placas "t"

$$t := 0.25 \text{ in}$$

Sección	b	h	Ai	yi	li
1	4	0.25	1	3.875	15.021
2	0.25	7.5	1.875	0	8.789
3	4	0.25	1	-3.875	15.021
					Isum= 38.831

Con el espesor propuesto, $I_{sum} > I_{req}$

Proponiendo espesor de placas "t"

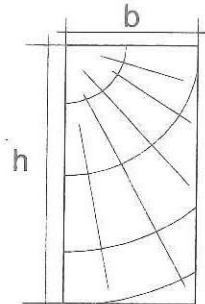
$$t := 0.125 \text{ in}$$

Sección	b	h	Ai	yi	li
1	4	0.125	0.5	3.9375	7.753
2	0.125	7.75	0.96875	0	4.849
3	4	0.125	0.5	-3.9375	7.753
					Isum= 20.354

Con el espesor propuesto, $I_{sum} < I_{req}$

Por lo tanto, se utilizará placa de 1/4 in de espesor en los patines y alma de la viga.

b) Dimensiones de la sección transversal en madera



Determinación de el módulo de sección requerido, S_{req}

$$M_{max} := M \quad M_{max} = 22.258 \text{ klb-ft}$$

$$\sigma_{max} := \sigma_{adm} \quad \sigma_{max} = 2.3 \text{ ksi}$$

$$S_{req} := \frac{M_{max} \cdot 12}{\sigma_{max}} \quad S_{req} = 116.127 \text{ in}^3$$

Para una sección rectangular

$$S = b h^2 / 6 \quad ==> \quad b h^2 = 6S$$

$$\text{Al utilizar la relación } h / b = 2 \quad ==> \quad b = h / 2$$

Por lo que,

$$b h^2 = (h / 2) h^2 = \frac{1}{2} h^3 = 6S$$

$$h := \sqrt[3]{12 \cdot S_{req}} \quad h = 11.17 \text{ in}$$

Se propone utilizar una sección 6" x 12", con lo cual el requerimiento de limitar el peralte de la sección transversal a 8 in no se cumple, por lo que, al usar un peralte de 8 in

$$b h^2 = 6S$$

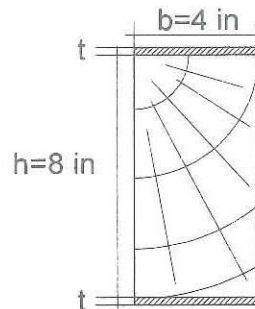
$$h := 8 \text{ in}$$

$$b := \frac{6 \cdot S_{req}}{h^2} \quad b = 10.887 \text{ in, } b > h$$

Con estos resultados, la sección no será muy eficiente, por lo que se tendrán las siguientes alternativas:

- Relajar el requerimiento de peralte máximo, es decir, poder proponer una sección transversal mayor de 8 in.
- Modificar condiciones de apoyo / carga para disminuir el momento actuante máximo
- Utilizar madera con propiedades estructurales diferentes (por ejemplo, madera con mayor esfuerzo admisible).

c) Dimensiones de la sección transversal en madera reforzada con placas de acero



En esta alternativa, se propone utilizar una sección de madera de 4" x 8" (se cumple la relación $h / b = 2$) y se determinará el espesor de las placas de acero (suponiendo igual espesor en las dos placas de refuerzo - superior e inferior).

Para determinar el espesor de las placas de refuerzo de la sección transversal, es necesario determinar el momento de inercia de la sección transformada I_t .

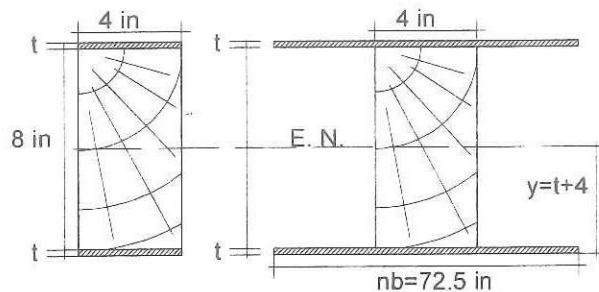
$$E_m = 1600 \text{ ksi}$$

$$E_a = 29000 \text{ ksi}$$

Relación modular n , determinando la sección equivalente en madera

$$n := \frac{E_a}{E_m} \quad n = 18.125$$

Momento de inercia de la sección transformada I_t , en función de el espesor "t" de las placas de acero



i	b(in)	h(in)	$A_i(\text{in}^2)$	$y_i(\text{in})$	$A_i y_i^2(\text{in}^4)$	$I_i(\text{in}^4)$
1	72.5	t	$72.5 t$	$4 + \frac{1}{2} t$	$72.5 t (4 + \frac{1}{2} t)^2$	$72.5 t^3 / 12 = 6.042 t^3$
2	4	8	32	0	0	$4 (8)^3 / 12 = 170.667$
3	72.5	t	$72.5 t$	$4 + \frac{1}{2} t$	$72.5 t (4 + \frac{1}{2} t)^2$	$72.5 t^3 / 12 = 6.042 t^3$
$\Sigma =$					$145 t (4 + \frac{1}{2} t)^2$	$170.667 + 12.084 t^3$

$$I_t = 145 t (4 + \frac{1}{2} t)^2 + 170.667 + 12.084 t^3$$

$$I_t = 145 t (16 + 4t + t^2 / 4) + 170.667 + 12.084 t^3$$

$$I_t = 2320 t + 580t^2 + 36.25t^3 + 170.667 + 12.084 t^3$$

$$I_t = 170.667 + 2320 t + 580t^2 + 48.334 t^3$$

De la sección transformada, se tiene que el esfuerzo actuante en las placas de acero (tanto en la zona a tensión como a compresión por tener sección simétrica respecto a el eje neutro) está determinado por

$$\sigma_a = M y n / I_t \implies I_{t,req} = M y n / \sigma_{adm,a}$$

$$I_{t,req} = (22.258 \times 12) (4 + t) (18.125) / (36) = 134.475 (4 + t)$$

$$I_{t,req} = 537.9 + 134.475 t$$

Igualando las expresiones para el momento de inercia

$$I_t = I_{t,req}$$

$$170.667 + 2320 t + 580t^2 + 48.334 t^3 = 537.9 + 134.475 t$$

$$-367.233 + 2185.525 t + 580t^2 + 48.334 t^3 = 0$$

Determinando las raíces de este polinomio

$$\text{coef} := \begin{pmatrix} -367.233 \\ 2185.525 \\ 580 \\ 48.334 \end{pmatrix} \quad \text{traices} := \text{polyroots}(\text{coef}) \quad \text{traices} = \begin{pmatrix} -6.08 + 3.194i \\ -6.08 - 3.194i \\ 0.161 \end{pmatrix}$$

De estas raíces, se determina que el espesor para las placas, será:

$$t := \text{traices}_3 \quad t = 0.161 \text{ in}$$

Para efectos prácticos, utilizar $t = \frac{1}{4}$ "

Hasta el momento:

- Se determinó el espesor "t" de las placas de acero
- Los esfuerzos admisibles en las placas de acero si se cumplen, ya que el momento de inercia requerido ($I_{t,req}$) se determinó en función de los esfuerzos admisibles.
- Es necesario revisar el nivel de esfuerzos en la madera, éste deberá ser igual o estar por debajo de el nivel de esfuerzo admisible.

Determinación de esfuerzos máximos.

El momento de inercia de la sección transformada, al utilizar

$$t := 0.25 \text{ in}$$

$$I_t := 537.9 + 134.475 \cdot t$$

$$I_t = 571.519 \text{ in}^4$$

Esfuerzo actuante máximo en la madera:

$$M = 22.258 \text{ klb-ft}$$

$$y := 4 \text{ in}$$

$$\sigma_{\max, \text{mad}} := \frac{M \cdot 12 \cdot y}{I_t}$$

$$\sigma_{\max, \text{mad}} = 1.869 \text{ ksi}$$

$$\sigma_{\max, \text{mad}} < \sigma_{\text{adm}, \text{mad}}$$

Esfuerzo actuante máximo en el acero:

$$M = 22.258 \text{ klb-ft}$$

$$y := 4.25 \text{ in}$$

$$\sigma_{\max, \text{ac}} := \frac{M \cdot 12 \cdot y \cdot n}{I_t}$$

$$\sigma_{\max, \text{ac}} = 36 \text{ ksi}$$

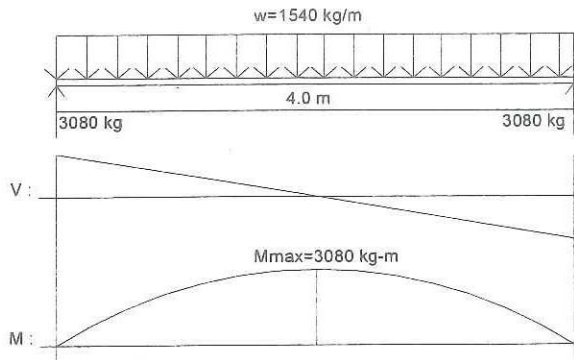
$$\sigma_{\max, \text{ac}} = \sigma_{\text{adm}, \text{ac}}$$

De acuerdo con estos resultados, los esfuerzos actuantes en la madera son menores que el esfuerzo admisible y en el caso del acero son iguales, en el supuesto de que no se cumplieran estas relaciones de esfuerzos, es decir, que el esfuerzo actuante fuera mayor a el esfuerzo admisible, deberá modificarse el diseño de la sección:

- Incrementar la sección de las placas de acero de refuerzo, ó
- Incrementar la sección de madera, o bien
- Incrementar los niveles de esfuerzos admisibles, utilizando materiales con mayor resistencia.

Solución ejercicio No. 1.20

Determinación de momento flexionante máximo.



$$M_{max} := 3080 \cdot \frac{1}{0.454} \cdot \frac{1}{0.3048} \cdot \frac{1}{1000}$$

$$M_{max} = 22.3 \text{ Klb-ft}$$

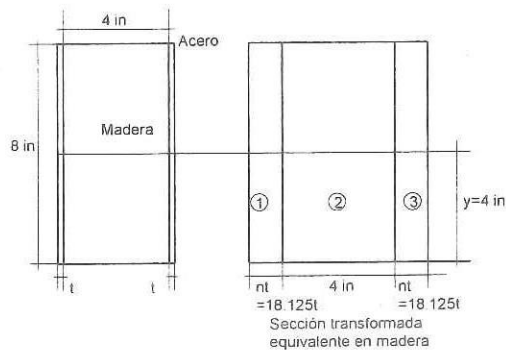
Relación modular n (para obtener sección transformada equivalente en madera):

$$E_{acero} := 29000 \text{ ksi}$$

$$E_{madera} := 1600 \text{ ksi}$$

$$n := \frac{E_{acero}}{E_{madera}}$$

$$n = 18.125$$



Localización de el Eje Neutro:

y=4 in (sección doblemente simétrica)

Momento de Inercia I_t :

a) De acuerdo con la geometría de la sección transversal:

i	A_i	y_i	$A_i y_i^2$	I_i
1	$(18.125t)(8)=145t$	0.0	0.0	$(18.125t)(8)^3/12=773.333t$
2	$(4.0)(8.0)=32$	0.0	0.0	$(4)(8)^3/12= 170.667$
3	$(18.125t)(8)=145t$	0.0	0.0	$(18.125t)(8)^3/12=773.333t$
Sumas				0.0 170.667+1546.666t

Por lo tanto,

$$I_t = 170.667+1546.666 t$$

b) De acuerdo con los esfuerzos a flexión:

$$y := 4 \text{ in} \quad n = 18.125$$

$$\sigma_{a_max} := 36 \text{ ksi} \quad M_{max} = 22.258 \text{ klb-ft}$$

$$I_{treq} := \frac{M_{max} \cdot 12 \cdot y}{\sigma_{a_max}} \cdot n \quad I_{treq} = 537.894 \text{ in}^4$$

Al igualar I_t con I_{treq} :

$$(170.667 + 1546.666 t) = 537.894$$

$$t = 0.237 \text{ in} \quad \text{Usar: } t := \frac{1}{4} \text{ in}$$

Momento de inercia I_t suministrado:

$$I_t := 170.667 + 1546.666 t \quad I_t = 557.333 \text{ in}^4$$

Revisión de esfuerzos actuantes al utilizar placas con $t = 1/4$ in:

a) En la madera, tanto en comp. como a tensión

$$\sigma_{max_madera} := \frac{M_{max} \cdot 12 \cdot y}{I_t} \quad \sigma_{max_madera} = 1.917 \text{ ksi}$$

b) En el acero, tanto a comp. como a tensión

$$\sigma_{max_acero} := \frac{M_{max} \cdot 12 \cdot y}{I_t} \cdot n \quad \sigma_{max_acero} = 34.744 \text{ ksi}$$

Comentarios:

1. Los esfuerzos actuantes máximos, tanto en el acero como en la madera, al utilizar las placas de acero de 1/4 in, son menores a los esfuerzos admisibles, por lo tanto el espesor propuesto de 1/4 in para las dos placas de acero, es conveniente.

2. Las relaciones (esfuerzo actuante) / (esfuerzo admisible) son:

a) En la madera $1.917 / 2.3 = 0.833$

b) En el acero $34.744 / 36 = 0.965$

La relación de eficiencia de el acero es muy próxima a 1.0, por lo tanto el espesor propuesto de 1/4 in para las dos placas de acero, es adecuado.

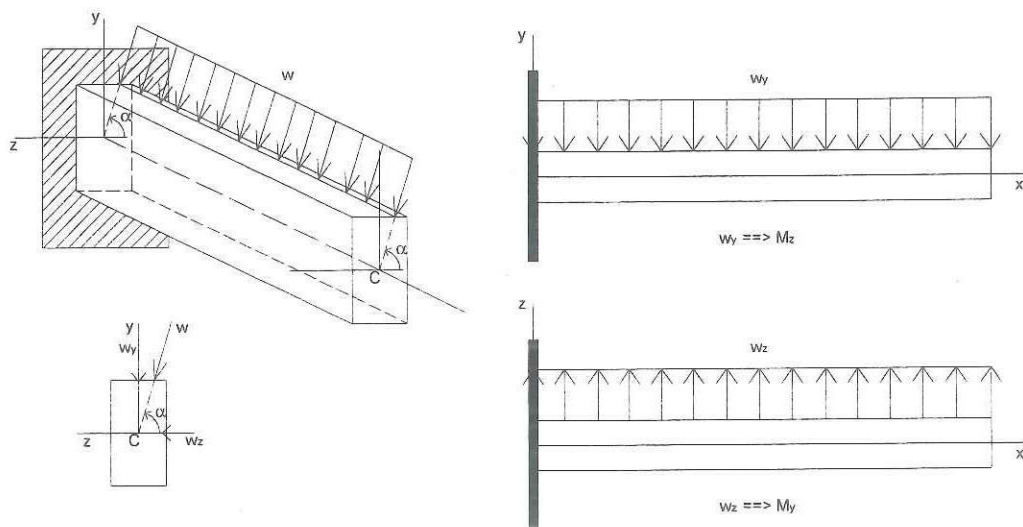
ESFUERZOS COMBINADOS

Casos de combinación de esfuerzos a revisar:

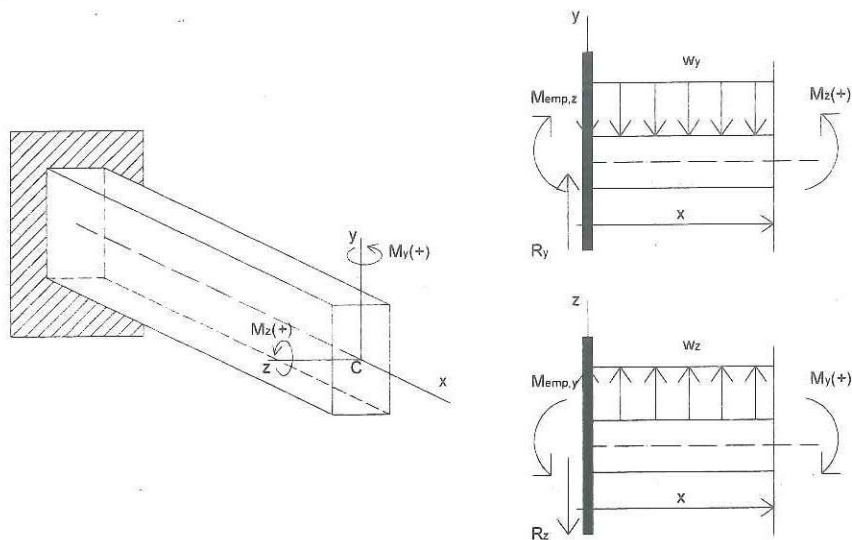
- Flexión simple en dos planos perpendiculares
- Flexión simple y carga axial
- Carga axial excéntrica

Esfuerzos producidos por carga sesgada en vigas de sección simétrica

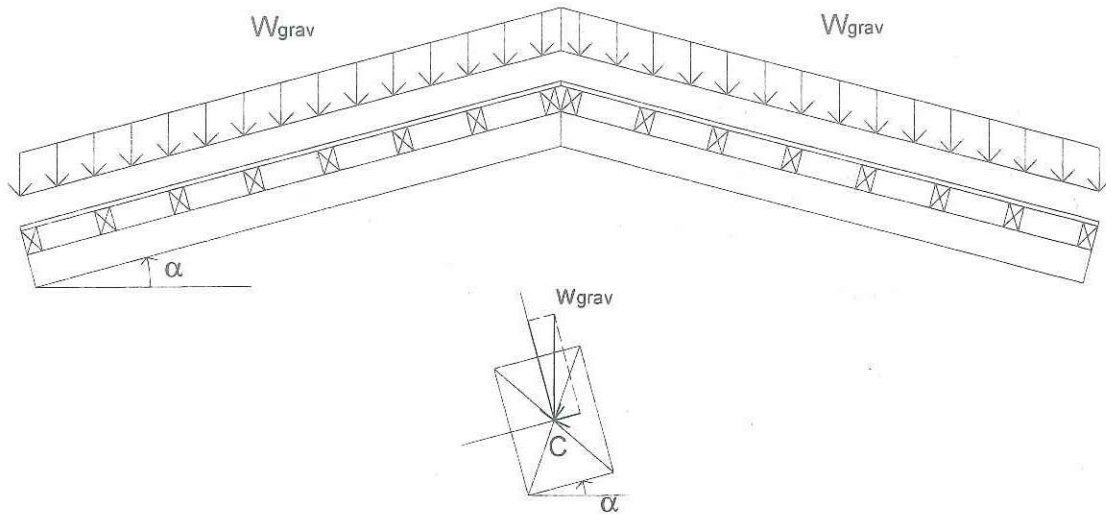
Se ha estudiado previamente el efecto producido por flexión cuando el plano longitudinal de la carga coincide con uno de los planos de simetría de la sección transversal (hasta el momento el plano longitudinal en el cual se encuentra el eje vertical de la sección). Sin embargo, el plano de acción de la carga aplicada podría no coincidir con ninguno de los planos longitudinales que pasan por los ejes de simetría, en tal caso tendremos una condición de carga sesgada aplicada a la viga.



La definición de los momentos flexionantes producidos por las componentes perpendiculares de la carga aplicada, se determina de acuerdo con "la regla de la mano derecha"

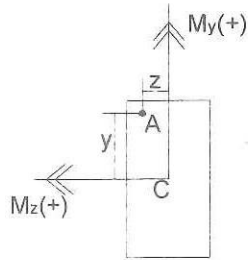


El caso más común de este tipo de carga se observa en las cargas producidas por las cubiertas sobre los largueros, debido a la inclinación de las cubiertas.



Determinación de el nivel de esfuerzo en un punto de la sección transversal sometida a flexión biaxial (flexión respecto a dos ejes perpendiculares).

Consideremos los momentos positivos M_y^+ y M_z^+ actuando en la sección transversal, como se muestra:



En el punto "A":

Esfuerzo producido por momento positivo flexionante M_y : Tensión (+)

$$\sigma_{A1} = \frac{M_y z}{I_y}$$

Esfuerzo producido por momento positivo flexionante M_z : Compresión (-)

$$\sigma_{A2} = \frac{M_z y}{I_z}$$

Considerando la acción conjunta de los dos momentos flexionantes M_y y M_z , el esfuerzo combinado en el punto "A" de la sección transversal será:

$$\sigma_A = \sigma_{A1} + \sigma_{A2} = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

En las expresiones anteriores:

I_y , I_z : corresponden a los momentos de inercia de la sección transversal respecto a los ejes "y" y "z" respectivamente.

y, z : corresponden a las distancias perpendiculares del punto "A" paralelas a los ejes "y" y "z" respecto a el centroide.

M_y, M_z : corresponden a los momentos flexionantes respecto a los ejes "y" y "z" respectivamente

Localización de el eje neutro

En cualquier punto en el eje neutro, los esfuerzos serán nulos, incluso al considerar la combinación de esfuerzos, por lo que igualamos a cero la expresión definida previamente para la combinación de esfuerzos producidos por los momentos flexionantes M_y y M_z :

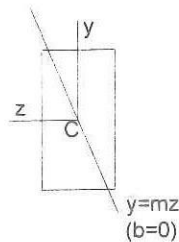
$$\frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = 0$$

De donde se puede obtener

$$y = \left(\frac{M_y}{I_y} \right) z$$

$$y = \left(\frac{M_y I_z}{M_z I_y} \right) z$$

La última es una expresión similar a la ecuación de una recta que pasa por el origen de la forma $y = m z$



Por lo que el ángulo de inclinación de el eje neutro queda definido por β , en donde

$$\tan \beta = \frac{y}{z}$$

De la ecuación de el eje neutro:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y}$$

En donde "y" y "z" definen la ubicación de un punto en el plano de el eje neutro.

Relación de eficiencia de la sección transversal de una viga sometida a flexión biaxial.

Al diseñar la sección transversal de una viga y considerar los efectos producidos por la flexión con respecto a los ejes de la sección es necesario determinar si la combinación de esfuerzos en el punto de máximo esfuerzo (contenido en la sección) no ha sobrepasado los niveles admisibles de esfuerzo.

Los esfuerzos en un punto "A", en la sección transversal de una viga sometida a flexión biaxial serán:

Esfuerzo por momento flexionante respecto a el eje "y", M_y :

$$\sigma_{Ay} = \frac{M_y z}{I_y}$$

Esfuerzo por momento flexionante respecto a el eje "z", M_z :

$$\sigma_{Az} = \frac{M_z y}{I_z}$$

Entonces, el esfuerzo en el punto "A", será

$$\sigma_A = \sigma_{Az} + \sigma_{Ay}$$

dividiendo por el esfuerzo admisible de el material, σ_{adm}

$$\frac{\sigma_A}{\sigma_{adm}} = \frac{\sigma_{Az}}{\sigma_{adm}} + \frac{\sigma_{Ay}}{\sigma_{adm}}$$

Para que el diseño de la sección sea lo más eficiente, en cuanto a nivel de esfuerzos desarrollados, en la fibra más alejada a el eje neutro:

$$\sigma_A = \sigma_{adm}$$

(suponiendo que el punto "A" se encuentre en la fibra más alejada a el eje neutro)

Por lo tanto la relación de eficiencia de la sección quedará determinada por:

$$\frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{adm}} = 1.0 = \frac{\sigma_{Az}}{\sigma_{adm}} + \frac{\sigma_{Ay}}{\sigma_{adm}}$$

En general, al considerar la combinación de esfuerzos a compresión y tensión:

$$\left| \frac{\sigma_{Az}}{\sigma_{adm}} + \frac{\sigma_{Ay}}{\sigma_{adm}} \right| \leq 1.0$$

Ejercicio No. 2.1

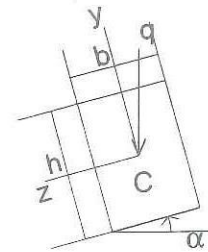
Una viga de madera simplemente apoyada de longitud L , de sección rectangular $b \times h$, inclinada un ángulo α , con eje longitudinal horizontal, se encuentra sometida a una carga "q" vertical uniformemente distribuida, que actúa a través del centroide de la sección, determinar:

- La orientación de el eje neutro.
- El esfuerzo máximo en la sección

Considerar:

$$L=3.0 \text{ mts} \quad b=75 \text{ mm} \quad \alpha=30^\circ$$

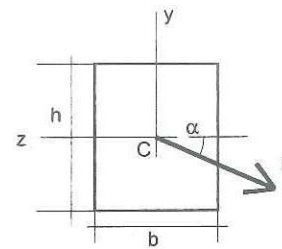
$$Q=1.6 \text{ kN/m} \quad h=150 \text{ mm}$$

**Ejercicio No. 2.2**

A una viga en voladizo de madera de sección transversal rectangular y longitud L soporta una carga concentrada inclinada P aplicada en su extremo libre (ver fig.).

Determine la orientación de el eje neutro y calcule el esfuerzo maximo de tensión debido a la carga P .

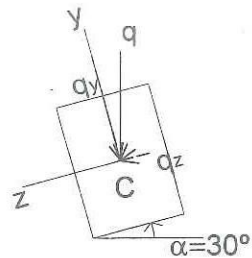
Los datos de la viga son: $b=75\text{mm}$, $h=150\text{mm}$, $L=1.5\text{m}$, $P=750\text{N}$ y $\alpha=36$ grados.

**Ejercicio No. 2.3**

Resuelva el problema anterior con una viga en voladizo con los siguientes datos: $b=4\text{in}$, $h=8\text{in}$, $L=6\text{ft}$, $P=400\text{lb}$ y $\alpha=45$ grados.

Solución ejercicio No. 2.1

Cargas y momentos flexionantes:



$$q := 1.6 \text{ kN/m} \quad L := 3.0 \text{ mts}$$

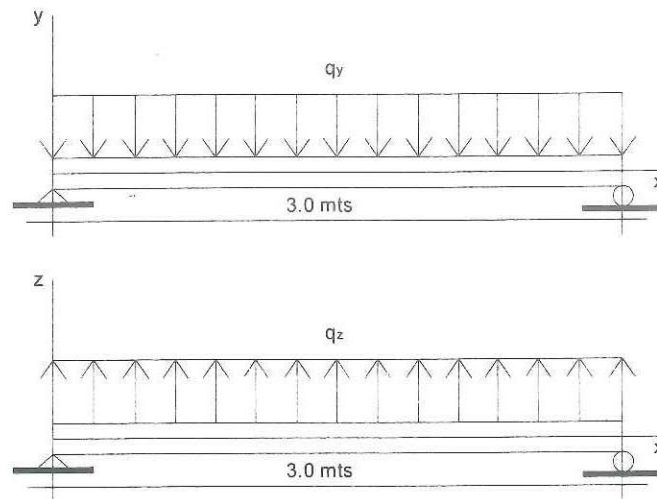
$$\alpha := 30$$

Componentes "y" y "z" de la carga "q" aplicada:

$$q_y := q \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad q_y = 1.386 \text{ kN/m}$$

$$q_z := q \cdot \sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad q_z = 0.8 \text{ kN/m}$$

Momentos flexionantes respecto a los ejes perpendiculares "y" y "z" (suponiendo que las condiciones de apoyo son las mismas con respecto a ambos ejes):



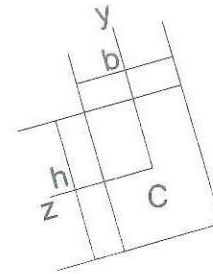
$$M_z := \frac{q_y \cdot L^2}{8} \quad M_z = 1.559 \text{ kN-m}$$

$$M_y := \frac{q_z \cdot L^2}{8} \quad M_y = 0.9 \text{ kN-m}$$

Momentos de inercia

$$b := 0.075 \text{ mts}$$

$$h := 0.15 \text{ mts}$$



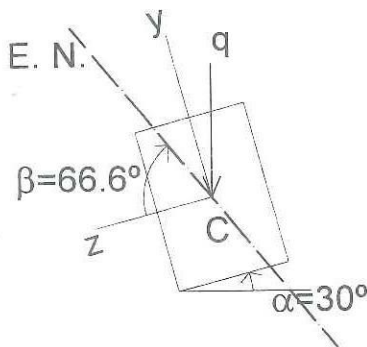
$$I_z := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_z = 2.109 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$I_y := \frac{h \cdot b^3}{12} \quad I_y = 5.273 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Orientación de el eje neutro:

$$\tan \beta := \frac{M_y \cdot I_z}{M_z \cdot I_y} \quad \tan \beta = 2.309$$

$$\beta := \text{atan}(\tan \beta) \cdot \frac{180}{\pi} \quad \beta = 66.587$$



Esfuerzo máximo en la sección:

Ubicación de los puntos más alejados de el eje neutro, con respecto a el centroide la sección transversal (los signos definen la posición con respecto a el eje neutro)

Punto 1:

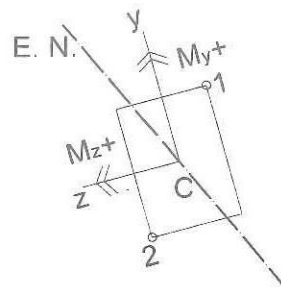
$$z_1 := \frac{b}{2} \quad z_1 = 0.038$$

$$z_2 := \frac{-b}{2} \quad z_2 = -0.038$$

Punto 2:

$$y_1 := \frac{h}{2} \quad y_1 = 0.075$$

$$y_2 := \frac{-h}{2} \quad y_2 = -0.075$$



De acuerdo con el sentido de aplicación de los momentos flexionantes respecto a los ejes perpendiculares "y" y "z", el material en el punto 1 se encuentra sometido a un esfuerzo de compresión, mientras que el material en el punto 2, se encuentra sometido a un esfuerzo de tensión:

Punto 1 (compresión):

$$\sigma_{\max c} := \frac{-My \cdot z1}{I_y} + \frac{-Mz \cdot y1}{I_z}$$

$$\sigma_{\max c} = -11942.563 \text{ kN/m}^2$$

Punto 2 (tensión):

$$\sigma_{\max t} := \frac{-My \cdot z2}{I_y} + \frac{-Mz \cdot y2}{I_z}$$

$$\sigma_{\max t} = 11942.563 \text{ kN/m}^2$$

Solución ejercicio No. 2.2

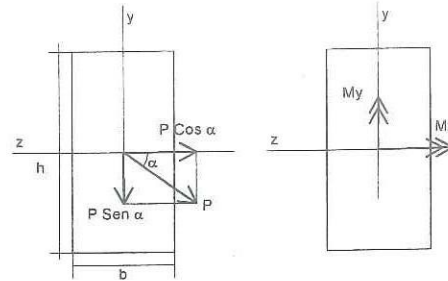
Cargas y Momentos flexionantes (en las funciones trigonométricas "seno y coseno", el ángulo α se multiplicó por $\pi/180$ para convertir a radianes):

$$P := 750 \text{ N} \quad L := 1.5 \text{ m}$$

$$\alpha := 36$$

$$P_y := P \cdot \sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad P_y = 440.839 \text{ N}$$

$$P_z := P \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad P_z = 606.763 \text{ N}$$



Los momentos flexionantes máximos, se encuentran en la sección transversal en el apoyo de la viga en voladizo, y al ser la carga aplicada en el extremo libre, una carga concentrada:

$$M_y := P_z \cdot L$$

$$M_z := -P_y \cdot L$$

$$M_y = 910.144 \text{ N-m}$$

$$M_z = -661.258 \text{ N-m}$$

Momentos de Inercia I_y , I_z de la sección transversal:

$$h := 0.15 \text{ m}$$

$$b := 0.075 \text{ m}$$

$$I_y := \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$I_y = 5.273 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

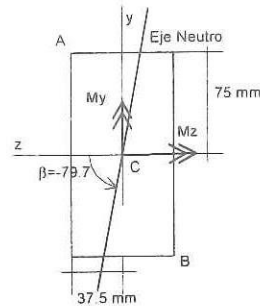
$$I_z := \frac{h^3 \cdot b}{12}$$

$$I_z = 2.109 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

Orientación de el eje neutro:

$$\beta := \text{atan}\left(\frac{M_y \cdot I_z}{M_z \cdot I_y}\right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\beta = -79.705$$



Esfuerzos máximos: de acuerdo con la orientación de el Eje Neutro, los puntos de la sección más alejados, son A y B (tanto en comp. como en tensión).

$$y := 0.075 \text{ m}$$

$$z := 0.0375 \text{ m}$$

$$M_y := 910.144 \text{ N-m}$$

$$M_z := 661.258 \text{ N-m}$$

$$\sigma_{\max} := \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = 8.823 \times 10^6 \text{ Pa (8.823 MPa)}$$

Solución ejercicio No. 2.3

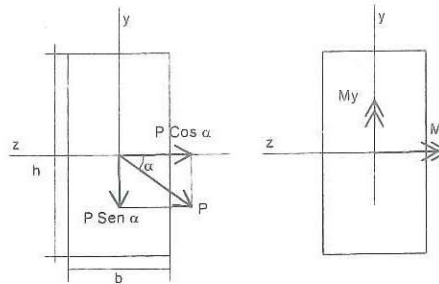
Cargas y Momentos flexionantes (en las funciones trigonométricas "seno y coseno", el ángulo α se multiplicó por $\pi/180$ para convertir a radianes):

$$P := 400 \text{ lb} \quad L := 6 \text{ ft}$$

$$\alpha := 45$$

$$P_y := P \cdot \sin\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad P_y = 282.843 \text{ lb}$$

$$P_z := P \cdot \cos\left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad P_z = 282.843 \text{ lb}$$



Los momentos flexionantes máximos, se encuentran en la sección transversal en el apoyo de la viga en voladizo, y al ser la carga aplicada en el extremo libre, una carga concentrada:

$$M_y := P_z \cdot L \cdot 12 \quad M_z := -P_y \cdot L \cdot 12$$

$$M_y = 20364.68 \text{ lb-in} \quad M_z = -20364.68 \text{ lb-in}$$

Momentos de Inercia I_y , I_z de la sección transversal:

$$h := 8 \text{ in} \quad b := 4 \text{ in}$$

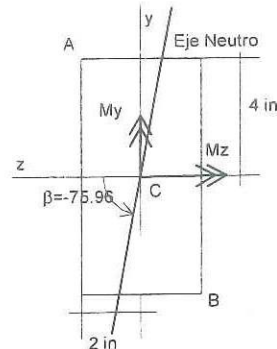
$$I_y := \frac{h \cdot b^3}{12} \quad I_y = 42.667 \text{ in}^4$$

$$I_z := \frac{h^3 \cdot b}{12} \quad I_z = 170.667 \text{ in}^4$$

Orientación de el eje neutro:

$$\beta := \text{atan}\left(\frac{M_y \cdot I_z}{M_z \cdot I_y}\right) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\beta = -75.964$$



Esfuerzos máximos: de acuerdo con la orientación de el Eje Neutro, los puntos de la sección más alejados, son A y B (tanto en comp. como en tensión).

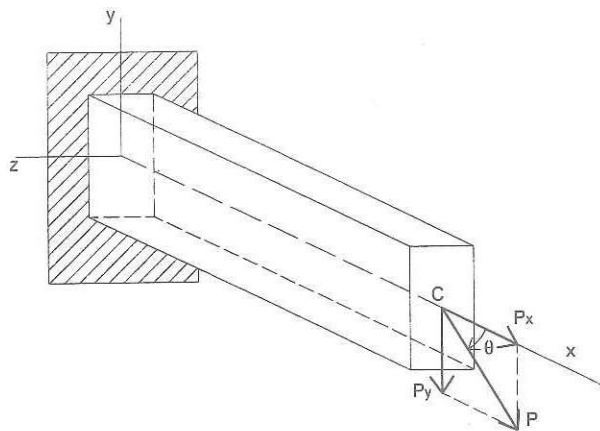
$$y := 4 \text{ in} \quad z := 2 \text{ in} \quad M_y := 20364.68 \text{ lb-in} \quad M_z := 20364.68 \text{ lb-in}$$

$$\sigma_{\max} := \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = 1431.9 \text{ psi}$$

Esfuerzos por carga axial excéntrica sobre un eje

En un caso general de carga axial aplicada a través de el centroide de la sección transversal en una viga

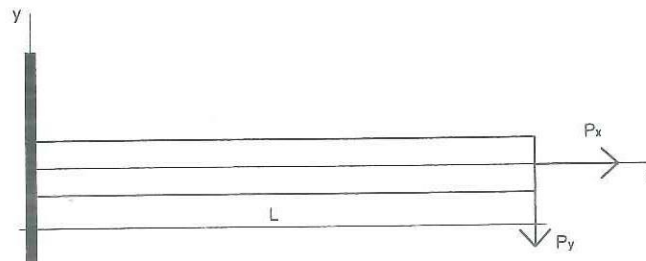


En donde:

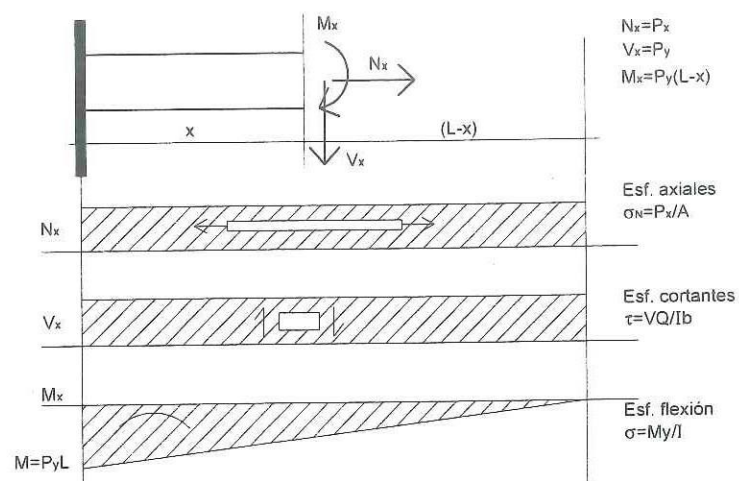
$$P_x = P \cos \theta$$

$$P_y = P \sin \theta$$

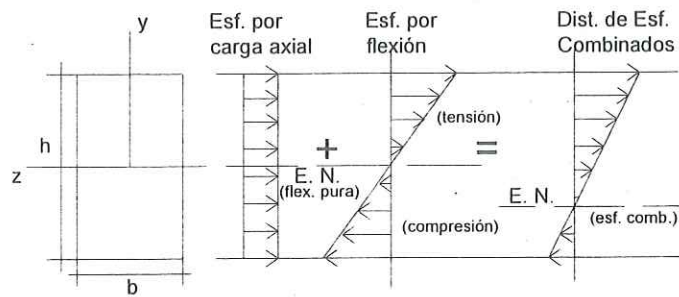
Representando las componentes P_x y P_y en la sección transversal en donde se aplica la carga "P":



Efectuando un corte a una distancia "x" desde el empotramiento, es posible determinar las fuerzas internas actuando a lo largo de la viga:



Al considerar los esfuerzos normales producidos por la fuerza axial y el momento flexionante actuando en la sección transversal:

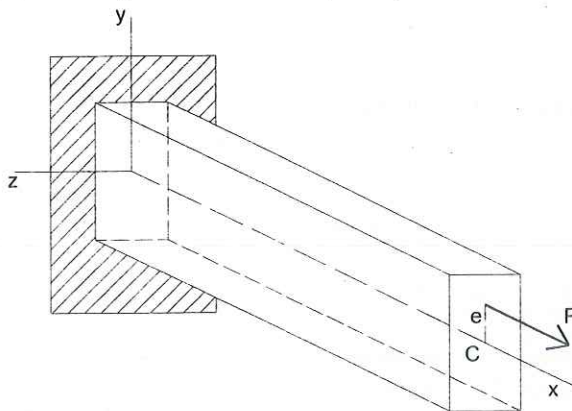


La combinación de los esfuerzos estará representada por:

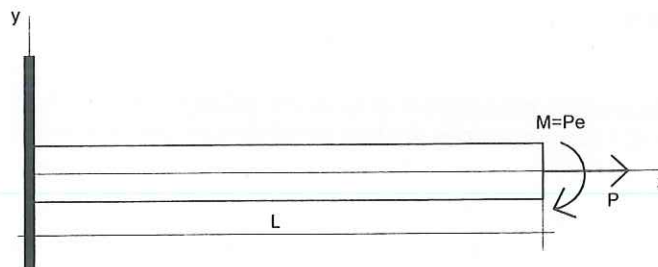
$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{My}{I}$$

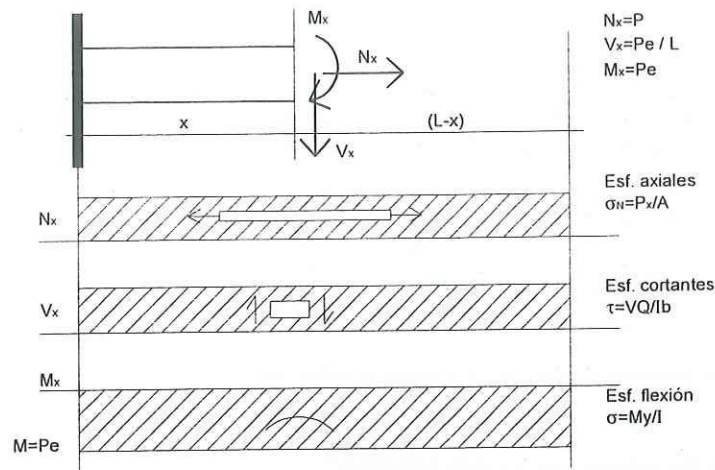
En el caso de una carga axial excéntrica con respecto a uno de los ejes principales de la sección transversal:



Representación de la condición de carga equivalente:



De manera similar como se procedió anteriormente, se determinan las fuerzas internas a una distancia "x" de el apoyo:



Se tendrá ahora una distribución de esfuerzos producida por la combinación de los esfuerzos producidos por la fuerza axial y el momento flexionante equivalente, actuando en la sección transversal de la viga.

Determinación de la localización de el eje neutro, esta localización queda determinada en donde los esfuerzos son nulos, es decir $\sigma = 0$:

$$\sigma = 0 = \frac{P}{A} \pm \frac{(Pe)y}{I}$$

Suponiendo la suma de esfuerzos a tensión producidos tanto por la carga axial como por momento flexionante:

$$\frac{P}{A} + \frac{(Pe)y}{I} = 0$$

de donde se obtiene

$$y = -\frac{I}{Ae}$$

en donde "y" es la distancia a el eje neutro al combinar esfuerzos, esta distancia está referida a la posición de el eje neutro determinado por flexión pura. Esta distancia "y" queda determinada por las propiedades geométricas de la sección transversal "I" y "A", así como de la excentricidad con respecto a el centroide con la actúa la fuerza axial.

Se tendrá:

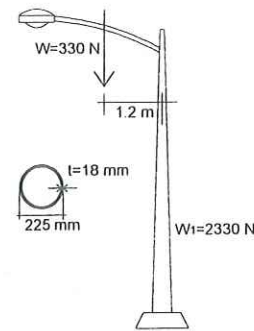
y^- : cuando el eje neutro quede por debajo de el eje neutro definido por la flexión pura.

y^+ : cuando el eje neutro quede por arriba de el eje neutro definido por la flexión pura.

Ejercicio 2.4

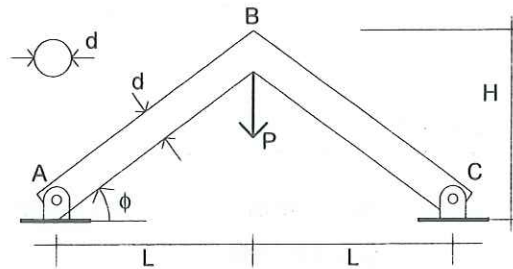
Un poste de aluminio para el alumbrado público pesa 2300 N y soporta un brazo que pesa 330 N. El centro de gravedad del brazo está a 1.2 mts del eje del poste. El diámetro exterior del poste en su base es de 225 mm y su espesor de 18 mm.

Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión en el poste (en su base) debido a los pesos).

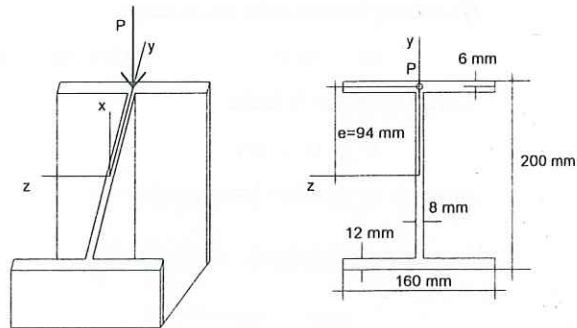
**Ejercicio 2.5**

Una estructura rígida ABC está formada por 2 tubos de acero soldados entre sí en "B". Cada tubo tiene un área transversal $A=16.2 \text{ in}^2$, $I=212 \text{ in}^4$ y $\phi_{\text{ext}}=10.75 \text{ in}$.

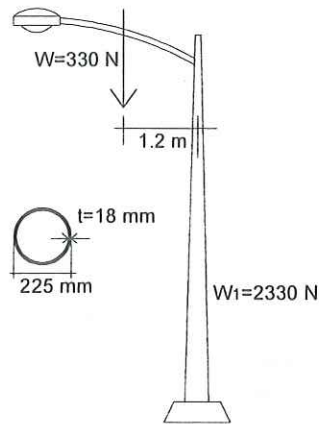
Encuentre los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la estructura debidos a la carga $P=3200 \text{ lb}$, si $L=6 \text{ ft}$ y $H=4.5 \text{ ft}$.

**Ejercicio 2.6**

Determinar los esfuerzos máximos a tensión y compresión en la columna corta, al aplicar la carga $P=60 \text{ kN}$, como se muestra en la figura.



Solución ejercicio No. 2.4



$$W := 330 \text{ N} \quad W1 := 2300 \text{ N}$$

$$e := 1.2 \text{ mts}$$

Momento flexionante en la base:

$$M := W \cdot e \quad M = 396 \text{ N-m}$$

Carga axial en la base

$$N := W + W1 \quad N = 2630 \text{ N}$$

Area de la sección transversal

$A = (\text{Area completa}) - (\text{Area hueco})$

$$d_{ext} := 0.225 \text{ mts}$$

$$d_{int} := 0.189 \text{ mts}$$

$$A := \frac{\pi}{4} \cdot (d_{ext}^2 - d_{int}^2) \quad A = 0.0117 \text{ m}^2$$

Momento de inercia de la sección transversal

$I = (I \text{ secc. completa}) - (I \text{ hueco})$

$$I := \frac{\pi \cdot d_{ext}^4}{64} - \frac{\pi \cdot d_{int}^4}{64} \quad I = 6.317 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

Esfuerzos en la base

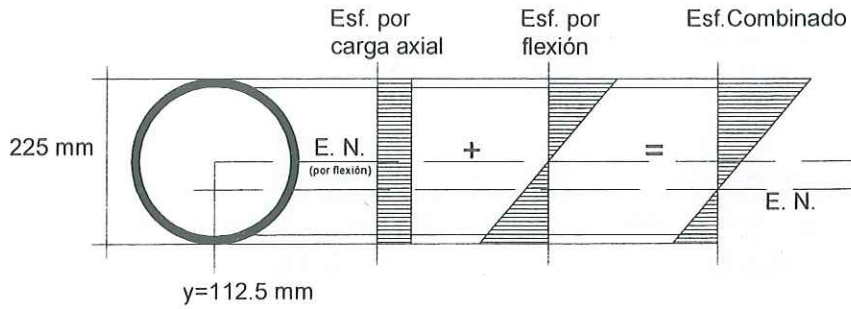
Por carga axial $\sigma_N := \frac{N}{A} \quad \sigma_N = 224679.3 \text{ N/m}^2$

Por flexión
(comp. y tensión) $\sigma_M := \frac{M \cdot \frac{d_{ext}}{2}}{I} \quad \sigma_M = 705233.2 \text{ N/m}^2$

Combinación de esfuerzos:

A compresión $\sigma_c := -\sigma_N - \sigma_M$ $\sigma_c = -929912 \text{ N/m}^2$

A tensión $\sigma_t := -\sigma_N + \sigma_M$ $\sigma_t = 480554 \text{ N/m}^2$

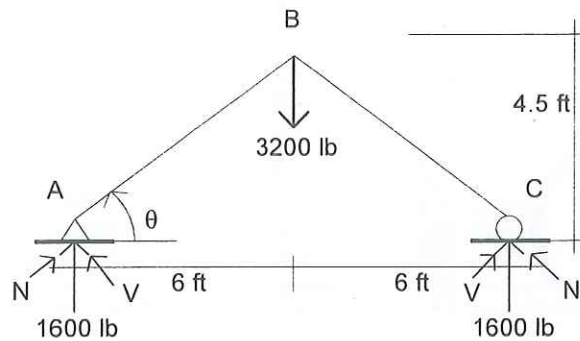


Solución ejercicio No. 2.5

Determinación de fuerzas en las barras (N, M, V), a partir de el diagrama de cuerpo libre

$$H := 4.5 \text{ ft} \quad P := 3200 \text{ lb}$$

$$L := 6.0 \text{ ft}$$



$$\text{Tan}\theta := \frac{H}{L}$$

$$\theta := \text{atan}(\text{Tan}\theta) \cdot \frac{180}{\pi} \quad \theta = 36.87$$

$$R_v := \frac{P}{2} \quad R_v = 1600 \text{ lb}$$

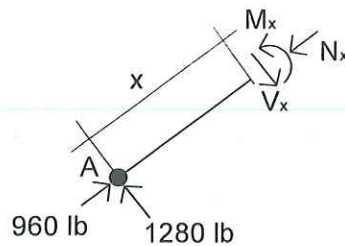
Componente de la fuerza de reacción actuando en la dirección longitudinal de las barras, "N"

$$N := R_v \cdot \sin\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad N = 960 \text{ lb}$$

Componente de la fuerza de reacción actuando en la dirección perpendicular a el eje longitudinal de las barras, "V"

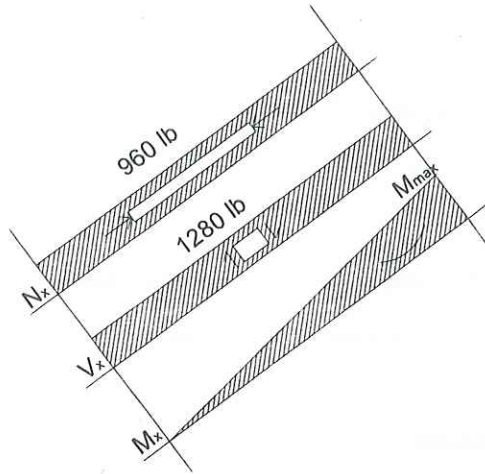
$$V := R_v \cdot \cos\left(\theta \cdot \frac{\pi}{180}\right) \quad V = 1280 \text{ lb}$$

Efectuando un corte en la barra A-B a una distancia "x" desde el apoyo "A":



Por equilibrio $N_x := N$ $V_x := V$ $M_x = V_x x$

Diagramas N_x , V_x y M_x para la barra A-B:



Longitud de la barra

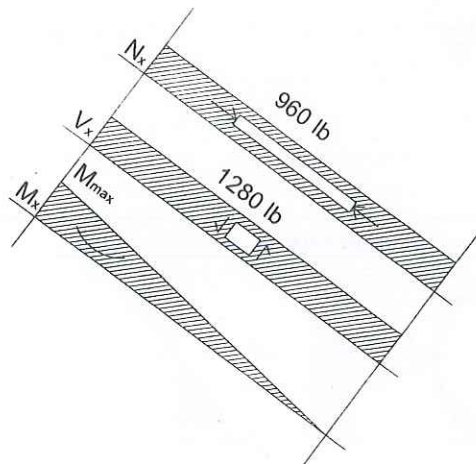
$$L_{ab} := \sqrt{L^2 + H^2}$$

$$L_{ab} = 7.5 \text{ ft}$$

Momento flexionante máximo, ocurre en el punto "B" de la barra, cuando $x = 7.5 \text{ ft}$

$$M_{max} := V_x \cdot L_{ab} \quad M_{max} = 9600 \text{ lb-ft}$$

Por simetría, en carga y geometría, los digramas para la barra B-C serán:



Esfuerzos producidos por las fuerzas N_{max} y M_{max} , ocurre en la sección transversal ubicada en el punto "B":

$$A := 16.1 \text{ in}^2 \quad d_{ext} := 10.75 \text{ in}$$

$$I := 212.0 \text{ in}^4$$

$$N_{max} := N_x \quad N_{max} = 960 \text{ lb}$$

$$M_{\max} = 9600 \text{ lb-ft}$$

Por carga axial $\sigma_N := \frac{N_{\max}}{A} \quad \sigma_N = 59.63 \text{ psi}$

Por flexión
(comp. y tensión) $\sigma_M := \frac{M_{\max} \cdot 12 \cdot \frac{d_{\text{ext}}}{2}}{I} \quad \sigma_M = 2920.75 \text{ psi}$

Combinación de esfuerzos:

A compresión $\sigma_c := -\sigma_N - \sigma_M \quad \sigma_c = -2980 \text{ psi}$

A tensión $\sigma_t := -\sigma_N + \sigma_M \quad \sigma_t = 2861 \text{ psi}$

Localización de el eje neutro

Al tener esfuerzo nulo en el eje neutro

$$\sigma = 0 = N/A + M y / I$$

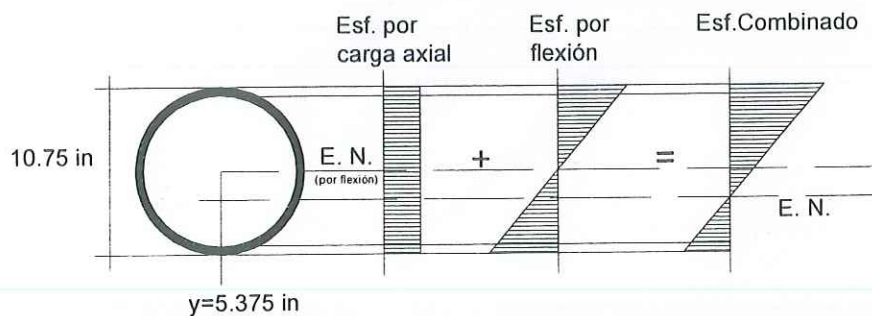
$$y := \frac{I}{M_{\max} \cdot 12} \cdot \left(\frac{-N_{\max}}{A} \right) \quad y = -0.1097$$

Obien, por triángulos semejantes:

$$(\sigma_c + \sigma_t) / d_{\text{ext}} = \sigma_c / x$$

$$x := \frac{|\sigma_c| \cdot d_{\text{ext}}}{|\sigma_c| + \sigma_t} \quad x = 5.485$$

$$y := x - \frac{d_{\text{ext}}}{2} \quad y = 0.1097$$



Solución ejercicio No. 2.6

$P := 60 \text{ kN}$

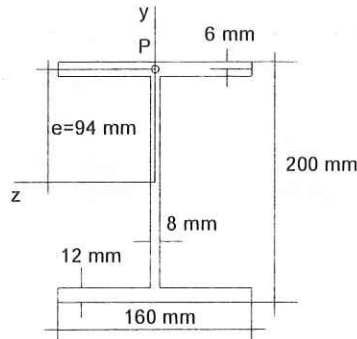
$b := 0.16 \text{ mts}$

$t_f := 0.012 \text{ mts}$

$e_y := 0.094 \text{ mts}$

$h := 0.20 \text{ mts}$

$t_w := 0.008 \text{ mts}$



Determinación de la carga axial "N" y momento flexionante "M" en la sección transversal:

$N := P \quad N = 60 \text{ kN}$

$M := P \cdot e_y \quad M = 5.64 \text{ kN-m}$

Propiedades geométricas de la sección transversal

l	b	h	A _i	y	l _i
1	0.16	0.012	0.00192	0.094	1.69882E-05
2	0.008	0.176	0.001408	0	3.63452E-06
3	0.16	0.012	0.00192	-0.094	1.69882E-05
			$\Sigma =$		
			0.005248		3.76108E-05

$A := 0.005248 \text{ m}^2$

$I := 3.76108 \cdot 10^{-5}$

Distribución de esfuerzos

Por carga axial $\sigma_N := \frac{N}{A} \quad \sigma_N = 11432.93 \text{ kN/m}^2$

Por flexión (comp. y tensión) $\sigma_M := \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{I} \quad \sigma_M = 14995.69 \text{ kN/m}^2$

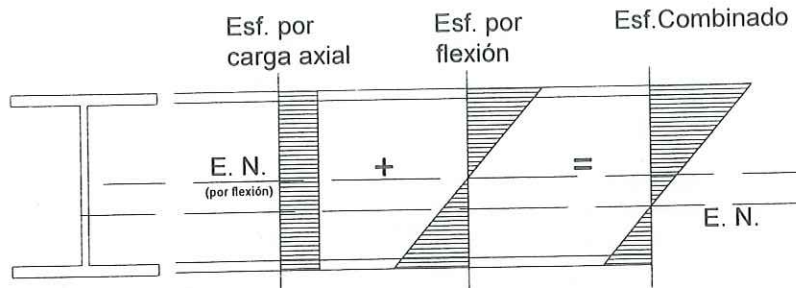
Esfuerzos máximos:

Compresión

$\sigma_{maxc} := -\sigma_N - \sigma_M \quad \sigma_{maxc} = -26429 \text{ kN/m}^2$

Tensión

$\sigma_{maxt} := -\sigma_N + \sigma_M \quad \sigma_{maxt} = 3563 \text{ kN/m}^2$



Localización de el eje neutro

Al tener esfuerzo nulo en el eje neutro

$$\sigma = 0 = N / A + M y / I$$

$$y := \frac{I}{M} \cdot \left(\frac{-N}{A} \right)$$

$$y = -0.0762$$

O bien, por triángulos semejantes:

$$(\sigma_{\max c} + \sigma_{\max t}) / h = \sigma_{\max c} / x$$

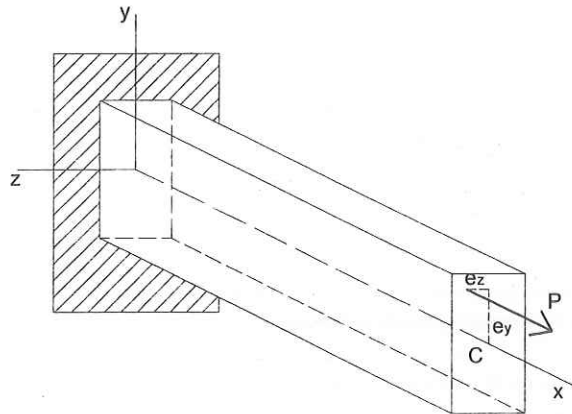
$$x := \frac{|\sigma_{\max c}| \cdot h}{|\sigma_{\max c}| + \sigma_{\max t}}$$

$$x = 0.176$$

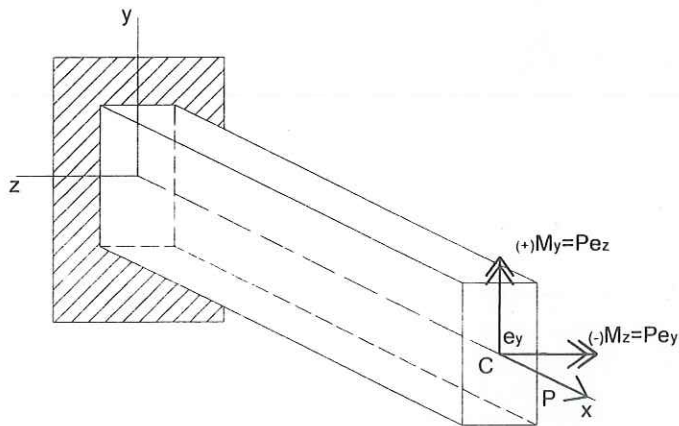
$$y := x - \frac{h}{2}$$

$$y = 0.0762$$

Esfuerzos por carga axial excéntrica a dos ejes



Condición equivalente de carga



Esfuerzos producidos por la combinación de los esfuerzos por flexión (biaxial) y la carga axial:

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{M_y y}{I_y} \pm \frac{M_z z}{I_z}$$

Esta resulta ser una expresión revisada previamente en el estudio de flexión biaxial, a diferencia de que ahora se considera el efecto de la condición de carga axial.

En términos de las excentricidades e_y y e_z :

$$\sigma = \frac{P}{A} \pm \frac{P e_y y}{I_y} \pm \frac{P e_z z}{I_z}$$

En el eje neutro

$$\sigma = 0 = \frac{P}{A} \pm \frac{P e_y y}{I_y} \pm \frac{P e_z z}{I_z}$$

Suponiendo $e_z = 0$

$$\frac{P}{A} + \frac{Pe_y y}{I_z} = 0 \Rightarrow y = -\frac{I_z}{Ae_y}$$

Suponiendo $e_y = 0$

$$\frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{I_y} = 0 \Rightarrow z = -\frac{I_y}{Ae_z}$$

Los valores "y" y "z" definen la localización de el eje neutro con respecto a el centroide de la sección transversal, al considerar la combinación de esfuerzos.

Definiendo las propiedades de la sección transversal, r_y y r_z , como los radios de giro de la sección transversal respecto a los ejes "y" y "z"

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

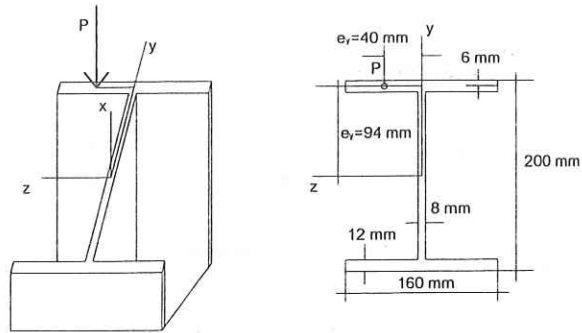
$$r_z^2 = \frac{I_z}{A}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Ejercicio No. 2.7

Determinar los esfuerzos máximos a tensión y compresión en la columna corta, al aplicar la carga $P=60$ kN, como se muestra en la figura.

**Ejercicio No. 2.8**

Determinar los esfuerzos máximos a tensión y compresión en la sección mostrada, así como la orientación de el Eje Neutro en la sección transversal.

Utilizar:

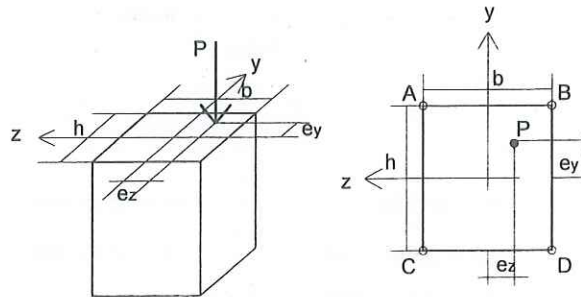
$$P = 60 \text{ kN}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

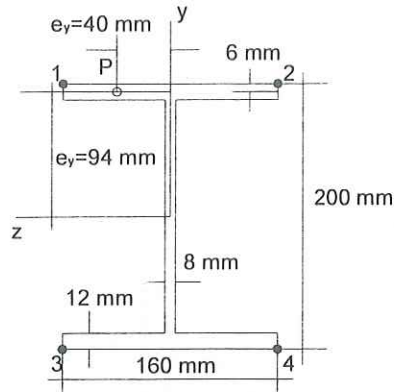
$$h = 300 \text{ mm}$$

$$e_y = 20 \text{ mm}$$

$$e_z = 40 \text{ mm}$$



Solución ejercicio No. 2.7



$$\begin{aligned}
 P &:= 60 \text{ kN} & b &:= 0.16 \text{ mts} & t_f &:= 0.012 \text{ mts} \\
 e_y &:= 0.094 \text{ mts} & h &:= 0.20 \text{ mts} & t_w &:= 0.008 \text{ mts} \\
 e_z &:= 0.04 \text{ mts}
 \end{aligned}$$

Determinación de la carga axial "N" y momento flexionantes "M_y" y "M_z" en la sección transversal:

$$N := P \quad N = 60 \text{ kN}$$

Momento flexionante respecto a el eje "y"

$$M_y := P \cdot e_z \quad M_y = 2.4 \text{ kN-m, momento negativo}$$

Momento flexionante respecto a el eje "z"

$$M_z := P \cdot e_y \quad M_z = 5.64 \text{ kN-m, momento positivo}$$

Propiedades geométricas de la sección transversal

l	b	h	A _i	y	z	I _{iz}	I _{iy}
1	0.16	0.012	0.00192	0.094	0	1.699E-05	4.096E-06
2	0.008	0.176	0.001408	0	0	3.635E-06	7.5093E-09
3	0.16	0.012	0.00192	-0.094	0	1.699E-05	4.096E-06
			Σ=	0.005248		3.761E-05	8.200E-06

$$A := 0.005248 \text{ m}^2 \quad I_z := 3.76108 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4 \quad I_y := 8.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Distribución de esfuerzos en el punto 1

$$z := \frac{b}{2} \quad z = 0.08 \text{ mts} \quad y := \frac{h}{2} \quad y = 0.1 \text{ mts}$$

Por carga axial $\sigma_N := \frac{N}{A} \quad \sigma_N = 11432.93 \text{ kN/m}^2$

Por flexión respecto
al eje y (comp.)

$$\sigma_{My} := \frac{My \cdot z}{I_y}$$

$$\sigma_{My} = 23414.63 \text{ N/m}^2$$

Por flexión respecto
al eje z (comp.)

$$\sigma_{Mz} := \frac{Mz \cdot y}{I_z}$$

$$\sigma_{Mz} = 14995.69 \text{ N/m}^2$$

Esfuerzos máximos:

Punto	$\sigma(My)$	$\sigma(Mz)$	$\sigma(N)$	σ_{Total}
1	-23414.6	-14995.7	-11432.9	-49843.2
2	23414.6	-14995.7	-11432.9	-3014
3	-23414.6	14995.7	-11432.9	-19851.8
4	23414.6	14995.7	-11432.9	26977.4

Localización de el eje neutro

$$y := \frac{-I_z}{A \cdot e_y}$$

$$y = -0.0762 \text{ mts}$$

$$z := \frac{-I_y}{A \cdot e_z}$$

$$z = -0.0391 \text{ mts}$$

Inclinación de el eje neutro:

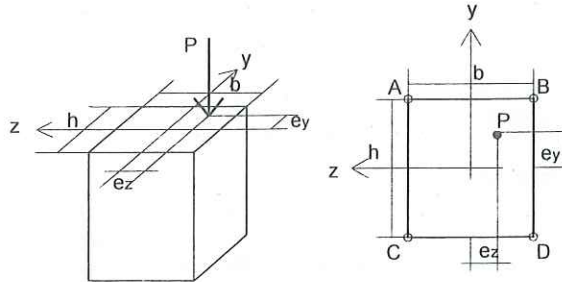
$$\tan \beta := \frac{-My}{Mz} \cdot \frac{I_z}{I_y}$$

$$\tan \beta = -1.952$$

$$\beta := \text{atan}(\tan \beta) \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\beta = -62.872$$

Solución ejercicio No. 2.8



Momentos flexionantes producidos por la carga axial

$$P := 60 \text{ kN}$$

$$e_y := 0.020 \text{ mts}$$

$$e_z := 0.040 \text{ mts}$$

$$M_y := P \cdot e_z \quad M_y = 2.4 \text{ kN-m (positivo)}$$

$$M_z := P \cdot e_y \quad M_z = 1.2 \text{ kN-m (positivo)}$$

Momentos de inercia I_y , I_z de la sección transversal:

$$h := 0.30 \text{ mts}$$

$$b := 0.20 \text{ mts}$$

$$I_y := \frac{h \cdot b^3}{12} \quad I_y = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_z := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad I_z = 4.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Orientación de el eje neutro:

$$\beta := \text{atan}\left(\frac{M_y \cdot I_z}{M_z \cdot I_y}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \quad \beta = 77.471$$

Determinación de los esfuerzos máximos: dada la orientación de el eje neutro, los puntos B y C en la sección transversal estarán sometidos a los máximos esfuerzos.

$$y := \frac{h}{2} \quad y = 0.15 \text{ mts} \quad P = 60 \text{ kN}$$

$$z := \frac{b}{2} \quad z = 0.1 \text{ mts} \quad M_y = 2.4 \text{ kN-m}$$

$$A := b \cdot h \quad A = 0.06 \text{ m}^2 \quad M_z = 1.2 \text{ kN-m}$$

Punto B, sometido a compresión:

$$\sigma_{\text{maxc}} := \frac{-P}{A} - \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad \sigma_{\text{maxc}} = -2600 \text{ kN/m}^2$$

Punto C, sometido a tensión:

$$\sigma_{\text{maxt}} := \frac{-P}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} \quad \sigma_{\text{maxt}} = 600 \text{ kN/m}^2$$

DEFORMACIONES EN VIGAS (FLEXION SIMPLE)

En el enfoque de la Mecánica de Materiales común, se acostumbra recurrir a razonamientos simplificados para intentar relacionar las fuerzas que actúan sobre cuerpos de formas y material conocidos, para evaluar los desplazamientos que experimenta el cuerpo.

La mecánica de materiales parte de un pensamiento hipotético, normalmente simplificadorio, para establecer relaciones matemáticas que permitan relacionar fuerzas y desplazamientos.

Para la condición de momento flexionante constante "M", actuando en una barra de peralte "h" en la sección transversal y longitud "L", la solución al problema de relacionar "M" con las propiedades geométricas de la barra, las propiedades de deformación del material, la mecánica de materiales intenta establecerla aceptando las siguientes hipótesis:

1. El cuerpo es un cuerpo prismático de eje recto (eje centroidal de cada una de las secciones transversales).
2. Las secciones transversales permanecen constantes a lo largo del eje de la barra.
3. En cada sección transversal existe por lo menos un plano de simetría.
4. Las dimensiones de la barra son tales que $L/h > 5$.
5. El material es homogéneo e isótropo.
6. El material es elástico-lineal.
7. Las cargas son aplicadas en un plano.
8. El plano de cargas coincide con el plano de simetría de las secciones transversales.
9. No existen problemas de inestabilidad en la barra.
10. Las secciones planas perpendiculares al eje longitudinal de la barra, permanecen ortogonales al eje, al aparecer el campo de desplazamientos.

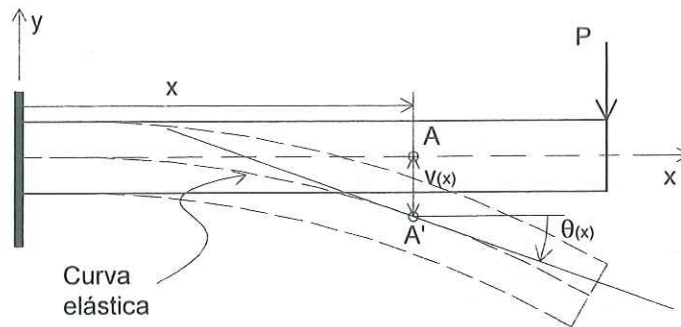
Concepto y Métodos

Las cargas que actúan sobre una viga, en dirección perpendicular al eje longitudinal de la viga, provocan flexión de la misma, lo que deforma el eje longitudinal de la viga en una línea curva. Para efecto del estudio de vigas en este curso, serán consideradas solamente deflexiones en el sentido perpendicular al eje longitudinal de las vigas, las cuales podrán ser isostáticas o bien, hiperestáticas.

El caso de deflexión simple es un caso particular de carga en el que se considera solamente el efecto de flexión producida por el sistema de cargas y las deformaciones producidas están contenidas en el plano de acción del sistema de cargas. Cualquier otro efecto de deformación que no coincida con el plano de cargas, no será considerado en este curso.

Las deflexiones a determinar en el elemento estructural estarán referidas a la línea que formarían los puntos a lo largo de la viga que coinciden con el eje neutro de la sección. Esta línea se conoce como **curva de deflexión** ("curva elástica", "configuración de la elástica", etc.). La identificación de la configuración de la curva elástica estará determinada por dos parámetros: la deflexión perpendicular al eje longitudinal del elemento estructural y la rotación que experimenta un punto en particular de la viga.

La rotación angular estará referida al ángulo que forma la tangente en el punto de interés en la configuración deformada con relación a la posición horizontal inicial.

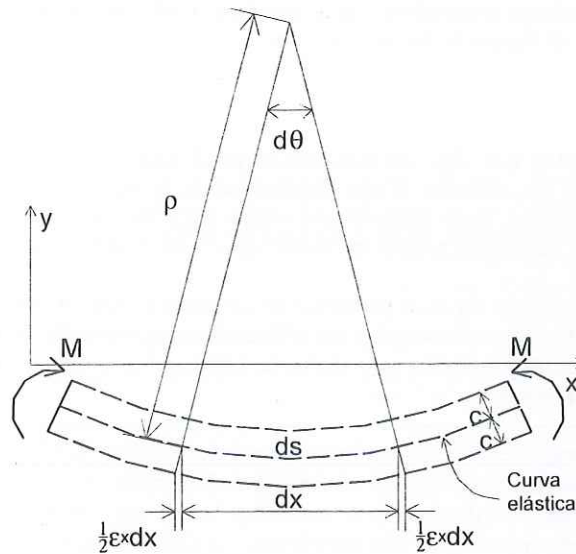


$v(x)$: Deflexión vertical de el punto "A" en la viga, a una distancia "x" desde el apoyo, medida desde la horizontal de referencia hacia la curva elástica.

$\theta(x)$: Angulo que forma la tangente a la curva elástica en el punto "A" con respecto a la horizontal de referencia.

Determinación de la relación Fuerza-Desplazamiento, considerando solamente los efectos producidos por flexión.

Suponiendo la siguiente configuración de deformación:



En donde:

ρ : Radio de curvatura

$1/\rho$: Curvatura

Sabemos que, que el esfuerzo axial producido por la flexión, es

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I}$$

De las propiedades elásticas de el material, la deformación unitaria debido a la flexión será

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

Por lo que,

$$\varepsilon_x = \frac{\left(\frac{Mc}{I}\right)}{E} = \frac{Mc}{EI}$$

La variación de el ángulo $d\theta(x)$ respecto a la longitud de el elemento diferencial "ds":

$$d\theta(x) = \frac{ds}{\rho}$$

$$\frac{d\theta(x)}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

esta última expresión corresponde a la curvatura.

Al considerar que solamente se presentan deformaciones pequeñas

$ds \cong dx$

$$\frac{d\theta(x)}{ds} \cong \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{1}{\rho} \quad \rightarrow \quad d\theta(x) = \frac{dx}{\rho}$$

De la geometría de deformación de el segmento mostrado:

$$d\theta(x) = \frac{\varepsilon_x dx}{c}$$

$$\text{Puesto que } \varepsilon_x = \frac{Mc}{EI} \quad \rightarrow \quad d\theta(x) = \frac{\left(\frac{Mc}{EI}\right) dx}{c} = \frac{Mdx}{EI}$$

Igualando las expresiones para $d\theta(x)$:

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{Mdx}{EI} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Esta última expresión relaciona la curvatura con el Momento flexionante actuando en el segmento diferencial.

En su forma exacta, la curvatura se define como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v(x)}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Si se acepta que las deformaciones experimentadas por flexión, son pequeñas:

$$\left(\frac{dv(x)}{dx}\right)^2 \rightarrow 0$$

por lo que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v(x)}{dx^2}$$

La curvatura $1/\rho$ en función de la segunda derivada con respecto a "x" de la función que define la curva elástica " $v(x)$ ".

Si la curvatura se expresa en función de el momento flexionante "M", entonces

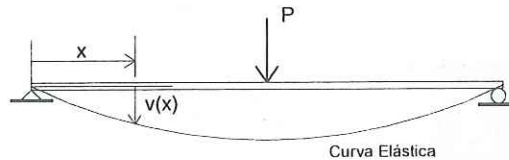
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \rightarrow \quad \frac{M}{EI} = \frac{d^2v(x)}{dx^2}$$

La última expresión constituye la relación Fuerza-Desplazamiento, a partir de la cual se relaciona el momento flexionante actuante en un punto de la viga, con la deflexión vertical de el mismo punto, a través de la segunda derivada de la ecuación de la curva elástica, con respecto a "x".

Método de la Doble Integración

A través de el conocimiento de el diagrama de momentos dividido por el coeficiente a la flexión "EI", $\frac{M}{EI}$, se puede establecer la variación $\frac{d^2v(x)}{dx^2}$, y por integraciones sucesivas conocer la configuración de la deformada de la elástica, $v(x)$.

El procedimiento a través de la última expresión para el cálculo de las deformaciones en una viga se conoce como el **Método de la Doble Integración**.



$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$d^2v(x) = \frac{M(x)}{EI} dx^2$$

$$v(x) = \iint d^2v(x)$$

$$v(x) = \iint \frac{M(x)}{EI} dx^2$$

Método de Area de Momentos

De el cálculo, la pendiente de una curva en un punto cualquiera

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx}$$

Al derivar esta expresión

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{d^2v(x)}{dx^2}$$

o bien, de acuerdo con resultados previos:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EI}$$

Esta expresión puede representarse como una ecuación diferencial

$$d\theta(x) = \frac{M(x)}{EI} dx$$

Integrando entre los puntos "A" y "B" sobre la viga

$$\int_A^B d\theta(x) = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

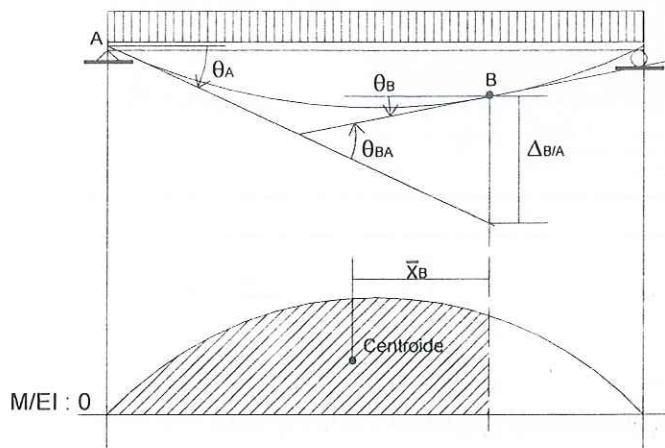
$$\theta_A - \theta_B = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

$$\theta_A - \theta_B = \theta_{BA}$$

$$\theta_{BA} = \int_A^B \frac{M(x)}{EI} dx$$

Lo cual constituye el Primer teorema del método área de momentos, como la desviación tangencial de el punto "B", con respecto a la tangente de el punto "A", definida por la diferencia de las tangentes en "A" y en "B" determinada por el área definida en el diagrama M/EI entre los puntos "A" y "B".

La determinación de la deflexión vertical de un punto a lo largo de la viga, sobre la curva elástica, podrá llevarse a cabo a través de relaciones geométricas definidas por tangentes de la curva elástica en combinación con la geometría de el diagrama de momentos dividido por el coeficiente a la flexión "EI".



La desviación tangencial del punto "B" en la curva elástica, con respecto a la tangente de referencia en "A", $\Delta_{B/A}$, de acuerdo con el 2do teorema del método, se determina calculando el primer momento estático con respecto al punto "B" del área del diagrama M/EI entre los puntos "A" y "B".

$$\Delta_{B/A} = \bar{x}_B \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

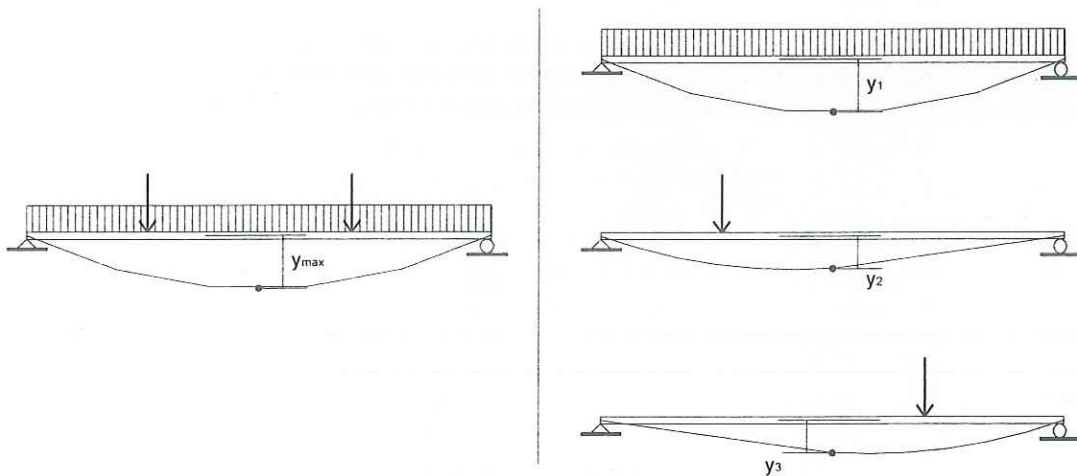
Método de la viga conjugada

En la aplicación de esta metodología se recurre a la utilización de una viga imaginaria llamada "Viga conjugada" a la cual se aplican las condiciones de equilibrio estático $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$ para determinar la rotación de la tangente y deflexión vertical de un punto cualquiera en la viga real. Deberá cumplirse que las condiciones de equilibrio estático de la viga conjugada sean equivalentes a las condiciones de deformación de la viga real, por lo que, deberán efectuarse algunas consideraciones en la determinación de las condiciones de carga y apoyo en la viga conjugada (viga imaginaria) a partir de las condiciones de apoyo y carga de la viga real. La condición de carga aplicada en la viga conjugada, será el diagrama de M/EI de la viga real, por lo que se tendrán las siguientes relaciones en un punto "x" cualquiera a lo largo de la viga:

Viga conjugada	Viga Real
V_x (fza. Cortante)	θ_x
M_x (Momento flex.)	Δ_x

Método de superposición

En la determinación de la rotación y la deflexión vertical de un punto cualquiera a lo largo de la viga, cuando se presenta una combinación de cargas actuando sobre la viga, es posible determinar las condiciones de deformación bajo la aplicación de cada una de las cargas actuando de manera independiente y posteriormente sobreponer los efectos que producen estas cargas.

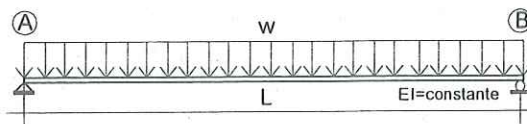


De esta manera, por superposición de los efectos que produce cada una de las cargas actuando de manera independiente:

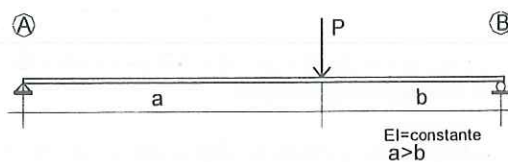
$$y_{max} = y_1 + y_2 + y_3$$

Ejercicio No. 3.1

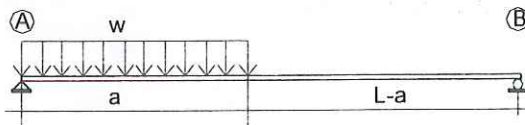
Aplicar el método doble integración a la viga mostrada en la figura para determinar la ecuación de la curva elástica, así como los valores máximos de deflexión vertical y rotación.

**Ejercicio No. 3.2**

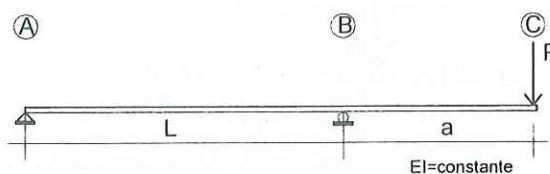
Aplicar el método doble integración a la viga mostrada en la figura para determinar la ecuación de la curva elástica.

**Ejercicio No. 3.3**

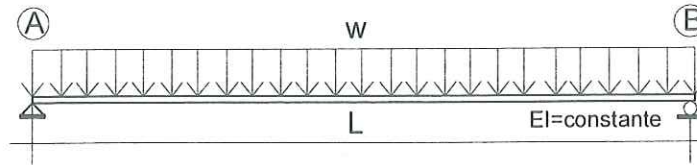
Aplicar el método doble integración a la viga mostrada en la figura para determinar la ecuación de la curva elástica.

**Ejercicio No. 3.4**

Aplicar el método doble integración a la viga mostrada en la figura para determinar la ecuación de la curva elástica.

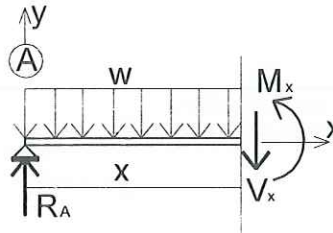


Solución ejercicio No. 3.1



Determinación de la expresión M_x (momento flexionante en la viga, ecuación en función de "x", válida en toda la longitud de la viga).

Efectuando un corte en la viga a una distancia "x" desde el apoyo izquierdo (considerando que este apoyo se encuentra en el origen de el sistema de ejes coordenados):



Sumatoria de momentos en "x":

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ -R_A x + w(x)\left(\frac{x}{2}\right) + M_x &= 0 \\ M_x &= R_A x - \frac{wx^2}{2} \end{aligned}$$

Por condiciones de simetría en carga y apoyos:

$$R_A = R_B = \frac{wL}{2}$$

Entonces:

$$M_x = \left(\frac{wL}{2}\right)x - \frac{1}{2}wx^2$$

Aplicando la relación fuerza-desplazamiento:

$$\frac{d^2v_x}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = \left(\frac{1}{EI}\right)\left(\frac{1}{2}wLx - \frac{1}{2}wx^2\right)$$

Integrando esta expresión, de "0" a "L", ya que la ecuación de Momento " M_x " es válida en toda la longitud de la viga:

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \int_0^x \frac{M_x}{EI} dx = \int_0^x \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{1}{2} wLx - \frac{1}{2} wx^2 \right) dx$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} wLx^2 - \frac{1}{6} wx^3 \right) + C_1$$

Integrando nuevamente:

$$v_x = \iint \frac{M_x}{EI} dx^2 = \int_0^x \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} wLx^2 - \frac{1}{6} wx^3 \right) + C_1 \right] dx$$

$$v_x = \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{12} wLx^3 - \frac{1}{24} wx^4 \right) + C_1x + C_2 \right]_0^x$$

Determinación de las constantes de integración C_1 y C_2 , por aplicación de dos de las siguientes condiciones de frontera, en las que se establece que la deflexión vertical en los apoyos es nula, así como la rotación de la tangente en el centro de el claro (dada la condición de simetría):

$x = 0$	$x = L/2$	$x = L$
$v_{x=0} = 0$	$\theta_{x=L/2} = 0$	$v_{x=L} = 0$

Aplicando las condiciones de frontera de los apoyos:

$$v_{x=0} = 0$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{12} wL(0)^3 - \frac{1}{24} w(0)^4 \right) + C_1(0) + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

$$v_{x=L} = 0$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{12} wL(L)^3 - \frac{1}{24} w(L)^4 \right) + C_1(L) + (0)$$

$$0 = \frac{1}{12} \frac{wL^4}{EI} - \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI} + C_1L$$

$$0 = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI} + C_1L$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{24} \frac{wL^3}{EI}$$

La configuración de la curva elástica queda definida por:

$$v_x = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{12} wLx^3 - \frac{1}{24} wx^4 - \frac{1}{24} wL^3x \right)$$

$$EIv_x = \frac{1}{12} wLx^3 - \frac{1}{24} wx^4 - \frac{1}{24} wL^3x$$

$$EIv_x = \frac{wx}{24} (2Lx^2 - x^3 - L^3)$$

Determinación de la deflexión vertical al centro de el claro de la viga.

$$x = L/2$$

$$EIv_x = \frac{w(L/2)}{24} \left[2L \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^3 - L^3 \right]$$

$$EIv_x = \frac{wL}{48} \left[\frac{2L^3}{4} - \frac{L^3}{8} - L^3 \right] = \frac{wL^4}{48} \left[\frac{2}{4} - \frac{1}{8} - 1 \right] = \frac{wL^4}{48} \left[\frac{5}{8} \right]$$

$$EIv_x = -\frac{5wL^4}{384}$$

Determinación de la rotación de la tangente al centro de el claro de la viga.

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{4} wLx^2 - \frac{1}{6} wx^3 - \frac{1}{24} wL^3 \right)$$

$$x = \frac{L}{2}$$

$$\theta_{x=\frac{L}{2}} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} wL \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} w \left(\frac{L}{2} \right)^3 - \frac{1}{24} wL^3 \right]$$

$$\theta_{x=\frac{L}{2}} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{16} wL^3 - \frac{1}{48} wL^3 - \frac{1}{24} wL^3 \right] = \frac{wL^3}{EI} \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{48} - \frac{1}{24} \right] = 0$$

$$\theta_{x=\frac{L}{2}} = 0$$

Determinación de la rotación máxima de la tangente.

Por condiciones de simetría, ésta rotación máxima se presenta en los apoyos: $\theta_A = \theta_B$

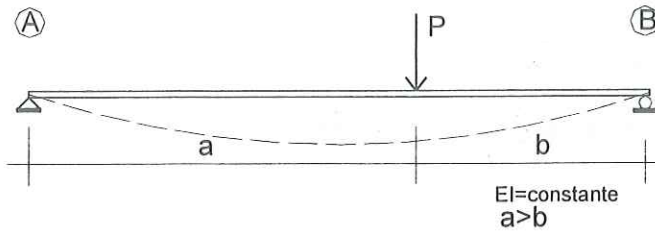
$$x = 0$$

$$\theta_{x=0} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{4} wL(0)^2 - \frac{1}{6} w(0)^3 - \frac{1}{24} wL^3 \right]$$

$$\theta_{x=0} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{24} wL^3 \right]$$

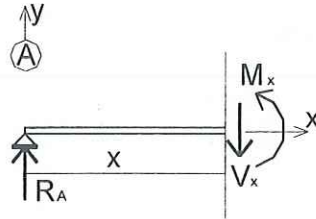
$$\theta_{x=0} = -\frac{1}{24} \frac{wL^3}{EI}$$

Solución ejercicio No. 3.2



Determinación de la expresión M_x (momento flexionante en la viga, ecuación en función de "x", válida en toda la longitud de la viga). Será necesario efectuar dos cortes debido a la condición de carga aplicada, ésta genera que la ecuación de momento flexionante no sea continua en toda la longitud de la viga.

Efectuando un corte en la viga a una distancia "x", tal que $0 \leq x \leq a$, desde el apoyo izquierdo (considerando que este apoyo se encuentra en el origen de el sistema de ejes coordenados):

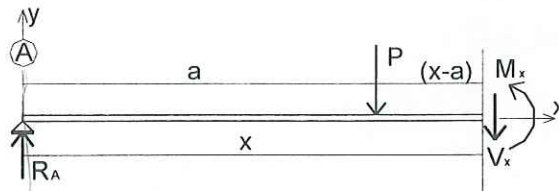


Sumatoria de momentos en "x":

$$\begin{aligned} \sum M_x &= 0 \\ -R_A x + M_x &= 0 \\ M_x &= R_A x \end{aligned}$$

Ecuación de momento válida en el rango $0 \leq x \leq a$.

Posteriormente, efectuando un corte en la viga a una distancia "x", tal que $a \leq x \leq L$, en donde $L = a + b$:



Sumatoria de momentos en "x":

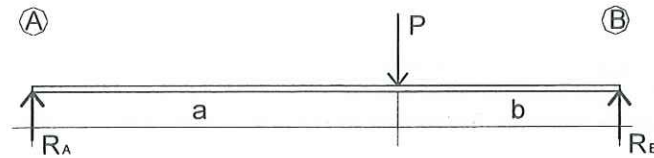
$$\sum M_x = 0$$

$$-R_A x + P(x - a) + M_x = 0$$

$$M_x = R_A x - P(x - a)$$

Ecuación de momento válida en el rango $a \leq x \leq L$.

Determinación de las fuerzas de reacción en los apoyos.



Sumatoria de momentos en el apoyo "B":

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_A(a + b) + Pb = 0$$

$$R_A = \frac{Pb}{a + b} = \frac{Pb}{L}$$

Sumatoria de momentos en el apoyo "A":

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B(a + b) - Pa = 0$$

$$R_B = \frac{Pa}{a + b} = \frac{Pa}{L}$$

Las ecuaciones de momento determinadas previamente, sustituyendo la expresión de la fuerza de reacción R_A :

En el rango $0 \leq x \leq a$; $M_x = \frac{Pb}{L} x$

En el rango $a \leq x \leq L$; $M_x = \frac{Pb}{L} x - P(x - a)$

Haciendo uso de la relación Fuerza-Desplazamiento $\frac{d^2 v_x}{dx^2} = \frac{M_x}{EI}$

En el rango $0 \leq x \leq a$

$$\frac{d^2 v_x}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{L} x$$

En el rango $a \leq x \leq L$

$$\frac{d^2 v_x}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{Pb}{L} x - P(x - a) \right]$$

Integrando

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \int_0^a \frac{M_x}{EI} dx = \int_0^a \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{Pb}{L} x \right) dx$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{Pb}{L} x^2 \right) + C_1$$

Integrando nuevamente:

$$v_x = \iint \frac{M_x}{EI} dx^2 = \int_0^a \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{Pb}{L} x^2 \right) + C_1 \right] dx$$

$$v_x = \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} \frac{Pb}{L} x^3 \right) + C_1 x + C_2 \right]_0^a$$

Integrando

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \int_a^L \frac{M_x}{EI} dx = \int_a^L \left(\frac{1}{EI} \right) \left[\frac{Pb}{L} x - P(x-a) \right] dx$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{Pb}{L} x^2 - \frac{1}{2} P(x-a)^2 \right) + C_2$$

Integrando nuevamente:

$$v_x = \iint \frac{M_x}{EI} dx^2 = \int_a^L \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{Pb}{L} x^2 - \frac{1}{2} P(x-a)^2 \right) + C_2 \right] dx$$

$$v_x = \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} \frac{Pb}{L} x^3 - \frac{1}{6} P(x-a)^3 \right) + C_2 x + C_3 \right]_a^L$$

Para determinar las constantes de integración C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , serán necesarias cuatro condiciones de frontera, de las cuales dos corresponden a las condiciones de deformación en los apoyos, las otras dos necesarias, corresponden a la condición de compatibilidad de deformación en el punto donde son comunes las expresiones obtenidas, tanto para la deflexión vertical como para la rotación de la tangente, en cada uno de los rangos considerados en la longitud de la viga, es decir:

- a) en $x=0$; $v_{x=0} = 0$ b) en $x=L$; $v_{x=L} = 0$ c) en $x=a$; $v_{x=a,I} = v_{x=a,II}$ d) en $x=a$; $\theta_{x=a,I} = \theta_{x=a,II}$

Aplicando las condiciones de frontera:

- a) $x=0$; $v_{x=0} = 0$

Utilizando la expresión apropiada para v_x , en el rango $0 \leq x \leq a$

$$v_x = \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} \frac{Pb}{L} x^3 \right) + C_1 x + C_2 \right]$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} \frac{Pb}{L} (0)^3 \right] + C_1 (0) + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

- b) en $x=L$; $v_{x=L} = 0$

Utilizando la expresión apropiada para v_x , en el rango $a \leq x \leq L$

$$v_x = \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} \frac{Pb}{L} x^3 - \frac{1}{6} P(x-a)^3 \right) + C_2 x + C_3 \right]$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} \frac{Pb}{L} (L)^3 - \frac{1}{6} P[(L)-a]^3 \right] + C_2 (L) + C_3$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} PbL^2 - \frac{1}{6} Pb^3 \right] + C_2 (L) + C_3$$

$$\Rightarrow C_3 = -C_2 L - \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6} (L^2 - b^2)$$

c) en $x=a$; $v_{x=a,I} = v_{x=a,II}$

Utilizando las dos expresiones para v_x , tanto en el rango $0 \leq x \leq a$, como en $a \leq x \leq L$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} \frac{Pb}{L} (a)^3 \right] + C_1(a) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} \frac{Pb}{L} (a)^3 - \frac{1}{6} P[(a)-a]^3 \right) + C_2(a) + C_4$$

$$\Rightarrow C_1 a = C_2 a + C_4$$

d) en $x=a$; $\theta_{x=a,I} = \theta_{x=a,II}$

Utilizando las dos expresiones para θ_x , tanto en el rango $0 \leq x \leq a$, como en $a \leq x \leq L$

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{Pb}{L} (a)^2 \right) + C_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{Pb}{L} (a)^2 - \frac{1}{2} P[(a)-a]^2 \right) + C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = C_2$$

de resultados previos

$$C_1 a = C_2 a + C_4$$

$$C_1 a = (C_1) a + C_4$$

$$\Rightarrow C_4 = 0$$

También

$$C_4 = -C_2 L - \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6} (L^2 - b^2)$$

$$0 = -C_2 L - \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6} (L^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2)$$

Por lo tanto,

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2)$$

Las expresiones para la rotación de la tangente y la curva elástica en cada uno de los segmentos de la viga, quedan definidas de la siguiente manera:

En el rango $0 \leq x \leq a$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{2L} x^2 - \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2)$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} (3x^2 - L^2 + b^2)$$

$$v_x = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} x^3 - \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2) x$$

$$v_x = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} x (x^2 - L^2 + b^2)$$

En el rango $a \leq x \leq L$

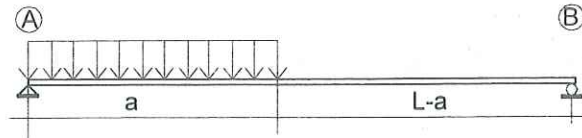
$$\theta_x = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{Pb}{L} x^2 - \frac{1}{2} P(x-a)^2 \right) - \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2)$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} \left[3x^2 - \frac{3L}{b} (x-a)^2 - L^2 + b^2 \right]$$

$$v_x = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} \frac{Pb}{L} x^3 - \frac{1}{6} P(x-a)^3 \right) - \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} (L^2 - b^2) x$$

$$v_x = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} x \left[x^2 - \frac{L}{bx} (x-a)^3 - L^2 + b^2 \right]$$

Solución ejercicio No. 3.3



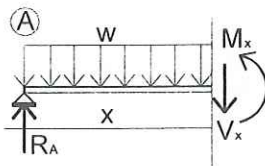
Determinación de reacciones:

Haciendo sumatoria de momentos en el apoyo en A:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B = \frac{wa^2}{2L} \uparrow$$

Ecuación de momento M_x :

a) A una distancia $x < a$, desde el apoyo en A.



$$\frac{wx^2}{2} - R_A x + M_x = 0$$

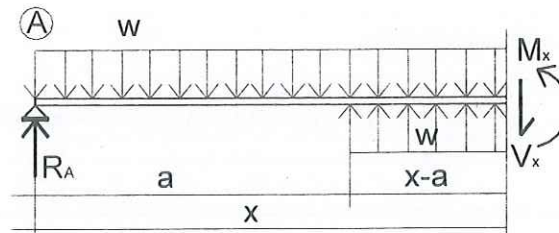
$$M_x = R_A x - \frac{wx^2}{2}$$

Haciendo sumatoria de momentos en el apoyo en B:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A = \frac{wa}{2L} (2L - a) \uparrow$$

b) A una distancia $x > a$.

Nótese que se han aplicado cargas ficticias en la distancia $(x - a)$, una en la misma dirección que "w" y otra en dirección contraria.



$$\frac{wx^2}{2} - R_A x - \frac{w}{2} (x - a)^2 + M_x = 0$$

$$M_x = R_A x - \frac{wx^2}{2} + \frac{w}{2} (x - a)^2$$

Se utilizará la ecuación de momento determinada para valores $x > a$, sin embargo el término $(x - a)$, en esta ecuación, no se considerará cuando éste sea menor o igual que cero.

De la relación fuerza-desplazamiento:

$$\frac{d^2 v_x}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI} \left[R_A x - \frac{wx^2}{2} + \frac{w}{2} (x - a)^2 \right]$$

Integrando

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \int \frac{M_x}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{x^2}{2} - \frac{wx^3}{6} + \frac{w}{6} \langle x-a \rangle^3 \right] + C_1$$

Integrando

$$v_x = \iint \frac{M_x}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{x^3}{6} - \frac{wx^4}{24} + \frac{w}{24} \langle x-a \rangle^4 \right] + C_1 x + C_2$$

Aplicando condiciones de frontera:

a) En $x=0$; $v=0$

$$v_{x=0} = 0 = \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(0)^3}{6} - \frac{w(0)^4}{24} \right] + C_1(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

b) En $x=L$; $v=0$

$$v_{x=L} = 0 = \frac{1}{EI} \left[R_A \frac{(L)^3}{6} - \frac{w(L)^4}{24} + \frac{w}{24} (L-a)^4 \right] + C_1(L)$$

$$\Rightarrow EIC_1 = -R_A \frac{L^3}{6} + \frac{wL^4}{24} - \frac{w}{24} (L-a)^4$$

Por lo que, la ecuación de deflexión de la curva elástica queda determinada por:

$$v_x = \frac{1}{EI} \left[\frac{wa}{2L} (2L-a) \frac{x^3}{6} - \frac{wx^4}{24} + \frac{w}{24} \langle x-a \rangle^4 \right] + \left[-\frac{wa}{2L} (2L-a) \frac{L^3}{6} + \frac{wL^4}{24} - \frac{w}{24} (L-a)^4 \right] \frac{x}{EI}$$

Ordenando términos

$$v_x = \frac{wx}{24EIL} \left[2a(2L-a)(x^2 - L^2) - (L-a)^4 + \frac{L}{x} (x-a)^4 + L(L^3 - x^3) \right]$$

En el caso de evaluar la deflexión vertical a una distancia $x < a$ de el apoyo A

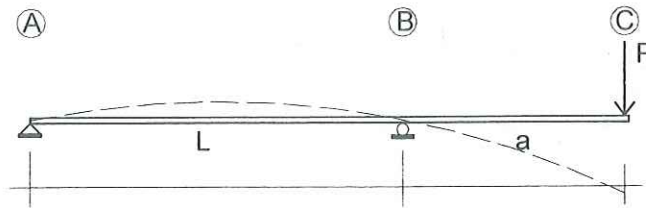
$$v_x = \frac{wx}{24EIL} \left[2a(2L-a)(x^2 - L^2) - (L-a)^4 + L(L^3 - x^3) \right]$$

Si se quiere determinar la deflexión vertical máxima (δ_{max}) en la viga, el procedimiento a seguir es el siguiente:

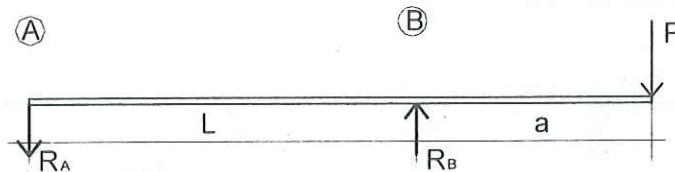
1. La deflexión vertical máxima (δ_{max}) en la viga, se localiza en el punto en el que la rotación angular es nula, es decir, $\theta_x=0$, o bien $\frac{dv_x}{dx} = 0$
2. Igualar a cero la expresión de la rotación angular.
3. Determinar la distancia "x" en la que ocurre la condición $\theta_x=0$
4. Evaluar la deflexión vertical v_x utilizando el valor encontrado de "x", de esta manera $v_x = \delta_{max}$

Solución ejercicio No. 3.4

Posible configuración de deformación:



Determinación de las fuerzas de reacción en los apoyos.



Sumatoria de momentos en el apoyo "B":

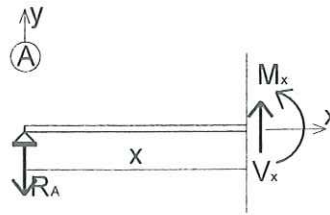
$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0 \\ R_A(L) - P(a) &= 0 \\ R_A &= \frac{Pa}{L} \downarrow\end{aligned}$$

Sumatoria de fuerzas verticales

$$\begin{aligned}\sum F_v &= 0 \\ -R_A + R_B - P &= 0 \\ -\frac{Pa}{L} + R_B - P &= 0 \\ R_B &= P + \frac{Pa}{L} \\ \Rightarrow R_B &= \frac{P}{L}(L + a)\end{aligned}$$

Determinación de la expresión M_x (momento flexionante en la viga, ecuación en función de "x", válida en la longitud entre apoyos de la viga).

Efectuando un corte en la viga a una distancia "x", tal que $0 \leq x \leq L$, desde el apoyo izquierdo (considerando que este apoyo se encuentra en el origen de el sistema de ejes coordenados):

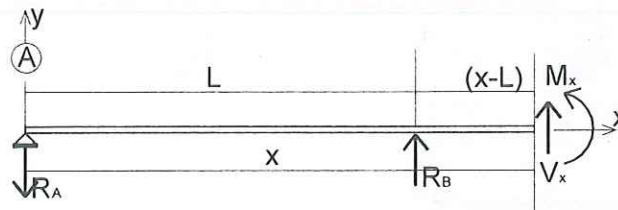


Sumatoria de momentos en "x" (Nótese que se ha considerado el sentido de M_x en la dirección positiva, para ser consistente con la definición de la relación fuerza-desplazamiento que será utilizada posteriormente):

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0 \\ R_A x + M_x &= 0 \\ \Rightarrow M_x &= -R_A x\end{aligned}$$

Ecuación de momento válida en el rango $0 \leq x \leq L$.

Posteriormente, efectuando un corte en la viga a una distancia "x", tal que $L \leq x \leq L + a$:



Sumatoria de momentos en "x" (Nótese que se ha considerado el sentido de M_x en la dirección positiva, para ser consistente con la definición de la relación fuerza-desplazamiento que será utilizada posteriormente):

$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0 \\ R_A x - R_B (x - L) + M_x &= 0 \\ \Rightarrow M_x &= -R_A x + R_B (x - L)\end{aligned}$$

Ecuación de momento válida en el rango $L \leq x \leq L + a$.

De estas ecuaciones de momento flexionante, la que consideraremos en el desarrollo de la solución, aplicable en toda la longitud de la viga será

$$M_x = -R_A x + R_B \langle x - L \rangle$$

el término $\langle x - L \rangle$ será considerado en el análisis cuando $x - L > 0$, para valores $x - L < 0$, significaría que se efectúa el análisis en el rango $0 \leq x \leq L$, y en este caso la ecuación de momento a utilizar sería $M_x = -R_A x$. Esto permitirá un desarrollo más sencillo de la solución, pues con esto se elimina la necesidad de efectuar Integraciones de dos expresiones diferentes de momento y en consecuencia se disminuye la cantidad de constantes de integración.

Haciendo uso de la relación Fuerza-Desplazamiento

$$\frac{d^2 v_x}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} = \frac{1}{EI} [-R_A x + R_B (x-L)]$$

Integrando esta expresión, de "0" a "(L+a)":

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \int_0^{L+a} \frac{M_x}{EI} dx = \int_0^{L+a} \left(\frac{1}{EI} \right) [-R_A x + R_B (x-L)] dx$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} R_A x^2 + \frac{1}{2} R_B (x-L)^2 \right) \Big|_0^{L+a} + C_1$$

Integrando nuevamente:

$$v_x = \iint \frac{M_x}{EI} dx^2 = \int_0^{L+a} \left[\frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} R_A x^2 + \frac{1}{2} R_B (x-L)^2 \right) + C_1 \right] dx$$

$$v_x = \left[\frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} R_A x^3 + \frac{1}{6} R_B (x-L)^3 \right) + C_1 x + C_2 \right] \Big|_0^{L+a}$$

Determinación de las constantes de integración C_1 y C_2 , por aplicación de dos condiciones de frontera, en las que se establece que la deflexión vertical en los apoyos es nula:

a) en $x=0$; $v_{x=0} = 0$ b) en $x=L$; $v_{x=L} = 0$

Aplicando las condiciones de frontera de los apoyos:

Para $x=0$, $(x-L) < 0$, por lo tanto, este término no se considera en la aplicación de la primer condición de frontera.

$$v_{x=0} = 0$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} R_A (0)^3 \right) + C_1 (0) + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

$$v_{x=L} = 0$$

$$0 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} R_A (L)^3 + \frac{1}{6} R_B ((L)-L)^3 \right) + C_1 (L) + (0)$$

$$0 = -\frac{1}{6} \frac{R_A L^3}{EI} + C_1 L$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{6} \frac{R_A L^2}{EI} = \frac{1}{6} \left(\frac{\text{Pa}}{L} \right) L^2 = \frac{1}{6} \frac{\text{Pa}L}{EI}$$

La configuración de la curva elástica queda definida por:

$$v_x = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6} R_A x^3 + \frac{1}{6} R_B \langle x-L \rangle^3 \right) + \frac{1}{6} \frac{PaL}{EI} x$$

$$EIv_x = \frac{1}{6} \left(-R_A x^3 + R_B \langle x-L \rangle^3 + PaLx \right)$$

$$EIv_x = \frac{1}{6} \left(-\frac{Pa}{L} x^3 + \frac{P}{L} (L+a) \langle x-L \rangle^3 + PaLx \right)$$

$$EIv_x = \frac{1}{6} \frac{Pax}{L} \left(-x^2 + \frac{1}{ax} (L+a) \langle x-L \rangle^3 + L^2 \right)$$

La anterior es la expresión para calcular la deflexión vertical para valores de "x" tales que, $L \leq x \leq L+a$. Para determinar la deflexión vertical para valores de "x" tales que, $0 \leq x \leq L$, el término $\langle x-L \rangle$ no se considera, por lo que

$$EIv_x = \frac{1}{6} \frac{Pax}{L} (-x^2 + L^2)$$

De igual manera podemos representar la expresión para calcular la rotación de la tangente.

En $L \leq x \leq L+a$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} R_A x^2 + \frac{1}{2} R_B \langle x-L \rangle^2 \right) + C_1$$

$$\theta_x = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \frac{Pa}{L} x^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{L} (L+a) \langle x-L \rangle^2 \right) + \frac{1}{6} \frac{PaL}{EI}$$

$$EI\theta_x = \frac{1}{6} \frac{Pa}{L} \left(-3x^2 + \frac{3}{a} (L+a) \langle x-L \rangle^2 + L^2 \right)$$

En $0 \leq x \leq L$

$$EI\theta_x = \frac{1}{6} \frac{Pa}{L} (-3x^2 + L^2)$$

Para encontrar la deflexión vertical máxima entre los apoyos de la viga, es necesario determinar la distancia "x" a la cual la tangente en ese punto es horizontal, es decir:

$$EI\theta_x = 0$$

$$\frac{1}{6} \frac{Pa}{L} (-3x^2 + L^2) = 0$$

$$-3x^2 + L^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{L^2}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

Con el valor determinado para "x", se evalúa la expresión para la deflexión vertical, la cual será máxima, δ_{max}

$$EIv_x = \frac{1}{6} \frac{Pa x}{L} (-x^2 + L^2)$$

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$EI\delta_{\max} = \frac{1}{6} \frac{Pa \left(\frac{L}{\sqrt{3}} \right)}{L} \left[- \left(\frac{L}{\sqrt{3}} \right)^2 + L^2 \right]$$

$$EI\delta_{\max} = \frac{1}{6} \frac{Pa}{\sqrt{3}} \left(-\frac{L^2}{3} + L^2 \right) = \frac{1}{6} \frac{PaL^2}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right)$$

$$EI\delta_{\max} = \frac{1}{6} \frac{PaL^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$EI\delta_{\max} = \frac{1}{9} \frac{PaL^2}{\sqrt{3}}$$

METODO AREA DE MOMENTOS

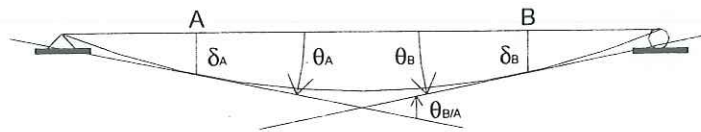
El método está basado en la determinación de los valores de deflexión vertical y rotación de la tangente, a partir de la geometría de el diagrama de momentos de la viga, así como de las relaciones geométricas determinadas por la configuración de deformación.

A diferencia de el método de la doble integración, en este método (área de momentos) es posible determinar valores de deformación de un punto en particular en la viga y no así la determinación de la configuración completa de la curva elástica.

Teorema 1.

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M_x}{EI} dx$$

La rotación de la tangente en "B" con respecto a la tangente en "A" es igual a el área en el diagrama de momentos (dividido por el coeficiente "EI") contenido entre los puntos "A" y "B".

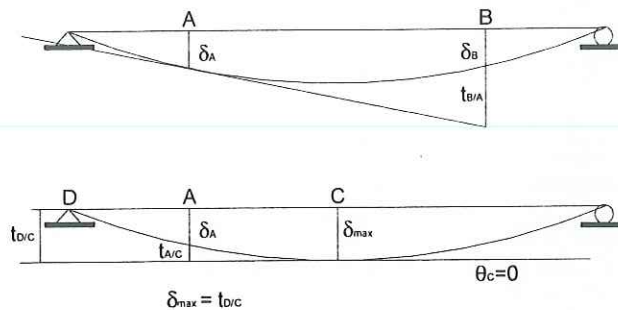


$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = (+\theta_B) - (-\theta_A) = +\theta_B + \theta_A$$

Teorema 2.

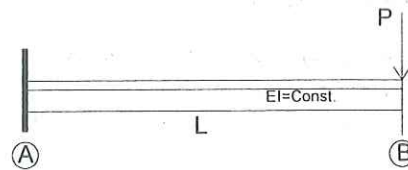
$$t_{B/A} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} \bar{x}_B dx$$

La desviación tangencial de el punto "B" con respecto a la tangente de el punto "A", es igual a el primer momento de estático de el área del diagrama de momentos (dividido por el coeficiente "EI") calculado con respecto a el punto "B" (distancia centroidal \bar{x}_B)

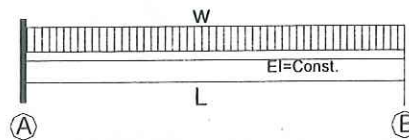


Ejercicio No. 3.5

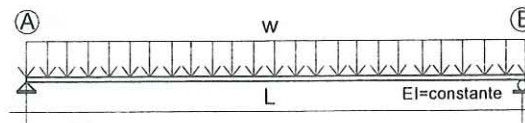
Aplicar el método de área de momentos para determinar la deflexión vertical y rotación de la tangente en el punto B de la viga mostrada.

**Ejercicio No. 3.6**

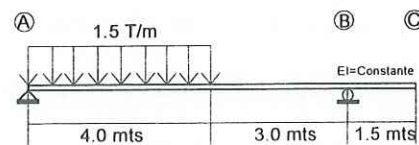
Aplicar el método de área de momentos para determinar la deflexión vertical y rotación de la tangente en el punto B de la viga mostrada.

**Ejercicio No. 3.7**

Aplicar el método de área de momentos para determinar la deflexión vertical máxima y rotación de la tangente en el punto A de la viga mostrada.

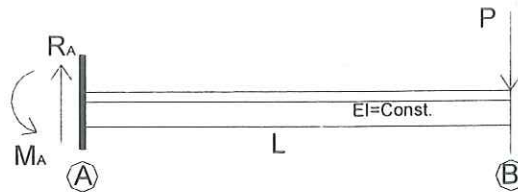
**Ejercicio No. 3.8**

Aplicar el método de área de momentos para determinar la deflexión vertical máxima entre los apoyos A y B y rotación de la tangente en el punto A de la viga mostrada.



Solución ejercicio No. 3.5

Determinación de el diagrama de Momentos de la viga

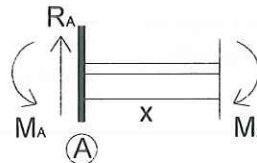


Fuerzas de reacción en el empotramiento:

$$R_A = P \uparrow$$

$$M_A = PL$$

Momento a una distancia "x" desde el empotramiento:



$$\sum M_x = 0$$

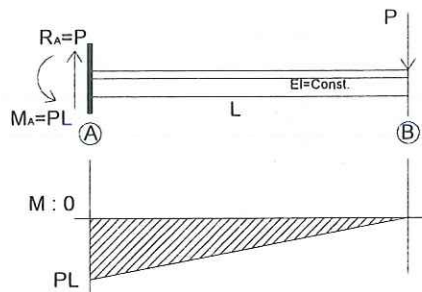
$$-R_A x + M_A - M_x = 0$$

$$\Rightarrow M_x = -R_A x + M_A = -Px + PL = P(L - x)$$

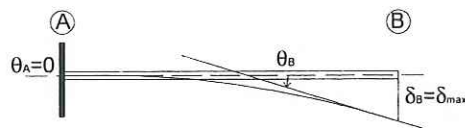
Expresión de momento definido por la ecuación de una recta, en función de la distancia "x". Evaluando esta expresión:

$$\text{En } x=0; M_{x=0} = P[L - (0)] = PL$$

$$\text{En } x=L; M_{x=L} = P[L - (L)] = 0$$



Representación de la posible configuración de deformación.



La tangente en el apoyo es horizontal, por ser éste un empotramiento, $\theta_A = 0$

La deflexión vertical máxima ocurre en el extremo libre en voladizo, $v_{x=L} = \delta_B = \delta_{\max} = t_{B/A}$

La tangente de referencia es θ_A , por ser horizontal, a partir de la cual se obtendrán los valores de rotación y deflexión vertical de el punto "B".

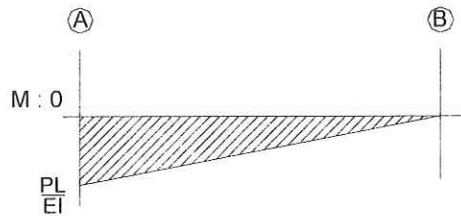
Determinación de la rotación de la tangente en "B", θ_B

Aplicando el Primer Teorema de el método:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \theta_B - (0) = \int_A^B \frac{M_x}{EI} dx$$

$$\theta_B = \int_A^B \frac{M_x}{EI} dx$$

Es decir, la rotación θ_B se determina calculando el área de el diagrama $\frac{M_x}{EI}$ entre los puntos "A" y "B".



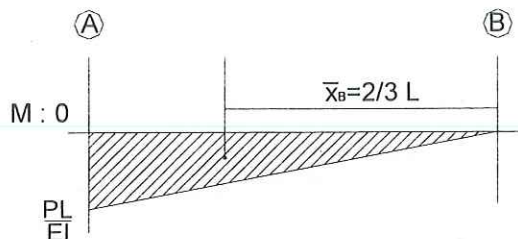
$$\theta_B = \frac{1}{2} L \left(-\frac{PL}{EI} \right) = -\frac{1}{2} \frac{PL^2}{EI} = -\frac{1}{2} \frac{ML}{EI}$$

Determinación de la deflexión vertical en "B", δ_B

Aplicando el Segundo Teorema de el método:

$$\delta_B = t_{B/A} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} \bar{x}_B dx$$

Es decir, la deflexión vertical δ_B se determina calculando el primer momento estático de el área de el diagrama $\frac{M_x}{EI}$ entre los puntos "A" y "B", con respecto a el punto "B" (distancia centroidal \bar{x}_B)



$$\int_A^B \frac{M_x}{EI} x_B dx = -\frac{1}{2} \frac{PL^2}{EI}$$

$$x_B = \frac{2}{3}L$$

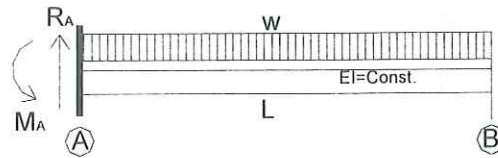
$$\delta_B = \left(-\frac{1}{2} \frac{PL^2}{EI} \right) \left(\frac{2}{3}L \right)$$

$$\Rightarrow \delta_B = -\frac{1}{3} \frac{PL^3}{EI} = -\frac{1}{3} \frac{ML^2}{EI}$$

El resultado negativo de $t_{B/A}$ (puesto que $\delta_B = t_{B/A}$) indica que el punto "B" en la curva elástica está por debajo de la tangente de referencia, un valor positivo indicaría que este punto se encontraría por arriba de la tangente de referencia.

Solución ejercicio No. 3.6

Determinación de el diagrama de Momentos de la viga

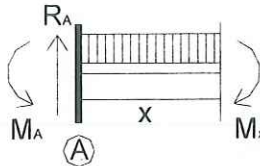


Fuerzas de reacción en el empotramiento:

$$R_A = wL \uparrow$$

$$M_A = \frac{1}{2} wL^2$$

Momento a una distancia "x" desde el empotramiento:



$$\sum M_x = 0$$

$$-R_A x + M_A + (wx) \left(\frac{x}{2} \right) - M_x = 0$$

$$M_x = -R_A x + M_A + \frac{1}{2} wx^2$$

$$M_x = -wLx + \frac{1}{2} wL^2 + \frac{1}{2} wx^2$$

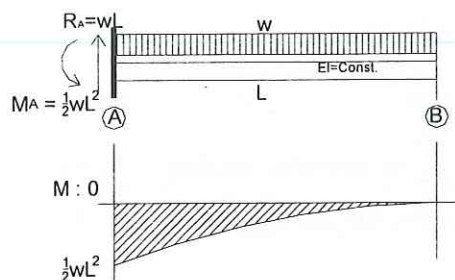
$$M_x = \frac{1}{2} w(L^2 - 2Lx + x^2)$$

$$\Rightarrow M_x = \frac{1}{2} w(L-x)^2$$

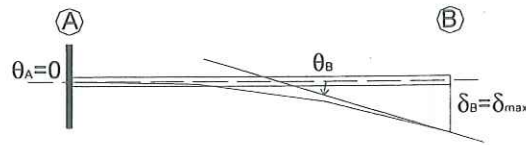
Expresión de momento definido por la ecuación de una curva de segundo grado, en función de la distancia "x". Evaluando esta expresión:

$$\text{En } x=0; M_{x=0} = \frac{1}{2} w[L - (0)]^2 = \frac{1}{2} wL^2$$

$$\text{En } x=L; M_{x=L} = \frac{1}{2} w[L - (L)]^2 = 0$$



Representación de la posible configuración de deformación.



La tangente en el apoyo es horizontal, por ser éste un empotramiento, $\theta_A = 0$

La deflexión vertical máxima ocurre en el extremo libre en voladizo, $v_{x=L} = \delta_B = \delta_{max} = t_{B/A}$

La tangente de referencia es θ_A , por ser horizontal, a partir de la cual se obtendrán los valores de rotación y deflexión vertical de el punto "B".

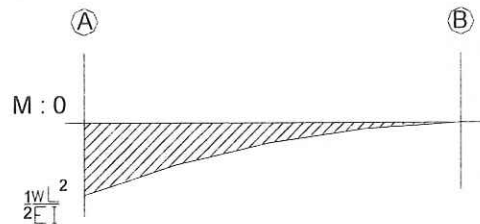
Determinación de la rotación de la tangente en "B", θ_B

Aplicando el Primer Teorema de el método:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \theta_B - (0) = \int_A^B \frac{M_x}{EI} dx$$

$$\theta_B = \int_A^B \frac{M_x}{EI} dx$$

Es decir, la rotación θ_B se determina calculando el área de el diagrama $\frac{M_x}{EI}$ entre los puntos "A" y "B".



Utilizando expresiones aproximadas para el cálculo de el área

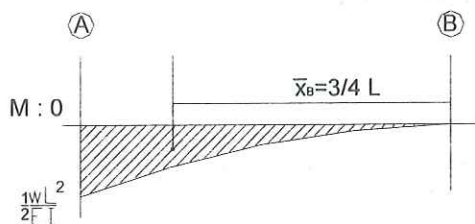
$$\theta_B = \frac{1}{3} L \left(-\frac{1}{2} \frac{wL^2}{EI} \right) = -\frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI} = -\frac{1}{3} \frac{ML}{EI}$$

Determinación de la deflexión vertical en "B", δ_B

Aplicando el Segundo Teorema de el método:

$$\delta_B = t_{B/A} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} \bar{x}_B dx$$

Es decir, la deflexión vertical δ_B se determina calculando el primer momento estático de el área de el diagrama $\frac{M_x}{EI}$ entre los puntos "A" y "B", con respecto a el punto "B" (distancia centroidal \bar{x}_B)



$$\int_A^B \frac{M_x}{EI} x_B dx = -\frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI}$$

$$\bar{x}_B = \frac{3}{4} L$$

$$\delta_B = \left(-\frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI} \right) \left(\frac{3}{4} L \right)$$

$$\Rightarrow \delta_B = -\frac{1}{8} \frac{wL^4}{EI} = -\frac{1}{4} \frac{ML^2}{EI}$$

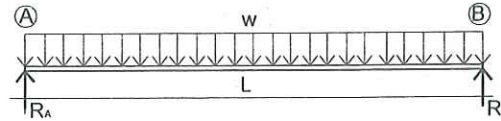
El resultado negativo de $t_{B/A}$ (puesto que $\delta_B = t_{B/A}$) indica que el punto "B" en la curva elástica está por debajo de la tangente de referencia, un valor positivo indicaría que este punto se encontraría por arriba de la tangente de referencia.

Con los resultados obtenidos en este problema y el anterior, es posible elaborar la siguiente tabla, en donde los casos 2 y 3 corresponden a los resultados de estos dos problemas.

Caso	Condición de carga	M	θ_B	δ_B
1		M	$\frac{ML}{EI}$	$\frac{ML^2}{2EI}$
2		PL	$\frac{ML}{2EI}$	$\frac{ML^2}{3EI}$
3		$\frac{wL^2}{2}$	$\frac{ML}{3EI}$	$\frac{ML^2}{4EI}$
4		$\frac{wL^2}{6}$	$\frac{ML}{4EI}$	$\frac{ML^2}{5EI}$

Solución ejercicio No. 3.7 (alternativa No. 1)

Determinación de el diagrama de Momentos de la viga

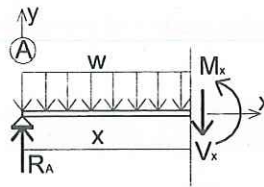


Fuerzas de reacción en los apoyos, de acuerdo con la condición de simetría en la carga aplicada en la viga:

$$R_A = \frac{wL}{2} \uparrow$$

$$R_B = \frac{wL}{2} \uparrow$$

Momento a una distancia "x" desde el apoyo en "A":



$$\sum M_x = 0$$

$$-R_A x + (wx) \left(\frac{x}{2} \right) + M_x = 0$$

$$M_x = R_A x - \frac{1}{2} wx^2$$

$$M_x = \frac{1}{2} wLx - \frac{1}{2} wx^2$$

$$M_x = \frac{1}{2} wx(L - x)$$

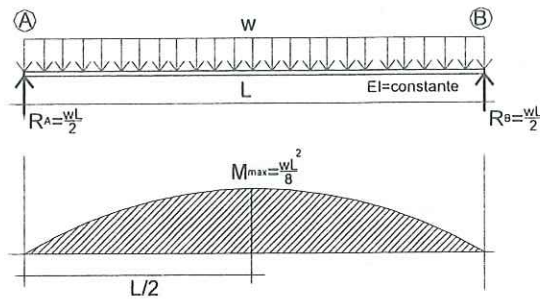
$$\Rightarrow M_x = \frac{1}{2} wx(L - x)$$

Expresión de momento definido por la ecuación de una curva de segundo grado, en función de la distancia "x". Evaluando esta expresión:

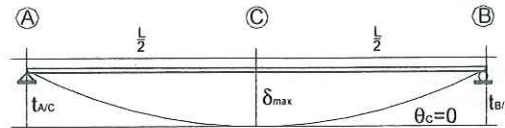
$$\text{En } x=0; M_{x=0} = \frac{1}{2} w(0)[L - (0)] = 0$$

$$\text{En } x=L; M_{x=L} = \frac{1}{2} w(L)[L - (L)] = 0$$

$$\text{En } x=L/2; M_{x=L/2} = \frac{1}{2} w \left(\frac{L}{2} \right) \left[L - \left(\frac{L}{2} \right) \right] = \frac{1}{8} wL^2$$



Representación de la posible configuración de deformación.

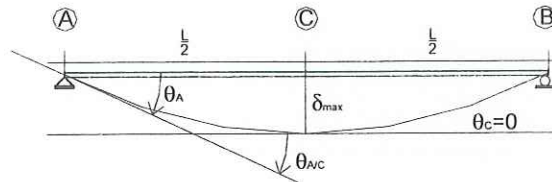


De acuerdo con la condición de simetría, la tangente en el centro de el claro es horizontal, $\theta_C = 0$

La deflexión vertical máxima ocurre en el centro de el claro, $v_{x=L/2} = \delta_C = \delta_{\max} = t_{A/C}$

La tangente de referencia es θ_C , por ser horizontal, a partir de la cual se obtendrán los valores de rotación de el punto "A" y de la deflexión vertical de el punto "C".

Determinación de la rotación de la tangente en "A", θ_A

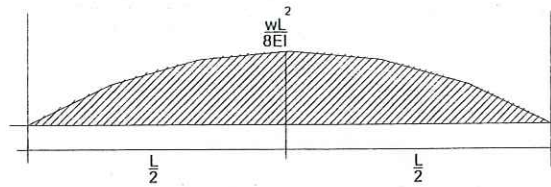


Aplicando el Primer Teorema del método:

$$\theta_{A/C} = \theta_A - \theta_C = (-\theta_A) - 0 = \int_A^C \frac{M_x}{EI} dx$$

$$\theta_A = - \int_A^C \frac{M_x}{EI} dx$$

Es decir, la rotación θ_A se determina calculando el área del diagrama $\frac{M_x}{EI}$ entre los puntos "A" y "C".



Utilizando expresiones aproximadas para el cálculo del área

$$\theta_A = -\frac{2}{3} \frac{L}{2} \left(\frac{1}{8} \frac{wL^2}{EI} \right) = -\frac{1}{24} \frac{wL^3}{EI}$$

Determinación de la deflexión vertical en "C", δ_C

Aplicando el Segundo Teorema de el método:

$$\delta_C = t_{A/C} = \delta_{\max} = \int_C^A \frac{M_x}{EI} \bar{x}_A dx$$

Es decir, la deflexión vertical δ_C se determina calculando el primer momento estático de el área de el diagrama $\frac{M_x}{EI}$ entre los puntos "A" y "C", con respecto a el punto "A" (distancia centroidal \bar{x}_A)

$$\int_C^A \frac{M_x}{EI} \bar{x}_A dx = \frac{1}{24} \frac{wL^3}{EI}$$

$$\bar{x}_A = \frac{5}{8} \frac{L}{2} = \frac{5}{16} L$$

$$\delta_C = \left(\frac{1}{24} \frac{wL^3}{EI} \right) \left(\frac{5}{16} L \right)$$

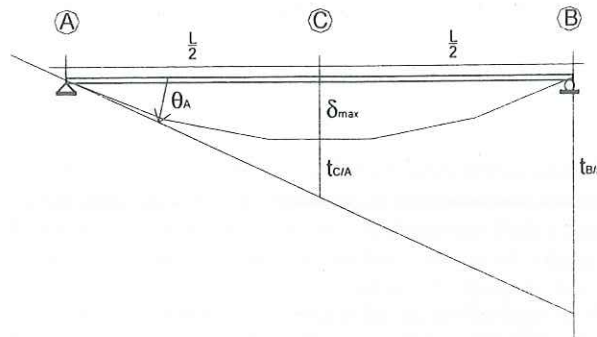
$$\Rightarrow \delta_C = \frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI}$$

El resultado positivo de $t_{A/C}$ (puesto que $\delta_C = t_{A/C}$) indica que el punto "A" en la curva elástica está por arriba de la tangente de referencia, un valor negativo indicaría que este punto se encontraría por abajo de la tangente de referencia.

Solución ejercicio No. 3.7 (alternativa No. 2)

La solución que se desarrolla a continuación está basada en la relación geométrica a partir de la configuración de deformación, tomando como referencia la tangente de la curva elástica en el punto "A".

Configuración de deformación



De la configuración de deformación de la viga, se plantea la siguiente relación geométrica:

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{t_{B/A}}{L}$$

De igual manera, por triángulos semejantes:

$$\frac{\delta_{\max} + t_{C/A}}{\frac{L}{2}} = \frac{t_{B/A}}{L}$$

$$\delta_{\max} = \frac{t_{B/A}}{L} \cdot \frac{L}{2} - t_{C/A}$$

$$\Rightarrow \delta_{\max} = \frac{t_{B/A}}{2} - t_{C/A}$$

La desviación tangencial del punto "B" con respecto a la tangente de "A", $t_{B/A}$ se determina aplicando el segundo teorema de el método (la distancia centroidal a utilizar, corresponde a la distancia desde el punto "B" hacia el centroide de el diagrama de momentos (dividido por el coeficiente "EI") entre los puntos "A" y "B").

$$t_{B/A} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} x_B dx$$

De manera similar, la desviación tangencial de el punto "C" con respecto a la tangente de "A", $t_{C/A}$ se determina aplicando el segundo teorema de el método (la distancia centroidal a utilizar, corresponde a la distancia desde el punto "C" hacia el centroide de el diagrama de momentos (dividido por el coeficiente "EI") entre los puntos "A" y "C").

$$t_{C/A} = \int_A^C \frac{M_x}{EI} x_C dx$$

De resultados obtenidos en la solución anterior:

Las fuerzas de reacción en los apoyos

$$R_A = \frac{wL}{2} \uparrow$$

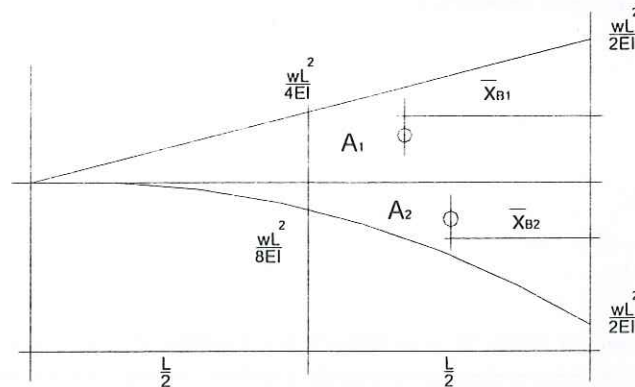
$$R_B = \frac{wL}{2} \uparrow$$

La expresión de Momento flexionante a una distancia "x" desde el apoyo en "A"

$$M_x = \frac{1}{2} wLx - \frac{1}{2} wx^2$$

Esta expresión de momento flexionante tiene dos componentes de momento, una determinada por el efecto de la fuerza de reacción y la otra determinada por el efecto de la carga uniformemente distribuida aplicada en la viga. Si graficamos estas dos componentes de momento en un diagrama, podremos obtener el "diagrama de momentos por partes", que estará representado por un momento con variación lineal y otro representado por una curva de segundo grado. Se puede verificar que la sumatoria de ordenadas en un punto cualquiera, corresponde a la ordenada en el diagrama de momento real de la viga, que está representado por una curva de segundo grado. Este tipo de representación del diagrama de momentos resulta conveniente en la aplicación de este método (área de momentos), ya que su aplicación está basada en la geometría de el diagrama de momentos, por lo tanto, la aplicación resulta más sencilla en la medida que lo sea también la geometría de el diagrama de momentos.

A partir de el diagrama de momentos por partes (dividido por el coeficiente "EI"), se determinan las desviaciones tangenciales $t_{B/A}$ y $t_{C/A}$.



Determinación de $t_{B/A}$

$$t_{B/A} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} \bar{x}_B dx = A_1 \bar{x}_{B1} + A_2 \bar{x}_{B2}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} L \left(\frac{1}{2} \frac{wL^2}{EI} \right) = \frac{1}{4} \frac{wL^3}{EI}$$

$$A_2 = \frac{1}{3} L \left(-\frac{1}{2} \frac{wL^2}{EI} \right) = -\frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI}$$

$$\bar{x}_{B1} = \frac{1}{3} L$$

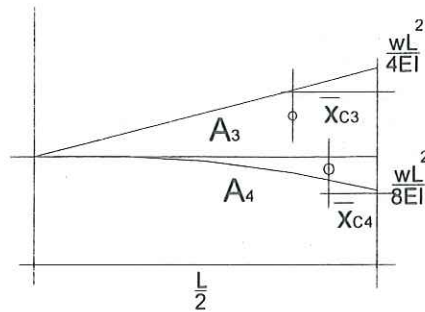
$$\bar{x}_{B2} = \frac{1}{4} L$$

$$t_{B/A} = \left(\frac{1}{4} \frac{wL^3}{EI} \right) \left(\frac{1}{3} L \right) + \left(-\frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI} \right) \left(\frac{1}{4} L \right)$$

$$t_{B/A} = \frac{1}{12} \frac{wL^4}{EI} - \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$$

$$\Rightarrow t_{B/A} = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$$

Determinación de $t_{C/A}$



$$t_{C/A} = \int_A \frac{M}{EI} x_C dx = A_3 \bar{x}_{C3} + A_4 \bar{x}_{C4}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} L \left(\frac{1}{4} \frac{wL^2}{EI} \right) = \frac{1}{16} \frac{wL^3}{EI}$$

$$A_4 = \frac{1}{3} L \left(-\frac{1}{8} \frac{wL^2}{EI} \right) = -\frac{1}{48} \frac{wL^3}{EI}$$

$$\bar{x}_{C3} = \frac{1}{3} L = \frac{L}{6}$$

$$\bar{x}_{C4} = \frac{1}{4} L = \frac{L}{8}$$

$$t_{C/A} = \left(\frac{1}{16} \frac{wL^3}{EI} \right) \left(\frac{1}{6} L \right) + \left(-\frac{1}{48} \frac{wL^3}{EI} \right) \left(\frac{1}{8} L \right)$$

$$t_{C/A} = \frac{1}{96} \frac{wL^4}{EI} - \frac{1}{384} \frac{wL^4}{EI}$$

$$\Rightarrow t_{C/A} = \frac{3}{384} \frac{wL^4}{EI}$$

Determinación de la rotación de la tangente en "A", θ_A y de la deflexión vertical máxima, δ_{max}

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L} = \frac{\left(\frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI} \right)}{L}$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{1}{24} \frac{wL^3}{EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{t_{B/A}}{2} - t_{C/A} = \frac{\left(\frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}\right)}{2} - \frac{3}{384} \frac{wL^4}{EI}$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{48} \frac{wL^4}{EI} - \frac{3}{384} \frac{wL^4}{EI}$$

$$\Rightarrow \delta_{\max} = \frac{5}{384} \frac{wL^4}{EI}$$

Solución ejercicio No. 3.8

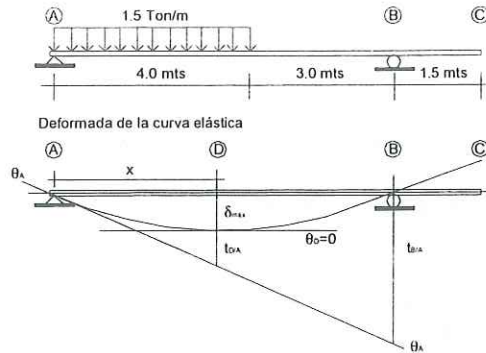
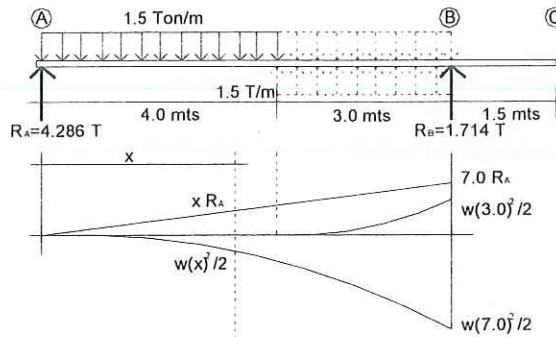


Diagrama de Momentos por partes, con respecto a el apoyo en B (nótese la aplicación de cargas ficticias para dar continuidad a la función de momento por carga distribuida y obtener una geometría regular en el diagrama)



Determinación de la rotación de la tangente en A, θ_A

De la geometría de la configuración de la deformada de la curva elástica, la rotación de la tangente en el apoyo A, al considerar deformaciones pequeñas, queda determinada por:

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{7.0}$$

$$t_{B/A} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} x dx = \frac{1}{2} (7.0) \left(\frac{7 \cdot 4.286}{EI} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 7.0 \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 7.0 \right) \left[-\frac{1.5 (7.0)^2}{2EI} \right] \left(\frac{1}{4} \cdot 7.0 \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 3.0 \right) \left[\frac{1.5 (3.0)^2}{EI} \right] \left(\frac{1}{4} \cdot 3.0 \right)$$

$$t_{B/A} = \frac{245}{EI} - \frac{150.06}{EI} + \frac{5.06}{EI} = \frac{100}{EI}$$

$$t_{B/A} = \frac{100}{EI}$$

Por lo tanto,

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{7.0} = \frac{\left(\frac{100}{EI}\right)}{7.0} = \frac{14.286}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{14.286}{EI}$$

Determinación de la deflexión vertical máxima δ_{max} .

Suponiendo que δ_{max} , ocurre a una distancia $x < 4.0$ mts

$$\theta_{A/D} = \theta_A - \theta_D = \int_D^A \frac{M_x}{EI} dx$$

$$\frac{14.286}{EI} - (0) = \frac{1}{2}(x) \left(\frac{4.286x}{EI} \right) + \frac{1}{3}(x) \left(-\frac{1.5x^2}{2EI} \right)$$

$$\frac{14.286}{EI} = \frac{2.143x^2}{EI} - \frac{0.25x^2}{2EI}$$

$$-0.25x^3 + 2.143x^2 - 14.286 = 0$$

Raíces:

$$x_1 = -2.293 \text{ mts}$$

$$x_2 = 3.289 \text{ mts}$$

$$x_3 = 7.577 \text{ mts}$$

Por lo tanto la distancia x a la que ocurre la deflexión vertical máxima, δ_{max} , es $x=3.289$ mts desde el apoyo en "A".

Determinación de δ_{max} :

$$\frac{\delta_{max} + t_{D/A}}{x} = \frac{t_{B/A}}{7.0}$$

$$\delta_{max} = \frac{x}{7.0} t_{B/A} - t_{D/A}$$

$$t_{D/A} = \int_A^D \frac{M_x}{EI} x_D dx = \frac{1}{2}(3.289) \left(\frac{4.286 * 3.289}{EI} \right) \left(\frac{1}{3} * 3.289 \right) + \left(\frac{1}{3} * 3.289 \right) \left[-\frac{1.5}{2} \frac{(3.289)^2}{EI} \right] \left(\frac{1}{4} * 3.289 \right)$$

$$t_{D/A} = \frac{25.415}{EI} - \frac{7.314}{EI} = \frac{18.10}{EI}$$

Así, la deflexión δ_{max} , será:

$$\delta_{max} = \frac{3.289}{7.0} \left(\frac{100}{EI} \right) - \frac{18.10}{EI}$$

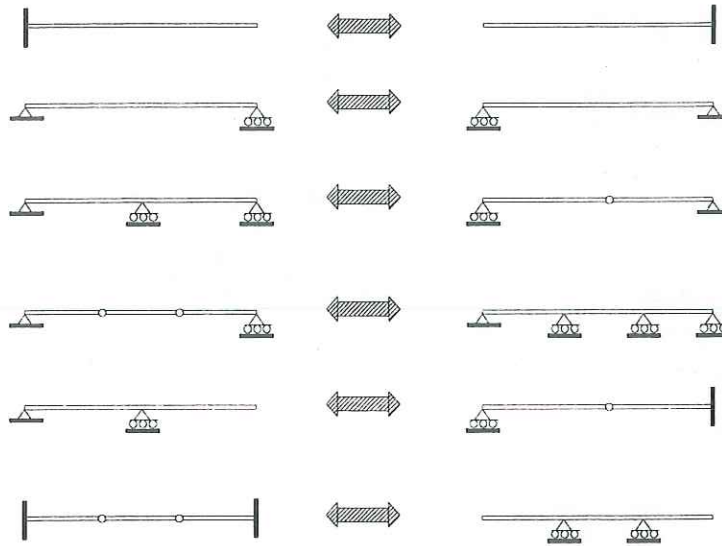
$$\delta_{max} = \frac{28.886}{EI}$$

METODO DE LA VIGA CONJUGADA

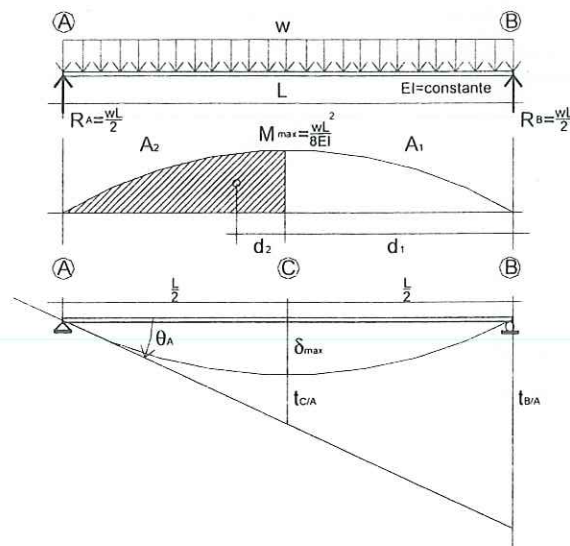
Teoremas:

1. La pendiente en un punto de la elástica de una viga, medida con respecto a una cuerda entre los apoyos, es igual a la fuerza cortante en ese punto, si la viga se carga con el diagrama M/EI .
2. La deflexión vertical en un punto de la elástica de la viga, medida con respecto a una cuerda entre los apoyos, es igual a el momento flexionante en ese punto si la viga se carga con el diagrama M/EI .

Dado que el momento en la viga conjugada representa la deflexión vertical en la viga real y la fuerza cortante (en la viga conjugada) representa la rotación de la tangente en el mismo punto en la viga real, será necesario modificar algunas condiciones de apoyo y de continuidad para establecer esta relación entre la viga real y la viga conjugada.



Verificación de la relación entre la viga real y la viga conjugada, a través de la comparación de resultados y procedimiento de acuerdo con la metodología de área de momentos, al determinar la rotación de la tangente en "A", θ_A y la deflexión vertical máxima δ_C de la viga mostrada



Por el método área de momentos

Rotación de la tangente en "A", θ_A

$$\theta_A = \frac{t_{B/A}}{L} = \frac{A_1 d_1}{L}$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{A_1 d_1}{L}$$

Deflexión vertical máxima, $\delta_C = \delta_{\max}$

$$\frac{\delta_{\max} + t_{C/A}}{L/2} = \frac{t_{B/A}}{L} = \theta_A$$

$$\delta_{\max} = \frac{L}{2} \theta_A - t_{C/A} = (d_1) \left(\frac{A_1 d_1}{L} \right) - t_{C/A}$$

$$\delta_{\max} = \frac{1}{L} A_1 d_1^2 - t_{C/A}$$

$$t_{C/A} = A_2 d_2$$

$$\Rightarrow \delta_{\max} = \frac{1}{L} A_1 d_1^2 - A_2 d_2$$

Por el método viga conjugada

Fuerza cortante en "A" en la viga conjugada, R'_A

$$\sum M'_B = 0$$

$$-R'_A L + A_1 d_1 = 0$$

$$\Rightarrow R'_A = \frac{A_1 d_1}{L}$$

Momento flexionante máximo en la viga conjugada,

$$M'_C = M'_{\max}$$

$$\sum M'_C = 0$$

$$-R'_A \left(\frac{L}{2} \right) + A_2 d_2 + M'_C = 0$$

$$M'_C = R'_A d_1 - A_2 d_2 = \left(\frac{A_1 d_1}{L} \right) d_1 - A_2 d_2$$

$$\Rightarrow M'_C = \frac{1}{L} A_1 d_1^2 - A_2 d_2$$

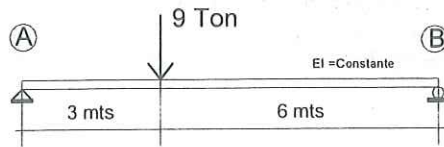
Ejercicio No. 3.9

Determinar la rotación y deflexión vertical al centro del claro de la viga mostrada, aplicando el método de la viga conjugada.

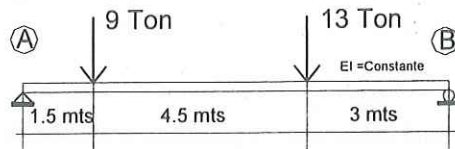
Utilizar

$E=200 \text{ GPa}$

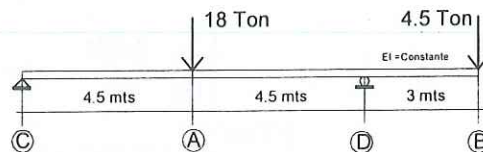
$I=0.29 \times 10^{-3} \text{ m}^4$

**Ejercicio No. 3.10**

Determinar la deflexión vertical máxima en la viga mostrada, aplicando el método de la viga conjugada.

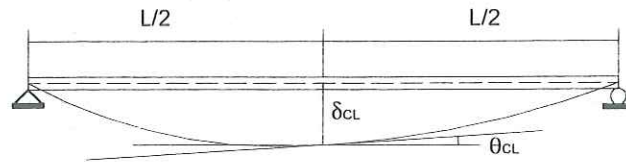
**Ejercicio No. 3.11**

Determinar las deflexiones verticales en los puntos "A" y "B" de la viga mostrada, aplicando el método de la viga conjugada.

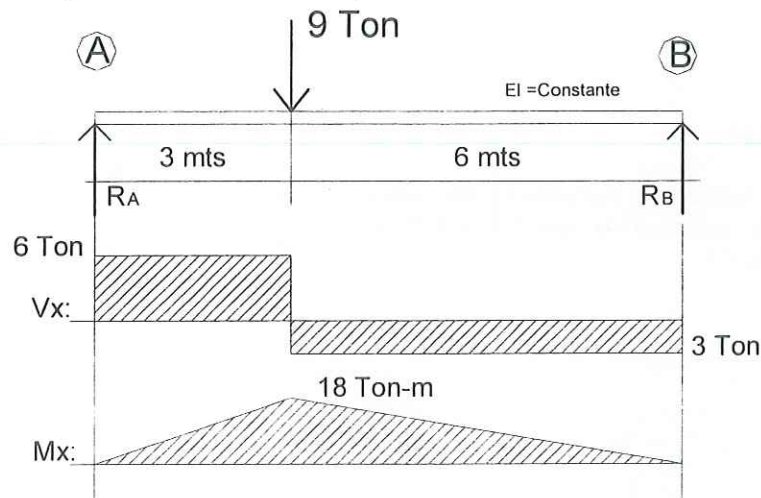


Solución ejercicio No. 3.9

Configuración de deformación. Debido a la localización de la carga concentrada en la viga, la deflexión vertical máxima no ocurre en el centro del claro, por lo que la rotación de la tangente al centro de el claro será diferente de cero, es decir, la tangente no es horizontal.



Determinación de el diagrama de momentos de la viga real.



Las fuerzas de reacción se determinan, primero haciendo sumatoria de momentos en el apoyo en "B", con lo cual se determina la fuerza de reacción R_A y la fuerza de reacción R_B , se determina haciendo sumatoria de fuerzas verticales.

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_A(9) + (9)(6) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 6.0 \uparrow$$

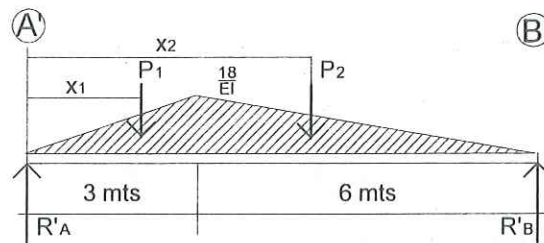
$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B - 9 = 0$$

$$R_B = 9 - R_A = 9 - (6)$$

$$R_B = 3.0 \uparrow$$

Dividiendo las ordenadas del diagrama de momentos por el coeficiente "EI", obtenemos el diagrama de cargas de la viga conjugada. Las condiciones de apoyo de la viga conjugada son similares a las de la viga real puesto que son apoyos simples localizados en los extremos de la viga real.



Para determinar la rotación de la tangente y la deflexión vertical en el centro del claro de la viga real, será necesario determinar la fuerza cortante en las reacciones de la viga conjugada.

Efectuando una sumatoria de momentos en el apoyo en "A" de la viga conjugada:

$$\sum M'_A = 0$$

$$-P_1 x_1 - P_2 x_2 + R'_B L = 0$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(3)\left(\frac{18}{EI}\right) = \frac{27}{EI}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(6)\left(\frac{18}{EI}\right) = \frac{54}{EI}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}(3) = 2$$

$$x_2 = 3 + \frac{1}{3}(6) = 5$$

$$-\left(\frac{27}{EI}\right)(2) - \left(\frac{54}{EI}\right)(5) + R'_B(9) = 0$$

$$-\frac{54}{EI} - \frac{270}{EI} + 9R'_B = 0$$

$$\Rightarrow R'_B = \frac{36}{EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{36}{EI}$$

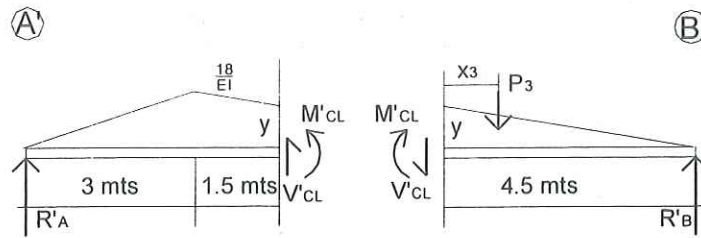
$$\sum F'_y = 0$$

$$-P_1 - P_2 + R'_A + R'_B = 0$$

$$-\left(\frac{27}{EI}\right) - \left(\frac{54}{EI}\right) + R'_A + \left(\frac{36}{EI}\right) = 0$$

$$\Rightarrow R'_A = \frac{45}{EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{45}{EI}$$

La rotación de la tangente (θ_C) y la deflexión vertical (δ_{\max}) en el centro de el claro de la viga real, corresponden a la fuerza cortante (V'_C) y momento flexionante (M'_C) respectivamente en la viga conjugada. Efectuando un corte al centro del claro en la viga conjugada:



Por triángulos semejantes

$$\frac{y}{4.5} = \frac{\left(\frac{18}{EI}\right)}{6}$$

$$y = \frac{13.5}{EI}$$

Efectuando sumatoria de fuerzas verticales hacia la derecha de el corte en la viga conjugada

$$\sum F'_y = 0$$

$$-P_3 + R'_B - V'_C = 0$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(4.5)\left(\frac{13.5}{EI}\right) = \frac{30.375}{EI}$$

$$-\left(\frac{30.375}{EI}\right) + \left(\frac{36}{EI}\right) - V'_C = 0$$

$$\Rightarrow V'_C = \frac{5.625}{EI} \Rightarrow \theta_C = \frac{5.625}{EI}$$

Efectuando sumatoria de momentos hacia la derecha de el corte en la viga conjugada

$$\sum M'_C = 0$$

$$-P_3 x_3 + R'_B(4.5) - M'_C = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(4.5) = 1.5$$

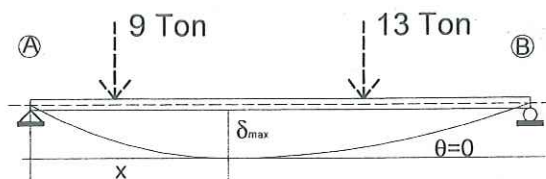
$$-\left(\frac{30.375}{EI}\right)(1.5) + \left(\frac{36}{EI}\right)(4.5) - M'_C = 0$$

$$-\frac{45.5625}{EI} + \frac{162}{EI} - M'_C = 0$$

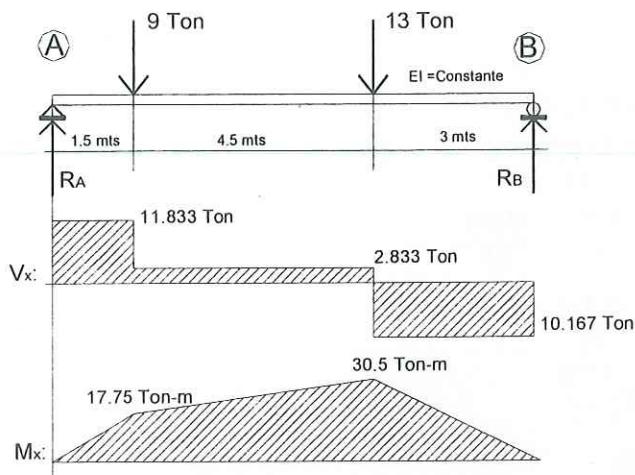
$$\Rightarrow M'_C = \frac{116.4375}{EI} \Rightarrow \delta_C = \frac{116.4375}{EI}$$

Solución ejercicio No. 3.10

Configuración de deformación. Debido a las magnitudes y localización de las cargas concentradas en la viga, la deflexión vertical máxima, es probable que no ocurre en el centro de el claro, para determinarla, será necesario identificar la distancia a la que se presenta la condición de rotación nula de la tangente a la curva elástica.



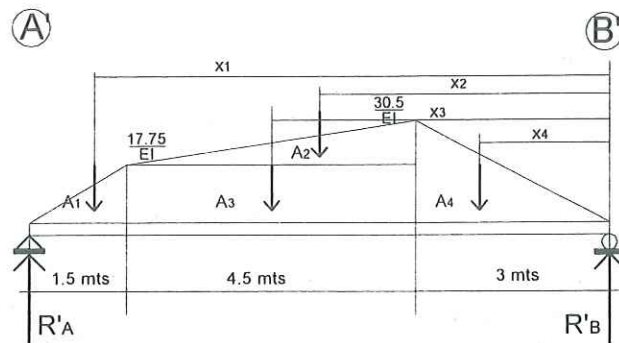
Determinación de el diagrama de momentos de la viga real.



Las fuerzas de reacción se determinan, primero haciendo sumatoria de momentos en el apoyo en "B", con lo cual se determina la fuerza de reacción R_A y la fuerza de reacción R_B , se determina haciendo sumatoria de fuerzas verticales.

$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ -R_A(9) + (9)(7.5) + (13)(3) &= 0 \\ \Rightarrow R_A &= 11.833 \uparrow \\ \sum F_y &= 0 \\ R_A + R_B - 9 - 13 &= 0 \\ R_B &= 22 - R_A = 22 - (11.833) \\ R_B &= 10.167 \uparrow \end{aligned}$$

Dividiendo las ordenadas de el diagrama de momentos por el coeficiente "EI", obtenemos el diagrama de cargas de la viga conjugada. Las condiciones de apoyo de la viga conjugada son similares a las de la viga real puesto que son apoyos simples localizados en los extremos de la viga real.



Para determinar la deflexión vertical máxima en la viga real, será necesario determinar la fuerza cortante en las reacciones de la viga conjugada.

Efectuando una sumatoria de momentos en el apoyo en "B" de la viga conjugada:

$$\sum M'_B = 0$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 - R'_A L = 0$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(1.5) \left(\frac{17.75}{EI} \right) = \frac{13.313}{EI}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(4.5) \left(\frac{30.5}{EI} - \frac{17.75}{EI} \right) = \frac{28.688}{EI}$$

$$P_3 = (4.5) \left(\frac{17.75}{EI} \right) = \frac{79.875}{EI}$$

$$P_4 = \frac{1}{2}(3.0) \left(\frac{30.5}{EI} \right) = \frac{45.75}{EI}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(1.5) + 7.5 = 8.0$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(4.5) + 3.0 = 4.5$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(4.5) + 3.0 = 5.25$$

$$x_4 = \frac{2}{3}(3.0) = 2.0$$

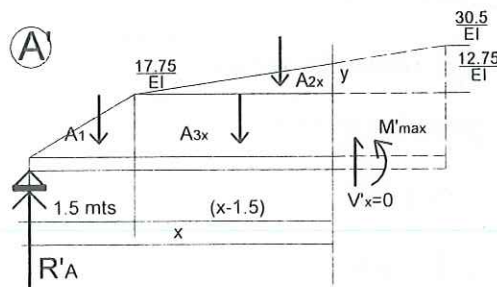
$$\left(\frac{13.313}{EI} \right) (8.0) + \left(\frac{28.688}{EI} \right) (4.5) + \left(\frac{79.875}{EI} \right) (5.25) + \left(\frac{45.75}{EI} \right) (2.0) - R'_A (9) = 0$$

$$\frac{106.504}{EI} + \frac{129.096}{EI} + \frac{419.344}{EI} + \frac{91.5}{EI} - 9R'_A = 0$$

$$\Rightarrow R'_A = \frac{82.938}{EI} \Rightarrow \theta_A = \frac{82.938}{EI}$$

$$\begin{aligned} \sum F'_y &= 0 \\ -P_1 - P_2 - P_3 - P_4 + R'_A + R'_B &= 0 \\ -\left(\frac{13.313}{EI}\right) - \left(\frac{28.688}{EI}\right) - \left(\frac{79.875}{EI}\right) - \left(\frac{45.75}{EI}\right) + \left(\frac{82.938}{EI}\right) + R'_B &= 0 \\ \Rightarrow R'_B = \frac{84.688}{EI} \Rightarrow \theta_B = \frac{84.688}{EI} \end{aligned}$$

La deflexión vertical máxima (δ_{\max}) en la viga real, corresponde a el momento flexionante máximo (M'_{\max}) en la viga conjugada, Puesto que no se tiene identificado en donde ocurre la deflexión vertical máxima en la viga real, es necesario determinar la distancia en donde la rotación de la tangente a la curva elástica es nula, es decir, que la tangente es horizontal (esta condición es equivalente a fuerza cortante nula en la viga conjugada). Efectuando un corte a una distancia "x" desde el apoyo izquierdo en la viga conjugada:



Por triángulos semejantes

$$\begin{aligned} \frac{y}{(x-4.5)} &= \frac{\left(\frac{12.75}{EI}\right)}{4.5} \\ y &= \frac{12.75}{EI} \left(\frac{x-1.5}{4.5}\right) \end{aligned}$$

Aplicando la condición de fuerza cortante nula en la viga conjugada, se efectúa una sumatoria de fuerzas cortantes en la viga conjugada a una distancia "x" desde el apoyo en "A"

$$\begin{aligned} \sum V'_x &= 0 \\ -P_1 - P_{2x} - P_{3x} + R'_A &= 0 \\ P_1 &= \frac{13.313}{EI} \\ P_{2x} &= \frac{1}{2}(x-1.5) \frac{12.75}{EI} \left(\frac{x-1.5}{4.5}\right) = \frac{1.417}{EI} (x-1.5)^2 = \frac{1}{EI} (1.417x^2 - 4.251x + 3.188) \\ P_{3x} &= (x-1.5) \frac{17.75}{EI} = \frac{1}{EI} (17.75x - 26.625) \\ -\left(\frac{13.313}{EI}\right) - \frac{1}{EI} (1.417x^2 - 4.251x + 3.188) - \frac{1}{EI} (17.75x - 26.625) + \frac{82.938}{EI} &= 0 \\ -1.417x^2 - 13.499x + 93.062 &= 0 \end{aligned}$$

Las raíces de esta ecuación de segundo grado son:

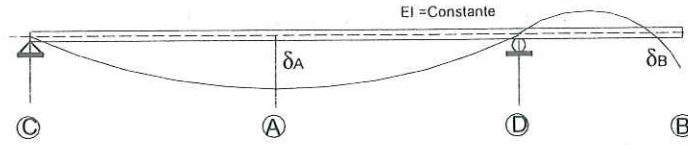
$$\begin{aligned} x_1 &= 4.637 \\ x_2 &= -14.163 \end{aligned}$$

por lo que se utilizará el valor $x=4.637$ mts, como la distancia en donde ocurre la fuerza cortante nula en la viga conjugada, o bien la rotación de la tangente nula (tangente horizontal) en la viga real, condición necesaria para identificar la localización de la deflexión vertical máxima en la viga real.

Tomando momentos en la viga conjugada a una distancia $x=4.637$ desde el apoyo en "A" y evaluando las fuerzas concentradas equivalentes P_{2x} y P_{3x} para el mismo valor de "x":

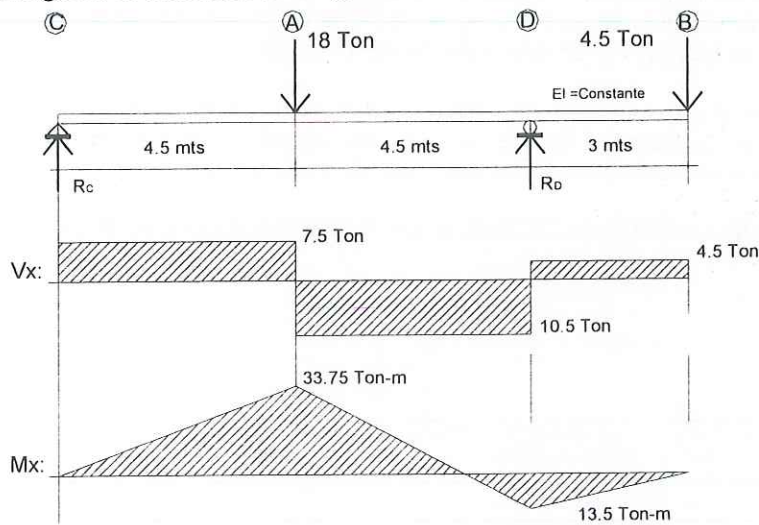
$$\begin{aligned} \sum M'_{x=4.637} &= 0 \\ -R'_A x + P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + M'_{\max} &= 0 \\ P_1 &= \frac{13.313}{EI} \\ P_{2x} &= \frac{1}{EI} (1.417x^2 - 4.251x + 3.188) = \frac{1}{EI} [1.417(4.637)^2 - 4.251(4.637) + 3.188] = \frac{13.944}{EI} \\ P_{3x} &= \frac{1}{EI} (17.75x - 26.625) = \frac{1}{EI} [17.75(4.637) - 26.625] = \frac{55.682}{EI} \\ x_1 &= \frac{1}{3} (1.5) + (x - 1.5) = 0.5 + [(4.637) - 1.5] = 3.637 \\ x_2 &= \frac{1}{3} (x - 1.5) = \frac{1}{3} [(4.637) - 1.5] = 1.046 \\ x_3 &= \frac{1}{2} (x - 1.5) = \frac{1}{2} [(4.637) - 1.5] = 1.569 \\ -\left(\frac{82.938}{EI}\right)(4.637) + \left(\frac{13.313}{EI}\right)(3.637) + \left(\frac{13.944}{EI}\right)(1.046) + \left(\frac{55.682}{EI}\right)(1.569) + M'_{\max} &= 0 \\ -\frac{384.584}{EI} + \frac{48.419}{EI} + \frac{14.585}{EI} + \frac{87.365}{EI} + M'_{\max} &= 0 \\ \Rightarrow M'_{\max} = \frac{234.215}{EI} \Rightarrow \delta_{\max} = \frac{234.215}{EI} \end{aligned}$$

Solución ejercicio No. 3.11



Posible configuración de deformación. De acuerdo con la condición de carga aplicada, en función de la magnitud de las cargas y la localización de su aplicación, se plantean las siguientes tres posibles configuraciones de deformación. Aunque en la aplicación de esta metodología (Viga Conjugada) definir la configuración no es indispensable como parte de el desarrollo de la solución, es de gran ayuda poder anticipar como se deformaría la viga.

Determinación del diagrama de momentos de la viga real

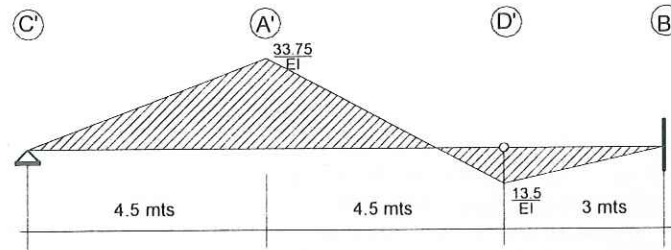


Las fuerzas de reacción se determinan, primero haciendo sumatoria de momentos en el apoyo en "D", con lo cual se determina la fuerza de reacción R_C y la fuerza de reacción R_D , se determina haciendo sumatoria de fuerzas verticales.

$$\begin{aligned} \sum M_D &= 0 \\ -R_C(9) + (18)(4.5) - (4.5)(3) &= 0 \\ \Rightarrow R_C &= 7.5 \uparrow \\ \sum F_y &= 0 \\ R_C + R_D - 18 - 4.5 &= 0 \\ R_D &= 22.5 - R_C = 22.5 - (7.5) \\ R_D &= 15.0 \uparrow \end{aligned}$$

Dividiendo las ordenadas del diagrama de momentos por el coeficiente "EI", obtenemos el diagrama de cargas de la viga conjugada. En este caso, será necesario modificar las condiciones de apoyo de la viga conjugada respecto a las condiciones de apoyo de la viga real:

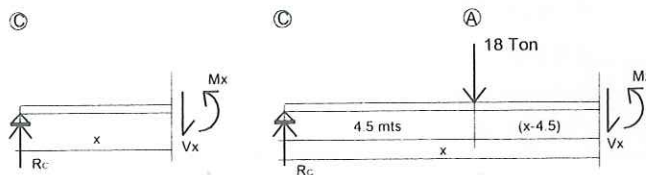
Localización	Viga Real	Viga Conjugada
C	Apoyo simple	Apoyo simple
D	Apoyo interior	Articulación
B	Extremo libre voladizo	Apoyo empotrado



Para determinar las deflexiones verticales en los puntos "A" y "B" en la viga real, será necesario determinar los momentos flexionantes en esos mismos puntos, pero en la viga conjugada, para lo cual se determina la fuerza cortante en los apoyos y articulación en la viga conjugada.

Para simplificar el procedimiento de aplicación, al trabajar con la geometría del diagrama de momentos (dividido por el coeficiente "EI") de la viga real, obtenemos el diagrama de momentos por partes, determinado con respecto a la localización del punto de apoyo interior "D".

Haciendo un corte a una distancia "x" desde el apoyo en "C" en la viga real, tal que



$$0 \leq x \leq 4.5$$

$$\sum M_x = 0$$

$$-R_c x + Mx = 0$$

$$M_x = R_c x$$

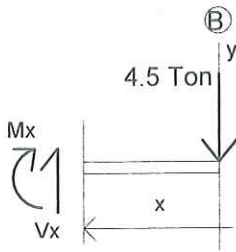
$$0 \leq x \leq 9.0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$-R_c x + 18(x - 4.5) + Mx = 0$$

$$M_x = R_c x - 18(x - 4.5)$$

Haciendo un corte a una distancia "x" desde el extremo en voladizo en la viga real, tal que

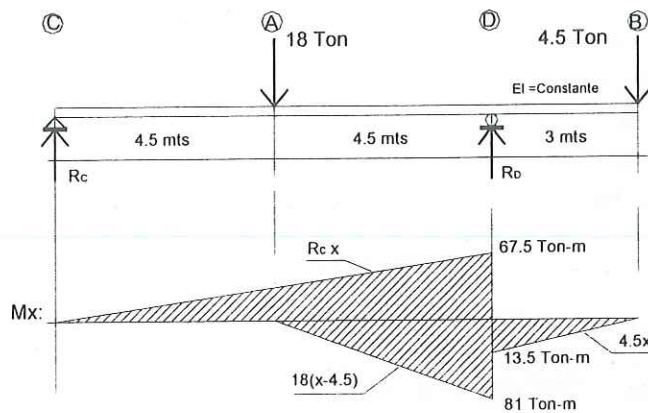


$$0 \leq x \leq 3.0$$

$$\sum M_x = 0$$

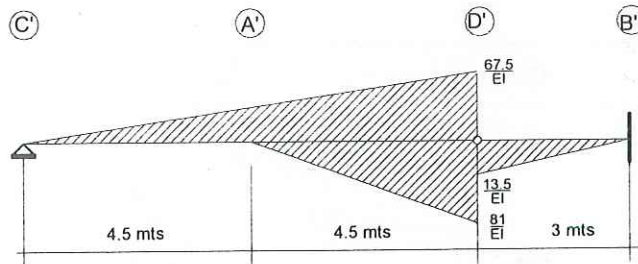
$$4.5x + M_x = 0$$

$$M_x = -4.5x$$



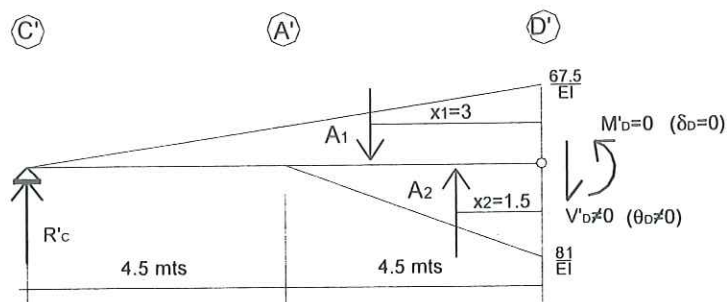
De acuerdo con las ordenadas en este diagrama de momentos por partes, se puede comprobar que la sumatoria de ordenadas corresponde a las ordenadas del diagrama de momentos en la viga real.

Representación de la viga conjugada



Para determinar la deflexión vertical δ_A en la viga real, es necesario la determinación de la fuerza de reacción en el apoyo en "C" de la viga conjugada (de acuerdo con la relación viga real - viga conjugada, esta fuerza de reacción R_c , es equivalente a la rotación de la tangente θ_c en la viga real).

Efectuando sumatoria de momentos hacia la izquierda de la articulación (puesto que en la articulación, $M_D = 0$, $V_D \neq 0$)



$$\sum M'_{D,izq} = 0$$

$$-R'_c(9) + P_1x_1 - P_2x_2 = 0$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(9)\left(\frac{67.5}{EI}\right) = \frac{303.75}{EI}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(4.5)\left(\frac{81.0}{EI}\right) = \frac{182.25}{EI}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(9.0) = 3.0$$

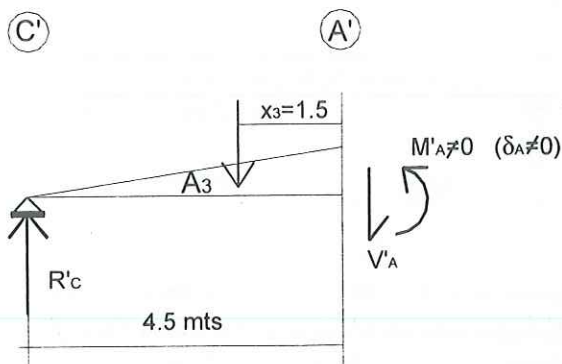
$$x_2 = \frac{1}{3}(4.5) = 1.5$$

$$-9R'_c + \left(\frac{303.75}{EI}\right)(3.0) - \left(\frac{182.25}{EI}\right)(1.5) = 0$$

$$-9R'_c + \frac{911.25}{EI} - \frac{273.375}{EI} = 0$$

$$R'_c = \frac{70.875}{EI} \Rightarrow \theta_c = \frac{70.875}{EI}$$

Determinación de M'_A



$$\sum M_A = 0$$

$$-R_c(4.5) + P_1 x_1 + M_A = 0$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(4.5) \left(\frac{33.75}{EI} \right) = \frac{75.938}{EI}$$

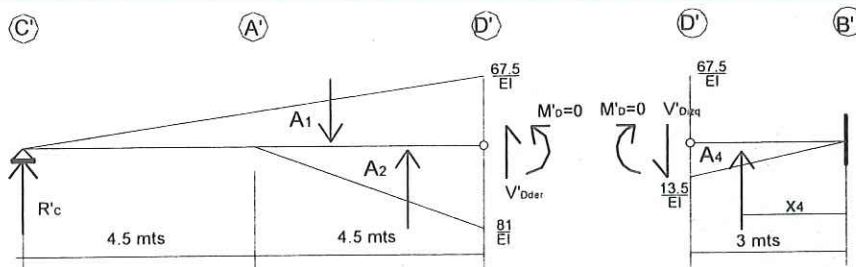
$$x_1 = \frac{1}{3}(4.5) = 1.5$$

$$-4.5 \left(\frac{70.875}{EI} \right) + \left(\frac{75.938}{EI} \right) (1.5) + M_A = 0$$

$$-\frac{318.938}{EI} + \frac{113.907}{EI} + M_A = 0$$

$$M_A = \frac{205.031}{EI} \Rightarrow \delta_A = \frac{205.031}{EI}$$

Determinación de M_D , este momento en la viga conjugada se determina efectuando sumatoria de momentos en el empotramiento, por lo que será necesario determinar la fuerza cortante en la articulación (en la viga conjugada).



Efectuando sumatoria de fuerzas verticales a la izquierda de la articulación:

$$\sum F_v = 0$$

$$R_c - P_1 + P_2 + V_{Dder} = 0$$

$$\frac{70.875}{EI} - \frac{303.75}{EI} + \frac{182.25}{EI} + V_{Dder} = 0$$

$$V_{Dder} = \frac{50.625}{EI} \Rightarrow \theta_{Dder} = \frac{50.625}{EI}$$

En la articulación, se deberá cumplir la condición de equilibrio de fuerzas cortantes $V_{Dizq} = V_{Dder}$

Efectuando sumatoria de momentos en el empotramiento

$$\sum M_B = 0$$

$$V_{Dizq}(3.0) - P_4 x_4 + M_B = 0$$

$$P_4 = \frac{1}{2}(3.0) \left(\frac{13.5}{EI} \right) = \frac{20.25}{EI}$$

$$x_4 = \frac{2}{3}(3.0) = 2.0$$

$$\left(\frac{50.625}{EI} \right)(3.0) - \left(\frac{20.25}{EI} \right)(2.0) + M_B = 0$$

$$\frac{151.875}{EI} - \frac{40.5}{EI} + M_B = 0$$

$$M_B = -\frac{111.375}{EI} \Rightarrow \delta_B = -\frac{111.375}{EI}$$

METODO DE SUPERPOSICION

La aplicación de el método de superposición para la determinación de deflexiones verticales y rotación de la tangente en un punto sobre la curva elástica, es válida siempre y cuando el material de que esté compuesta la viga, después de presentarse el sistema de cargas, permanezca en el rango elástico-lineal.

Las deformaciones en vigas por aplicación de cargas combinadas, se pueden determinar sumando los efectos de cada una de las cargas actuando de manera independiente.

Ejercicio No. 3.12

Determinar la deflexión vertical al centro del claro de la viga mostrada en la figura, aplicando el método de superposición.

Utilizar

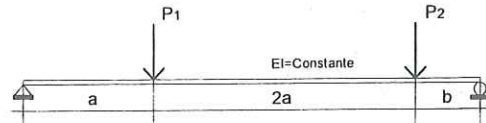
$a=2.0$ mts

$P_1=1.0$ Ton

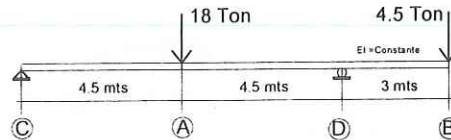
$b=1.0$ mt

$P_2=1.5$ Ton

$L=7.0$ mts

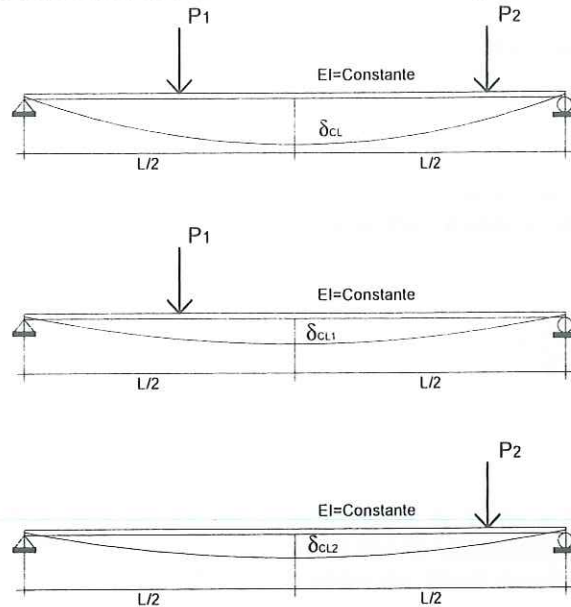
**Ejercicio No. 3.13**

Determinar la deflexión vertical en el punto de aplicación de la carga concentrada de 18 Ton (punto "A") de la viga mostrada en la figura, aplicando el método de superposición.



Solución ejercicio No. 3.12

La condición de carga puede descomponerse en la combinación de dos cargas concentradas actuando de manera independiente. La deflexión vertical al centro del claro, corresponderá a la sumatoria de las deflexiones verticales obtenidas en la aplicación de cada una de las carga, es decir



$$\delta_{CL\text{Total}} = \delta_{CL1} + \delta_{CL2}$$

De acuerdo con resultados obtenidos previamente en el método de la doble integración, para el caso de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada, aplicada fuera del centro del claro de la viga, la deflexión vertical a una distancia "x" tal que $0 \leq x \leq a$, se determina por la expresión

$$v_x = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} x(x^2 - L^2 + b^2)$$

de donde se puede obtener la siguiente expresión, considerando que la carga aplicada se localiza a una distancia $a > L/2$ y sustituir $x=L/2$:

$$v_x = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{48} (4b^3 - 3L^2)$$

en el caso que la carga concentrada aplicada se localiza a una distancia $a < L/2$, después de sustituir $x=L/2$, se obtendrá:

$$v_x = \frac{1}{EI} \frac{Pa}{48} (4a^3 - 3L^2)$$

Por lo tanto se podrá considerar que por aplicación de la carga concentrada de 1.0 Ton

$$\delta_{Cl.1} = \frac{1}{EI} \frac{P_1 a}{48} (4a^2 - 3L^2)$$

$$P_1 = 1.0$$

$$a = 2.0$$

$$L = 7.0$$

$$\delta_{Cl.1} = -\frac{5.458}{EI}$$

Y por aplicación de la carga concentrada de 1.5 Ton

$$\delta_{Cl.2} = \frac{1}{EI} \frac{P_2 b}{48} (4b^2 - 3L^2)$$

$$P_2 = 1.5$$

$$b = 1.0$$

$$L = 7.0$$

$$\delta_{Cl.2} = -\frac{4.469}{EI}$$

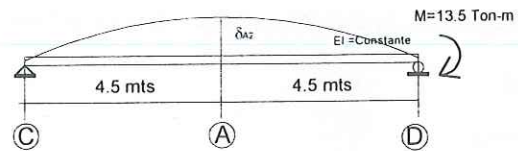
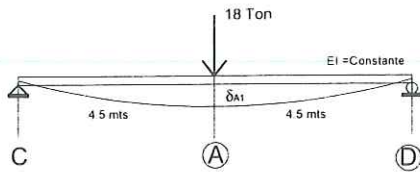
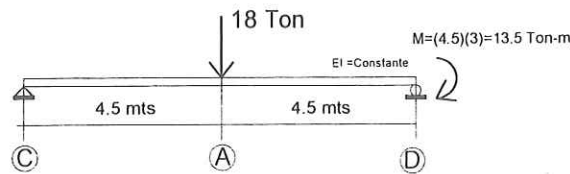
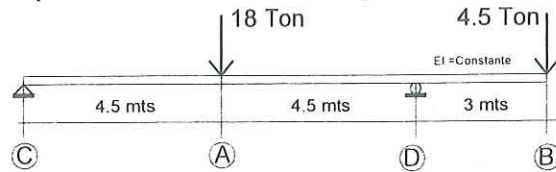
Finalmente, la deflexión vertical al centro del claro será

$$\delta_{Cl.Total} = \delta_{Cl.1} + \delta_{Cl.2}$$

$$\Rightarrow \delta_{Cl.Total} = -\frac{9.927}{EI}$$

Solución ejercicio No. 3.13

La condición de carga puede descomponerse en la combinación de dos cargas, una concentrada localizada al centro del claro de la viga y la otra, un momento aplicado en el apoyo en "D" actuando de manera independiente. La deflexión vertical al centro del claro, corresponderá a la sumatoria de las deflexiones verticales obtenidas en la aplicación de cada una de las cargas, es decir



$$\delta_{A_{Total}} = \delta_{A1} + \delta_{A2}$$

De acuerdo con resultados obtenidos previamente en el método de la doble integración, para el caso de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada, aplicada fuera del centro del claro de la viga, la deflexión vertical a una distancia "x" tal que $0 \leq x \leq a$, se determina por la expresión

$$v_x = \frac{1}{EI} \frac{Pb}{6L} x(x^2 - L^2 + b^2)$$

de donde se puede obtener la siguiente expresión, considerando que la carga aplicada se localiza al centro del claro, una distancia $a=L/2$ (por lo que, $b=L/2$) y sustituir $x=L/2$:

$$\delta_{A1} = -\frac{1}{EI} \frac{PL^3}{48}$$

Se podrá verificar, por aplicación de cualquiera de las metodologías expuestas anteriormente (doble integración, área de momentos o viga conjugada), que para el caso de una viga simplemente apoyada con momento flexionante "M" aplicado en uno de los extremos de la viga, de deflexión vertical al centro del claro, está determinada por la expresión

$$\delta_{A2} = \frac{1}{EI} \frac{ML^2}{16}$$

Por lo que, al considerar las condiciones de carga de la viga, para la carga concentrada se tendrá

$$\delta_{\Delta 1} = -\frac{1}{EI} \frac{PL^3}{48}$$

$$P = 18$$

$$L = 9.0$$

$$\delta_{\Delta 1} = -\frac{273.375}{EI}$$

Para el momento en el extremo de la viga

$$\delta_{\Delta 2} = \frac{1}{EI} \frac{ML^2}{16}$$

$$M = 13.5$$

$$L = 9.0$$

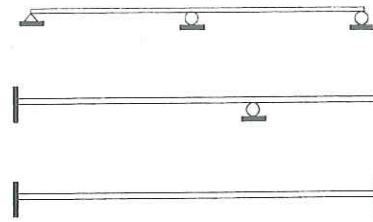
$$\delta_{\Delta 2} = \frac{68.344}{EI}$$

Finalmente, la deflexión vertical al centro del claro será

$$\delta_{\Delta \text{Total}} = \delta_{\Delta \text{CL1}} + \delta_{\Delta \text{CL2}}$$
$$\Rightarrow \delta_{\Delta \text{Total}} = -\frac{205.031}{EI}$$

VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

El análisis que se efectuó en el capítulo anterior, corresponde a la aplicación de diversos métodos para la determinación de deformaciones. Como una particularidad en los ejercicios de aplicación, se tiene que todas las vigas analizadas eran del tipo ISOSTATICAS, es decir, estáticamente determinadas. Sin embargo, es muy común encontrarse con vigas que tienen más de un claro y más de dos apoyos, o bien con apoyos empotrados en ambos extremos.



En estos casos, el número de reacciones es mayor que el número de ecuaciones que se pueden plantear por aplicación de las condiciones de equilibrio estático. Por ello, este tipo de vigas se denominan estáticamente indeterminadas (ó hiperestáticas), en donde la característica principal es que las reacciones no se pueden determinar por simple aplicación de las condiciones de equilibrio estático. Para determinarlas habrá que recurrir a diferentes metodologías, por mencionar algunas:

- Método de la doble integración
- Método de área de momentos
- Método de superposición
- Método de la Viga Conjugada
- Método de la Ecuación de Tres Momentos
- En general, métodos iterativos (Cross, Kanni), métodos energéticos (Trabajo Virtual, Teoremas de Castigliano), métodos matriciales (Rigideces, Flexibilidades).

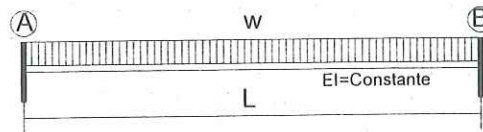
Aunque algunos de los métodos mencionados, hayan sido planteados en el capítulo anterior, para determinar deformaciones, es posible aplicarlos para determinar las reacciones redundantes (las reacciones que no es posible determinar a partir de las condiciones de equilibrio estático) tomando en consideración algunas condiciones conocidas de deformación, sin que sea prioritario determinar las deformaciones. Por lo que, la aplicación de estos métodos (los primeros cinco mencionados anteriormente) es básicamente para determinar las reacciones redundantes, si se requiere, la determinación de las deformaciones, se podrá llevar a cabo la aplicación de las metodologías como se vió anteriormente. Los principios y conceptos desarrollados en cada uno de los diferentes métodos, no se modifican para su aplicación en el análisis de vigas hiperestáticas.

Tipos de vigas hiperestáticas y grados de hiperestaticidad.

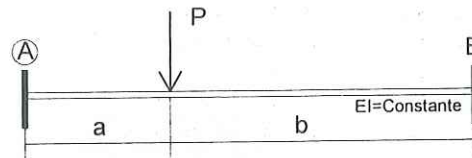
	No. de incógnitas	Ec's de equil. estático	Grado de hiperestaticidad
	3	2	3-2=1
	3	2	3-2=1
	4	2	4-2=2
	4	2	4-2=2

Ejercicio No. 4.1

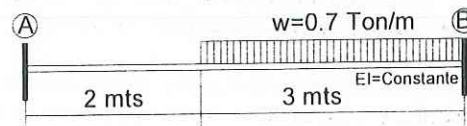
Determinar las reacciones redundantes en la viga hiperestática mostrada en la figura, aplicando el método de área de momentos.

**Ejercicio No. 4.2**

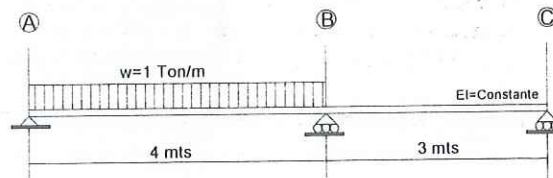
Determinar las reacciones redundantes en la viga hiperestática mostrada en la figura, aplicando el método de la viga conjugada.

**Ejercicio No. 4.3**

Determinar las reacciones redundantes en la viga hiperestática mostrada en la figura, aplicando el método de superposición.

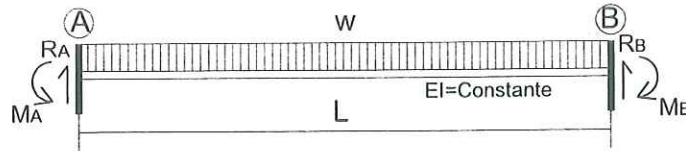
**Ejercicio No. 4.4**

Determinar la reacción redundante en la viga mostrada en la figura, aplicando el método de área de momentos y posteriormente determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



Solución ejercicio No. 4.1

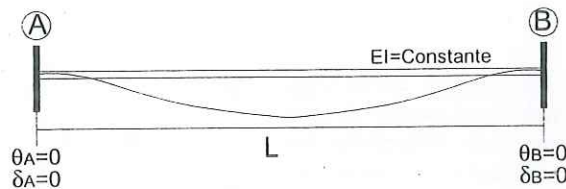
Grado de indeterminación de la viga:



No. de reacciones	4	R_A, M_A, R_B y M_B
No. de ec's de la estática	2	$\Sigma M=0, \Sigma F_y=0$
No. de reacciones redundantes	2	

Por aplicación del método área de momentos para determinar las dos reacciones redundantes, será necesario aplicar dos condiciones de deformación conocidas.

Configuración de deformación. Dadas las condiciones de empotramiento en los apoyos, la rotación de la tangente a la curva elástica en estos puntos, es nula, de igual manera la deflexión vertical es nula.



Por aplicación de los teoremas del método área de momentos, se plantean las siguientes condiciones de deformación.

a) Con respecto a la tangente en "B":

$$\theta_{A/B} = 0$$

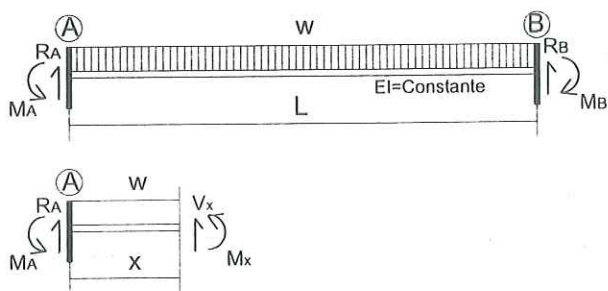
$$t_{A/B} = 0$$

b) Con respecto a la tangente en "A":

$$\theta_{B/A} = 0$$

$$t_{B/A} = 0$$

Diagrama de momentos por partes, determinado con respecto al apoyo en "B"



Efectuando sumatoria de momentos a una distancia "x" desde el apoyo en "A"

$$\sum M_x = 0$$

$$-R_A x + M_A - wx \left(\frac{1}{2} x \right) + M_x = 0$$

$$M_x = R_A x - M_A + \frac{1}{2} wx^2$$

De esta expresión observamos que el diagrama de momentos por partes está compuesto por tres momentos, uno producido por la fuerza de reacción R_A y tiene una variación lineal, otro debido al momento en el empotramiento M_A y es constante en la longitud de la viga y por último el momento que produce la carga uniformemente distribuida, que tiene una variación definida por una curva de segundo grado.

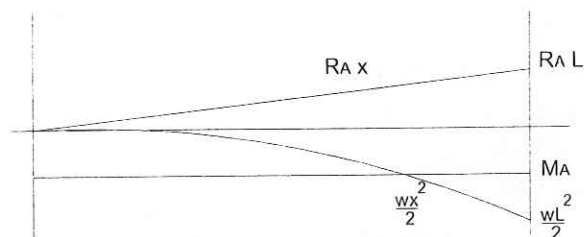
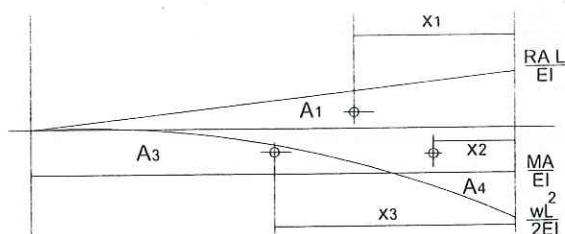


Diagrama de momentos por partes dividido por el coeficiente EI, con respecto al apoyo en "B" ($x=L$).



Aplicando las siguientes condiciones de deformación

$$\theta_{w,A} = 0$$

$$t_{w,A} = 0$$

De acuerdo con el primer teorema del método

$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} dx = 0$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(L) \left(\frac{R_A L}{EI} \right) = \frac{1}{2} \frac{R_A L^2}{EI}$$

$$A_2 = \frac{1}{3}(L) \left(\frac{wL^2}{2EI} \right) = \frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI}$$

$$A_3 = (L) \left(\frac{M_A}{EI} \right) = \frac{M_A L}{EI}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{R_A L^2}{EI} - \frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI} - \frac{M_A L}{EI} = 0$$

De acuerdo con el segundo teorema del método

$$t_{B/A} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} \bar{x}_B dx = 0$$

$$A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{3}(L)$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(L)$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(L)$$

$$\left(\frac{1}{3}L \right) \frac{1}{2} \frac{R_A L^2}{EI} - \left(\frac{1}{4}L \right) \frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI} - \left(\frac{1}{2}L \right) \frac{M_A L}{EI} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \frac{R_A L^3}{EI} - \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI} - \frac{1}{2} \frac{M_A L^2}{EI} = 0$$

para determinar las reacciones redundantes, se resuelve el sistema de ecuaciones que se obtiene por la aplicación anterior de los dos teoremas del método

$$\frac{1}{2} \frac{R_A L^2}{EI} - \frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI} - \frac{M_A L}{EI} = 0$$

$$\frac{1}{6} \frac{R_A L^3}{EI} - \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI} - \frac{1}{2} \frac{M_A L^2}{EI} = 0$$

Multiplicando la primera de las ecuaciones anteriores por $\left(-\frac{1}{3}L \right)$ y sumando a la segunda ecuación

$$\frac{1}{72} \frac{wL^4}{EI} - \frac{1}{6} \frac{M_A L^2}{EI} = 0$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{1}{12} wL^2$$

Sustituyendo esta expresión para M_A , en la ecuación obtenida por aplicación del primer teorema

$$\frac{1}{2} \frac{R_A L^2}{EI} - \frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI} - \frac{\left(\frac{1}{12} wL^2\right)L}{EI} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{R_A L^2}{EI} - \frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI} - \frac{1}{12} \frac{wL^3}{EI} = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{1}{2} wL$$

Para determinar las fuerzas de reacción en el apoyo en "B", aplicando las condiciones de equilibrio estático se obtiene:

Por equilibrio de fuerzas verticales

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B - w(L) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} wL\right) + R_B - wL = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{1}{2} wL$$

Por equilibrio de momentos en "B"

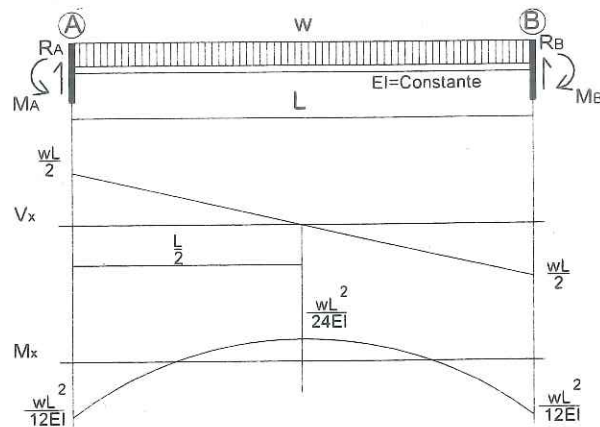
$$\sum M_B = 0$$

$$-R_A(L) + M_A + wL\left(\frac{1}{2}L\right) - M_B = 0$$

$$-\left(\frac{1}{2}wL\right)(L) + \left(\frac{1}{12}wL^2\right) + \frac{1}{2}wL^2 - M_B = 0$$

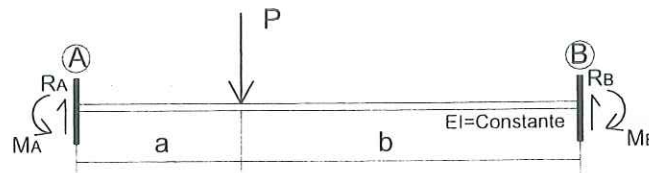
$$\Rightarrow M_B = \frac{1}{12}wL^2$$

Los diagramas de fuerzas cortante y momento flexionante de la viga quedan determinados de la siguiente manera



Solución ejercicio No. 4.2

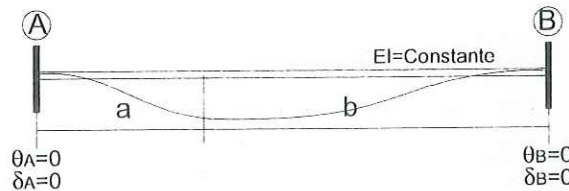
Grado de indeterminación de la viga:



No. de reacciones	4	R_A, M_A, R_B y M_B
No. de ec's de la estática	2	$\Sigma M=0, \Sigma F_y=0$
No. de reacciones redundantes	2	

Por aplicación del método de la viga conjugada, para determinar las dos reacciones redundantes, será necesario aplicar dos condiciones de deformación conocidas.

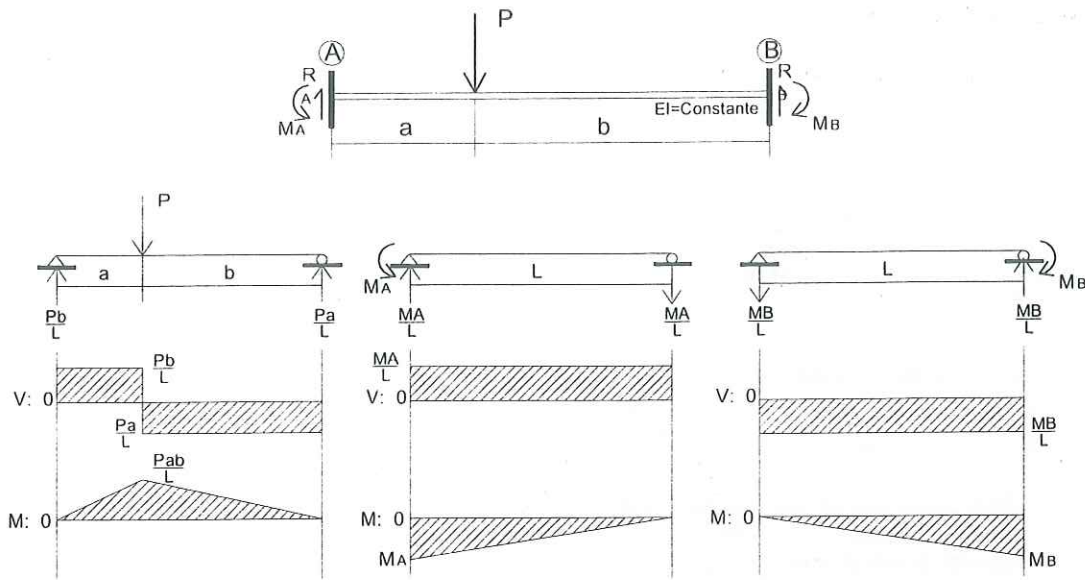
Configuración de deformación. Dadas las condiciones de empotramiento en los apoyos, la rotación de la tangente a la curva elástica en estos puntos, es nula, de igual manera la deflexión vertical es nula.



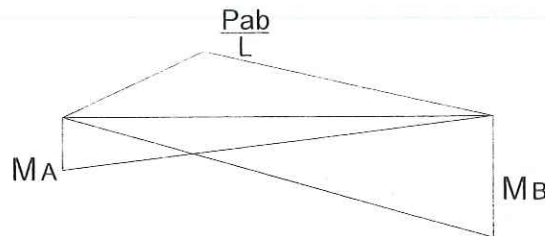
Por aplicación de la metodología de la viga conjugada, se plantean las siguientes relaciones entre la deformación de la viga real con la viga conjugada.

Extremo "A"		Extremo "B"	
Viga Real	Viga Conjugada	Viga Real	Viga Conjugada
$\theta_A=0$	$R_A'=0$	$\theta_B=0$	$R_B'=0$
$\delta_A=0$	$M_A'=0$	$\delta_B=0$	$M_B'=0$

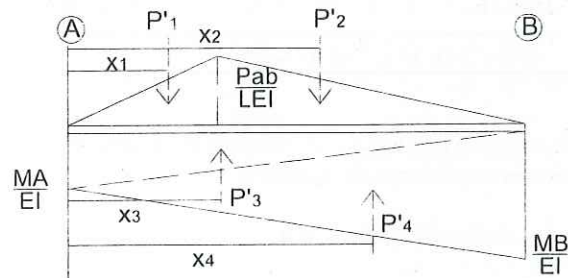
Diagrama de momentos por partes, considerando como las reacciones redundantes los momentos en los empotramientos M_A' y M_B' . Considerando la viga sometida a la acción independiente de los momentos M_A' y M_B' y la carga concentrada "P". Los momentos generados por cada una de estas condiciones de carga, están representados de la siguiente manera



Sobreponiendo estos diagramas, obtenemos el diagrama de momentos por partes en la viga hiperestática.



Dividiendo las ordenadas de este diagrama de momentos por partes por el coeficiente "EI" y tomando en cuenta la relación viga real-viga conjugada, en términos de las condiciones de apoyo, la viga conjugada queda representada de la siguiente manera (nótese que en este caso, por tener apoyos empotrados en la viga real, para cumplir con la relación de deformación entre la viga real y la viga conjugada, ésta última está representada con ambos extremos libres en voladizo).



Aplicando las condiciones $R_A' = 0$ y $M_A' = 0$ en la viga conjugada, se deberán cumplir las condiciones de equilibrio estático $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ -P_1 - P_2 + P_3 + P_4 &= 0 \\ P_1 &= \frac{1}{2}a \left(\frac{Pab}{LEI} \right) = \frac{1}{2} \frac{Pa^2b}{LEI} \\ P_2 &= \frac{1}{2}b \left(\frac{Pab}{LEI} \right) = \frac{1}{2} \frac{Pab^2}{LEI} \\ P_3 &= \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{M_A}{EI} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{EI} M_A L \\ P_4 &= \frac{1}{2}(a+b) \left(\frac{M_B}{EI} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{EI} M_B L \\ - \left(\frac{1}{2} \frac{Pa^2b}{LEI} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{Pab^2}{LEI} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{EI} M_A L \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{EI} M_B L \right) &= 0 \\ - \frac{1}{2} \frac{Pab}{LEI} (a+b) + \frac{1}{2} \frac{1}{EI} M_A L + \frac{1}{2} \frac{1}{EI} M_B L &= 0 \\ \Rightarrow -Pab + M_A L + M_B L &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ -P_1 x_1 - P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 &= 0 \\ x_1 &= \frac{2}{3}a \\ x_2 &= a + \frac{1}{3}b \\ x_3 &= \frac{1}{3}(a+b) = \frac{1}{3}L \\ x_4 &= \frac{2}{3}(a+b) = \frac{2}{3}L \\ - \left(\frac{1}{2} \frac{Pa^2b}{LEI} \right) \left(\frac{2}{3}a \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{Pab^2}{LEI} \right) \left(a + \frac{1}{3}b \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{EI} M_A L \right) \left(\frac{1}{3}L \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{EI} M_B L \right) \left(\frac{2}{3}L \right) &= 0 \\ - \frac{1}{3} \frac{Pa^3b}{L} - \frac{1}{2} \frac{Pab^2}{L} \left(a + \frac{1}{3}b \right) + \frac{1}{6} M_A L^2 + \frac{1}{3} M_B L^2 &= 0 \\ \Rightarrow - \frac{Pab}{L} \left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{6}b^2 \right) + \frac{1}{6} M_A L^2 + \frac{1}{3} M_B L^2 &= 0 \end{aligned}$$

para determinar las reacciones redundantes, se resuelve el sistema de ecuaciones que se obtiene por la aplicación anterior de los dos condiciones de equilibrio

$$\begin{aligned} -Pab + M_A L + M_B L &= 0 \\ - \frac{Pab}{L} \left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{6}b^2 \right) + \frac{1}{6} M_A L^2 + \frac{1}{3} M_B L^2 &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda de las ecuaciones anteriores por $\left(-6 \frac{1}{L} \right)$ y sumando a la primera ecuación

$$M_B L - 6 \frac{Pab}{L^2} \left(\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{6} b^2 \right) - Pab = 0$$

$$M_B = \frac{Pab}{L^3} (2a^2 + 3ab + b^2 - L^2) = \frac{Pab}{L^3} [2a^2 + 3ab + b^2 - (a+b)^2]$$

$$M_B = \frac{Pab}{L^3} (a^2 + ab)$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{Pa^2 b}{L^2}$$

Sustituyendo esta expresión para M_A , en la ecuación obtenida por aplicación de la primera condición de equilibrio, $\sum F_y = 0$

$$-Pab + M_A L + M_B L = 0$$

$$-Pab + M_A L + \left(\frac{Pa^2 b}{L^2} \right) L = 0$$

$$-Pab + M_A L + \frac{Pa^2 b}{L} = 0$$

$$M_A = \frac{Pab}{L^2} (L - a)$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{Pab^2}{L^2}$$

Las fuerzas de reacción R_A y R_B se determinan aplicando las condiciones de equilibrio estático.

Por equilibrio de momentos en "B"

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_A (L) + P(b) + M_A - M_B = 0$$

$$-R_A L + Pb + \left(\frac{Pab^2}{L^2} \right) - \left(\frac{Pa^2 b}{L^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{Pb}{L} \left(1 + \frac{ab}{L^2} - \frac{a^2}{L^2} \right)$$

Por equilibrio de fuerzas verticales

$$\sum F_y = 0$$

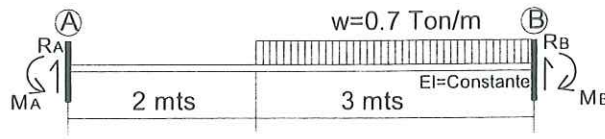
$$R_A + R_B - P = 0$$

$$\left[\frac{Pb}{L} \left(1 + \frac{ab}{L^2} - \frac{a^2}{L^2} \right) \right] + R_B - P = 0$$

$$\Rightarrow R_B = P - \frac{Pab}{L} \left(1 + \frac{ab}{L^2} - \frac{a^2}{L^2} \right)$$

Solución ejercicio No. 4.3

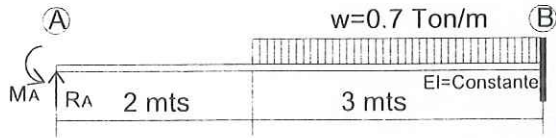
Grado de indeterminación de la viga:



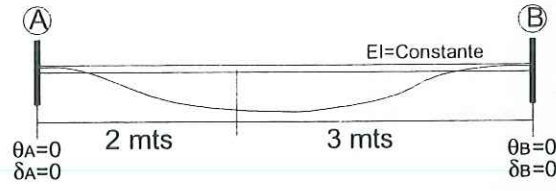
No. de reacciones	4	R_A, M_A, R_B y M_B
No. de ec's de la estática	2	$\Sigma M=0, \Sigma F_y=0$
No. de reacciones redundantes	2	

Por aplicación del método de superposición para determinar las dos reacciones redundantes, será necesario aplicar dos condiciones de deformación conocidas.

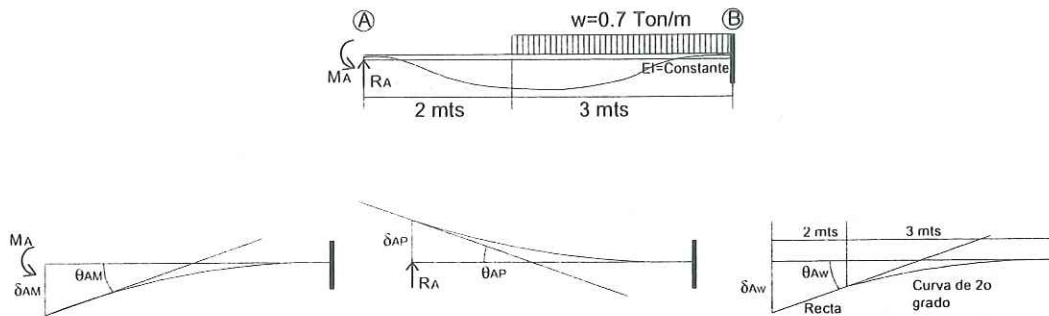
Considerando como reacciones redundantes la fuerza cortante de reacción R_A y el momento M_A en el empotramiento, al considerar el principio de superposición, tendremos el siguientes sistema de cargas actuando en la viga:



Configuración de deformación. Dadas las condiciones de empotramiento en los apoyos, la rotación de la tangente a la curva elástica en estos puntos, es nula, de igual manera la deflexión vertical es nula.



Considerando la acción de cada una de las cargas de manera independiente en la viga, la deflexión total, de acuerdo con la condición de deformación en el extremo "A", será:



$$\theta_A = 0 = \theta_{AM} + \theta_{AP} + \theta_{Aw}$$

$$\delta_A = 0 = \delta_{AM} + \delta_{AP} + \delta_{Aw}$$

La deflexión vertical y rotación de la tangente de la curva elástica, para cada una de las condiciones de carga aplicada en la viga, fueron determinadas previamente en la solución de vigas simples en el capítulo anterior.

Momento aplicado en el extremo libre del voladizo

$$\theta_{AM} = \frac{M_A L}{EI} = \frac{M_A (5)}{EI}$$

$$\Rightarrow \theta_{AM} = \frac{5M_A}{EI}$$

$$\delta_{AM} = \frac{1}{2} \frac{M_A L^2}{EI} = \frac{1}{2} \frac{M_A (5)^2}{EI}$$

$$\Rightarrow \delta_{AM} = \frac{12.5M_A}{EI}$$

Carga concentrada aplicada en el extremo libre del voladizo

$$\theta_{AP} = \frac{1}{2} \frac{R_A L^2}{EI} = \frac{1}{2} \frac{R_A (5)^2}{EI}$$

$$\Rightarrow \theta_{AP} = \frac{12.5R_A}{EI}$$

$$\delta_{AP} = \frac{1}{3} \frac{R_A L^3}{EI} = \frac{1}{3} \frac{R_A (5)^3}{EI}$$

$$\Rightarrow \delta_{AP} = \frac{41.667R_A}{EI}$$

Carga distribuida aplicada parcialmente en la longitud de la viga

$$\theta_{Aw} = \frac{1}{6} \frac{wL^3}{EI} = \frac{1}{6} \frac{(0.7)(3)^3}{EI}$$

$$\Rightarrow \theta_{Aw} = \frac{3.15}{EI}$$

$$\delta_{Aw} = \frac{1}{8} \frac{wL^4}{EI} + a\theta_{Aw} = \frac{1}{8} \frac{(0.7)(3)^4}{EI} + (2.0) \left(\frac{3.15}{EI} \right)$$

$$\Rightarrow \delta_{Aw} = \frac{13.3875}{EI}$$

Aplicando las condiciones de deformación en el apoyo en "A"

$$\theta_A = 0 = \theta_{AM} + \theta_{AP} + \theta_{Aw}$$

$$0 = \left(\frac{5M_A}{EI} \right) - \left(\frac{12.5R_A}{EI} \right) + \left(\frac{3.15}{EI} \right)$$

$$\Rightarrow 5M_A - 12.5R_A = -3.15$$

$$\delta_A = 0 = \delta_{AM} + \delta_{AP} + \delta_{Aw}$$

$$0 = - \left(\frac{12.5M_A}{EI} \right) + \left(\frac{41.667R_A}{EI} \right) - \left(\frac{13.3875}{EI} \right)$$

$$\Rightarrow -12.5M_A + 41.667R_A = 13.3875$$

Las reacciones redundantes se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

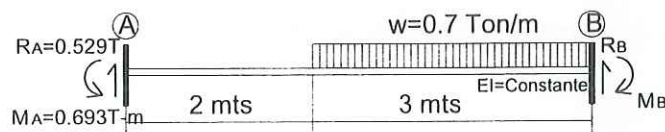
$$5M_A - 12.5R_A = -3.15$$

$$-12.5M_A + 41.667R_A = 13.3875$$

$$\Rightarrow M_A = 0.693 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

$$\Rightarrow R_A = 0.529 \text{ Ton}$$

las fuerzas de reacción en el apoyo en "B", se obtienen por aplicación de las condiciones de equilibrio de la estática:



$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B - (0.7)(3.0) = 0$$

$$(0.529) + R_B - 2.1 = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 1.571 \text{ Ton}$$

$$\sum M_B = 0$$

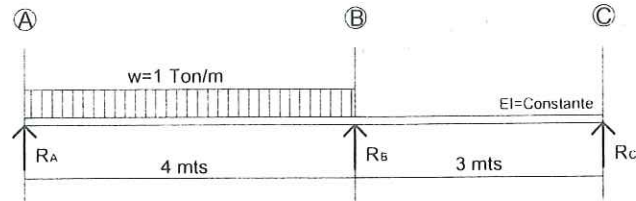
$$-R_A(5.0) + (0.7)(3.0)\left(\frac{3.0}{2}\right) + M_A + M_B = 0$$

$$-(0.529)(5.0) + 3.15 + (0.693) + M_B = 0$$

$$\Rightarrow M_B = 1.198 \text{Ton} \cdot \text{m}$$

Solución ejercicio No. 4.4

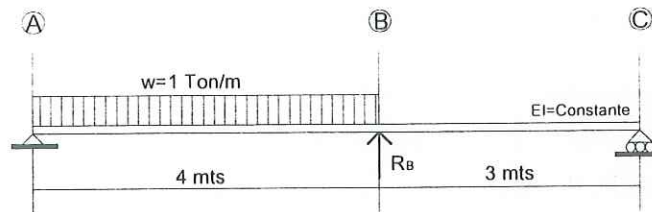
Grado de indeterminación de la viga:



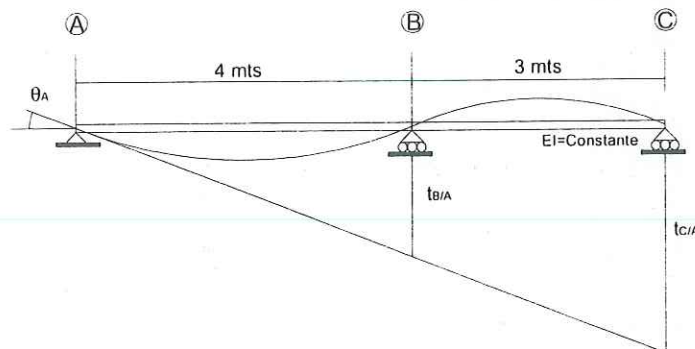
No. de reacciones	3	R_A, R_B y R_C
No. de ec's de la estática	2	$\Sigma M=0, \Sigma F_y=0$
No. de reacciones redundantes	1	

Por aplicación del método de área de momentos, para determinar la reacción redundante, será necesario considerar el efecto en la deformación de la viga, que produce la reacción redundante y la carga uniformemente distribuida, actuando de manera independiente.

Considerando como reacciones redundantes la fuerza cortante de reacción R_B , al considerar el principio de superposición, tendremos el siguientes sistema de cargas actuando en la viga:



Configuración de deformación

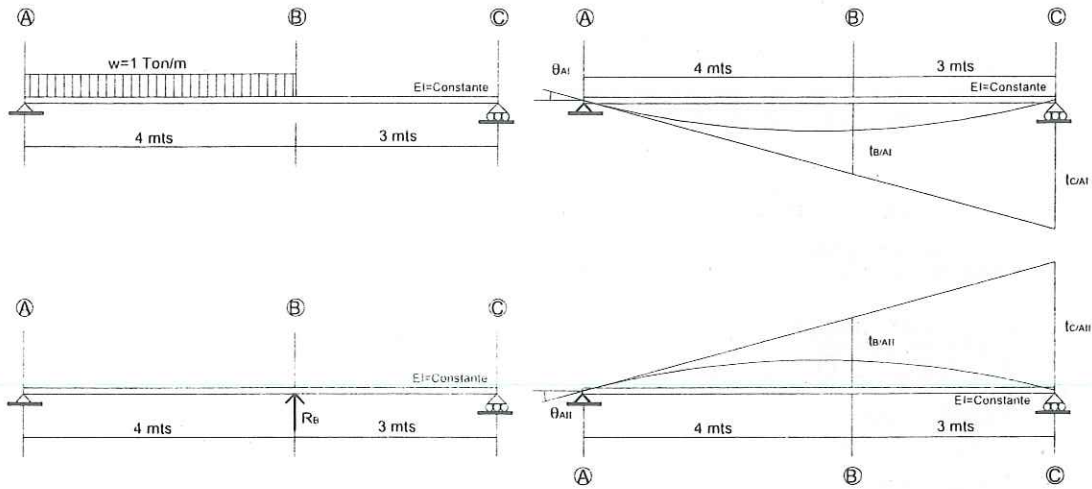


Por triángulos semejantes (de la configuración de deformación)

$$\frac{t_{B/A}}{4} = \frac{t_{C/A}}{7}$$

$$\Rightarrow t_{B/A} = \frac{4}{7} t_{C/A}$$

Al considerar el efecto de la reacción redundante y la carga uniformemente distribuida, actuando de manera independiente, se tienen las siguientes condiciones de deformación:



Por superposición de las condiciones de carga I y II, se deberá cumplir que

$$t_{B/A} = t_{B/AI} + t_{B/AII}$$

$$t_{C/A} = t_{C/AI} + t_{C/AII}$$

Determinación de las desviaciones tangenciales ($t_{B/AI}$, $t_{B/AII}$, $t_{C/AI}$ y $t_{C/AII}$)

Caso de carga I.

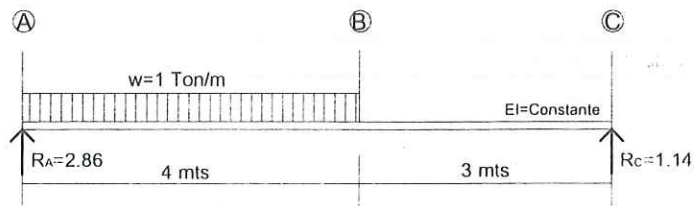
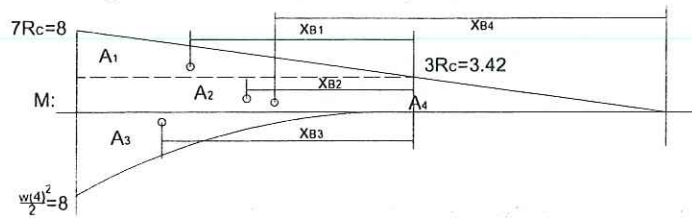


Diagrama de momentos con respecto a "A"



Reacciones R_A y R_C

$$\begin{aligned}\sum M_c &= 0 \\ -R_A(7.0) + (1.0)(4.0)(5.0) &= 0 \\ \Rightarrow R_A &= 2.86 \text{Ton}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ R_A + R_c - (1.0)(4.0) &= 0 \\ (2.86) + R_c - 4.0 &= 0 \\ \Rightarrow R_c &= 1.14 \text{Ton}\end{aligned}$$

Utilizando el diagrama de momentos por partes con respecto al apoyo en "A"

$$t_{B/AI} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} \bar{x}_B dx = A_1 \bar{x}_{B1} + A_2 \bar{x}_{B2} + A_3 \bar{x}_{B3}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(4.0) \left(\frac{8 - 3.42}{EI} \right) = \frac{9.16}{EI}$$

$$A_2 = (4.0) \left(\frac{3.42}{EI} \right) = \frac{13.68}{EI}$$

$$A_3 = \frac{1}{3}(4.0) \left(\frac{8.0}{EI} \right) = \frac{10.667}{EI}$$

$$\bar{x}_{B1} = \frac{2}{3}(4.0) = 2.667$$

$$\bar{x}_{B2} = \frac{1}{2}(4.0) = 2.0$$

$$\bar{x}_{B3} = \frac{3}{4}(4.0) = 3.0$$

$$t_{B/AI} = \left(\frac{9.16}{EI} \right) (2.667) + \left(\frac{13.68}{EI} \right) (2.0) - \left(\frac{10.667}{EI} \right) (3.0)$$

$$t_{B/AI} = \frac{24.43}{EI} + \frac{27.36}{EI} - \frac{32.0}{EI}$$

$$\Rightarrow t_{B/AI} = \frac{19.79}{EI}$$

$$t_{C/AI} = \int_A^C \frac{M}{EI} x_C dx = A_4 \bar{x}_{C1} + A_1 \bar{x}_{C2}$$

$$A_4 = \frac{1}{2} (7.0) \left(\frac{8.0}{EI} \right) = \frac{28.0}{EI}$$

$$A_1 = \frac{10.667}{EI}$$

$$\bar{x}_{C1} = \frac{2}{3} (7.0) = 4.667$$

$$\bar{x}_{C2} = \frac{3}{4} (4.0) + 3.0 = 6.0$$

$$t_{C/AI} = \left(\frac{28.0}{EI} \right) (4.667) - \left(\frac{10.667}{EI} \right) (6.0)$$

$$t_{C/AI} = \frac{130.676}{EI} - \frac{64.0}{EI}$$

$$\Rightarrow t_{C/AI} = \frac{66.67}{EI}$$

Caso de carga II.

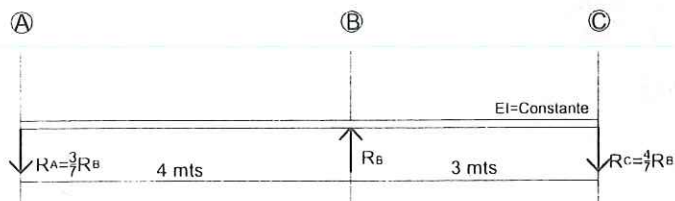
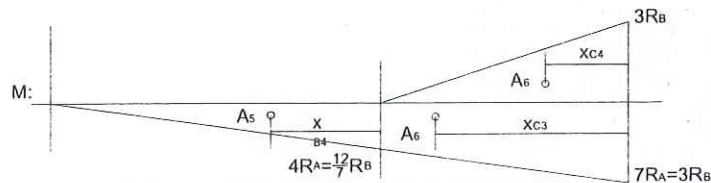


Diagrama de momentos con respecto a "C"



Reacciones R_A y R_C

$$\sum M_A = 0$$

$$-R_C (7.0) + R_B (4.0) = 0$$

$$\Rightarrow R_C = \frac{4}{7} R_B$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-R_A - R_C + R_B = 0$$

$$R_A - \left(\frac{4}{7} R_B \right) + R_B = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{3}{7} R_B$$

Utilizando el diagrama de momentos por partes con respecto al apoyo en "C"

$$t_{B/AII} = \int_A^B \frac{M_x}{EI} \bar{x}_B dx = A_s \bar{x}_{B4}$$

$$A_s = \frac{1}{2} (4.0) \left(\frac{12 R_B}{EI} \right) = \frac{3.43}{EI}$$

$$\bar{x}_{B4} = \frac{1}{3} (4.0) = 1.333$$

$$t_{B/AII} = - \left(\frac{3.43 R_B}{EI} \right) (1.333)$$

$$\Rightarrow t_{B/AII} = - \frac{4.57 R_B}{EI}$$

$$t_{C/AII} = \int_A^C \frac{M_x}{EI} \bar{x}_C dx = A_6 \bar{x}_{C3} + A_7 \bar{x}_{C4}$$

$$A_6 = \frac{1}{2} (7.0) \left(\frac{3 R_B}{EI} \right) = \frac{10.5 R_B}{EI}$$

$$A_7 = \frac{1}{2} (3.0) \left(\frac{3 R_B}{EI} \right) = \frac{4.5 R_B}{EI}$$

$$\bar{x}_{C3} = \frac{1}{3} (7.0) = 2.333$$

$$\bar{x}_{C4} = \frac{1}{3} (3.0) = 1.0$$

$$t_{C/AII} = - \left(\frac{10.5 R_B}{EI} \right) (2.333) + \left(\frac{4.5 R_B}{EI} \right) (1.0)$$

$$t_{C/AII} = - \frac{24.5 R_B}{EI} + \frac{4.5 R_B}{EI}$$

$$\Rightarrow t_{C/AII} = - \frac{20 R_B}{EI}$$

Utilizando la condición de deformación determinada por superposición de las condiciones de carga I y II

$$t_{B/A} = t_{B/AI} + t_{B/AII} = \frac{19.79}{EI} - \frac{4.57 R_B}{EI}$$

$$t_{C/A} = t_{C/AI} + t_{C/AII} = \frac{66.67}{EI} - \frac{20 R_B}{EI}$$

De la relación

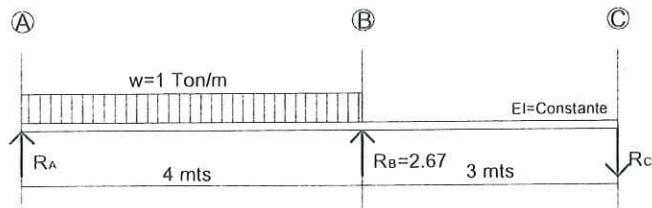
$$t_{B/A} = \frac{4}{7} t_{C/A}$$

$$\left(\frac{19.79}{EI} - \frac{4.57 R_B}{EI} \right) = \frac{4}{7} \left(\frac{66.67}{EI} - \frac{20 R_B}{EI} \right)$$

$$-4.57 R_B + 11.43 R_B = 38.10 - 19.79$$

$$\Rightarrow R_B = 2.67 \text{ Ton}$$

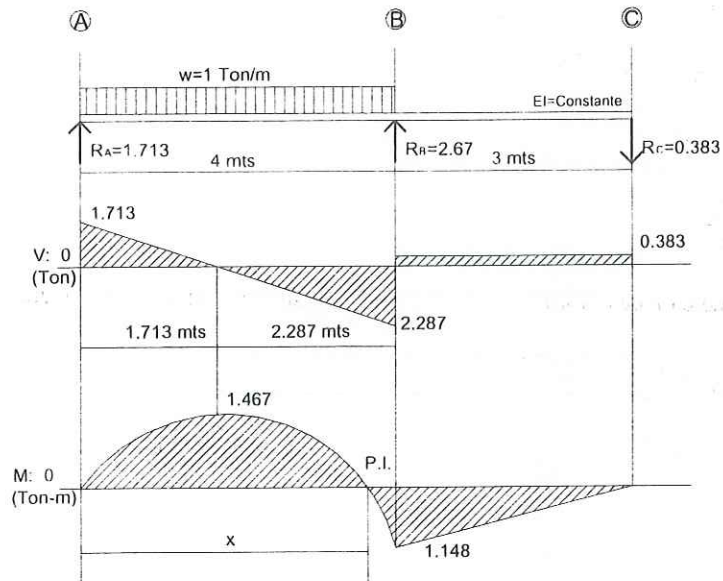
Las fuerzas de reacción en "A" y "C", se determinan por aplicación de las condiciones de equilibrio de la estática



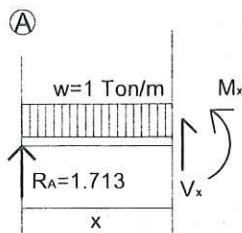
$$\begin{aligned} \sum M_c &= 0 \\ -R_A(7.0) + (1.0)(4.0)(2.0 + 3.0) - R_B(3.0) &= 0 \\ -7R_A + 20 - 3(2.67) &= 0 \\ \Rightarrow R_A &= 1.713 \text{ Ton} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ R_A + R_B - R_C - (1.0)(4.0) &= 0 \\ (1.713) + (2.67) - R_C - 4 &= 0 \\ R_C &= 0.383 \text{ Ton} \end{aligned}$$

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante quedan determinados de la siguiente manera



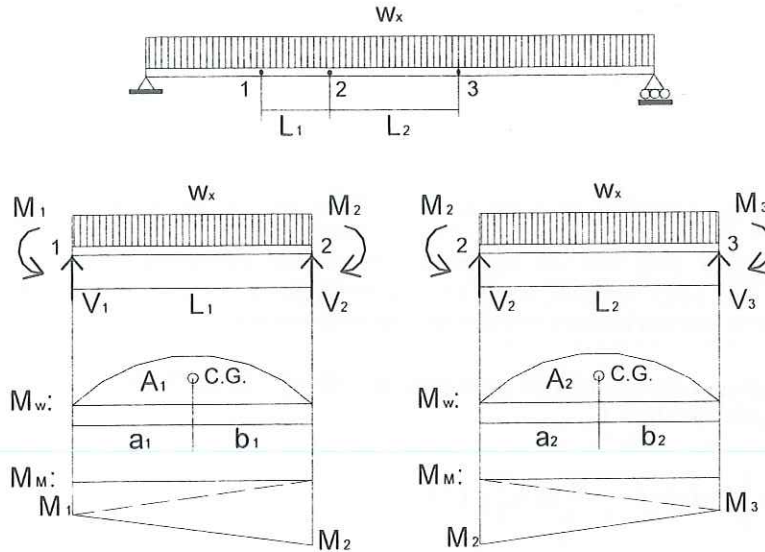
La distancia "x" al punto de inflexión se determina a partir de la condición $M_x = 0$



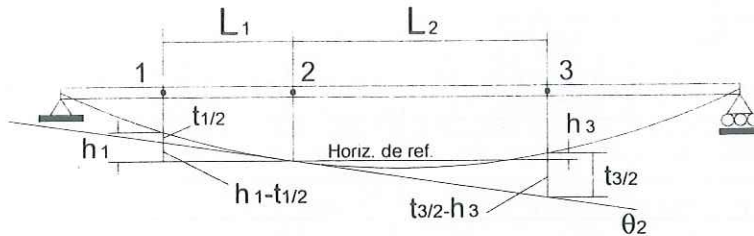
$$\begin{aligned}\sum M_x &= 0 \\ -R_A x + (1.0)x \left(\frac{1}{2} x \right) + M_x &= 0 \\ -(1.713)x + \frac{1}{2} x^2 + (0) &= 0 \\ x \left(-1.713 + \frac{1}{2} x \right) &= 0 \\ -1.713 + \frac{1}{2} x &= 0 \\ \Rightarrow x &= 3.426\text{m}\end{aligned}$$

ECUACION DE TRES MOMENTOS PARA LA SOLUCION DE VIGAS CONTINUAS.

Para el desarrollo de la ecuación de tres momentos a utilizar en la solución de vigas continuas (el tipo de vigas que tienen dos claros o más), particularmente en la determinación de los momentos en los apoyos de las vigas (condiciones de apoyo empotrados y apoyos interiores), considérese la viga mostrada con carga uniformemente distribuida, aunque la condición de carga puede ser de tipo general, simplemente apoyada en los extremos y definiendo los puntos interiores "1", "2" y "3" con distancias L_1 y L_2 entre ellos.



Configuración de deformación, se muestra como horizontal de referencia una línea horizontal que pasa por el punto intermedio "2".



En donde:

h_1, h_3 : Distancias verticales de los puntos 1 y 3 con respecto a la horizontal de referencia que pasa por el punto "2".

θ_2 : Tangente de referencia que pasa por el punto "2".

$t_{1/2}, t_{3/2}$: Desviaciones tangenciales de los puntos "1" y "2" respecto a la tangente de referencia en "2".

De la configuración de deformación:

$$\frac{h_1 - t_{1/2}}{L_1} = \frac{t_{3/2} - h_3}{L_2}$$

$$\frac{t_{3/2}}{L_2} + \frac{t_{1/2}}{L_1} = \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}$$

De acuerdo con el segundo teorema del método área de momentos

$$t_{1/2} = \int_1^2 \frac{M_x}{EI} x_1 dx$$

$$t_{3/2} = \int_2^3 \frac{M_x}{EI} x_3 dx$$

Considérese ahora la representación de los tramos definidos entre los puntos 1-2 y 2-3, representando las fuerzas cortantes y momentos flexionantes en los extremos de cada uno de los tramos. Para la condición de carga considerada en cada uno de los tramos, es posible representar el diagrama de momentos correspondiente a la carga aplicada en el claro y el diagrama de momentos correspondiente por los momentos de continuidad en los extremos de cada uno de los tramos.

De esta representación de diagrama de momentos en cada uno de los tramos, es posible determinar las desviaciones tangenciales $t_{1/2}$ y $t_{3/2}$

$$t_{1/2} = \frac{1}{EI} \left[A_1 a_1 + \frac{1}{2} M_1 L_1 \left(\frac{1}{3} L_1 \right) + \frac{1}{2} M_2 L_1 \left(\frac{2}{3} L_1 \right) \right]$$

$$t_{3/2} = \frac{1}{EI} \left[A_2 b_2 + \frac{1}{2} M_2 L_2 \left(\frac{2}{3} L_2 \right) + \frac{1}{2} M_3 L_2 \left(\frac{1}{3} L_2 \right) \right]$$

Sustituyendo estas expresiones en la relación de $t_{1/2}$ y $t_{3/2}$ obtenida de la configuración de deformación

$$\frac{t_{3/2}}{L_2} + \frac{t_{1/2}}{L_1} = \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}$$

$$\frac{\frac{1}{EI} \left[A_2 b_2 + \frac{1}{2} M_2 L_2 \left(\frac{2}{3} L_2 \right) + \frac{1}{2} M_3 L_2 \left(\frac{1}{3} L_2 \right) \right]}{L_2} + \frac{\frac{1}{EI} \left[A_1 a_1 + \frac{1}{2} M_1 L_1 \left(\frac{1}{3} L_1 \right) + \frac{1}{2} M_2 L_1 \left(\frac{2}{3} L_1 \right) \right]}{L_1} = \frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2}$$

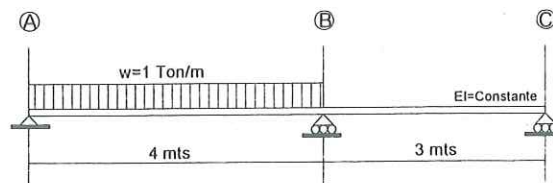
$$\frac{1}{6} M_1 L_1 + \frac{2}{6} M_2 L_1 + \frac{2}{6} M_2 L_2 + \frac{1}{6} M_3 L_2 + \frac{A_1 a_1}{L_1} + \frac{A_2 b_2}{L_2} = EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right)$$

$$M_1 L_1 + 2 M_2 (L_1 + L_2) + M_3 L_2 + \frac{6 A_1 a_1}{L_1} + \frac{6 A_2 b_2}{L_2} = 6 EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right)$$

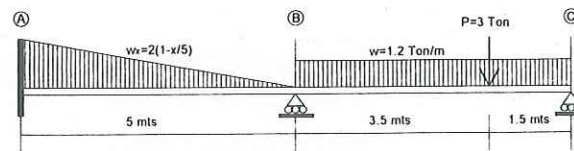
La ecuación anterior corresponde a la "ecuación de tres momentos". El término $6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right)$ es cero cuando los puntos "1", "2" y "3" se encuentran a la misma altura entre sí, después de que se ha flexionado la viga, como sería el caso de que estos puntos coincidieran con los puntos de localización de apoyos en la viga.

Ejercicio No. 4.5

Aplicar la ecuación de tres momentos para determinar el momento de continuidad en la viga mostrada y posteriormente determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

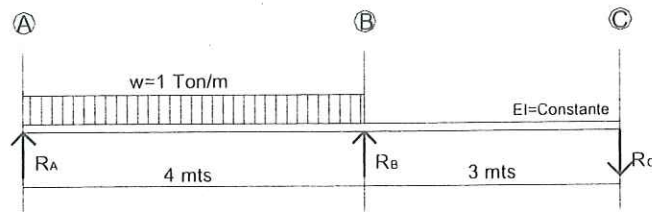
**Ejercicio No. 4.6**

Aplicar la ecuación de tres momentos para determinar los momentos en los apoyos de la viga mostrada y posteriormente determinar los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.



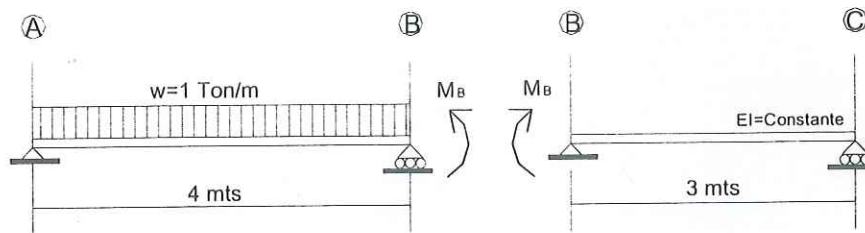
Solución ejercicio No. 4.5

Grado de indeterminación de la viga:



No. de reacciones	3	R_A, R_B y R_C
No. de ec's de la estática	2	$\Sigma M=0, \Sigma F_y=0$
Grado de indeterminación	1	

En la aplicación de la ecuación de tres momentos se determinan los momentos en algunos puntos en la viga. Generalmente se seleccionan como puntos de aplicación, los apoyos de la viga, de esta manera en este ejercicio podremos seleccionar los apoyos y se determinará el momento de continuidad en "B", puesto que el momento en los apoyos en los extremos de la viga son nulos.



Al tener definido el momento de M_B , se puede determinar por aplicación de las condiciones de equilibrio estático las fuerzas de reacción R_A, R_B y R_C

Ecuación de tres momentos:

$$M_1 L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3 L_2 + \frac{6A_1 a_1}{L_1} + \frac{6A_2 b_2}{L_2} = 6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_2}{L_2} \right)$$

Al aplicar esta ecuación considerando los puntos de apoyo de la viga

$$M_1 = M_A = 0 \quad M_2 = M_B \neq 0 \quad M_3 = M_C = 0$$

Puesto que $h_A = h_B = h_C = 0$

$$6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right) = 6EI \left(\frac{h_{\Delta}}{L_1} + \frac{h_c}{L_2} \right) = 0$$

Y los claros "1" y "2" quedan definidos por

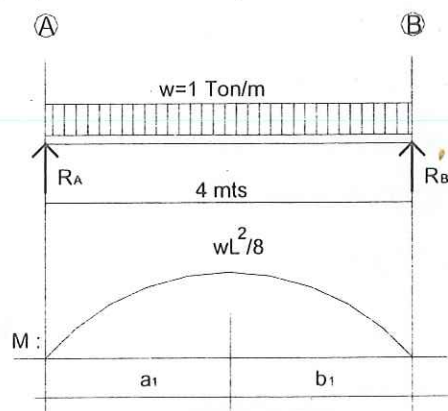
$$L_1 = L_{AB} = 4.0 \text{ mts}$$

$$L_2 = L_{BC} = 4.0 \text{ mts}$$

Los términos $\frac{6A_1 a_1}{L_1}$ y $\frac{6A_2 b_2}{L_2}$ se determinan a partir de el diagrama de momentos para la condición de carga actuando en cada uno de los claros de la viga.

Primer claro, entre los apoyos "A" y "B"

Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación de el diagrama de momentos



$$A_1 = \frac{2}{3} (L) \left(\frac{wL^2}{8} \right) = \frac{1}{12} wL^3$$

$$a_1 = \frac{1}{2} L$$

$$\frac{6A_1 a_1}{L_1} = \frac{6 \left(\frac{1}{12} wL^3 \right) \left(\frac{1}{2} L \right)}{L} = \frac{1}{4} wL^3 = \frac{1}{4} (1.0)(4.0)^3 = 16.0$$

Segundo claro, entre los apoyos "B" y "C"

No hay carga aplicada en el claro, por lo que

$$\frac{6A_2 b_2}{L_2} = 0.0$$

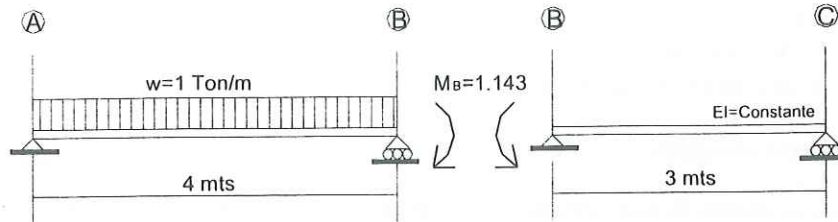
Sustituyendo valores en la ecuación de tres momentos:

$$M_1 L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3 L_2 + \frac{6A_1 a_1}{L_1} + \frac{6A_2 b_2}{L_2} = 6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_2}{L_2} \right)$$

$$(0)(4.0) + 2(M_B)(4.0 + 3.0) + (0)(3.0) + (16.0) + (0.0) = 0$$

$$14M_B + 16 = 0$$

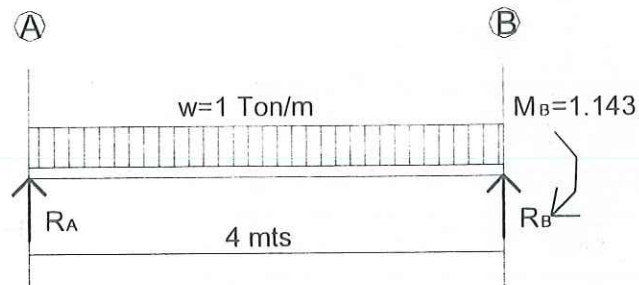
$$\Rightarrow M_B = -1.143 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$



Determinación de las fuerzas de reacción en los apoyos de la viga

Aplicando las condiciones de equilibrio estático.

Primer claro, entre los apoyos "A" y "B"



$$\sum M_A = 0$$

$$R_B(L_1) - (w)(L_1) \left(\frac{1}{2} L_1 \right) - M_B = 0$$

$$R_B(4.0) - (1.0)(4.0) \left(\frac{1}{2} 4.0 \right) - (1.143) = 0$$

$$4R_B - 8 - 1.143 = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 2.286 \text{ Ton}$$

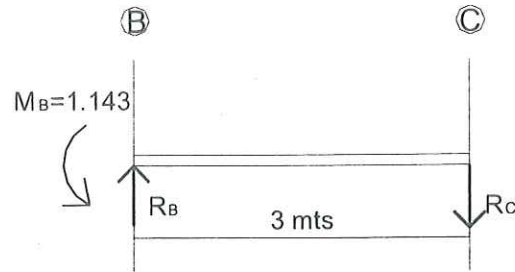
$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B - wL_1 = 0$$

$$R_A + (2.286) - (1.0)(4.0) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 1.714 \text{ Ton}$$

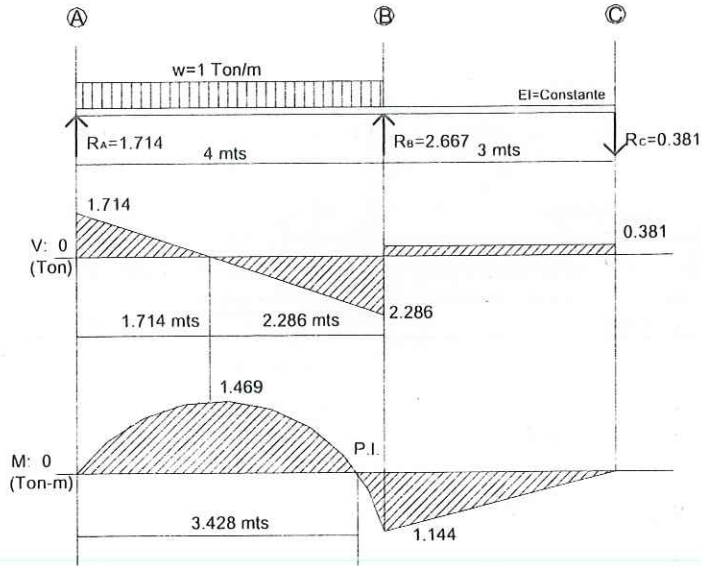
Segundo claro, entre los apoyos "B" y "C"



$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ -R_C(L_2) + M_B &= 0 \\ -R_C(3.0) + (1.143) &= 0 \\ -3R_C - 1.143 &= 0 \\ \Rightarrow R_C &= 0.381 \text{ Ton} \end{aligned}$$

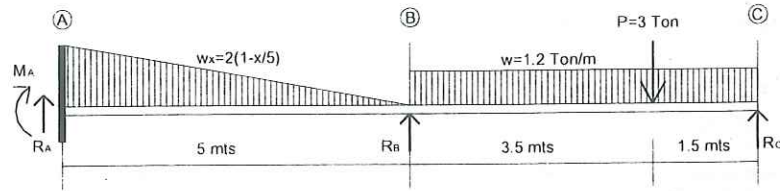
$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ R_B - R_C &= 0 \\ R_B - (0.381) &= 0 \\ \Rightarrow R_B &= 0.381 \text{ Ton} \end{aligned}$$

Finalmente, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, quedan determinados de la siguiente manera:



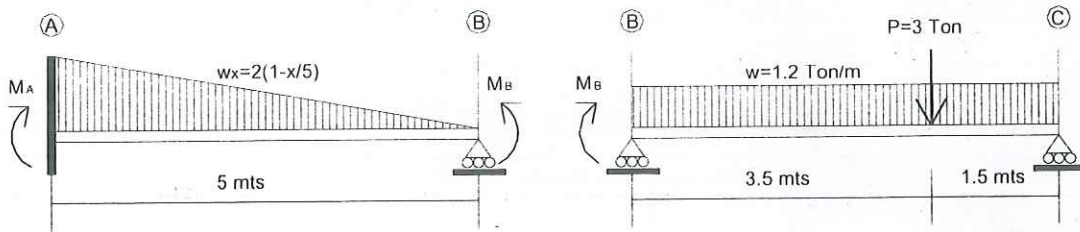
Solución ejercicio No. 4.6

Grado de indeterminación de la viga:



No. de reacciones	4	R_A, M_A, R_B y R_C
No. de ec's de la estática	2	$\Sigma M=0, \Sigma F_y=0$
No. de reacciones redundantes	2	

En la aplicación de la ecuación de tres momentos se determinan los momentos en algunos puntos en la viga. Generalmente se seleccionan como puntos de aplicación, los apoyos de la viga, de esta manera en este ejercicio podremos seleccionar los apoyos y se determinarán el momento en el empotramiento "A" y el momento de continuidad en "B", puesto que el momento en el apoyo en el extremo "C" de la viga es nulo.



Al tener definido los momentos M_A y M_B , se puede determinar por aplicación de las condiciones de equilibrio estático las fuerzas de reacción R_A, R_B y R_C

Aplicando la ecuación de tres momentos entre los apoyos "A", "B" y "C"

$$M_1 = M_A \neq 0$$

$$M_2 = M_B \neq 0$$

$$M_3 = M_C = 0$$

Puesto que $h_A = h_B = h_C = 0$

$$6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right) = 6EI \left(\frac{h_A}{L_1} + \frac{h_C}{L_2} \right) = 0$$

Y los claros "1" y "2" quedan definidos por

$$L_1 = L_{AB} = 5.0 \text{ mts}$$

$$L_2 = L_{BC} = 5.0 \text{ mts}$$

Los términos $\frac{6A_1 a_1}{L_1}$ y $\frac{6A_2 b_2}{L_2}$ se determinan a partir de el diagrama de momentos para la condición de carga actuando en cada uno de los claros de la viga.

Primer claro, entre los apoyos "A" y "B"

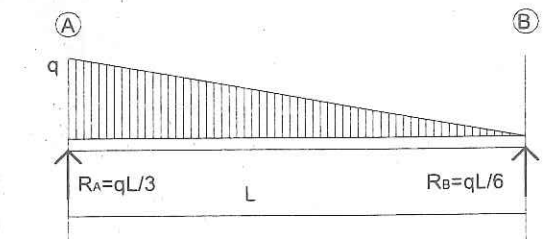
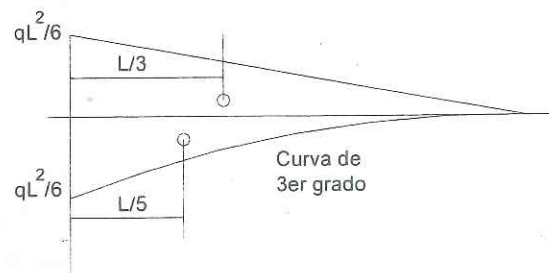


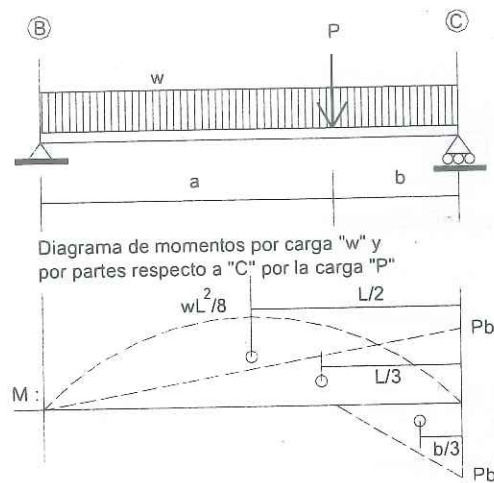
Diagrama de momentos con respecto al apoyo izquierdo



Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación del diagrama de momentos

$$\frac{6A_1 a_1}{L_1} = \frac{7}{60} qL^3 = \frac{7}{60} (2.0)(5.0)^3 = 29.167$$

Segundo claro, entre los apoyos "B" y "C"



Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación del diagrama de momentos

$$\frac{6A_2 b_2}{L_2} = \frac{1}{4} q L_2^3 + \frac{Pb}{L_2} (L_2^2 - b_2^2) = \frac{1}{4} (1.2)(5.0)^3 + \frac{(3.0)(1.5)}{(5.0)} [(5.0)^2 - (1.5)^2]$$

$$\frac{6A_2 b_2}{L_2} = 37.5 + 20.475 = 57.975$$

Sustituyendo valores en la ecuación de tres momentos:

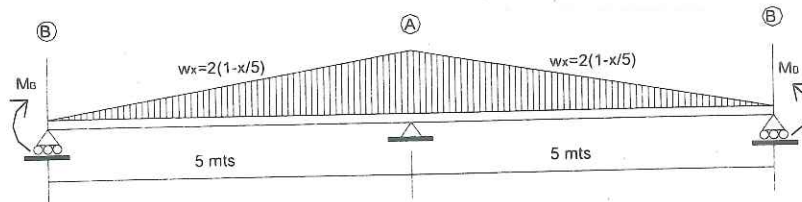
$$M_1 L_1 + 2M_2 (L_1 + L_2) + M_3 L_2 + \frac{6A_1 a_1}{L_1} + \frac{6A_2 b_2}{L_2} = 6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_1}{L_2} \right)$$

$$(M_A)(5.0) + 2(M_B)(5.0 + 5.0) + (0)(5.0) + (29.167) + (57.975) = 0$$

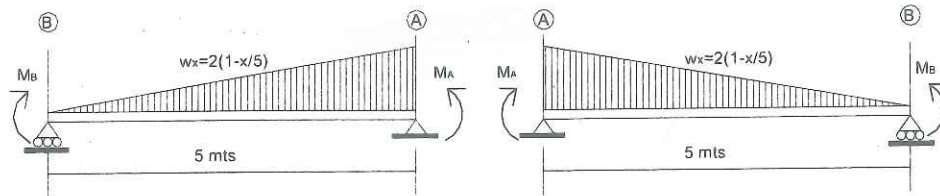
$$5M_A + 20M_B = -87.142$$

Es necesario tener un sistema de 2 ecuaciones para determinar los dos momentos M_A y M_B . Se deberá aplicar la ecuación de tres momentos nuevamente para generar la Segunda ecuación y de esta manera resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

La ecuación de tres momentos debe ser aplicada en dos claros, en el caso de este problema, los dos claros que se muestran en la viga ya fueron utilizados. Puesto que el tipo de apoyo en "A" es un empotramiento, se puede considerar que en este apoyo se presenta una condición de simetría, de la siguiente manera:



Por lo que será posible aplicar la ecuación de tres momentos en los claros definidos por los apoyos "B", "A" y "B", y la ecuación de tres momentos estará en función de los momentos M_A y M_B , con lo cual se obtiene la ecuación necesaria para generar el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y poder determinar los momentos M_A y M_B .



Aplicando nuevamente la ecuación de tres momentos, ahora en los claro, entre los apoyos "B", "A" y "B"

$$M_1 = M_B \neq 0$$

$$M_2 = M_A \neq 0$$

$$M_3 = M_B \neq 0$$

Puesto que $h_B = h_A = h_B = 0$

$$6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_3}{L_2} \right) = 6EI \left(\frac{h_B}{L_1} + \frac{h_B}{L_2} \right) = 0$$

Y los claros "1" y "2" quedan definidos por

$$L_1 = L_{BA} = 5.0\text{mts}$$

$$L_2 = L_{AB} = 5.0\text{mts}$$

Primer claro, entre los apoyos "B" y "A"

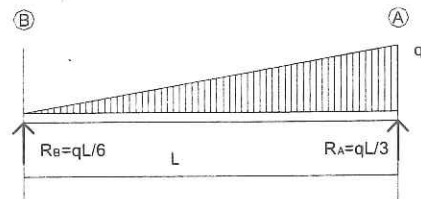
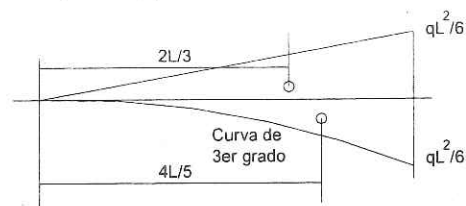


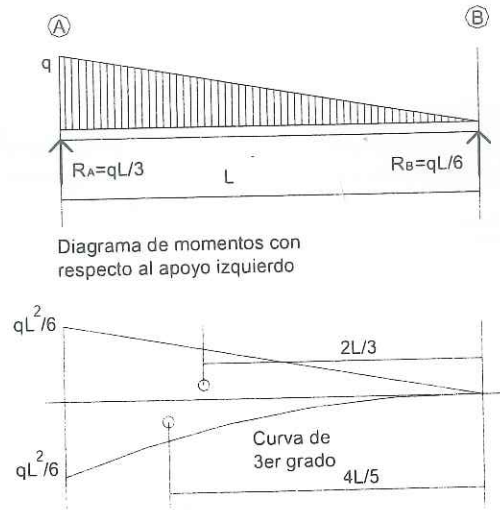
Diagrama de momentos con respecto al apoyo derecho



Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación de el diagrama de momentos

$$\frac{6A_1 a_1}{L_1} = \frac{8}{60} q L_1^3 = \frac{8}{60} (2.0)(5.0)^3 = 33.333$$

Siguiente claro, entre los apoyos "A" y "B"



Considerando solamente la carga aplicada en el claro, para la determinación de el diagrama de momentos

$$\frac{6A_2 b_2}{L_2} = \frac{8}{60} q L_2^3 = \frac{8}{60} (2.0)(5.0)^3 = 33.333$$

Sustituyendo valores en la ecuación de tres momentos:

$$M_1 L_1 + 2M_2(L_1 + L_2) + M_3 L_2 + \frac{6A_1 a_1}{L_1} + \frac{6A_2 b_2}{L_2} = 6EI \left(\frac{h_1}{L_1} + \frac{h_2}{L_2} \right)$$

$$(M_B)(5.0) + 2(M_A)(5.0 + 5.0) + (M_B)(5.0) + (33.333) + (33.333) = 0$$

$$20M_A + 10M_B = -66.666$$

Sistema de ecuaciones a resolver

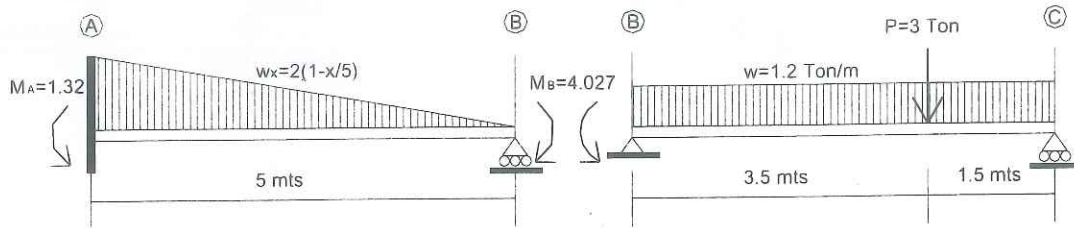
$$5M_A + 20M_B = -87.142$$

$$20M_A + 10M_B = -66.666$$

$$\Rightarrow M_A = -1.320 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

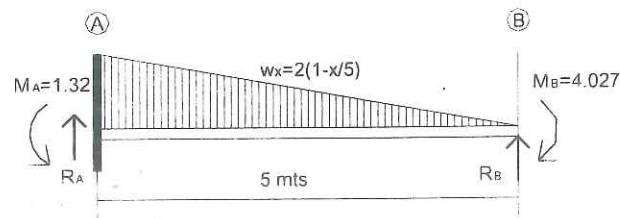
$$\Rightarrow M_B = -4.027 \text{ Ton} \cdot \text{m}$$

Los resultados negativos indican que la viga se flexiona hacia arriba por la acción de estos momentos. Un resultado positivo indicaría que los momentos actuando de manera independiente, ocasionarían que la viga se flexionara verticalmente hacia abajo



Determinación de las fuerzas de reacción en los apoyos de la viga
Aplicando las condiciones de equilibrio estático.

Primer claro, entre los apoyos "A" y "B"



$$\sum M_A = 0$$

$$R_B(L_1) - \left(\frac{1}{2}L_1q\right)\left(\frac{1}{3}L_1\right) + M_A - M_B = 0$$

$$R_B(5.0) - \frac{1}{2}(5.0)(2.0)\left(\frac{1}{3}5.0\right) + (1.32) - (4.027) = 0$$

$$5R_B - 8.333 + 1.32 - 4.027 = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 2.208 \text{ Ton}$$

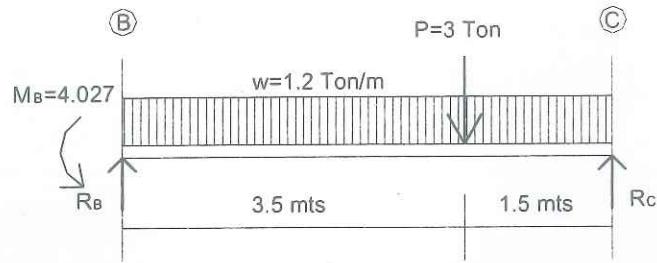
$$\sum F_y = 0$$

$$R_A + R_B - \frac{1}{2}L_1q = 0$$

$$R_A + (2.208) - \frac{1}{2}(5.0)(2.0) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 2.792 \text{ Ton}$$

Segundo claro, entre los apoyos "B" y "C"



$$\sum M_B = 0$$

$$R_C(L_2) - wL_2\left(\frac{1}{2}L_2\right) - Pa + M_B = 0$$

$$R_C(5.0) - (1.2)(5.0)\left(\frac{1}{2}5.0\right) - (3.0)(3.5) + (4.027) = 0$$

$$5R_C - 15.0 - 10.5 + 4.027 = 0$$

$$\Rightarrow R_C = 4.295 \text{ Ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_B + R_C - wL_2 - P = 0$$

$$R_B + (4.295) - (1.2)(5.0) - (3.0) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 4.705 \text{ Ton}$$

Finalmente, los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, quedan determinados de la siguiente manera:

