

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA



FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS



ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS, SIN VISCOSIDAD, LINEALIZADAS Y EN UNA DIMENSIÓN RESUELTAS USANDO UNA FÓRMULA RECURRENTE PARA ANALIZAR MODOS RESONANTES

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
OCEANÓLOGO
PRESENTA:

MARIANA SALINAS MATUS

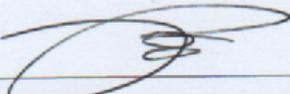
ENSENADA, B. C., MAYO DE 2018

"ECUACIONES DE AGUAS SOMERAS SIN VISCOSIDAD,
LINEALIZADAS Y EN UNA DIMENSIÓN RESUELTAS USANDO UNA
FÓRMULA RECURRENTE PARA ANALIZAR MODOS
RESONANTES"

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
OCEANÓLOGO

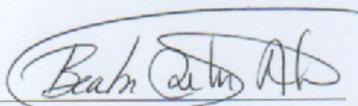
PRESENTA
MARIANA SALINAS MATUS

APROBADA POR



DR. RAFAEL HERNANDEZ WALLS

DIRECTOR DE TESIS



DRA. BEATRIZ MARTÍN ATIENZA

SINODAL



DRA. ANA LAURA FLORES MORALES

SINODAL

Resumen

Cuando se utilizan diferencias finitas en las ecuaciones de aguas someras, sin viscosidad, linealizadas, sin rotación, en una dimensión y con profundidad variable, se debe resolver un sistema tridiagonal. Se presenta un método numérico que resuelve las ecuaciones mediante una fórmula recurrente, el cual es eficiente computacionalmente hablando. La metodología se utiliza para encontrar modos resonantes, de velocidad y elevación, en un canal unidimensional con fondo variable. Para hacer la validación del método propuesto para este problema, se hace la comparación de la solución numérica con la solución analítica para dos canales (uno con batimetría plana y otro con batimetría parabólica). La solución analítica para el canal con batimetría plana se obtuvo mediante la solución a la ecuación de Helmholtz y la solución para el canal con batimetría parabólica se obtuvo mediante el método de series de potencia. Se encontró que las soluciones numéricas coinciden en gran medida con las soluciones analíticas. Para el canal con batimetría plana el error mínimo fue de 0% y el máximo fue de 1.2%. Para el canal con fondo parabólico el error mínimo fue de 0% y el máximo de 10%. Al aplicar el método propuesto a canales con otras batimetrías, cuya solución analítica sería difícil de hallar, se encontró que la variación en la batimetría del canal afecta a la cantidad y a la posición de los modos resonantes.

Palabras clave: Sistemas tridiagonales, fórmula recurrente, modos resonantes.

DEDICATORIA
A mi familia, Maru, Toño y Hugo.

Agradecimientos

- A mi mamá y mi papá por el apoyo y el amor que me siempre me han dado.
- A mi hermano, Hugo, por siempre estar cerca aunque estemos lejos.
- A mi mejor amiga y mi mayor apoyo en Ensenada, Carla, que durante todo el proceso de la universidad y de esta tesis me aconsejo y me dio muchos momentos de felicidad.
- Al Dr. Rafael Hernández Walls por toda su paciencia y todo el conocimiento que me aportó durante la carrera y en el proceso de esta tesis.
- A la Dra. Beatriz Martín Atienza por su paciencia y su gran disposición. Gracias por ser tan buena maestra y preocuparte por tus alumnos.
- A la Dra. Ana Laura Flores por las grandes aportaciones a esta tesis.
- A la Facultad de Ciencias Marinas y a todos los profesores por darme las herramientas para desempeñarme como Oceanóloga.
- A Catalina Cortés por el apoyo que me brindo en este trabajo con las ecuaciones presentadas.
- Al Club Científico Universitario por todas las aportaciones a mis proyectos, incluyendo esta tesis.
- A mi familia, en especial a Cris y a mi tía Estela, por siempre creer en mí, subirme los ánimos y quererme tanto. Yo igual los quiero mucho.

- A los miembros de mi familia autodenominada 'El clan', que desde lejos siempre recibí su cariño, apoyo y amistad.
- A mis amigas, Hiba, Carmen, Liz, Dayana, Carolina, Alessa, Adriana, Mar y Genesis por aconsejarme y compartir conmigo tantos momentos de felicidad.
- A mis amigos y roomies, Daniela, Quinn, Daniella y Vladi por su compañía, apoyo y consejos.
- A todas las personas que han sido parte de mi vida universitaria en especial a mis compañeros y amigos con los que pase grandes momentos. Siempre los tendré en mi corazón.

Índice general

Resumen	I
Índice de figuras	VI
1. Introducción	1
2. Antecedentes	5
3. Hipótesis	8
4. Objetivo	9
General	9
Particulares	9
5. Justificación	10
6. Metodología	11
Método numérico	11
Elevación	12
Velocidad	15
Soluciones analíticas	17
Canal 1: Batimetría plana	17
Canal 2: Batimetría parabólica	19
7. Resultados	29
Canal 1: Batimetría plana	29
Canal 2: Batimetría parabólica	32
Otras batimetrías	43
8. Discusión	46
9. Conclusiones	49
Bibliografía	50

Índice de figuras

1.	Malla del canal rectangular en 1-D.	12
2.	Diagrama de canal unidimensional con fondo plano.	17
3.	Diagrama de canal unidimensional con batimetría parabólica.	19
4.	(a) y (b) Comparación entre solución analítica con solución numérica y (c) diferencia en las posiciones de los modos resonantes calculados analíticamente y numéricamente para velocidad y elevación para un canal con fondo plano.	31
5.	Convergencia de los términos de la sumatoria del numerador de la expresión para encontrar el coeficiente A_1 . Las líneas de colores representan números de onda de las diferentes ondas incidentes en el canal.	33
6.	Convergencia de los términos de la sumatoria del denominador de la expresión para encontrar el coeficiente A_1 . Las líneas de colores representan el número de onda de las diferentes ondas incidentes en el canal. En la parte superior se graficó el comportamiento para los números de ondas mayores a 6, mientras que en la parte inferior se graficó para los números de ondas menores a 6.	34
7.	Comparación de las soluciones analíticas para la elevación. En la parte superior se presenta la cantidad de términos para calcular el coeficiente A_1 se fijó en 100, mientras que se varió la cantidad de coeficientes para el polinomio solución. En la gráfica inferior se fijó en 6000 la cantidad de términos para calcular el coeficiente A_1 y se varió la cantidad de coeficientes para el polinomio solución.	35
8.	Comparación de las soluciones analíticas para la elevación variando la cantidad de términos para las sumatorias para obtener el coeficiente A_1 del polinomio solución.	36
9.	(a) Comparación entre la solución analítica y la solución numérica de la elevación. (b) Diferencia de las soluciones de las posiciones de los modos resonantes, para un canal con fondo parabólico.	37

10.	Convergencia de los términos de la sumatoria del numerador de la expresión para encontrar el coeficiente A_1 de la velocidad. Las líneas de colores representan el número de onda. En la parte superior se presenta el comportamiento para los números de onda mayores a 6. La gráfica inferior muestra el comportamiento para los números de onda menores a 6. . .	38
11.	Convergencia de los términos de la sumatoria del denominador de la expresión para encontrar el coeficiente A_1 de la velocidad. Las líneas de colores representan el número de onda. En la gráfica de la parte superior se presenta el comportamiento de los términos de los números de ondas mayores a 4. En la parte inferior se puede ver el comportamiento de los términos de los números de onda menores a 4.	39
12.	Comparación de las soluciones analíticas para la velocidad. En la gráfica de la parte superior se presenta la cantidad de términos para la sumatorias para obtener A_1 se fijó en 100 y se varió la cantidad de coeficientes para el polinomio solución. En la parte inferior se fijó en 6000 la cantidad de términos para las sumatorias de A_1 y se varió la cantidad de coeficientes para el polinomio solución.	40
13.	Comparación de soluciones analíticas para la velocidad variando la cantidad de términos para las sumatorias de la expresión A_1	40
14.	(a) Comparación entre solución analítica y numérica de los modos resonantes de la velocidad. (b) Diferencia entre la solución analítica y la solución numérica de las posiciones de los modos resonantes para un canal con fondo parabólico.	42
15.	Diagramas de los canales con diferentes batimetrías utilizados para aplicar el método propuesto.	43
16.	Modos resonantes calculados con el método propuesto para tres canales con diferentes batimetrías: plana, parabólica y escalón	44
17.	Modos resonantes calculados con el método propuesto para tres canales con diferentes batimetrías: plana, parabólica completa y gaussiana.	45

18.	Error en el tamaño de la longitud de onda calculado numéricamente para un canal con fondo plano.	47
19.	Error en el tamaño de la longitud de onda calculado numéricamente para un canal con batimetría parabólica.	48

1. Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes se basan en la segunda ley de Newton y describen la dinámica de los fluidos. Estas ecuaciones son de naturaleza complicada y difíciles de resolver. Sin embargo, existen aproximaciones para casos particulares que facilitan su resolución. Las ecuaciones de aguas someras (SWE, por sus siglas en inglés) son un ejemplo de estas aproximaciones y se obtienen al integrar verticalmente las ecuaciones de continuidad y momentum (Haidvogel y Beckmann, 1999), si son escritas en forma de sus componentes:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \mu u &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu + g\frac{\partial \eta}{\partial y} + \mu v &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot V(H + \eta) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

donde u es la velocidad zonal, v es la velocidad meridional, t es el tiempo, f es el parámetro de Coriolis, g es la aceleración de la gravedad, μ es la viscosidad, H es la profundidad de referencia del fluido y η es la elevación que se produce con respecto a H (Alfaro *et al.*, 2007).

La solución de las ecuaciones anteriores nos permite encontrar dos importantes componentes, la elevación de la onda y su velocidad, ambas están expresadas en función del tiempo y el espacio (Crowhurst, 2013). Las ecuaciones de aguas someras describen la evolución de un flujo homogéneo e incompresible, se utilizan cuando la profundidad es menor a las dimensiones horizontales del problema y las velocidades verticales son pequeñas (Acheson, 1990).

El estudio de los fluidos en aguas someras es de gran importancia para la descripción de sistemas naturales (procesos atmosféricos, fluviales y

costeros, tsunamis, corrientes oceánicas entre otras) y para el diseño de puertos (Acheson, 1990).

Si bien las ecuaciones son aplicables para describir diferentes procesos, estas tienen su nivel de complejidad debido a los términos no lineales presentes (Periáñez, 2010). Al ser un sistema no lineal es difícil resolverlo analíticamente. Si la solución analítica es requerida, el sistema puede ser linealizado.

La linealización es un método que aproxima el resultado de una función en un punto cualquiera ($x = a$) a partir de la pendiente y del valor de la función al punto. Las ecuaciones de aguas someras sin viscosidad pueden ser linealizadas, con algunas suposiciones a algunas de las variables manejadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= fv - g\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -fu - g\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\partial(Hu)}{\partial x} - \frac{\partial(Hv)}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2}$$

Al calcular la elevación y la velocidad de la onda en un sistema, con las ecuaciones de aguas someras linealizadas, se pueden obtener los modos resonantes. Un modo resonante es una frecuencia que produce resonancia en un sistema. La resonancia es un fenómeno mecánico que se produce cuando un sistema es sometido a una fuerza oscilatoria con una frecuencia similar a la frecuencia natural del sistema, dando como resultado una amplificación en los movimientos mecánicos.

En especial, la resonancia se puede producir en puertos, Díaz-Hernández (2006) define la resonancia portuaria como un "fenómeno de oscilación de un cuerpo de agua semi-cerrada definido por un puerto, cuya característica fundamental es registrar niveles de agitación sobre-amplificados, de gran contenido energético, de ocurrencia súbita y generalmente de corta duración". La resonancia es un fenómeno que puede llegar a causar grandes problemas en los puertos. Estos problemas pueden ser, el daño a la estruc-

tura del puerto, problemas de colisiones entre embarcaciones y problemas de carga. Todo esto causa pérdidas materiales, y por lo tanto económicas, por esta razón en el diseño de puertos es importante buscar evitar la resonancia o minimizar los efectos.

La resonancia en puertos se puede producir debido a la presencia de ondas oceánicas. Este fenómeno ha sido estudiado en varios aspectos. Diferentes autores han trabajado con los efectos producidos por la geometría portuaria, por los canales de entrada, por el acoplamiento entre cuencas internas, por los rompeolas y por el ancho de la entrada al puerto. Otro aspecto que ha sido estudiado es la respuesta a la batimetría. Se ha encontrado que la batimetría es de importancia en el estudio de ondas incidentes en cuerpos de agua con fronteras semicerradas (Tinti, 1980).

Por tanto, es importante evaluar el efecto de dicho fenómeno en puertos, y una forma es utilizando como primera aproximación las ecuaciones de aguas someras, sin viscosidad, linealizadas (Tinti, 1980), y en casos simplificados a una dimensión, que pueden describir adecuadamente el problema (Delestre *et al.*, 2012). Cabe mencionar que estas ecuaciones ya han sido resueltas mediante métodos analíticos y métodos numéricos (Bresch, 2009; Vreudenhil, 1994).

Algunas de las ecuaciones que describen ciertos fenómenos oceanográficos, suelen estar definidas como ecuaciones diferenciales con ciertas condiciones de frontera; los métodos para resolver dichas ecuaciones pueden ser, ya sea numéricos o analíticos. Por ejemplo si se utilizan métodos analíticos es posible obtener una solución exacta en forma de una función que puede ser evaluada en cualquier punto del dominio, sin embargo, en muchas ocasiones no es posible, o es muy complicado resolverlo de esta forma, y es entonces cuando se utilizan los métodos numéricos, los cuales suelen ser una herramienta importante y complementaria para el estudio de la oceanografía actual, ya que permiten obtener una solución aproximada del sistema (Periáñez, 2010).

Para resolver numéricamente este tipo de ecuaciones, en este caso las ecuaciones de aguas someras, se hace una discretización y se transforman

a ecuaciones algebraicas, donde las magnitudes de interés son despejar. Existen diferentes técnicas para resolver dichas ecuaciones, tales como: elementos finitos, métodos espectrales y diferencias finitas (Periáñez, 2010). Es importante mencionar que se ha demostrado que los métodos que utilizan elementos finitos pueden ser utilizados para resolver las ecuaciones de aguas someras.(Crowhurst, 2013).

La elección de un método numérico para resolver sistemas, en este caso sistemas lineales, es importante para tener una buena eficiencia computacional. Por ejemplo cuando el sistema es lo suficientemente pequeño para la memoria de la computadora, se recomienda usar métodos directos para minimizar el error de redondeo. En cambio, para sistemas grandes, cuyos coeficientes son en su mayoría cero y que aparecen en patrones regulares, se recomienda usar métodos iterativos. Sistemas de este tipo se producen cuando se usan técnicas de diferencias finitas para resolver problemas de valor en la frontera, esto suele ser muy común cuando se resuelven ecuaciones diferenciales parciales (Burden, 1985).

En este trabajo se proponen metodologías numéricas para resolver las ecuaciones de aguas someras, y por ellos será importante validar que los resultados obtenidos describan correctamente el fenómeno. El primer paso para la validación es comprobar que los resultados converjan y sean estables (solo se valida el método, no que los resultados obtenidos describan correctamente el fenómeno); el segundo paso es la comparación con resultados de casos simplificados obtenidos analíticamente; por último es necesario hacer una comparación con datos experimentales (Delestre *et al.*, 2012). Esta tesis se centra en la comparación con soluciones analíticas para casos simplificados.

2. Antecedentes

Cuando a las ecuaciones de aguas someras, sin viscosidad, linealizadas, sin rotación y en una dimensión, se resuelven por diferencias finitas, se puede llegar como un sistema matricial tridiagonal. Un sistema tridiagonal es aquel en donde sólo en la diagonal principal y en las dos secundarias hay elementos diferentes a cero. Se han propuesto diferentes algoritmos para la solución de este tipo de sistemas, como los son el método de Thomas, el método de Hockney, el método de Stone y el propuesto por Gómez-García.

Usualmente, se utiliza el Método de Thomas para resolver sistemas tridiagonales. Este método se basa en la descomposición LU y consiste en pasos consecutivos: la eliminación de la diagonal inferior, mediante operaciones en la matriz de coeficientes, y una sustitución de atrás hacia delante. Estos dos pasos, que llevan a la solución del sistema, hacen que este método se considere ineficiente computacionalmente hablando. Para un sistema tridiagonal con N número de ecuaciones el tiempo de cómputo será del orden de N^6 (Thomas, 1949).

Para disminuir el tiempo de cómputo se han propuesto otros métodos. Hockney (1964) propuso un algoritmo de reducción cíclica, el cual consiste en disminuir a la mitad el número de ecuaciones al juntar tres ecuaciones consecutivas. Ya que al realizar este procedimiento el sistema mantiene su forma tridiagonal, este proceso puede ser repetido hasta que se pueda realizar una sustitución hacia atrás y así obtener la solución del sistema.

Otro método es el propuesto por Stone (1973), el cual al igual que el método de Thomas, se basa en la descomposición LU, sin embargo, para este método no es necesario resolver el sistema por partes consecutivas. Mediante una duplicación recursiva se generan fórmulas equivalentes que se pueden resolver de manera paralela. El tiempo de cómputo calculado con esta metodología disminuye y es del orden de $\log_2 N$, donde N es el

Para encontrar el valor de y_i , para toda i , se despeja la variable en la ecuación del primer nodo y se sustituye en la ecuación del siguiente nodo, si este procedimiento se continúa para varios nodos, se puede establecer una fórmula recurrente para el valor de la variable que está en función del valor de la variable en el siguiente nodo.

$$y_i = \frac{1}{i+1} (y_0 + iy_{i+1} - h^2 \sum_{j=1}^i R_j). \quad (5)$$

Cuando se llega hasta $n - 1$, donde la expresión es conocida en su totalidad por las condiciones de frontera, se puede resolver para los puntos anteriores obteniendo así la solución completa.

Al comparar los resultados obtenidos mediante el método numérico propuesto con la solución analítica, para diferentes casos de deflexión de vigas, se llegó a la conclusión de que el tiempo invertido para obtener la solución analítica es más complicado que el método que se propone y los resultados casi no difieren, lo que indica que el método resuelve correctamente las ecuaciones. Para esta tesis se usará este método, ANA, pero aplicándolo a las ecuaciones de aguas someras, sin viscosidad, linealizadas, sin rotación y en una dimensión.

3. Hipótesis

Implementar el método recurrente ANA a las ecuaciones de aguas someras sin viscosidad linealizadas, sin rotación y en una dimensión, para estudiar el fenómeno de resonancia en un canal, lo cual permitirá ver la importancia de tomar en cuenta la batimetría del canal.

4. Objetivo

General

Resolver las ecuaciones de aguas someras linealizadas, en una dimensión, con profundidad variable; implementando el método propuesto por Gómez-García, D. (1991) y hallar ondas que produzcan modos resonantes en canales unidimensionales con diferente batimetrías; así como validar el método.

Particulares

1. Obtener los modos resonantes de canales unidimensionales, con diferentes batimetrías propuestas, utilizando una fórmula recurrente.
2. Validar el método numérico propuesto, comparando la solución obtenida numéricamente de un canal con fondo plano con su respectiva solución analítica.
3. Obtener mediante el método de series de potencia la solución analítica de un canal con batimetría parabólica y comparar esta solución con su solución numérica.
4. Analizar el comportamiento de la posición de los modos resonantes al variar la batimetría.

5. Justificación

El método propuesto en este trabajo puede llegar a ser de gran utilidad ya que disminuye el tiempo de cómputo, además de que es sencillo de entender e implementar.

Una aplicación importante de las ecuaciones de aguas someras es el fenómeno de resonancia en puertos. Usualmente al abordar este problema, se suele simplificar considerando batimetría de fondo plano; sin embargo, se han hecho estudios que demuestran que la batimetría influye, en gran medida, en la frecuencia de los modos resonantes. El método propuesto pretende ser una opción para tratar este tema sin aumentar el tiempo de cómputo.

6. Metodología

Método numérico

Las ecuaciones de aguas someras linealizadas, sin viscosidad y sin rotación, reducen el problema a las siguientes ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -H \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}\tag{6}$$

donde $u = u(x, t)$ es el promedio de la velocidad del flujo en el canal, que varía con la posición y el tiempo; $\eta = \eta(x, t)$ es la elevación por encima del nivel medio del mar, que también depende de la posición y el tiempo; $H = H(x)$ es la topografía y g es la aceleración de la gravedad.

Resolviendo para eta , primero se deriva con respecto del tiempo la segunda ecuación del sistema (6), y se utiliza la primera ecuación (6) para reducir el número de variables, así:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x}.\tag{7}$$

Si se propone que la elevación está dada por una onda plana $\eta = \hat{\eta}(x)e^{i\omega t}$, donde $\hat{\eta}$ es la amplitud y ω es la frecuencia angular, entonces la ecuación (7) se transforma a una que solo depende de x :

$$-\omega^2 \hat{\eta} = gH \frac{\partial^2 \hat{\eta}}{\partial x^2} + g \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x}.\tag{8}$$

Para resolver la velocidad, la primera ecuación del sistema (6) se deriva con respecto del tiempo y se utiliza la segunda ecuación del sistema (6) para reducir el número de variables, obteniendo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \left(2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right). \quad (9)$$

De igual modo con la velocidad, se propone una solución dada por una onda plana $u = \hat{u}(x)e^{i\omega t}$, donde $\hat{u}(x)$ es la velocidad y ω es la frecuencia angular, la ecuación (9) se transforma a:

$$-\omega^2 \hat{u} = g \left(2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + H \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \hat{u} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right). \quad (10)$$

Para calcular tanto $\hat{\eta}(x)$ como $\hat{u}(x)$, se proponen dos sistemas tridiagonales, uno para la elevación con la ecuación (8) y otro para la velocidad con la ecuación (10). Para obtener la solución se discretiza el dominio (x) en intervalos de igual tamaño Δx , utilizando un canal de longitud unitaria, y así se crea una malla que representa el problema.

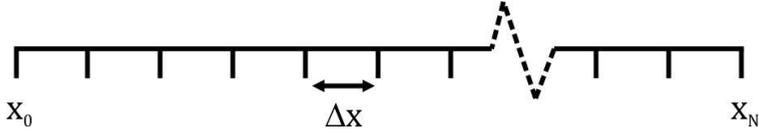


Figura 1: Malla del canal rectangular en 1-D.

La posición de cada punto o nodo está dado por:

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x; \\ i &= 0 : N \end{aligned}$$

Donde $i = 0 : N$ y Δx es el tamaño del intervalo:

$$\Delta x = \frac{1}{N}$$

Elevación

La elevación se resuelve al remplazar $\eta_i \equiv \eta(\hat{x}_i)$ en la ecuación diferencial (8) y al aplicar el método de diferencias finitas, dando:

$$\frac{H_i}{\Delta x^2} (\eta_{i+1} - 2\eta_i + \eta_{i-1}) + \frac{(H_{i+1} - H_i)(\eta_{i+1} - \eta_i)}{\Delta x^2} + \frac{\omega^2}{g} \eta_i = 0. \quad (11)$$

$$\eta_1 = \frac{-\gamma_1\eta_0 - \eta_2}{\phi_1}, \quad (16)$$

al hacer lo mismo para el segundo nodo del canal se obtiene el segundo valor de elevación que depende del valor en el nodo anterior η_1 y del valor en el nodo siguiente η_3 :

$$\eta_2 = \frac{-\gamma_2\eta_1 - \eta_3}{\phi_2}. \quad (17)$$

Al sustituir la ecuación (16) en la ecuación (17) se encuentra una nueva expresión para η_2 :

$$\eta_2 = \frac{\gamma_1\gamma_2\eta_0 - \phi_1\eta_3}{\phi_1\phi_2 - \gamma_2}, \quad (18)$$

el siguiente valor de elevación puede ser obtenido de la misma manera:

$$\eta_3 = \frac{-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\eta_0 - (\phi_1\phi_2 - \gamma_2)\eta_4}{\phi_3(\phi_2\phi_1 - \gamma_2) - \gamma_3\phi_1}. \quad (19)$$

Así se generaliza el cálculo de la solución del sistema y se encuentra la fórmula recurrente para elevación para $i = 1$ a $N - 2$, donde se definen los coeficientes $C_0 = 1, C_1 = \phi_1, C_i = \phi_i C_{i-1} - \gamma_i C_{i-2}$ para $i = 2$ a $N - 2$:

$$\eta_i = \frac{(-1)^i (\prod_{j=1}^i \gamma_j) \eta_0 - C_{i-1} \eta_{i+1}}{C_i}. \quad (20)$$

La fórmula (20) calcula la elevación en todo el canal exceptuando en el nodo anterior a la frontera, $i = N - 1$. Para encontrar este último valor, se sustituye $N - 2$ en la ecuación (20):

$$\eta_{N-2} = \frac{(-1)^{N-2} (\prod_{j=1}^{N-2} \gamma_j) \eta_0 - C_{N-3} \eta_{N-1}}{C_{N-2}}. \quad (21)$$

Al usar la condición de frontera derecha se obtiene:

$$\eta_{N-1} = \frac{-\gamma_{N-1} \eta_{N-2}}{\phi_{N-1} + 1}. \quad (22)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en la ecuación (22) se obtiene una expresión para η_{N-1} que sólo depende de η_0 :

$$\eta_{N-1} = \frac{(-1)^{N-1} (\prod_{j=1}^{N-1} \gamma_j) \eta_0}{C_{N-2}(\phi_{N-1} + 1) - C_{N-3} \gamma_{N-1}}. \quad (23)$$

Con la ecuación (23) se calcula el valor de la elevación en el último nodo. Con este valor se puede resolver la elevación para el resto del canal, resolviendo la ecuación (20) de $i = N - 2$ a $i = 1$ (de atrás para adelante).

Velocidad

La velocidad se resuelve al remplazar $u_i \equiv \hat{u}(x_i)$ en la ecuación diferencial (10) y al aplicar el método de diferencias finitas se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{H_i}{\Delta x^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + 2 \frac{(H_{i+1} - H_i)(u_{i+1} - u_i)}{\Delta x^2} \\ + \frac{u_i}{\Delta x^2} (H_{i+1} - 2H_i + H_{i-1}) + \frac{\omega^2}{g} u_i = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Reacomodando la ecuación(24) se obtiene un sistema tridiagonal:

$$u_{i+1} + \phi_i u_i + \gamma_i u_{i-1} = 0, \quad (25)$$

donde se define:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{-H_{i+1} - 2H_i + H_{i-1} + \frac{\omega^2 \Delta x^2}{g}}{-H_i + 2H_{i+1}} \\ \gamma_i &= \frac{H_i}{-H_i + 2H_{i+1}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Se utiliza la relación entre u_0 y η_0 como condición de frontera derecha y para la frontera izquierda se utiliza la condición cerrada de Dirichlet.

$$\begin{aligned} u_0 &= \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_0}} \\ u_N &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Con estas condiciones de frontera el sistema tridiagonal puede ser escrito:

Soluciones analíticas

Para hacer la validación del método numérico ANA aplicado a modos resonantes, obtenidos de las ecuaciones de aguas someras, se propone la comparación de la solución numérica con la analítica de dos canales con diferentes batimetrías. Las batimetrías que se proponen para este análisis fueron elegidas por ser sencillas y porque la solución analítica se puede calcular.

Canal 1: Batimetría plana

El canal con fondo plano se propone de la forma $H(x) = H_0$, donde H_0 es la profundidad máxima. En la siguiente figura se muestra el esquema del canal.

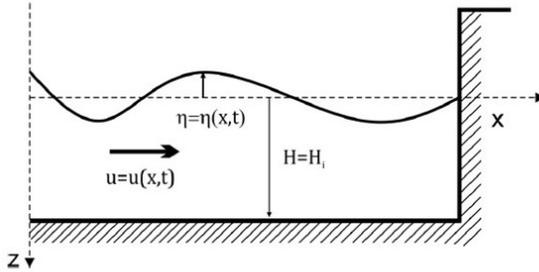


Figura 2: Diagrama de canal unidimensional con fondo plano.

El fondo constante reduce las ecuaciones (8) y (10) a la forma de una ecuación tipo Helmholtz,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{gH} u = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{gH} \eta = 0. \quad (32)$$

Si se define $k^2 = \frac{w^2}{gH}$, donde k es el numero de onda, la solución general para la elevación y la velocidad esta dada por:

$$\begin{aligned}\eta(x) &= C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) \\ u(x) &= C_3 \cos(kx) + C_4 \sin(kx).\end{aligned}\tag{33}$$

Elevación

La solución particular de la elevación se calcula al encontrar los valores de las constantes C_1 y C_2 de la ecuación (33), para esto se utilizan las condiciones de frontera (14).

$$\eta(0) = C_1 = \eta_0.\tag{34}$$

Con la segunda condición de (14) y C_1 se puede calcular C_2 :

$$\begin{aligned}\eta'(1) &= -\eta_0 \sin(k) + C_2 \cos(k) = 0 \\ C_2 &= \eta_0 \frac{\sin(k)}{\cos(k)} = \eta_0 \tan(k).\end{aligned}\tag{35}$$

Con los valores de C_1 y C_2 se obtiene la solución particular del problema:

$$\eta(x) = \eta_0(\cos(kx) + \tan(k)\sin(kx)).\tag{36}$$

Velocidad

La solución particular de la velocidad se calcula al encontrar los valores de las constantes C_3 y C_4 de la ecuación (33), para esto se utilizan las condiciones de frontera (27):

$$u(0) = C_3 = u_0.\tag{37}$$

Con la segunda condición de (27) y C_3 se puede calcular C_4 :

$$\begin{aligned}u(1) &= u_0 \cos(k) + C_4 \sin(k) = 0 \\ C_4 &= -u_0 \frac{\cos(k)}{\sin(k)} = -u_0 \cot(k)\end{aligned}\tag{38}$$

Con los valores de C_3 y C_4 se obtiene la solución particular del problema:

$$u(x) = u_o(\cos(kx) - \cot(k)\sin(kx)). \quad (39)$$

Canal 2: Batimetría parabólica

La forma parabólica, con dominio en $(0, 1)$, se propone para dar una forma similar a una pendiente constante. En la figura 3 se muestra el esquema del problema que se plantea. La batimetría del canal es de la forma,

$$H(x) = H_0 - H_0x^2, \quad (40)$$

donde H_0 es la profundidad máxima en el canal.

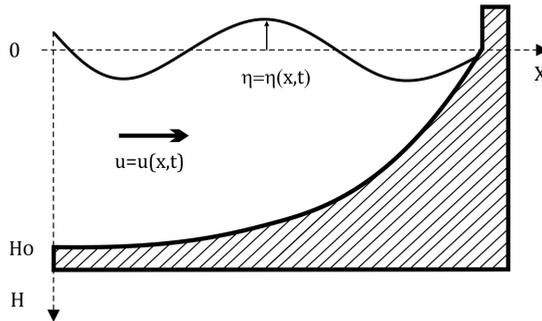


Figura 3: Diagrama de canal unidimensional con batimetría parabólica.

Elevación

Escribiendo la ecuación (8) donde $\hat{\eta} \equiv \eta$ se obtiene

$$H \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\omega^2}{g} \eta = 0, \quad (41)$$

donde H es el perfil batimétrico y depende de x . Al sustituir el perfil batimétrico propuesto (40) en la ecuación (41),

$$(H_o - H_o x^2) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2H_o x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\omega^2}{g} \eta = 0. \quad (42)$$

El método de series de potencias propone una solución en forma de un polinomio dado por,

$$\eta(x) = \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q, \quad (43)$$

donde los elementos A_q son los coeficientes no conocidos del polinomio solución. Al sustituir el polinomio en la ecuación (42), se obtiene lo siguiente,

$$(H_o - H_o x^2) \frac{\partial^2 \left(\sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q \right)}{\partial x^2} - 2H_o x \frac{\partial \left(\sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q \right)}{\partial x} + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q = 0. \quad (44)$$

Al hacer las derivadas de la expresión anterior se tiene,

$$(H_o - H_o x^2) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) A_q x^{q-2} - 2H_o x \sum_{q=0}^{\infty} q A_q x^{q-1} + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q = 0, \quad (45)$$

al desarrollar se llega a,

$$\begin{aligned} H_o \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) A_q x^{q-2} - H_o \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) A_q x^q \\ - 2H_o \sum_{q=0}^{\infty} q A_q x^q + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Al modificar los subíndices del primer término se tiene una expresión

donde todos los términos están multiplicados por x^q ,

$$H_o \sum_{q=-2}^{\infty} (q+2)(q+1)A_{q+2}x^q - H_o \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)A_qx^q - 2H_o \sum_{q=0}^{\infty} qA_qx^q + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_qx^q = 0. \quad (47)$$

En la ecuación anterior, el contador del primer término comienza en -2 , mientras que los otros términos comienzan en 0 . Por esto se tiene que avanzar dos unidades el primer término, pero en este caso, cuando q toma los valores de -2 y -1 los términos son cero,

$$H_o \sum_{q=0}^{\infty} (q+1)(q+2)A_{q+2}x^q - H_o \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)A_qx^q - 2H_o \sum_{q=0}^{\infty} qA_qx^q + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_qx^q = 0. \quad (48)$$

De donde se tiene que cumplir lo siguiente,

$$H_o(q+1)(q+2)A_{q+2} + \left(-H_oq(q-1) - 2H_oq + \frac{\omega^2}{g} \right) A_q = 0, \quad (49)$$

al despejar A_{q+2} se obtiene,

$$A_{q+2} = \frac{\left(H_oq(q-1) + 2H_oq - \frac{\omega^2}{g} \right)}{H_o(q+1)(q+2)} A_q, \quad (50)$$

y al definir:

$$W(q) = \frac{\left((q^2 - q) + 2q - \frac{\omega^2}{C_{max}^2} \right)}{(q+1)(q+2)}, \quad (51)$$

donde $C_{max}^2 = gH_o$, y $k = \omega/C$, entonces,

$$W(q) = \frac{q^2 + q - k^2}{q^2 + 3q + 2}. \quad (52)$$

Si la ecuación (52) se sustituye en la ecuación (50) se obtiene la expresión que calcula los coeficientes del polinomio,

$$A_{q+2} = W(q)A_q. \quad (53)$$

Con la expresión anterior sólo basta conocer los valores de A_o y de A_1 para encontrar los demás términos. El valor de A_o se encuentra al colocar la condición de frontera izquierda, mientras que el valor de A_1 se encuentra con la condición de frontera derecha.

Condición de frontera del lado izquierdo

La frontera del lado izquierdo está definida como una frontera abierta $\eta(0) = \eta_o$. Al evaluar η en cero se obtiene que $A_o = \eta_o$. Con el coeficiente A_o y la expresión (53) se pueden obtener los coeficientes con subíndices pares,

$$\begin{aligned} A_2 &= W(0)A_0 \\ A_4 &= W(2)A_2 = W(2)W(0)A_0 \\ A_6 &= W(4)A_4 = W(4)W(2)A_2 = W(4)W(2)W(0)A_0 \\ &\vdots \\ A_{2T+2} &= W(2T)A_{2T} = W(2T) \cdots W(4)W(2)W(0)A_0. \end{aligned} \quad (54)$$

Si se define lo siguiente para el caso de los coeficientes con subíndices pares,

$$\prod_{r=0}^T W(2r) = W(0)W(2)W(4)\dots W(2T), \quad (55)$$

se puede reescribir la ecuación (53). Con el valor conocido de A_0 se calculan los coeficientes con subíndices pares,

$$A_{2q} = \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r) \right) A_o. \quad (56)$$

Condición de frontera del lado derecho

De la misma manera que con los coeficientes con subíndices pares, se encuentran los coeficientes impares,

$$A_{2q+1} = \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r+1) \right) A_1, \quad (57)$$

donde sólo es necesario conocer el coeficiente A_1 . Para calcular este coeficiente se utiliza la segunda condición de frontera. La frontera derecha está definida por una frontera cerrada,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad x = 1. \quad (58)$$

De lo anterior se cumple lo siguiente,

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \sum_{q=1}^{\infty} q A_q = 0. \quad (59)$$

La sumatoria se separa en los términos de coeficientes con subíndices pares e impares,

$$\overbrace{\sum_{q=1}^{\infty} (2q-1) A_{2q-1}}^{\text{Impares}} + \underbrace{\sum_{q=1}^{\infty} 2q A_{2q}}_{\text{Pares}} = 0. \quad (60)$$

Con las ecuaciones (56) y (57) también se puede escribir como,

$$A_1 + \sum_{q=1}^{\infty} (2q+1) \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r+1) \right) A_1 = - \sum_{q=1}^{\infty} 2q \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r) \right) A_o. \quad (61)$$

Despejando A_1 tenemos,

$$A_1 = \frac{- \sum_{q=1}^{\infty} 2q \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r) \right)}{1 + \sum_{q=1}^{\infty} (2q+1) \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r+1) \right)} A_o. \quad (62)$$

Con el valor conocido de A_1 y la ecuación (57) se pueden calcular los coeficientes impares. Así mismo, con el valor de A_0 y la ecuación (56) se pueden calcular los coeficientes pares. Al tener los coeficientes estos se sustituyen en el polinomio solución (43) obteniendo el valor de la elevación.

Velocidad

Escribiendo la ecuación (10) donde $\hat{u} \equiv u$ se obtiene,

$$H \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{g} u = 0, \quad (63)$$

donde H es el perfil batimétrico y depende de x . Al sustituir el perfil batimétrico propuesto (40) en la ecuación (63),

$$(H_o - H_o x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4H_o x \frac{\partial u}{\partial x} - 2H_o u + \frac{\omega^2}{g} u = 0. \quad (64)$$

Para la velocidad, el método de series de potencias propone una solución en forma de polinomio dado por,

$$u(x) = \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q, \quad (65)$$

donde los elementos A_q son los coeficientes no conocidos del polinomio solución. Al sustituir el polinomio en la ecuación (64) se obtiene:

$$\begin{aligned} (H_o - H_o x^2) \frac{\partial^2 (\sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q)}{\partial x^2} - 4H_o x \frac{\partial (\sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q)}{\partial x} \\ - 2H_o \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q = 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Al hacer las derivadas de la expresión anterior se tiene,

$$\begin{aligned} (H_o - H_o x^2) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) A_q x^{q-2} - 4H_o x \sum_{q=0}^{\infty} q A_q x^{q-1} \\ - 2H_o \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q = 0, \end{aligned} \quad (67)$$

que se puede desarrollar a la expresión,

$$\begin{aligned}
H_o \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)A_q x^{q-2} - H_o \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)A_q x^q - 4H_o \sum_{q=0}^{\infty} qA_q x^q \\
- 2H_o \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q = 0. \quad (68)
\end{aligned}$$

Al modificar los subíndices del primer término se llega a una expresión donde todos los términos están multiplicados por x^q ,

$$\begin{aligned}
H_o \sum_{q=-2}^{\infty} (q+2)(q+1)A_{q+2} x^q - H_o \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)A_q x^q - 4H_o \sum_{q=0}^{\infty} qA_q x^q \\
- 2H_o \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q = 0. \quad (69)
\end{aligned}$$

En la ecuación anterior, el contador del primer término comienza en -2 , mientras que los otros términos comienzan en 0 . Por esto se tiene que avanzar dos unidades el primer término, pero en este caso, cuando q toma los valores de -2 y -1 los términos son cero,

$$\begin{aligned}
H_o \sum_{q=0}^{\infty} (q+1)(q+2)A_{q+2} x^q - H_o \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)A_q x^q - 4H_o \sum_{q=0}^{\infty} qA_q x^q \\
- 2H_o \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q + \frac{\omega^2}{g} \sum_{q=0}^{\infty} A_q x^q = 0. \quad (70)
\end{aligned}$$

De la ecuación anterior se cumple lo siguiente,

$$H_o(q+1)(q+2)A_{q+2} + \left(-H_o q(q-1) - 4H_o q - 2H_o + \frac{\omega^2}{g} \right) A_q = 0. \quad (71)$$

Al despejar A_{q+2} se obtiene,

$$A_{q+2} = \frac{\left(H_o q(q-1) + 4H_o q + 2H_o - \frac{\omega^2}{g} \right)}{H_o(q+1)(q+2)} A_q. \quad (72)$$

Si se define,

$$W(q) = \frac{\left((q^2 - q) + 4q + 2 - \frac{\omega^2}{C_{max}^2}\right)}{(q + 1)(q + 2)}, \quad (73)$$

donde $C_{max}^2 = gH_o$, y $k = \omega/C$, entonces,

$$W(q) = \frac{q^2 + 3q + 2 - k^2}{q^2 + 3q + 2}. \quad (74)$$

Si la ecuación (74) se sustituye en la ecuación (72) queda la expresión con la que se calculan los coeficientes del polinomio solución,

$$A_{q+2} = W(q)A_q. \quad (75)$$

Con la expresión anterior solo basta conocer los valores de A_0 y de A_1 para encontrar los demás coeficientes. De la misma manera que en el procedimiento para la elevación, el valor de A_0 se encuentra al colocar la condición de frontera izquierda, mientras que el valor de A_1 se encuentra con la condición de frontera derecha.

Condición de frontera del lado izquierdo

La frontera izquierda es abierta y está definida por $u(0) = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_o}}$. Al evaluar u en cero se obtiene que $A_o = \eta_0 \sqrt{\frac{g}{H_o}}$. Con el coeficiente A_o y la ecuación (75) se pueden obtener los coeficientes pares,

$$\begin{aligned} A_2 &= W(0)A_0 \\ A_4 &= W(2)A_2 = W(2)W(0)A_0 \\ A_6 &= W(4)A_4 = W(4)W(2)A_2 = W(4)W(2)W(0)A_0 \\ &\vdots \\ A_{2T+2} &= W(2T)A_{2T} = W(2T) \cdots W(4)W(2)W(0)A_0. \end{aligned} \quad (76)$$

Al definir lo siguiente para los coeficientes con subíndices pares,

$$\prod_{r=0}^T W(2r) = W(0)W(2)W(4)\dots W(2T), \quad (77)$$

se puede reescribir la ecuación (75) para los números pares, donde con el valor conocido de A_0 se pueden calcular los coeficientes pares.

$$A_{2q} = \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r) \right) A_0. \quad (78)$$

Condición de frontera del lado derecho

De la misma manera que con los coeficientes con subíndices pares, se encuentra la relación para los coeficientes con subíndices impares,

$$A_{2q+1} = \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r+1) \right) A_1. \quad (79)$$

La frontera derecha se encuentra cerrada y está definida por $u(1) = 0$ con lo que se cumple lo siguiente,

$$u = \sum_{q=0}^{\infty} A_q = 0. \quad (80)$$

La sumatoria se puede separar en los coeficientes con subíndices pares e impares,

$$\overbrace{\sum_{q=0}^{\infty} A_{2q+1}}^{\text{Impares}} + \underbrace{\sum_{q=0}^{\infty} A_{2q}}_{\text{Pares}} = 0. \quad (81)$$

Al sustituir las ecuaciones (78) y (79) en la ecuación anterior se obtiene,

$$A_1 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r+1) \right) A_1 = - \left(A_0 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r) A_0 \right) \right). \quad (82)$$

Para obtener una expresión para el valor desconocido de A_1 , se factoriza A_1 y A_0 ,

$$\left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r+1)\right)\right) A_1 = - \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r)\right)\right) A_0. \quad (83)$$

Despejando A_1 tenemos,

$$A_1 = \frac{- \left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r)\right)\right)}{1 + \sum_{q=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{q-1} W(2r+1)\right)} A_0. \quad (84)$$

Con el valor conocido de A_1 y la ecuación (79) se pueden calcular los coeficientes con subíndices impares. Así mismo, con el valor de A_0 y la ecuación (78) se pueden calcular los coeficientes con subíndices pares. Los coeficientes se sustituyen en el polinomio solución (65) obteniendo el valor de la elevación.

Resultados

Se presenta la comparación de la solución analítica con la solución numérica de los modos resonantes de un canal con fondo plano. Se hace esta misma comparación pero para un canal con batimetría parabólica, agregando un análisis para la determinación de la cantidad de términos y coeficientes para la obtención de la solución analítica. Además se presentan las soluciones numéricas, calculadas con el algoritmo propuesto, de canales con batimetrías más complejas. Para cada caso se calculan los modos resonantes de elevación y velocidad.

Canal 1: Batimetría plana

Al utilizar un canal con batimetría plana el algoritmo propuesto se simplifica en gran medida, ya que la profundidad H se vuelve constante; esto produce un cambio en las ecuaciones [26] para la velocidad y en las ecuaciones [13] para la elevación, dando para los dos casos,

$$\phi = -2 + \frac{\omega^2 \Delta x^2}{gH}. \quad \gamma = 1 \quad (85)$$

Los coeficientes C_i para los dos casos también se modifican a $C_1 = 1$, $C_2 = \phi$ y $C_i = \phi C_{i-1} - C_{i-2}$.

Para la velocidad la ecuación [28] se simplifica a,

$$u_i = \frac{(-1)^i u_0 - C_{i-1} u_{i+1}}{C_i}. \quad (86)$$

Con el mismo procedimiento que el presentado en la sección de metodología, la ecuación anterior se puede aplicar para la velocidad en el nodo

anterior a la frontera,

$$u_{N-1} = \frac{(-1)^{N-1}u_0}{\phi C_{N-2} - C_{N-3}}.$$

Para la elevación la ecuación [20] se simplifica a,

$$\eta_i = \frac{(-1)^i \eta_0 - C_{i-1} \eta_{i+1}}{C_i}.$$

Al igual que con la velocidad, la ecuación anterior se puede aplicar para la elevación en el nodo anterior a la frontera,

$$\eta_{N-1} = \frac{(-1)^{N-1} \eta_0}{(\phi + 1) C_{N-2} - C_{N-3}}$$

El algoritmo simplificado y la solución de la ecuación de Helmholtz facilita la comparación de las soluciones numéricas con las soluciones analíticas para el canal con batimetría plana.

En la figura 4 (a) y (b) se muestra la solución numérica obtenida mediante el algoritmo y la solución analítica a la ecuación de Helmholtz. Es importante recalcar que la solución numérica se obtuvo con el algoritmo simplificado y con el no simplificado, obteniendo el mismo resultado. Se observa que tanto para la elevación como para la velocidad las soluciones analíticas y numéricas coinciden en gran medida. Para números de onda menores a 20, la solución numérica es un buen acercamiento a la solución analítica. Sin embargo, para números de onda mayores a 20, los modos resonantes calculados numéricamente se encuentran un poco desplazados hacia la derecha respecto a la solución analítica para la elevación y desplazados hacia la izquierda para la velocidad.

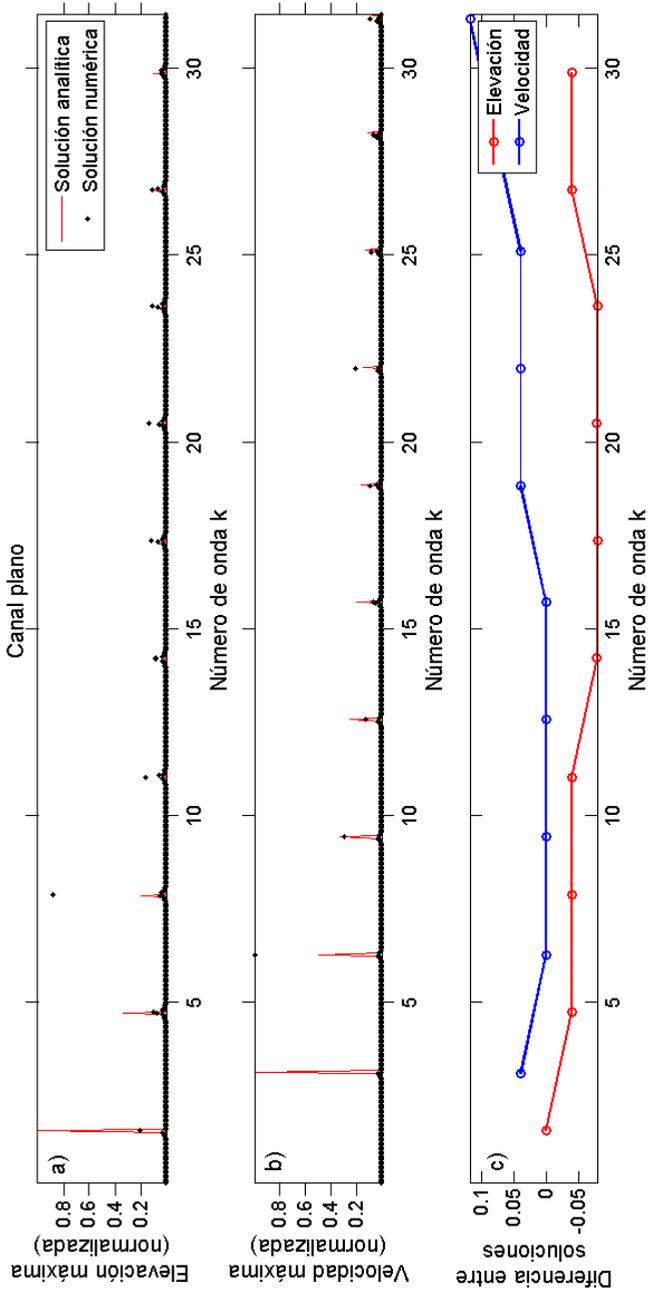


Figura 4: (a) y (b) Comparación entre solución analítica con solución numérica y (c) diferencia en las posiciones de los modos resonantes calculados analíticamente y numéricamente para velocidad y elevación para un canal con fondo plano.

En la figura 4 (c) se muestra la diferencia entre las posiciones de los modos resonantes, de la velocidad y la elevación, calculados analíticamente y numéricamente. Para la velocidad la diferencia es positiva, no mayor de 0.2 y en algunos casos cero. Esto representa que la solución numérica está desplazada a la izquierda de la solución analítica. Cuando la solución numérica es cero, quiere decir que es igual a la analítica, por lo que el modo resonante se calculó en la misma posición. Para la elevación la diferencia es negativa, no menor a -0.06 y en algunos casos cero. Esto quiere decir que los modos resonantes obtenidos numéricamente se encuentran desplazados a la derecha de la solución analítica. En el caso del primer modo resonante, donde la diferencia es cero, la solución numérica fue la misma que la solución analítica.

Canal 2: Batimetría parabólica

Las soluciones analíticas presentadas, para la elevación y la velocidad del canal con batimetría parabólica, están en forma de series de potencia infinitas. Por lo tanto, es necesario primero hacer un análisis del comportamiento de los coeficientes del polinomio solución y de los términos de las sumatorias para obtener los coeficientes A_1 , lo cual ayudará a determinar la cantidad de términos y coeficientes para optimizar la solución. Esto es importante por el tiempo de cómputo que se emplea.

En este caso, cuando los valores de los coeficientes del polinomio y de los términos de dichas sumatorias converjan a cero, estos ya no aportaran más información a la solución aunque se le agregue más términos.

Elevación

La expresión obtenida para calcular el coeficiente A_1 de la elevación es el cociente de dos sumatorias. Por lo que se hace un análisis para decidir la cantidad de términos que se utilizarán en las sumatorias para obtener el coeficiente. En la figura 5 se muestra el comportamiento de los términos de la sumatoria del numerador de la ecuación (62), para todos los números de

onda que se utilizan. Se observa que al término 400 de la sumatoria este ya es muy cercano a cero por lo que no es necesario aumentar la cantidad de términos en esta sumatoria.

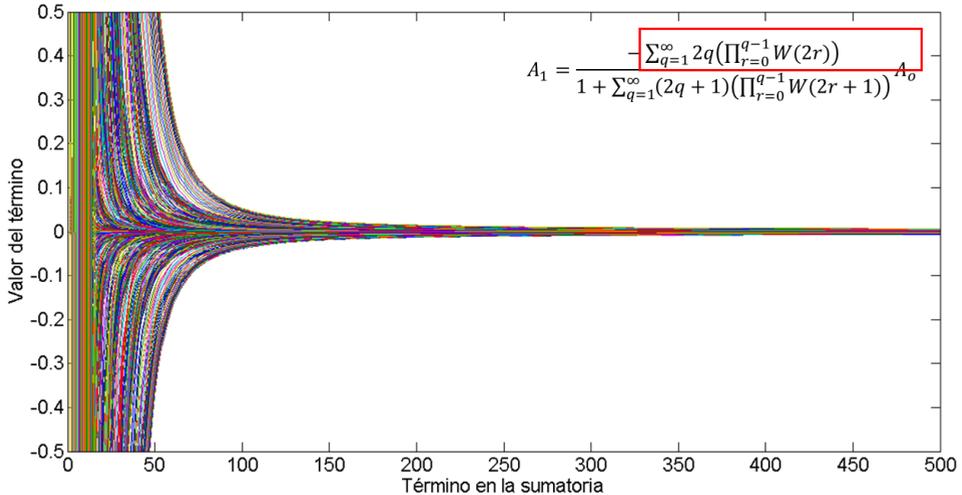


Figura 5: Convergencia de los términos de la sumatoria del numerador de la expresión para encontrar el coeficiente A_1 . Las líneas de colores representan números de onda de las diferentes ondas incidentes en el canal.

Por el otro lado, el comportamiento de los términos de la sumatoria del denominador de la ecuación (62) se muestran en la figura 6. Se observa que para números de onda menores a 6, los términos convergen hacia cero muy lentamente, de manera que para algunos números de onda parece constante en valores diferentes a cero. Para los números de onda mayores de 6 la convergencia hacia cero es más evidente, sin embargo, esta convergencia es lenta y por lo tanto la cantidad de términos tiene que ser de al menos 2500.

En la figura 7 se muestran las soluciones analíticas variando la cantidad de términos en la sumatoria para calcular el coeficiente A_1 y la cantidad de coeficientes para el polinomio solución. Se observa que la cantidad de coeficientes del polinomio no varía la solución, sin embargo, la cantidad

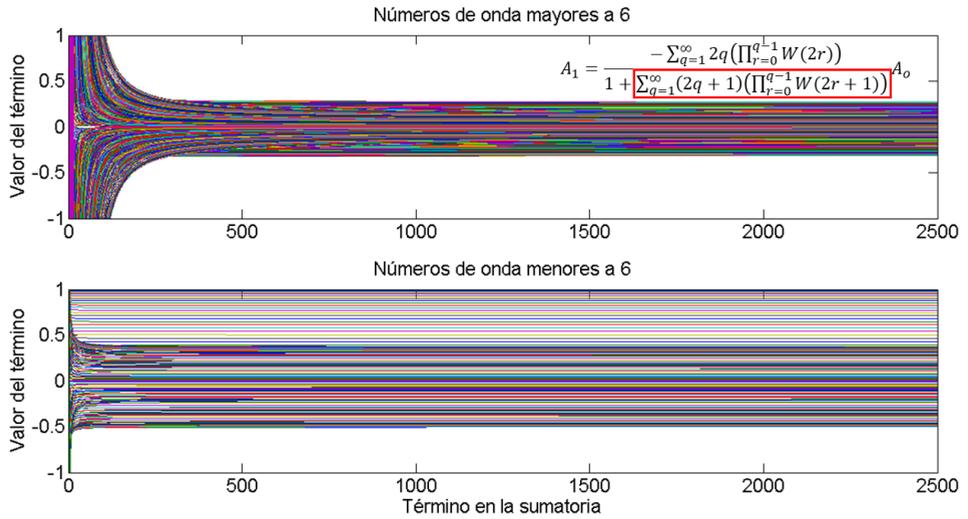


Figura 6: Convergencia de los términos de la sumatoria del denominador de la expresión para encontrar el coeficiente A_1 . Las líneas de colores representan el número de onda de las diferentes ondas incidentes en el canal. En la parte superior se graficó el comportamiento para los números de ondas mayores a 6, mientras que en la parte inferior se graficó para los números de ondas menores a 6.

de términos en las sumatorias sí varía la solución. Por esta razón es más importante determinar correctamente la cantidad de términos para las sumatorias.

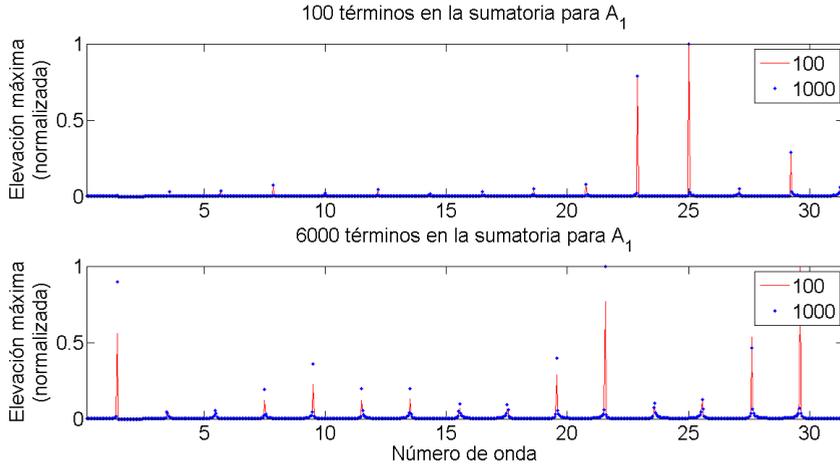


Figura 7: Comparación de las soluciones analíticas para la elevación. En la parte superior se presenta la cantidad de términos para calcular el coeficiente A_1 se fijó en 100, mientras que se varió la cantidad de coeficientes para el polinomio solución. En la gráfica inferior se fijó en 6000 la cantidad de términos para calcular el coeficiente A_1 y se varió la cantidad de coeficientes para el polinomio solución.

La figura 8 muestra las soluciones al variar la cantidad de términos en las sumatorias para el coeficiente A_1 y dejar fija la cantidad de coeficientes del polinomio. Se observa que las soluciones no varían si el número de onda es menor a 6, esto puede estar relacionado con la lenta convergencia a cero que se muestra en la figura 6. Por el otro lado, para números de onda mayores a 6 la soluciones varían. La variación que se observa entre las soluciones con 100, 1000 y 6000 términos es muy evidente, sin embargo, no se observa una variación entre las soluciones con 6000 y 10000 términos. Por lo que la aproximación con 6000 términos es adecuada para no aumentar el tiempo de cómputo.

Al comparar la solución analítica con la solución numérica de la eleva-

ción (fig. 9 (a)), se observa que las soluciones son parecidas en la posición de los modos resonantes. Para números de onda menores a 6 la solución numérica discrepa de la solución analítica, además hay un modo resonante extra que la solución numérica no calcula. Sin embargo, para números de onda mayores a 6 las soluciones son muy similares.

En la figura 9 (b) se muestra la diferencia de la posición de los modos resonantes calculados numéricamente y los calculados analíticamente. Se observa que los modos resonantes calculados numéricamente se encuentran desplazados hacia la izquierda (diferencia positiva) con respecto a la solución analítica. Sin embargo, la diferencia máxima es de 0.35 de número de onda y disminuye para los otros modos resonantes.

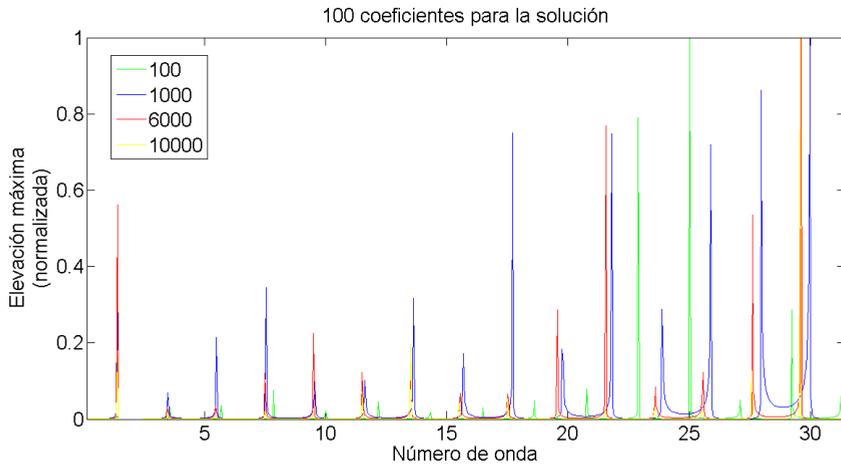


Figura 8: Comparación de las soluciones analíticas para la elevación variando la cantidad de términos para las sumatorias para obtener el coeficiente A_1 del polinomio solución.

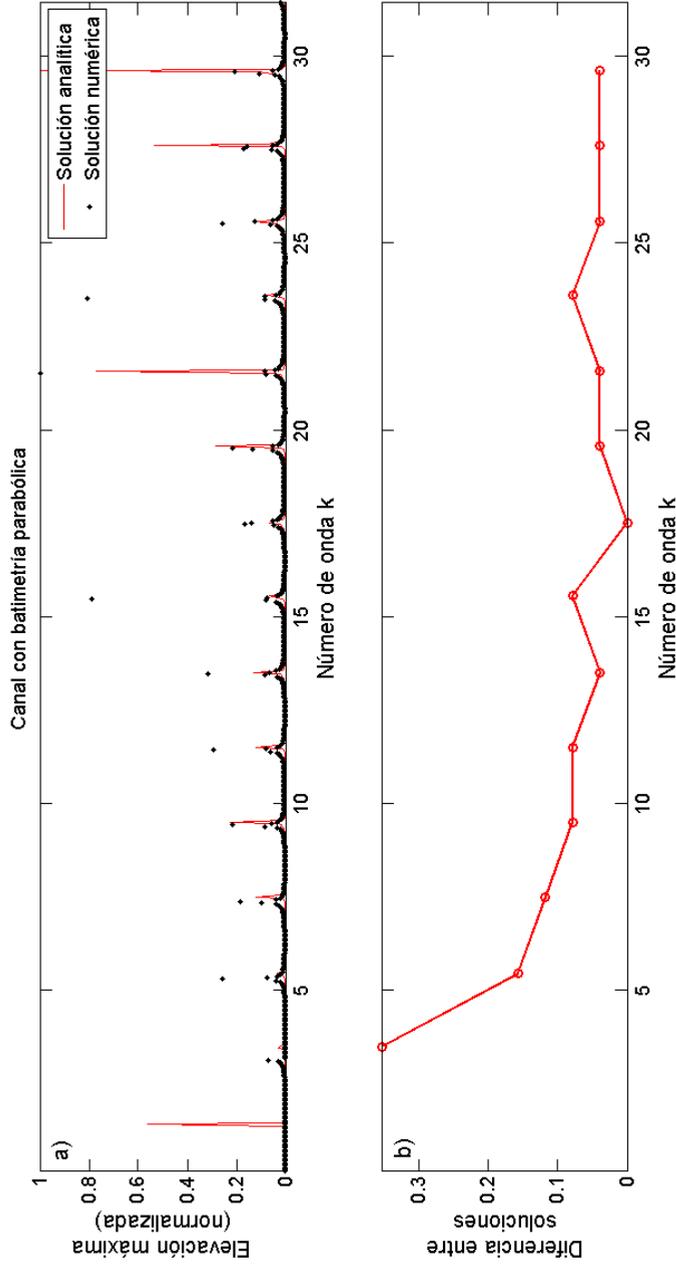


Figura 9: (a) Comparación entre la solución analítica y la solución numérica de la elevación. (b) Diferencia de las soluciones de los modos resonantes, para un canal con fondo parabólico.

Velocidad

La expresión obtenida para calcular el coeficiente A_1 de la velocidad es el cociente de dos sumatorias. Al igual que para la elevación, se hace un análisis para decidir la cantidad de términos en las sumatorias.

En la figura 10 se muestra el comportamiento de los términos de la sumatoria del numerador de la ecuación (84). Se observa que, para algunos números de onda menores a 6, los términos convergen lentamente a cero, mientras que para los números de onda mayores a 6 la convergencia es más rápida y evidente.

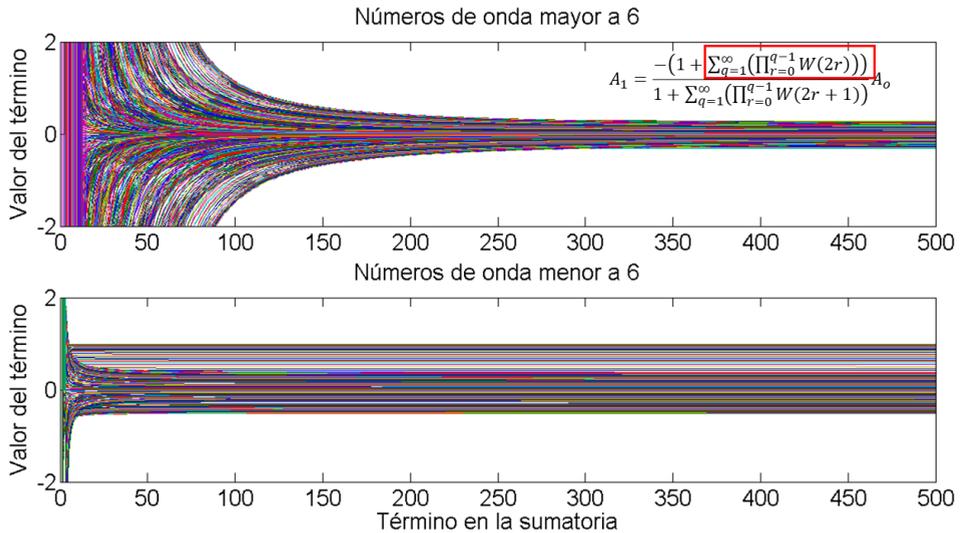


Figura 10: Convergencia de los términos de la sumatoria del numerador de la expresión para encontrar el coeficiente A_1 de la velocidad. Las líneas de colores representan el número de onda. En la parte superior se presenta el comportamiento para los números de onda mayores a 6. La gráfica inferior muestra el comportamiento para los números de onda menores a 6.

En la figura 11 se muestra el comportamiento de los términos de la sumatoria del denominador de la ecuación (84). Se observa que para números de onda mayores a 4 los términos de la sumatoria convergen a cero rápidamente. Para algunos números de onda menores a 4 la convergencia

a cero es más lenta, de manera que parece que la convergencia se produce a valores diferentes a cero.

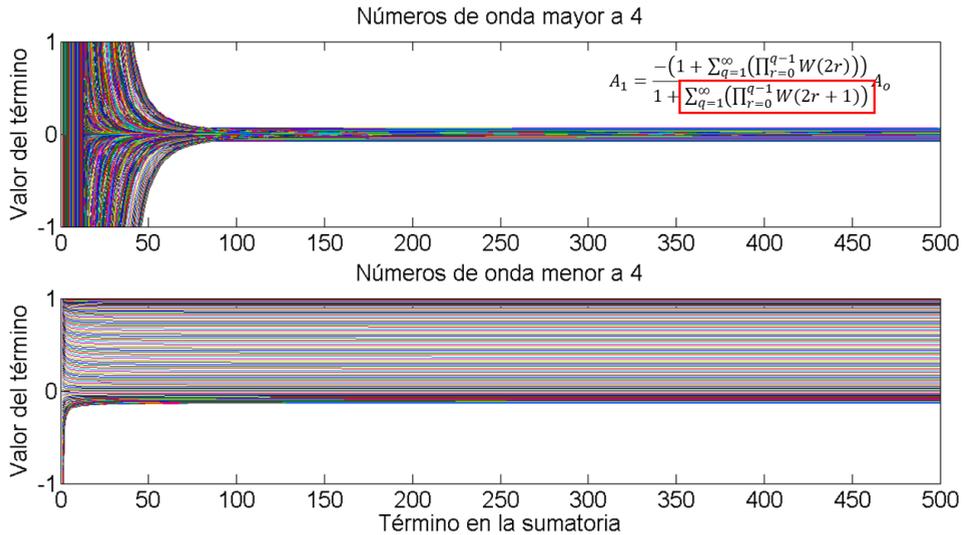


Figura 11: Convergencia de los términos de la sumatoria del denominador de la expresión para encontrar el coeficiente A_1 de la velocidad. Las líneas de colores representan el número de onda. En la gráfica de la parte superior se presenta el comportamiento de los términos de los números de ondas mayores a 4. En la parte inferior se puede ver el comportamiento de los términos de los números de onda menores a 4.

En la figura 12 se muestran las soluciones analíticas variando la cantidad de términos en la sumatoria para calcular el coeficiente A_1 y la cantidad de coeficientes para el polinomio solución. Se observa que las soluciones con 100 y 1000 coeficientes son iguales si la cantidad de términos en las sumatorias es la misma, por lo que que la cantidad de coeficientes no varía la solución. Por el contrario, las soluciones cambian si la cantidad de términos de las sumatorias varían. Debido a esto, es más importante determinar correctamente la cantidad de términos de las sumatorias para obtener A_1 .

En la figura 13 se muestran las soluciones al variar la cantidad de términos en la sumatoria de la expresión del coeficiente A_1 y dejar fija la cantidad

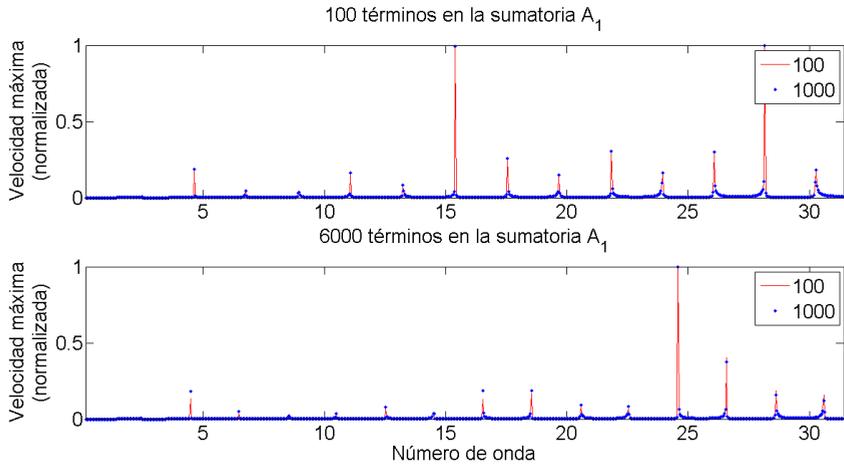


Figura 12: Comparación de las soluciones analíticas para la velocidad. En la gráfica de la parte superior se presenta la cantidad de términos para la sumatorias para obtener A_1 se fijó en 100 y se varió la cantidad de coeficientes para el polinomio solución. En la parte inferior se fijó en 6000 la cantidad de términos para las sumatorias de A_1 y se varió la cantidad de coeficientes para el polinomio solución.

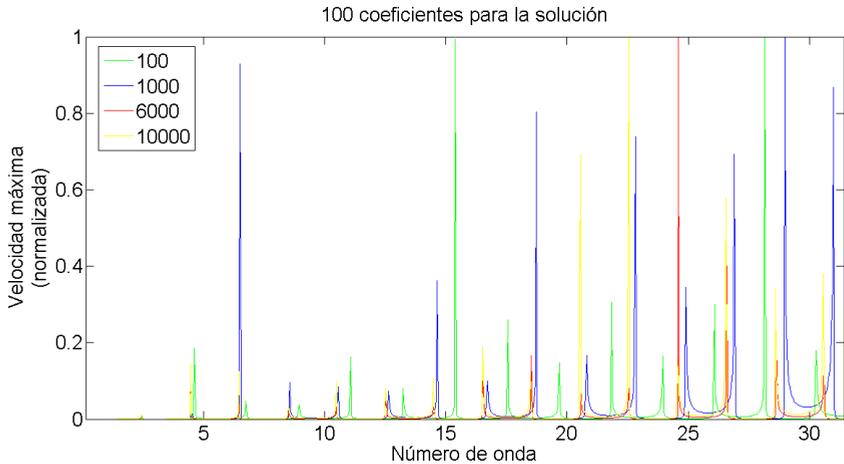


Figura 13: Comparación de soluciones analíticas para la velocidad variando la cantidad de términos para las sumatorias de la expresión A_1 .

de coeficientes del polinomio. Se observa que las soluciones para números de onda menores a 4 no varían entre ellas, esto puede estar relacionado con la lenta convergencia a cero de los términos. Para los modos resonantes producidos a números de onda mayores a 4, las soluciones con 100, 1000 y 6000 términos varían en gran medida entre ellas. Sin embargo, las soluciones con 6000 y 10000 términos ya no varían entre ellas. Por lo que la aproximación con 6000 términos es la adecuada para no aumentar el tiempo de cómputo.

Al comparar la solución analítica con la solución numérica de la velocidad (fig. 14 (a)) se observa que las soluciones son similares. Para números de onda mayores a 6 las soluciones son muy parecidas, tanto en el número de modos resonantes como en la posición de estos. Así mismo, para números de onda menores a 6 los modos resonantes discrepan en la posición y en el número de modos resonantes, ya que la solución analítica calcula un modo resonante extra que se encuentra entre el primer modo resonante y el origen (no visible en la gráfica debido a la escala).

Si se observa la diferencia entre la solución analítica y la solución numérica de las posiciones de los modos resonantes (fig. 14 (b)), se ve una diferencia máxima de 0.43 en número de onda en el primer modo resonante. Para los modos resonantes posteriores la diferencia disminuye y en algunos casos es cero o negativa. Esto quiere decir que los modos resonantes obtenidos numéricamente están desplazados respecto de la solución analítica. Se encuentran desplazados a la derecha si la diferencia es positiva, no desplazados si la diferencia es cero o desplazados a la izquierda si la diferencia es negativa.

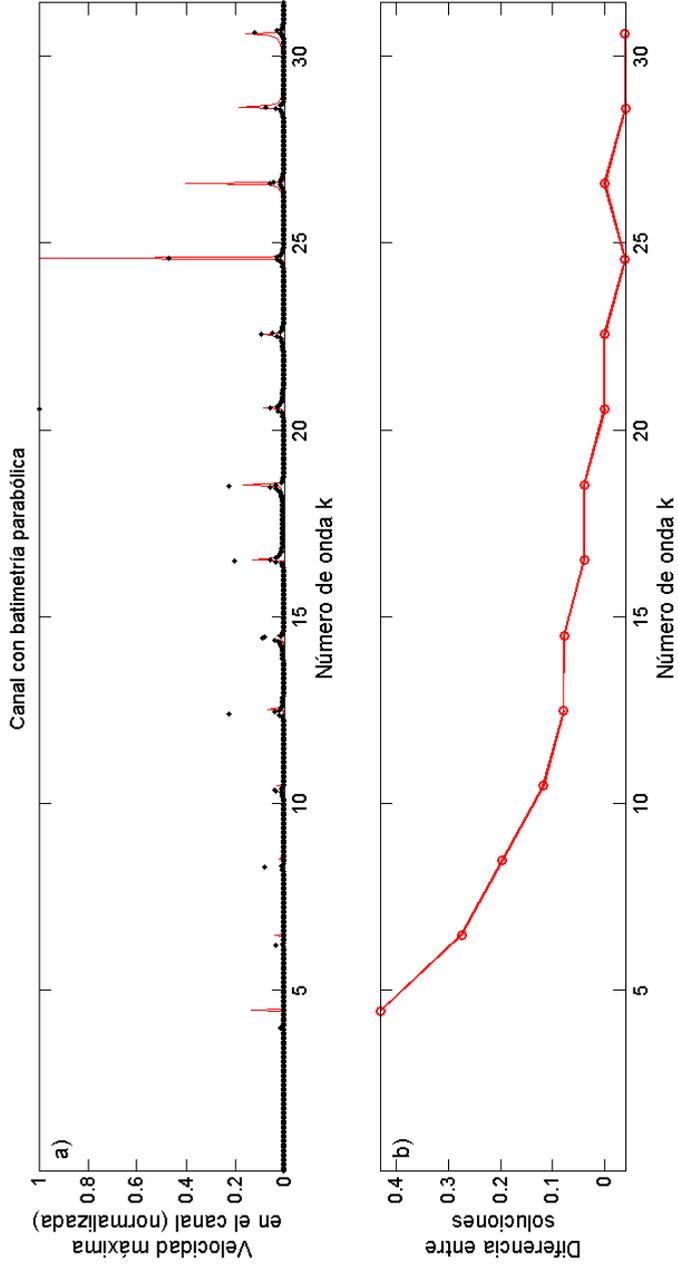


Figura 14: (a) Comparación entre solución analítica y numérica de los modos resonantes de la velocidad. (b) Diferencia entre la solución analítica y la solución numérica de las posiciones de los modos resonantes para un canal con fondo parabólico.

Otras batimetrías

La validación del método propuesto con los dos casos anteriores permite utilizar este método para canales con batimetrías cuyas soluciones analíticas no existen o requieren mucho tiempo para obtenerlas. Las batimetrías que se analizaron fueron, además de la batimetría plana y con forma parabólica, la batimetría en forma de escalón, parábola completa y en forma Gaussiana. En la figura 15 se muestra el diagrama de las otras batimetrías utilizadas.

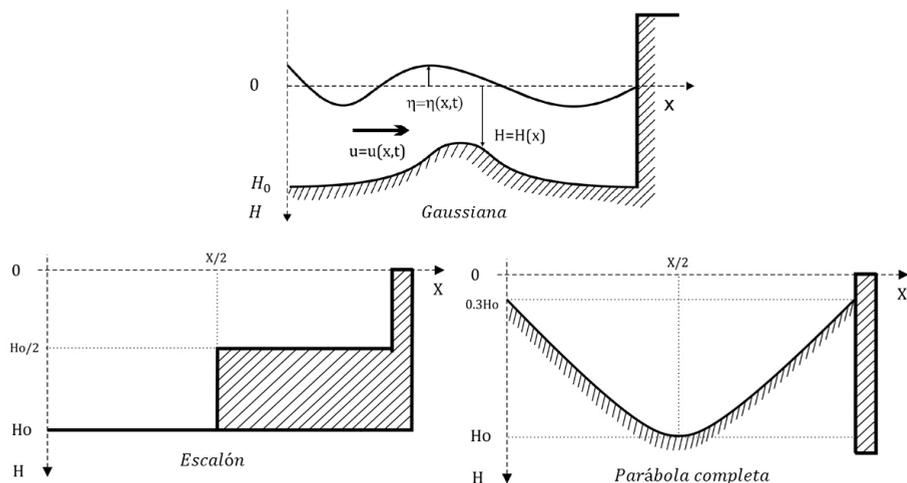


Figura 15: Diagramas de los canales con diferentes batimetrías utilizados para aplicar el método propuesto.

En las figuras 16 y 17 se muestran los modos resonantes de velocidad y elevación para los cinco canales con diferentes batimetrías. Se observa que, tanto para la velocidad como para la elevación, los modos resonantes de los canales difieren con los modos del canal con batimetría plana, en el número de modos y en la posición de estos. Además, los modos resonantes calculados para cada canal también difieren entre ellos.

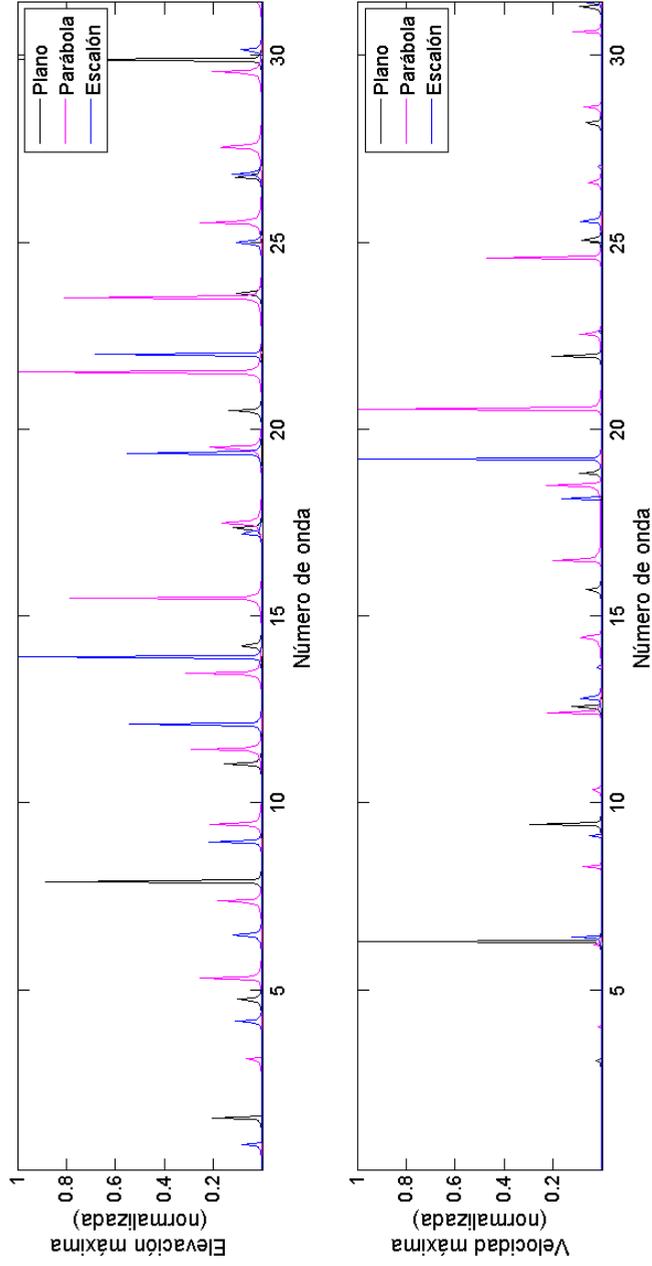


Figura 16: Modos resonantes calculados con el método propuesto para tres canales con diferentes batimetrías: plana, parabólica y escalón .

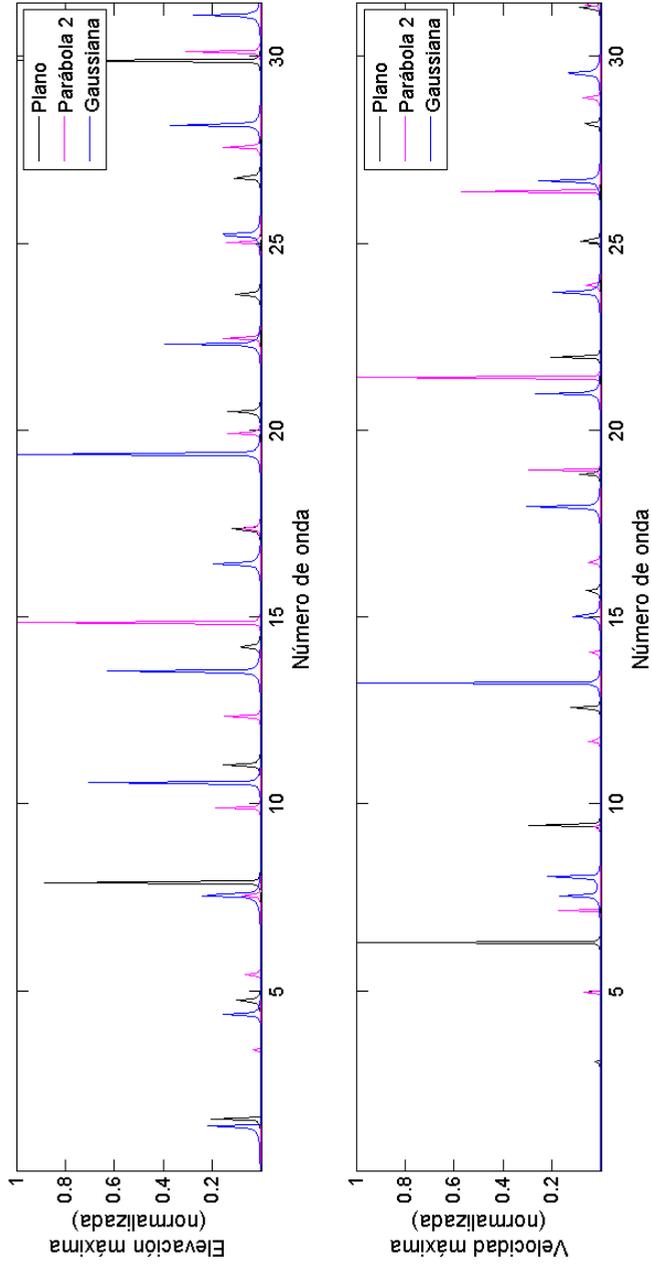


Figura 17: Modos resonantes calculados con el método propuesto para tres canales con diferentes batimetrías: plana, parabólica completa y gaussiana.

8. Discusión

Para un canal con fondo plano obtener la solución analítica para los modos resonantes de elevación y velocidad es fácil. Sin embargo, una batimetría con esta forma no es muy realista, aunque muchas veces se hace esta suposición a manera de simplificación. Tinti (1980) sugiere que la batimetría es un factor importante para el cálculo de modos resonantes, por lo que tener metodologías para resolver las ecuaciones de aguas someras, sin viscosidad, linealizadas, sin rotación y en una dimensión, es importante para obtener modos resonantes para canales con batimetrías más complejas. Sin embargo, además de tener la metodología, es importante comprobar que esta resuelva correctamente las ecuaciones (Delestre *et al.*, 2012).

La simetría del sistema de ecuaciones a resolver permite que el método ANA pueda ser aplicado para este problema. Para comprobar que el método resuelve de manera adecuada el sistema, se utiliza la solución analítica del canal con fondo plano como primera validación. Para este canal, el algoritmo propuesto obtiene una solución muy parecida a la solución analítica, tanto en la cantidad de modos resonantes como en la posición de estos.

Para calcular el error en la solución numérica se calculó δ ,

$$\delta = \frac{|\lambda_e - \lambda_c|}{\lambda_e} * 100,$$

donde λ_e es la longitud de onda asociada a un modo resonante calculado analíticamente y λ_c es la longitud de onda, asociada a un modo resonante calculado numéricamente. El valor nos dice, en porcentaje, qué tan pequeña o grande es λ_c con respecto a λ_e .

En la figura 18 se muestra δ para el canal con fondo plano. Para la velocidad, el error máximo es de 1.5% y el mínimo es de 0%. Para la elevación, el error máximo es de 0.8% y el mínimo es de 0%. En la figura 19 se observa el error δ para el canal con fondo parabólico. El error para

los modos resonantes de la velocidad y la elevación se comporta de manera creciente. Es mínimo para longitudes de onda pequeñas y máximo para longitudes de onda grandes.

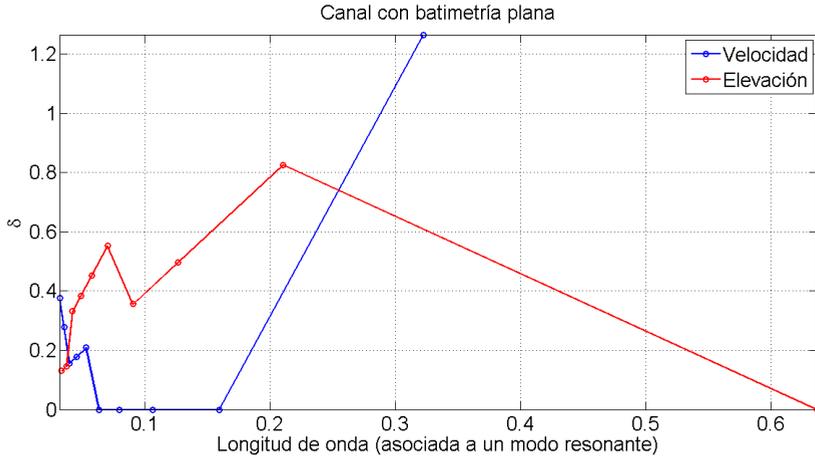


Figura 18: Error en el tamaño de la longitud de onda calculado numéricamente para un canal con fondo plano.

Al comparar el error obtenido en los dos canales, se distingue que el error del canal con batimetría parabólica es hasta diez veces más grande que el error para el canal con fondo plano, para las longitudes de onda más grandes. Sin embargo, para longitudes de ondas pequeñas el error es similar y mínimo.

Delestre *et al.* (2012) hacen una comparación de las soluciones numéricas con las soluciones analíticas de elevación (obtenidas con el software SWASHES) para canales unidimensionales con fondos no planos. Para un canal con un montículo en el centro, reportan un error de la solución numérica del 0.06 % en la parte anterior al obstáculo y justo en el mismo un error de 1.2 %. Dichos errores se asemejan a los obtenidos en este trabajo para el canal con fondo plano. Para un canal con una batimetría con una pendiente suave, estos autores reportan un error mínimo de 1 % y uno máximo de 24 %, estos errores se asemejan a los obtenidos en este

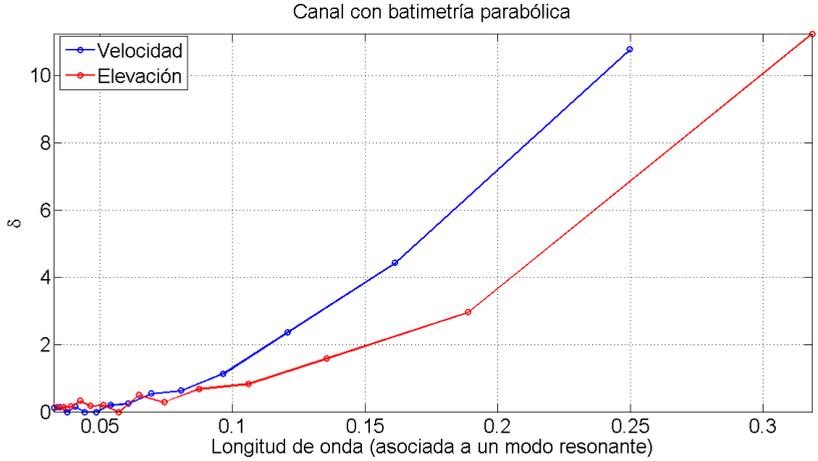


Figura 19: Error en el tamaño de la longitud de onda calculado numéricamente para un canal con batimetría parabólica.

trabajo para el canal con batimetría parabólica.

Por otra parte, es importante destacar la diferencia entre la cantidad de trabajo para obtener la solución analítica y la solución numérica. Esta diferencia es muy evidente para el canal con batimetría parabólica. El trabajo para la solución analítica es mucho mayor que el realizado para la solución numérica. Además, el procedimiento para calcular la solución analítica es solo para ese canal en particular, mientras que el algoritmo propuesto es aplicable para todos los canales con batimetría variable. Gómez-García (1991) también destaca la cantidad de trabajo para obtener la solución analítica y numérica con el método ANA, pero para el caso de deflexión de vigas. Adicionalmente indica que las soluciones difieren en 1% y propone aumentar la cantidad de nodos para mejorar la precisión.

Con lo que respecta a los modos resonantes calculados para las otras batimetrías, se observa cómo los modos resonantes cambian en función de la batimetría como también Tinti (1980) y Mattioli (1978) lo indican. Esto es importante ya que demuestra que la simplificación a batimetría plana puede no ser adecuada.

9. Conclusiones

- El método numérico ANA para sistemas tridiagonales se puede emplear para las ecuaciones de aguas someras, sin viscosidad, linealizadas, sin rotación, en una dimensión y con profundidad variable.
- El tiempo y trabajo requerido para obtener la solución analítica es mayor que el requerido para obtener la solución numérica. Además, con la solución numérica se obtiene un método generalizado para cualquier batimetría.
- Para un canal con fondo plano la solución numérica resuelve adecuadamente los modos resonantes. Los errores calculados fueron menores a 1.5 %.
- Para un canal con batimetría parabólica la solución numérica resuelve adecuadamente los modos resonantes para longitudes de onda cortas, mientras que para longitudes de onda largas el error aumenta en gran medida.
- Para el problema de encontrar modos resonantes en un canal abierto con profundidad variable, el método propuesto es una opción eficiente computacionalmente hablando por el poco requerimiento de memoria de la computadora.
- Se encontró que la variación en la batimetría del canal afecta el número y la posición de los modos resonantes, tanto para la velocidad como para la elevación.

Bibliografía

- [1] Acheson, D. J. (1990). *Elementary Fluid Dynamics*. New York: Oxford University Press.
- [2] Alfaro, E. J., Hernández, D., y Bezanilla, A. (2007). Uso de un modelo de aguas someras para analizar la influencia del Atlántico Tropical Norte y del Pacífico Ecuatorial del Este sobre la circulación atmosférica en los mares Intra-Americanos. *Revista de Climatología*, 15-26.
- [3] Bresch, D. (2009). Shallow-Water Equations and Related Topics. En Dafermos, C.M. y Pokorný, M., (Ed.), *Handbook of Differential Equations* (pp.1-103). Le Bourget-du-Lac, France: Elsevier B.V. doi:10.1016/S1874-5717(08)00208-9
- [4] Burden, R. L., y Faires, J. D. (1985). *Análisis numérico*. Boston: Grupo Editorial Iberoamérica.
- [5] Crowhurst, P. (2013). Numerical Solutions of One-Dimensional Shallow Water Equations. *Computer Modelling and Simulation (UKSim), 2013 UKSim 15th International Conference on*. doi:10.1109/UKSim.2013.63
- [6] Delestre, O., Lucas, C., Ksinant, P.A., Darboux, F., Laguerre, C., Vo, T.N.T., James, F. y Cordier, S. (2012). SWASHES: a compilation of Shallow Water Analytic Solutions for Hydraulic and Environmental Studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 74(3), 229-230. doi: 10.1002/fld.3741
- [7] Díaz-Hernández, D. (2006). *Análisis de resonancia portuaria: generación, transitoriedad, no linealidad y acoplamiento geométrico* (tesis doctoral). Universidad de Cantabria, Santander, España.
- [8] Gómez-García, D. (1991). ANA una nueva solución recurrente de un sistema tridiagonal. Su aplicación en deflexiones de vigas complejas. *Saltillo Coah., UAdeC, Cuadrernos de Inv.*, 31-50.

- [9] Haidvogel, D. B., y Beckmann, A. (1999). *Numerical Ocean Circulation Modeling*. London: Imperial College Press.
- [10] Thomas, L.H. (1949) *Elliptic Problems in Linear Difference Equations Over a Network*. Technical report, Watson Sc Comput. Lab. Rept, Columbia University, New York.
- [11] Hockney, R. W. (1965). A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 95-113.
- [12] Mattioli, F. (1978). Wave-induced oscillations in Harbours of variable depth. *Computers and Fluids*, 161, 172.
- [13] Perriáñez, R. (2010). *Fundamentos de Oceanografía Dinámica*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.
- [14] Stone, H. S. (1973). An Efficient Parallel Algorithm for the Solution of a Tridiagonal Linear System of Equations. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 27-38.
- [15] Tinti, S. (1980). Response of a harbour opened to a sea of variable depth. *Pure and Applied Geophysics PAGEOPH*, 118(2), 783-795. doi:<https://doi.org/10.1007/BF01593030>
- [16] Vreugdenhil, C. B. (1994). *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. doi:[10.1007/978-94-015-8354-1](https://doi.org/10.1007/978-94-015-8354-1)