

# UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

TIEMPOS CARACTERISTICOS PARA TUNELAJE RESONANTE  
EN UNA DIMENSION

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**FISICO**  
PRESENTA  
ROBERTO ROMO MARTINEZ

ENSENADA, B.C. ABRIL DE 1989

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA  
ESCUELA SUPERIOR DE CIENCIAS

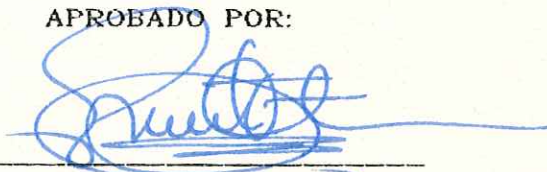
TIEMPOS CARACTERISTICOS PARA TUNELAJE RESONANTE  
EN UNA DIMENSION

T E S I S   P R O F E S I O N A L

QUE PRESENTA:

ROBERTO ROMO MARTINEZ

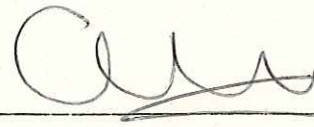
APROBADO POR:



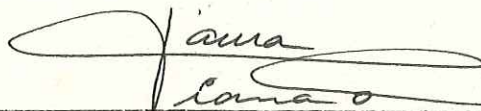
DR. ERNESTO COTA ARAIZA  
Presidente del Jurado



DR. DONALD H. GALVAN MARTINEZ  
S I N O D A L



DR. GASTON GARCIA-CALDERON  
S I N O D A L



DRA. LAURA C. VIANA GASTRILLON  
S I N O D A L



DR. ALBERTO RUBIO MENDEZ  
S E C R E T A R I O

DEDICATORIA

*A mis padres:*

ELPIDIO ROMO Z.  
MARIA MARTINEZ R.

ENRIQUE  
RICARDO  
PONCHO Y MIGUEL

CHUY Y LUPE  
ALMA  
ESTELA

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Alberto Rubio Mendez por haber dirigido este trabajo de tesis. Asimismo al Dr. Gastón García-Calderón, quien, en colaboración con el primero, trabajó en la elaboración del proyecto y en la revisión final de la tesis.

Al Dr. Ernesto Cota A., Dr. Donald H. Galván, y a la Dra. Laura Viana C. por haber colaborado en la revisión y evaluación de este trabajo.

A Jorge Alberto Villavicencio por su ayuda en la implementación de los programas de cómputo que contribuyó a agilizar la obtención de los resultados que aquí se presentan.

Al Instituto de Física (U.N.A.M.) por facilitarme las herramientas de cómputo.

A la Universidad Autónoma de Baja California por haberme otorgado una beca-tesis durante la realización del trabajo.

# INDICE

RESUMEN-----	1
--------------	---

## CAPITULO 1

INTRODUCCION-----	2
-------------------	---

## CAPITULO 2

TIEMPOS CARACTERISTICOS EN TUNELAJE RESONANTE-----	4
2.1.- FUNCION DE GREEN Y EL PROBLEMA DE EIGENVALORES-----	4
2.2.- TIEMPOS CARACTERISTICOS PARA TUNELAJE RESONANTE-----	7

## CAPITULO 3

EL POTENCIAL DOBLE DELTA-----	16
3.1.- COEFICIENTE DE TRANSMISION-----	16
3.2.- FUNCION DE GREEN DE LA PARTICULA LIBRE-----	23
3.3.- CALCULO DE LAS RESONANCIAS-----	24
3.4.- CALCULO DE TIEMPOS CARACTERISTICOS Y DE PERMANENCIA-----	31

## CAPITULO 4

EL POTENCIAL DE DOBLE BARRERA-----	37
A.-CASO SIMETRICO	
4.1.- COEFICIENTE DE TRANSMISION-----	38
4.2.- CALCULO DE LAS RESONANCIAS-----	47

4.3.- CALCULO DE TIEMPOS CARACTERISTICOS Y DE PERMANENCIA-----	51
B.-CASO ASIMETRICO	
4.4.- COEFICIENTE DE TRANSMISION-----	54
4.5.- CALCULO DE LAS RESONANCIAS-----	60
4.6.- CALCULO DE TIEMPOS CARACTERISTICOS Y DE PERMANENCIA-----	61

## CAPITULO 5

CONCLUSIONES-----	65
-------------------	----

## APENDICE-A

LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA-----	69
A.1.- DEFINICION-----	69
A.2.- PROPIEDADES DE $M(K)$ -----	70

## APENDICE-B

EL METODO DE NEWTON-RAPHSON-----	73
----------------------------------	----

## APENDICE-C

FUNCION DE GREEN Y NORMALIZACION DE LAS EIGENFUNCIONES $u_n$ -----	75
BIBLIOGRAFIA-----	79

## RESUMEN

Recientemente ha sido desarrollada una teoría para tiempos de tunelaje resonante en potenciales unidimensionales finitos y de forma arbitraria (G. Garcia Calderon y A. Rubio (1987)), en la cual se demuestra, utilizando las propiedades del propagador del sistema, que la *asimetría* conduce de manera natural a dos *tiempos característicos*  $\tau_n^O$  y  $\tau_n^L$ , (en general distintos), para decaimiento respectivamente a través de los extremos del sistema. Se definen los *tiempos de permanencia*  $\tau_{OL}$  y  $\tau_{LO}$  correspondientes a incidencia por la izquierda y por la derecha del sistema respectivamente. Estos últimos se expresan en términos de los tiempos característicos  $\tau_n^O$  y  $\tau_n^L$  y se encuentra que  $\tau_{OL}/\tau_{LO} \approx \tau_n^O/\tau_n^L$ .

El propósito de este trabajo es hacer cálculos en base a esta teoría para algunos potenciales típicos como el de dos delta y el de dos barrera rectangular, analizando tanto el caso simétrico como el asimétrico.

Se presentan aquí los cálculos teóricos de los tiempos característicos y de los tiempos de permanencia haciendo una variación sistemática de los distintos parámetros de los potenciales bajo estudio.

## ABSTRACT

Recently a theory for resonant tunneling times has been introduced (G. Garcia-Calderon and A. Rubio, (1987)), this theory, valid for onedimensional potentials of arbitrary shape shows, by using the properties of the propagator of the system, that *asymmetry* leads in a natural way to two *characteristic times*  $\tau_n^O$  and  $\tau_n^L$  (generally different) for decay respectively throughout the end points of the system. The *dwell times*  $\tau_{oL}$  and  $\tau_{Lo}$  are defined corresponding to an electron incident from the left and right ends of the system respectively. These are the times that the electron remains in the region of interaction. The dwell times are written in terms of the times  $\tau_n^O$  and  $\tau_n^L$  and it is found that  $\tau_{oL}/\tau_{Lo} \approx \tau_n^O/\tau_n^L$ .

The purpose of this work is to perform a number of numerical calculations using the theory mentioned previously. These refer to typical potentials such as the double delta and the double barrier potentials. Both symmetrical and asymmetrical cases are considered.

Results of the calculations are reported for the characteristic and dwell times corresponding to a systematical variation of the parameters describing the potentials considered.

# CAPITULO 1

## INTRODUCCION.

Los notables avances tecnológicos de los últimos años en el contexto de la fabricación de dispositivos de estado sólido a escalas nanométricas ha suscitado un gran interés en física e ingeniería dado que las técnicas de miniaturización han llevado a estas estructuras a alcanzar dimensiones en las cuales se empiezan a manifestar nuevos e interesantes fenómenos físicos. Estos avances han sido posibles gracias a las sofisticadas técnicas recientemente desarrolladas como la MBE (Molecular-Beam-Epitaxy) y la conocida como MOCVD (Metal-Organic-Vapour-Deposition) en la fabricación de dispositivos microelectrónicos, tales como las heteroestructuras multicapas (Capasso et. al. (1986)). Hoy en día hay una gran actividad tanto en la fabricación como en la teoría, así como en las aplicaciones de los nuevos sistemas. Podríamos decir, como lo hace Kelly, que la física teórica de microestructuras está en su infancia con pocos resultados rigurosos y varias líneas de ataque contendientes entre sí (Kelly, (1986)).

En los fenómenos de transporte electrónico como el *tunelaje resonante* y particularmente en el problema de los tiempos de travesía a través de barreras unidimensionales, vía este proceso, hay un fuerte interés en obtener mejores aproximaciones. Existen varias definiciones para estos tiempos, conflictivas entre sí y en su mayoría referidas a una situación donde hay ausencia de efectos de resonancia (M. Buttiker y R.

Landauer(1982); J. R. Barker (1986). Recientemente ha sido propuesta una teoría (G. Garcia Calderon y A. Rubio (1987)) que toma en cuenta tales efectos. En ella se introducen dos tiempos característicos asociados con decaimiento electrónico a través de uno y otro extremo del sistema. Se define el tiempo de permanencia y éste queda expresado en función de aquellos.

El objetivo de este trabajo es hacer cálculos numéricos en base a esta teoría para algunos potenciales particulares. Los problemas que se estudiarán son: el potencial de doble barrera simétrico, el de doble barrera asimétrico, y como problema introductorio se analizará el caso más simple del potencial de dos deltas de Dirac.

La distribución del material es la siguiente. En el capítulo 2 se hace una exposición de la teoría en base a la cual haremos los cálculos de los tiempos característicos y de permanencia. En el capítulo 3 se calcula el coeficiente de transmisión para el potencial doble delta y se determinan los tiempos mencionados mediante un cálculo previo de los polos complejos de la función de Green. En el capítulo 4 se hace lo análogo para el potencial de doble barrera simétrico y posteriormente para el asimétrico. Se hace además una discusión para cada uno de los dos casos, del comportamiento de la probabilidad de transmisión para diferentes configuraciones de potencial. En el capítulo 5 presentamos las conclusiones. En los apéndices se expone el método de la matriz de transferencia, el método de Newton-Raphson, y se obtiene una expresión para el residuo de la función de Green en términos de las eigenfunciones de la ecuación de Schrödinger con eigenvalores complejos.

## CAPITULO 2

### TIEMPOS CARACTERISTICOS EN TUNELAJE RESONANTE.

En este capítulo presentaremos en forma breve las herramientas teóricas básicas necesarias para el desarrollo de este trabajo.

Se muestra en la sección 2.1 la importante relación existente entre los polos complejos de la función de Green de un sistema cuántico dado y su correspondiente espectro. Posteriormente la sección 2.2 la reservamos para exponer la teoría reciente sobre tiempos de decaimiento y de tunelaje resonante en una dimensión, que habíamos mencionado ya en el capítulo anterior, tiempos cuyo cálculo numérico es objeto de este trabajo.

#### 2.1.- FUNCION DE GREEN Y EL PROBLEMA DE EIGENVALORES.

Dentro de la llamada *teoría de dispersión independiente del tiempo*, la función de Green es una de las herramientas más poderosas. La utilizaremos en el capítulo 3 para calcular eigenvalores complejos de la ecuación de Schrödinger. Presentaremos en esta sección algunas de las propiedades matemáticas de la función de Green más relevantes a nuestro problema.

Si nuestro sistema cuántico está expresado por un Hamiltoniano  $H=H^0+V$ , donde  $H^0$  es el Hamiltoniano de la partícula libre y  $V$  es el potencial que caracteriza al sistema, se definen en términos de ellos, los operadores:

$$G^0(E) = (E - H^0)^{-1} \quad (2.1 a)$$

$$G(E) = (E - H)^{-1} \quad (2.1 b)$$

como el operador de Green de la partícula libre y del sistema cuántico en cuestión, respectivamente. Ambos válidos para toda  $E$  real ó compleja para la cual estas inversas existan (Taylor (1986)).

En el espacio de configuración el Hamiltoniano  $H^0$ , está representado por:

$$\langle x | H^0(E) | \Psi \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle x | \Psi \rangle \quad (2.2)$$

Es claro de la definición (2.1) que

$$(E - H^0)G^0(E) = 1 \quad (2.3)$$

Tomando los elementos de matriz de (2.3) en este mismo espacio (de configuración):

$$\langle x | (E - H^0)G^0(E) | x' \rangle = \langle x | x' \rangle \quad (2.4)$$

La ecuación que resulta es:

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E \right] \langle x | G^0(E) | x' \rangle = \delta(x - x') \quad (2.5)$$

que es precisamente la definición de la función de Green para la ecuación de Schrödinger de la partícula libre que podemos encontrar en textos básicos de mecánica cuántica. Entonces pues, vemos que la función de Green de la partícula libre es precisamente el elemento de matriz del operador  $G^0(E)$  definido por (2.1 a).

Siguiendo un procedimiento a lo largo de las mismas líneas, obtenemos para  $G(E)$ , definido por (2.1 b), la ecuación:

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E - V(x) \right] \langle x | G(E) | x' \rangle = \delta(x - x') \quad (2.6)$$

Sin embargo nos encontramos con que los operadores de Green no existen para todos los valores de  $E$ , pues si tomamos  $E = E_n$  donde  $E_n$  son los eigenvalores del Hamiltoniano, existe un

vector de estado  $|n\rangle$  tal que:

$$(E_n - H)|n\rangle = 0 \quad (2.7)$$

y no existe en tal caso el inverso de  $(E_n - H)$ . Tenemos por lo tanto que la función de Green,  $\langle x|G(E)|x'\rangle$ , no es analítica en estos valores de E.

La consecuencia interesante de lo anterior es la siguiente; un conocimiento, para toda E, de la función de Green es equivalente a un conocimiento de la solución completa del problema de eigenvalores correspondiente. Esto es, los eigenvalores podemos determinarlos si encontramos los polos de la función de Green.

En los Hamiltonianos que representan a los sistemas cuánticos tratados en este trabajo (caps. 3 y 4) los eigenvalores discretos con  $\text{Im}(E) < 0$  son los que nos interesa determinar, las partes reales de estos eigenvalores complejos son las resonancias y las partes imaginarias sus correspondientes anchuras. El corte ramal de esta misma figura representa la parte continua del espectro (Taylor (1986)).

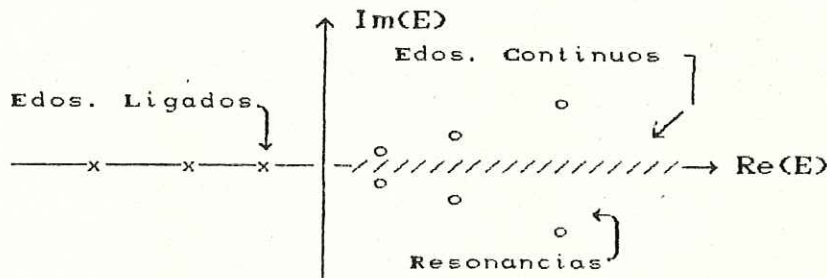


Fig.2.1.- El operador de Green (o la función) es analítico en todo el plano E, excepto en los polos y el corte ramal que se indican. Las resonancias se encuentran, como es bien sabido, en la segunda superficie de Riemann (hoja no física).

Si el sistema físico tiene estados ligados, éstos

corresponderán a polos reales y negativos. Los polos con  $\text{Im}(E) < 0$  representan estados metaestables que tienen un tiempo de vida finito, i.e., resonancias.

Encontrar la función de Green, sin embargo, puede resultar tan difícil como resolver el problema de eigenvalores del sistema. Por esta razón es usual tener una ecuación en la que podamos expresar  $G(E)$  en función de un  $G^0(E)$  conocido. Tal ecuación recibe el nombre de *ecuación de Lippmann-Schwinger para  $G(E)$* , y se deriva de una simple identidad entre operadores:

$$P^{-1} = Q^{-1} + Q^{-1}(Q - P)P^{-1} \quad (2.8)$$

donde, si hacemos  $P = (E-H)$  y  $Q = (E-H^0)$  obtenemos

$$G(E) = G^0(E) + G^0(E)VG(E) \quad (2.9 a)$$

y si intercambiamos  $P$  y  $Q$

$$G(E) = G^0(E) + G(E)VG^0(E) \quad (2.9 b)$$

## 2.2.-TIEMPOS CARACTERISTICOS PARA TUNELAJE RESONANTE.

El *tunelaje*, que en este contexto entendemos como la propagación de funciones de onda electrónicas atenuadas en regiones que prohíben el movimiento clásico, es un concepto tan antiguo como la mecánica cuántica misma. Uno de los primeros ejemplos de su explotación tuvo lugar en la década de los 30's cuando Zener publicó su teoría basada en electrones de tunelaje a través de las brechas de energía en materiales dieléctricos activada por un campo eléctrico (c. Zener (1934)). El efecto túnel se sigue manteniendo como un importante ingrediente en varios dispositivos electrónicos de actual investigación.

La estructura semiconductor más simple para propósitos experimentales consiste de dos barreras rectangulares idénticas separadas por un pozo central, y la física básica para la descripción de los procesos de tunelaje a través de este sistema está, en buena medida, comprendida (Cohen-Tannoudji (1977); B. Ricco y M. Ya Azbel (1983), J. R. Barker (1986)).

Aquí la situación física consiste en que una partícula de energía bien definida  $E$  menor que la altura de las barreras incide en una de ellas y, en general, ésta será casi totalmente reflejada; existe sin embargo un pequeño y discreto número de estrechas "ventanas" con un valor de energía y de ancho característicos,  $E_r$  y  $\Gamma_r$ , respectivamente, tales que cuando la partícula incidente "acierta" a uno de estos valores  $E_r$ , ésta atravesará ambas barreras con *probabilidad uno*. A este proceso físico se le conoce como *efecto túnel resonante* y a las energías  $E_r$  como resonancias. La forma más simple en que este fenómeno se manifiesta es como un pico en una gráfica del coeficiente de transmisión vs. energía, en este valor de energía la partícula queda temporalmente atrapada en un estado *metaestable* que después decae, y la correspondiente escala del evento está dada por:

$$\tau \cong \hbar/\Gamma_r \quad (2.10)$$

(R. Tsu y L. Esaki, (1974); B. Ricco y M. Ya Azbel, (1984), J. R. Barker (1986)), durante este tiempo entre las dos barreras se llevan a cabo complicados procesos de interferencia constructiva entre las ondas que se encuentran en el pozo central en múltiples reflexiones.

Pero la situación experimental real corresponde a potenciales asimétricos y las cosas ya no marchan tan bien en la teoría; particularmente en los tiempos de permanencia que se ven seriamente afectados por la asimetría introducida, lo cual sugiere que el problema sea atacado con un enfoque esencialmente distinto. El tiempo de vida,  $\tau$ , definido por (2.10) es independiente de a través de cuál de los dos extremos del sistema decae el electrón, razón por la cual no puede ser identificado como un tiempo de travesía como algunos autores lo han considerado (R. Tsu and L. Esaki, (1974); B. Ricco and M. Ya Azbel, (1984)) El efecto de consecuencias más interesantes es la disminución en el coeficiente de transmisión a energías de resonancia. En tales circunstancias no puede aplicarse el criterio usual de estimación de este tiempo, conocido como F.W.H.M. (Full Width at Half Maximum) que consiste en medir la anchura del pico de resonancia a la mitad de su altura, para después utilizar (2.10) y calcular  $\tau$ .

García-Calderón y A. Rubio (1987) demuestran para un potencial unidimensional arbitrario, cómo los procesos resonantes dan lugar a dos tiempos característicos  $\tau_n^0$  y  $\tau_n^L$ , asociados, respectivamente, con decaimiento electrónico a través de uno y otro extremo del sistema; en términos de los cuales se definen los tiempos de permanencia,  $\tau_0^L$  y  $\tau_L^0$ , de un electrón, que cruza al sistema de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, respectivamente. El tratamiento lo hacen por medio de las propiedades de la función de Green ó propagador del sistema, tratamiento que presentaremos enseguida.

Consideremos un potencial unidimensional arbitrario de longitud finita;  $V(x) = 0$  para  $x \leq 0$  y  $x \geq L$ . Fuera de la región del potencial la solución es una combinación lineal de funciones  $e^{ikx}$  y  $e^{-ikx}$ . Podemos escribir la solución como

$$\Psi_i(k,x) = e^{ikx} + r(k) e^{-ikx}; \quad \text{para } x < 0 \quad (2.11 a)$$

$$\Psi_i(k,x) = t(k) e^{ikx}; \quad \text{para } x > L, \quad (2.11 b)$$

donde el subíndice  $i$  denota la incidencia por la izquierda,  $t(k)$  la amplitud de transmisión y  $r(k)$  la de reflexión. La función de Green,  $G^+(x,x';k)$ , que satisface las condiciones de frontera de onda saliente contiene la información de las resonancias del sistema.

La función de Green satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G^+(x,x';k) + [k^2 - V(x)] G^+(x,x';k) = \delta(x-x') \quad (2.12)$$

y la función de onda (2.11) a la ecuación,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_i(k,x) + [k^2 - V(x)] \Psi_i(k,x) = 0 \quad (2.13)$$

Multiplicando (2.12) por  $\Psi_i(k,x)$ , (2.13) por  $G^+(x,x';k)$  y restándolas obtenemos

$$\Psi_i(k,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G^+(x,x';k) - G^+(x,x';k) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_i(k,x) = \Psi_i(k,x) \delta(x-x') \quad (2.14)$$

integrando en los límites del potencial, 0 y L :

$$\int_0^L \left\{ \Psi_i(k,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G^+(x,x';k) - G^+(x,x';k) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi_i(k,x) \right\} dx =$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \Psi_i(k, x) \frac{\partial}{\partial x} G^+(x, x'; k) - G^+(x, x'; k) \frac{\partial}{\partial x} \Psi_i(k, x) \right]_0^L = \int_0^L \Psi_i(k, x) \delta(x-x') dx = \Psi_i(k, x') \quad (2.15)$$

De la evaluación de (2.11) en los puntos  $x=0, L$  y de las condiciones de frontera de onda saliente sobre  $G^+(x, x'; k)$ , que son:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} G^+(x, x'; k) = -ik G^+(x, x'; k) \right]_0; \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x} G^+(x, x'; k) = ik G^+(x, x'; k) \right]_L$$

Obtenemos:

$$\Psi_i(k, x) = 2ik G^+(0, x; k); \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.16)$$

donde hemos suprimido las primas en  $x$  (pues  $x$  es una variable muda).

Evaluando (2.11 b) y (2.16) en  $L$  se obtiene otra relación importante:

$$t_i(k) = 2ik G^+(0, L; k) e^{-ikL} \quad (2.17)$$

esta relación nos permite calcular las resonancias ya sea por un conocimiento de  $t(k)$  ó de la función de Green, los polos de ambas son exáctamente los mismos (en el potencial de doble delta del cap. 3 obtenemos las resonancias vía la función de Green y en el de doble barrera, cap.4, por medio de la amplitud de transmisión). Cerca de un polo aislado  $k = a_n - ib_n$  ( $a_n \gg b_n$ , y  $|a_n - a_{n+1}| \gg b_n$ ) es posible hacer la siguiente aproximación

( G. Garcia-Calderón y A. Rubio, (1987) ).

$$G(x, x'; k) \cong \frac{u_n(x) u_n(x')}{2k(k-k_n) I_n} ; \text{ con } I_n = \left\{ \int_0^L u_n^2(x) dx + \frac{i}{2k_n} (u_n^2(0) + u_n^2(L)) \right\} \quad (2.18)$$

donde  $u_n(x)$  satisface la ecuación de Schrödinger con eigenvalores complejos  $E_n = \hbar^2 k_n^2 / (2m) = \epsilon_n + i \frac{1}{2} \Gamma_n$ , aquí  $\epsilon_n$  representa a la posición de la resonancia y  $\Gamma_n$  su ancho correspondiente. Nosotros tomaremos  $I_n = 1$  de acuerdo a la normalización que hacemos en el Apéndice-D.

Habíamos dicho que  $u_n(x)$  satisface la ecuación de Schrödinger con eigenvalores complejos  $k_n = \alpha_n - i b_n$ , es decir

$$\frac{d^2}{dx^2} u_n(x) + [k_n^2 - V(x)] u_n(x) = 0 \quad (2.19)$$

análogamente para la compleja conjugada de (2.19)

$$\frac{d^2}{dx^2} u_n^*(x) + [k_n^{*2} - V(x)] u_n^*(x) = 0 \quad (2.20)$$

Multiplicando (2.21) por  $u_n^*(x)$ , (2.22) por  $u_n(x)$ , y restando las dos ecuaciones:

$$u_n^*(x) \frac{d^2}{dx^2} u_n(x) - u_n(x) \frac{d^2}{dx^2} u_n^*(x) + u_n^*(x) u_n(x) [k_n^{*2} - V(x)] - [k_n^2 - V(x)] u_n(x) u_n^*(x) = 0 \quad (2.21)$$

integrando de 0 a L y aplicando el teorema de Green:

$$\int_0^L \left\{ u_n^*(x) \frac{d^2}{dx^2} u_n(x) - u_n(x) \frac{d^2}{dx^2} u_n^*(x) \right\} dx = \int_0^L |u_n(x)|^2 [k_n^{*2} - k_n^2] dx \quad (2.22)$$

imponiendo las condiciones de onda saliente a  $u_n(x)$  que son:

$$\left[ \frac{d}{dx} u_n(x) = -ik_n u_n(x) \right]_0 ; \left[ \frac{d}{dx} u_n(x) = ik_n u_n(x) \right]_L \quad (2.23 a)$$

y para la compleja conjugada:

$$\left[ \frac{d}{dx} u_n^*(x) = ik_n^* u_n^*(x) \right]_0 ; \left[ \frac{d}{dx} u_n^*(x) = -ik_n^* u_n^*(x) \right]_L \quad (2.23 \text{ b})$$

considerando que  $\int_0^L |u_n(x)|^2 dx \approx 1$  (a. Garcia-Calderón y A. Rubio; comunicacion privada), obtenemos finalmente

$$|u_n(0)|^2/2 + |u_n(L)|^2/2 = \frac{(k_n^* - k_n)}{2i} = b_n \quad (2.24 \text{ a})$$

ó equivalentemente:

$$b_n = b_n^0 + b_n^L \quad (2.24 \text{ b})$$

y si definimos

$$b_n^0 = |u_n(0)|^2/2 \quad \text{y} \quad b_n^L = |u_n(L)|^2/2 \quad (2.25)$$

tenemos aún otra forma conveniente de expresar la relación (2.24 b) que es la siguiente:

$$\Gamma_n = \Gamma_n^0 + \Gamma_n^L \quad (2.24 \text{ c})$$

considerando que  $\Gamma_n^0 \equiv \frac{\hbar^2(4a_n b_n^0)}{2m}$  y  $\Gamma_n^L \equiv \frac{\hbar^2(4a_n b_n^L)}{2m}$ .

Estas nuevas cantidades,  $\Gamma_n^0$  y  $\Gamma_n^L$  pueden ser vistas como anchuras parciales de decaimiento a través de uno y otro extremos del sistema. Se definen en términos de ellas, los *tiempos característicos*:

$$\tau_n^0 \cong \hbar/\Gamma_n^0 ; \quad \tau_n^L \cong \hbar/\Gamma_n^L \quad (2.26)$$

De las relaciones (2.16), (2.17) y (2.18) y de la definición de  $b_n^0$  y  $b_n^L$  podemos escribir:

$$|\Psi_i(k,x)|^2 \cong 2 k^2 b_n^0 |u_n(x)|^2 / a_n^2 [(k-a_n)^2 + b_n^2] \quad (2.27)$$

y el coeficiente de transmisión:

$$|t_i(k)|^2 \cong 4 k^2 b_n^0 b_n^L / a_n^2 [(k-a_n)^2 + b_n^2] \quad (2.28)$$

Evaluando (2.28) en la energía de resonancia tenemos

$$T(a_n) = |t_i(a_n)|^2 \cong 4 \Gamma_n^0 \Gamma_n^L / \Gamma_n^2 \quad (2.29)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (2.24 c), y (2.29) para  $\Gamma_n^0$  y  $\Gamma_n^L$  en la energía de resonancia se encuentra que:

$$\Gamma_n^0 \cong \frac{1}{2} \Gamma_n \{1 \pm [R(a_n)]^{1/2}\}; \quad \Gamma_n^L \cong \frac{1}{2} \Gamma_n \{1 \mp [R(a_n)]^{1/2}\} \quad (2.30)$$

donde  $R(a_n) = 1 - T(a_n)$  es el coeficiente de reflexión. Los signos  $\pm$  que aparecen se deben a que hemos resuelto una cuadrática, y el criterio para escoger uno u otro consiste en analizar el área del potencial para determinar por cual de los dos extremos es más repulsivo, y a este extremo corresponderá la anchura parcial menor.

Hasta aquí todos los desarrollos han sido referidos a la situación física en que la partícula incide por la izquierda, podríamos repetir todos los cálculos considerando incidencia por la derecha, pero solo determinaremos una cantidad relevante para nuestros propósitos, que es la densidad de probabilidad,  $|\Psi_d(k,x)|^2$ , "d" denota incidencia por la derecha. En analogía con (2.16) y (2.19) tenemos, respectivamente:

$$\Psi_d(k,x) = 2ik G^+(L,x';k) \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.31)$$

y

$$|\Psi_d(k,x)|^2 = 2k b_n^L |u_n(x)|^2 / a_n^2 [(k-a_n)^2 + b_n^2] \quad (2.32)$$

podemos fácilmente darnos cuenta de la diferencia crucial entre (2.27) y (2.32), que es la aparición de  $b_n^L$  en lugar de  $b_n^0$ , lo que significa entre otras cosas que la densidad de probabilidad

electrónica es diferente en cada caso para potenciales asimétricos ya que  $b_n^0 \neq b_n^L$ , en general.

Ahora expresaremos los tiempos de permanencia recurriendo a la definición usual de tiempo de retardo (Felix T. Smith (1960)) en términos de los resultados (2.27) y (2.32).

$$\tau_{OL}(a_n) = m/\hbar a_n \int_0^L |\Psi_i(a_n, x)|^2 dx = \frac{4 \hbar \Gamma_n^0}{\Gamma_n \Gamma_n} \quad (2.33)$$

y

$$\tau_{LO}(a_n) = m/\hbar a_n \int_0^L |\Psi_d(a_n, x)|^2 dx = \frac{4 \hbar \Gamma_n^L}{\Gamma_n \Gamma_n} \quad (2.34)$$

donde  $\tau_{OL}(a_n)$  denota el tiempo de permanencia para travesía de izquierda a derecha en la energía de resonancia y  $\tau_{LO}(a_n)$  de derecha a izquierda, y son en general diferentes. En el caso especial de potencial simétrico tenemos  $b_n^0 = b_n^L$  y por lo tanto  $\tau_{OL}(a_n) = \tau_{LO}(a_n)$ .

## CAPITULO 3

### EL POTENCIAL DOBLE DELTA

En este capítulo consideraremos la dispersión de una partícula (un electrón) por un potencial unidimensional de dos deltas de Dirac. La evidente simplicidad en el tratamiento matemático de este sistema y el hecho de que resulta bastante ilustrativo en este trabajo en particular, nos ha sugerido utilizarlo como un problema introductorio antes de abordar a los sistemas más complicados en el capítulo 4.

Primero resolveremos en la sección 3.1 la ecuación de Schrödinger para este potencial y obtendremos una expresión para la probabilidad de transmisión de una partícula a través del mismo haciendo notar el perfil de resonancias que se presenta. Posteriormente encontraremos los polos de la función de Green asociada a este sistema (sección 3.3) los cuales nos darán información precisa de los estados meta-estables (resonancias) así como de sus respectivas anchuras. Esto lo haremos partiendo de la ecuación de Lippmann-Schwinger que vimos en el capítulo 2. Finalmente calcularemos los tiempos característicos y de permanencia (sección 3.4) tanto para el caso simétrico como el asimétrico.

#### 3.1.-COEFICIENTE DE TRANSMISION.

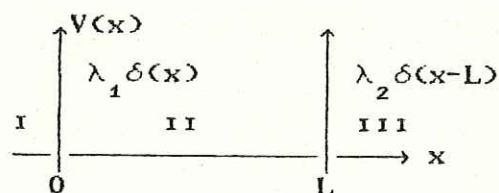
La ecuación de Schrödinger que representa al movimiento de un electrón a través del potencial que se ilustra en al fig.3.1 es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + (\lambda_1 \delta(x) + \lambda_2 \delta(x-L)) \Psi = E\Psi \quad (3.1)$$

donde  $L$  es la distancia entre los centros dispersores, y  $\lambda_1, \lambda_2$  son las respectivas intensidades de las deltas.

Fig.3.1.-Potencial doble

delta.  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las intensidades correspondientes



La solución de (3.1) en cada una de las tres regiones de la figura anterior se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \Psi_I(x) &= q e^{ikx} + r e^{-ikx} & x < 0 \\ \Psi_{II}(x) &= \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx} & 0 < x < L \\ \Psi_{III}(x) &= t e^{ikx} + s e^{-ikx} & x > L \end{aligned} \quad (3.2)$$

(donde  $k = \sqrt{2mE} / \hbar$ )

Y las componentes  $q, r, \alpha, \beta, t$  y  $s$  están determinadas por las condiciones de frontera aplicadas a la función  $\Psi$

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \quad (3.3 a)$$

$$\Psi_{II}(L) = \Psi_{III}(L) \quad (3.3 b)$$

y a la derivada de  $\Psi$

$$\frac{d\Psi_{II}}{dx}(0) - \frac{d\Psi_I}{dx}(0) = \frac{2m\lambda_1}{\hbar^2} \Psi_I(0) \quad (3.3 c)$$

$$\frac{d\Psi_{III}}{dx}(L) - \frac{d\Psi_{II}}{dx}(L) = \frac{2m\lambda_2}{\hbar^2} \Psi_{II}(L) \quad (3.3 d)$$

De las ecuaciones (3.3 a) y (3.3 c) obtenemos siguientes relaciones lineales entre los coeficientes  $\alpha, \beta, q$  y  $r$ :

$$\alpha = \left[ 1 + \frac{m\lambda_1}{ik\hbar^2} \right] q + \left[ \frac{m\lambda_1}{ik\hbar^2} \right] r \quad (3.4)$$

$$\beta = -\left[ \frac{m\lambda_1}{ik\hbar^2} \right] q + \left[ 1 - \frac{m\lambda_1}{ik\hbar^2} \right] r$$

y de (3.3 b) y (3.3 d):

$$t = \left[ 1 + \frac{m\lambda_2}{ik\hbar^2} \right] \alpha + \left[ \frac{m\lambda_2}{ik\hbar^2} \right] \beta e^{-2ikL} \quad (3.5)$$

$$0 = -\left[ \frac{m\lambda_2}{ik\hbar^2} \right] \alpha e^{2ikL} + \left[ 1 - \frac{m\lambda_2}{ik\hbar^2} \right] \beta$$

Podemos escribir (3.4) y (3.5) en forma de arreglos matriciales de la siguiente manera (por comodidad  $q=1$  y  $s=0$ ):

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = M^0 \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}; \quad \text{donde}$$

$$M^0 = \begin{pmatrix} \left[ 1 + \frac{m\lambda_1}{ik\hbar^2} \right] & \left[ \frac{m\lambda_1}{ik\hbar^2} \right] \\ -\left[ \frac{m\lambda_1}{ik\hbar^2} \right] & \left[ 1 - \frac{m\lambda_1}{ik\hbar^2} \right] \end{pmatrix} \quad (3.4 \text{ b})$$

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = M^L \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \quad \text{donde} \quad M^L = \begin{pmatrix} \left[ 1 + \frac{m\lambda_2}{ik\hbar^2} \right] & \left[ \frac{m\lambda_2}{ik\hbar^2} \right] e^{-2ikL} \\ -\left[ \frac{m\lambda_2}{ik\hbar^2} \right] e^{2ikL} & \left[ 1 - \frac{m\lambda_2}{ik\hbar^2} \right] \end{pmatrix}$$

(3.5 b)

Podemos relacionar entonces las amplitudes  $t$ ,  $1$  y  $r$  haciendo el producto de  $M^L$  con  $M^0$

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}; \quad \text{donde} \quad M = M^L M^0 \quad (3.7)$$

$M$  es la matriz de transferencia efectiva del sistema. Estamos especialmente interesados en el elemento  $M_{22}$  de  $M$ , puesto que el módulo al cuadrado de su inverso multiplicativo es el coeficiente de transmisión (ver Apéndice A). Explícitamente tenemos lo siguiente:

$$M_{22} = -\left[\frac{m\lambda_2}{i\hbar k}\right] \left[\frac{m\lambda_1}{i\hbar k}\right] e^{2ikL} + \left[1 - \frac{m\lambda_2}{i\hbar k}\right] \left[1 - \frac{m\lambda_1}{i\hbar k}\right] \quad (3.8)$$

Y el coeficiente de transmisión para el caso simétrico, haciendo  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , será:

$$1/T = |M_{22}|^2 = 1 + [\chi(\text{sen}(kL) + \xi \text{cos}(kL))]^2 \quad (3.9)$$

$$\text{donde } \chi = 2 \left(\frac{m\lambda}{\hbar^2}\right)^2 \quad \text{y} \quad \xi = \left(\frac{\hbar k}{m\lambda}\right)^2$$

Notamos de la ecuación (3.9) que tenemos transmisión total ( $T=1$ ) cuando se cumple:

$$\tan(kL) = -\xi \quad (3.10)$$

En la fig.3.2 se muestran cuatro gráficas del coeficiente de transmisión como una función de la energía. Podemos observar una serie de picos para ciertos valores de la energía (las unidades utilizadas son eV. y Å y para la masa hemos escogido el valor de la *masa efectiva* utilizada por Sollner et. al, 1983) estos corresponden a algunas de las resonancias del sistema. En la secuencia (a), (b), (c), (d) aumentamos paulatinamente la intensidad de las deltas. Los valores de la anchura  $L$ , la intensidad de las dos deltas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , se indican en la parte superior de cada gráfica.

Lo primero que podemos notar en estas gráficas es una disminución gradual de la anchura de los picos de resonancia y

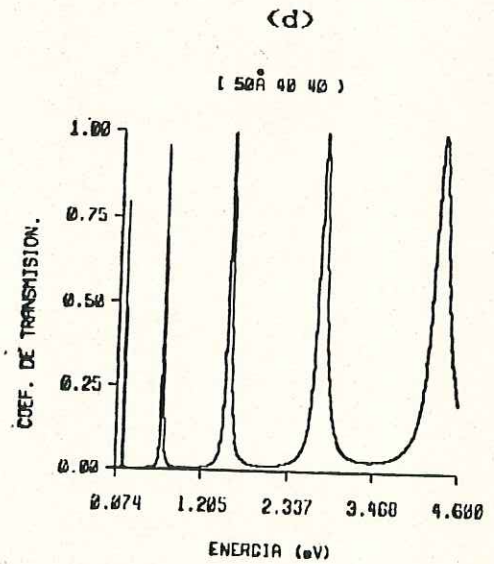
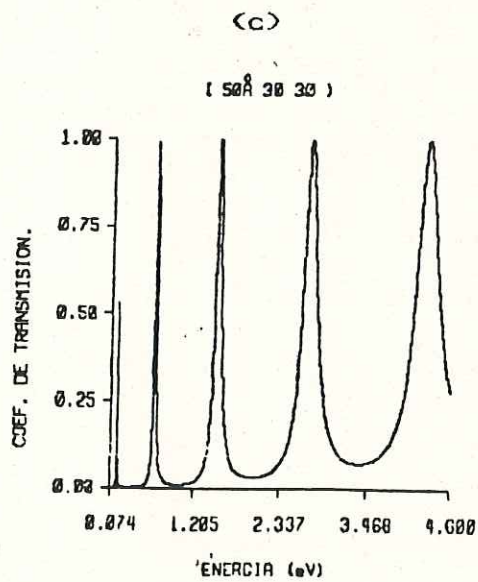
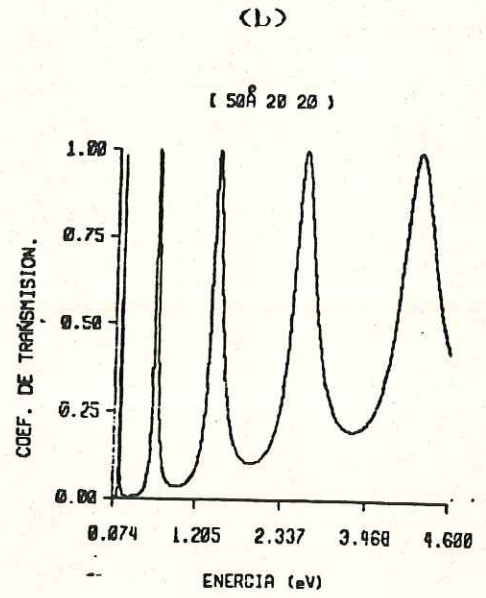
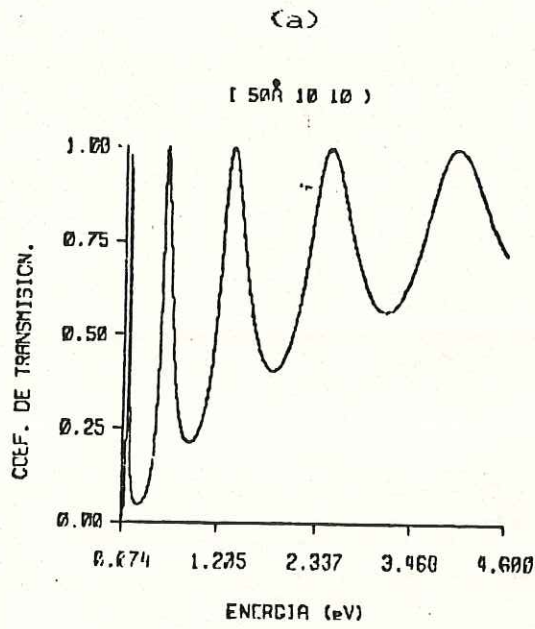


Fig.3.2.- Gráficas del coeficiente de transmisión vs. energía para el potencial simétrico doble delta a distintas intensidades,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

por lo tanto también un aumento en la dificultad de que la partícula se transmita a través del potencial a energías *distintas a las de resonancia*, pues el coeficiente de transmisión desciende casi hasta cero en (c). Sin embargo se transmitirá con probabilidad uno si incide con una de las energías de resonancia (En la teoría del capítulo 2 se requería para el cálculo de tiempos que las resonancias fueran estrechas y no tuvieran traslape unas con otras. Sin embargo de estas gráficas la mayoría no cumplen tal requisito. El objetivo de mostrarlas aquí es establecer un criterio al menos cualitativo para saber elegir los valores de los parámetros que garanticen la validez de la aproximación hecha en ese capítulo). El criterio es entonces escoger deltas más intensas. Otro efecto de aumentar las intensidades es un ligero corrimiento de las posiciones de los picos casi imperceptible, hacia los valores correspondientes a los estados ligados de la caja cuadrada, esto lo podemos ver más claro de la ecuación (3.10) si hacemos tender las intensidades a infinito, el resultado será:

$$E_n = \frac{h^2 k^2 \pi^2}{2 m L^2} \quad n=1,2,3,\dots \quad (3.11)$$

La fig.3.3 ilustra el comportamiento del coeficiente de transmisión para el caso más general en que las intensidades pueden ser distintas. Estamos graficando la función  $T = 1/|M_{22}|^2$ , donde  $M_{22}$  está dada por la ec.(3.8), con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . En esta figura, siguiendo el orden (a), (b), (c), (d) vemos una disminución en el coeficiente de transmisión. Aquí hemos partido de la configuración  $\lambda_1 = \lambda_2 = 60$  variando las intensidades de manera que  $\lambda_1 + \lambda_2 = 120$ .

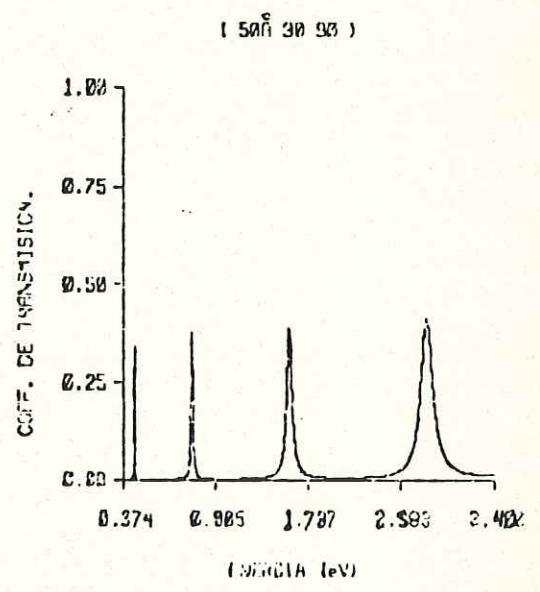
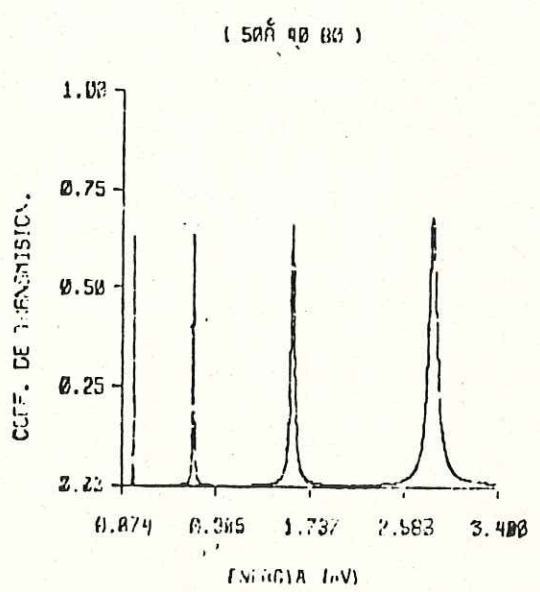
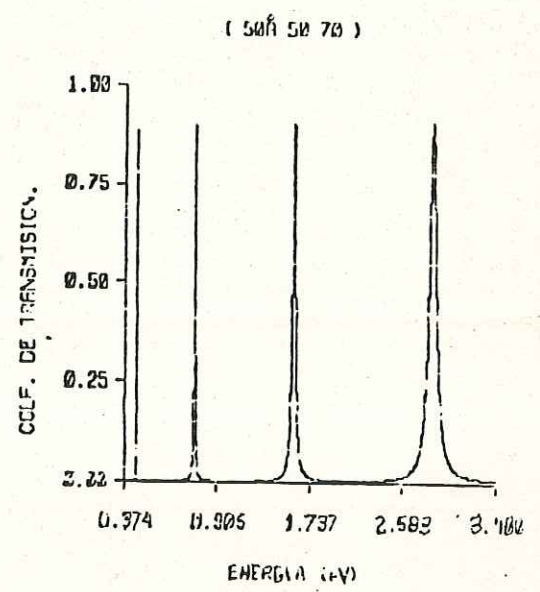
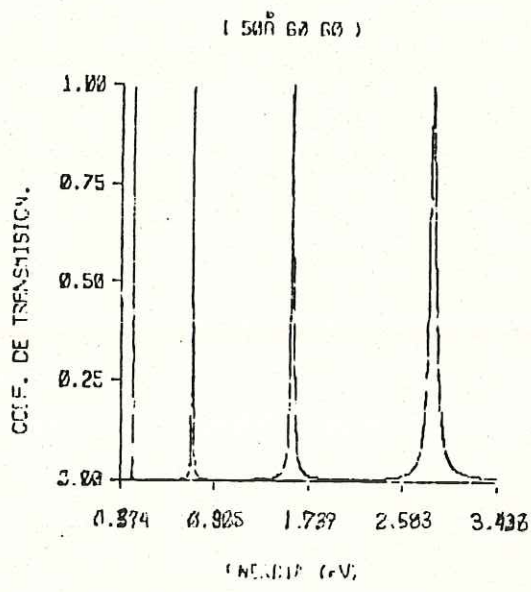


Fig.3.3.- Gráficas del coeficiente de transmisión vs. energía para el potencial asimétrico doble delta a distintas intensidades,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

### 3.2.-FUNCION DE GREEN DE LA PARTICULA LIBRE.

Determinaremos en esta sección el elemento de matriz  $\langle x | G^0(E) | x' \rangle$  (que es la solución de la ec.(2.2)), ya que lo ocuparemos en la siguiente sección para el problema del potencial doble delta.

Aplicando el operador *identidad*,  $I = \int |k\rangle \langle k| dk$  tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \langle x | G^0(E) | x' \rangle &= \langle x | G^0(E) I | x' \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | G^0(E) | k \rangle \langle k | x' \rangle dk \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | (E - H^0)^{-1} | k \rangle \langle k | x' \rangle dk \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right)^{-1} \langle x | k \rangle \langle k | x' \rangle dk \\
 &= \left[ \frac{m}{\pi \hbar^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{(k^2 - k'^2)} dk \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

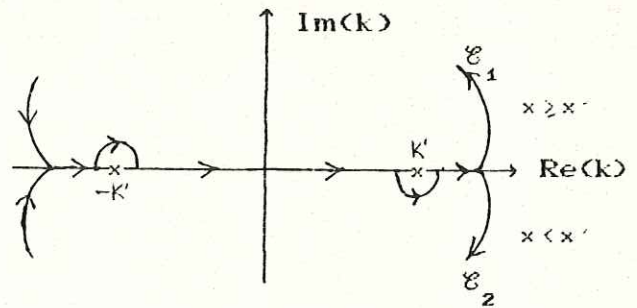
donde sabemos que  $\langle x | k \rangle = (1/2\pi)^{1/2} e^{ikx}$  y  $\langle k | x' \rangle = (1/2\pi)^{1/2} e^{-ikx'}$ .

Para resolver (3.12) utilizamos el teorema de la integral de Cauchy, i.e.,  $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum (\text{Residuos})$ . El contorno de integración  $\mathcal{C}$  se muestra en la fig.3.4.

El resultado de la integral (3.12) es:

$$\langle x | G^0(E) | x' \rangle = \left[ \frac{m}{i\hbar^2 k} \right] e^{ik|x-x'|} \quad (3.13)$$

Fig.3.4.- contornos de integración para (3.12). El de la parte superior corresponde a  $x \geq x'$ , y el de abajo a  $x < x'$ .



### 3.3.-CALCULO DE LAS RESONANCIAS.

Procederemos ahora a calcular los polos complejos de la función de Green del sistema de las dos deltas de la fig.3.1. Nuestro potencial es  $V(x) = \lambda_1 \delta(x) + \lambda_2 \delta(x-L)$  de acuerdo a la elección del origen hecha.

Definimos los operadores:

$$G^1(E) = (E - H^1)^{-1} \quad (3.14)$$

y

$$G^2(E) = (E - H^2)^{-1} \quad (3.15)$$

donde  $H^1 = H^0 + \lambda_1 \delta(x)$ , y  $H^2 = H^1 + \lambda_2 \delta(x-L)$ .

El operador  $G^0(E)$  se relaciona con  $G^1(E)$  por medio de la ec.(2.2) (Ecuación de Lippmann-Schwinger)

$$G^1(E) = G^0(E) + G^0(E) \lambda_1 \delta(x) G^1(E) \quad (3.16)$$

donde  $G^0(E)$  es el operador de Green para la partícula libre. Análogamente  $G^1(E)$  se relaciona con  $G^2(E)$  por la ecuación:

$$G^2(E) = G^1(E) + G^1(E) \lambda_2 \delta(x-L) G^2(E) \quad (3.17)$$

Representada en la base de coordenada espaciales, (3.16) queda expresada como

$$\begin{aligned}
\langle x | G^1(E) | x' \rangle &= \langle x | G^0(E) | x' \rangle + \langle x | G^0(E) \lambda_1 \delta(x'') G^1(E) | x' \rangle \\
&= \langle x | G^0(E) | x' \rangle + \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \langle x | G^0(E) \delta(x'') | x'' \rangle \\
&\quad \langle x'' | G^1(E) | x' \rangle dx'' \\
&= \langle x | G^0(E) | x' \rangle + \lambda_1 \langle x | G^0(E) | 0 \rangle \langle 0 | G^1(E) | x' \rangle \quad (3.18)
\end{aligned}$$

donde hemos introducido el operador identidad  $I = \int_{-\infty}^{\infty} |x''\rangle \langle x''| dx''$

y utilizado la propiedad  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$ .

ahora evaluamos (3.18) en  $x=0$  y obtenemos:

$$\langle 0 | G^1(E) | x' \rangle = \frac{\langle 0 | G^0(E) | x' \rangle}{1 - \lambda_1 \langle 0 | G^0(E) | 0 \rangle} \quad (3.19)$$

sustituyendo (3.19) en (3.18):

$$\langle x | G^1(E) | x' \rangle = \langle x | G^0(E) | x' \rangle + \frac{\lambda_1 \langle x | G^1(E) | 0 \rangle \langle 0 | G^0(E) | x' \rangle}{1 - \lambda_1 \langle 0 | G^0(E) | 0 \rangle} \quad (3.20)$$

expandiendo ahora a (3.17) en esta misma base y repitiendo pasos análogos a los del caso anterior:

$$\langle x | G^2(E) | x' \rangle = \langle x | G^1(E) | x' \rangle + \lambda_2 \frac{\langle x | G^1(E) | L \rangle \langle L | G^1(E) | x' \rangle}{1 - \lambda_2 \langle L | G^1(E) | L \rangle} \quad (3.21)$$

Si sustituimos (3.20) en (3.21) tendremos a  $\langle x | G^2(E) | x' \rangle$ , la función de Green del sistema, expresada en términos de la función de Green de la partícula libre  $\langle x | G^0(E) | x' \rangle$ , que está dada explícitamente por la ec.(3.13). No escribiremos la expresión para  $\langle x | G^2(E) | x' \rangle$ , por ahorro de espacio solamente escribiremos la ecuación trascendental que nos proporciona sus

polos complejos:

$$1 + i\left(\frac{m}{\hbar^2}\right) (\lambda_1 + \lambda_2) + \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^2 \lambda_1 \lambda_2 (e^{2ikL} - 1) = 0 \quad (3.22)$$

esta última se obtiene simplemente igualando a cero el denominador de la función de Green,  $\langle x | G^2(E) | x' \rangle$ .

Lo que hicimos primeramente fué separarla en su parte real  $U$ , y su parte imaginaria  $V$ , dando lugar a un par de ecuaciones simultaneas con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} U(a_n, b_n) &= 0 \\ V(a_n, b_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

y entonces para resolver este par de ecuaciones utilizamos el método de Newton-Raphson para ecuaciones no lineales (que en forma breve se expone en el Apéndice B). Sabemos que un requisito indispensable para aplicar este método numérico es tener a la mano valores iniciales *adecuados* de tanto la parte real como de la parte imaginaria del polo particular que estemos buscando. Con *adecuados* queremos decir, suficientemente cercanos a las raíces para que haya convergencia.

En la sección 3.1 vimos que en el límite apropiado la ec.(3.10) se reduce a la ec.(3.11), esto es, a los estados ligados de la caja cuadrada de potencial, lo cual nos da una buena sugerencia de utilizar como valores iniciales de la parte real del polo,  $\text{Re}(E)$ , a los estados ligados de la caja cuadrada de potencial (obviamente que si trabajamos con energías  $E_n$  en lugar de valores de  $k_n$ , debemos hacer en (3.22) el cambio de variable  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ). Con respecto a la parte imaginaria  $\text{Im}(E)$ , no hay problema en tomarla como cero (siempre y cuando se cumpla que  $\text{Re}(E) \gg \text{Im}(E)$ ). Sin embargo no todas las

resonancias se pueden localizar así pues el método falla cuando las intensidades no son lo suficientemente altas como para que los valores de  $\text{Re}(E_n)$  y los de la caja estén cercanos y haya convergencia. Recurrimos entonces a otra fuente de valores iniciales más precisa que consiste en localizar la posición de los máximos en las gráficas del coeficiente de transmisión vs. energía (de la sección 3.1). La ventaja de hacer lo último está en que el método converge para cualquier resonancia (permitida por el sistema), pero la gran desventaja es que tendríamos que hacer previamente todo el tedioso trabajo de la sección 3.1. En la tabla (3.1) se presentan las primeras cinco resonancias para los sistemas SIMETRICOS cuyo coeficiente de transmisión calculamos en la sección 2.1, nos referimos a los casos correspondientes a las gráficas de la fig.(3.2). En esta tabla  $L$  es la separación (en  $\text{Å}$ ) entre las dos deltas,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  sus correspondientes intensidades en este caso iguales (en  $\text{eV} \cdot \text{Å}$ ). Y las últimas dos columnas son, respectivamente, la parte real,  $\text{Re}(E_n)$ , y la parte imaginaria,  $\text{Im}(E_n)$ , ( $n=1,2,\dots$ ) de los polos de  $\langle x | G^2(E) | x' \rangle$ , en unidades de eV..

El ligero aumento de la energía de resonancia conforme se incrementan las intensidades, que apenas se alcanza a distinguir en las gráficas, es más evidente en los valores numéricos de  $\text{Re}(E_n)$  que tenemos en la tabla (3.1), así como también la disminución simultánea de la anchura del polo correspondiente.

El cálculo de los tiempos que haremos con los polos de  $G(x,x';k)$  de esta tabla serán malos en el sentido anteriormente discutido (sección 3.1), no obstante presentaremos los cálculos correspondientes por completez y para exhibir con números la

	$n$	$L$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$Re(E)$	$Im(E)$
	1.	50.	10.	10.	.1350260065D+00	-.1009445572D-01
	2.	50.	10.	10.	.5629733590D+00	-.6945491952D-01
1.	3.	50.	10.	10.	.1324994285D+01	-.1912133370D+00
	4.	50.	10.	10.	.2447245941D+01	-.3648275405D+00
	5.	50.	10.	10.	.3940400178D+01	-.5775642288D+00
	1.	50.	20.	20.	.1572881311D+00	-.3632551539D-02
	2.	50.	20.	20.	.6351016881D+00	-.2709771486D-01
2.	3.	50.	20.	20.	.1447322513D+01	-.8249058065D-01
	4.	50.	20.	20.	.2608428993D+01	-.1729106306D+00
	5.	50.	20.	20.	.4129270390D+01	-.2960043553D+00
	1.	50.	30.	30.	.1664379423D+00	-.1836934402D-02
	2.	50.	30.	30.	.6680509325D+00	-.1413522276D-01
3.	3.	50.	30.	30.	.1510806051D+01	-.4492123312D-01
	4.	50.	30.	30.	.2702254046D+01	-.9868082010D-01
	5.	50.	30.	30.	.4249620234D+01	-.1767384388D+00
	1.	50.	40.	40.	.1714064981D+00	-.1102966987D-02
	2.	50.	40.	40.	.6867337731D+00	-.8610509318D-02
4.	3.	50.	40.	40.	.1549009749D+01	-.2795374058D-01
	4.	50.	40.	40.	.2762451662D+01	-.6298228541D-01
	5.	50.	40.	40.	.4331639826D+01	-.1158544060D+00

Tabla 3.1.- Resonancias para cuatro configuraciones distintas de potenciales doble delta simétricos. Los parámetros:  $n$ ,  $L$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  representan, respectivamente, el nivel de la resonancia, la separación, e intensidades de las deltas

gradual mejora de la aproximación al ir del caso (a) al caso (d) de la fig. 3.4.

Por otro lado tenemos en la tabla (3.2) las resonancias obtenidas para los casos ASIMETRICOS, mismos que trabajamos en la sección 3.1, cuando analizábamos la probabilidad de transmisión..

En la siguiente sección veremos como estos valores de  $\text{Re}(E_n)$  e  $\text{Im}(E_n)$  y del coeficiente de reflexión evaluado en  $\varepsilon_n = \text{Re}(E_n)$ , conducen a que los tiempos de permanencia dependen de por cuál extremo del sistema incide el electrón, tiempos que son en general diferentes. Recordemos del capítulo 2 que  $E_n = \varepsilon_n - i \frac{\Gamma_n}{2}$ , es decir  $\varepsilon_n = \text{Re}(E_n)$  y  $\Gamma_n = -2i\text{Im}(E_n)$ , donde  $\Gamma_n$  es la anchura de la n-ésima resonancia. Notamos entonces de las dos tablas de datos mostradas, un aumento paulatino en las anchuras de las resonancias conforme ascendemos de un estado de energía  $\varepsilon_n$  a uno mayor  $\varepsilon_{n+1}$ . Decimos entonces que cuando n crece las resonancias se vuelven más débiles en el sentido de que el sistema "retiene menos tiempo al electrón dentro de sí" como en la siguiente sección tendremos oportunidad de ver.

	n	L	$\lambda_1$	$\lambda_2$	Re(E)	Im(E)
1.	1.	50.	60.	60.	.1766546339D+00	-.5233077291D-03
	2.	50.	60.	60.	.7069923941D+00	-.4135935967D-02
	3.	50.	60.	60.	.1592083184D+01	-.1368605226D-01
	4.	50.	60.	60.	.2833552758D+01	-.3158851832D-01
2.	1.	50.	50.	70.	.1763499236D+00	-.5665523541D-03
	2.	50.	50.	70.	.7058357567D+00	-.4467100881D-02
	3.	50.	50.	70.	.1589691201D+01	-.1472814161D-01
	4.	50.	50.	70.	.2829752045D+01	-.3384006798D-01
3.	1.	50.	40.	80.	.1753305741D+00	-.7220392346D-03
	2.	50.	40.	80.	.7019997685D+00	-.5647282398D-02
	3.	50.	40.	80.	.1581858156D+01	-.1839367663D-01
	4.	50.	40.	80.	.2817488339D+01	-.4163972591D-01
4.	1.	50.	30.	90.	.1731765843D+00	-.1105108493D-02
	2.	50.	30.	90.	.6940743513D+00	-.8488677664D-02
	3.	50.	30.	90.	.1566179869D+01	-.2693610439D-01
	4.	50.	30.	90.	.2793789760D+01	-.5916914008D-01

Tabla 3.2.- Resonancias para tres configuraciones distintas de potenciales doble delta asimétricos. Los parámetros: n, L,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  representan, respectivamente, el nivel de la resonancia, la separación, e intensidades de las deltas

### 3.4.-CALCULO DE TIEMPOS CARACTERISTICOS Y DE PERMANENCIA.

En la segunda columna de la tabla 3.3 aparecen los valores del coeficiente de reflexión  $R(\varepsilon_n)$ , evaluado en las energías de resonancia para cada uno de los casos de la tabla 3.1, en la tercera columna los valores de  $\Gamma_n$  y en las últimas dos tenemos, respectivamente, a las "anchuras parciales"  $\Gamma_n^L$  y  $\Gamma_n^O$  dadas por las ecuaciones (2.30), es decir:

$$\Gamma_n^O \cong \frac{1}{2} \Gamma_n \{1 + [R(\varepsilon_n)]^{1/2}\}; \quad \Gamma_n^L \cong \frac{1}{2} \Gamma_n \{1 - [R(\varepsilon_n)]^{1/2}\} \quad (3.24)$$

Chemos hecho esta elección de signos debido a que la delta de la izquierda es la más débil), en base a los valores de esta última tabla, utilizamos las relaciones (2.26), (2.33) y (2.34) para determinar  $\tau_n^L$ ,  $\tau_n^O$ ,  $\tau_{LO}$  y  $\tau_{OL}$ . Nos referimos a las ecuaciones:

$$\tau_n^O \cong \hbar / \Gamma_n^O; \quad \tau_n^L \cong \hbar / \Gamma_n^L \quad (3.24)$$

$$\tau_{OL}(\varepsilon_n) \approx \frac{4 \hbar \Gamma_n^O}{\Gamma_n \Gamma_n} \quad (3.25)$$

y

$$\tau_{LO}(\varepsilon_n) \approx \frac{4 \hbar \Gamma_n^L}{\Gamma_n \Gamma_n} \quad (3.26)$$

donde, como ya lo habíamos dicho,  $\tau_n^L$  y  $\tau_n^O$  se definen como los tiempos característicos para tunelaje resonante y  $\tau_{LO}$  y  $\tau_{OL}$  como los tiempos de permanencia del electrón dentro del sistema, cuando cruza de derecha a izquierda y de izquierda a derecha respectivamente. Sus correspondientes valores aparecen en la tabla 3.4.

Resultados de cálculos análogos para el caso asimétrico aparecen en las tablas 3.5 y 3.6.

n	$R(\varepsilon_n)$	$\Gamma_n$	$\Gamma_n^L$	$\Gamma_n^O$	
1.	.0074	.2018891143D-01	.9226415578D-02	.1096249585D-01	
2.	.0138	.1389098390D+00	.6129235913D-01	.7761747992D-01	
1.	3.	.0126	.3824266740D+00	.1697836386D+00	.2126430354D+00
4.	.0093	.7296550811D+00	.3296264675D+00	.4000286136D+00	
5.	.0066	.1155128458D+01	.5306616812D+00	.6244667765D+00	
1.	.0008	.7265103079D-02	.3530469613D-02	.3734633466D-02	
2.	.0023	.5419542971D-01	.2578893640D-01	.2840649332D-01	
2.	3.	.0034	.1649811613D+00	.7766976560D-01	.8731139571D-01
4.	.0037	.3458212612D+00	.1623651945D+00	.1834560666D+00	
5.	.0035	.5920087106D+00	.2784674545D+00	.3135412561D+00	
1.	.0002	.3673868803D-02	.1811922856D-02	.1861945947D-02	
2.	.0006	.2827044552D-01	.1377970067D-01	.1449074485D-01	
3.	3.	.0011	.8984246624D-01	.4341924018D-01	.4642322607D-01
4.	.0015	.1973616402D+00	.9489117837D-01	.1024704618D+00	
5.	.0017	.3534768776D+00	.1695502764D+00	.1839266012D+00	
1.	.0001	.2205933975D-02	.1094163760D-02	.1111770215D-02	
2.	.0002	.1722101864D-01	.8479568348D-02	.8741450288D-02	
4.	3.	.0004	.5590748116D-01	.2736287542D-01	.2854460574D-01
4.	.0007	.1259645708D+00	.6137328408D-01	.6459128674D-01	
5.	.0008	.2317088119D+00	.1125539390D+00	.1191548730D+00	

Tabla 3.3.-valores del coeficiente de reflexión  $R(\varepsilon_n)$ , de la anchura de la resonancia  $\Gamma_n = -2\text{Im}(\varepsilon_n)$ , y de las anchuras parciales  $\Gamma_n^L$  y  $\Gamma_n^O$ , para los potenciales simétricos de la tabla 3.1.

n	$\tau_n^L$	$\tau_n^O$	$\tau_{LO}$	$\tau_{OL}$	
1.	.713405D-13	.600426D-13	.595987D-13	.708130D-13	
2.	.107390D-13	.848027D-14	.836314D-14	.105907D-13	
1.	3.	.387680D-14	.309541D-14	.305653D-14	.382811D-14
4.	.199686D-14	.164543D-14	.163011D-14	.197827D-14	
5.	.124037D-14	.105405D-14	.104710D-14	.123219D-14	
1.	.186439D-12	.176247D-12	.176108D-12	.186292D-12	
2.	.255232D-13	.231714D-13	.231173D-13	.254637D-13	
2.	3.	.847456D-14	.753873D-14	.751299D-14	.844562D-14
4.	.405393D-14	.358787D-14	.357453D-14	.403885D-14	
5.	.236371D-14	.209930D-14	.209193D-14	.235542D-14	
1.	.363270D-12	.353510D-12	.353445D-12	.363203D-12	
2.	.477672D-13	.454233D-13	.453946D-13	.477370D-13	
3.	3.	.151596D-13	.141786D-13	.141628D-13	.151426D-13
4.	.693655D-14	.642348D-14	.641401D-14	.692632D-14	
5.	.388214D-14	.357870D-14	.357278D-14	.387571D-14	
1.	.601571D-12	.592044D-12	.592007D-12	.601533D-12	
2.	.776239D-13	.752984D-13	.752810D-13	.776060D-13	
4.	3.	.240551D-13	.230593D-13	.230490D-13	.240444D-13
4.	.107248D-13	.101905D-13	.101838D-13	.107178D-13	
5.	.584802D-14	.552405D-14	.551957D-14	.584327D-14	

Tabla 3.4.-Tiempos característicos y tiempos de permanencia calculados en base a los datos de las tablas 3.1 y 3.3 para los potenciales simétricos doble delta.

$n$	$R(\varepsilon_n)$	$\Gamma_n$	$\Gamma_n^L$	$\Gamma_n^D$
1.	1. .0000	.1046615458D-02	.5213769638D-03	.5252384945D-03
	2. .0001	.8271871933D-02	.4106120188D-02	.4165751745D-02
	3. .0001	.2737210451D-01	.1354353949D-01	.1382856502D-01
	4. .0002	.6317703665D-01	.3117158472D-01	.3200545193D-01
2.	1. .1043	.1133104708D-02	.3836214037D-03	.7494833045D-03
	2. .1016	.8934201761D-02	.3043533635D-02	.5890668126D-02
	3. .0974	.2945628322D-01	.1013265487D-01	.1932362835D-01
	4. .0920	.6768013597D-01	.2357408601D-01	.4410604996D-01
3.	1. .3570	.1444078469D-02	.2906009581D-03	.1153477511D-02
	2. .3485	.1129456480D-01	.2313632535D-02	.8980932261D-02
	3. .3351	.3678735326D-01	.7745543969D-02	.2904180929D-01
	4. .3182	.8327945183D-01	.1815142034D-01	.6512803149D-01
4.	1. .6354	.2210216985D-02	.2242187622D-03	.1985998223D-02
	2. .6220	.1697735533D-01	.1793770053D-02	.1518358528D-01
	3. .6013	.5387220878D-01	.6049057476D-02	.4782315131D-01
	4. .5750	.1183382802D+00	.1430348140D-01	.1040347988D+00

Tabla 3.5.-valores del coeficiente de reflexión  $R(\varepsilon_n)$ , de la anchura de la resonancia  $\Gamma_n = -2\text{Im}(\varepsilon_n)$ , y de las anchuras parciales  $\Gamma_n^L$  y  $\Gamma_n^D$ , para los potenciales asimétricos de la tabla 3.2.

n	$\tau_n^L$	$\tau_n^O$	$\tau_{LO}$	$\tau_{OL}$
1.	1. .126246D-11	.125318D-11	.125316D-11	.126244D-11
	2. .160302D-12	.158007D-12	.157999D-12	.160293D-12
	3. .486001D-13	.475984D-13	.475932D-13	.485948D-13
	4. .211159D-13	.205658D-13	.205622D-13	.211123D-13
2.	1. .171580D-11	.878228D-12	.786669D-12	.153692D-11
	2. .216267D-12	.111739D-12	.100391D-12	.194304D-12
	3. .649600D-13	.340628D-13	.307466D-13	.586357D-13
	4. .279212D-13	.149235D-13	.135501D-13	.253516D-13
3.	1. .226502D-11	.570637D-12	.366897D-12	.145632D-11
	2. .284495D-12	.732905D-13	.477512D-13	.185358D-12
	3. .849801D-13	.226645D-13	.150690D-13	.565010D-13
	4. .362626D-13	.101065D-13	.689071D-14	.247242D-13
4.	1. .293560D-11	.331429D-12	.120846D-12	.107038D-11
	2. .366946D-12	.433506D-13	.163854D-13	.138696D-12
	3. .108813D-12	.137636D-13	.548766D-14	.433848D-13
	4. .460180D-13	.632690D-14	.268918D-14	.195595D-13

Tabla 3.6.-Tiempos característicos y tiempos de permanencia calculados en base a los datos de las tablas 3.2 y 3.5 para los potenciales asimétricos doble delta.

Para los potenciales simétricos vimos que para bajas intensidades  $\lambda$ , el coeficiente de reflexión no es cero (ó casi cero) como esperaríamos, la razón de esto es que hay una pequeña discrepancia entre los valores de la energía correspondientes a máxima transmisión y los proporcionados por la parte real de los polos de  $t(k)$ , discrepancia que disminuye al aumentar las intensidades de las deltas.

Los efectos interesantes se presentan en los potenciales asimétricos. Notamos en las últimas dos tablas que  $\Gamma_n^L < \Gamma_n^O$ ,  $\tau_n^L > \tau_n^O$  y  $t_{LO} < t_{OL}$ . La primera desigualdad y la segunda significan que una vez que el electrón ha sido atrapado en un estado metaestable le es "más difícil" escapar por el lado derecho que por el izquierdo, pues recordemos que  $\tau_n^L$  y  $\tau_n^O$  son tiempos de decaimiento por la derecha y por la izquierda respectivamente. Lo anterior se puede intuir viendo que la primera delta es de menor intensidad que la segunda y ofrece por lo tanto menos resistencia al paso del electrón. La tercera desigualdad es otra de las consecuencias interesantes de la asimetría, significa que un electrón que atraviese el sistema de derecha a izquierda tardará un tiempo  $t_{LO}$ , menor que el tiempo  $t_{OL}$  que tardaría en hacerlo en sentido contrario. Y ésta diferencia se vuelve más marcada cuanto más "aumenta" la asimetría. La razón para estos dos tiempos,  $t_{LO}/t_{OL}$  llega a ser alrededor de un orden de magnitud.

## CAPITULO 4

### EL POTENCIAL DE DOBLE BARRERA.

En este capítulo determinaremos los tiempos característicos  $\tau_n^O$ ,  $\tau_n^L$  (para  $n=1$ ); y los tiempos de permanencia  $\tau_{oL}$ ,  $\tau_{Lo}$ , asociados a un electrón que incide sobre un sistema formado por dos barreras repulsivas cuya forma se ilustra en la

fig.4.1. Estudiaremos por separado los casos simétrico y asimétrico exhibiendo la dependencia que tienen los estados metaestables del sistema con los diferentes parámetros del potencial (alturas, anchuras, etc.), presentando en ambos casos una exposición gráfica y los

resultados numéricos respectivos. Pero estamos principalmente interesados en el segundo caso, en ver el efecto que tiene la asimetría sobre las resonancias y sus correspondientes tiempos de vida, que es el objetivo central de este trabajo.

El material de este capítulo se reparte de la siguiente manera. En la sección 4.1 analizamos la probabilidad de transmisión del electrón por efecto túnel a través de las dos barreras cuando éstas son iguales (caso simétrico). La sección 4.2 presenta los resultados numéricos de los polos complejos de la amplitud de transmisión (mismos que de la función de Green)

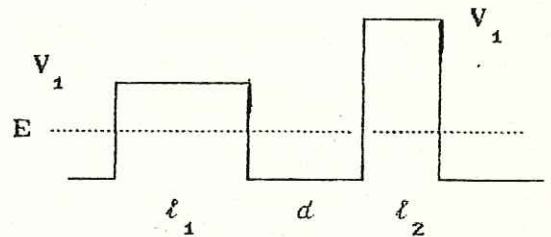


Fig.4.1.- Potencial dispersor de doble barrera rectangular; anchuras:  $l_1$  y  $l_2$ ; alturas:  $V_1$  y  $V_2$ .  $E < V_1, V_2$ .

para el caso simétrico. En 4.3, para este mismo caso, se hace todo el análisis de los tiempos de acuerdo a la teoría expuesta en el capítulo 2. En la misma secuencia, para el caso del potencial asimétrico, las secciones 4.4, 4.5, y 4.6 se reservan para el coeficiente de transmisión, el cálculo de polos de la amplitud de transmisión y análisis de los tiempos, respectivamente.

## A.-CASO SIMETRICO

### 4.1.-COEFICIENTE DE TRANSMISION.

Consideremos el potencial de una sola barrera como el que se indica en la fig.4.2, donde un electrón incide por la izquierda con una energía cinética  $E < V_0$ . La ecuación de Schrödinger para este sistema es:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \Psi = E \Psi \quad (4.1)$$

donde:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{para } x < |l/2| \\ 0 & \text{para } x > |l/2| \end{cases}$$

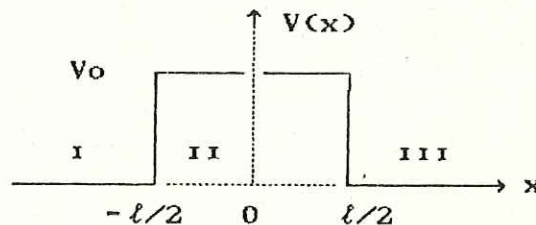


Fig.4.2.- Potencial de barrera rectangular. Altura,  $V_0$ ; anchura,  $l$ .

La solución para cada una de las tres regiones es:

$$\begin{aligned}
 \Psi_I &= A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x < -l/2 \\
 \Psi_{II} &= \alpha e^{qx} + \beta e^{-qx} & -l/2 < x < l/2 \\
 \Psi_{III} &= C e^{ikx} + D e^{-ikx} & x > l/2
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde:  $k = \sqrt{2mE} / \hbar$  y  $q = \sqrt{2m(V_0 - E)} / \hbar$ .

Nos interesa encontrar relaciones lineales entre los coeficientes A, B y C, D. Esto lo haremos aplicando a (4.2) las condiciones de frontera en  $x = -l/2$  y  $x = l/2$ :

$$\begin{aligned}
 \Psi_I(-l/2) &= \Psi_{II}(-l/2) \\
 \Psi_{II}(l/2) &= \Psi_{III}(l/2) \\
 \frac{d\Psi_I}{dx}(-l/2) &= \frac{d\Psi_{II}}{dx}(-l/2) \\
 \frac{d\Psi_{II}}{dx}(l/2) &= \frac{d\Psi_{III}}{dx}(l/2)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

tendremos entonces:

$$\begin{aligned}
 A e^{-ikl/2} + B e^{ikl/2} &= \alpha e^{-ql/2} + \beta e^{ql/2} \\
 \alpha e^{ql/2} + \beta e^{-ql/2} &= C e^{ikl/2} + D e^{-ikl/2} \\
 ik[A e^{-ikl/2} - B e^{ikl/2}] &= q[\alpha e^{-ql/2} - \beta e^{ql/2}] \\
 q[\alpha e^{ql/2} - \beta e^{-ql/2}] &= ik[C e^{ikl/2} - D e^{-ikl/2}]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Estas relaciones lineales entre los coeficientes A, B,  $\alpha$ ,  $\beta$ , C y D pueden ser convenientemente expresados en términos de matrices. De (4.4) tenemos

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [1 + \frac{ik}{q}] e^{(q-ik)l/2} & [1 - \frac{ik}{q}] e^{(q+ik)l/2} \\ [1 - \frac{ik}{q}] e^{-(q+ik)l/2} & [1 + \frac{ik}{q}] e^{-(q-ik)l/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [1 + \frac{q}{ik}] e^{(q-ik)l/2} & [1 - \frac{q}{ik}] e^{-(q+ik)l/2} \\ [1 - \frac{q}{ik}] e^{(q+ik)l/2} & [1 + \frac{q}{ik}] e^{-(q-ik)l/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Si hacemos el producto de ambas matrices en el orden adecuado obtendremos la matriz  $M_1$ , que relaciona C, D con A, B

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad (4.7)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} [\cosh ql + i \frac{k^2 - q^2}{2kq} \sinh ql] e^{-ikl} & -i \frac{k^2 + q^2}{2kq} \sinh ql \\ i \frac{k^2 + q^2}{2kq} \sinh ql & [\cosh ql - i \frac{k^2 - q^2}{2kq} \sinh ql] e^{ikl} \end{pmatrix}$$

La matriz  $M_1$ , definida por (4.7) es la matriz de transferencia del potencial de barrera rectangular.

Considerando ahora el potencial simétrico de doble barrera rectangular (fig.4.3), tendremos una matriz de la misma forma que  $M_1$  para la segunda barrera y la matriz de transferencia efectiva del sistema está dada por el producto

$$M = M_1 E(k,d) M_1 \quad (4.8)$$

donde  $E(k,d) = \begin{pmatrix} e^{ikd} & 0 \\ 0 & e^{-ikd} \end{pmatrix}$ ,

de acuerdo con la teoría expuesta en el Apéndice A sobre la matriz de transferencia.

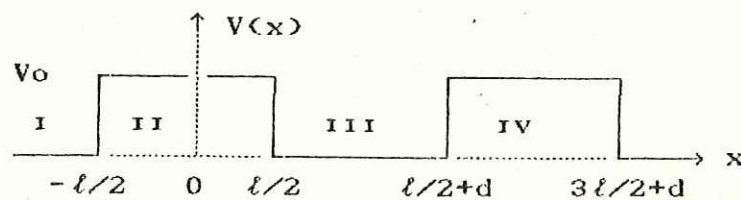


Fig.4.3.-Potencial de doble barrera simétrico.  
altura,  $V_0$ ; anchura,  $l$ .

Si la función de onda en la región de  $x > 3l/2+d$  es

$\Psi_v = F e^{ikx} + G e^{-ikx}$  entonces

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Imponemos ahora la condición de que la partícula incida únicamente por la izquierda y con amplitud 1, esto es  $A=1$ , y  $G=0$ , además usaremos la notación más conveniente de:  $B=r$ ,  $F=t$ , donde  $r$  y  $t$  las definimos como las amplitudes de reflexión y de transmisión, respectivamente.

Después de hacer la multiplicación (4.8) extraemos el elemento de matriz  $M_{22}$  de  $M$ , para obtener, de acuerdo a la ec (A.11), una expresión analítica de la amplitud de transmisión

$$t(k) = \frac{1}{M_{22}} \quad (4.10)$$

donde

$$M_{22} = \left( \frac{k^2 + q^2}{2kq} \right)^2 \text{senh}^2 ql e^{ikd} + \left[ \cosh ql - i \frac{k^2 - q^2}{2kq} \text{senh} ql \right]^2 e^{2ikl} e^{-ikd}$$

La probabilidad de que el electrón atraviese las dos barreras está dada por:

$$T = |t(k)|^2 \quad (4.11)$$

y la probabilidad de reflexión:

$$R = 1 - T \quad (4.12)$$

Se implementó un programa de cómputo para evaluar la función (4.11) en términos de la energía,  $E$  (poniendo  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ ).

En la fig.4.4 (a) aparece una gráfica de  $T$  vs.  $E$  para el sistema cuyos parámetros se indican en la figura adyacente. En (b) y en (c) se observa el efecto de incrementar el espesor de

las barreras. Mientras mayor sea el área de las barreras más estrecha será la resonancia y por lo tanto más fuerte. Con *mas fuerte* queremos decir que la partícula (electrón) escapa con mayor dificultad del interior de las barreras una vez que ha penetrado. Requiere un tiempo mayor para lograrlo como lo veremos en secciones posteriores cuando calculemos numéricamente los tiempos característicos y de permanencia.

En la fig.4.5 la secuencia de gráficas, (a), (b), (c) muestra un adelgazamiento gradual del pico de resonancia acompañado de un corrimiento hacia atrás en la posición del mismo. El efecto de separar las barreras es bajar el nivel de resonancia y, como en el caso anterior, hacerlas más fuertes.

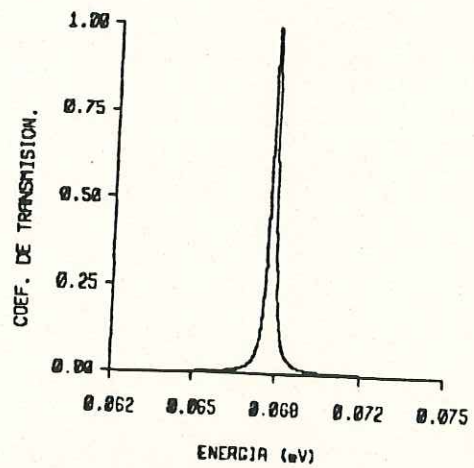
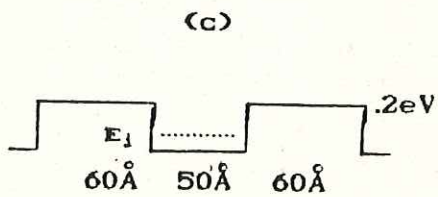
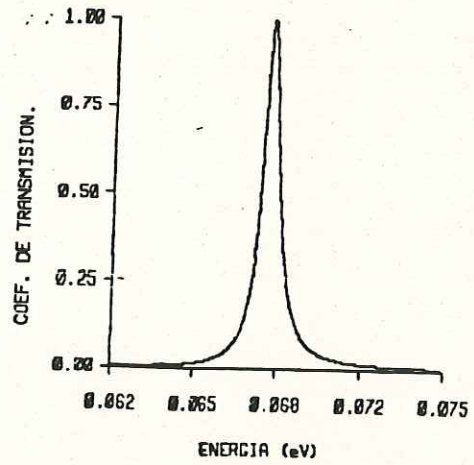
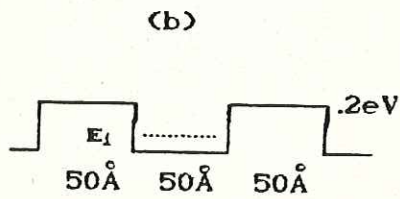
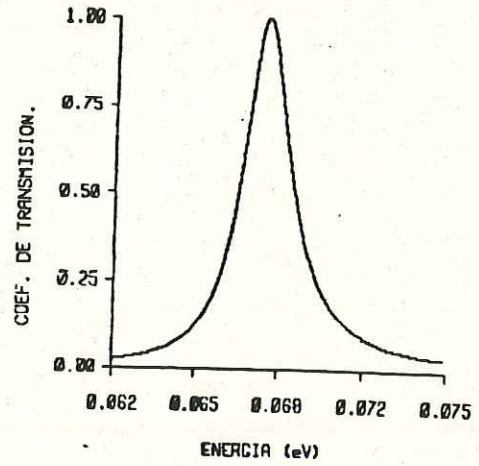
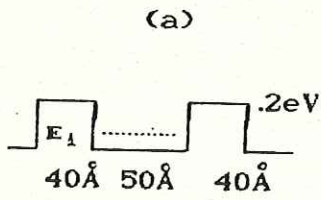


Fig.4.4.-Coeficiente de transmisión para tres configuraciones del potencial simétrico. La secuencia (a), (b), (c) muestra el efecto de incrementar el espesor de las barreras.

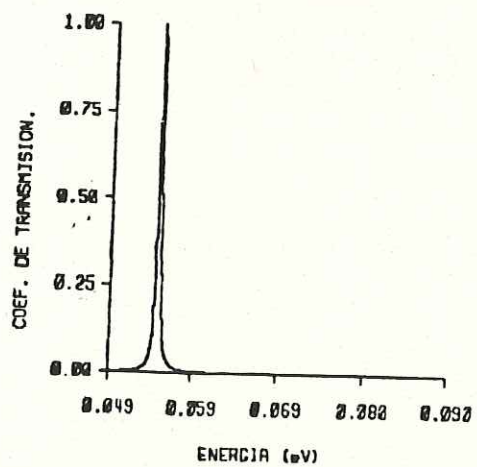
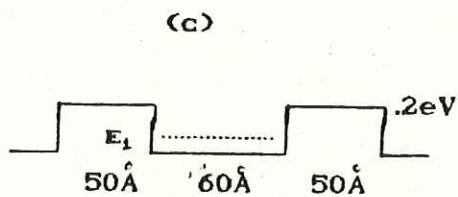
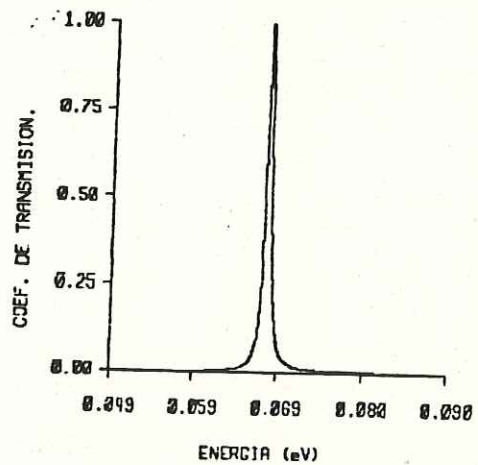
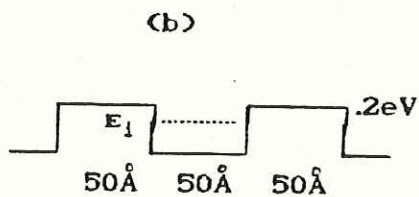
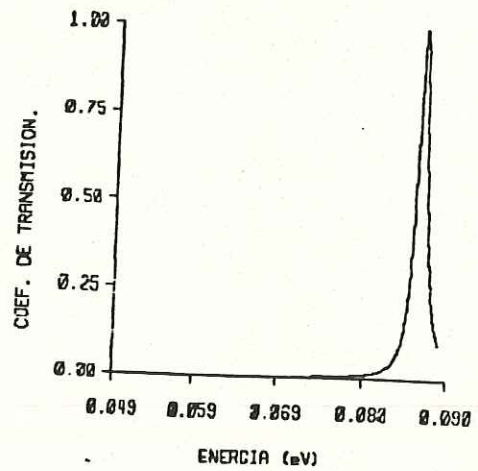
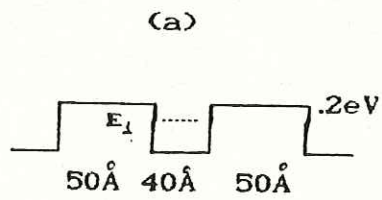


Fig.4.5.-Coeficiente de transmisión para tres configuraciones del potencial simétrico. La secuencia (a), (b), (c) muestra el efecto de incrementar la separación entre las barreras.

Con estos dos ejemplos podemos ver cómo la anchura y la posición del pico son más sensibles a los cambios en algunos parámetros del potencial que en otros.

En la fig.4.6 presentamos variaciones en la altura de las barreras y el espesor de las mismas pero manteniendo constante su producto, es decir,  $l V_0 = \text{cte.}$ , (en particular  $l V_0 = 10 \text{ eV} \cdot \text{Å}$  es nuestro caso). En la parte superior de cada gráfica se indican los valores de  $l$ ,  $d$ ,  $l$ ,  $V_0$ , respectivamente.

Para estas gráficas hemos escogido un intervalo en las energías tal que alcance a incluir todas las resonancias permitidas por el sistema y una partición tal que pueda resolver hasta el pico más estrecho. Si seguimos en esta figura la secuencia (a), (b), (c), (d) observamos que conforme aumentan las alturas de las barreras el sistema admite cada vez un mayor número de resonancias y cada vez más débiles. Notamos que aumentando la altura y disminuyendo el espesor manteniéndose en 10 el producto, el perfil de resonancias va tomando la forma del correspondiente al potencial doble delta con intensidades  $\lambda_1 = 10$ ,  $\lambda_2 = 10$ , y  $d = 50 \text{ Å}$ , (comparar las gráficas 4.6 (d) con gráficas 3.2(a) del capítulo anterior). Sin embargo, como ya antes lo habíamos discutido, estos sistemas no reúnen los requisitos para que la aproximación hecha en el capítulo 2 sea válida y nos permita por lo tanto calcular sus correspondientes tiempos de vida sin mucho error, pues el traslape entre resonancias vecinas aumenta conforme adelgazamos las barreras aunque incrementemos las alturas, manteniendo constante el área.

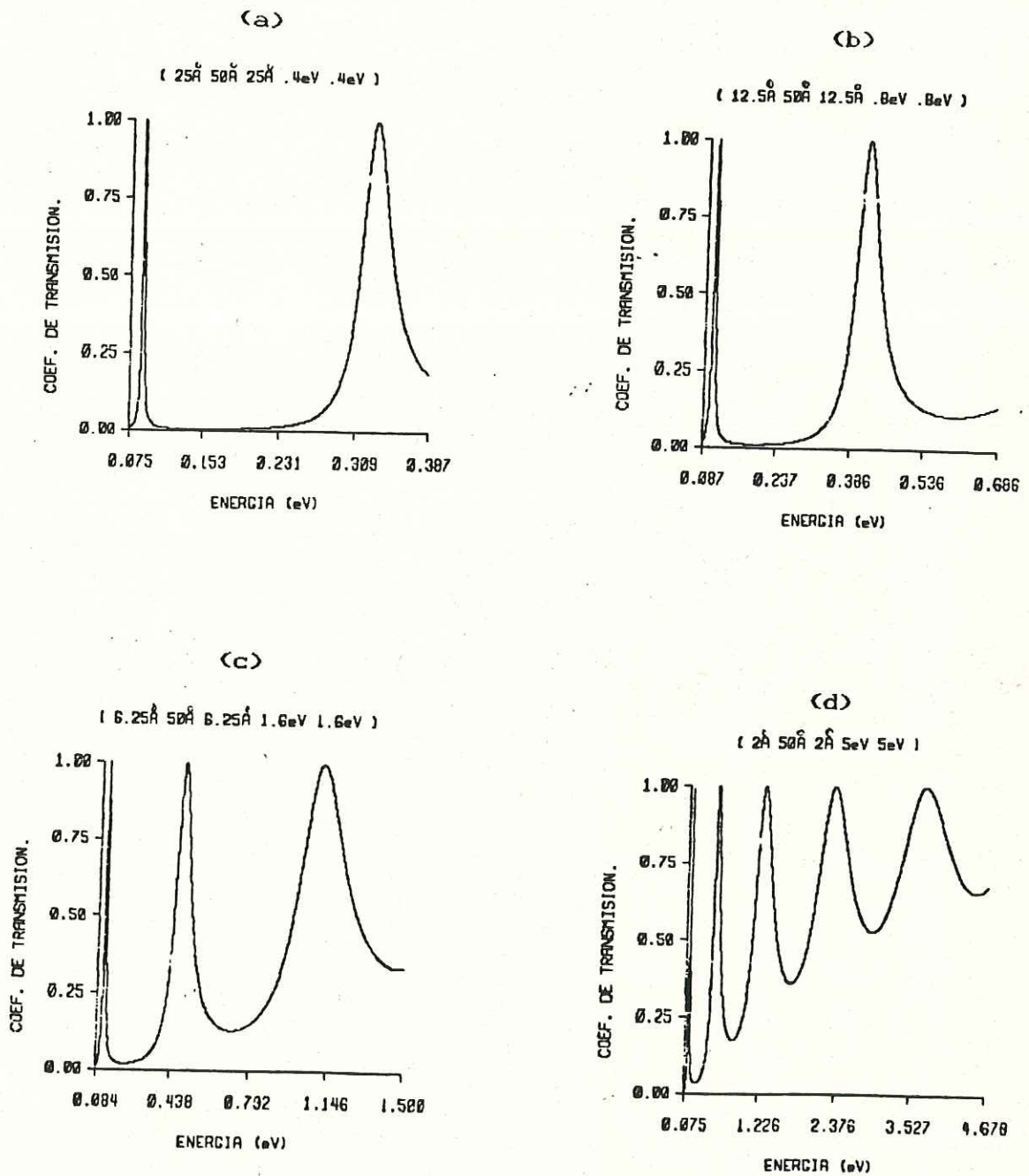


Fig.4.6.-Coeficiente de transmisión para cuatro configuraciones del potencial simétrico. La secuencia (a), (b), (c), (d) muestra el efecto de incrementar la altura de las barreras disminuyendo el espesor y manteniendo constante el producto en  $10 \text{ \AA} \cdot \text{eV}$ .

#### 4.2.-CALCULO DE LAS RESONANCIAS.

En el capítulo 2 vimos la relación existente entre la función de Green evaluada en los extremos del sistema con la amplitud de probabilidad  $t(k)$  para  $k$  compleja (ec. 2.17); la cual es válida en la región de interacción  $0 < x < L$ , cuando la partícula incide por la izquierda. Estamos hablando de la ecuación:

$$t(k) = 2ik G^+(0,L;k) e^{-ikL} \quad (4.13)$$

Evidentemente  $t(k)$  tiene los mismos polos que  $G^+(0,L;k)$ . Y ya que conocemos de forma explícita a  $t(k)$  aprovecharemos esta circunstancia para determinar las resonancias del sistema sin la necesidad de encontrar explícitamente la función de Green. La amplitud de transmisión que vamos a utilizar tiene una expresión algebraica dada por la ec. (4.10) pero con la diferencia esencial de que ahora consideramos  $k$ 's en general complejas; con este nuevo ingrediente estamos tomando en cuenta la naturaleza cuasiestacionaria del sistema.

Entonces para encontrar los eigenvalores complejos de la energía (resonancias) en nuestro sistema debemos idear algún método para calcular los polos complejos de  $t(k)$  (ó ceros de  $M_{22}$ ). La ecuación a resolver es:

$$M_{22} = 0 \quad (4.14 \text{ a})$$

donde  $M_{22}$  está dada explícitamente en (4.10).

La ec. (4.14) es una ecuación trascendental de variable compleja,  $k$ . Para resolver esta ecuación numéricamente lo que se hizo fué lo mismo que en el capítulo 3 para el potencial doble- $\delta$ , utilizar el método iterativo de Newton-Raphson para ecuaciones no-lineales (véase Apéndice B).

Un requisito indispensable para la aplicación de este método es que tengamos a la mano valores iniciales de  $k_n = a_n - ib_n$  (ó de  $E_n = \varepsilon_n - i\Gamma_n/2$ ) lo suficientemente cercanos a la raíz esperada para que haya convergencia. Una parte importante de la solución del problema lo es también el encontrar una buena fuente de valores iniciales que implique poco trabajo y esfuerzo para nosotros.

En este trabajo utilizamos con muy buenos resultados los valores iniciales proporcionados por los eigenvalores de la caja cuadrada de potencial  $\left[ \varepsilon_n = \frac{\hbar^2 k_n^2 \pi^2}{2m d^2}, n=1,2,3,\dots \right]$ , donde  $d$  es el ancho de la caja, cuyo valor lo tomamos igual a la separación entre nuestras barreras. Con respecto al valor inicial de la parte imaginaria no tuvimos ningún problema en tomarlo como cero ( $\Gamma_n = 0$ ), pues el factor decisivo aquí es la parte real ya que generalmente  $\varepsilon_n \gg \Gamma_n$ .

En la tabla 4.1 mostramos para siete distintas configuraciones de potencial los resultados de la primera resonancia (aunque el método es válido para segundas, terceras etc. siempre y cuando el potencial las admita). Con respecto a la masa, hemos usado el valor de la masa efectiva utilizado por Sollner et. al. (1983):  $m=0.08m_e$ .

En los tres primeros casos ( $n=1,2,3$ ) analizamos el efecto de incrementar el espesor de las barreras (desde  $40\text{\AA}$  hasta  $60\text{\AA}$ ) y vemos que la energía de resonancia  $\text{Re}(E)$ , aumenta casi de manera imperceptible; en cambio vemos cómo la cantidad  $\Gamma_n = -2 \text{Im}(E_n)$  decrece apreciablemente (NOTA: No confundir la "n" que aparece en la primera columna de las tablas de este capítulo con el nivel de las resonancias como lo hicimos en

las tablas correspondientes al cap. 3, simplemente indica el orden de aparición en las tablas, de los diferentes potenciales. En cuanto al nivel, estamos considerando el primero para todos los casos)

Siguiendo en la misma tabla la secuencia  $n=4,2,5$  vemos para espesores fijos de las barreras, el resultado de incrementar la separación entre ellas (desde  $40\text{\AA}$  hasta  $60\text{\AA}$ ). Aquí  $\varepsilon_n = \text{Re}(E_n)$  es un poco más sensible a estos cambios que en los anteriores, también  $\Gamma_n$  decrece apreciablemente. Decimos en este caso que las resonancias se hacen más fuertes y más estable el sistema.

$n$	$L_1$	$d$	$L_2$	$V_1$	$V_2$	$\text{Re}(E)$	$\text{Im}(E)$
1.	40.	50.	40.	.20	.20	.6789992678D-01	-.1093132174D-02
2.	50.	50.	50.	.20	.20	.6816274533D-01	-.3825482340D-03
3.	60.	50.	60.	.20	.20	.6824953524D-01	-.1337877868D-03
4.	50.	40.	50.	.20	.20	.8645949730D-01	-.7496920495D-03
5.	50.	60.	50.	.20	.20	.5484236317D-01	-.2143553253D-03
6.	25.	50.	25.	.40	.40	.8795841095D-01	-.1326384661D-02
7.	12.5	50.	12.5	.80	.80	.1051225465D+00	-.3133822403D-02

Tabla 4.1.- Polos de la amplitud de transmisión para siete configuraciones distintas de potenciales simétricos. Los parámetros:  $L_1$ ,  $d$ ,  $L_2$ ,  $V_1$ , y  $V_2$  representan, respectivamente: la anchura de la primera barrera, separación, anchura de la segunda, altura de la primera, y altura de la segunda.

Finalmente en la secuencia  $n=2,6,7$  se incrementan las alturas de las barreras disminuyendo simultáneamente los espesores de las mismas a fin de mantener constante su producto, es decir el área de cada barrera ( $10 \text{ eV} \cdot \text{Å}$ ). El resultado de hacer esto, como lo podemos apreciar en la tabla, es un incremento notable en el valor de la resonancia  $\text{Re}(E_n)$ , y un aumento en su anchura  $\Gamma_n = -2 \text{Im}(E_n)$ .

Estos tres comportamientos ya los habíamos observado de manera cualitativa en las gráficas de las figuras 4.4, 4.5 y 4.6, respectivamente. En la siguiente sección veremos de qué manera son afectados los tiempos característicos y de permanencia.

### 4.3.-CALCULO DE TIEMPOS CARACTERISTICOS Y DE PERMANENCIA.

Siguiendo los mismos pasos que en la sección 3.3 (cuando analizabamos el potencial de doble- $\delta$ ), tenemos en la tabla 4.2 los valores calculados del coeficiente de reflexión, de la anchura de la resonancia  $\Gamma_n = -2\text{Im}(E_n)$  y de las anchuras parciales  $\Gamma_n^L$  y  $\Gamma_n^O$  utilizando naturalmente las relaciones (2.28), ó sea

$$\Gamma_n^O = \frac{1}{2} \Gamma \{1 + [R(\epsilon_n)]^{1/2}\}; \quad \Gamma_n^L = \frac{1}{2} \Gamma \{1 - [R(\epsilon_n)]^{1/2}\} \quad (4.15)$$

con  $n=1$ , ya que sólo estamos considerando la primera resonancia

$n$	$R(\epsilon_1)$	$\Gamma_n$	$\Gamma_n^L$	$\Gamma_n^O$
1.	.0008	.2186264349D-02	.1062069714D-02	.1124194634D-02
2.	.0001	.7650964679D-03	.3781715575D-03	.3869249104D-03
3.	.0000	.2675755737D-03	.1331815986D-03	.1343939751D-03
4.	.0004	.1499384099D-02	.7349941041D-03	.7643899948D-03
5.	.0001	.4287106506D-03	.2127810810D-03	.2159295697D-03
6.	.0005	.2652769321D-02	.1296206534D-02	.1356562787D-02
7.	.0015	.6267644805D-02	.3012725912D-02	.3254918893D-02

Tabla 4.2.-valores del coeficiente de reflexión  $R(\epsilon_1)$ , de la anchura de la resonancia  $\Gamma_1 = -2\text{Im}(\epsilon_1)$ , y de las anchuras parciales  $\Gamma_1^L$  y  $\Gamma_1^O$ , para los potenciales simétricos de la tabla 4.1.

Y ahora usamos (2.26), (2.31) y (2.32) para calcular los tiempos característicos  $\tau_n^O$  y  $\tau_n^L$ , y los tiempos de permanencia  $t_{OL}$  y  $t_{LO}$ . Nos referimos a las relaciones:

$$\tau_n^O \approx \hbar / \Gamma_n^O ; \quad \tau_n^L \approx \hbar / \Gamma_n^L \quad (4.16 a)$$

y

$$t_{OL} \approx \frac{4 \hbar \Gamma_n^O}{\Gamma_n \Gamma_n} ; \quad t_{LO} \approx \frac{4 \hbar \Gamma_n^L}{\Gamma_n \Gamma_n} \quad (4.16 b)$$

Los valores calculados de dichos tiempos se muestran en la tabla 4.3.

$n$	$\tau_n^L$	$\tau_n^O$	$\tau_{LO}$	$\tau_{OL}$
1.	.619750D-12	.585501D-12	.585028D-12	.619249D-12
2.	.174053D-11	.170115D-11	.170093D-11	.174030D-11
3.	.494225D-11	.489767D-11	.489757D-11	.494215D-11
4.	.895541D-12	.861101D-12	.860770D-12	.895197D-12
5.	.309340D-11	.304830D-11	.304813D-11	.309323D-11
6.	.507803D-12	.485210D-12	.484958D-12	.507540D-12
7.	.218479D-12	.202222D-12	.201920D-12	.218153D-12

Tabla 4.3.-Tiempos característicos y tiempos de permanencia calculados en base a los datos de las dos tablas anteriores. Todos los sistemas aquí son simétricos.

Dado que los potenciales son simétricos, en los siete casos, tanto  $\tau_n^O$  y  $\tau_n^L$  como los tiempos de permanencia  $t_{OL}$  y  $t_{LO}$  son prácticamente iguales. Si seguimos en la tabla la secuencia  $n=1,2,3$  (que significa como ya habíamos dicho, incrementar el espesor de las barreras manteniendo constante el resto de los parámetros) veremos que los tiempos característicos como también los de permanencia aumentan aproximadamente un orden de magnitud. Y si continuáramos incrementando los espesores hasta infinito entonces las anchuras  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_n^L$  y  $\Gamma_n^O$  tenderían a cero y nuestras resonancias, que son eigenvalores complejos de la ecuación de Schrödinger, pasarían a ser prácticamente eigenvalores reales, mismos que identificaríamos como los estados ligados del pozo cuadrado (recordemos de la fig.2.1 que en el plano complejo  $E$  los estados ligados están sobre el eje real y las resonancias en la hoja no física de Riemann); en estas circunstancias los tiempos característicos  $\tau_n^O$  y  $\tau_n^L$  tienden a infinito, lo que significa que el electrón permanecerá confinado indefinidamente en la región interna del potencial.

Si ahora examinamos el efecto de incrementar la separación entre las barreras a alturas y espesores constantes, que corresponde a seguir la secuencia  $n=4,2,5$  en estas tablas, veremos que aquí también disminuyen las anchuras  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_n^L$  y  $\Gamma_n^O$ , y por consiguiente crecen los tiempos característicos y de permanencia.

Por último, la secuencia  $n=2,6,7$  muestra que, a diferencia de los comportamientos anteriores, las resonancias se debilitan cuando se incrementan las alturas manteniendo constante el área de las barreras. Que  $\Gamma_n^L$  y  $\Gamma_n^O$  aumenten, ó equivalentemente que

$\tau_n^L$  y  $\tau_n^O$  decrezcan, significa que el electrón decae más rápidamente; y la disminución de  $t_{oL}$  y  $t_{Lo}$ , que el potencial es más permeable al paso del electrón.

## B.-CASO ASIMETRICO

### 4.4.-COEFICIENTE DE TRANSMISION.

Ahora resolveremos un caso más general en el cual las barreras rectangulares no son necesariamente iguales sino que podemos variar en forma arbitraria los parámetros que definen a cada una de ellas. La fig.4.1 nos muestra dos barreras rectangulares cuyas matrices de transferencia individuales son de la misma forma que (4.7) de la sección 4.1 aunque con distintos parámetros, y el cálculo de tales se sigue a lo largo de las mismas líneas.

Para la primera barrera tenemos entonces:

$$M_1 = \begin{pmatrix} [\cosh q_1 l_1 + i \frac{k^2 - q_1^2}{2kq_1} \sinh q_1 l_1] e^{-ikl_1} & -[i \frac{k^2 + q_1^2}{2kq_1}] \sinh q_1 l_1 \\ [i \frac{k^2 + q_1^2}{2kq_1}] \sinh q_1 l_1 & [\cosh q_1 l_1 - i \frac{k^2 - q_1^2}{2kq_1} \sinh q_1 l_1] e^{ikl_1} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

y para la segunda:

$$M_2 = \begin{pmatrix} [\cosh q_2 l_2 + i \frac{k^2 - q_2^2}{2kq_2} \sinh q_2 l_2] e^{-ikl_2} & -[i \frac{k^2 + q_2^2}{2kq_2}] \sinh q_2 l_2 \\ [i \frac{k^2 + q_2^2}{2kq_2}] \sinh q_2 l_2 & [\cosh q_2 l_2 - i \frac{k^2 - q_2^2}{2kq_2} \sinh q_2 l_2] e^{ikl_2} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

La matriz de transferencia efectiva del sistema, de

acuerdo a la teoría expuesta en el Apéndice A, es

$$M = M_2 E(k, d) M_1 \quad (4.19)$$

donde el elemento de matriz  $M_{22}$  de  $M$  nos proporciona la amplitud de transmisión de la siguiente relación

$$t(k) = \frac{1}{M_{22}} \quad (4.20)$$

y  $M_{22}$  de manera explícita es:

$$M_{22} = \left( \frac{k^2 + q_1^2}{2kq_1} \right) \left( \frac{k^2 + q_2^2}{2kq_2} \right) \sinh q_1 l_1 \sinh q_2 l_2 + \left[ \cosh q_1 l_1 + i \frac{k^2 - q_1^2}{2kq_1} \sinh q_1 l_1 \right] \left[ \cosh q_2 l_2 + i \frac{k^2 - q_2^2}{2kq_2} \sinh q_2 l_2 \right] e^{-2ikd} e^{ik(l_1 + l_2)} \quad (4.21)$$

Las expresiones para el coeficiente de transmisión y de reflexión estarán dadas respectivamente por

$$T = |t(k)|^2 \quad \text{y} \quad R = 1 - T \quad (4.22)$$

Al igual que en el caso del potencial simétrico se diseñó un programa para evaluar  $T$  en función de la energía  $E$ .

Lo primero que podemos notar en las gráficas de  $T$  vs.  $E$ , a diferencia del caso simétrico, es que los máximos de transmisión ya no alcanzan el valor de la unidad, lo cual como veremos en otras secciones, tiene importantes consecuencias sobre los tiempos de permanencia del electrón (figs. 4.7, 4.8 y 4.9).

En las gráficas que aparecen en las figuras (4.7) y (4.8) podemos apreciar cómo disminuye  $T(\epsilon_1)$  cuando sólo hacemos variaciones en las alturas de las barreras y en las anchuras, respectivamente. Por último en la fig. 4.9 hacemos variaciones

en las alturas para una configuración de potencial que admite varias resonancias. Las variaciones hechas en los parámetros del potencial fueron de tal forma que se mantuviera constante el área total de las barreras, (en todos los casos fué de 20 eV·Å). En las gráficas de estas tres últimas figuras es evidente un decrecimiento de la probabilidad de transmisión en las energías de resonancia, este decrecimiento es el responsable de la diferencia en los tiempos de permanencia que resulta en potenciales asimétricos como lo veremos en la última sección de este capítulo. Sin embargo por el traslape entre resonancias los cálculos de los tiempos correspondientes no serán muy confiables en este último caso.

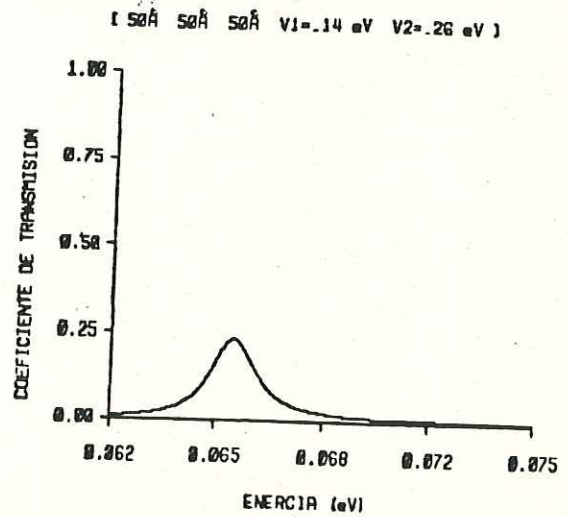
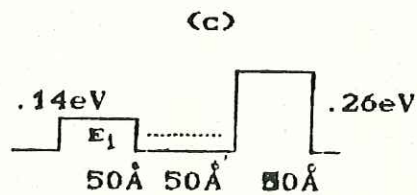
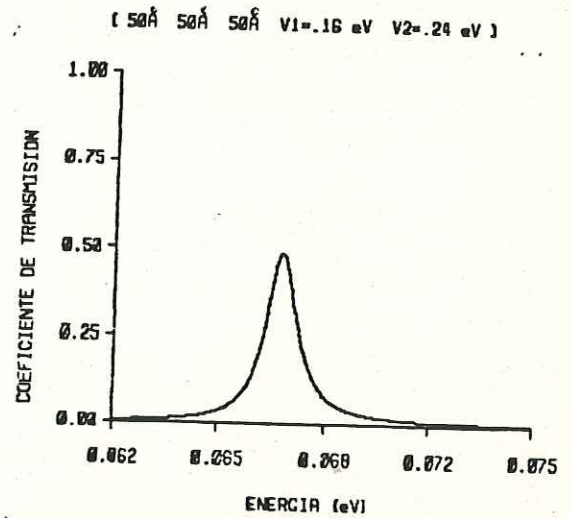
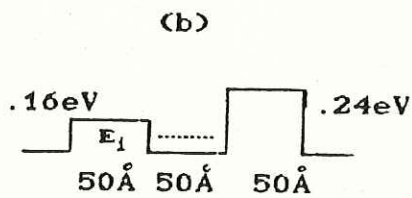
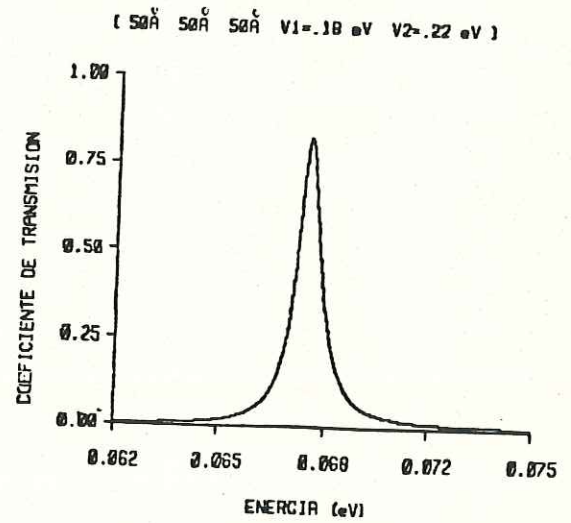
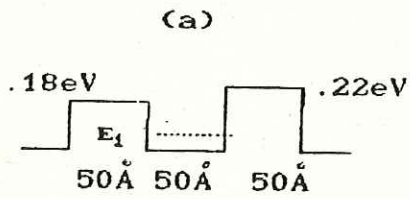


Fig.4.7.-Coeficiente de transmisión para tres configuraciones del potencial asimétrico. La secuencia (a), (b), (c) muestra el efecto de variar las alturas de las barreras, (reduciendo  $V_1/\sqrt{V_2}$ )

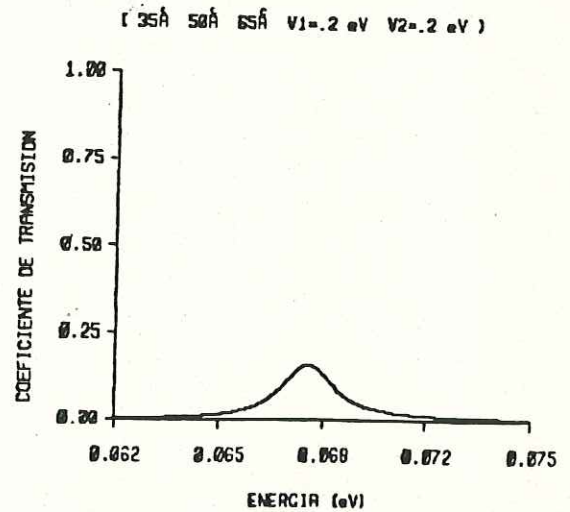
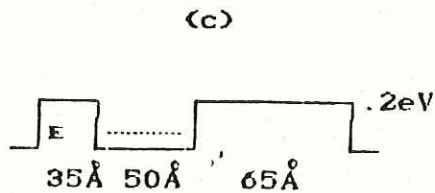
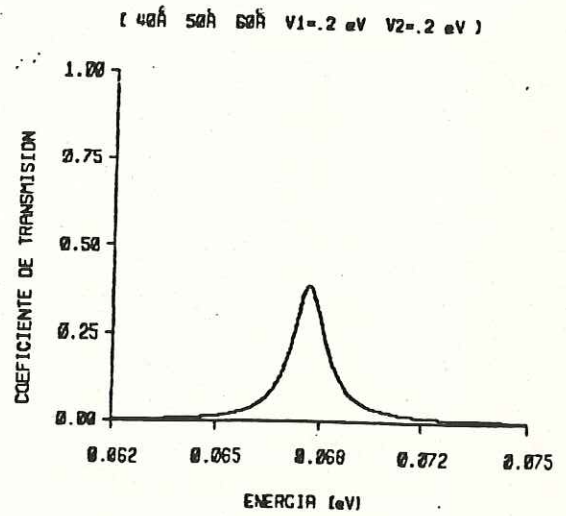
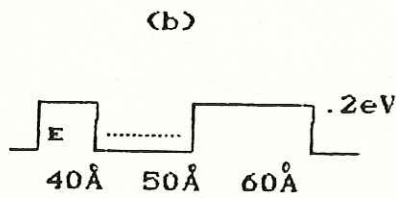
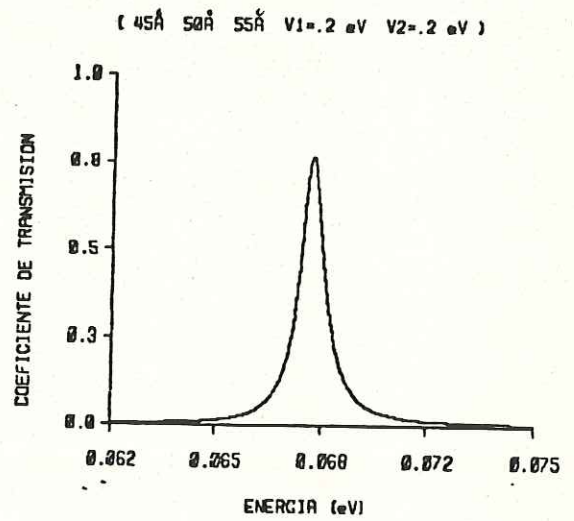
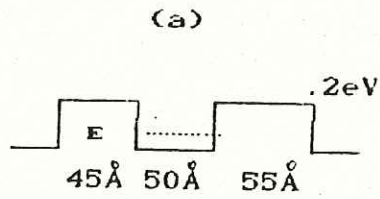


Fig.4.8.-Coeficiente de transmisión para tres configuraciones del potencial asimétrico. La secuencia (a), (b), (c) muestra el efecto de variar el espesor de las barreras.

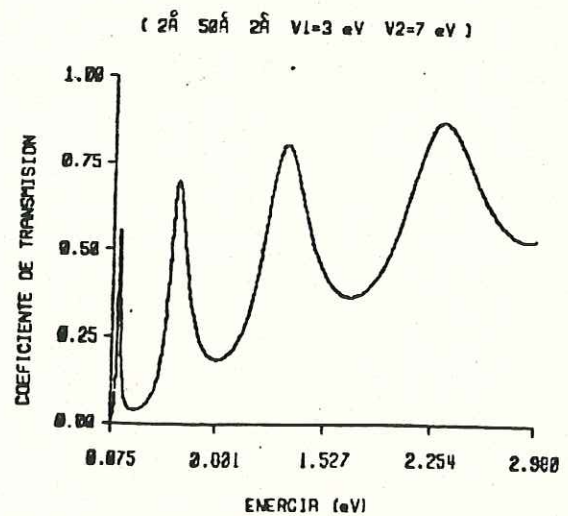
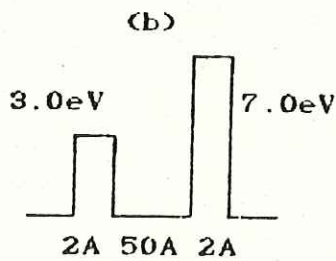
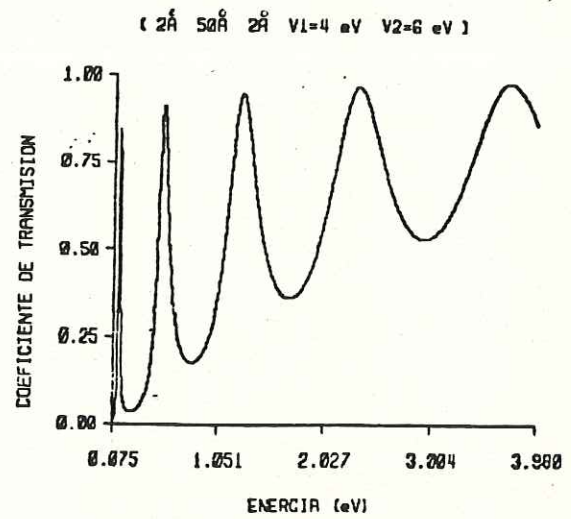
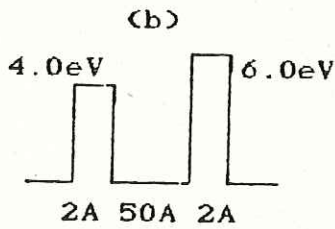
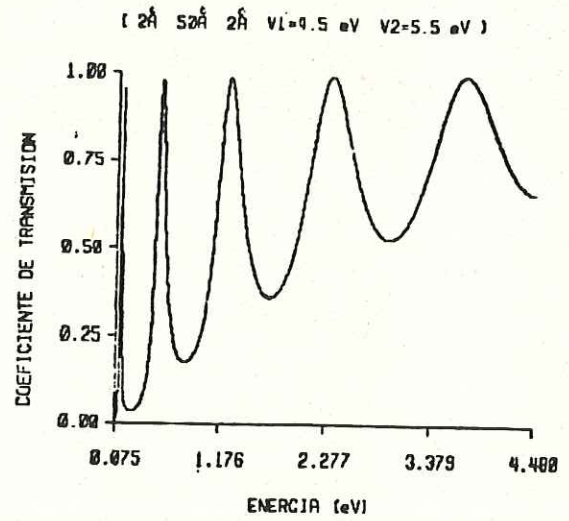
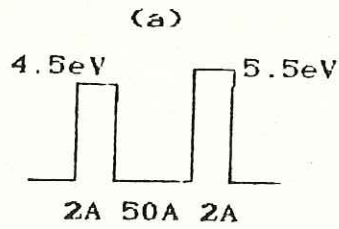


Fig.4.9.-Coeficiente de transmisión para tres configuraciones del potencial asimétrico de intensidad tal que admite varias resonancias. La secuencia (a), (b), (c) muestra el efecto de variar las alturas de las barreras, (reduciendo  $V_1/V_2$ )

#### 4.5.-CALCULO DE RESONANCIAS.

Hacemos exáctamente lo mismo que en la sección 4.2 pero nuestra expresión para  $t(k)$  estará dada por la ecuación (4.18). Los eigenvalores de la caja cuadrada también son aquí utilizados como valores iniciales. Los resultados obtenidos aparecen en la tabla 4.4.

$n$	$L_1$	$d$	$L_2$	$V_1$	$V_2$	$Re(E)$	$Im(E)$
1.	50.	50.	50.	.18	.22	.6790259743D-01	-.4223673232D-03
2.	50.	50.	50.	.16	.24	.6710696412D-01	-.5518042134D-03
3.	50.	50.	50.	.14	.26	.6572887606D-01	-.8037243702D-03
4.	45.	50.	55.	.20	.20	.6814373900D-01	-.4367788246D-03
5.	40.	50.	60.	.20	.20	.6808072189D-01	-.6149431816D-03
6.	35.	50.	65.	.20	.20	.6795340932D-01	-.9681155708D-03
7.	25.	50.	25.	.35	.45	.8754914615D-01	-.1450479365D-02

Tabla 4.4.-Resultados numéricos de la parte real  $Re(\epsilon_1)$ , y de la parte imaginaria  $Im(\epsilon_1)$ , para la primera resonancia de siete potenciales asimétricos cuyos parámetros se indican a la izquierda con  $L_1$ ,  $d$ ,  $L_2$ ,  $V_1$ , y  $V_2$ .

En los primeros tres casos ( $n=1,2,3$ ) se introduce la asimetría en las alturas de los potenciales con  $V_1 < V_2$ , manteniendo iguales las anchuras de las barreras,  $d_1 = d_2$ .

Después consideramos la asimetría pero con  $d_1 \neq d_2$  a alturas constantes  $V_1 = V_2$ , en la secuencia  $n=4,5,6$ . Y por último en  $n=7$  tenemos barreras más altas y estrechas pero de área total igual a las anteriores ( $20 \text{ eV} \cdot \text{Å}$ ).

Aunque no notamos cambios importantes en los valores de  $\text{Re}(E_1)$  y de  $\text{Im}(E_1)$  en esta última tabla, veremos en la siguiente sección cómo influye considerablemente la asimetría sobre los tiempos de decaimiento y de permanencia.

#### 4.6.-CALCULO DE TIEMPOS CARACTERISTICOS Y DE PERMANENCIA.

En la tabla 4.5 presentamos a los valores del coeficiente de reflexión evaluado en la energía de la primera resonancia  $R(\epsilon_1)$ , para cada uno de los casos asimétricos considerados en la tabla 4.4; también tenemos en las restantes columnas los valores calculados para la anchura de las resonancias  $\Gamma_1$ , y para las anchuras parciales  $\Gamma_1^L$  y  $\Gamma_1^O$ , calculadas éstas en base a los datos de la tabla 4.4 y mediante las relaciones (4.15).

$n$	$R(\varepsilon_1)$	$\Gamma_n$	$\Gamma_n^L$	$\Gamma_n^O$
1.	.1767	.8447346465D-03	.4896729735D-03	.1199796319D-02
2.	.5126	.1103608427D-02	.3134932462D-03	.1893723608D-02
3.	.7669	.1607448740D-02	.1997430405D-03	.3015154440D-02
4.	.2333	.8735576492D-03	.4516111459D-03	.1295504152D-02
5.	.6137	.1229886303D-02	.2664046957D-03	.2193367911D-02
6.	.8445	.1936231142D-02	.1568855916D-03	.3715576692D-02
7.	.1556	.2900958731D-02	.1756682842D-02	.4045234619D-02

Tabla 4.5.-Valores del coeficiente de reflexión  $R(\varepsilon_1)$ , de la anchura de la resonancia  $\Gamma_1 = -2\text{Im}(\varepsilon_1)$ , y de las anchuras parciales  $\Gamma_1^L$  y  $\Gamma_1^O$ , para los potenciales de la tabla 4.4.

Y ahora ahora con los datos de esta última tabla y las fórmulas (4.16 a) y (4.16 b) obtenemos los tiempos característicos  $\tau_1^L$  y  $\tau_1^O$ , y los de permanencia  $t_{OL}$  y  $t_{LO}$ , éstos se encuentran en la tabla 4.6.

$n$	$\tau_n^L$	$\tau_n^O$	$\tau_{LO}$	$\tau_{OL}$
1.	.134420D-11	.548608D-12	.180674D-11	.442686D-11
2.	.209962D-11	.347578D-12	.677684D-12	.409370D-11
3.	.329532D-11	.218303D-12	.203529D-12	.307231D-11
4.	.145749D-11	.508078D-12	.155816D-11	.446977D-11
5.	.247074D-11	.300094D-12	.463704D-12	.381778D-11
6.	.419552D-11	.177151D-12	.110179D-12	.260940D-11
7.	.374693D-12	.162714D-12	.549591D-12	.126558D-11

Tabla 4.6. Tiempos característicos  $\tau_1^L$ ,  $\tau_1^O$  y tiempos de permanencia  $\tau_{LO}$ ,  $\tau_{OL}$  para los potenciales asimétricos.

Para los tres primeros casos (enumerados con  $n=1,2,3$ ), al disminuir la altura de la primera barrera incrementando simultáneamente la segunda, la discrepancia entre los tiempos de permanencia aumenta y la razón entre los últimos adquiere los valores de  $t_{LO}/t_{OL} = 0.4, 0.1, \text{ y } 0.06$  para  $n=1, 2$  y  $3$  respectivamente, alrededor de un orden de magnitud.

En los siguientes tres casos ( $n=4,5,6$ ), en los cuales a alturas iguales reducimos el espesor de la primera barrera e incrementamos el de la otra, se obtiene también una gradual disminución en la razón  $t_{LO}/t_{OL}$ , cuyos valores fueron:  $0.3, 0.1$  y  $0.04$ . En el último caso ( $n=7$ ) la razón fué  $t_{LO}/t_{OL} = 0.4$ .

En todas las siete configuraciones examinadas aquí tuvimos  $t_{LO} < t_{OL}$ , ó sea, que el electrón tardará menos tiempo en cruzar el sistema si incide por la barrera más fuerte que por la más débil. Por otro lado, una vez que el electrón es atrapado en uno de los estados metaestables (en este caso el primero) el tiempo de decaimiento a través de la barrera izquierda es menor que el tiempo de decaimiento a través de la barrera derecha ( $\tau_1^O < \tau_1^L$ ).

## CAPITULO 5

### CONCLUSIONES

Para los potenciales unidimensionales considerados en este trabajo se presentó, por un lado, una discusión del comportamiento de la probabilidad de transmisión para distintas configuraciones de potenciales. Por otro lado, se obtuvo la solución numérica de la ecuación de Schrödinger con eigenvalores complejos (resonancias), para posteriormente mediante un conocimiento de los últimos, calcular los *tiempos característicos para tunelaje resonante* ó *tiempos de decaimiento*  $\tau_n^O$ ,  $\tau_n^L$  a través de los respectivos extremos del sistema, y además los *tiempos de permanencia*  $\tau_{OL}$  y  $\tau_{Lo}$  correspondientes a incidencia por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

En el capítulo 3 se presentó para el potencial doble delta simétrico un análisis cualitativo del coeficiente de transmisión en donde las gráficas de T vs. E muestran un adelgazamiento de los picos de transmisión en las energías de resonancia conforme se incrementan las intensidades de las deltas, lo cual se refleja en un aumento de los tiempos característicos y de permanencia del sistema.

Con respecto al caso asimétrico las correspondientes gráficas muestran que la altura de estos picos disminuye cuando la asimetría aumenta, y la probabilidad de transmisión en las energías de resonancia ya no alcanza el valor de la unidad como en el caso simétrico. El resultado de todo esto es que los tiempos característicos difieren ( $\tau_n^O \neq \tau_n^L$ ) y en consecuencia los de permanencia ( $\tau_{OL} \neq \tau_{Lo}$ ). Lo anterior significa que los tiempos dependen de por cual de los dos extremos del sistema el

electrón incida.

En el caso del potencial simétrico de doble barrera rectangular (cap. 4) se hizo también una variación sistemática de los distintos parámetros del potencial (anchuras, alturas, etc.). Observamos por ejemplo, que un aumento gradual en los espesores de las barreras produce una gran disminución en la anchura de la resonancia (en este caso sólo consideramos la primera) y esto lleva a que los tiempos característicos y de permanencia aumenten y que por lo tanto la partícula tarde más en decaer ó a atravesar el sistema de barreras. Otra variación que se hizo fué el aumentar paulatinamente la separación entre las barreras manteniendo constantes los restantes parámetros y esto influyó principalmente en la energía de resonancia, no tanto en su anchura. En este caso la energía de resonancia disminuye al aumentar la separación, su anchura sólo decrece ligeramente y los tiempos,  $\tau_n^O$ ,  $\tau_n^L$ ,  $\tau_{OL}$ ,  $\tau_{LO}$ , se incrementan también ligeramente. Una tercera variación consistió en hacer crecer las alturas de las barreras disminuyendo simultáneamente el espesor de las mismas a fin de mantener constante el área; la primera resonancia aumentó en su valor y en su anchura, pero la aparición de nuevas resonancias en el sistema fue el efecto principal de esta variación

Del párrafo anterior podemos concluir lo siguiente: la anchura de la resonancia (y por lo tanto los tiempos) depende principalmente (ó es más sensible) a cambios en el área de las barreras. El valor de la energía de resonancia es más fácil de manipular por medio de variaciones en la separación entre las barreras. Asimismo el número de resonancias admitidas por el sistema depende de la altura de las barreras, mientras más

altas mayor es el número de resonancias.

En el capítulo 4 se consideró también el caso del potencial asimétrico de barreras rectangulares presentando también tres variaciones sistemáticas de sus parámetros. Primero se variaron las alturas ( $V_1 \neq V_2$ ) a iguales espesores y separación constante, y luego manteniendo constantes las alturas y la separación, se variaron los espesores ( $l_1 \neq l_2$ ). El área se mantuvo constante en cada caso. Los resultados de estas dos variaciones fueron muy semejantes: disminuir el coeficiente de transmisión evaluado en la energía de resonancia. La consecuencia de esto es que los tiempos (característicos y de permanencia) resultaron ser diferentes:  $\tau_n^O \neq \tau_n^L$ ,  $\tau_{OL} \neq \tau_{LO}$ , llegando a ser la razón entre ellos ( $\tau_n^O/\tau_n^L$  y  $\tau_{OL}/\tau_{LO}$ ) hasta de un orden de magnitud. Esto significa que, en general, para un potencial asimétrico el tiempo que tarda el electrón en atravesarlo de izquierda a derecha y de derecha a izquierda será diferente en cada caso. Una vez que el electrón ha sido atrapado en un estado metaestable tendrá tiempos de decaimiento distintos ( $\tau_n^O \neq \tau_n^L$ ) dependiendo de por cual de los extremos abandone al potencial. Por último se repitió el análisis en la variación de las alturas de las barreras pero ahora partiendo de una configuración en donde las barreras eran mucho más altas y mucho más delgadas que en los casos anteriores. A consecuencia de esto los valores de T en las resonancias disminuyeron (aquí se presentaron varias resonancias). Aunque en realidad en este último caso el cálculo de los tiempos no es muy confiable debido al traslape presentado entre resonancias vecinas, pues la teoría en que nos basamos para el cálculo de los tiempos exige como requisito que las resonancias sean

aisladas.

La discusión presentada aquí para estos sistemas unidimensionales particulares establece criterios que pueden ser útiles en el diseño de dispositivos de tunelaje resonante con características específicas.

El cálculo de tiempos característicos y de permanencia para estos sistemas bajo la influencia de un campo eléctrico; el investigar el motivo de la ligera diferencia entre los valores de la energía de máxima transmisión y la parte real de los correspondientes polos de  $t(k)$  para  $k$ 's complejas; la extensión de la teoría para el caso de resonancias cercanas ó traslapadas, son problemas que se desprenden como secuelas de este trabajo para estudio posterior.

## APENDICE-A

### LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA

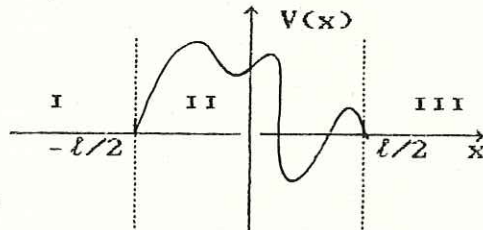
#### A.1.-DEFINICION.

Consideremos un potencial unidimensional  $V(x)$  sujeto a las siguientes condiciones:

- $\alpha$ -  $V(x)$  es real y univaluado.
- $\beta$ -  $V(x)$  es de forma arbitraria en la región finita,  $x \in ]-\ell/2, \ell/2[$ .
- $\gamma$ -  $V(x)$  vale cero fuera del intervalo  $[-\ell/2, \ell/2]$ .

La figura A.1 ilustra al potencial en consideración.

Fig A.1.- El potencial es de forma arbitraria dentro de la región II y cae a cero fuera de este intervalo.



La función de onda asociada a una partícula de energía  $E$  debe ser solución de la ecuación de Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + E \right] \Psi(x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

En la región I la función  $\Phi_I(x) = e^{-ikx}$  con  $k = (2mE/\hbar^2)^{1/2}$  satisface a la ec.(A.1). Luego, en la región III la solución debe ser una combinación lineal de las soluciones independientes  $e^{ikx}$  y  $e^{-ikx}$ , esto es,  $\Phi_{III}(x) = M_{11} e^{ikx} + M_{21} e^{-ikx}$

También la función  $\Phi'_I(x) = e^{-ikx}$  es solución de (A.1) en la región I, análogamente en la región III la solución será de la forma  $\Phi'_{III}(x) = M_{12} e^{ikx} + M_{22} e^{-ikx}$ .

La forma más general de la solución de (A.1) es una combinación lineal de las anteriores funciones, es decir,

$$\Psi(k,x) = A\Phi(x) + A'\Phi'(x). \quad (\text{A.2})$$

En la región I ( $x < -l/2$ ), la función de onda es entonces

$$\Psi_I(k,x) = A_I e^{ikx} + A'_I e^{-ikx} \quad (A.3)$$

y en la región III es

$$\Psi_{III}(k,x) = A_{III} e^{ikx} + A'_{III} e^{-ikx} \quad (A.4)$$

donde

$$A_{III} = M_{11} A_I + M_{21} A'_I \quad (A.5)$$

$$A'_{III} = M_{12} A_I + M_{22} A'_I$$

(A.5) puede ser convenientemente expresado en términos de la matriz  $M(k)$  de  $2 \times 2$  definida de la siguiente manera:

$$M(k) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{pmatrix} A_{III} \\ A'_{III} \end{pmatrix} = M(k) \begin{pmatrix} A_I \\ A'_I \end{pmatrix}. \quad (A.6)$$

A esta matriz se le conoce como *matriz de transferencia* del sistema. Sus elementos son en general funciones complejas de  $k$  que dependen de la forma del potencial en la región II.

$M(k)$  nos permite relacionar las amplitudes de la función de estado en la región III con las amplitudes de la función de estado en la región I.

#### A.2.-PROPIEDADES DE $M(k)$ .

A continuación se enlistan algunas de las propiedades de la matriz de transferencia, las dos primeras se basan en principios de simetría como la invariancia temporal y la conservación de la corriente de probabilidad. La demostración de las dos primeras propiedades pueden consultarse en algunos textos de mecánica cuántica (Merzbacher, (1970). C. Cohen-Tanoudji

(1977) Con respecto a la tercera, en los mencionados textos se presenta el caso particular de una cadena periódica de barreras, cuya generalización para el caso no periódico, no introduce conceptualmente mayores complicaciones (Para un tratamiento general consultar el artículo de Erdős y Herndon, (1982))

$$(P1).- M_{11}^* = M_{22} \quad \text{y} \quad M_{21}^* = M_{12} \quad (A.7)$$

$$(P2).- \det M(k) = 1 \quad (A.8)$$

(P4).- Una cadena de  $N$  potenciales, de forma arbitraria y espaciados también de forma arbitraria (fig A.2) está representada por una matriz de transferencia de la forma:

$$M(k) = M_N(k)E_{N-1}(k)M_{N-1}(k)\dots E_2(k)M_2(k)E_1(k)M_1(k) \quad (A.9)$$

donde la matriz  $E_n(k)$  está definida como:

$$E_n(k) = E(k, d_n) = \begin{pmatrix} e^{ikd_n} & 0 \\ 0 & e^{-ikd_n} \end{pmatrix} \quad (A.10)$$

y  $M_n(k)$  es la matriz de transferencia de la  $n$ -ésima barrera.

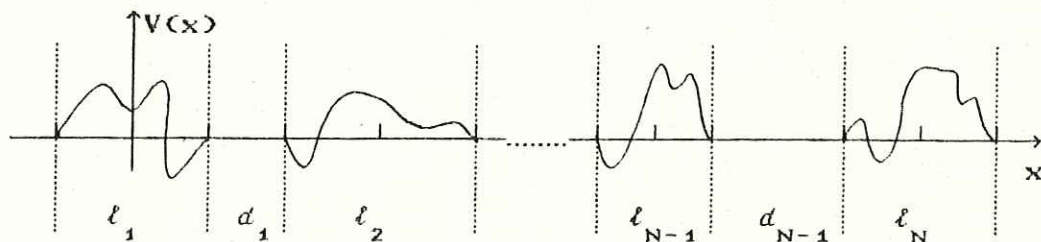


Fig. A.1.- Cadena no periódica de  $N$  potenciales de forma arbitraria y a espaciamientos arbitrarios.

En particular, si en (A.6) hacemos  $A'_{III} = 0$ ,  $A_I = 1$ ,  $A'_I = r$ ,  $A_{III} = t$ , entonces tenemos que:

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}.$$

de donde obtenemos  $t = M_{11} + M_{12} r$  y  $0 = M_{21} + M_{22} r$ . Resolviendo para  $t$  obtenemos el resultado:

$$t = \frac{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}}{M_{22}} = \frac{\det M(k)}{M_{22}} = \frac{1}{M_{22}} \quad (\text{A.11})$$

Esta es una expresión muy simple para la amplitud de transmisión frecuentemente utilizada.

El coeficiente de transmisión sería entonces:

$$T = |t(k)|^2 = \left| \frac{1}{M_{22}} \right|^2 \quad (\text{A.12})$$

## APENDICE-B

### EL METODO DE NEWTON-RAPHSON.

Este método numérico permite calcular las raíces de un conjunto de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas. Presentaremos solamente el caso  $N=2$  por simplicidad, el tratamiento más general se sigue a lo largo de las mismas líneas.

Supongamos que nuestras ecuaciones a resolver son:

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= 0 \\ \psi(x,y) &= 0\end{aligned}\tag{B.1}$$

Si  $x_0$ ,  $y_0$  son valores aproximados a  $x$  e  $y$ , y  $h$ ,  $k$  son correcciones de ambos, escribimos:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + h \\ y &= y_0 + k\end{aligned}\tag{B.2}$$

tendremos por lo tanto, en virtud de (B.1),

$$\begin{aligned}\phi(x_0 + h, y_0 + k) &= 0 \\ \psi(x_0 + h, y_0 + k) &= 0\end{aligned}\tag{B.3}$$

expandiendo por el teorema de Taylor:

$$\begin{aligned}\phi(x_0 + h, y_0 + k) &= \phi(x_0, y_0) + h \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_0 + k \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_0 + O(2) + \dots \\ \psi(x_0 + h, y_0 + k) &= \psi(x_0, y_0) + h \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_0 + k \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_0 + O(2) + \dots\end{aligned}\tag{B.4}$$

si  $h$  y  $k$  son lo suficientemente pequeños como para despreciar sus cuadrados, productos y potencias mayores entonces podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\begin{aligned}\phi(x_0, y_0) + h \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_0 + k \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_0 &\approx 0 \\ \psi(x_0, y_0) + h \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_0 + k \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_0 &\approx 0\end{aligned}\tag{B.5}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para las correcciones  $h$  y  $k$ :

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -\phi(x_0, y_0) & \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_0 \\ -\psi(x_0, y_0) & \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix}}{D} \quad h = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0 & -\phi(x_0, y_0) \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 & -\psi(x_0, y_0) \end{vmatrix}}{D} \quad (\text{B.6})$$

donde  $D$  es el determinante del sistema, esto es:

$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Así para la primera iteración se tendrá:

$$x_1 = x_0 + h_1 \quad y_1 = y_0 + k_1$$

para la segunda:

$$x_2 = x_1 + h_2 \quad y_2 = y_1 + k_2$$

⋮

⋮

(hasta la convergencia)

## APENDICE-C

### FUNCIÓN DE GREEN Y NORMALIZACIÓN DE LAS EIGENFUNCIONES $u_n$ .

La ecuación de Schrödinger con eigenvalores complejos la escribiremos como:

$$u_n''(x) + (k_n^2 - V(x))u_n(x) = 0 \quad (C.1)$$

donde las primas en  $u_n''(x)$  denotan la segunda derivada con respecto a  $x$ . Por otro lado la función de Green satisface la ecuación diferencial:

$$G''(x, x'; k) + (k_n^2 - V(x))G(x, x'; k) = \delta(x - x') \quad (C.2)$$

tanto  $u_n(x)$  como  $G(x, x'; k)$  satisfacen las condiciones de frontera de *onda saliente*, es decir:

$$u_n'(0) = -ik_n u_n(0) \quad u_n'(L) = ik_n u_n(L) \quad (C.3 a)$$

$$G'(0, x'; k) = -ik_n G(0, x'; k) \quad G'(L, x'; k) = ik_n G(L, x'; k) \quad (C.3 b)$$

donde 0 y L son los extremos del sistema como lo habíamos establecido en el capítulo 2.

En la vecindad de un polo simple,  $k=k_n$ , la función de Green puede escribirse como:

$$G(x, x'; k) = \frac{\rho_n(x, x')}{(k - k_n)} + \xi(x, x'; k) \quad (C.4)$$

donde  $\xi(x, x'; k)$  es una función regular en  $k_n$  y  $\rho_n(x, x')$  es el residuo de  $G(x, x'; k)$  en  $k_n$ . Sustituyendo (C.4) en (C.2) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{k-k_n} \left\{ \rho_n''(x, x') + (k^2 - V(x)) \rho_n(x, x') \right\} + \left\{ \xi''(x, x'; k) + (k^2 - V(x)) \xi(x, x'; k) \right\} = \delta(x - x') \quad (C.5)$$

sumando y restando a (C.5) el término  $\frac{k_n^2}{k-k_n} \left\{ \rho_n(x, x') \right\}$ :

$$\frac{1}{k-k_n} \left\{ \rho_n''(x, x') + (k_n^2 - V(x)) \rho_n(x, x') \right\} + \left\{ \xi''(x, x'; k) + (k^2 - V(x)) \xi(x, x'; k) + (k+k_n) \rho_n(x, x') - \delta(x-x') \right\} = 0 \quad (C.6)$$

si tomamos ahora el límite de esta expresión cuando  $k \rightarrow k_n$  las dos expresiones entre llaves deben anularse separadamente, esto es:

$$\rho_n''(x, x') + (k_n^2 - V(x)) \rho_n(x, x') = 0 \quad (C.7)$$

y

$$\xi''(x, x'; k_n) + (k_n^2 - V(x)) \xi(x, x'; k_n) + 2k_n \rho_n(x, x') - \delta(x-x') = 0 \quad (C.8)$$

Las condiciones de frontera para estas dos ecuaciones diferenciales para  $\rho$  y  $\xi$  se pueden conocer sustituyendo (C.4) en las ecuaciones (C.3 b), haciendo esto se obtiene:

$$\frac{1}{k-k_n} \left\{ \rho_n'(0, x') + ik \rho_n(0, x') \right\} + \left\{ \xi'(0, x'; k) + ik \xi(0, x'; k) \right\} = 0 \quad (C.9)$$

$$\frac{1}{k-k_n} \left\{ \rho_n'(L, x') - ik \rho_n(L, x') \right\} + \left\{ \xi'(L, x'; k) - ik \xi(L, x'; k) \right\} = 0 \quad (C.10)$$

Sumando y restando el término  $\frac{i k_n}{k - k_n} \left\{ \rho_n(0, x') \right\}$  a la ecuación (C.9) y si  $k \rightarrow k_n$  obtenemos las condiciones de frontera para  $\rho$  y  $\xi$  en  $x=0$ :

$$\left\{ \rho_n'(0, x') + i k_n \rho_n(0, x') \right\} = 0 \quad \text{(C.11 a)}$$

$$\left\{ \xi'(0, x'; k_n) + i k_n \xi(0, x'; k_n) + i \rho_n(0, x') \right\} = 0 \quad \text{(C.11 b)}$$

Análogamente en  $x = L$ :

$$\left\{ \rho_n'(L, x') - i k_n \rho_n(L, x') \right\} = 0 \quad \text{(C.12 a)}$$

$$\left\{ \xi'(L, x'; k_n) - i k_n \xi(L, x'; k_n) - i \rho_n(L, x') \right\} = 0 \quad \text{(C.12 b)}$$

Vemos que  $\rho_n(x, x')$  satisface la misma ecuación diferencial que  $u_n(x)$  así como también las mismas condiciones de frontera, por lo tanto  $\rho_n(x, x')$  y  $u_n(x)$  deben ser proporcionales, es decir:

$$\rho_n(x, x') = u_n(x) X(x') \quad \text{(C.13)}$$

Para determinar el factor de proporcionalidad  $X(x')$  multiplicamos (C.8) por  $u_n(x)$  y (C.1) por  $\xi(x, x'; k_n)$  y al restar las ecuaciones nos queda, después de aplicar el teorema de Green:

$$\begin{aligned} & \left[ u_n(x) \xi'(x, x'; k_n) - \xi(x, x'; k_n) u_n'(x) \right]_0^L + 2k_n \int_0^L \rho_n(x, x') u_n(x) dx = \\ & = \int_0^L u_n(x) \delta(x - x') dx \quad \text{(C.14)} \end{aligned}$$

ahora utilizamos las condiciones de frontera (C.11) y (C.12) y sustituimos (C.12) en (C.13) para obtener finalmente:

$$X(x') = \frac{u_n(x')}{2k_n \left[ \int_0^L u_n^2(x) dx + \frac{i}{2k_n} (u^2(L) + u^2(0)) \right]} \quad (C.15)$$

Entonces la expresión para el residuo de la función de Green nos quedará de la forma:

$$\rho(x, x') = \frac{u_n(x) u_n(x')}{2k_n \left[ \int_0^L u_n^2(x) dx + \frac{i}{2k_n} (u^2(L) + u^2(0)) \right]} \quad (C.16)$$

Este resultado nos sugiere como normalización para las  $u_n(x)$  la condición

$$\left[ \int_0^L u_n^2(x) dx + \frac{i}{2k_n} (u^2(L) + u^2(0)) \right] = 1 \quad (C.17)$$

## BIBLIOGRAFIA

- Barker, J. R., (1986), "The physics and Fabrication of Micro-  
structures and Microdevices", Ed. M. J. Kelly and  
G. Weissbuch, (Springer-Verlag), p. 210 y referencias  
contenidas.
- Buttiker, M., and R. Landauer, (1982), Phys. Rev. Lett. 49.
- Capasso, F., K. Mohammed and A. Y. Cho, (1986) IEEE, J. Quantum  
Electronics, 22, 1853.
- Cohen-Tanoudji, G., Bernard Diu, Franck Laloë, (1977)., Quantum  
Mechanics, (John Wiley and Sons).
- Erdős, P., R. C. Herndon, (1982). Advances in Phys., Vol. 31,  
No.2, 65-163.
- García-Calderón, G., y A. Rubio, (1987), Phys. Rev. B36, 4462.
- Kelly, M. J., (1986), "The physics and Fabrication of Micro-  
structures and Microdevices", Ed. M. J. Kelly and  
G. Weissbuch, (Springer-Verlag).
- Merzbacher, E., (1970). Quantum Mechanics, Wiley, New York.
- Ricco, B., and M. Ya Azbel (1984), Phys. Rev. B29, 1970.
- Smith, F. T. (1960), Phys. Rev. 118, No.1, 349.
- Sollner, T. G. L. G., W. D. Goodhue, P. E. Tannenwald, C. D.  
Parker and D. D. Peck, (1983) Appl. Phys. Lett. 43, (6),  
588.
- Taylor, R. G., (1986), "Scattering Theory. The Quantum of  
Non-relativistic Collisions". 1<sup>ra</sup> edición.
- Tsu, R., L. Esaki, (1974), Appl. Phys. Lett. 24, 593.
- Zener, C., (1934)., Proc. Roy. Soc., A145, 523.