

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA



Control de una Clase de Sistemas Subactuados

T E S I S

que presenta para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS

CARLOS RAMÓN GÁMEZ MORENO

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. DAVID ISAÍAS ROSAS ALMEIDA

MEXICALI, BAJA CALIFORNIA

SEPTIEMBRE 2011

RESUMEN de la Tesis de CARLOS RAMÓN GÁMEZ MORENO, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS. Mexicali, Baja California, México. Septiembre del 2011.

CONTROL DE UNA CLASE DE SISTEMAS SUBACTUADOS

Resumen aprobado por:

Dr. David I. Rosas Almeida

Director de tesis

Se propone una estrategia de control para resolver el problema de seguimiento de trayectorias en una clase de sistemas mecánicos subactuados de dos grados de libertad. En el planteamiento del problema se considera un sistema mecánico con incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas así como medición parcial del vector de estado.

La estrategia de controlador se basa en aplicar una señal de control auxiliar a la articulación subactuada a través de la posición de la articulación actuada, a la cual se le aplica el control real que garantiza el cumplimiento del objetivo de control y el comportamiento acotado de la articulación actuada.

Debido a que no se conoce el vector de estado completo y hay incertidumbres en la planta se utilizan observadores discontinuos para estimar el vector de estado, los términos de perturbación ocasionados por variaciones paramétricas y perturbaciones externas, así como algunas señales necesarias para implementar la señal de control.

Se ilustran los resultados obtenidos con ejemplos de simulaciones numéricas realizadas en simulink, y se muestran resultados experimentales de la aplicación del controlador a un sistema mecánico del tipo masa resorte amortiguador.

Palabras clave: mecanismos subactuados, observadores, robustez.

ABSTRACT of the thesis, presented by CARLOS RAMÓN GÁMEZ MORENO, in order to obtain the MASTER in SCIENCES. Mexicali, Baja California, México. September, 2011.

CONTROL OF A CLASS OF UNDERACTUATED SYSTEMS

Approved by:

Dr. David I. Rosas Almeida

Thesis Advisor

We propose a control strategy to solve the problem of trajectory tracking for a class of underactuated mechanical systems with two degrees of freedom. The problem statement is considered a mechanical system with parametric uncertainties, external disturbances and partial measure of the state vector.

Control strategy is based on a control signal applied to the joint auxiliary underactuated through the position of the joint act, which applies the real control that ensures that the target and control the behavior of bounded actuated joint.

Due to the lack of full state vector, and there are uncertainties in the plant, discontinuous observers is used to estimate the state vector, the terms of perturbation caused by parametric variations and external disturbances, and some signals necessary to implement control signal.

Results are illustrated with examples of numerical simulations performed in Simulink, and experimental results show the implementation of the controller to a mechanical spring-mass type damper.

Keywords: underactuated mechanisms, observers, robustness.

Índice general

1. Introducción	7
2. Antecedentes	13
2.1. Sistemas dinámicos	13
2.2. Condiciones de existencia y unicidad de soluciones	15
2.3. Estabilidad de puntos de equilibrios en el sentido de Lyapunov	19
2.3.1. Método directo de Lyapunov	20
2.4. Estabilidad de sistemas perturbados	22
2.4.1. Estabilidad de sistemas con perturbaciones desvanescentes	23
2.4.2. Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanescentes	24
3. Definición de una clase de sistemas subactuados y definición del objetivo de control	26
3.1. Modelo de sistemas mecánicos utilizando las ecuaciones de Lagrange	26
3.1.1. Matriz de inercia $M(q)$	30
3.1.2. Matriz centrífuga y de Coriolis $C(q, \dot{q})$	31
3.1.3. Vector de gravedad $G(q)$	33

3.1.4.	Linealidad en los parámetros dinámicos	34
3.2.	Definición del objetivo de control	35
3.3.	Descripción de una clase de sistemas subactuados de dos grados de libertad	36
3.4.	Ejemplo de modelado de un sistema subactuado de 2GDL	38
4.	Solución del problema de control considerando un modelo nominal	42
4.1.	Definición del modelo nominal y objetivo de control	43
4.2.	Solución para el sistema nominal	45
4.2.1.	Análisis de estabilidad	46
4.3.	Implementación del control	47
4.3.1.	Estimación de las velocidades de cada carro utilizando un derivador exacto con convergencia en tiempo finito	48
4.3.2.	Observador para la estimación de ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$	48
4.4.	Aplicación a un sistema masa resorte amortiguador de 2GDL	51
4.4.1.	Definición del modelo nominal	51
4.4.2.	Identificación de parámetros	52
4.4.3.	Diseño de la señal de control	53
4.4.4.	Ilustración del desempeño del controlador del caso nominal . . .	56
5.	Solución del problema de control considerando un modelo con pertur-	
	baciones	74
5.1.	Definición del modelo con incertidumbres	75
5.2.	Solución del caso con incertidumbres	76
5.2.1.	Análisis de estabilidad	78

5.3.	Implementación del control	79
5.3.1.	Estimación de las velocidades	79
5.3.2.	Observador para la estimación de ε_2 , $\gamma_1(\cdot)$ y $\ddot{x}_{ra}(t)$	80
5.3.3.	Observador para estimar $\gamma_2(\cdot)$	82
5.4.	Aplicación a un sistema masa resorte amortiguador de 2GDL	84
5.4.1.	Ilustración del desempeño del controlador del caso perturbado	88
6.	Conclusiones y comentarios finales	108

Índice de figuras

2.1. Soluciones que cruzan la superficie S	18
2.2. Condiciones para la existencia de un modo deslizante sobre S	18
3.1. Cadena cinemática abierta	27
3.2. Objetivos de control más comunes.	35
3.3. Esquema de un sistema masa resorte amortiguador de 2 grados de libertad.	38
4.1. Desempeño de derivadores para estimar las velocidades.	58
4.2. Errores entre las variables de estado reales y las estimadas por los derivadores.	58
4.3. Desempeño del observador para estimar $\varepsilon_2, \ddot{x}_{ra}(t)$	59
4.4. Convergencia de la variable x_1 a x_{ra} y el comportamiento del error entre ellas.	59
4.5. Señal de referencia y posición del segundo carro y error de seguimiento.	60
4.6. Señal de control.	61
4.7. Comportamiento de x_1 y $x_{ra}(t)$	61
4.8. Objetivo de control	62
4.9. Señal de control para el caso de una suma de senoidales como referencia.	62

4.10. Comportamiento del sistema en lazo cerrado considerando una señal de referencia que converge exponencialmente a una constante.	63
4.11. Señal de control.	64
4.12. Desempeño de los derivadores para estimar las velocidades.	65
4.13. Errores derivadores entre las posiciones reales y las posiciones estimadas.	66
4.14. Desempeño observador y sus errores.	66
4.15. Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$	67
4.16. Objetivo de control	68
4.17. Señal de control.	68
4.18. Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$	69
4.19. Objetivo de control.	69
4.20. Señal de control.	70
4.21. Comportamiento de las señales x_1 y $x_{ra}(t)$	71
4.22. Comportamiento de la salida del sistema y del error de seguimiento.	71
4.23. Señal de control.	72
5.1. Desempeño de derivadores para estimar las velocidades.	90
5.2. Errores entre las variables de estado reales y las estimadas por los derivadores.	90
5.3. Variables internas del observador para estimar $\gamma_2(\cdot)$	91
5.4. Desempeño del observador para estimar ε_2 y $\gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t)$	92
5.5. Convergencia de la variable x_1 a x_{ra} y el comportamiento del error entre ellas.	92
5.6. Señal de referencia y posición del segundo carro y error de seguimiento.	93

5.7. Señal de control.	94
5.8. Comportamiento de x_1 y $x_{ra}(t)$ y error de seguimiento.	94
5.9. Salida del sistema x_3 , referencia $y_r(t)$ y error de seguimiento.	95
5.10. Señal de control.	95
5.11. Comportamiento del sistema en lazo cerrado considerando una señal de referencia que converge exponencialmente a una constante.	96
5.12. Señal de control.	97
5.13. Resultados experimentales. Desempeño de los derivadores para estimar las velocidades de la planta.	98
5.14. Resultados experimentales. Errores derivadores entre las posiciones reales y las posiciones estimadas.	99
5.15. Variables internas del observador para estimar $\gamma_2(\cdot)$	100
5.16. Desempeño observador y sus errores.	100
5.17. Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$	101
5.18. Objetivo de control.	101
5.19. Señal de control.	102
5.20. Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$	103
5.21. Objetivo de control.	103
5.22. Señal de control.	104
5.23. Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$	105
5.24. Objetivo de control.	106
5.25. Señal de control.	106
5.26. Objetivo de control y error.	107

Capítulo 1

Introducción

Control automático es una rama de la ingeniería que se dedica al estudio del comportamiento de sistemas dinámicos y al diseño de algoritmos para modificar dicho comportamiento con base a un objetivo de control. Los objetivos más comunes son la estabilización de soluciones inestables, la regulación, que se refiere a que la salida del sistema alcance una referencia constante y el seguimiento de trayectorias, que se refiere a que la salida del sistema converja a una referencia variante en el tiempo. Para una descripción más detallada de estos objetivos de control puede consultar [1], [2] y [3].

El control automático tiene aplicaciones en diferentes áreas de las ciencias e ingeniería; algunos ejemplos son el control de sistemas de potencia [4], control de sistemas mecánicos [5], control de procesos industriales como en el control de temperatura, presión y procesos químicos en general [6], [7]. Otro ejemplos, menos comunes son el análisis y control de sistemas financieros [8], sistemas biológicos [9] e incluso el comportamiento humano ha sido estudiado desde este punto de vista [10].

En particular, el control de sistemas mecánicos es una rama de investigación muy

importante debido a su campo de aplicación, que incluye robots manipuladores, barcos, aeronaves, etc., los cuales son indispensables en la vida cotidiana y en los sectores industriales y de investigación.

Los sistemas mecánicos se pueden clasificar con base al número de actuadores y articulaciones con los que cuentan; si un mecanismo tiene el mismo número de actuadores y de articulaciones se le llama completamente actuado, pero si tiene menos actuadores que articulaciones se le llama subactuado. El control de mecanismos completamente actuados ha sido ampliamente estudiado para diferentes objetivos de control y considerando diferentes situaciones en el modelo; incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas y medición parcial del estado son algunos ejemplos. Algunas referencias importantes sobre este tema son [11], [12], [13], [14], [15] y [16].

El control de sistemas subactuados es un problema más complicado, pero no es menos importante que el control de mecanismos completamente actuados, ya que existen muchos sistemas de este tipo en la vida cotidiana que necesitan mejorar su desempeño, algunos ejemplos son camiones de doble remolque, la mayoría de las grúas existentes, helicópteros, vehículos submarinos, barcos y las perforadoras usadas en la extracción del petróleo son unos ejemplos, ver [17] para la descripción de un mecanismo subactuado llamado pendubot. En [18] se presenta un estudio del grado de acoplamiento entre los eslabones actuados y subactuados y de esta forma tener una idea de la dificultad de controlar un sistema de este tipo o en el diseño de éste para facilitar su control.

Un resumen del trabajo relacionado al control de sistemas subactuados se presenta a continuación. En [19] se propone, en forma conceptual, un esquema de control para estabilizar puntos de equilibrio inestables en mecanismos subactuados con restricciones

no holonómicas, hace un planteamiento general pero finalmente el control se diseña para un mecanismo en particular considerando un modelo nominal sin incertidumbres ni perturbaciones y asumiendo la medición completa del vector de estado. En [20] se propone una técnica para estabilizar puntos de equilibrio inestables en una clase de sistemas subactuados que, utilizando una transformación de coordenadas, puedan escribirse como una cadena de integradores. El diseño del controlador se basa en la técnica de control llamada Backstepping, pero aquí se asume la medición completa del vector de estado y un modelo bien conocido.

En [21] se presentan resultados experimentales de la estabilización de un punto de equilibrio de un modelo a escala de un barco, el modelo es de tres grados de libertad y sólo cuenta con dos actuadores, los resultados muestran que las trayectorias llegan a una vecindad del equilibrio debido a dinámicas no modeladas. Por otro lado en [22] se aplica un control por modos deslizantes para estabilizar un equilibrio inestable en una clase de sistemas subactuados en donde se consideran incertidumbres, los resultados muestran un grado de robustez; sin embargo, debido a la función signo en la señal de control existen problemas para su implementación en la práctica.

En trabajos más recientes se ha abordado el problema de control de sistemas subactuados bajo condiciones más realistas y con objetivos de control de regulación y seguimiento. En [23] se propone una técnica para resolver los problemas de regulación y seguimiento para una clase de vehículos subactuados, pero se consideran nuevamente condiciones ideales en la planta. En [24] se propone un controlador para seguimiento de trayectorias para un mecanismo subactuado basado en un algoritmo con estructura variable conocido como Twisting, en este caso la amplitud de las señales de referencia

es muy pequeña y se considera un modelo exacto de la planta y medición completa del estado y sólo se presentan resultados numéricos.

En [25] se presenta un controlador basado en modos deslizantes de segundo orden para estabilizar puntos de equilibrio inestables en sistemas subactuados inciertos. En este caso se presentan resultados experimentales y numéricos que muestran el buen desempeño de la técnica; sin embargo, su extensión a la solución del problema de seguimiento de trayectorias no es directo. Finalmente, en [26] se propone un algoritmo para controlar sistemas subactuados con fricción seca en el eslabón subactuado. Esta propuesta resuelve el problema de regulación pero asume el conocimiento exacto del modelo y medición completa del vector de estados. Aunque muestra un buen desempeño experimentalmente.

Con base al anterior resumen, se concluye que el problema de control de seguimiento de trayectorias en sistemas subactuados con incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas y medición parcial del vector de estados es un tema de investigación abierto.

En esta memoria de tesis se propone una estrategia de control para resolver este problema para una clase particular de mecanismos subactuados de dos grados de libertad donde la ecuación del eslabón subactuado es lineal con respecto a la posición del eslabón actuado. La estrategia de control se basa en el diseño de una señal de control auxiliar para el eslabón subactuado, la cual será aplicada a través de la posición del eslabón actuado, esta señal auxiliar depende de todo el vector de estado y de las perturbaciones en el sistema. La señal de control para la parte actuada se diseña con el objetivo de seguimiento; la posición del eslabon actuado debe seguir a la señal auxiliar.

De esta forma, el control depende del estado completo del sistema, de las perturbaciones y de la primera y segunda derivada de la señal auxiliar.

Para implementar el control se utilizan derivadores con convergencia en tiempo finito para estimar las velocidades y observadores discontinuos para estimar las perturbaciones y las derivadas de la señal auxiliar. El desempeño de la técnica de control se ilustra a través de resultados numéricos y experimentales los cuales muestran un desempeño adecuado.

Desde este punto de vista se propone el control de una clase de sistemas mecánicos de dos grados de libertad subactuados. El objetivo es que la posición del eslabón subactuado siga una trayectoria variante con el tiempo, el trabajo se enfocará a una clase de sistemas que puedan pertenecer a la estructura del modelo propuesta y se realizaran experimentos en un sistema del tipo masa resorte y amortiguador de dos grados de libertad. En el planteamiento del problema se consideran incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas acotadas y medición parcial del estado, debido a esto, los métodos que se proponen para resolver el problema se basan en derivadores discontinuos y observadores discontinuos, con los cuales se estimarán las velocidades y términos de perturbación en la planta respectivamente, estos términos estimados son los que serán empleados en la realización del controlador.

La organización del documento es la siguiente. En el capítulo 2 se presenta un resumen de los conceptos teóricos y herramientas matemáticas empleadas en el desarrollo del proyecto, se inicia con una introducción a sistemas dinámicos, presentando conceptos básicos como trayectoria, puntos de equilibrio, y se termina con las definiciones de estabilidad de equilibrios en el sentido de Lyapunov y estabilidad de sistemas perturba-

dos. En el capítulo 3 se presenta una introducción al modelado de sistemas mecánicos a través de las ecuaciones de Lagrange, la definición de la clase de sistemas subactuados para cual se desarrolla la técnica de control y la definición del problema de control que se aborda en esta tesis. En el capítulo 4 se presenta una propuesta de control para los sistemas subactuados, considerando un modelo nominal y del cual únicamente se conocen sus posiciones generalizadas, para implementar el control se utilizan derivadores y observadores discontinuos en tiempo finito.

En el capítulo 5 se presenta el análisis del problema de control considerando una planta con incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas, para implementar el control se utilizan derivadores y observadores discontinuos en tiempo finito, además de un observador discontinuo con convergencia asintótica. Por último en el capítulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis, así como posibles líneas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo se presenta un resumen de los conceptos teóricos y herramientas matemáticas empleadas en este trabajo, para un estudio detallado ver por ejemplo [1] y [27]. Se inicia con una introducción a sistemas dinámicos, presentando conceptos básicos como trayectoria, puntos de equilibrio, y se termina con las definiciones de estabilidad de equilibrios en el sentido de Lyapunov y estabilidad de sistemas perturbados.

2.1. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un sistema que evoluciona con el tiempo t , dicha evolución está gobernada por un conjunto de reglas, no necesariamente ecuaciones, que especifican el valor del estado para cada valor del tiempo dependiendo del estado anterior.

Una gran variedad de sistemas físicos pueden ser descritos por la ecuación diferencial

ordinaria

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (2.1)$$

$$y = h(x), \quad (2.2)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado con condición inicial $x(t_0) = x_0$, $\dot{x} \equiv dx/dt$, $u \in \mathfrak{R}^m$ es el vector de control, $f : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ es, en general, un campo vectorial no lineal, $y \in \mathfrak{R}^l$ es la salida del sistema y $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^l$ es una función vectorial. Bajo una elección del vector de control como $u = u(t, x)$ el sistema (2.1) puede ser reescrito en la forma

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2.3)$$

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar de varias formas, dos de las más importantes son las siguientes:

1. Por la naturaleza del dominio del tiempo en que están definidos se clasifican en discretos y continuos.
2. Si la ecuación diferencial o de diferencias que los describe no depende explícitamente de la variable independiente se les llama autónomos, de lo contrario son no autónomos. Por ejemplo en el sistema (2.3) si $f(\cdot)$ no depende explícitamente de t , se le llama autónomo, de otro modo es no autónomo.

2.2. Condiciones de existencia y unicidad de soluciones

El primer paso en la solución de la ecuación diferencial (2.3) es investigar la existencia y unicidad de soluciones. En esta sección se presentan las condiciones para garantizar la existencia y unicidad de soluciones en el sentido usual y la definición de solución en el sentido de Filippov para sistemas discontinuos.

Teorema 1 (*Existencia y unicidad de solución local*) [1] Sea $f(t, x)$ continua por tramos en t y satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

$\forall x, y \in B = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid \|x - y\| < r\}, \forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces existe alguna $\delta > 0$ tal que la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, t_0 + \delta]$.

Teorema 2 (*Existencia y unicidad de solución global*) [1] Sea $f(t, x)$ continua por tramos en t y satisface

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

$\forall x, y \in \mathfrak{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1]$. Entonces la ecuación de estado $\dot{x} = f(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ tiene solución única sobre $[t_0, t_1]$.

Ahora se presenta la definición de solución en el sentido de Filippov para el sistema (2.3); esta definición es más general porque considera al campo vectorial $f(\cdot)$ continuo o discontinuo [27].

Considere el sistema (2.3), donde $f(\cdot)$ es continuo por tramos en un dominio G ; $x \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado y M es un conjunto (de medida cero) de puntos de discontinuidad de la función $f(\cdot)$.

Para cada punto (t, x) del dominio G se define un conjunto $F(t, x)$ en un espacio de dimensión n . Si en el punto (t, x) la función $f(\cdot)$ es continua, el conjunto $F(t, x)$ consiste de un punto que coincide con el valor de la función $f(\cdot)$ en este punto. Si (t, x) es un punto de discontinuidad de la función $f(\cdot)$, el conjunto $F(t, x)$ se define de otra forma como se describe más adelante. Una solución de la ecuación (2.3) es una solución de la inclusión diferencial

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (2.4)$$

esto es, una función vectorial $x(t)$ absolutamente continua definida en un intervalo o un segmento I para el cual $\dot{x}(t) \in F(t, x)$ casi en todo punto de I .

De gran interés son los métodos para la definición de $F(t, x)$ en los puntos de discontinuidad de la función $f(\cdot)$ bajo los cuales la inclusión diferencial (2.4) puede ser utilizada para una descripción aproximada de la dinámica de un sistema físico.

La siguiente definición es aplicable, en particular, a sistemas con retardo así como a algunos sistemas con fricción de Coulomb [27].

Definición 3 (*Definición del convexo más simple*) Para cada punto $(t, x) \in G$ el conjunto $F(t, x)$ es el conjunto convexo cerrado más pequeño que contenga todos los valores límite de la función vectorial $f(t, x^*)$ para $(t, x^*) \notin M$, $t = cte$.

Una solución de (2.3) es una solución de la inclusión (2.4) con $F(t, x)$ así construida. En los puntos donde la función $f(\cdot)$ es continua el conjunto $F(t, x)$ consiste del punto

$f(t, x)$, y la solución satisface la ecuación (2.3) en el sentido usual. Si el punto $(t, x) \in M$ el conjunto $F(t, x)$ es un segmento, polígono o un poliedro.

Considere el caso donde la función $f(t, x)$ es discontinua en una superficie suave S dada por la ecuación $\psi(x) = 0$. La superficie S divide al espacio x en los dominios G^+ y G^- . Para un tiempo t constante y para el punto x^* aproximándose al punto $x \in S$ desde los dominios G^+ y G^- , la función $f(t, x^*)$ tiene los valores límite

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x^* \in G^- \\ x^* \rightarrow x}} f(t, x^*) &= f^-(t, x), \\ \lim_{\substack{x^* \in G^+ \\ x^* \rightarrow x}} f(t, x^*) &= f^+(t, x). \end{aligned}$$

Entonces el conjunto $F(t, x)$ puede representarse geoméricamente como un segmento lineal uniendo los puntos finales de los vectores $f^-(t, x)$ y $f^+(t, x)$.

Si para $t_1 < t < t_2$ este segmento cae a un lado del plano P tangente a la superficie S en el punto x , la solución para este tiempo t pasa de un lado de la superficie S al otro, ver figura 2.1.

Si este segmento intersecta al plano P , el punto de intersección es el punto final de un vector $f^0(t, x)$ que determina la velocidad de movimiento $\dot{x} = f^0(t, x)$ a lo largo de la superficie S en el espacio x , ver figura 2.2. Esto significa que la función $x(t)$ que satisface la ecuación

$$\dot{x} = f^0(t, x),$$

es una solución de la ecuación (2.3) en virtud de la definición (2.4). Si $f^0 \neq f^+$, $f^0 \neq f^-$, a tal solución se le llama *modo deslizante*.

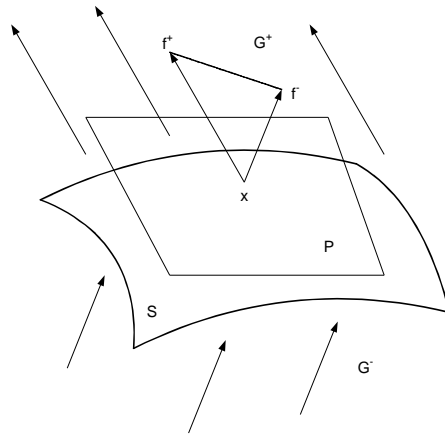


Figura 2.1: Soluciones que cruzan la superficie S .

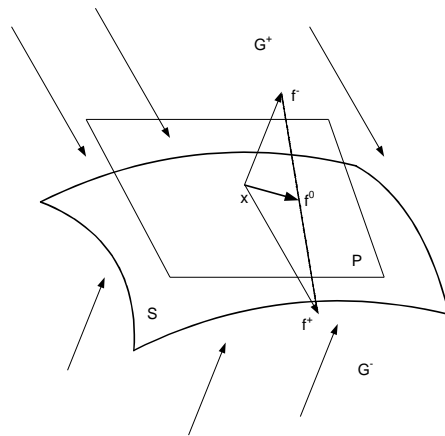


Figura 2.2: Condiciones para la existencia de un modo deslizante sobre S .

2.3. Estabilidad de puntos de equilibrios en el sentido de Lyapunov

Un conjunto especial de soluciones de (2.3) son los puntos de equilibrio x_e . Iniciando en un punto x_e en el tiempo t_0 la solución de (2.3) permanecerá ahí para todo $t \geq t_0$.

Los conceptos de estabilidad, que a continuación se establecen, son definidos con respecto a estos puntos de equilibrio.

Considere que el sistema (2.3) tiene como equilibrio al origen $x_e = 0 \in \mathfrak{R}^n$.

Definición 4 [28] *El punto de equilibrio $x_e = 0$ de (2.3) es:*

1. *Estable al tiempo t_0 si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante $\delta > 0$ que puede depender de t_0 y $\varepsilon \in (\delta(t_0, \varepsilon))$ tal que*

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \varepsilon) \implies \|x(t)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Es uniformemente estable en $[t_0, \infty)$ si, para cada $\varepsilon > 0$, el valor de δ es independiente del tiempo inicial t_0 .

2. *Inestable si no es estable.*

Definición 5 [28] *El punto de equilibrio $x_e = 0$ se dice ser atractivo al tiempo t_0 si, para alguna $\delta > 0$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un intervalo de tiempo finito $T(t_0, \delta, \varepsilon)$ tal que*

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| \leq \varepsilon \forall t \geq t_0 + T(t_0, \delta, \varepsilon).$$

Es uniformemente atractivo en $[t_0, \infty)$ si para todo ε , que satisface $0 < \varepsilon < \delta$, el intervalo de tiempo finito es independiente del tiempo inicial t_0 .

Definición 6 (Estabilidad asintótica) [28] Un punto de equilibrio $x_e = 0$ es asintóticamente estable al tiempo t_0 si es estable al tiempo t_0 y si es atractivo, o equivalentemente si existe alguna $\delta > 0$ tal que $\|x(t_0)\| < \delta$ implica que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Es uniforme asintóticamente estable en $[t_0, \infty)$ si éste es uniformemente estable en $[t_0, \infty)$, y si $x = 0$ es uniformemente atractivo.

Definición 7 (Estabilidad exponencial) [28] El punto de equilibrio $x_e = 0$ al tiempo t_0 es exponencialmente atractivo si, para alguna $\delta > 0$ existen constantes $\alpha(\delta) > 0$ y $\beta > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| \leq \alpha(\delta) e^{-\beta(t-t_0)}.$$

Es exponencialmente estable si, para alguna $\delta > 0$ existen dos números estrictamente positivos α y β tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| \leq \alpha(\delta) \|x(t_0)\| e^{-\beta(t-t_0)}.$$

2.3.1. Método directo de Lyapunov

Uno de los métodos más usados para probar si un punto de equilibrio es estable en el sentido de Lyapunov es el llamado método directo de Lyapunov que a continuación se presenta [1].

Definición 8 Una función continua $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función de clase \mathbb{k} si $\gamma(0) = 0$ y si es estrictamente monótona creciente. Se dice que es de clase \mathbb{k}_∞ si $\gamma(p) \rightarrow \infty$ cuando $p \rightarrow \infty$.

Definición 9 Una función $V(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se le llama localmente definida positiva si existe una función de clase \mathbb{k} , $\gamma_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que para alguna vecindad

del origen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\gamma_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

La función $V(t, x)$ se dice localmente decreciente si existe una función de clase \mathbb{k} , $\gamma_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que, para alguna vecindad del origen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se satisface

$$V(t, x) \leq \gamma_2(\|x(t)\|), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

La palabra “localmente” es reemplazada por “globalmente” si $\Omega = \mathbb{R}^n$. La función $V(t, x)$ es radialmente no acotada si γ_1 es una función de clase \mathbb{k}_∞ .

Definición 10 Una función $V(t, x(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función candidata de Lyapunov si es continuamente diferenciable y si

1. Para concluir estabilidad, $V(t, x(t))$ es definida positiva.
2. Para concluir estabilidad asintótica o estabilidad exponencial, $V(t, x(t))$ es definida positiva y decreciente.
3. Para concluir estabilidad global, $V(t, x(t))$ es globalmente definida positiva y radialmente no acotada.
4. Para concluir estabilidad asintótica uniforme y global o estabilidad exponencial global, $V(t, x(t))$ es globalmente definida positiva, globalmente decreciente y radialmente no acotada.

Teorema 11 Considere la ecuación diferencial ordinaria (2.3) tal que, para cualquier conjunto acotado $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ la función $f(\cdot)$ mapea $\mathcal{D} \times \mathbb{R}^+$ a conjuntos acotados en \mathbb{R}^n .

Sea $V(t, x)$ una función candidata de Lyapunov en alguna vecindad del origen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Suponga que la derivada temporal de $V(t, x(t))$ a lo largo de la solución de (2.3) tiene la propiedad que, para toda $(t, x(t)) \in \Omega$ se tiene que

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -\gamma_3(\|x(t)\|),$$

donde $\gamma_3(\cdot)$ es continua y no negativa, con $\gamma_3(0) = 0$. Entonces el equilibrio x_e del sistema tiene las siguientes propiedades de estabilidad:

1. Es global o localmente uniformemente estable si γ_3 es semidefinida positiva.
2. Es uniforme y asintóticamente estable en forma global o local si γ_3 es definida positiva.
3. Es exponencialmente estable en forma local o global si $\gamma_3(\|x(t)\|) \geq \lambda V(t, x)$ para alguna constante $\lambda > 0$ o si $\gamma_i(\|x(t)\|) = \lambda_i \|x(t)\|^2$ para $i = 1, 2, 3$ y algunas constantes positivas λ_i .
4. Es exponencialmente estable en forma global o local con convergencia en tiempo finito si $\gamma_3(\|x(t)\|) \geq \lambda V(t, x)^p$ para constantes $\lambda > 0$ y $0 < p < 1$.

2.4. Estabilidad de sistemas perturbados

Considere el sistema con perturbaciones denotadas por $\xi(t, x)$

$$\dot{x} = f(t, x) + \xi(t, x), \tag{2.5}$$

donde $f : [0, \infty] \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\xi : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son funciones continuas por tramos en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$, y $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio que contiene el

origen $x = 0$. Se considera al sistema (2.5) como una perturbación del sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2.6)$$

En situaciones típicas no se conoce con exactitud el término $\xi(t, x)$, pero sí se conoce algo de él, como por ejemplo su cota superior $\|\xi(t, x)\|$.

Aquí se considerarán perturbaciones que se pueden escribir como un término aditivo; por ejemplo, las incertidumbres que no cambian el orden del sistema siempre pueden ser representadas en esta forma [1].

2.4.1. Estabilidad de sistemas con perturbaciones desvanescentes

Se dice que una perturbación es desvanescente si $\xi(t, 0) = 0$. Suponga que $x_e = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (2.6), y sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov que satisface

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2, \quad (2.8)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|, \quad (2.9)$$

para todo $(t, x) \in [0, \infty] \times \mathcal{D}$ y para algunas constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 . Suponga que el término de perturbación $\xi(t, x)$ satisface el acotamiento de crecimiento lineal

$$\|\xi(t, x)\| \leq \sigma \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad (2.10)$$

donde σ es una constante positiva que satisface

$$\sigma < \frac{c_3}{c_4}. \quad (2.11)$$

Se tiene el siguiente resultado [1].

Lema 12 *Sea $x_e = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (2.6). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov para el sistema nominal que satisface las condiciones (2.7) a (2.9) en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$. Suponga que el término de perturbación $\xi(t, x)$ satisface (2.10) y (2.11). Entonces, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema perturbado (2.5). Además, si todas las condiciones se satisfacen en forma global, entonces el origen es globalmente asintóticamente estable.*

2.4.2. Estabilidad de sistemas con perturbaciones no desvanecientes

Ahora se aborda el caso más general cuando no se sabe si $\xi(t, 0) = 0$. Bajo estas condiciones es posible que el origen $x_e = 0$ ya no sea un equilibrio del sistema perturbado (2.5). Lo mejor que se puede esperar es que la solución $x(t)$ permanezca en una vecindad del origen, si la perturbación es pequeña en algún sentido.

Supóngase que el origen del sistema nominal (2.6) es exponencialmente estable. Entonces se tiene el siguiente lema [1]

Sea $x_e = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (2.6). Sea $V(t, x)$ una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (2.7) a (2.9) en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D} = \{x \in \mathfrak{R}^n \mid |x| < r\}$. Suponga que el término de perturbación satisface

$$\|\xi(t, x)\| \leq \delta < \frac{c_3}{c_4} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \theta r \quad (2.12)$$

para toda $t \geq 0$, toda $x \in \mathcal{D}$, y alguna constante positiva $\theta < 1$. Entonces, para toda

$\|x(t_0)\| < \sqrt{c_1/c_2}r$, la solución $x(t)$ del sistema perturbado (2.5) satisface

$$\|x(t)\| \leq k \exp[-\gamma(t-t_0)] \|x(t_0)\|, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

y

$$\|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T,$$

para algún tiempo finito T , donde

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}, \\ \gamma &= \frac{(1-\theta)c_3}{2c_2}, \\ b &= \frac{c_4}{c_3} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \frac{\delta}{\theta}. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Definición de una clase de sistemas subactuados y definición del objetivo de control

En este capítulo se presenta una introducción al modelado de sistemas mecánicos a través de las ecuaciones de Lagrange, la definición de una clase de sistemas subactuados y la definición del problema de control que se aborda en esta tesis.

3.1. Modelo de sistemas mecánicos utilizando las ecuaciones de Lagrange

Para cuestiones de control se considera que se puede representar un mecanismo mediante una cadena cinemática abierta como la mostrada en la figura 3.1, donde las

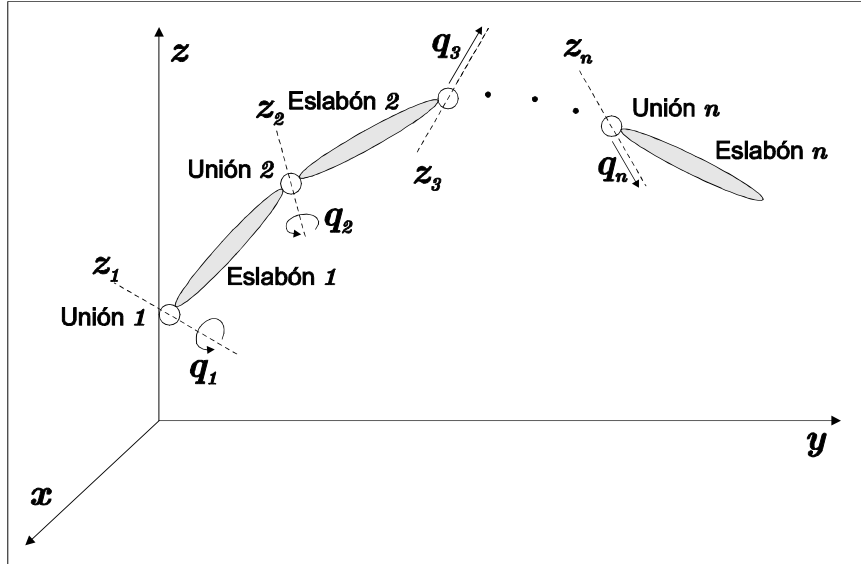


Figura 3.1: Cadena cinemática abierta

partes que lo componen son:

Definición 13 Una articulación es la unión de dos eslabones, por ejemplo en la figura 3.1 la unión uno es una articulación, la unión dos es otra articulación y así para cada unión.

Definición 14 Un eslabón por lo regular es una parte sólida o rígida del mecanismo que se encarga de transmitir una función o un trabajo a la parte final de este o a otro eslabón.

Definición 15 Los grados de libertad coinciden con el número de articulaciones de un mecanismo, por lo general el número de grados de libertad coincide con el número de ecuaciones necesarias para describir el movimiento del mecanismo.

Cada unión se controla a través de un accionador, que se coloca generalmente en dicha unión, y el movimiento de las uniones produce el movimiento relativo de los

eslabones. Aquí se denotara temporalmente por z_i , al eje de movimiento de la unión i . La coordenada articular generalizada denotada por q_i es el desplazamiento angular alrededor de z_i si la unión i es rotacional, o el desplazamiento lineal sobre z_i si la unión i es traslacional. En el caso típico donde los accionadores se localizan en las uniones entre eslabones, las coordenadas articulares generalizadas reciben el nombre de posiciones articulares.

En consecuencia, para un mecanismo con n articulaciones, es decir, de n gdl, el vector de posiciones articulares q tendrá n elementos

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones dinámicas de un mecanismo se pueden obtener a partir de las ecuaciones de movimiento de Lagrange [11]. Considérese un mecanismo de n grados de libertad, su energía total \mathcal{E} es la suma de su energía cinética \mathcal{K} y de su energía potencial \mathcal{U}

$$\mathcal{E}(q(t), \dot{q}(t)) = \mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t)) + \mathcal{U}(q(t)),$$

donde $q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$ y $\dot{q}(t) = [\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)]^T$ son los vectores de posiciones y velocidades articulares generalizadas respectivamente.

El Lagrangiano $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$ de un mecanismo de n grados de libertad es la diferencia entre su energía cinética \mathcal{K} y su energía potencial \mathcal{U} .

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = \mathcal{K}(q(t), \dot{q}(t)) - \mathcal{U}(q(t)). \quad (3.1)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange están dadas por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L [q(t), \dot{q}(t)]}{\partial \dot{q}_i} \right] - \left[\frac{\partial L [q(t), \dot{q}(t)]}{\partial q_i} \right] = \tau_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

donde τ_i son las fuerzas y pares ejercidos externamente en cada articulación así como fuerzas no conservativas. Como fuerzas no conservativas se incluyen las de fricción y en general las que dependen del tiempo y de la velocidad. Se tendrán tantas ecuaciones como grados de libertad tenga el mecanismo.

El sistema (3.2) puede representarse en forma matricial como

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (3.3)$$

donde $M(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ denominada matriz de inercia, $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ es un vector de $n \times 1$ llamado vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $G(q)$ es un vector $n \times 1$ de fuerzas o pares gravitacionales y τ es un vector de $n \times 1$ llamado vector de fuerzas externas, siendo generalmente los pares y fuerzas aplicadas por los accionadores en las articulaciones. Cada elemento de $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $G(q)$ es, en general, una función relativamente compleja de las posiciones y velocidades de todas las articulaciones.

Los efectos de fricción en sistemas mecánicos son fenómenos que dependen de múltiples factores como la naturaleza de los materiales en contacto, lubricación entre ellos, temperatura, etc. Por tal motivo son modelados sólo de forma aproximada, aunque se reconoce que éstas dependen de la velocidad relativa entre los cuerpos en contacto. Una característica importante de las fuerzas de fricción es que éstas son disipativas.

A pesar de la complejidad de la ecuación dinámica (3.3) que gobierna el comportamiento de mecanismos, esta ecuación y sus términos poseen propiedades que resultan de interés por sí mismas, a continuación se mencionan algunas de ellas.

3.1.1. Matriz de inercia $M(q)$

La matriz de inercia $M(q)$ juega un papel importante tanto en el modelado dinámico como en el diseño de controladores para mecanismos. En el primer caso, la matriz de inercia se encuentra íntimamente relacionada con la energía cinética $\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q) \dot{q}$, mientras que en el segundo, se emplean algunas de sus propiedades para el estudio de estabilidad de sistemas de control de mecanismos.

La matriz de inercia $M(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ cuyos elementos son funciones solamente de q . La matriz de inercia $M(q)$ satisface las siguientes propiedades:

1. Existe una constante real positiva α tal que:

$$M(q) \geq \alpha I \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n$$

donde I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$. La matriz $M(q)^{-1}$ existe y es definida positiva.

2. Para el caso de mecanismos provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$ tal que:

$$\lambda_{Max} \{M(q)\} \leq \beta \quad \forall q \in \mathfrak{R}^n.$$

Una manera sencilla de calcular β es la dada por:

$$\beta \geq n \left[\max_{i,j,q} |M_{ij}(q)| \right]$$

donde $M_{ij}(q)$ denota al ij -ésimo elemento de la matriz $M(q)$.

3. Para el caso de mecanismos provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_M > 0$ tal que:

$$\|M(x)z - M(y)z\| \leq k_M \|x - y\| \|z\|$$

para todo vector $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Una manera sencilla de determinar k_M es:

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,q} \left| \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right| \right]$$

4. Para el caso de mecanismos provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k'_M > 0$ tal que:

$$\|M(x)y\| \leq k'_M \|y\|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

3.1.2. Matriz centrífuga y de Coriolis $C(q, \dot{q})$

La importancia de las propiedades de la matriz centrífuga y de Coriolis $C(q, \dot{q})$ se hace patente en el estudio de estabilidad de sistemas de control de mecanismos.

La matriz centrífuga y de Coriolis $C(q, \dot{q})$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos son funciones de q y \dot{q} . Además satisface las siguientes propiedades:

1. La matriz $C(q, \dot{q})$ puede no ser única, pero el vector $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es único.

2. $C(q, 0) = 0$ para todo vector $q \in \mathfrak{R}^n$.

3. Para todo vector $q, x, y, z \in \mathfrak{R}^n$ y escalar α , se tiene que:

$$C(q, x)y = C(q, y)x,$$

$$C(q, z + \alpha x)y = C(q, z)y + \alpha C(q, x)y.$$

4. El vector $C(q, x)y$ puede expresarse en la forma:

$$C(q, x)y = \begin{bmatrix} x^T C_1(q)y \\ x^T C_2(q)y \\ \vdots \\ x^T C_n(q)y \end{bmatrix}$$

donde $C_k(q)$ son matrices simétricas de dimensión n para todo $k = 1, 2, \dots, n$.

De hecho, el ij -ésimo elemento $C_{kji}(q)$ de la matriz $C_k(q)$ corresponde al símbolo de Christoffel definidos como:

$$c_{jik}(q) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial M_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}(q)}{\partial q_k} \right]$$

5. Para el caso de mecanismos provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$ tal que:

$$\|C(q, x)y\| \leq k_{C_1} \|x\| \|y\|$$

para todo $q, x, y \in \mathfrak{R}^n$.

6. Para el caso de mecanismos provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$ y $k_{C_2} > 0$ tales que:

$$\|C(x, z)w - C(y, v)w\| \leq k_{C_1} \|z - w\| \|w\| + k_{C_2} \|x - y\| \|w\| \|z\|$$

para todo $v, x, y, z, w \in \mathfrak{R}^n$.

7. La matriz $C(q, \dot{q})$ esta relacionada con la matriz de inercia $M(q)$ por la expresión:

$$x^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] x = 0 \quad \forall q, \dot{q}, x \in \mathfrak{R}^n$$

y de hecho, $\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q})$ es una matriz antisimétrica. En forma análoga la matriz $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es antisimétrica, y también resulta cierto que:

$$\dot{M}(q) = C(q, \dot{q}) + C(q, \dot{q})^T.$$

Independientemente de la manera en la que se obtenga $C(q, \dot{q})$, ésta siempre satisfará:

$$q^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right] \dot{q} = 0 \quad \forall q, \dot{q} \in \mathfrak{R}^n$$

3.1.3. Vector de gravedad $G(q)$

El vector de pares gravitacionales $G(q)$ de $n \times 1$ depende sólo de las posiciones articulares q . El vector $G(q)$ está acotado si q lo está también. Adicionalmente $G(q)$ tiene las siguientes propiedades:

1. El vector $G(q)$ y el vector de velocidad \dot{q} pueden relacionarse mediante:

$$\int_0^T G(q)^T \dot{q} dt = \mathcal{U}(q(t)) - \mathcal{U}(q(0))$$

para todo $T \in \mathfrak{R}_+$.

2. Para el caso de mecanismos provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante finita tal que:

$$\int_0^T G(q)^T \dot{q} dt + \mathcal{U}(q(0)) \geq k_{\mathcal{U}}$$

para todo $T \in \mathfrak{R}_+$ y donde $k_{\mathcal{U}} = \min_q \{\mathcal{U}(q)\}$.

3.1.4. Linealidad en los parámetros dinámicos

Una particularidad importante de la ecuación dinámica (3.3), que entre paréntesis es no lineal en el vector de estado $[q^T \dot{q}^T]^T$, es que puede expresarse en términos lineales de los parámetros dinámicos de un mecanismo, por ejemplo de las masas e inercias. Esta característica es básica para el análisis de controladores adaptables. Esta propiedad se formaliza de la siguiente manera.

Linealidad en términos de los parámetros dinámicos

Considérese las matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ y el vector $G(q)$ del modelo dinámico (3.3). Se tienen las siguientes propiedades:

1. Para todo $u, v, w \in \mathfrak{R}^n$:

$$M(q)u + C(q, w)v + G(q) = \Phi(q, u, v, w)\theta + k(q, u, v, w)$$

donde $k(q, u, v, w)$ es un vector de $n \times 1$, $\Phi(q, u, v, w)$ es una matriz de $n \times m$ y el vector $\theta \in \mathfrak{R}^m$ depende exclusivamente de los parámetros dinámicos del mecanismo y de su carga.

2. Si $q, u, v, w \in L_\infty^n$ entonces $\Phi(q, u, v, w) \in L_\infty^{n \times m}$.

Conviene resaltar que siempre es posible encontrar un vector $\theta \in \mathfrak{R}^m$ para el cual $k(q, u, v, w) \equiv 0 \in \mathfrak{R}^n$. Considerando esto y tomando $u = \ddot{q}$, $v = w = \dot{q}$, la ecuación

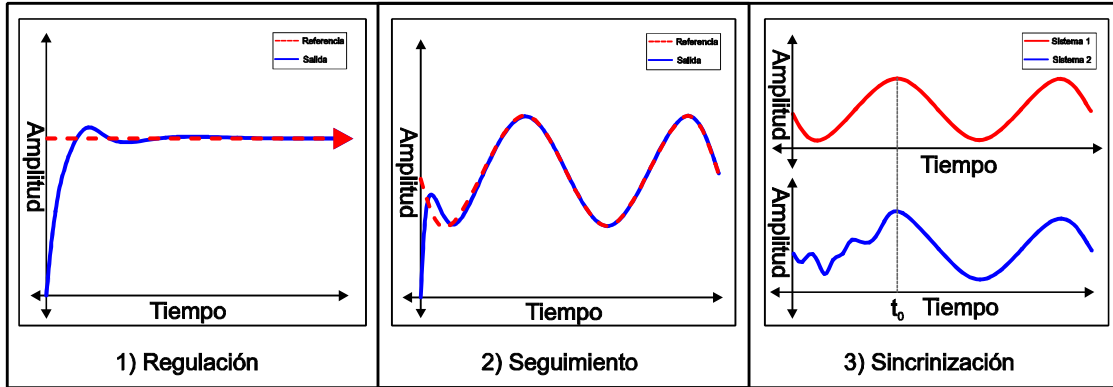


Figura 3.2: Objetivos de control más comunes.

(3.3) puede entonces escribirse como:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau,$$

donde $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \Phi(q, \ddot{q}, \dot{q}, \dot{q})$ es una matriz de $n \times m$, y θ es un vector de $m \times 1$ que contiene las m constantes dependientes de los parámetros dinámicos. La constante n es evidentemente el número de *GDL*, mientras que el valor entero m depende de la selección de los parámetros dinámicos del mecanismo.

3.2. Definición del objetivo de control

Algunos de los objetivos de control son estabilización, regulación, seguimiento de trayectorias, sincronización, control de bifurcaciones y generación de atractores caóticos, en la figura 3.2 se ilustran algunos de ellos.

Donde cada objetivo se define de la siguiente forma:

1. Regulación: La salida de la planta converge a una señal de referencia constante.

2. Seguimiento: La salida de la planta converge a una señal de referencia variante con el tiempo.
3. Sincronización: Las salidas de dos sistemas se sincronizan en un t_0 mediante una señal acoplante.

El objetivo de seguimiento de trayectorias incluye a regulación y a estabilización como casos especiales. Analíticamente, el objetivo de seguimiento de trayectorias se define como el diseño de una entrada de control u , como una función del estado y del tiempo, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_r(t)) = 0.$$

Como se ha mencionado anteriormente, los objetivos de control más estudiados para sistemas subactuados son estabilización y regulación. Sin embargo, en este trabajo de tesis se aborda el objetivo de seguimiento de trayectorias para una clase particular de sistemas mecánicos subactuados, la cual se describe en la siguiente sección.

3.3. Descripción de una clase de sistemas subactuados de dos grados de libertad

Cuando un sistema mecánico cuenta con un actuador en cada articulación se le llama sistema completamente actuado, pero si el mecanismo cuenta con articulaciones sin actuador se le llama sistema subactuado. Esto se ve reflejado en su modelo dinámico en el número de entradas de control en el sistema; en un sistema subactuado hay menos entradas de control que grados de libertad [17].

Cuando un sistema subactuado de n grados de libertad ($nGDL$) cuenta con $m < n$ actuadores, entonces $i = n - m$ es el grado de subactuación, por ejemplo si un sistema subactuado de $3GDL$ cuenta con un actuador en cualquiera de sus articulaciones $i = 2$, entre más alto sea el grado de subactuación el mecanismo es más difícil de controlar.

Un sistema de $2GDL$ puede ser el sistema subactuado más simple, su modelo está dado por

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_{11}(q) & m_{12}(q) \\ m_{21}(q) & m_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11}(q, \dot{q}) & c_{12}(q, \dot{q}) \\ c_{21}(q, \dot{q}) & c_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

El sistema (3.4) tiene la forma más general posible, sin embargo, diseñar controladores para este modelo general es muy complejo.

Una clase de sistemas subactuados se define por la siguiente estructura

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 &= f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + g_1(q_1, q_2)\tau, \\
 \ddot{q}_2 &= f_2(q_2, \dot{q}_2) + g_2q_1 + g_3q_2, \\
 y_1 &= q_1, \\
 y_2 &= q_2,
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde q_1 , q_2 , \dot{q}_1 y \dot{q}_2 son las posiciones y velocidades generalizadas respectivamente, $f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ y $g_1(q_1, q_2)$ son funciones suaves, $g_1(q_1, q_2) \neq 0$ para todo q_1 y q_2 , g_2 y g_3 son constantes diferentes de cero y τ es la entrada de control.

Una propiedad importante del sistema (3.5) es que la ecuación subactuada es lineal con respecto a q_1 y su coeficiente es diferente de cero, esto es la base del controlador

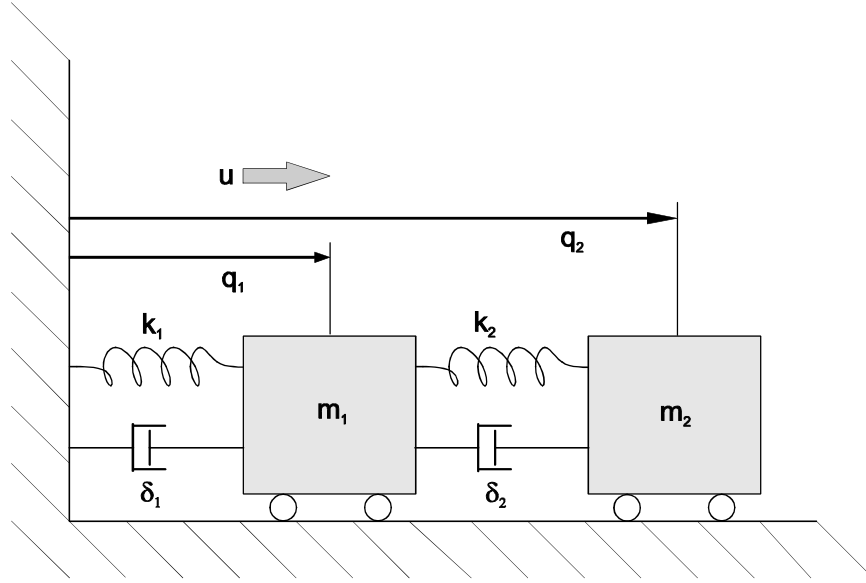


Figura 3.3: Esquema de un sistema masa resorte amortiguador de 2 grados de libertad.

propuesto en esta tesis.

3.4. Ejemplo de modelado de un sistema subactuado de 2GDL

Considere el sistema masa resorte amortiguador de 2 grados de libertad que se muestra en la figura 3.3, cuyo vector de posiciones articulares q está definido por

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T,$$

donde q_1 y q_2 son las posiciones de cada una de las masas, para este caso la energía cinética $K(q, \dot{q})$ es la suma de dos partes,

$$K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}),$$

donde $K_1(q, \dot{q})$ y $K_2(q, \dot{q})$ son las energías cinéticas asociadas a la masa m_1 y m_2 respectivamente, también se puede realizar lo mismo con las energías potenciales

$$\mathcal{U}(q) = \mathcal{U}_1(q) + \mathcal{U}_2(q),$$

donde $\mathcal{U}_1(q)$ y $\mathcal{U}_2(q)$ son las energías potenciales asociadas a la masa m_1 y m_2 respectivamente. Las energías cinéticas están dadas por

$$\begin{aligned} K_1(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2, \\ K_2(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2, \end{aligned}$$

y las energías potenciales son

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(q) &= \frac{1}{2}k_1q_1^2, \\ \mathcal{U}_2(q) &= \frac{1}{2}k_2(q_2 - q_1)^2, \end{aligned}$$

por lo tanto, el Lagrangiano queda definido por la ecuación,

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}k_1q_1^2 - \frac{1}{2}k_2(q_2 - q_1)^2.$$

Ahora se obtienen la derivadas que se necesitan en (3.2) para el desarrollo de las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}_1} &= m_1\dot{q}_1, \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}_1} \right] &= m_1\ddot{q}_1, \\ \frac{\partial \mathcal{L}[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}_2} &= m_2\dot{q}_2, \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}[q, \dot{q}]}{\partial \dot{q}_2} \right] &= m_2\ddot{q}_2, \\ \frac{\partial \mathcal{L}[q, \dot{q}]}{\partial q_1} &= -k_1q_1 + k_2(q_2 - q_1), \\ \frac{\partial \mathcal{L}[q, \dot{q}]}{\partial q_2} &= -k_2(q_2 - q_1). \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un sistema masa resorte amortiguador de 2GDL están definidas por (3.2) y son

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_2 (q_2 - q_1) &= \tau_1, \\ m_2 \ddot{q}_2 + k_2 (q_2 - q_1) &= \tau_2, \end{aligned}$$

como se puede observar, la ecuaciones de movimiento de Lagrange no incluyen funciones de fricción. Un modelo que incluye un modelo simple del fenómeno de fricción es

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_2 (q_2 - q_1) &= \tau_1 - \delta_1 \dot{q}_1 - \delta_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2), \\ m_2 \ddot{q}_2 + k_2 (q_2 - q_1) &= \tau_2 - \delta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1), \end{aligned}$$

despejando los torques se tiene

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_2 (q_2 - q_1) + \delta_1 \dot{q}_1 + \delta_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) &= \tau_1, \\ m_2 \ddot{q}_2 + k_2 (q_2 - q_1) + \delta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) &= \tau_2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

El sistema (3.6) es el modelo dinámico de un sistema masa resorte amortiguador de 2GDL completamente actuado, para utilizar la configuración subactuada únicamente se elimina τ_2 , y se obtiene el sistema (3.7)

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_2 (q_2 - q_1) + \delta_1 \dot{q}_1 + \delta_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) &= \tau, \\ m_2 \ddot{q}_2 + k_2 (q_2 - q_1) + \delta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Debido a que el sistema es modelado por las ecuaciones de Lagrange, los términos de perturbaciones se suman al modelo obtenido, esto es una de sus propiedades, por lo tanto se obtiene el modelo matemático de un de un sistema masa resorte amortiguador de 2GDL subactuado considerando perturbaciones dado por el sistema (3.8).

$$m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_2 (q_2 - q_1) + \delta_1 \dot{q}_1 + \delta_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = \tau + \gamma_1(\cdot), \quad (3.8)$$

$$m_2 \ddot{q}_2 + k_2 (q_2 - q_1) + \delta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) = \gamma_2(\cdot)$$

donde $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$ incluyen términos producidos por variaciones paramétricas.

Capítulo 4

Solución del problema de control considerando un modelo nominal

En este capítulo se presenta una propuesta de control para los sistemas subactuados presentado en el capítulo 3, considerando un modelo nominal y del cual únicamente se conocen sus posiciones generalizadas. Para implementar el control se utilizan derivadores y observadores en tiempo finito, ambos propuestos en [29] y [30] respectivamente.

4.1. Definición del modelo nominal y objetivo de control

Considere un sistema mecánico subactuado de 2 grados de libertad (2GDL) cuyo modelo dinámico está dado por las ecuaciones,

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + g_1(q_1, q_2)\tau, \\ \ddot{q}_2 &= f_2(q_2, \dot{q}_2) + g_2q_1 + g_3q_2, \\ y_1 &= q_1, \\ y_2 &= q_2,\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde q_1 , q_2 , \dot{q}_1 y \dot{q}_2 son las posiciones y velocidades generalizadas respectivamente, $f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ y $g_1(q_1, q_2)$ son funciones suaves, $g_1(\cdot) \neq 0$ para todo q_1 y q_2 , g_2 y g_3 son constantes diferentes de cero y τ es la entrada de control.

El objetivo de control es que la salida subactuada q_2 siga a una referencia variante en el tiempo $y_r(t)$, mientras que la posición y velocidad de la articulación actuada q_1 y \dot{q}_1 permanezcan acotadas.

Una representación en variables de estado del sistema (4.1) es la siguiente

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3)\tau, \\
 \dot{x}_3 &= x_4, \\
 x_4 &= f_2(x_3, x_4) + g_2x_1 + g_3x_2, \\
 y_1 &= x_1, \\
 y_2 &= x_3,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$, $x_4 = \dot{q}_2$.

El objetivo de control de seguimiento de trayectorias se puede definir por la variable de error $e_1 = x_3 - y_r(t)$; su dinámica está dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= e_2, \\
 \dot{e}_2 &= f_2(x_3, x_4) + g_2x_1 + g_3x_2 - \ddot{y}_r(t), \\
 y_e &= e_1, \\
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3)\tau, \\
 y_1 &= x_1.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.2. Solución para el sistema nominal

El sistema (4.3) está formado por dos subsistemas; el sistema de error

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad (4.4)$$

$$\dot{e}_2 = f_2(x_3, x_4) + g_2x_1 + g_3x_2 - \ddot{y}_r(t),$$

$$y_e = e_1,$$

y el subsistema actuado

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_2 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3)\tau,$$

$$y_1 = x_1.$$

La estrategia de control es la siguiente, para el sistema (4.4) se considera que la entrada de control es la variable x_1 , de esta forma un control ideal que estabiliza en forma asintótica el origen del sistema de error (4.4), y con esto se resuelve el problema de seguimiento para este subsistema, es

$$x_1 = \frac{1}{g_2}(-f_2(x_3, x_4) - g_3x_2 + \ddot{y}_r(t) - k_1e_1 - k_2e_2). \quad (4.6)$$

La expresión para x_1 en (4.6) se toma como una nueva señal de referencia denominada $x_{ra}(t)$,

$$x_{ra}(t) = \frac{1}{g_2}(-f_2(x_3, x_4) - g_3x_2 + \ddot{y}_r(t) - k_1e_1 - k_2e_2),$$

la cual será la referencia para la salida y_1 del subsistema (4.5). Ahora se definen los nuevos errores de seguimiento para la parte actuada del mecanismo

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= x_1 - x_{ra}(t), \\ \varepsilon_2 &= x_2 - \dot{x}_{ra}(t),\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3)\tau - \ddot{x}_{ra}(t),\end{aligned}\tag{4.7}$$

ya que $g_1(\cdot)$ es no singular para cualquier valor de su argumento, un control que estabiliza el origen del sistema (4.7) es

$$\tau = \frac{1}{g_1(x_1, x_3)} (-f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \ddot{x}_{ra}(t) - \alpha_1\varepsilon_1 - \alpha_2\varepsilon_2)\tag{4.8}$$

4.2.1. Análisis de estabilidad

Sustituyendo el control (4.8) en el sistema (4.7) se tiene el sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -\alpha_1\varepsilon_1 - \alpha_2\varepsilon_2,\end{aligned}\tag{4.9}$$

el cual tiene al origen como un punto de equilibrio exponencialmente estable si las constantes α_1 y α_2 son positivas. Es importante notar que la dinámica del sistema (4.9) no depende de la dinámica del sistema (4.4).

Ahora se considera el sistema (4.4)

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad (4.10)$$

$$\dot{e}_2 = f_2(x_3, x_4) + g_2x_1 + g_3x_2 - \ddot{y}_r(t),$$

$$y_e = e_1,$$

considerando que $x_1 = \varepsilon_1 + x_{ra}(t)$, se tiene

$$x_1 = \varepsilon_1 + \frac{1}{g_2}(-f_2(x_3, x_4) - g_3x_2 + \ddot{y}_r(t) - k_1e_1 - k_2e_2), \quad (4.11)$$

sustituyendo (4.11) en (4.10) y simplificando se obtiene

$$\dot{e}_1 = e_2,$$

$$\dot{e}_2 = g_2\varepsilon_1 - k_1e_1 - k_2e_2,$$

este sistema es un sistema lineal con una perturbación que se desvanece en forma exponencial; si k_1 y k_2 son constantes positivas, el sistema nominal definido con $g_2\varepsilon_1 = 0$ tiene al origen como un punto de equilibrio exponencialmente estable, de esta forma, el sistema perturbado tiene al origen como un punto de equilibrio asintóticamente estable si se eligen adecuadamente las constantes k_1 y k_2 [1].

4.3. Implementación del control

El controlador (4.8) no puede ser implementado en forma directa ya que no se tiene acceso a las velocidades x_2 y x_4 , y tampoco se tiene el termino $\ddot{x}_{ra}(t)$, es por eso que en esta sección se presenta una estrategia para implementar dicha señal de control.

4.3.1. Estimación de las velocidades de cada carro utilizando un derivador exacto con convergencia en tiempo finito

Con el objetivo de estimar las velocidades de cada carro se utiliza el derivador exacto con convergencia en tiempo finito de Levant propuesto en [29] y está dado por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= w_1 + c_{1,1} |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{w}_1 &= c_{1,2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1),\end{aligned}$$

para estimar $w_1 = x_2$ y

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_3 &= w_3 + c_{3,1} |x_3 - \hat{x}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3), \\ \dot{w}_3 &= c_{3,2} \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3),\end{aligned}$$

para estimar $w_2 = x_4$, donde las constantes $c_{i,1}$ y $c_{i,2}$ deben satisfacer las desigualdades

$$\begin{aligned}c_{i,1}^2 &\geq 4C_i \frac{c_{i,2} + C_i}{c_{i,2} - C_i}, \\ c_{i,2} &> C_i,\end{aligned}$$

donde $|\dot{x}_i| < C_i$, para $i = 1, 3$.

Considerando que después de un tiempo finito ya se cuenta con el vector de estado completo se puede implementar la señal de referencia auxiliar $x_{ra}(t)$.

$$x_{ra}(t) = \frac{1}{g_2} (-f_2(x_3, w_3) - g_3 w_1 + \ddot{y}_r(t) - k_1 e_1 - k_2 e_2).$$

4.3.2. Observador para la estimación de ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$

Después de obtener en un tiempo finito las velocidades de cada carro, en esta sección se utiliza un observador exacto con convergencia en tiempo finito para estimar las

variables ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$ a partir del sistema (4.4). Se considera que el sistema (4.4) mantiene el comportamiento acotado.

El observador tiene la forma [30]

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_1 = z_1 + \alpha_{1,1} |\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1), \quad (4.12)$$

$$\dot{z}_1 = \alpha_{2,1} \text{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1),$$

$$\hat{y}_1 = \hat{\varepsilon}_1.$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_2 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3)\tau + z_2 + \alpha_{1,2} |z_1 - \hat{\varepsilon}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2), \quad (4.13)$$

$$\dot{z}_2 = \alpha_{2,2} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2),$$

$$\hat{y}_2 = \hat{\varepsilon}_2.$$

En el observador (4.12-4.13) $\hat{\varepsilon}_1$ y z_1 convergen a ε_1 , $\hat{\varepsilon}_2$ converge a ε_2 y z_2 converge a $-\ddot{x}_{ra}(t)$. Esto se puede probar de la siguiente manera.

Definiendo el conjunto de variables de error

$$\epsilon_1 = \varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1,$$

$$\epsilon_2 = \varepsilon_2 - \hat{\varepsilon}_2,$$

cuya dinámica está dada por el sistema

$$\dot{\epsilon}_1 = \varepsilon_2 - z_1 - \alpha_{1,1} |\epsilon_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\epsilon_1), \quad (4.14)$$

$$\dot{z}_1 = \alpha_{2,1} \text{sign}(\epsilon_1),$$

$$\dot{\epsilon}_2 = -\ddot{x}_{ra}(t) - z_2 - \alpha_{1,2} |z_1 - \hat{\varepsilon}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2), \quad (4.15)$$

$$\dot{z}_2 = \alpha_{2,2} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2).$$

El análisis de estabilidad del sistema (4.14-4.15) se realiza por bloques. Como se puede observar, el comportamiento de las variables ε_1 y z_1 es independiente del resto de los estados de (4.15),

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_1 &= \varepsilon_2 - z_1 - \alpha_{1,1} |\epsilon_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\epsilon_1), \\ \dot{z}_1 &= \alpha_{2,1} \text{sign}(\epsilon_1),\end{aligned}\tag{4.16}$$

Se asume que el comportamiento de la planta es acotado y que $|\dot{\epsilon}_2| < \delta_2$. Haciendo el cambio de variables $v_1 = \epsilon_1$ y $v_2 = \varepsilon_2 - z_1$ el sistema (4.16) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_2 - \alpha_{1,1} |v_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(v_1), \\ \dot{v}_2 &= \dot{\epsilon}_2 - \alpha_{2,1} \text{sign}(v_1),\end{aligned}\tag{4.17}$$

eligiendo valores adecuados de las constantes $\alpha_{1,1}$ y $\alpha_{2,1}$ de acuerdo a [30] se puede garantizar la convergencia en tiempo finito al origen de v_1 y v_2 , lo que implica que en un tiempo finito $\hat{\epsilon}_1 = \varepsilon_1$ y $z_1 = \varepsilon_2$. En la siguiente etapa se puede considerar el cambio de variables como $v_3 = \epsilon_2$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\dot{v}_3 &= \dot{\epsilon}_2, \\ \dot{v}_3 &= -\ddot{x}_{ra}(t) - z_2 - \alpha_{1,2} |z_1 - \hat{\epsilon}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{\epsilon}_2),\end{aligned}$$

definiendo a $v_4 = -\ddot{x}_{ra}(t) - z_2$, resulta el siguiente sistema

$$\begin{aligned}\dot{v}_3 &= v_4 - \alpha_{1,2} |v_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(v_3), \\ \dot{v}_4 &= -\ddot{x}_{ra}(t) - \alpha_{2,2} \text{sign}(v_3),\end{aligned}\tag{4.18}$$

Siguiendo el mismo procedimiento con este par de ecuaciones, y asumiendo que $|\ddot{x}_{ra}(t)| < \delta_3$, se pueden encontrar los valores de las constantes $\alpha_{1,2}$ y $\alpha_{2,2}$ tal que $z_2 = -\ddot{x}_{ra}(t)$ en tiempo finito.

Es importante notar que para cerrar el lazo y satisfacer el objetivo de control primero se debe dejar evolucionar la planta en lazo abierto permitiendo la convergencia de los derivadores y observadores, ya que han alcanzado su objetivo, se cierra el lazo.

4.4. Aplicación a un sistema masa resorte amortiguador de 2GDL

4.4.1. Definición del modelo nominal

Considere el sistema masa resorte amortiguador que se muestra en la figura 3.3, cuyo modelo está dado por

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 q_1 - k_2 (q_2 - q_1) + \delta_1 \dot{q}_1 + \delta_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) &= k_m \tau, \\ m_2 \ddot{q}_2 + k_2 (q_2 - q_1) + \delta_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde q_1 y q_2 son la posición del primer y segundo cuerpo respectivamente, \dot{q}_1 y \dot{q}_2 son sus velocidades y \ddot{q}_1 y \ddot{q}_2 son sus aceleraciones. m_i , k_i y δ_i , para $i = 1, 2$, son el peso, constantes del resortes y coeficientes de fricción respectivamente, k_m es una ganancia del controlador y τ es la entrada de control.

Definiendo las variables de estado como $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$, $x_4 = \dot{q}_2$ y cambiando $\tau = u$ se obtiene una representación en variables de estado del sistema

(4.19).

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)x_1 - \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{m_1}\right)x_2 + \frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{\delta_2}{m_1}x_4 + \frac{k_m}{m_1}u, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{\delta_2}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}x_3 - \frac{\delta_2}{m_2}x_4, \\ y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_3.\end{aligned}\tag{4.20}$$

En esta sección se presentan tanto resultados numéricos y experimentales, por lo tanto, un primer paso fue estimar los parámetros de la planta con la finalidad de realizar simulaciones utilizando un modelo de la planta lo más cercano posible al real.

4.4.2. Identificación de parámetros

Con el fin de realizar experimentos en la planta rectilínea de la marca Educational Control Products (ECP), modelo ECP210, se realizó una caracterización del mecanismo para estimar los parámetros de la planta, los experimentos realizados consisten en estimular al sistema con una señal tipo escalón de cierta amplitud y, con base a la solución analítica y de los datos de la respuesta, se obtiene un estimado de los parámetros. Una explicación detallada de esta identificación se encuentra en el manual de usuario del mecanismo [31], capítulo 6 de las páginas 76 a la 80.

Los valores de los parámetros obtenidos son $k_1 = k_2 = 189,65348$, $\delta_1 = 10,54942$, $\delta_2 = 1,19888$, $m_1 = 0,77136$, $m_2 = 0,60646$ y $k_m = 2,85$. Por lo tanto, el modelo nominal

del sistema (4.20) está dado por

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -491,74x_1 - 15,23x_2 + 245,87x_3 + 1,5542x_4 + 3,6948u,$$

$$\dot{x}_3 = x_4,$$

$$\dot{x}_4 = 312,72x_1 + 1,9768x_2 - 312,72x_3 - 1,9768x_4,$$

$$y_1 = x_1,$$

$$y_2 = x_3.$$

4.4.3. Diseño de la señal de control

El objetivo de control es lograr que la salida subactuada x_3 siga a una referencia variante con el tiempo $y_r(t)$ mientras que la articulación actuada mantenga un comportamiento acotado.

Se define el error entre la salida y la referencia $e_1 = x_3 - y_r(t)$, cuya derivada es

$$e_2 = x_4 - \dot{y}_r(t),$$

mientras que \dot{e}_2 está dado por

$$\dot{e}_2 = \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{\delta_2}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}x_3 - \frac{\delta_2}{m_2}x_4 - \ddot{y}_r(t).$$

De esta forma se puede definir el sistema extendido

$$\dot{e}_1 = e_2, \tag{4.21}$$

$$\dot{e}_2 = 312,72x_1 + 1,9768x_2 - 312,72x_3 - 1,9768x_4 - \ddot{y}_r(t),$$

$$y_e = e_1,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -491,74x_1 - 15,23x_2 + 10245,87x_3 + 1,5542x_4 + 3,6948u,$$

$$y_1 = x_1.$$

La señal $x_{ra}(t)$ que controla la parte subactuada es

$$x_{ra}(t) = 3,1977 \times 10^{-3} (-c_1 e_1 - c_2 e_2 - 1,9768x_2 + 312,72x_3 + 1,9768x_4 + \ddot{y}_r(t)),$$

donde se proponen las constantes $c_1 = c_2 = 10$.

Para el diseño de control del sistema actuado de (4.21) se definen nuevas variables de error que están dadas por

$$\varepsilon_1 = x_1 - x_{ra}(t),$$

$$\varepsilon_2 = x_2 - \dot{x}_{ra}(t),$$

cuya dinámica es

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \tag{4.22}$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -491,74x_1 - 15,23x_2 + 10245,87x_3 + 1,5542x_4 + 3,6948u - \ddot{x}_{ra}(t),$$

por lo tanto, un control ideal que estabiliza al origen del sistema (4.22) es

$$u = 0,27065(-\alpha_1\varepsilon_1 - \alpha_2\varepsilon_2 + 491,74x_1 + 15,23x_2 - 10245,87x_3 - 1,5542x_4 - 3,6948u + \ddot{x}_{ra}(t)), \quad (4.23)$$

donde los valores propuestos de las constantes son $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$.

Para implementar la señal de control (4.23) es necesario estimar las velocidades de cada carro, con esto se puede implementar la señal de referencia $x_{ra}(t)$, y estimar las variables ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$. Estas estimaciones se llevarán a cabo con derivadores discontinuos con convergencia en tiempo finito como los propuestos en [29].

Con el objetivo de estimar las velocidades de cada carro se utiliza el derivador exacto en tiempo finito de Levant dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= w_1 + c_{1,1} |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{w}_1 &= c_{1,2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \end{aligned}$$

para obtener $w_1 = x_2$ y

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_3 &= w_3 + c_{3,1} |x_3 - \hat{x}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3), \\ \dot{w}_3 &= c_{3,2} \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3), \end{aligned}$$

para obtener $w_3 = x_4$, donde las constantes $c_{i,1}$ y $c_{i,2}$ deben satisfacer la desigualdad

$$\begin{aligned} c_{i,1}^2 &\geq 4C_i \frac{c_{i,2} + C_i}{c_{i,2} - C_i}, \\ c_{i,2} &> C_i, \end{aligned}$$

donde $|\dot{x}_i| < C_i$. Los valores propuestos para las constantes son $c_{1,1} = c_{3,1} = 45$ y $c_{1,2} = c_{3,2} = 5$

Por lo tanto, la señal de referencia x_{ra} se puede implementar de la siguiente forma

$$x_{ra} = 3,1977 \times 10^{-3} (-10e_1 - 10e_2 - 1,9768w_1 + 312,72x_3 + 1,9768w_3 + \ddot{y}_r(t)).$$

Como se considera que $x_{ra}(t)$ es acotada y que sus dos primeras derivadas $\dot{x}_{ra}(t)$ y $\ddot{x}_{ra}(t)$ son acotadas se propone un observador para el sistema (4.22) de la forma

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_1 = z_1 + \alpha_{1,1} |\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1), \quad (4.24)$$

$$\dot{z}_1 = \alpha_{2,1} \text{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1),$$

$$\hat{y}_1 = \hat{\varepsilon}_1.$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_2 = -491,74x_1 - 15,23x_2 + 10245,87x_3 + 1,5542x_4 + 3,6948u + z_2 + .. \quad (4.25)$$

$$.. + \alpha_{1,2} |z_1 - \hat{\varepsilon}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2), \quad (4.26)$$

$$\dot{z}_2 = \alpha_{2,2} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2),$$

$$\hat{y}_2 = \hat{\varepsilon}_2,$$

con valores propuestos de las constantes $\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = 45$ y $\alpha_{2,1} = \alpha_{2,2} = 5$.

4.4.4. Ilustración del desempeño del controlador del caso nominal

Para ilustrar el desempeño del sistema en lazo cerrado se realizaron una serie de simulaciones numéricas y experimentos con tres señales de referencia distintas: una señal senoidal, una suma de senoidales de diferente frecuencia y amplitud, y una señal tipo exponencial. Las simulaciones se realizaron en simulink y los experimentos se realizaron con la plataforma de control dSPACE 1103.

Resultados de simulaciones numéricas

Simulaciones con una referencia senoidal En la primera simulación se muestran los resultados utilizando una señal de referencia senoidal con una amplitud de 2 centímetros y con una frecuencia de $1 \frac{rad}{seg}$.

En las figuras 4.1 y 4.2 se muestra el desempeño del derivador utilizado para estimar las velocidades de la planta; en la figura 4.1 se puede observar que el sistema se mantuvo en lazo abierto durante los primeros 2 segundos y la convergencia de los derivadores a las velocidades reales es muy rápida, en unas fracciones de segundo. Esto se puede observar en los errores entre las variables reales y las estimadas que se muestran en la figura 4.2, los errores de posición están en el orden de 1×10^{-5} , lo que se puede considerar suficientemente pequeño para decir que los derivadores tienen el desempeño esperado. En esta gráfica se utiliza la siguiente nomenclatura $\hat{x}_1 = x_{1o}$, $\hat{x}_3 = x_{3o}$.

El desempeño del observador para estimar las variables ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$ se analiza en forma indirecta a través de la convergencia a cero de errores entre variables internas. La figura 4.3 se muestra el comportamiento de estos errores, en donde se puede observar su convergencia a cero, lo que implica que la estimación de ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$ en tiempo finito es adecuada. En esta gráfica se utiliza la siguiente nomenclatura $\varepsilon_1 = e_1$, $\hat{\varepsilon}_1 = e_{1o}$, $\hat{\varepsilon}_2 = e_{2o}$, y los errores internos del observador están dados por $\epsilon_1 = \varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1$ y $\epsilon_2 = z_1 - \hat{\varepsilon}_2$.

Después de cerrar el lazo, en $t = 3seg.$, la convergencia de la variable x_1 a x_{ra} y de x_3 a $y_r(t)$ se hace presente, como se puede observar en las figuras 4.4 y 4.5. Esta convergencia es en forma asintótica y se obtiene un error considerablemente bajo a partir de los 2 segundos después de cerrar el lazo.

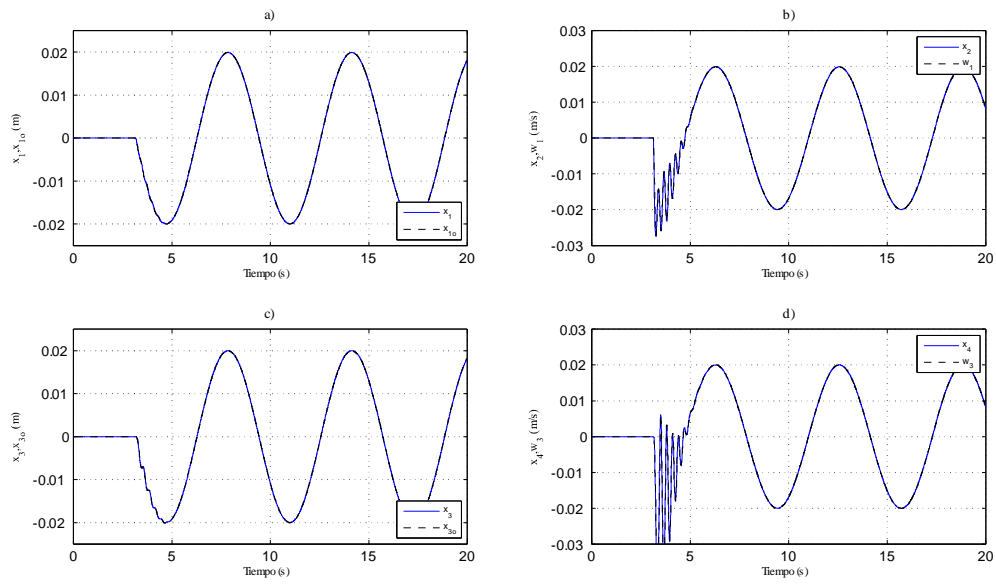


Figura 4.1: Desempeño de derivadores para estimar las velocidades.

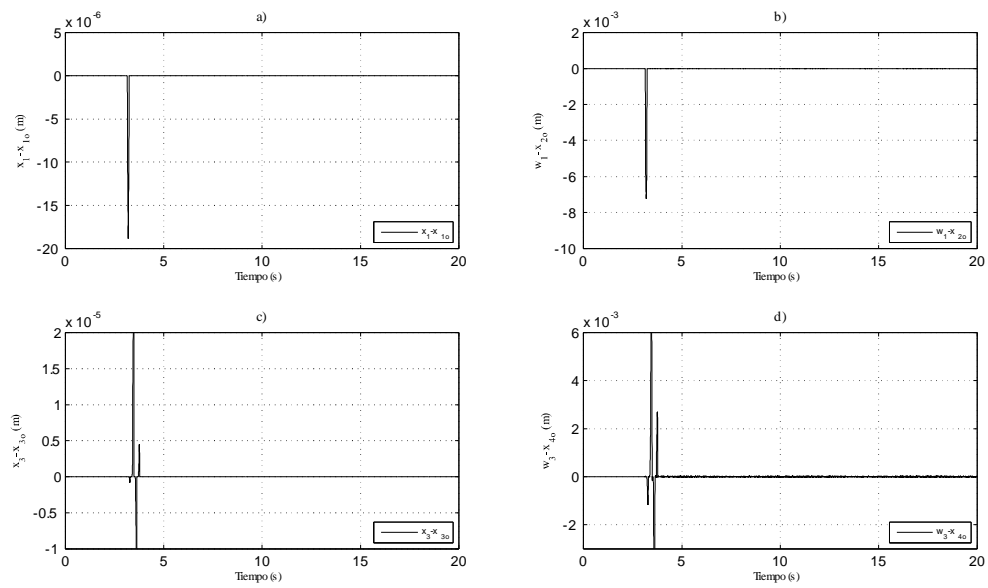


Figura 4.2: Errores entre las variables de estado reales y las estimadas por los derivadores.

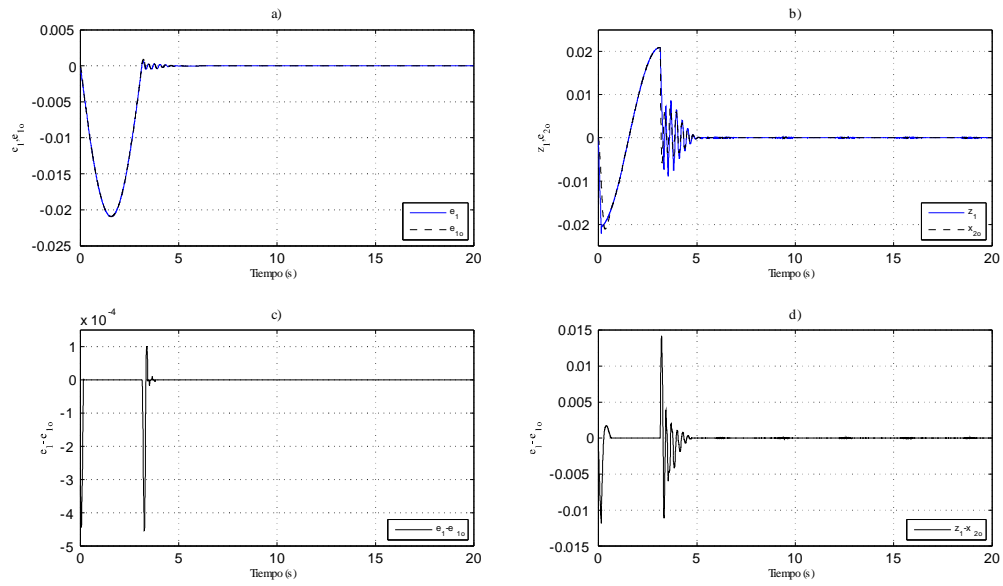


Figura 4.3: Desempeño del observador para estimar $\varepsilon_2, \tilde{x}_{ra}(t)$.

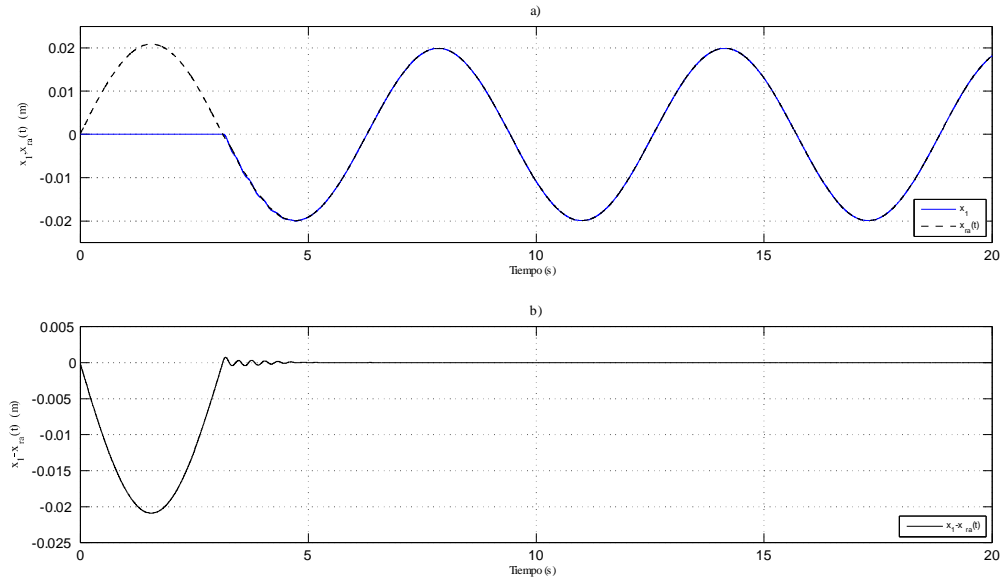


Figura 4.4: Convergencia de la variable x_1 a x_{ra} y el comportamiento del error entre ellas.

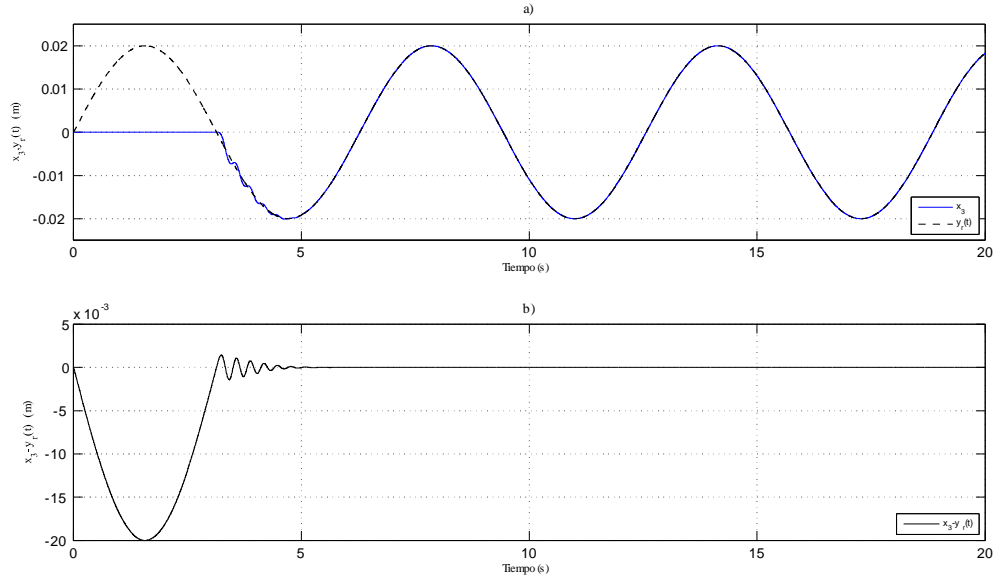


Figura 4.5: Señal de referencia y posición del segundo carro y error de seguimiento.

Finalmente, la amplitud de la señal de control alcanza valores que están dentro de un rango seguro para realizar experimentos con el mecanismo, ver figura 4.6. Además, la señal de control no presenta componentes de alta frecuencia, con lo que indica que en el experimento no se tendrá problemas por vibración en las variables de estado.

Simulación con una suma de senoidales como referencia Para el caso de la suma de dos señales senoidales como referencia los resultados fueron similares. Aquí sólo se presenta el comportamiento de las posiciones del sistema y de la señal de control. En la figura 4.7 se muestra la convergencia de la posición del primer carro a la señal $x_{ra}(t)$ y el error entre ellas, el cual es muy pequeño. En la figura 4.8 se puede observar que el objetivo de control se satisface. Al igual que en el caso anterior, la señal de control mantiene una amplitud adecuada para el desarrollo de experimentos, ver figura 4.9.

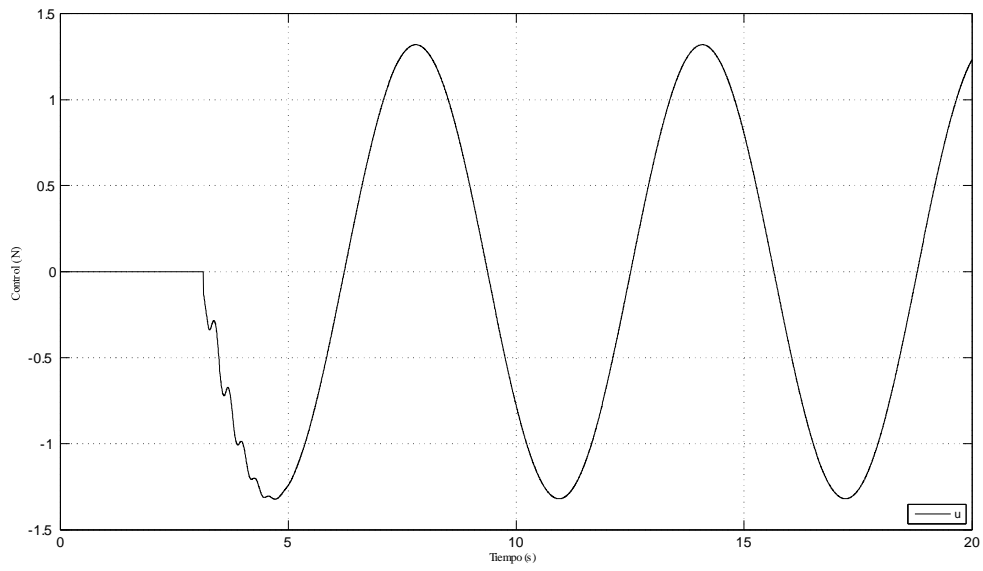


Figura 4.6: Señal de control.

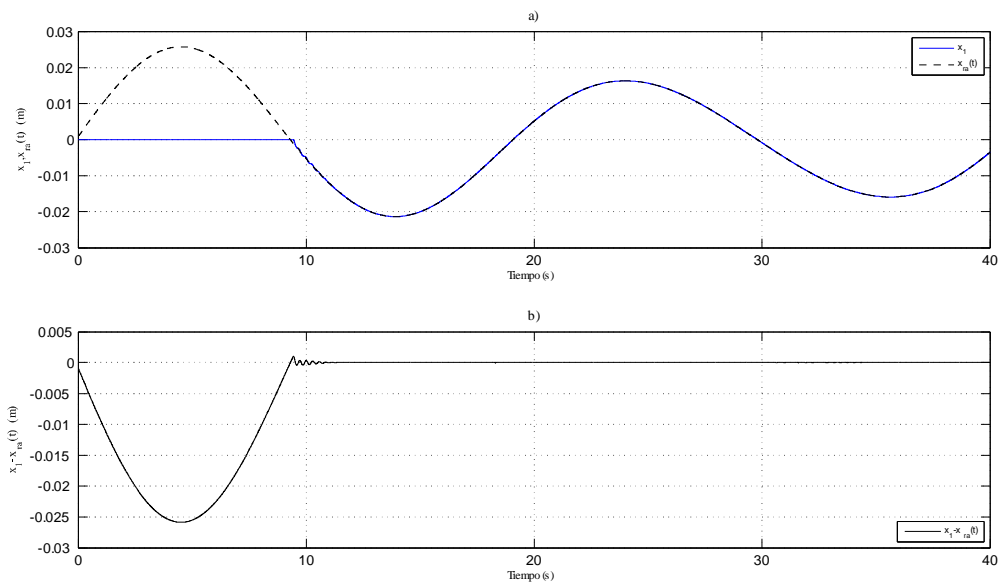


Figura 4.7: Comportamiento de x_1 y $x_{ra}(t)$.

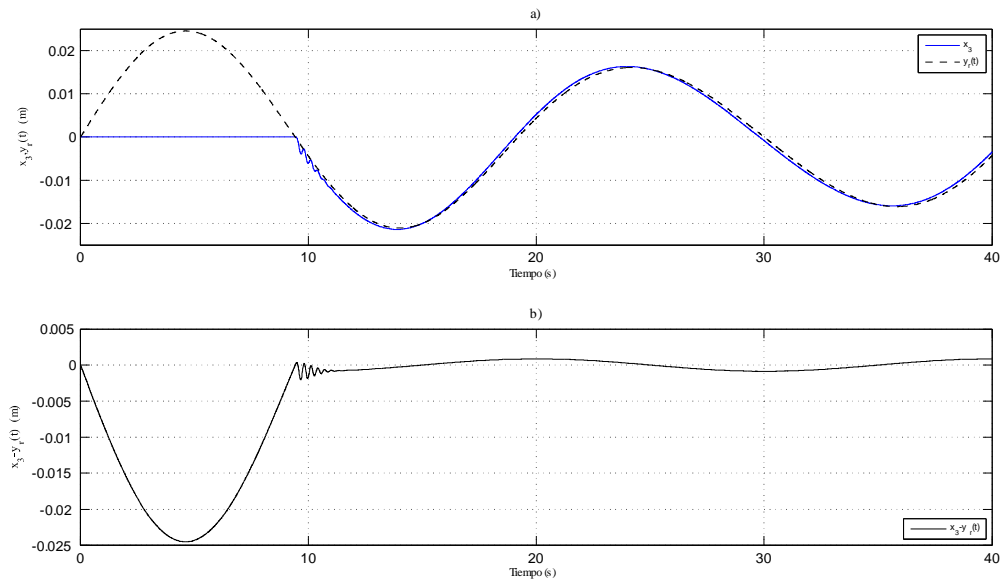


Figura 4.8: Objetivo de control

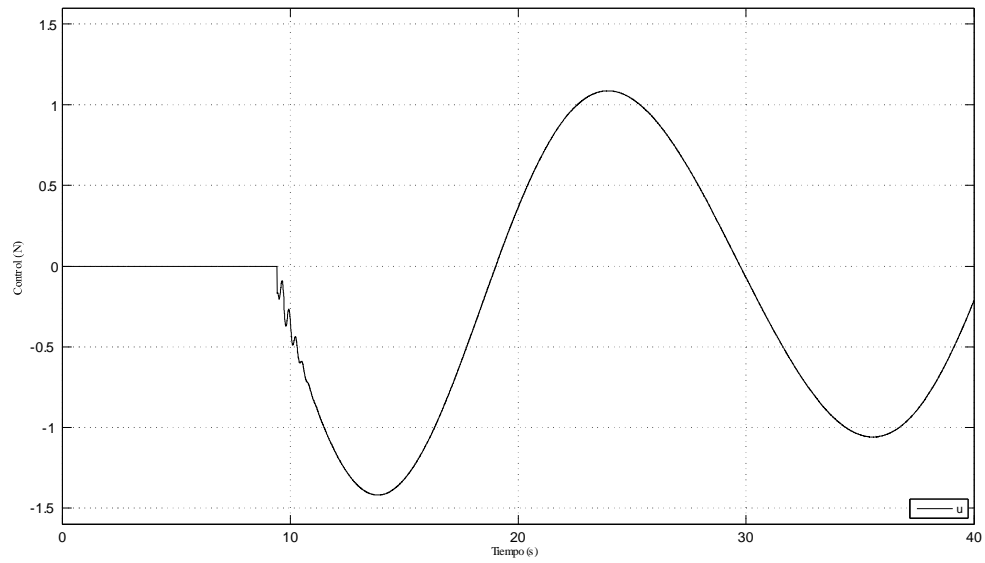


Figura 4.9: Señal de control para el caso de una suma de senoidales como referencia.

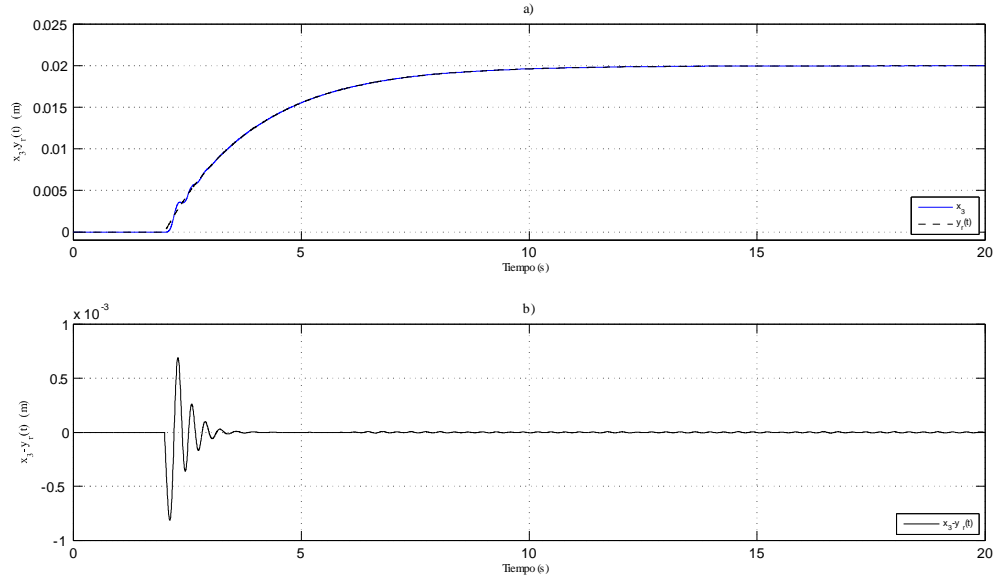


Figura 4.10: Comportamiento del sistema en lazo cerrado considerando una señal de referencia que converge exponencialmente a una constante.

Simulaciones con una referencia exponencial Finalmente se utiliza una señal que converge exponencialmente a un valor constante para ilustrar el desempeño del sistema con un objetivo similar a regulación. En la figura 4.10 se observa que la posición de la parte subactuada del sistema alcanza la señal de referencia con un error muy pequeño. En la figura 4.11 se observa la señal de control, la cual se mantiene en un rango adecuado para el sistema real.

Con estos resultados se puede concluir que la estrategia de control tiene un buen desempeño bajo las condiciones establecidas; un sistema sin incertidumbres paramétricas ni perturbaciones externas. En la siguiente sección se muestran los resultados de aplicar este controlador al mecanismo real.

Es de esperarse que el desempeño se deteriore ya que no se cuenta con un modelo

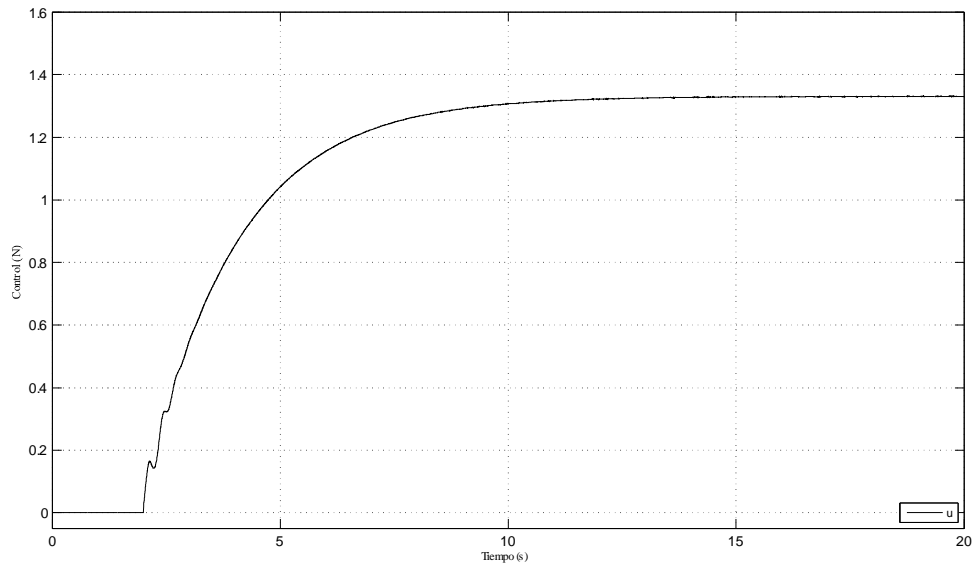


Figura 4.11: Señal de control.

exacto de la planta, pero se espera que la salida de la parte subactuada del sistema se mantenga en una vecindad del objetivo de control.

Resultados experimentales

Los experimentos se realizaron con una plataforma de desarrollo dSPACE 1103. Al igual que en las simulaciones numéricas, se aplicaron tres referencias: una señal senoidal, una suma de senoidales y una señal tipo exponencial.

Resultados experimentales con una referencia senoidal En las figuras 4.12 y 4.13 se muestra el desempeño de los derivadores que estiman las velocidades de la planta. Como no se tienen mediciones de las velocidades no se puede tener una comparación entre la velocidad real y la estimada. Sin embargo, se puede analizar el desempeño con

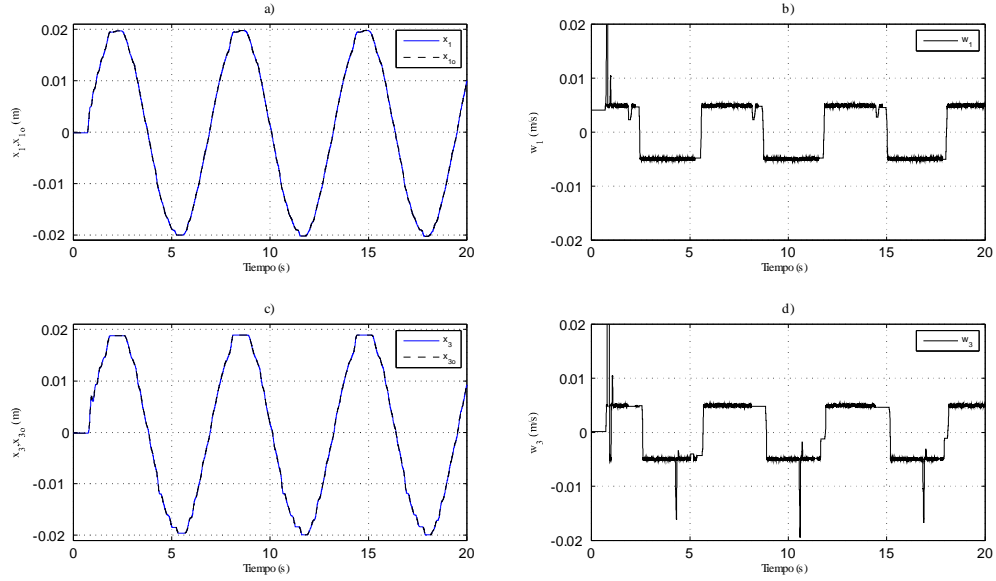


Figura 4.12: Desempeño de los derivadores para estimar las velocidades.

la comparación de las posiciones estimadas, como se puede ver en la figura 4.13, los errores en estado estable están en el orden de 1×10^{-6} , el cual es el mismo orden de las simulaciones numéricas, por lo que se concluye que los derivadores están cumpliendo con su objetivo.

El paso siguiente es analizar el desempeño del observador para estimar las señales ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$, este análisis se hace en forma indirecta a través de la convergencia a cero de los errores internos mostrados en la figura 4.14. Aquí se puede observar que estos errores llegan a una pequeña vecindad de cero. Lo importante aquí es observar que la estimación de los errores, figuras a) y b), es adecuada. Como era de esperarse, el desempeño del sistema en lazo cerrado se ve afectado por las diferencias en parámetros y por dinámicas no modeladas. En la figura 4.15 se puede observar que existe un pequeño error de seguimiento entre la señal de referencia $x_{ra}(t)$ y la posición x_1 . Esto a su vez

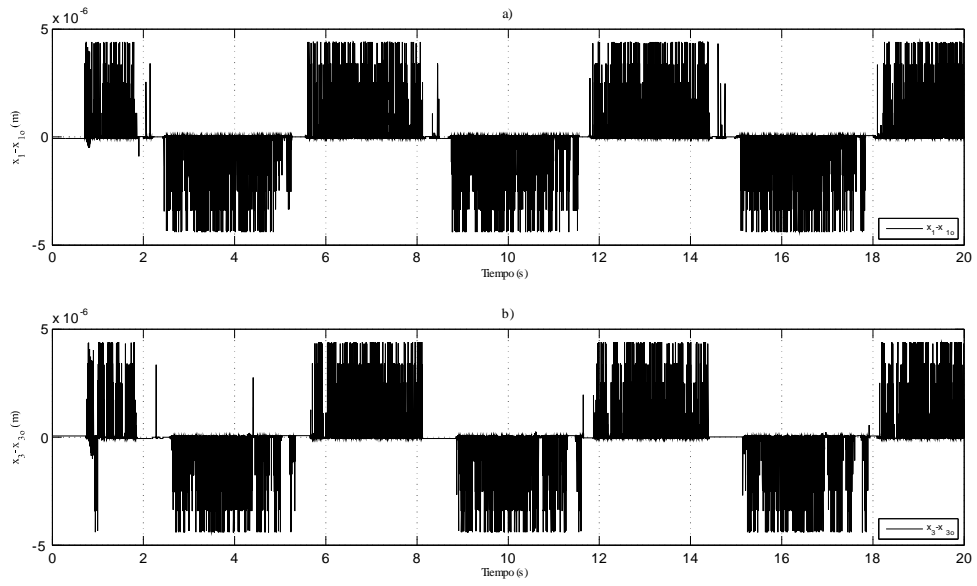


Figura 4.13: Errores derivadores entre las posiciones reales y las posiciones estimadas.

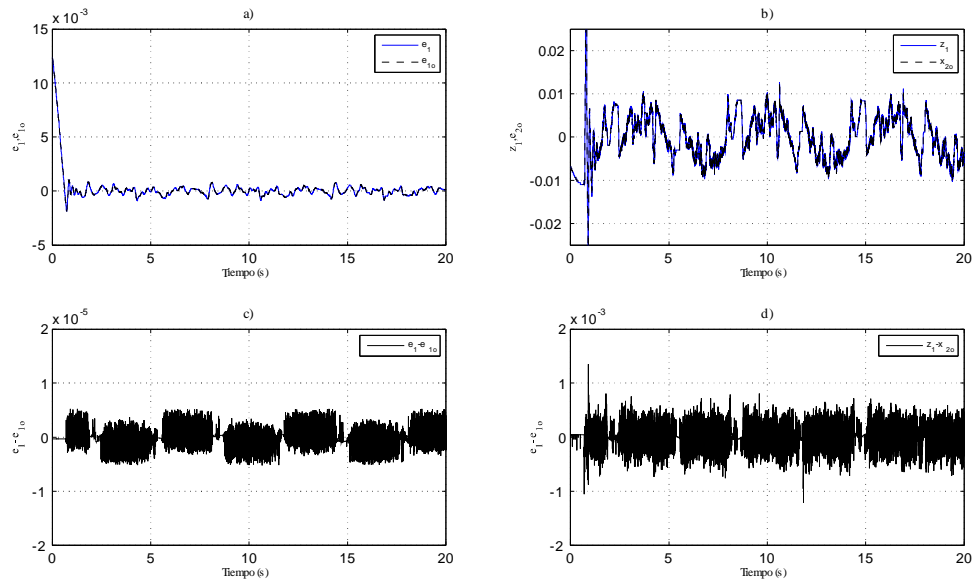


Figura 4.14: Desempeño observador y sus errores.

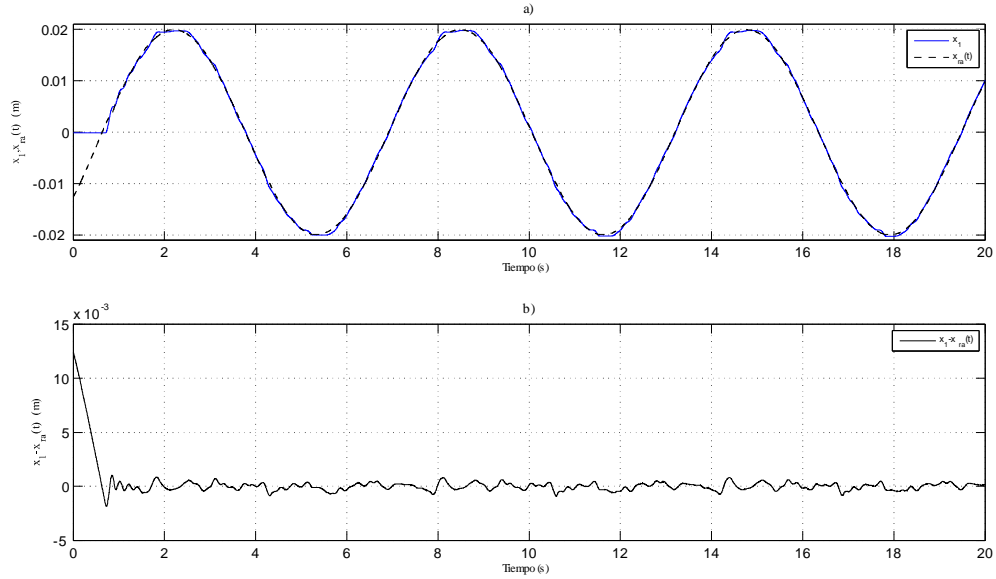


Figura 4.15: Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$.

causa un error de seguimiento entre la señal de referencia $y_r(t)$ y la posición de la parte subactuada de la planta, ver figura 4.16.

Finalmente, la señal de control se mantiene en los mismo niveles que tuvo en las simulaciones numéricas y con las mismas características como se puede observar en la figura 4.17.

Resultados experimentales con una suma de senoidales como referencia En este caso los resultados son similares al caso anterior; el error de seguimiento de x_1 y la señal auxiliar $x_{ra}(t)$ se mantiene en el nivel de $1 \times 10^{-3}m$, como se puede observar en la figura 4.18. Mientras que el error de seguimiento entre $y_r(t)$ y x_3 alcanza la magnitud de $2,5 \times 10^{-3}m$ en estado estable. Este error es significativo si se considera que la amplitud de la referencia es de $20 \times 10^{-3}m$.

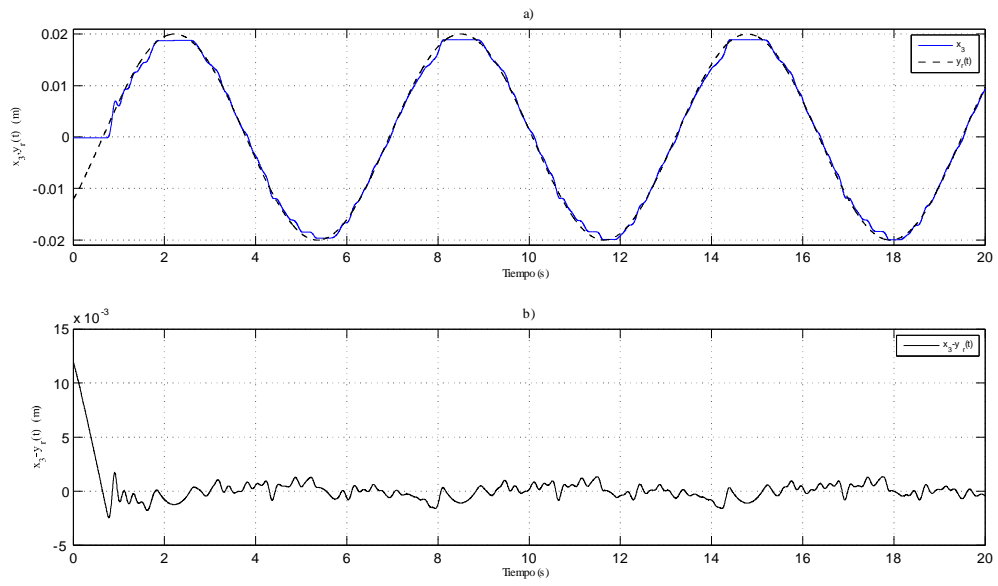


Figura 4.16: Objetivo de control

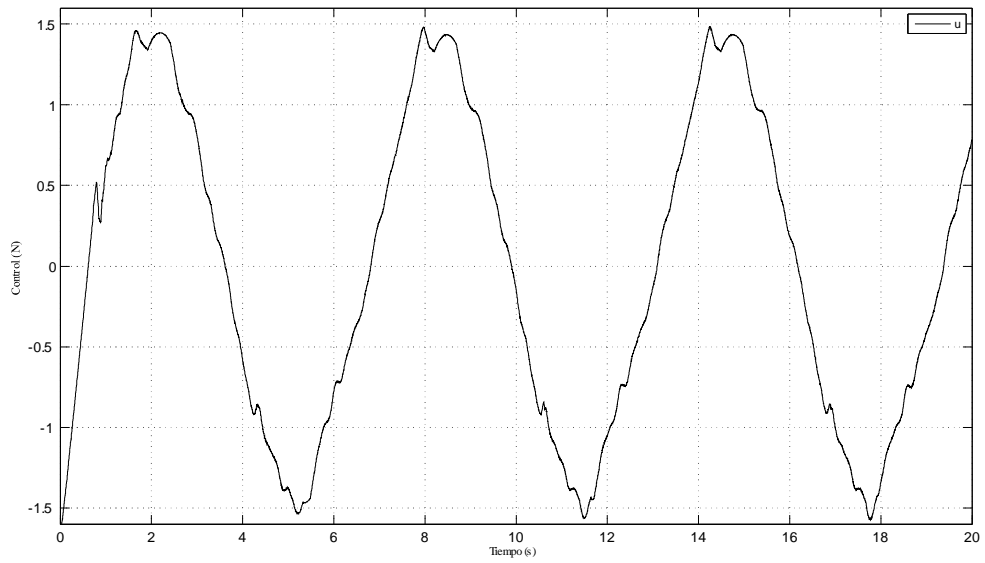


Figura 4.17: Señal de control.

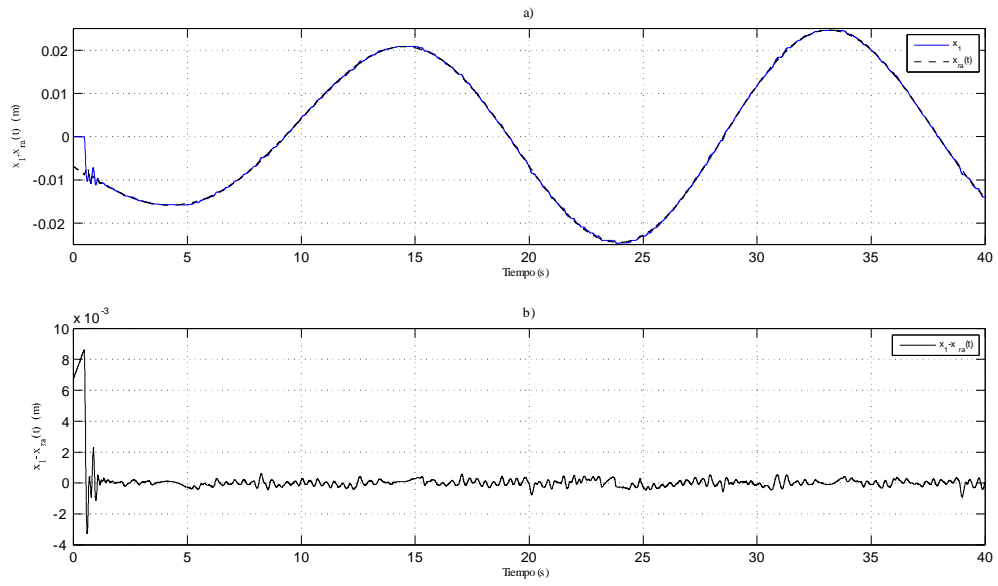


Figura 4.18: Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$.

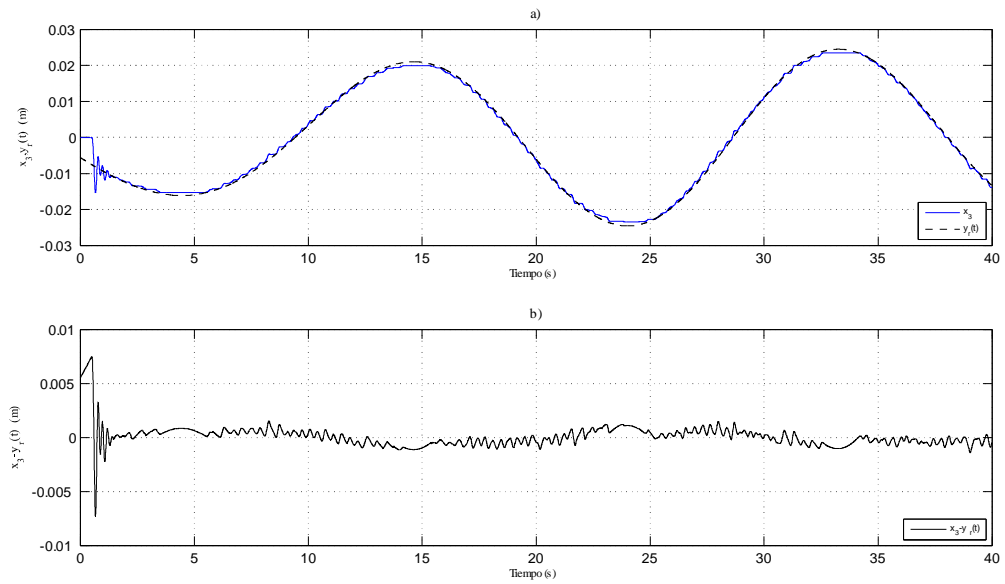


Figura 4.19: Objetivo de control.

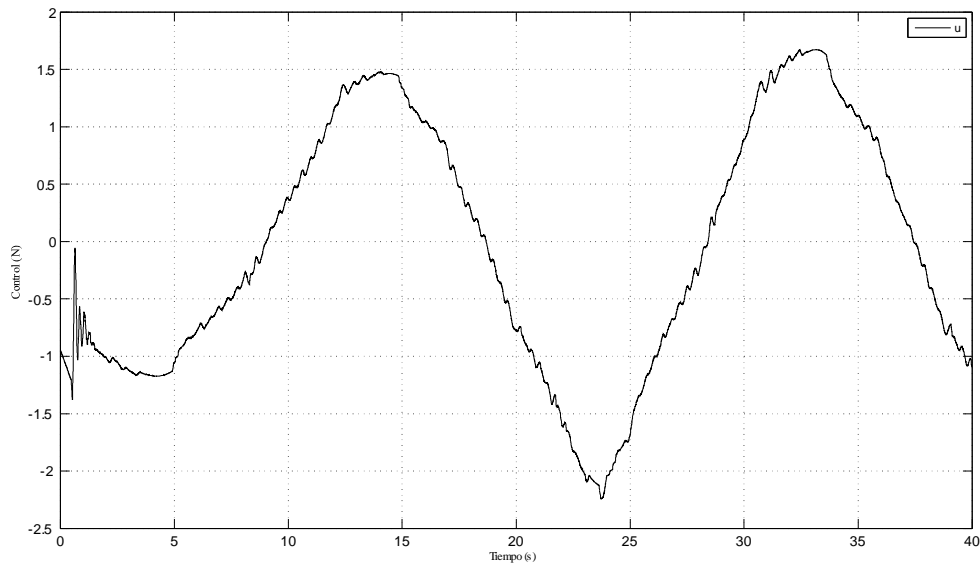


Figura 4.20: Señal de control.

Como se puede observar en la figura 4.19 inciso *b*) el error aumentó respecto a la simulación numérica con la misma referencia, esto puede ser debido a que como no se están considerando variaciones paramétricas, fricciones viscosas y de Coulomb en las masas y ciertas condiciones no modeladas para el experimento.

Experimento con una referencia tipo exponencial Finalmente se realizó un experimento aplicando una señal que exponencialmente se aproxima a una constante, aquí los resultados fueron interesantes ya que la convergencia de la posición x_1 a la señal auxiliar x_{ra} es adecuada, figura 4.21, pero la convergencia de la posición x_3 no llega a la señal de referencia, como se puede observar en la figura 4.22, hay un error en estado estacionario de alrededor de $0,7 \times 10^{-3}m$.

En la figura 4.21 se observa la posición x_1 converge a la referencia auxiliar $x_{ra}(t)$;

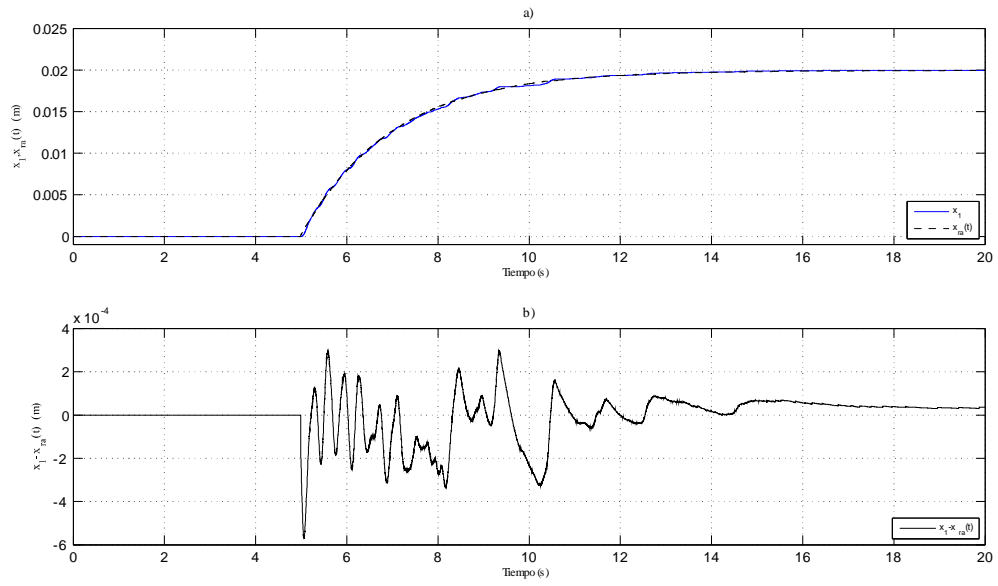


Figura 4.21: Comportamiento de las señales x_1 y $x_{ra}(t)$.

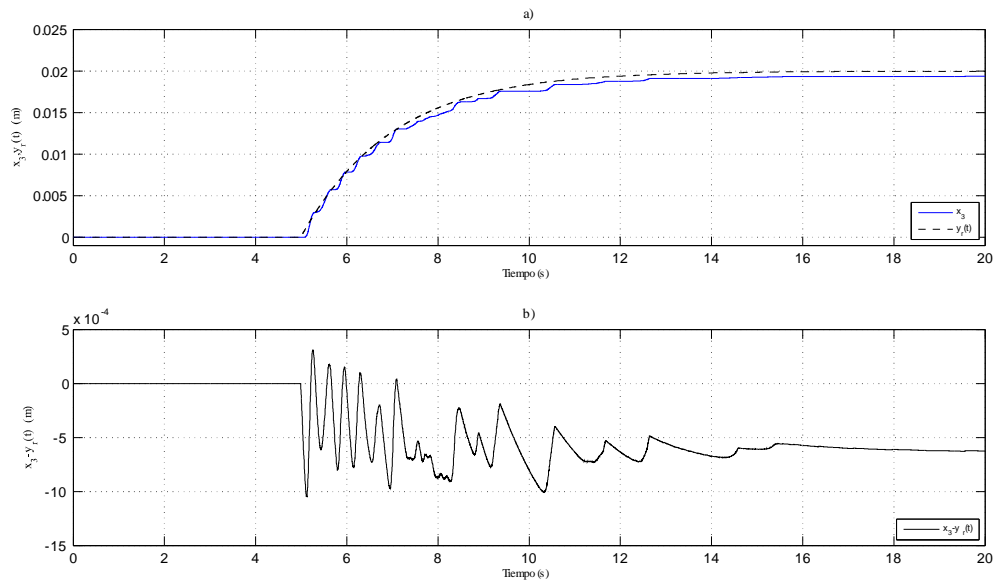


Figura 4.22: Comportamiento de la salida del sistema y del error de seguimiento.

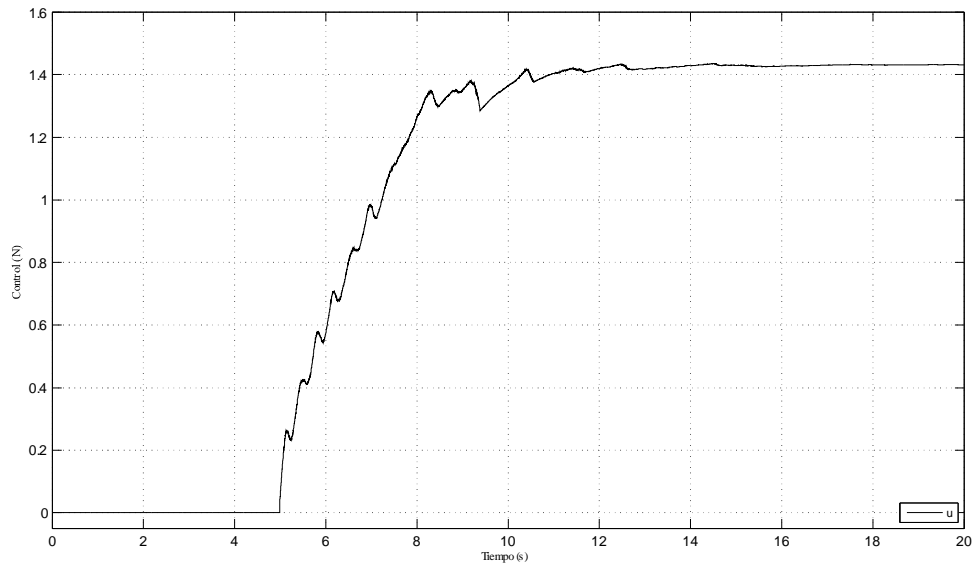


Figura 4.23: Señal de control.

lo que indica que la parte del control para lograr este objetivo de control es adecuada. Sin embargo, la figura 4.22 se muestra que la salida del sistema no alcanza a seguir completamente a la señal de referencia, existe un error de aproximadamente $0,6 \times 10^{-3} m$. Finalmente, en la figura 4.23 se muestra la señal de control, en donde se puede observar que su amplitud se encuentra en el rango dinámico del sistema de control dSPACE 1103.

Con base a estos resultados se puede concluir que la estrategia de control que se ha propuesto funciona adecuadamente cuando se conoce exactamente el modelo de la planta, pero cuando hay incertidumbres el desempeño del sistema en lazo cerrado se degrada. Sin embargo, el sistema en lazo cerrado tiene cierto grado de robustez ya que la salida se mantuvo cerca de la referencia en los tres experimentos. Por lo tanto, en el siguiente capítulo se aborda el problema considerando perturbaciones externas e incertidumbres paramétricas.

Capítulo 5

Solución del problema de control considerando un modelo con perturbaciones

En este capítulo se presenta el análisis del problema de control considerando una planta con incertidumbres paramétricas y perturbaciones externas y se propone un controlador para resolver el problema de seguimiento de trayectorias.

El controlador que se propone es similar al empleado en el caso nominal, sólo se agregan términos para compensar las perturbaciones, los cuales son estimados por observadores. En este análisis se descubre que la estructura de control empleada para resolver el caso nominal está haciendo la identificación de una parte de las perturbaciones en el sistema y las está compensando. Es por eso que los resultados experimentales mostrados en el capítulo anterior tienen un comportamiento aceptable.

5.1. Definición del modelo con incertidumbres

Considere un sistema mecánico subactuado de 2 grados de libertad (2GDL) con modelo dinámico dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) + g_1(q_1, q_2)\tau + \gamma_1(\cdot), \\ \ddot{q}_2 &= f_2(q_2, \dot{q}_2) + g_2q_1 + g_3q_1 + \gamma_2(\cdot), \\ y_1 &= q_1, \\ y_2 &= q_2,\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde q_1 , q_2 , \dot{q}_1 y \dot{q}_2 son las posiciones y velocidades generalizadas respectivamente, $f_1(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)$ y $g_1(q_1, q_2)$ son funciones suaves, $g_1(\cdot) \neq 0$ para todo q_1 y q_2 , g_2 y g_3 son constantes, τ es la entrada de control y, debido a la propiedad de linealidad en parámetros que tienen los modelos de sistemas mecánicos basados en las ecuaciones de Lagrange, $\gamma_1(\cdot)$, $\gamma_2(\cdot)$ son términos producidos por variaciones paramétricas y perturbaciones externas, estos términos son funciones suficientemente suaves que, en general, dependen de las posiciones, velocidades, aceleraciones y del tiempo. Es importante considerar que si el comportamiento del sistema es acotado estos términos son acotados [11].

El objetivo de control es que la salida subactuada q_2 siga a una referencia variante en el tiempo $y_r(t)$, mientras que la posición y velocidad q_1 y \dot{q}_1 permanezcan acotadas.

5.2. Solución del caso con incertidumbres

Una representación en variables de estado del sistema (5.1) es la siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3)\tau + \gamma_1(\cdot), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= f_2(x_3, x_4) + g_2x_1 + g_3x_2 + \gamma_2(\cdot), \\ y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_3,\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$, $x_4 = \dot{q}_2$. El objetivo de control se puede definir por la variable de error $e_1 = x_3 - y_r(t)$, cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= f_2(x_3, x_4) + g_2x_1 + g_3x_2 - \ddot{y}_r(t) + \gamma_2(\cdot), \\ y_e &= e_1, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3)\tau + \gamma_1(\cdot), \\ y_1 &= x_1,\end{aligned}\tag{5.3}$$

El sistema (5.3) está formado por dos subsistemas; el sistema de error

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= f_2(x_3, x_4) + g_2x_1 + g_3x_2 - \ddot{y}_r(t) + \gamma_2(\cdot), \\ y_e &= e_1,\end{aligned}\tag{5.4}$$

y el subsistema actuado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3)\tau + \gamma_1(\cdot), \\ y_1 &= x_1.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Para el sistema (5.4) se considera que la entrada de control es x_1 , de esta forma un control ideal que estabiliza en forma asintótica el origen del sistema de error, y con esto resolver el problema de seguimiento, es

$$x_1 = \frac{1}{g_2}(-f_2(x_3, x_4) - g_3x_2 + \ddot{y}_r(t) - \gamma_2(\cdot) - k_1e_1 - k_2e_2).\tag{5.6}$$

La expresión para x_1 en (5.6) se toma como una nueva señal de referencia denominada $x_{ra}(t)$,

$$x_{ra}(t) = \frac{1}{g_2}(-f_2(x_3, x_4) - g_3x_2 + \ddot{y}_r(t) - \gamma_2(\cdot) - k_1e_1 - k_2e_2),$$

la cual será la referencia para la salida y_1 del subsistema (5.5). Ahora se definen los nuevos errores de seguimiento

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= x_1 - x_{ra}(t), \\ \varepsilon_2 &= x_2 - \dot{x}_{ra}(t),\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3)\tau + \gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t),\end{aligned}\tag{5.7}$$

ya que $g_1(\cdot)$ es no singular para cualquier valor de su argumento, un control que estabiliza el origen del sistema (5.7) es

$$\tau = \frac{1}{g_1(x_1, x_3)} (-f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) - \gamma_1(\cdot) + \ddot{x}_{ra}(t) - \alpha_1 \varepsilon_1 - \alpha_2 \varepsilon_2). \quad (5.8)$$

5.2.1. Análisis de estabilidad

Sustituyendo (5.8) en (5.7) se tiene

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \quad (5.9)$$

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\alpha_1 \varepsilon_1 - \alpha_2 \varepsilon_2,$$

el cual tiene al origen como un punto de equilibrio exponencialmente estable si las constantes α_1 y α_2 son positivas, es importante notar que la dinámica del sistema (5.9) no depende de la dinámica del sistema (5.4).

Ahora se toma el sistema (5.4)

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad (5.10)$$

$$\dot{e}_2 = f_2(x_3, x_4) + g_2 x_1 + g_3 x_2 - \ddot{y}_r(t) + \gamma_2(\cdot),$$

$$y_e = e_1,$$

ya que $x_1 = \varepsilon_1 + x_{ra}(t)$, se tiene que

$$x_1 = \varepsilon_1 + \frac{1}{g_2} (-f_2(x_3, x_4) - g_3 x_2 + \ddot{y}_r(t) - \gamma_2(\cdot) - k_1 e_1 - k_2 e_2), \quad (5.11)$$

sustituyendo (5.11) en (5.10) y simplificando se obtiene

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad (5.12)$$

$$\dot{e}_2 = g_2 \varepsilon_1 - k_1 e_1 - k_2 e_2,$$

este sistema (5.12) es un sistema lineal con una perturbación que se desvanece en forma exponencial; si k_1 y k_2 son constantes positivas, el sistema nominal definido con $g_2\varepsilon_1 = 0$ tiene al origen como un punto de equilibrio exponencialmente estable, de esta forma, el sistema perturbado tiene al origen como un punto de equilibrio asintóticamente estable si se eligen adecuadamente las constantes k_1 y k_2 , de acuerdo a [1].

5.3. Implementación del control

El controlador (5.8) no puede ser implementado en forma directa ya que no se tiene acceso a las velocidades x_2 y x_4 , tampoco se conoce la segunda derivada de la referencia $\ddot{x}_{ra}(t)$ ni las perturbaciones $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$, es por eso que en esta sección se presenta una estrategia para implementar dicha señal de control.

5.3.1. Estimación de las velocidades

Al igual que en el capítulo anterior, se asume que el sistema se opera en lazo abierto en un primer intervalo de tiempo y que el estado, sus derivadas y perturbaciones permanecen acotadas, entonces se pueden utilizar los derivadores con convergencia en tiempo finito empleados en el capítulo anterior, para estimar las velocidades.

Los derivadores son

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= w_1 + c_{1,1} |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{w}_1 &= c_{1,2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1),\end{aligned}$$

donde $w_1 = x_2$, y

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_3 &= w_3 + c_{3,1} |x_3 - \hat{x}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3), \\ \dot{w}_3 &= c_{3,2} \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3),\end{aligned}$$

donde $w_3 = x_4$ y las constantes $c_{i,1}$ y $c_{i,2}$ deben satisfacer las desigualdades

$$\begin{aligned}c_{i,1}^2 &\geq 4C_i \frac{c_{i,2} + C_i}{c_{i,2} - C_i}, \\ c_{i,2} &> C_i,\end{aligned}$$

donde $|\dot{x}_i| < C_i$ para $i = 1, 3$.

5.3.2. Observador para la estimación de ε_2 , $\gamma_1(\cdot)$ y $\ddot{x}_{ra}(t)$

En esta sección se utiliza un observador exacto en tiempo finito para estimar las variables ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$ a partir del sistema (5.7). Considerando que los derivadores ya alcanzaron la convergencia a las velocidades y que el sistema (5.4) tiene un comportamiento acotado se utiliza el siguiente observador propuesto en [30].

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_1 = z_1 + \alpha_{1,1} |\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1), \quad (5.13)$$

$$\dot{z}_1 = \alpha_{2,1} \text{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1),$$

$$\hat{y}_1 = \hat{\varepsilon}_1.$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_2 = f_1(x_1, w_1, x_3, w_3) + g_1(x_1, x_3)\tau + z_2 \quad (5.14)$$

$$+ \alpha_{1,2} |z_1 - \hat{\varepsilon}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2),$$

$$\dot{z}_2 = \alpha_{2,2} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2),$$

$$\hat{y}_2 = \hat{\varepsilon}_2.$$

En el observador (5.13-5.14) $\hat{\epsilon}_1$ converge a ϵ_1 , $\hat{\epsilon}_2$ y z_1 convergen a ϵ_2 y z_2 converge a $\gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t)$. Esto se puede probar de la siguiente manera. Definiendo las variables de error como

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \epsilon_1 - \hat{\epsilon}_1, \\ \epsilon_2 &= \epsilon_2 - \hat{\epsilon}_2,\end{aligned}$$

cuya dinámica está dada por el sistema

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_1 &= \epsilon_2 - z_1 - \alpha_{1,1} |\epsilon_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\epsilon_1), \\ \dot{z}_1 &= \alpha_{2,1} \text{sign}(\epsilon_1),\end{aligned}\tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_2 &= \gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t) - z_2 - \alpha_{1,2} |z_1 - \hat{\epsilon}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{\epsilon}_2), \\ \dot{z}_2 &= \alpha_{2,2} \text{sign}(z_1 - \hat{\epsilon}_2),\end{aligned}\tag{5.16}$$

al igual que en el capítulo anterior, se pueden encontrar constantes $\alpha_{1,1}$ y $\alpha_{2,1}$ tal que z_1 converja en tiempo finito a ϵ_2 , después de este tiempo, la segunda parte del observador, ecuaciones (5.16), se pueden reescribir como

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_2 &= \gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t) - z_2 - \alpha_{1,2} |\epsilon_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\epsilon_2), \\ \dot{z}_2 &= \alpha_{2,2} \text{sign}(\epsilon_2),\end{aligned}$$

este sistema tiene la misma forma que el sistema (5.15), por lo tanto, eligiendo valores adecuados de las constantes $\alpha_{1,2}$ y $\alpha_{2,2}$ se puede garantizar que la variable z_2 converge en tiempo finito a $\gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t)$.

Es importante notar que este fue el mismo observador que se utilizó en el caso del sistema nominal; por lo tanto, en los experimentos que se presentaron en ese capítulo se hizo una compensación de la perturbación $\gamma_1(\cdot)$ en forma intrínseca.

Por lo tanto, la ley de control se puede implementar de la siguiente manera

$$\tau = \frac{1}{g_1(x_1, x_3)} (-f_1(x_1, w_1, x_3, w_3) - z_2 - \alpha_1 \varepsilon_1 - \alpha_2 \varepsilon_2). \quad (5.17)$$

5.3.3. Observador para estimar $\gamma_2(\cdot)$

Finalmente, se necesita estimar la perturbación $\gamma_2(\cdot)$, esto se hace utilizando el observador propuesto en [32]. Se utiliza este observador porque, en la práctica, produce menos vibración en las variables estimadas que el observador con convergencia en tiempo finito, lo que evita problemas de estabilidad al cerrar el lazo.

El observador tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_4 &= f_2(x_3, w_3) + g_2 x_1 + g_3 w_1 + w_2 + c_1 (w_3 - \hat{x}_4), \\ \dot{w}_2 &= c_2 (w_3 - \hat{x}_4) + c_3 \text{sign}(w_3 - \hat{x}_4), \end{aligned}$$

definiendo la variable de error

$$\epsilon_3 = x_4 - \hat{x}_4,$$

cuya dinámica está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_3 &= f_2(x_3, x_4) + g_2 x_1 + g_3 x_2 + \gamma_2(\cdot) - f_2(x_3, w_3) - g_2 x_1 - g_3 w_1 - w_2 - c_1 (w_3 - \hat{x}_4), \\ \dot{w}_2 &= c_2 (w_3 - \hat{x}_4) + c_3 \text{sign}(w_3 - \hat{x}_4), \end{aligned}$$

asumiendo que los derivadores han alcanzado la convergencia a las velocidades reales

se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_3 &= \gamma_2(\cdot) - w_2 - c_1\epsilon_3, \\ \dot{w}_2 &= c_2(\epsilon_3) + c_3\text{sign}(\epsilon_3),\end{aligned}$$

haciendo un nuevo cambio de variables $v_1 = \epsilon_3$ y $v_2 = \gamma_2(\cdot) - w_2 - c_1\epsilon_3$ se define el nuevo sistema

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= v_2, \\ \dot{v}_2 &= \dot{\gamma}_2(\cdot) - c_1v_2 - c_2v_1 - c_3\text{sign}(v_1),\end{aligned}$$

eligiendo adecuadamente los valores de las constantes c_1 , c_2 y c_3 de acuerdo a [32], se puede garantizar la convergencia de v_2 a cero, lo que implica que $0 = \gamma_2(\cdot) - w_2$, por lo tanto $w_2 = \gamma_2(\cdot)$.

Ahora ya se cuenta con el vector de estado completo y las perturbaciones por lo que la señal de referencia auxiliar $x_{ra}(t)$ se implementa como

$$x_{ra}(t) = \frac{1}{g_2}(-f_2(x_3, w_3) - g_3w_1 + y_r(t) - w_2 - k_1e_1 - k_2e_2).$$

De esta forma se puede implementar la estructura de control para lograr el objetivo de control de seguimiento de trayectorias considerando una planta con perturbaciones.

5.4. Aplicación a un sistema masa resorte amortiguador de 2GDL

Considere el sistema masa resorte amortiguador que se muestra en la figura 3.3, cuyo modelo con perturbaciones está dado por las ecuaciones (3.8) siguientes

$$\begin{aligned}m_1\ddot{q}_1 + k_1q_1 - k_2(q_2 - q_1) + \delta_1\dot{q}_1 + \delta_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) &= k_m\tau + \gamma_1(\cdot), \\m_2\ddot{q}_2 + k_2(q_2 - q_1) + \delta_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) &= \gamma_2(\cdot),\end{aligned}\tag{5.18}$$

donde q_1 es la posición del primer cuerpo, \dot{q}_1 su velocidad y \ddot{q}_1 la aceleración, q_2 es la posición del segundo cuerpo, \dot{q}_2 es la velocidad del segundo cuerpo y \ddot{q}_2 es su aceleración, m_i , k_i y δ_i , para $i = 1, 2$ son los valores de las constantes de las masas, constantes de los resortes y coeficientes de fricción de los amortiguadores respectivamente, k_m es una ganancia del controlador, τ es la entrada de control, y $\gamma_1(\cdot)$, $\gamma_2(\cdot)$ son términos producidos por variaciones paramétricas y perturbaciones externas y son funciones de las posiciones, velocidades, aceleraciones y del tiempo. Es importante considerar que si el comportamiento del sistema es acotado estos términos son acotados [11].

Definiendo las variables de estado como $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$, $x_4 = \dot{q}_2$ y $u = \tau$

se obtiene una representación en variables de estado del sistema (5.18).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= -\left(\frac{k_1 + k_2}{m_1}\right)x_1 - \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{m_1}\right)x_2 + \frac{k_2}{m_1}x_3 + \frac{\delta_2}{m_1}x_4 + \frac{k_m}{m_1}u + \gamma_1(\cdot), \\
 \dot{x}_3 &= x_4, \\
 \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{\delta_2}{m_2}x_2 - \frac{k_2}{m_2}x_3 - \frac{\delta_2}{m_2}x_4 + \gamma_2(\cdot), \\
 y_1 &= x_1, \\
 y_2 &= x_3.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Considerando los mismos parámetros que en el caso nominal se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= -491,74x_1 - 15,23x_2 + 10245,87x_3 + 1,5542x_4 + 3,6948u + \gamma_1(\cdot), \\
 \dot{x}_3 &= x_4, \\
 \dot{x}_4 &= 312,72x_1 + 1,9768x_2 - 312,72x_3 - 1,9768x_4 + \gamma_2(\cdot), \\
 y_1 &= x_1, \\
 y_2 &= x_3.
 \end{aligned}$$

El objetivo de control es lograr que la salida subactuada x_3 siga a una referencia variante con el tiempo $y_r(t)$ mientras que la articulación actuada mantenga un comportamiento acotado.

Se define el error entre la salida y la referencia $e_1 = x_3 - y_r(t)$ cuya dinámica está

dada por el sistema

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad (5.20)$$

$$\dot{e}_2 = 312,72x_1 + 1,9768x_2 - 312,72x_3 - 1,9768x_4 + \gamma_2(\cdot) - \ddot{y}_r(t),$$

$$y_e = e_1,$$

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -491,74x_1 - 15,23x_2 + 10245,87x_3 + 1,5542x_4 + 3,6948u + \gamma_1(\cdot),$$

$$y_1 = x_1.$$

La señal de referencia $x_{ra}(t)$ para la parte actuada del sistema es

$$\begin{aligned} x_{ra}(t) = & 3,1977 \times 10^{-3}(-c_1 e_1 - c_2 e_2 - 1,9768x_2 + \\ & 312,72x_3 + 1,9768x_4 - \gamma_2(\cdot) + \ddot{y}_r(t)), \end{aligned}$$

donde $c_1 = c_2 = 10$.

Para diseñar la señal de control u se definen las variables auxiliares

$$\varepsilon_1 = x_1 - x_{ra}(t),$$

$$\varepsilon_2 = x_2 - \dot{x}_{ra}(t),$$

cuya dinámica está dada por

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_2 = & -491,74x_1 - 15,23x_2 + 10245,87x_3 + 1,5542x_4 + 3,6948u + \\ & \gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t), \end{aligned} \quad (5.22)$$

por lo tanto, un control ideal que estabiliza al origen del sistema (5.21) es

$$u = 0,27065(-\alpha_1\varepsilon_1 - \alpha_2\varepsilon_2 + 491,74x_1 + 15,23x_2 - 10245,87x_3 - 1,5542x_4 - 3,6948u - \gamma_1(\cdot) + \ddot{x}_{ra}(t)), \quad (5.23)$$

donde los valores propuestos de las constantes son $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$.

Para implementar la señal de control (5.23) es necesario estimar las velocidades de cada carro, las variables ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$ y por último se necesita estimar $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$.

Con el objetivo de estimar las velocidades de cada carro se utiliza el derivador exacto en tiempo finito de Levant dado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= w_1 + c_{1,1} |x_1 - \hat{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{w}_1 &= c_{1,2} \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1), \end{aligned}$$

para obtener $w_1 = x_2$ y

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_3 &= w_3 + c_{3,1} |x_3 - \hat{x}_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3), \\ \dot{w}_3 &= c_{3,2} \text{sign}(x_3 - \hat{x}_3), \end{aligned}$$

para obtener $w_3 = x_4$, donde los valores obtenidos para las constantes son $c_{1,1} = c_{3,1} = 45$ y $c_{1,2} = c_{3,2} = 5$

Se propone el siguiente observador para estimar $\gamma_2(\cdot)$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_4 &= (312,72)(x_1 - x_3) + (1,9768)(w_1 - w_3) + w_2 + c_1(w_3 - \hat{x}_4), \\ \dot{w}_2 &= c_2(w_3 - \hat{x}_4) + c_3 \text{sign}(w_3 - \hat{x}_4). \end{aligned}$$

Con los valores de las constantes $c_1 = 50$, $c_2 = 1/2$ y $c_3 = 1/10$, se garantiza que se identifica $\gamma_2(\cdot)$. Por lo tanto, la señal de referencia $x_{ra}(t)$ se puede implementar de la

siguiente forma

$$x_{ra}(t) = 3,1977 \times 10^{-3}(-10e_1 - 10e_2 - 1,9768w_1 + 312,72x_3 + 1,9768w_3 - w_2 + \ddot{x}_{ref}(t)).$$

Como se considera que $x_{ra}(t)$ es acotada y que sus dos primeras derivadas $\dot{x}_{ra}(t)$ y $\ddot{x}_{ra}(t)$ son acotadas se propone un observador para el sistema (5.21) de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\varepsilon}}_1 &= z_1 + \alpha_{1,1} |\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1), \\ \dot{z}_1 &= \alpha_{2,1} \text{sign}(\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1), \\ \hat{y}_1 &= \hat{\varepsilon}_1. \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\varepsilon}}_2 &= -491,74x_1 - 15,23x_2 + 10245,87x_3 + 1,5542x_4 + 3,6948u + z_2 + \\ &\quad \alpha_{1,2} |z_1 - \hat{\varepsilon}_2|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2), \\ \dot{z}_2 &= \alpha_{2,2} \text{sign}(z_1 - \hat{\varepsilon}_2), \\ \hat{y}_2 &= \hat{\varepsilon}_2, \end{aligned} \tag{5.25}$$

donde $\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = 45$ y $\alpha_{2,1} = \alpha_{2,2} = 5$.

5.4.1. Ilustración del desempeño del controlador del caso perturbado

Los resultados obtenidos se dividen en dos partes, la primera está compuesta por resultados numéricos de simulaciones hecha en simulink y en la segunda se presentan resultados experimentales.

Resultados de simulaciones numéricas

Para ilustrar el desempeño del sistema en lazo cerrado se realizaron tres simulaciones con señales de referencia distintas; una señal senoidal, una suma de senoidales de diferente frecuencia y amplitud y una referencia tipo exponencial. Es importante mencionar que en estas simulaciones se realizó una variación del 10% de los valores nominales de las constantes de los resortes, después se buscó estimar esta variación paramétrica con los observadores y compensarla para así obtener el mismo desempeño del caso nominal.

Simulaciones con una referencia senoidal En la primera simulación se muestran los resultados utilizando una señal de referencia con una amplitud de 2 centímetros y con una frecuencia de 1 rad/seg.

En las figuras 5.1 y 5.2 se muestra el desempeño del derivador utilizado para estimar las velocidades de la planta; en la figura 5.1 se puede observar que el sistema se mantuvo en lazo abierto durante los primeros 3 segundos y la convergencia de los derivadores a las velocidades reales es muy rápida, en unas fracciones de segundo. Esto se puede observar en los errores entre las variables reales y las estimadas que se muestran en la figura 5.2, los errores de posición están en el orden de $1 \times 10^{-5}m$, lo que se puede considerar suficientemente pequeño para decir que los derivadores tienen el desempeño esperado.

En esta gráfica se utiliza la siguiente nomenclatura $\hat{x}_1 = x_{1o}$, $\hat{x}_3 = x_{3o}$, $w_1 = \hat{x}_2$ y $w_3 = \hat{x}_4$.

En la figura 5.3 se muestra el desempeño de las variables internas del observador con convergencia asintótica que estima $\gamma_2(\cdot)$, ya que a través de estas es como se asegura su

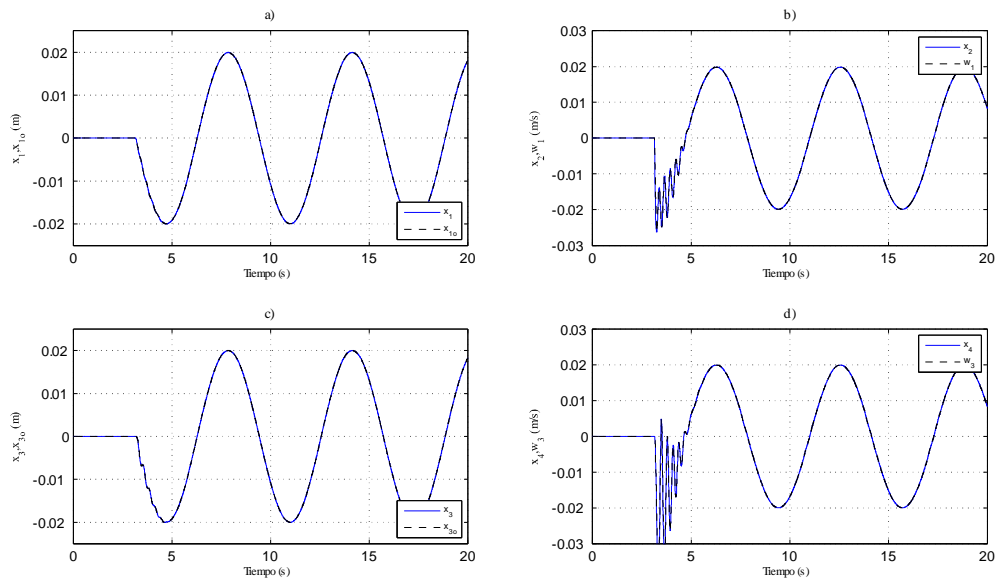


Figura 5.1: Desempeño de derivadores para estimar las velocidades.

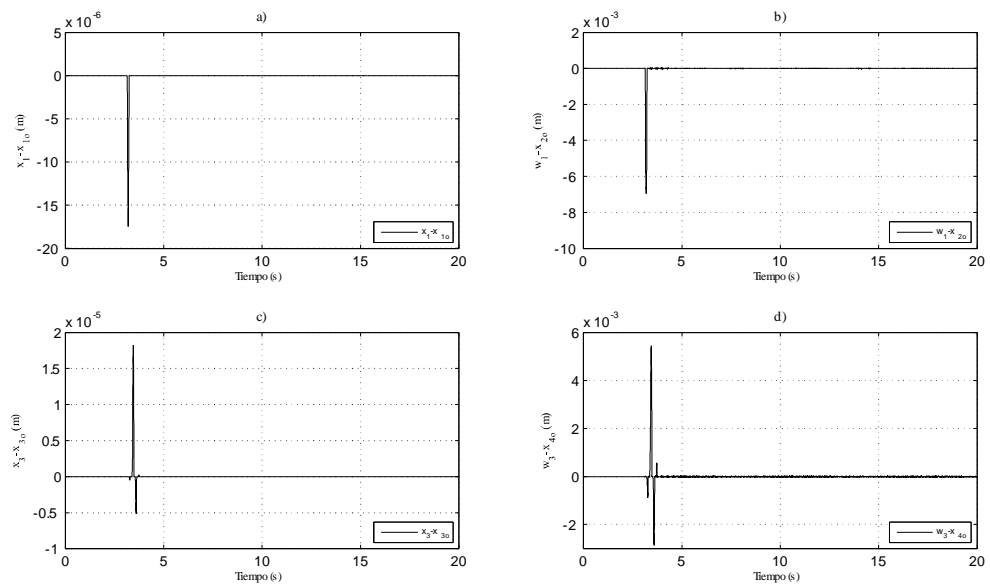


Figura 5.2: Errores entre las variables de estado reales y las estimadas por los derivadores.

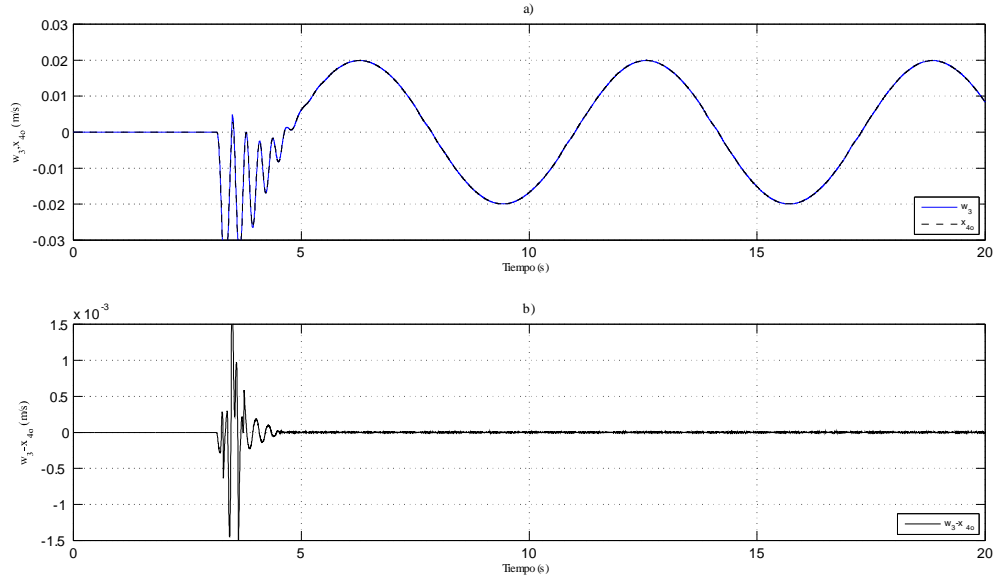


Figura 5.3: Variables internas del observador para estimar $\gamma_2(\cdot)$

buen funcionamiento y que lo estimado sea aproximado a lo esperado, donde $\hat{x}_4 = x_{4o}$.

El desempeño del observador para estimar las variables ε_2 y $\gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t)$ se analiza en forma indirecta a través de la convergencia a cero de errores entre variables internas $\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1$ y $z_1 - \hat{\varepsilon}_2$. La figura 5.4 muestra el comportamiento de estos errores, en donde se puede observar su convergencia a cero, lo que implica que la estimación de ε_2 y $\gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t)$ en tiempo finito es adecuada. En esta gráfica se utiliza la siguiente nomenclatura $\hat{\varepsilon}_1 = e_{1o}$ y $z_1 = e_{2o}$, y los errores internos del observador están dados por $\epsilon_1 = \varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1$ y $\epsilon_2 = z_1 - \hat{\varepsilon}_2$.

Después de cerrar el lazo, en $t = 3\text{seg.}$, la convergencia de la variable x_1 a x_{ra} y de x_3 a $y_r(t)$ se hace presente, como se puede observar en las figuras 5.5 y 5.6. Esta convergencia es en forma asintótica y se obtiene un error considerablemente bajo a partir de los 2 segundos después de cerrar el lazo.

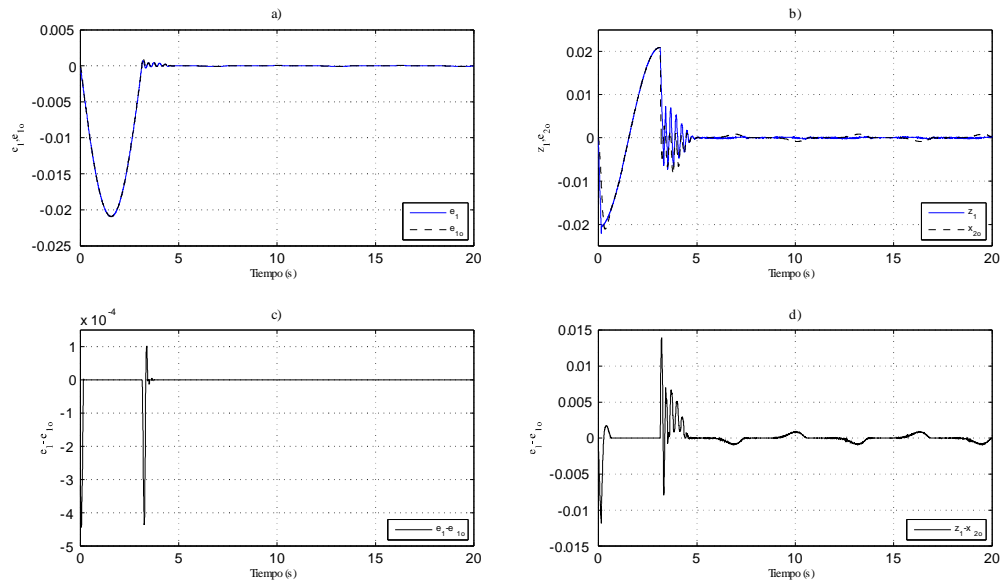


Figura 5.4: Desempeño del observador para estimar ε_2 y $\gamma_1(\cdot) - \ddot{x}_{ra}(t)$.

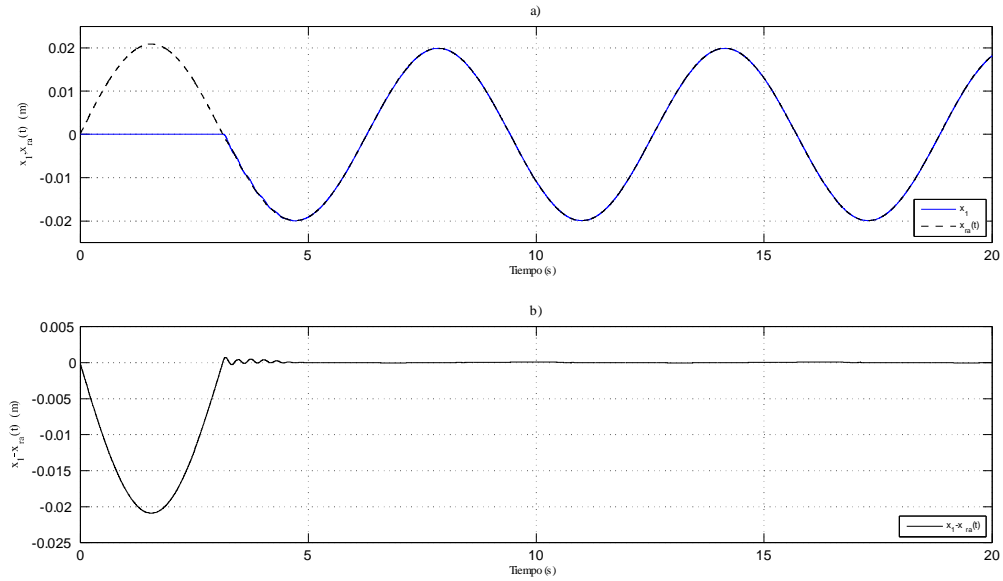


Figura 5.5: Convergencia de la variable x_1 a x_{ra} y el comportamiento del error entre ellas.

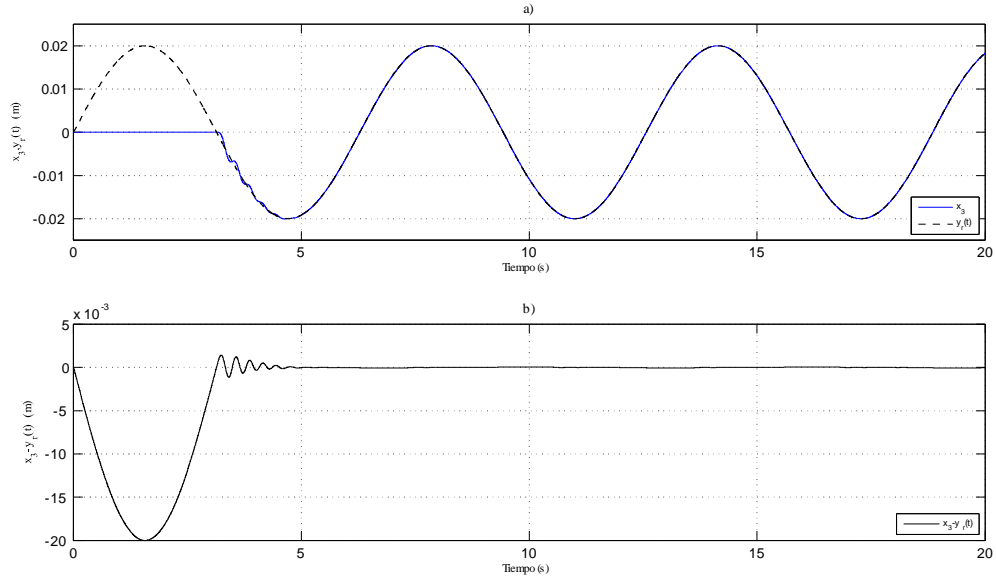


Figura 5.6: Señal de referencia y posición del segundo carro y error de seguimiento.

Finalmente, la amplitud de la señal de control alcanza valores que están dentro de un rango seguro para realizar experimentos con el mecanismo, ver figura 5.7. Además, la señal de control no presenta componentes de alta frecuencia, con lo que indica que en el experimento no se presentaran problemas por vibración en las variables de estado.

Simulación con una suma de senoidales como referencia Para el caso de la suma de dos señales senoidales como referencia los resultados fueron similares. Aquí sólo se presenta el comportamiento de las posiciones del sistema y de la señal de control. En la figura 5.8 se muestra la convergencia de la posición del primer carro a la señal $x_{ra}(t)$ y el error entre ellas, el cual es muy pequeño. En la figura 5.9 se puede observar que el objetivo de control se satisface. Al igual que en el caso anterior, la señal de control mantiene una amplitud adecuada para el desarrollo de experimentos, ver figura 5.10.

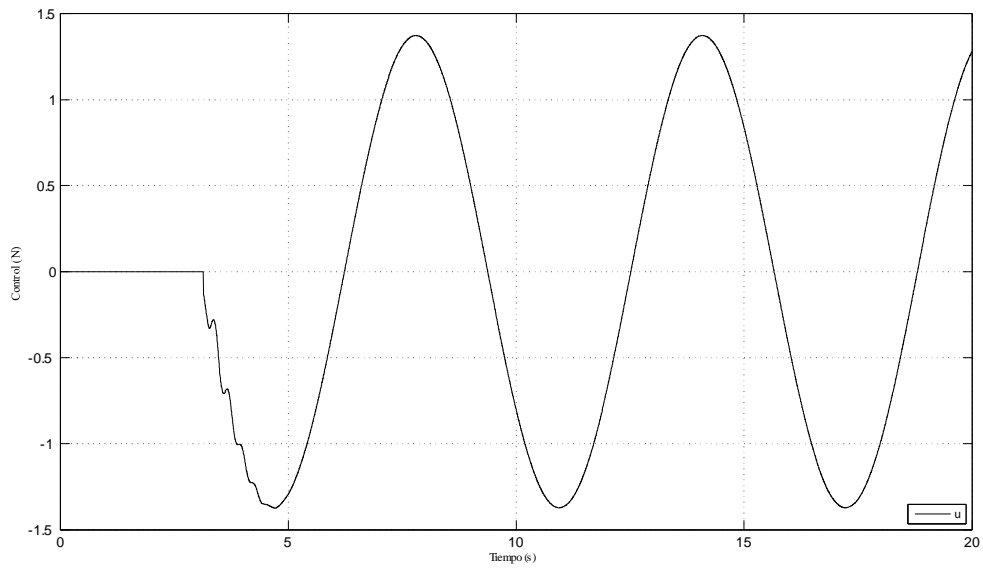


Figura 5.7: Señal de control.

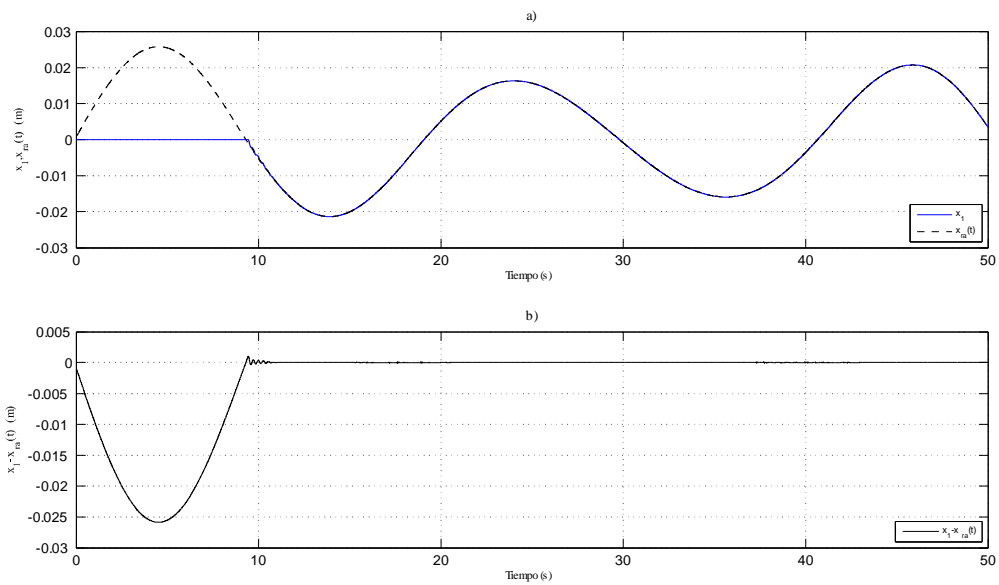


Figura 5.8: Comportamiento de x_1 y $x_{ra}(t)$ y error de seguimiento.

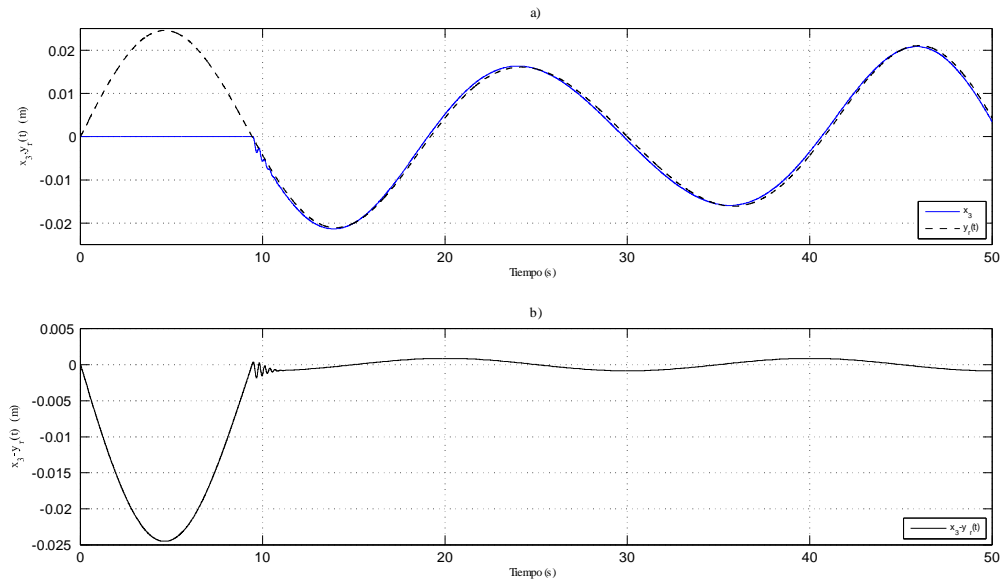


Figura 5.9: Salida del sistema x_3 , referencia $y_r(t)$ y error de seguimiento.

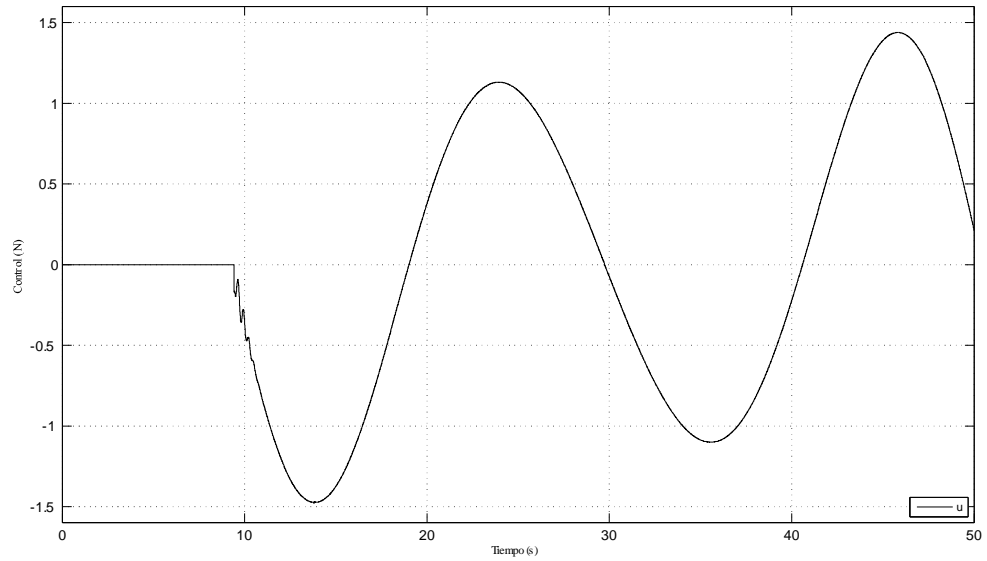


Figura 5.10: Señal de control.

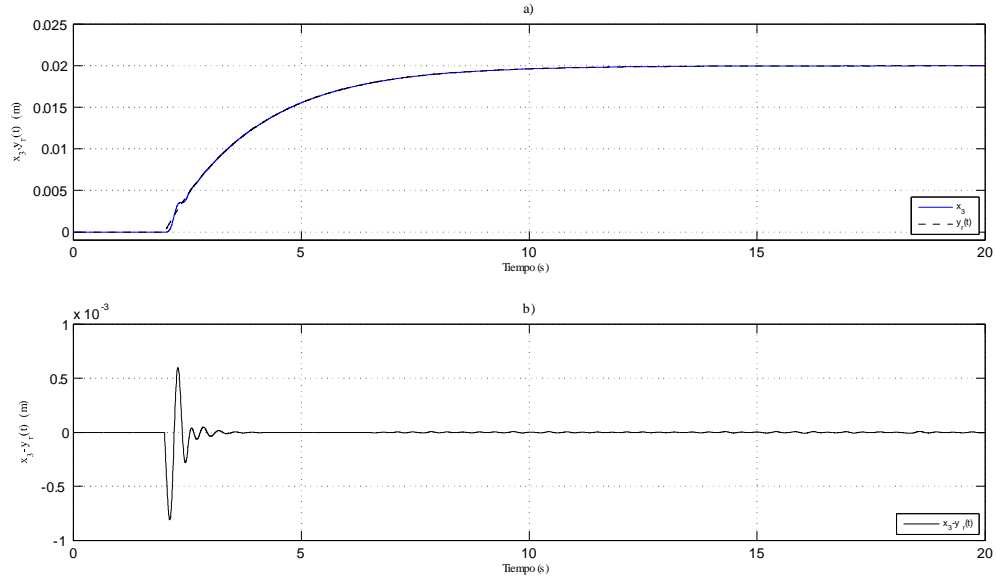


Figura 5.11: Comportamiento del sistema en lazo cerrado considerando una señal de referencia que converge exponencialmente a una constante.

Simulaciones con una referencia exponencial Finalmente se aplicó una señal de tipo exponencial que converge a un valor constante, con esta simulación se ilustra el desempeño del sistema con un objetivo similar a regulación. En la figura 5.11 se observa que la posición de la parte subactuada del sistema alcanza la señal de referencia con un error muy pequeño. En la figura 5.12 se observa la señal de control, la cual se mantiene en un rango adecuado para el sistema real.

Con estos resultados se puede concluir que la estrategia de control tiene un buen desempeño bajo las condiciones establecidas; es decir, la estrategia de control es robusta ante incertidumbres paramétricas, esta estrategia de control es similar a la utilizada en el sistema nominal estudiado en el capítulo anterior, sólo se ha agregado un observador adicional para estimar la perturbación $\gamma_2(\cdot)$. En la siguiente sección se muestran los

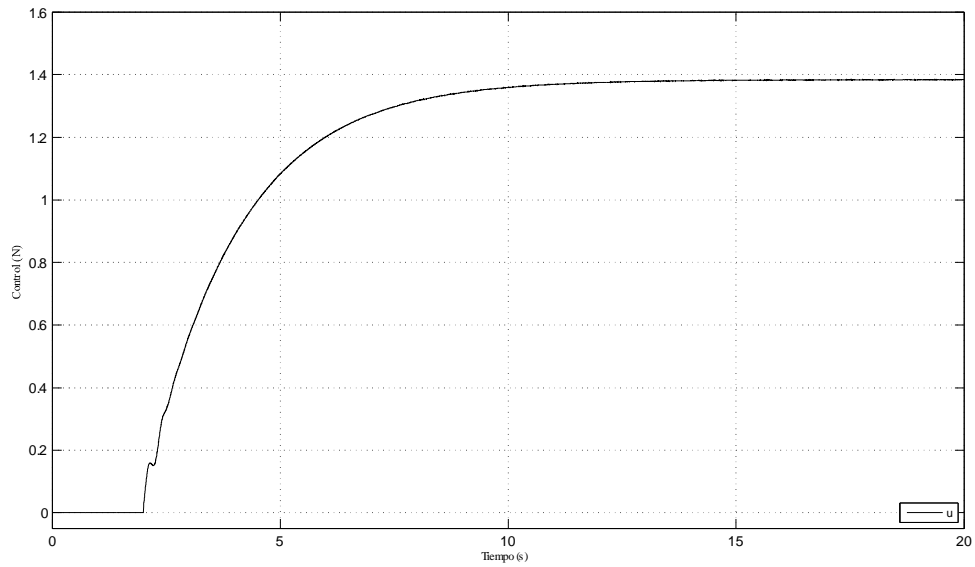


Figura 5.12: Señal de control.

resultados de aplicar este controlador al mecanismo real.

Es de esperarse que el desempeño sea mejor que cuando se consideró un modelo nominal pero es posible que aún haya errores debido a las dinámicas no modeladas.

Resultados experimentales

Los experimentos se realizaron con una plataforma de desarrollo dSPACE 1103. Al igual que en las simulaciones numéricas, se aplicaron tres referencias: una señal senoidal, una suma de senoidales y una señal tipo exponencial.

Resultados experimentales con una referencia senoidal En las figuras 5.13 y 5.14 se muestra el desempeño de los derivadores que estiman las velocidades de la planta. Como no se tienen mediciones de las velocidades no se puede tener una comparación

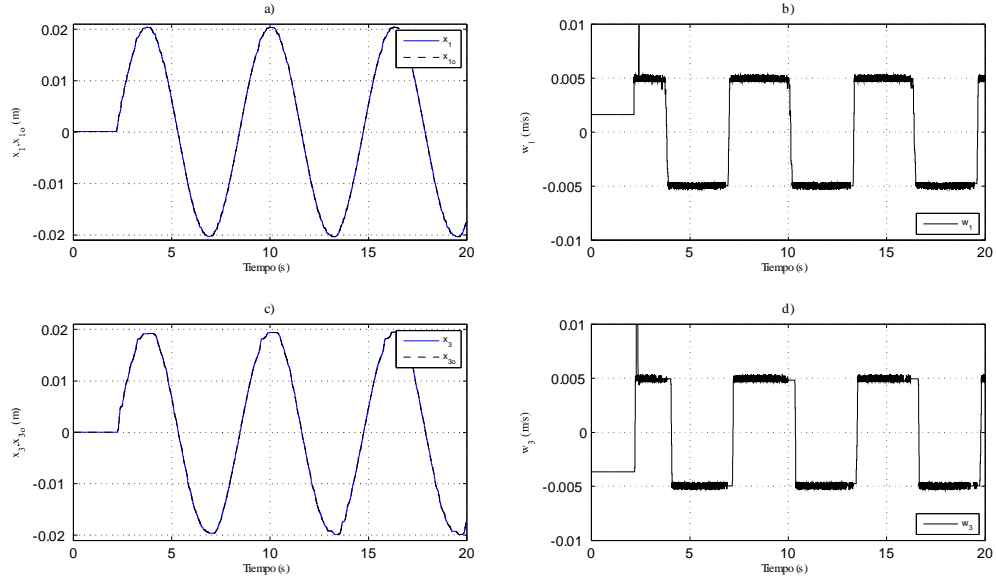


Figura 5.13: Resultados experimentales. Desempeño de los derivadores para estimar las velocidades de la planta.

entre la velocidad real y la estimada. Sin embargo, se puede analizar el desempeño con la comparación de las posiciones estimadas, como se puede ver en la figura 5.14, los errores en estado estable están en el orden de 1×10^{-6} , el cual es el mismo orden de las simulaciones numéricas, por lo que se concluye que los derivadores están cumpliendo con su objetivo.

A continuación se muestra una gráfica con las variables internas w_3 y \hat{x}_4 del observador con convergencia asintótica y el error entre ambas ver figura 5.15, como se puede observar el error entre ambas es adecuado, con esto se tiene una aproximación de las perturbaciones en $\gamma_2(\cdot)$, se observa que en el inciso a) de esta figura la velocidad \dot{x}_4 , línea punteada, cuenta con menos componentes de alta frecuencia por tal motivo se decidió dejar este observador y no proponer uno con convergencia en tiempo finito que

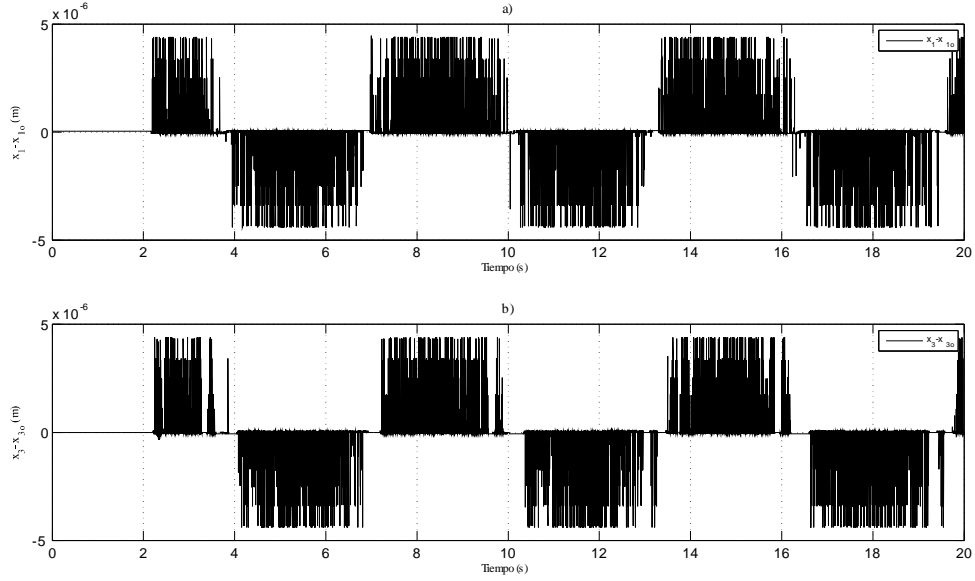


Figura 5.14: Resultados experimentales. Errores derivadores entre las posiciones reales y las posiciones estimadas.

causa más componentes de alta frecuencia.

El paso siguiente es analizar el desempeño del observador para estimar las señales ε_2 y $\ddot{x}_{ra}(t)$, este análisis se hace en forma indirecta a través de la convergencia a cero de los errores internos $\varepsilon_1 - \hat{\varepsilon}_1$ y $z_1 - \hat{\varepsilon}_2$, mostrados en la figura 5.16. Aquí se puede observar que estos errores llegan a una pequeña vecindad de cero. Lo importante aquí es observar que la estimación de los errores, figuras a) y b), es adecuada. Como era de esperarse, el desempeño del sistema en lazo cerrado de este experimento considerando perturbaciones tenía que mejorar un poco. En la figura 5.17 se puede observar que existe un pequeño error de seguimiento entre la señal de referencia $x_{ra}(t)$ y la posición x_1 . Esto a su vez causa un error de seguimiento entre la señal de referencia $y_r(t)$ y la posición de la parte subactuada de la planta, ver figura 5.18.

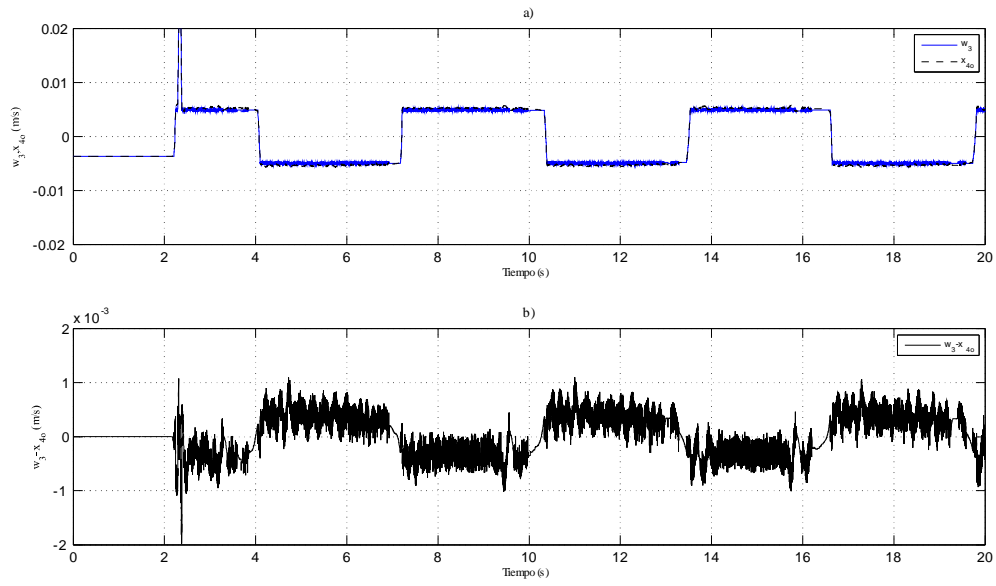


Figura 5.15: Variables internas del observador para estimar $\gamma_2(\cdot)$.

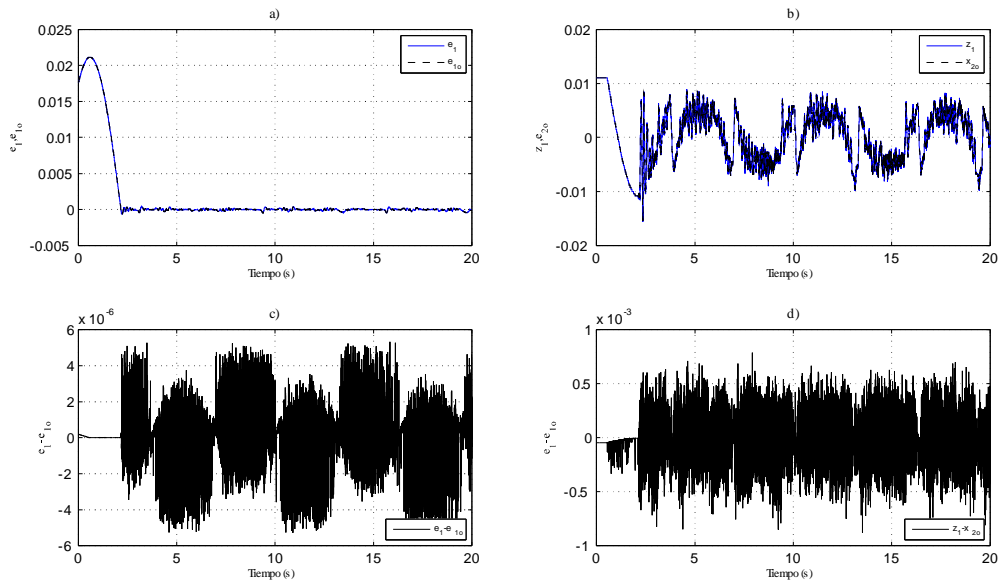


Figura 5.16: Desempeño observador y sus errores.

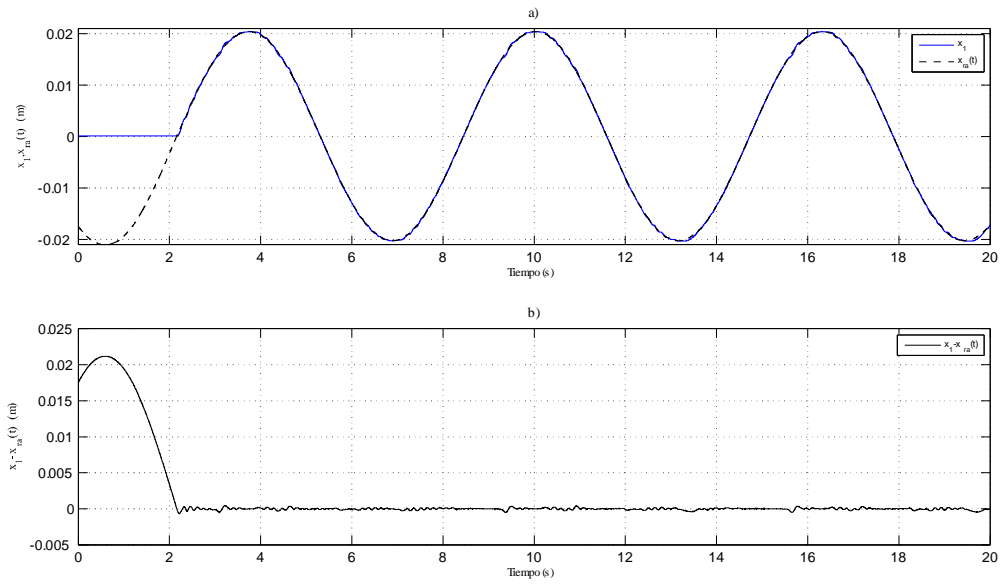


Figura 5.17: Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$.

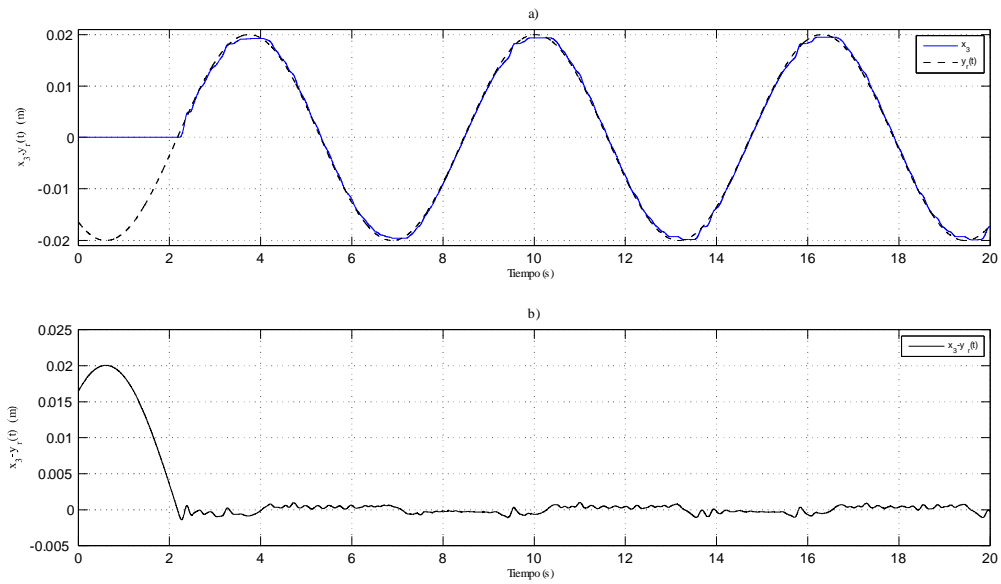


Figura 5.18: Objetivo de control.

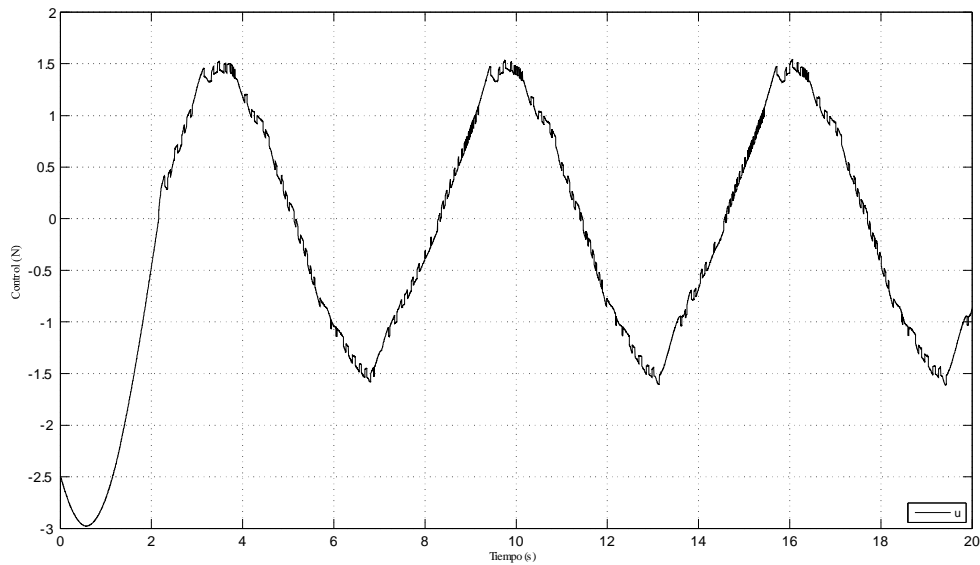


Figura 5.19: Señal de control.

Finalmente, la señal de control se mantiene en los mismo niveles que tuvo en las simulaciones numéricas y con las mismas características como se puede observar en la figura 5.19.

Resultados experimentales con una suma de senoidales como referencia En este caso los resultados son similares al caso anterior; el error de seguimiento de x_1 y la señal auxiliar $x_{ra}(t)$ se mantiene en el nivel de $1 \times 10^{-3}m$, como se puede observar en la figura 5.20. Mientras que el error de seguimiento entre $y_r(t)$ y x_3 alcanza la magnitud de $2,5 \times 10^{-3}m$ en estado estable.

Como se puede observar en la figura 5.21 inciso *b*) el error aumentó respecto a la simulación numérica con la misma referencia esto puede ser debido a que como no se están considerando otros fenómenos como la fricción de Coulomb. Por tal motivo, a la

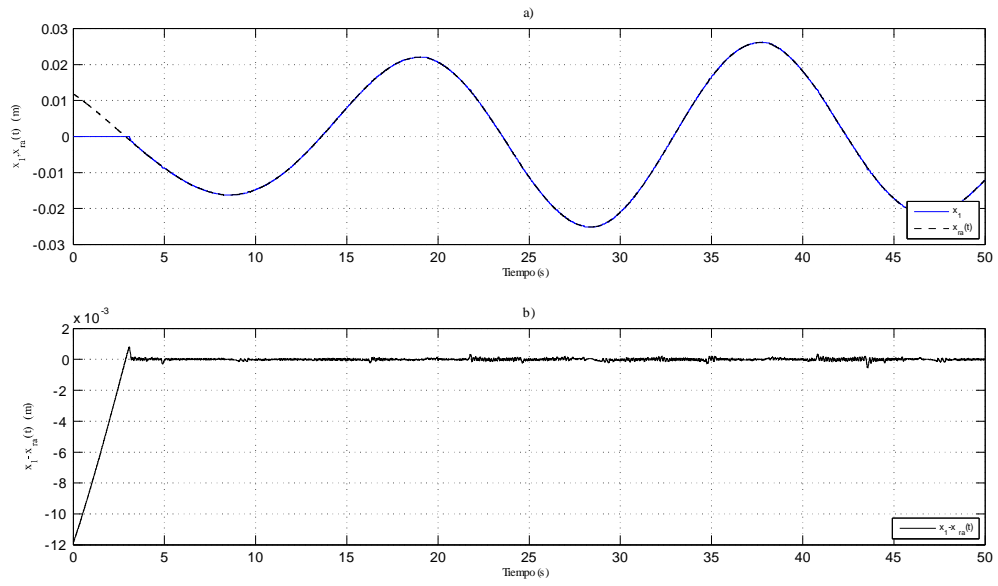


Figura 5.20: Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$.

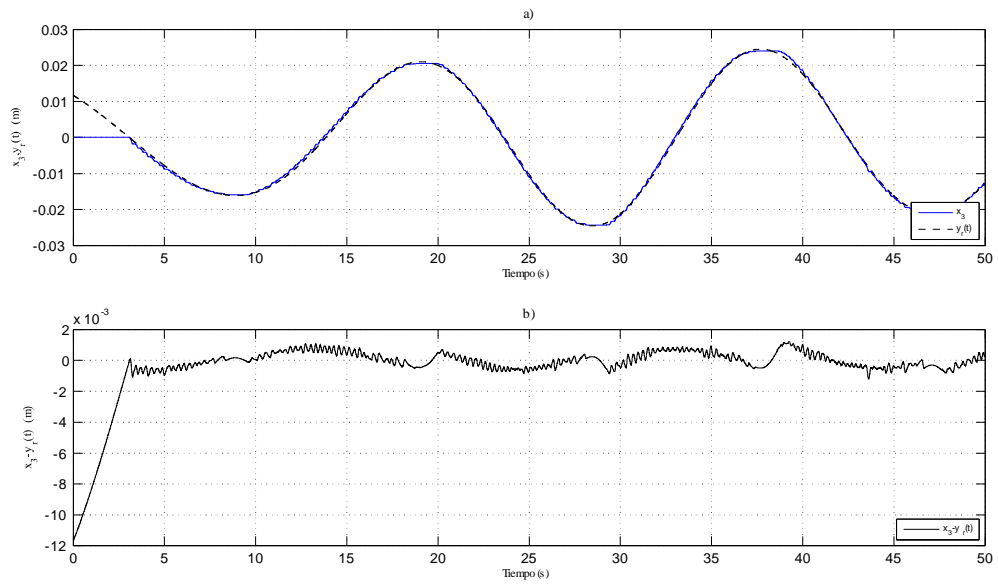


Figura 5.21: Objetivo de control.



Figura 5.22: Señal de control.

señal de control se le agregó un término discontinuo

$$u = 0,27065(-\alpha_1\varepsilon_1 - \alpha_2\varepsilon_2 - \alpha_3\text{sign}(\varepsilon_1) + 491,74x_1 + 15,23x_2 - 10245,87x_3 - 1,5542x_4 - 3,6948u - \gamma_1(\cdot) + \ddot{x}_{ra}(t)),$$

donde los valores propuestos de las constantes son $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ y $\alpha_3 = 0,1$, esto es para compensar dichas condiciones, es por eso que la señal de control de la figura 5.22 cuenta con componentes de alta frecuencia de baja amplitud.

Experimento con una referencia tipo exponencial Finalmente se realizó el experimento aplicando una señal que exponencialmente se aproxima a una constante, aquí los resultados fueron interesantes ya que la convergencia de la posición x_1 a la señal auxiliar $x_{ra}(t)$ es adecuada, figura 5.23, la convergencia de la posición x_3 de la parte subactuada llega a la señal de referencia, como se puede observar en la figura 5.24, hay

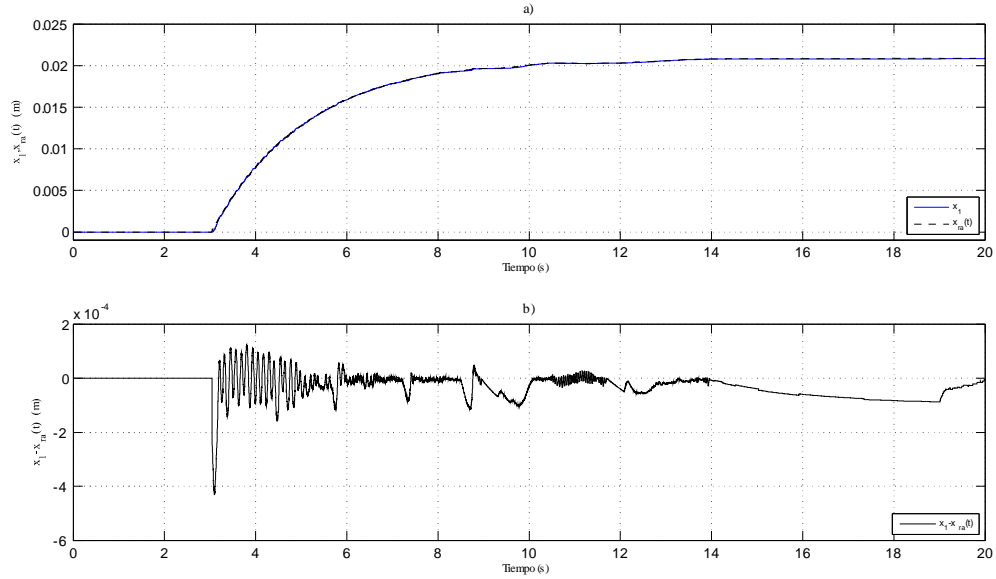


Figura 5.23: Dinámica entre x_1 y $x_{ra}(t)$.

un error en estado estacionario de alrededor de $0,1 \times 10^{-3}m$. Aquí es donde son más notorios los efectos de utilizar otro observador para compensar las perturbaciones, con lo cual el desempeño del sistema de control y además la señal de control no cuenta con componentes de alta frecuencia como se observa en la figura 5.25.

Finalmente se puede decir que se tiene una mejora en los experimentos realizados en la planta ECP210 con respecto al caso nominal, esto debido al uso del observador con convergencia asintótica para compensar el término $\gamma_2(\cdot)$. También es interesante mencionar que la estimación y compensación de la perturbación $\gamma_1(\cdot)$ se realiza en forma natural por el controlador diseñado para el sistema nominal, es por eso que la mejora en el desempeño del sistema en lazo cerrado que se obtuvo en este capítulo no es radicalmente diferente.

Sin embargo si hay mejora en el desempeño, esto se ilustra en la figura 5.26, donde

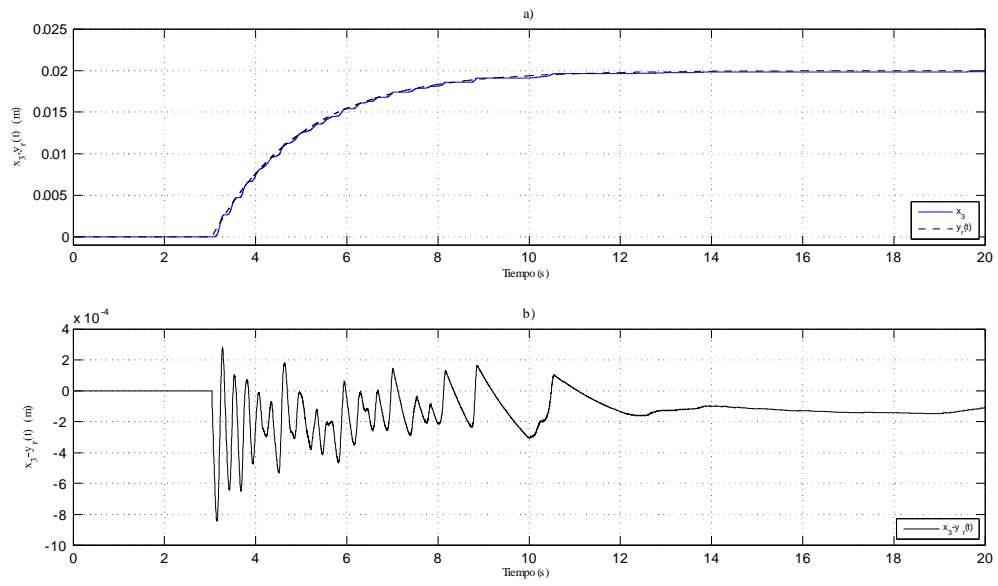


Figura 5.24: Objetivo de control.

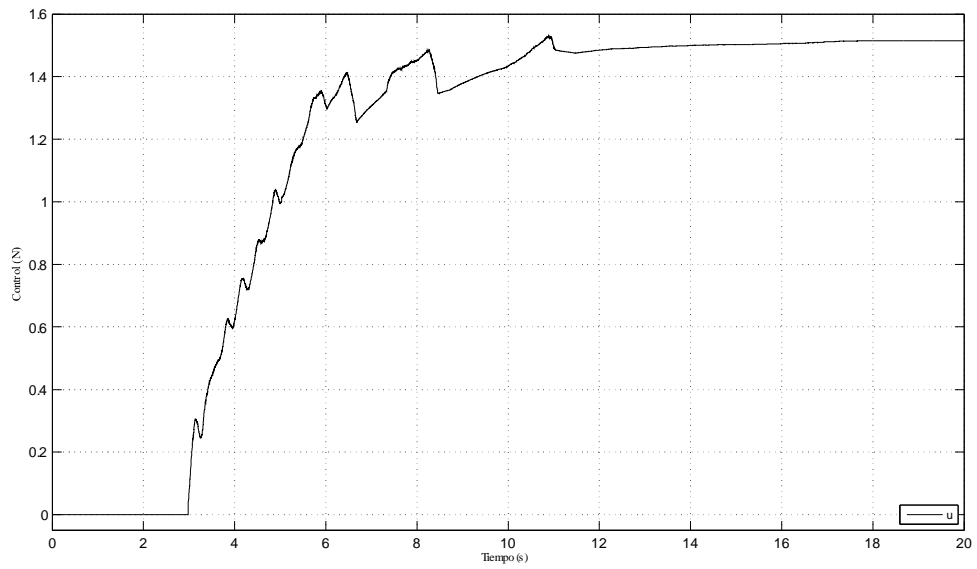


Figura 5.25: Señal de control.

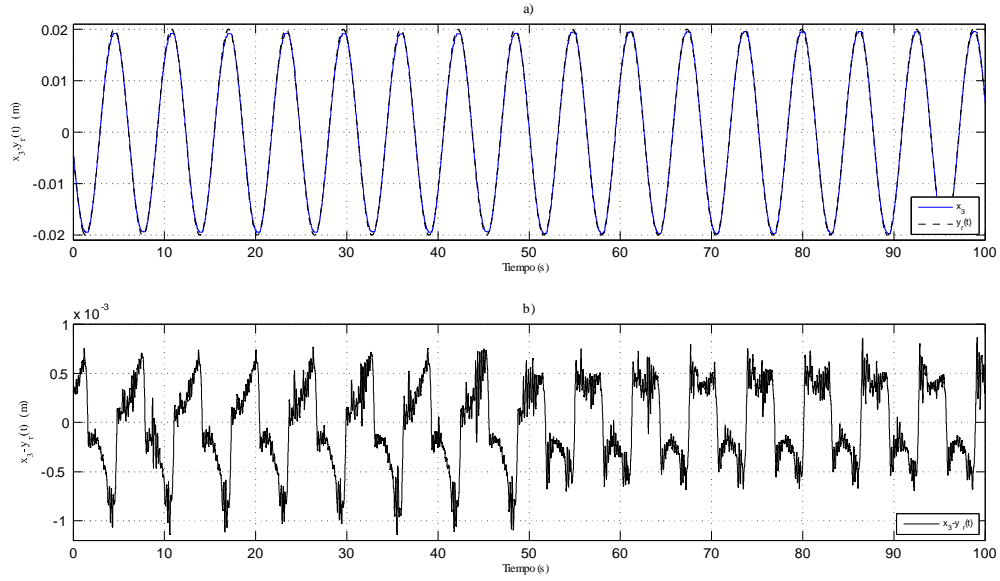


Figura 5.26: Objetivo de control y error.

se muestran los resultados de un experimento en donde en los primeros 50 seg. no se compensa la perturbación $\gamma_2(\cdot)$, después de este tiempo se compensa dicha perturbación y se ve claramente la mejora en el desempeño, en el inciso b) se muestra el error de seguimiento a través del experimento.

Capítulo 6

Conclusiones y comentarios finales

Analíticamente la técnica de control propuesta resuelve satisfactoriamente el problema de control de seguimiento de trayectorias en sistemas subactuados inciertos y con medición parcial del vector de estados. Sin embargo, en la práctica las trayectorias llegan a una vecindad de la señal de referencia. Se ha concluido que este problema se debe principalmente a la fricción seca o de Coulomb que existe en los mecanismos reales y que no fue considerada en el modelo. Esto es importante, ya que este término no satisface la condición de tener una derivada acotada, lo que ocasiona que se deteriore el desempeño de los derivadores y observadores empleados en la implementación del controlador.

Para resolver este problema, se debe realizar un análisis formal considerando el modelo de la planta como una ecuación diferencial con lado derecho discontinuo, lo que complica en gran medida el análisis y diseño del controlador.

A pesar de que estos términos de fricción no fueron tomados en cuenta, el desempeño del controlador es aceptable y comparable con los resultados que se han publicado hasta la fecha, considerando que se presenta un análisis formal del caso con perturbaciones.

La clase de sistemas subactuados a la que puede aplicar la técnica de control puede parecer limitada. Un trabajo abierto es lograr la aplicación a una clase de sistemas subactuados más amplia.

REFERENCES

- 1 Khalil H. K. Nonlinear Systems. Prentice Hall. 3rd Edition. New Jersey. pp 750. 2002.
- 2 Kailath T. Linear systems. Prentice-Hall. 1st Edition. New Jersey. pp 682. 1980.
- 3 Kwakernaak H., Sivan R. Linear optimal control systems. John Wiley & Sons, Inc. 1st Edition. USA. pp 608. 1972.
- 4 Guo W., Lin F., You X., Zheng T.Q. Nonlinear control of power supply for an arc heater. 1st IEEE conference on industrial electronics and applications, 1-4. 2006.
- 5 Mata-Jimenez M.T., Brogliato B., Goswami A. On the control of mechanical systems with dynamic backlash. Proceedings of the 36th IEEE conference on decision and control. 2. 1990-1995. 1997.
- 6 Corchero M.A., Ortega M.G., Rubio F.R. Aplicación del controlador robusto H_∞ a una planta solar. XXV jornadas de automática. 25. 2004.
- 7 King P.J., Mamdani E.H. The application of fuzzy control systems to industrial processes. Automatica. 13. 3. 235-242. 1977.
- 8 Lord Robert G., Hanges Paul J. A control system model of organizational motivation: Theoretical development and applied implications. Behavioral Science. 32. 3. 161-178. 1987.
- 9 Weiss Paul, Lee Kavanau J. A model of growth and growth control in mathematical terms. The Journal of General Physiology. 41. 1. 1-47. 1957.
- 10 Mordechai Gottman John, Murray James D., Swanson Catherine. The mathematics of marriage: dynamic nonlinear models. MIT Press, pp 421. 2005.
- 11 Kelly R., Santibañez V. Control de movimiento de robots manipuladores. Prentice hall. 1st Edition. España. pp 344. 2003.
- 12 Spong Mark W., Vidyasagar Mathukumalli. Robot dynamics and control. John Wiley and Sons. 1st Edition. USA. pp 336. 1989.
- 13 Ortega Roméo. Passivity-based control of Euler-Lagrange systems: mechanical, electrical, and electromechanical applications, Springer, Great Britain. pp 543. 1998.
- 14 Rosas Almeida David I., Alvarez Joaquín, Fridman Leonid. Robust observation and identification of nDOF Lagrangian systems, International Journal of Robust and Nonlinear Control. 17. 9. 842-861. 2007.
- 15 Bartolini Giorgio, Pisanoa Alessandro, Puntab Elisabetta, Usaia Elio. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems, International Journal of Control. 76. 9 & 10. 875 - 892. 2003.

- 16 Davila, J., Fridman, L., Levant, A., Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1785-1789. 2005.
- 17 Spong Mark W., Underactuated mechanical systems. *Control Problems in Robotics and Automation*. 230. 135-150. 1998.
- 18 Bergerman M., Lee C., Xu Y. Dynamic coupling of underactuated manipulators. *Procc. of the 4th Conference on Control and Applications, Albany, USA, 1995*.
- 19 Oriolo G., Nakamura Y. Control of mechanical systems with second-order non-holonomic constraints: Underactuated manipulators. *Procc. of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, UK, 1991.
- 20 Olfati-Saber R., Megretski A. Controller design for a class of underactuated nonlinear systems. *Procc. of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, USA. December, 1998.
- 21 Pettersen K., Mazenc F., Nijmeijer H. Global uniform asymptotic stabilization of an underactuated surface vessel: Experimental results. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 12. 6. 891-903. 2004.
- 22 Faical Mnif. VSS control for a class of underactuated mechanical systems. *International Journal of Computational Cognition*. 3. 2. 14-18. 2005.
- 23 A. Aguiar, J. Hespanha, Position tracking of underactuated vehicles. *Procc. of the American Control Conference*. 3. 1988-1993. 2003.
- 24 Puga S., Aguilar L. Algoritmo Twisting para seguimiento de trayectorias de robot subactuado. *Encuentro de Investigación en Ingeniería Eléctrica*. Zacatecas, México, 2006.
- 25 Riachy S., Orlov Y., Floquet T., Santiesteban R., Richard J.P. Second order sliding mode control of underactuated mechanical systems I: Local stabilization with application to an inverted pendulum. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 8. 4-5. 529-543. 2008.
- 26 Martinez R., Alvarez J. A controller for 2-DOF underactuated mechanical systems with discontinuous friction. *Nonlinear dynamics*. 53. 3. 191-200. 2007.
- 27 Filipov, A. F., Arscott F. M. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Springer. 1st Edition. London. pp 304. 1988.
- 28 Zhihua, Qu. *Robust control of nonlinear uncertain systems*. John Wiley and Sons, Inc. 1st Edition. New York. pp 546. 1998.
- 29 Levant A. Exact Differentiation of Signals with Unbounded Higher Derivatives. *45th IEEE Conference on Decision and Control*. 5585-5590. 2006.

- 30 Rosas Méndez Patricia, Rosas Almeida D., Alvarez Gallegos J. Observación y estimación en tiempo finito de una clase de sistemas no lineales de fase mínima. En Congreso Nacional de Control Automático. Vol. CD. Asociación Mexicana de Control Automático. Publicado en: Memoria en Extenso. 2009.
- 31 Parks Thomas R. Manual for model 210/210a. www.ecpsystems.com.
- 32 Rosas Almeida D., Alvarez Gallegos J., Rosas Méndez Patricia, Silva Axayácatl. Observación del estado y estimación de perturbaciones en sistemas no lineales en forma normal. En Congreso Nacional de Control Automático Vol. CD. Asociación Mexicana de Control Automático. Publicado en: Memoria en Extenso. 2009.