# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

### FACULTAD DE INGENIERÍA



"Diseño de un dispositivo semi-activo de inertancia variable para el control de vibraciones"

#### T E S I S

Que presenta para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS

Ricardo Arturo Castillo Narváez

**DIRECTOR DE TESIS:** 

Dr. Luis Omar Moreno Ahedo



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA FACULTAD DE INGENIERÍA, MEXICALI Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería

# ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

**TESIS DE GRADO** 

## "Diseño de un dispositivo semi-activo de inertancia

### variable para el control de vibraciones"

PRESENTADA POR

### Ricardo Arturo Castillo Narváez

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Luis Omar Moreno Ahedo

Director del Comité

Rosas Almeida Davin

Miembro del Comité

Dr. Álvaro González Ángeles

Miembro del Comité

Dr. Raúl Rascón Carmona Miembro del Comité

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BA LA CALIFORNIA



FACULTAD DE **INGENIERIA** 

Dr. Guillermo Galaviz Yáñez

Coordinador de Investigación y Posgrado Facultad de Ingeniería

18 de mayo de 2018

RESUMEN de la Tesis de Ricardo Arturo Castillo Narváez, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS. Mexicali, Baja California, México. Marzo de 2018.

"Diseño de un dispositivo semi-activo de inertancia variable para el control de vibraciones."

Resumen aprobado por:

\_\_\_\_\_

Dr. Luis Omar Moreno Ahedo.

Director de tesis

En el presente trabajo se muestra el diseño de un dispositivo mecánico semi-activo para control de vibraciones. El dispositivo mecánico fue utilizado de forma pasiva para demostrar que al incorporarlo en un sistema mitiga las vibraciones. Se propone el dispositivo semi-activo diseñado para analizar su rendimiento por medio de una ley de control la cual nos indica la configuración que debe de tener para obtener una respuesta óptima.

Palabras clave: Semi-activo, Inerter, Control

ABSTRACT of the thesis, presented by Ricardo Arturo Castillo Narváez, in order to obtain the MASTER of SCIENCE. Mexicali, Baja California, México. March, 2018.

"Diseño de un dispositivo semi-activo de inertancia variable para el control de vibraciones."

Approved by:

\_\_\_\_\_

Dr. Luis Omar Moreno Ahedo

Thesis Advisor

In this thesis the design of a semi-active mechanical device for vibration control is shown. The mechanical device was used passively to demonstrate that when incorporated into a system mitigates vibrations. The semi-active device designed to analyze its performance is proposed by means of a control law which indicates the configuration it must have to obtain an optimal response.

Keywords: Semi-active, Inerter, Control

# Índice general

1.	Intro	Introducción				
	1.1.	1. Objetivos generales y específicos				
	1.2.	Justificación	14			
	1.3.	Hipótesis	15			
	1.4.	Metodología de investigación				
	1.5.	Preliminares				
		1.5.1. Definiciones y conceptos	17			
		1.5.2. Respuesta en el tiempo y respuesta en frecuencia	19			
		1.5.2.1. Respuesta en el tiempo	19			
		1.5.2.2. Respuesta en frecuencia	28			
		1.5.3. Amortiguamiento equivalente	31			
2.	Cont	trol de vibraciones en sistemas mecánicos	35			
	2.1.	Control pasivo	35			
	2.2.	Control activo	36			
	2.3. Control semi-activo					
	2.4.	4. El inerter pasivo				
		2.4.1. Diseño de un inerter	39			
		2.4.1.1. Diseño tipo tornillo de bola	39			
		2.4.1.2. Diseño con engranes	41			

Ril	Ribliografía				
4.	Con	clusione	S		95
	3.5.	Optimi	zación		90
		3.4.3.	Factorizac	ión de Floquet	89
		3.4.2.	Análisis d	e estabilidad	87
			3.4.1.2.	Problema de posición inicial	85
			3.4.1.1.	Problema de la velocidad inicial	80
		3.4.1.	Cálculo de	e los instantes de conmutación	80
	3.4.	Análisi	Análisis utilizando teoría de Floquet		
		3.3.2.	Estabilida	d en el sentido de Lyapunov	75
		3.3.1.	Puntos de	equilibrio	73
	3.3.	Ley de	control		69
	3.2.	Diseño del inerter semi-activo			61
	3.1.	Estado	del arte		59
3.	Iner	ter semi	i-activo		59
			2.4.3.4.	Validación de los experimentos	54
			2.4.3.3.	Resultados experimentales	45
			2.4.3.2.	Adquisición de datos	45
			2.4.3.1.	Plataforma de experimentación	44
		2.4.3.	Control pa	asivo de vibraciones con un inerter	44
		2.4.2.	Influencia	del inerter en las frecuencias naturales	43

# Índice de figuras

1.1.	Metodología de la investigación tecnológica.	16
1.2.	Sistema masa-resorte-amortiguador.	19
1.3.	Desplazamiento lineal como coordenada generalizada [16]	20
1.4.	Solución sub-amortiguada [26]	25
1.5.	Variación de $\omega_d$ con amortiguamiento [26]	25
1.6.	Comparación de movimientos con diferentes tipo de amortiguamiento [26].	26
1.7.	Ubicación de $S_1$ de $S_2$ [26]	28
1.8.	Retrato de fase de un sistema amortiguado [26]	28
2.1	Tenelogías de componentos eléctricos [21]	20
2.1.		39
2.2.	Topologías con dispositivos mecánicos [21]	39
2.3.	Esquema de un inerter tipo tornillo de bola [21]	40
2.4.	Tornillo de bola [21]	40
2.5.	Tuerca de bola e interior de una tuerca de bola [21]	40
2.6.	Inerter tipo tornillo de bola (ball crew) [21]	41
2.7.	Esquema de un inerter de engranes [21]	42
2.8.	Modelo de un inerter con engranes [21]	42
2.9.	Inerter de engranes [21].	42
2.10.	Sistema de un grado de libertad con un inerter [21]	43
2.11.	Módulo de la compañía ECP [21]	44
2.12.	Tablero de conexiones CLP1103 [21].    .	45

2.13. Fuente	de energía, motor DC y encoder [21].	46
2.14. Estimad	ción de la constante del resorte A [21]	46
2.15. Estimad	ción de la constante del resorte B [21]	47
2.16. Respue	sta en el tiempo de un sistema masa-resorte (MR) con diferentes re-	
sortes, a	a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21]	48
2.17. Respue	sta en el tiempo de un sistema masa-resorte-amortiguador (MRA) con	
diferent	tes resortes, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte	
de 184	[21]	49
2.18. Respue	sta en el tiempo de un sistema masa-resorte-inerter (MRI) con dife-	
rentes r	esortes, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de	
184 [21	]	50
2.19. Valores	de los picos del sistema masa-resorte con diferentes resortes, a) cons-	
tante de	el resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21]	51
2.20. Valores	pico del sistema masa-resorte-amortiguador (MRA) con diferentes	
resortes	a, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].	52
2.21. Valores	picos del sistema masa-resorte-inerter (MRI) con diferentes resortes,	
a) const	cante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21]	53
2.22. Respue	stas experimentales vs. simulación del sistema MR, a) constante del	
resorte	de 746, b) constante del resorte de 184 [21]	55
2.23. Respue	sta experimental vs. simulación del sistema MRA, a) constante del	
resorte	de 746, b) constante del resorte de 184 [21]	56
2.24. Respue	sta experimental vs. simulación del sistema MRI, a) constante del re-	
sorte de	2746, b) constante del resorte de 184 [21]	57
3.1. Rueda	volante variable de inercia variable [11]	60
3.2. Esquem	na de una caja de engranes planetaria [31]	60
3.3. Masa d	e dos terminales con momento de inercia variable [34]	61
3.4. Rueda	volante con momento de inercia variable [34].	61

3.5.	a) modelo del inerter en 3D y b) prototipo del inerter [36]	62
3.6.	Rueda volante sin masa adicionales.	63
3.7.	Rueda volante con las masas adicionales con una distancia de $d = 30mm$	67
3.8.	Rueda volante con las masas adicionales con una distancia de $d = 55mm$	67
3.9.	Rueda volante con las masas adicionales con una distancia de $d = 80mm$	68
3.10.	Diseño del volante rodante del inerter semi-activo propuesto	68
3.11.	Respuesta de un sistema masa-resorte-inerter ante una entrada impulso para el valor de inertancia mínimo y máximo.	69
3.12.	Sistema masa-resorte-inerter.	70
3.13.	Gráfica de la simulación del sistema MRI	74
3.14.	Simulación del sistema MRI y la función signo.	77
3.15.	Primeras cinco respuestas del sistema MRI.	91
3.16.	Ultimas cinco respuestas del sistema MRI	91
3.17.	Cuadrantes y parte de la trayectoria de la respuesta para analizar con el teo- rema de Floquet.	92
3.18.	Respuesta del sistema MRI utilizando función signo y la técnica del decre- mento logarítmico.	94

# Índice de cuadros

2.1.	Analogías eléctricas-mecánicas [8].	37
2.2.	Parámetros de a) los resortes utilizados y b) la masa del sistema	47
2.3.	Coeficientes y constantes de amortiguamiento en el sistema MR	53
2.4.	Coeficientes y constantes de amortiguamiento del sistema MRA	54
2.5.	Coeficientes y constantes de amortiguamiento de un sistema MRI	54
3.1.	Valores de momentos de inercia e inertancia para distintas configuraciones	
	geométricas.	67
3.2.	Criterio de estabilidad para el sistema (3.19)	79
3.3.	Función signo en forma de una función periódica $q_v(t)$	85
3.4.	Función signo en forma de una función periódica $q_p(t)$	86
3.5.	Periodos en cada cambio de signo	86
3.6.	Inertancias máximas y mínimas utilizadas	90
3.7.	Inertancia	92
3.8.	Relación de la inertancia mínima y máxima.	93
3.9.	«Quality factor» cantidad de picos que se tendrían de las diferentes combina-	
	ciones entre la inertancia mínima y máxima	94

10

# Capítulo 1

# Introducción

El estudio de las vibraciones se ocupa de los movimientos oscilatorios de los cuerpos y las fuerzas asociadas a ello. Las vibraciones son el movimiento de un cuerpo o cuerpos conectados entre ellos desplazados de su posición de equilibrio. Las vibraciones son el resultado de los efectos combinados de la inercia y una fuerza elástica en el sistema, por lo que todos los cuerpos que poseen masa y elasticidad son capaces de vibrar. El movimiento de los componentes de inercia y rotación de un sistema pueden ser expresados en términos de las masas, momentos de inercia y las derivadas del desplazamiento con respecto al tiempo. Una característica importante de las oscilaciones, es el ciclo de transformación de la energía potencial en energía cinética y viceversa. Esta característica es claramente mostrada por los modelos idealizados que involucran elementos elásticos e inerciales, es decir, masas y resortes.

Los sistemas tienden a regresar a su posición de equilibrio bajo la acción de una fuerza restauradora; tales como una fuerza elástica como en una masa unida a un resorte, o una fuerza gravitacional; por ejemplo un péndulo simple. Las fuerzas elásticas de restauración son expresadas en términos de los desplazamientos y rigidez de los miembros elásticos.

Las vibraciones ocurren con o sin amortiguamiento, este amortiguamiento es otro elemento básico en el análisis de las vibraciones de los sistemas, sin embargo todos los sistemas están sujetos a un amortiguamiento debido a la energía disipada por fricción u otra resistencia. Las máquinas y estructuras experimentan vibraciones y generalmente sus diseños requieren que se considere el comportamiento de las oscilaciones para reducir el exceso de estas debido a que producen un incremento de tensión, perdida de energía, causan un desgaste adicional, aumentan las cargas de apoyo, inducen fatiga y absorben energía del sistema. En la práctica para el estudio de vibraciones mecánicas se han realizado distintos dispositivos mecánicos como lo es el resorte y el amortiguador, y en las décadas recientes se ha propuesto el inerter, el cual es un dispositivo mecánico con dos terminales cuya fuerza aplicada es proporcional a la aceleración relativa entre sus terminales, estos dispositivos se han estudiado para los diferentes tipos de control ya sea pasivo, activo y semi-activo.

En la actualidad los dispositivos utilizados en sistemas mecánicos y estructurales que sirven para el estudio de vibraciones causados por terremotos, viento o actividad humana son los absorbedores de vibraciones<sup>1</sup> (AV). Los primeros estudios donde se aplicó el AV en sistemas mecánicos fueron realizados por Frahm [13], quien propuso el uso de un sistema masa resorte, en esta propuesta no había amortiguador, y por lo tanto, la función del sistema era para equilibrar la carga externa sin absorción de energía.

El primer estudio de la aplicación de AV's para el control de vibraciones del suelo fue realizado por Lenzen en [29]. Sin embargo, los sistemas AV tienen dos deficiencias principales: el efecto de desafinación, y un golpe excesivamente grande del AV [18, 27]. Otros ejemplos de sistemas pasivos son un gran número de AV's son de tipo péndulo. Su forma más simple consiste en una masa suspendida sintonizada a una fracción del periodo fundamental de la estructura, y un amortiguador viscoso que transfiere el movimiento mecánico del AV en calor, que luego se disipa al ambiente [27]. Existe otro tipo de AV, llamado bidireccional y homogénea AV (BH-AV), este tiene una masa pendular unida a un amortiguador de fricción con su eje original perpendicular al plano de movimiento, esta configuración geométrica conduce a la disipación de energía cuadrática en la amplitud de desplazamiento [2]. Algunos dispositivos utilizados para el control activo son el uso de un amortiguador magnético [3],

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>TMD tuned-mass-damper por sus siglas en inglés.

y el uso de una AV que funciona con un servo motor [17]. Existen distintos tipo de dispositivos de control semi-activo tanto de rigidez como amortiguamiento variable, en el caso de los amortiguadores se tiene los amortiguadores de fricción semi-activos (SAFD). En el cual los materiales piezoeléctricos se utilizan para controlar la fuerza de sujeción de un amortiguador de fricción para regular la fuerza de deslizamiento del amortiguador a través de una simple retroalimentación del estado de palanca o deslizamiento del amortiguador [4, 5]. Y los amortiguadores con fluido magnetoreológico el cual varía su coeficiente de amortiguamiento aplicando voltaje para que modifique su configuración interna [1, 19]. También se han propuesto dispositivos de rigidez variable como el AV de rigidez variable el cual consiste en cambiar la posición de un conjunto de resorte por medio de un actuador [28, 5, 32], también se ha propuesto variar la rigidez acoplando un resorte auxiliar al sistema [9, 35, 24], otro dispositivo de rigidez variable es por medio de un «switch» [6]. Los dispositivos mecánicos semi-activos mas utilizados son dispositivos de rigidez y de amortiguamiento variable. Algunas adaptaciones mecánicas se han realizado para variar la inercia. Sin embargo no existía hasta hace una década un dispositivo que fungiera como elemento mecánico que al aplicarle una fuerza cambiará la inercia del sistema.

En la sección 1.5 se presentaran algunos conceptos y definiciones utilizados en el estudio de vibraciones mecánicas. En el capítulo 2 analizaremos los distintos tipos de control e inclusión del inerter, también analizaremos el inerter en forma pasiva. En el capítulo 3 veremos los inerter de inertancia variable que han sido propuestos y analizaremos el diseño propuesto en el presente trabajo así como la ley de control basada en una función signo. En el capítulo 4 veremos las conclusiones del presente trabajo.

# 1.1. Objetivos generales y específicos

Los objetivos del presente trabajo de investigación son los siguientes:

#### **Objetivo general**

Diseñar un inerter semi-activo para el control de vibraciones en sistemas mecánicos.

#### **Objetivos específicos**

- Comprobar que la aplicación del inerter de forma pasiva mitiga las vibraciones en un sistema.
- Proponer una configuración del inerter variable.
- Implementar una ley de control para mitigar las vibraciones en un sistema.

# 1.2. Justificación

Los estudios realizados sobre el control de vibraciones ha sido de gran importancia, ya que sirven para proteger maquinaria de precisión y edificios, contra las vibraciones causadas por ellos mismos o por factores externos, por ello se han propuesto distintos tipos de dispositivos para el control de vibraciones, a los cuales se les aplica diferentes técnicas de control como lo es el control activo, pasivo y semi-activo. La desventaja que tienen los dispositivos utilizados para el control pasivo es el hecho de que solo funcionan bajo una sola frecuencia, esto es que no es posible cambiar la rigidez de un resorte, ni el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador y las desventajas que tienen los dispositivos usados para el control activo son el alto costo de los sensores y actuadores utilizados, así como el gasto de energía para el funcionamiento, en cambio el uso de dispositivos semi-activos presentan ventajas an-te los dispositivos utilizados para el control activo y pasivo, los dispositivos semi-activos a diferencia de los dispositivos pasivos es el que el dispositivo semi-activo puede cambiar la frecuencia natural del sistema ya sea modificando la rigidez o el amortiguamiento. Y la ven-taja que presentan los dispositivos semi-activos es el consumo reducido de energía. Para las distintas técnicas de control se han realizado distintos tipos de dispositivos, recientemente se ha propuesto un dispositivo mecánico llamado inerter, que a diferencia de la masa puede ser considerado como dispositivo, para mejorar el funcionamiento del inerter se requiere que este varía su constante de proporcionalidad llamada inertancia la cual se logra cambiando la inercia del dispositivo, este dispositivo no sea estudiado en su totalidad de forma semi-activo.

# 1.3. Hipótesis

Por medio de la configuración de una inerter se logrará mitigar las vibraciones de un sistema mecánico de forma semi-activa.

# 1.4. Metodología de investigación

La investigación tecnológica se apoya en las teorías y en los conocimientos de la ciencia para aplicarlos a la transformación de bienes y servicios útiles a la sociedad; con su aplicación es innovar métodos, técnicas y conocimientos para el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad, las empresas y la población en general.

La investigación tecnológica posee características específicas; entre ellas se encuentran las siguientes:

- La finalidad de esta investigación es obtener conocimiento útil para resolver un problema concreto de las necesidades de la sociedad.
- Buscan soluciones para casos particulares que se ven influidos por contextos sociales, económicos, políticos, culturales y geográficos.
- Es factible desde el punto de vista tecnológico, si se dispone de los conocimientos y las habilidades necesarios de diseño, operacionalidad y materialización.
- El diseño inicial no es único ni definitivo, pues no hay una sola solución correcta para



Figura 1.1: Metodología de la investigación tecnológica.

un problema, ya que siempre es posible mejorar un diseño y modificarlo constantemente.

- Los métodos e instrumentos propios de las disciplinas técnicas e ingenieriles y áreas afines que se utilizan están en constante evolución y se renuevan para adaptarse a los conocimientos científicos en los que se apoyan.
- Al alcanzarse la mejora de un instrumento, artefacto, avance técnico o diseño de una innovación, de inmediato surge una nueva invención o una nueva necesidad que demanda cambios en éstos, en sus componentes o incluso en todo el sistema.

La investigación tecnológica posee muchas otras características a partir de las cuales se define su metodología. En la figura 1.1 se presenta el esquema de cómo plantear un tema de investigación de carácter tecnológico.

## 1.5. Preliminares

En esta sección se mencionaran algunos conceptos y definiciones utilizados en el desarrollo del presente trabajo.

#### **1.5.1.** Definiciones y conceptos

El estudio de vibraciones comienza con el modelado matemático de los sistemas vibratorios, el modelo matemático de un sistema es una descripción en términos matemáticos del sistema, y representan una idealización del sistema físico. Dentro de la modelación matemático se realiza algunas suposiciones para simplificar el modelo, debido a que si se incluyeran todos los efectos en el modelo del sistema físico, usualmente la ecuación resultante sería compleja. En cambio si se hacen suposiciones una aproximación del sistema se está realizando, por lo que es más fácil obtener una solución a un modelo aproximado a uno al cual se toma en cuenta todos los efectos del sistema físico [16].

Los modelos matemáticos de un sistema físico requieren la selección de un grupo de variables que describan el comportamiento del sistema. Las variables dependientes son variables que describen el comportamiento físico del sistema. Las variables independientes son las variables con las cuales las variables dependientes cambian. Esto es que las variables dependientes están en función de las variables independientes. Las variables dependientes en muchos problemas de vibraciones son desplazamientos que tiene un cuerpo desde una posición de equilibrio del sistema, mientras que el tiempo es la variable independiente [16].

El número de grados de libertad para un sistema es el número de variables cinemáticamente independientes necesarias para describir completamente el movimiento de todos los elementos en el sistema. Cualquier conjunto de n coordenadas cinemáticamente independientes para un sistema con n grados de libertad es llamado un conjunto de coordenadas generalizadas. Las coordenadas generalizadas son las variables dependientes para un problema de vibraciones y son funciones de la variable independiente la cual es el tiempo [16].

El método de análisis usado para resolver un problema matemático resultante de un modelo de un sistema de vibraciones depende de un cierto número de factores. Entre ellos los grados de libertad, un sistema con un número finito de grados de libertad es un sistema discreto. Las vibraciones de un sistema de un grado de libertad están gobernadas por una ecuación diferencial ordinaria en que el tiempo es la variable independiente y las coordenada generalizada escogida es la variable dependiente. Las vibraciones de un sistema con múltiples grados de libertad son gobernadas por un sistema de n ecuaciones diferenciales, donde n es el número de grados de libertad. Las variables dependientes son las coordenadas generalizadas, mientras que el tiempo es la variable independiente. Las ecuaciones diferenciales para un sistema de múltiples grados de libertad son, en general, acopladas [16].

Existen dos clases generales de vibraciones las cuales son libres y forzadas. Las vibraciones libres toman lugar cuando un sistema oscila bajo la acción de fuerzas inherentes al sistema mismo y cuando alguna fuerza impresa externa está ausente. El sistema bajo vibraciones libre vibrará en una o más frecuencias naturales, que son propiedades de los sistemas dinámicos establecidos por la distribución de la masa y rigidez. Las vibraciones que toman lugar bajo la excitación de una fuerza externa son llamadas vibraciones forzadas. Si la fuerza de excitación es senoidal, la excitación se dice que es harmónica. Si la frecuencia de la excitación coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, una condición de resonancia es encontrada, las oscilaciones que se producen pueden ser muy peligrosas. Las fallas de estructuras como edificios, puentes o alas de un avión son posibles debido a la resonancia. Por lo que el cálculo de las frecuencias naturales es de gran importancia en el estudio de las vibraciones [16, 30].

Un sistema con un infinito número de grados de libertad es llamado sistema continuo o sistema de parámetros distribuidos. Las vibraciones de un sistema continuo son gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales. El desplazamiento de una partícula es una función continua del tiempo y la ubicación de la partícula cuando el sistema está en equilibrio. Las coordenadas espaciales son usadas para describir la distribución de inercia cuando el sistema está en equilibrio. Todos los sistemas, en realidad, son sistemas continuos. Un problema de vibraciones se puede formular para un sistema continuo pero un método de aproximación discreta como el método de elementos finitos se utiliza para resolver el problema [16].

Por otro lado, un sistema es lineal si sus movimientos están gobernados por ecuaciones diferenciales lineales. Un sistema es no lineal si sus movimientos son gobernados por una



Figura 1.2: Sistema masa-resorte-amortiguador.

ecuación diferencial no lineal [16]. En general un sistema de vibraciones consiste de un resorte (un medio de almacenamiento de energía potencial), una masa o inercia (un medio de almacenamiento de energía cinética) y un amortiguador (un medio para que la energía se pierda gradualmente) (figura 1.2). Un sistema de vibraciones sin amortiguamiento implica que la energía cinética se transfiere a la energía potencial y viceversa. En un sistema de vibraciones amortiguado, la energía es disipada en cada ciclo de la vibración.

#### 1.5.2. Respuesta en el tiempo y respuesta en frecuencia

Se abordarán los conceptos básicos de respuesta en el tiempo y en la frecuencia de sistemas mecánicos tipo masa-resorte-amortiguador.

#### 1.5.2.1. Respuesta en el tiempo

La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable. Por respuesta transitoria nos referimos a la que va del estado inicial al estado final. Por respuesta en estado estable, nos referimos a la manera en la cual se comporta la salida del sistema conforme *t* tiende a infinito [22]. En particular analizaremos dos sistemas: el sistema de masa-resorte y masa-resorte-amortiguador. En respuesta en el tiempo se distinguen dos casos: vibraciones libres y forzadas las cuales se refieren cuando el sistema es perturbado de su posición de equilibrio y cuando es forzado externamente. La respuesta en frecuencia se obtiene al aplicarle una señal senoidal en estado

estable. A continuación veremos la respuesta en el tiempo y la respuesta en frecuencia con más detalles basándonos en el sistema masa-resorte-amortiguador mostrado en la figura 1.3.



Figura 1.3: Desplazamiento lineal como coordenada generalizada [16].

**Vibraciones libres.** Se considera que la de disipación puede ser modelada como un amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguamiento *F* es proporcional a la velocidad  $\dot{x}$  o v y puede expresarse como

$$F = -c\dot{x} \tag{1.1}$$

donde c es la constante de amortiguamiento viscoso o coeficiente de amortiguamiento viscoso y el signo negativo indica que le fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección de la velocidad. Si x es medido desde la posición de equilibrio de la masa m, aplicando la ley de Newton de la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

0

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{1.2}$$

para resolver la ecuación (1.2), asumimos una solución en la forma

$$x(t) = Ce^{st} \tag{1.3}$$

donde C y s son constantes indeterminadas. Insertando esta función en la ecuación (1.2) nos

conduce a la ecuación característica

$$ms^2 + cs + k = 0 (1.4)$$

las raíces de las cuales son

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$
(1.5)

Estas raíces nos dan dos soluciones para la ecuación (1.2):

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t}$$
$$x_2(t) = C_2 e^{s_2 t}$$

Así la solución general de la ecuación (1.2) está dada por una combinación de dos soluciones  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ :

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

$$x(t) = C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t}$$
(1.6)

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias para ser determinadas dadas las condiciones iniciales del sistema.

La constante de amortiguamiento crítico y el radio de amortiguamiento. El amortiguamiento critico  $c_c$  es definido como el valor de constante de amortiguamiento c para que el radical en la ecuación (1.5) se convierta en cero:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

0

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \tag{1.7}$$

Para algunos sistemas amortiguados, el radio de amortiguamiento  $\zeta$  es definido como el radio de la constante de amortiguamiento para la constante de amortiguamiento crítico:

$$\zeta = c/c_c \tag{1.8}$$

Usando la ecuación (1.8) y la ecuación (1.7), nos queda

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c} \cdot \frac{c_c}{2m} = \zeta \omega_n \tag{1.9}$$

y por lo tanto

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n \tag{1.10}$$

Así la solución, de la ecuación (1.6), pueden ser escrita como

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}$$
(1.11)

La naturaleza de las raíces  $s_1$  y  $s_2$ , y por lo tanto el comportamiento de la solución, ecuación (1.11), depende de la magnitud de amortiguamiento. En esta sección asumiremos que  $\zeta \neq 0$  y consideraremos los siguientes tres casos:

*Caso uno*. Sistema sub-amortiguado ( $\zeta < 1$  o  $c < c_c$  o  $c/2m < \sqrt{k/m}$ ). Para las condiciones, ( $\zeta^2 - 1$ ) es negativo y las raíces  $s_1$  y  $s_2$  pueden ser expresados como

$$s_1 = \left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n$$
  
$$s_2 = \left(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n$$

y la solución, ecuación (1.11), puede ser escrita de diferente forma:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t}$$
$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} \right\}$$
$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ (C_1 + C_2)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + i(C_1 + C_2)\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} \right\}$$
$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ C_1'\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + C_2'\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} \right\}$$
$$= X e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi\right)$$
(1.12)

$$=X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t-\phi_0\right)$$
(1.13)

donde  $(C'_1, C'_2)$ ,  $(X, \phi)$ , y  $(X_0, \phi_0)$  son constantes arbitrarias para ser determinadas desde las condiciones iniciales.

Para las condiciones iniciales  $x(t = 0) = x_0$  y  $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ ,  $C'_1$  y  $C'_2$  pueden ser encontradas

$$C_1' = x_0 \tag{1.14}$$

у

$$C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \tag{1.15}$$

y por lo tanto la solución se convierte en

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left\{ x_0 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\}$$
(1.16)

Las constantes  $(X, \phi)$  y  $(X_0, \phi_0)$  pueden ser expresadas como

$$X = X_0 = \sqrt{(C_1')^2 + (C_2')^2}$$
(1.17)

$$\phi = \tan^{-1}(C_1'/C_2') \tag{1.18}$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}(-C_2'/C_1') \tag{1.19}$$

El movimiento descrito por la ecuación (1.16) es un movimiento amortiguado harmónico de frecuencia angular  $\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ , por lo que para el factor  $e^{-\zeta\omega_n t}$ , la amplitud decae exponencialmente con el tiempo, como se muestra en la figura 1.4, donde  $\tau_d$  es el periodo. La cantidad

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \,\omega_n \tag{1.20}$$

es llamada la *frecuencia de vibración amortiguada*. Esto puede ser visto como que la frecuencia de vibración amortiguada  $\omega_d$  es siempre menor que la frecuencia natural sub-amortiguada  $\omega_n$ . El decaimiento en la frecuencia de las vibraciones amortiguadas con incrementos de amortiguamiento, dado por la ecuación (1.20), es mostrado gráficamente en la figura 1.5. El caso de sub-amortiguamiento es muy importante en el estudio de vibraciones mecánicas, ya que es el único caso que conduce a un movimiento oscilatorio [26].

*Caso dos*. *Sistema críticamente amortiguado* ( $\zeta = 1$  o  $c = c_c$  o  $c/2m = \sqrt{k/m}$ ). En este caso las dos raíces  $s_1$  y  $s_2$  en la ecuación (1.10) son iguales

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n \tag{1.21}$$

Por que de las raíces repetidas, la solución de la ecuación (1.2) es dada por la ecuación (1.3)

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}$$
(1.22)









Figura 1.5: Variación de  $\omega_d$  con amortiguamiento [26].



Figura 1.6: Comparación de movimientos con diferentes tipo de amortiguamiento [26].

La aplicación de la condición inicial  $x(t = 0) = x_0$  y  $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$  para este caso da

$$C_1 = x_0 \tag{1.23}$$

$$C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0 \tag{1.24}$$

y la solución se convierte en

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t] e^{-\omega_n t}$$
(1.25)

Esto es, que el movimiento representado por la ecuación (1.25) es «*aperiodic*» (i.e. no es periódico). Desde  $e^{-\omega_n t} \rightarrow 0$  como  $t \rightarrow \infty$ , el movimiento eventualmente disminuirá a cero, como indica la figura 1.6.

*Caso tres*. Sistema sobre amortiguado ( $\zeta > 1$  o  $c > c_c$  o  $c/2m > \sqrt{k/m}$ ). Como  $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$ , la ecuación (1.10) muestra que las raíces  $s_1$  y  $s_2$  son reales, y distintas y son dadas por

$$s_1=(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n<0$$

$$s_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0$$

con  $s_1 \ll s_2$ . En este caso, la solución, de la ecuación (1.11), puede ser expresada como

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}$$
(1.26)

Para las condiciones iniciales  $x(t = 0) = x_0$  y  $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$ , las constantes  $C_1$  y  $C_2$ pueden ser obtenidas:

$$C_{1} = \frac{x_{0}\omega_{n}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^{2} - 1}\right) + \dot{x}_{0}}{2\omega_{n}\sqrt{\zeta^{2} - 1}}$$
(1.27)

$$C_{2} = \frac{-x_{0}\omega_{n}\left(\zeta - \sqrt{\zeta^{2} - 1}\right) - \dot{x}_{0}}{2\omega_{n}\sqrt{\zeta^{2} - 1}}$$
(1.28)

La ecuación (1.26) muestra que el movimiento no periódico es independiente de las condiciones iniciales impuestas en el sistema. Ya que las raíces  $s_1$  y  $s_2$  son negativas, el movimiento disminuye exponencialmente con el tiempo, como se muestra en la figura 1.6.

Hay que tener en cuenta los siguientes aspectos de estos sistemas:

 La naturaleza de las raíces s<sub>1</sub> y s<sub>2</sub> con variaciones del valor de amortiguamiento c o ζ puede mostrarse en un plano complejo. En la figura 1.7, el eje horizontal y vertical son el eje real e imaginario. El semicírculo representa el lugar de las raíces s<sub>1</sub> y s<sub>2</sub> para diferentes valores de ζ en el rango 0 < ζ < 1. Esta figura permite ver el efecto del parámetro ζ en el comportamiento del sistema. Para 0 < ζ < 1, las raíces s<sub>1</sub> y s<sub>2</sub> con conjugaciones complejas y se localizan simétricamente en eje real. Como el valor de ζ se aproxima a 1, ambas raíces se aproximan al punto −ω<sub>n</sub> en el eje real. Si ζ > 1, ambas raíces se encuentran en el eje real, una incrementa y la otra decrece. En el límite cuando ζ → ∞, s<sub>1</sub> → 0 y s<sub>2</sub> → -∞. El valor ζ = 1 puede ser visto para representar un estado de transición, debajo de ambas raíces son complejas y por encima ambas raíces son reales.



Figura 1.7: Ubicación de  $S_1$  de  $S_2$  [26].



Figura 1.8: Retrato de fase de un sistema amortiguado [26].

- 2. Un sistema críticamente amortiguado tendrá amortiguamiento menor requerido para el movimiento no periódico; por lo tanto la masa regresa a la posición de reposo en un tiempo menor sin desbordamiento. La propiedad del amortiguamiento crítico en muchas aplicaciones prácticas.
- 3. La respuesta de amortiguamiento libre de un sistema de un grado de libertad puede ser representado en un plano de fases o espacio de estado como se indica en la figura 1.8.

#### 1.5.2.2. Respuesta en frecuencia

Con el término *respuesta en frecuencia*, nos referimos a la respuesta de un sistema en estado estable a una entrada senoidal. En los métodos de la respuesta en frecuencia, la

frecuencia de la señal de entrada se varía en cierto rango, para estudiar la respuesta resultante.

Considere un sistema de primer orden que se describe por la siguiente ecuación diferencial:

$$a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = b_0y \tag{1.29}$$

donde  $a_0$ ,  $a_1$  y  $b_0$  son constantes, y y es la entrada y x la salida.

La ecuación (1.29) se puede expresar, en notación compleja, como la ecuación fasorial<sup>2</sup>:

$$j\omega a_1 X + a_0 X = b_0 Y$$

donde X y Y indican que los datos se refieren a fasores.

Podemos decir que la ecuación diferencial, la cual estaba en el dominio del tiempo, se transformó a una ecuación en el *dominio de la frecuencia*. Esta también se puede expresar como:

$$(j\omega a_1 + a_0)X = b_0Y$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{b_0}{j\omega a_1 + a_0}$$
(1.30)

La ecuación (1.30) puede ser expresada en el dominio de s, sustituyendo s por  $j\omega$ .

$$G(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

Con esto nos da como resultado la definición de *función de respuesta en frecuencia* o *función de transferencia en frecuencia*,  $G(j\omega)$ , del estado estacionario, como:

$$G(j\omega) = \frac{\text{fasor de salida}}{\text{fasor de entrada}}$$

Para ilustrar lo anterior se determinará la función de respuesta en frecuencia de un

 $<sup>^{2}</sup>$ Un fasor es una representación gráfica de un número complejo que se utiliza para representar una oscilación.

sistema cuya función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

La función de respuesta en frecuencia se obtiene sustituyendo s por  $j\omega$ . Por lo tanto:

$$G(s) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

La función de transferencia de un sistema de primer orden es:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

donde  $\tau$  es la constante de tiempo del sistema.

La función de respuesta en frecuencia,  $G(j\omega)$  se obtiene sustituyendo *s* por  $j\omega$ . Entonces:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \tag{1.31}$$

Para expresar la ecuación (1.31) en forma más adecuada, el numerador y el denominador se multiplica por  $(1 - j\omega\tau)$ :

$$G(j\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+j\omega\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-j\omega\tau}{1-j\omega\tau} \end{pmatrix}$$
$$G(j\omega) = \frac{1-j\omega\tau}{1-j^2\omega^2\tau^2}$$

pero  $j^2 = -1$ , por lo tanto

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} - j\frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

Esta expresión es de la forma x + jy y, puesto que  $G(j\omega)$  es el fasor de salida dividido entre el fasor de entrada, la magnitud del fasor de salida es proporcional a la del fasor de entrada por un factor igual a  $|G(j\omega)|$ , el cual es:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ |G(j\omega)| &= \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}\right)^2} \\ |G(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \end{aligned}$$

 $|G(j\omega)|$  indica que tanto es mayor o menor la amplitud de la salida respecto de la amplitud de entrada. En general se le denomina magnitud o ganancia. La diferencia de fase,  $\phi$ , entre el fasor de salida y el fasor de entrada es:

$$\tan\phi = \frac{y}{x} = -\omega\tau$$

El signo negativo indica que el fasor de salida procede al fasor de entrada por ese ángulo.

La respuesta en frecuencia de un sistema es el conjunto de valores de la magnitud,  $|G(j\omega)|$ , y el ángulo de fase  $\phi$  que ocurre cuando una señal senoidal de entrada varía en un intervalo de frecuencia [22].

#### 1.5.3. Amortiguamiento equivalente

La idea de aprovechar el decaimiento de una vibración libre de un sistema viscosamente amortiguado se remonte a Helmholtz, quien lo utilizó para determinar información de frecuencia en tonos de música en 1860. Rayleigh introdujo el término *decremento logarítmico* aplicando esto para la estimación del factor de amortiguamiento. La propiedad de decaimiento lineal de sistemas con fricción de Coulomb fue encontrado en los trabajos de Lorenz en 1924. El cálculo de la disminución de amplitud para ciclos consecutivos da una estimación del efecto de fricción seca y viscosa.

Sin embargo, muchas máquinas y estructuras tienen ambos fuentes de amortiguamien-

to. Jacobsen y Ayre obtuvieron un esquema aproximado para estimar ambas cantidades de decrementos de vibraciones libres señalando que la fricción viscosa domina en las respuestas de amplitud grande, y que la fricción de Coulomb denomina en las oscilaciones de amplitud pequeña. Una esquema de estimación exacta fue presentado por Watari en 1969. Esto parece tener permanecido más allá de la comunidad de habla japonesa hasta que la idea fue recientemente re-obtenidos [15].

Es evidente que los valores positivos y negativos máximos de x en la ecuación (1.16) cuya ecuación podemos reescribirla como

$$x = e^{-\zeta \omega_n t} \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}\right)^2} \cos\left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi\right)$$

$$\tan \phi = \frac{\dot{x} + \zeta \omega_n x_0}{x_0 \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$
(1.32)

no ocurren precisamente cuando la función coseno es igual ±1. Sin embargo, ocurrirá en el preciso intervalo de tiempo correspondiendo a un ciclo del término trigonométrico o a  $2\pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  segundos. Por lo tanto, si medimos los valores ±1 sucesivos del desplazamiento localizado precisamente en un ciclo, la ración puede ser

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-\zeta \omega_n T} = e^{-2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Pero si obtenemos el periodo natural del movimiento de un experimento, nosotros necesitamos tener cuidado al excluir el intervalo de tiempo entre el inicio y el primer cruce de la posición del equilibrio estático puesto que a partir de ese tiempo, la respuesta en el tiempo es igual a  $(\pi/2 + \phi)/p\sqrt{1-\zeta^2}$  segundos y no a un cuarto del periodo. Para valores pequeños de la fricción viscosa, tenemos

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \approx e^{-2\pi\zeta}$$
 o  $\zeta \approx \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}$ 

La cantidad  $\ln(x_n/x_{n+1}) = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$  es a menudo llamado el *decremento logarítmi*-

co.
# Capítulo 2

# Control de vibraciones en sistemas mecánicos

El estudio de vibraciones ha sido de gran importancia, ya que las vibraciones afectan el funcionamiento de equipos mecánicos y estructuras civiles, por lo que los estudios realizados para el control de las vibraciones han servido para proteger las estructuras civiles y equipos mecánicos. Se han propuesto distintos tipos de dispositivos para el control de vibraciones, a los cuales se les aplican diferentes técnicas de control.

En la literatura se hace referencia como pasivo, activo y semi-activo a las tres clasificaciones comúnmente dadas a los sistemas de control de vibraciones [10]. Un sistema de control de vibraciones puede ser pasivo, activo o semi-activo dependiendo de la cantidad de energía externa necesaria para que el sistema de control realice su función [10].

# 2.1. Control pasivo

El *control pasivo* emplea dispositivos pasivos como los son el resorte y el amortiguador los cuales se caracterizan por no recibir directamente aplicación alguna de energía externa. Las ventajas del control pasivo es el bajo costo de los componentes y que no requieren uso de energía, la desventaja que tienen los dispositivos pasivos es que solo funcionan bajo una sola frecuencia, esto es que no es posible cambiar la rigidez de un resorte ni el coeficiente de amortiguamiento del amortiguador.

## 2.2. Control activo

El *control activo* se caracteriza por almacenar, disipar e introducir energía al sistema por medio de actuadores, cuyo accionar es regulado a través de sensores y controladores. Para ejercer la fuerza de control se pueden utilizar diferentes clases de actuadores: electrohidráulicos, neumáticos y electromagnéticos. Los sensores se emplean para registrar el comportamiento del sistema ante las perturbaciones y así definir la respuesta de acuerdo al objetivo de control. La ventaja de esta técnica de control es el que debido a que los componentes varían sus propiedades el control de las vibraciones se alcanza con mayor rapidez, y sus desventajas son el alto costo de los sensores y actuadores utilizados para este tipo de control y el gasto de energía para el funcionamiento de estos.

# 2.3. Control semi-activo

El *control semi-activo* se caracteriza por tener componentes mecánicos cuyo coeficiente de amortiguamiento o rigidez es modificado. El control pasivo consiste en que los componentes mantienen sus características mecánicas fijas y nunca cambian, en contra posición del control pasivo, el control semi-activo de vibraciones ofrece una mayor versatilidad, este tipo de control consiste en variar mediante alguna ley de control las características mecánicas como rigidez, amortiguamiento, etc. de dispositivos mecánicos, en las últimas décadas este tipo de control ha sido estudiado ampliamente. Las ventajas que presenta ante el control pasivo y activo, es que a diferencia del pasivo, el control semi-activo puede cambiar la frecuencia natural cambiando la rigidez, el amortiguamiento o la masa. Y las ventajas que tiene el control semi-activo sobre el control activo es que consume menos energía.

En el presente trabajo diseñaremos un dispositivo semi-activo que agrega una masa



virtual al sistema para ello primero veremos su diseño como elemento pasivo.

# 2.4. El inerter pasivo

En este capítulo se introducirá el dispositivo mecánico pasivo llamado inerter para entender su origen se emplea una analogía entre componentes mecánicos y eléctricos. El hecho de que la masa este junto con el resorte y el amortiguador es insuficiente para realizar la totalidad de las impedancias mecánicas pasivas, se puede ver utilizando la analogía de fuerzacorriente entre un circuito mecánico y un circuito eléctrico. Los elementos mecánicos como el resorte y el amortiguador tienen dos terminales, mientras que las terminales de la masa se encuentran en el centro de la masa y en un punto fijo de un sistema inercial. La masa es por lo tanto semejante a poner a tierra un capacitor o dicho de otra forma poner en corto un circuito eléctrico. Debido a que la masa produce inercia a un sistema, pero no es un dispositivo mecánico se implementó el dispositivo mecánico llamado Inerter que al igual que el amortiguador y el resorte, se puede hacer una analogía con respecto a los dispositivos eléctricos del cuadro 2.1. La fuerza en un resorte en términos de velocidad [8] está dada por

$$\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$$

para un amortiguador [8]

$$F = c(v_2 - v_1)$$

y para un inerter [8] es

$$F = b \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$$

Un inerter es un dispositivo mecánico con dos terminales cuya fuerza aplicada es proporcional a la aceleración relativa entre sus terminales, la constante de proporcionalidad es llamada inertancia, el inerter proporciona una masa simulada al sistema mecánico *b* y  $v_1,v_2$ son las velocidades entre sus terminales

$$F = b(v_2 - v_1) \tag{2.1}$$

la energía almacenada en el inerter es igual a

$$\frac{1}{2}b(v_2 - v_1)^2 \tag{2.2}$$

En un sistema pasivo de redes, se puede conectar en serie, paralelo o en cualquier configuración los dispositivos eléctrico y al final de sus terminales se obtendría una respuesta dependiendo del valor de cada dispositivo, como por ejemplo en la figura 2.1 se muestra configuraciones sencillas, en cambio sí se colocara la mismas configuraciones pero con los dispositivos mecánicos como se muestra en la figura 2.2 al aplicarles una fuerza a las terminales A y B el sistema no haría nada, ya que la masa no tiene alguno movimiento como los tiene el resorte y el amortiguador.



Figura 2.1: Topologías de componentes eléctricos [21].



Figura 2.2: Topologías con dispositivos mecánicos [21].

Existen dos tipos de diseños del inerter que se pueden desarrollar físicamente uno consiste tomar un émbolo por el cual se conduce una cremallera mecánica (rack) que produce el movimiento de una rueda de inercia mediante engranes y piñones mecánicos. El otro diseño consiste en tomar una tuerca de bola y un tonillo de bola el cual al desplazarse hará girar una rueda de inercia colocada en uno de los extremos [23].

#### 2.4.1. Diseño de un inerter

Actualmente existen dos tipos de diseño de un inerter uno basado en un tornillo de bola y el otro diseño basado en una configuración de engranes.

#### 2.4.1.1. Diseño tipo tornillo de bola

El diseño de un inerter tipo tornillo de bola (en la figura 2.3 se muestra su esquema) consiste en el uso de un tornillo de bola (ver figura 2.4) y rosca de bola (ver figura 2.5a), el funcionamiento de este diseño consiste en hacer pasar el tornillo de bola a través de la tuerca de bola que en su interior contiene balines que facilitan su desplazamiento al empujar el eje (ver figura 2.5b), en los extremos del eje tiene baleros para disminuir la fricción y facilitar aún más el desplazamiento, en la tuerca de bola se le coloca un balero y/o un peso adicional

para que cuando el eje se deslice esta masa adicional con la inercia siga girando y se oponga al movimiento cuando el eje se deslice para el otro lado, y así se genere una masa simulada. Este dispositivo utilizado en el presente trabajo se muestra en la figura 2.6.



Figura 2.3: Esquema de un inerter tipo tornillo de bola [21].



Figura 2.4: Tornillo de bola [21].



Figura 2.5: Tuerca de bola e interior de una tuerca de bola [21].



Figura 2.6: Inerter tipo tornillo de bola (ball crew) [21].

#### 2.4.1.2. Diseño con engranes

Otro de los diseños que se usan para agregar inertancia al sistema es el uso de engranes (en la figura 2.7 se muestra su esquema de realización), para elaborar este tipo de inerter se requiere una cremallera mecánica (rack), una rueda de inercia (balero) y un juego de engranes, para este diseño se tiene que tomar en cuenta la configuración de los engranes ya que la cantidad de vueltas y esfuerzo que se requiere para mover la rueda de inercia depende del tamaño de los engranes y de la posición en la que esté ya se en serie o paralelo, en serie para aumentar la fuerza y en paralelo para aumentar la cantidad de vueltas. En la figura 2.8 se muestra un modelo de este tipo de inerter y en la figura 2.9 se muestra el diseño de forma física utilizado para experimentos realizados en el presente trabajo.



Figura 2.7: Esquema de un inerter de engranes [21].



Figura 2.8: Modelo de un inerter con engranes [21].



Figura 2.9: Inerter de engranes [21].



Figura 2.10: Sistema de un grado de libertad con un inerter [21].

## 2.4.2. Influencia del inerter en las frecuencias naturales

Es bien sabido que las frecuencias naturales son propiedades inherentes de un sistema de vibración, donde la resonancia puede ocurrir cuando la frecuencia de la excitación es igual a la frecuencia natural. Los métodos tradicionales para reducir las frecuencias naturales de un sistema elástico son: el disminuir la rigidez elástica o incrementar la masa del sistema de vibraciones.

Un sistema de un grado de libertad con un inerter [7] es mostrado en la figura 2.10. La ecuación de movimiento para vibraciones libres de estos sistemas es

$$(m+b)\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.3}$$

La transformación de la ecuación (2.3) en su forma estándar para el análisis de rendimiento de las vibraciones

$$\ddot{x} + \omega_n^2 = 0$$

donde  $\omega_n = \sqrt{k/(m+b)}$  es llamado la frecuencia natural del sistema no amortiguado.

En conclusión, el inerter disminuye la frecuencia natural del sistema, por ello podemos consideran que el inerter agrega una masa virtual al sistema.



Figura 2.11: Módulo de la compañía ECP [21].

### 2.4.3. Control pasivo de vibraciones con un inerter

En esta sección se mostrará la plataforma experimental donde se realizó el control pasivo utilizando tres configuraciones distintas del sistema como lo son masa-resorte, masa-resorte-amortiguador y masa-resorte-inerter. También se mostrarán los resultados obtenidos de los experimentos realizados, por medio de la técnica del decremento logarítmico mediremos el rendimiento del inerter. El inerter que se utilizó para los experimentos mostrados fue un inerter de engranes el cual se muestra en la figura 2.9.

#### 2.4.3.1. Plataforma de experimentación

Los experimentos se realizarán en el módulo de la compañía  $ECP^1$  de un masa-resorteamortiguador de tres grados de libertad como se muestra en la figura 2.11, el cual consta de un actuador (motor DC), las posiciones son medidas por un encoder ubicado a un costado de una base móvil en la cual se colocan masas adicionales, la base móvil se encuentra conectada al actuador, al resorte y a un amortiguador de aire ajustable.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>www.ecpsystems.com



Figura 2.12: Tablero de conexiones CLP1103 [21].

#### 2.4.3.2. Adquisición de datos

El sistema de dSPACE es un sistema de control digital basado en los procesadores MPC8240 y TMS320F240, tiene una interfaz con Matlab/Simulink, el diagrama de bloques de Simulink es convertido en código C, de la computadora se descarga directamente al DPS DS1103 (Digital Signal Processor por sus siglas en ingles) a través de un cable de fibra óptica y, el DS1103 tiene un tablero de conexiones (CLP1103)(ver figura 2.12), en este tablero se conecta el motor, el encoder y la fuente de energía (ver figura 2.13), las señales de estos son mostradas en la ventana de dSPACE del monitor de la computadora.

#### 2.4.3.3. Resultados experimentales

A continuación se presentarán los experimentos realizados los cuales consistieron en obtener la respuesta en el tiempo del sistema en tres distintas configuraciones mencionadas al inicio de la sección, antes de realizar los experimentos se realizó la identificación de algunos parámetros como la masa del sistema, así como las constantes de los resortes utilizados.



Figura 2.13: Fuente de energía, motor DC y encoder [21].

#### Medición de parámetros: resortes y masa

En las siguientes gráficas se muestra el cálculo de la constante del resorte de los resortes que se utilizaron para realizar el experimento:

En la figura 2.14 se muestra la pendiente obtenida de los valores experimentales para obtener el valor de la constante del resorte.



Figura 2.14: Estimación de la constante del resorte A [21].

	Resorte	Constante del resorte	
	A	184	
	В	746.07	
a)			
Masa			Peso
Masa agregada al sistema			450 gr
Masa total del sistema (considerando la base)			1 kg
<u>b)</u>			

Cuadro 2.2: Parámetros de a) los resortes utilizados y b) la masa del sistema.

En la figura 2.15 se muestra la pendiente obtenida de los valores experimentales para obtener el valor de la constante del resorte.



Figura 2.15: Estimación de la constante del resorte B [21].

La masa que se utilizó en el sistema fue de 450 gramos agregando la masa de la base resultó total de 1 kg., en el cuadro 2.2 se muestran los valores de los parámetros obtenidos.

#### Respuesta en el tiempo con oscilaciones libres

En las siguientes gráficas se muestra los resultados obtenidos de los experimentos de la respuesta en el tiempo realizados en el laboratorio, en un sistema de un grado de libertad.

En la figura 2.16 se muestra las gráficas de la respuesta en el tiempo de un sistema masaresorte para una constante del resorte diferente, en la figura 2.16a se muestra la respuesta en el tiempo del sistema con una constante del resorte de 746 y en la figura 2.16b el resorte tiene una constante de 184.



Figura 2.16: Respuesta en el tiempo de un sistema masa-resorte (MR) con diferentes resortes, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].

En la figura 2.17 se muestra la gráfica de la respuesta en el tiempo de un sistema masaresorte-amortiguador, en la figura 2.17a se muestra la respuesta en el tiempo del sistema con una constante del resorte de 746 y en la figura 2.17b el resorte tiene una constante de 184.



Figura 2.17: Respuesta en el tiempo de un sistema masa-resorte-amortiguador (MRA) con diferentes resortes, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].

En la figura 2.18 se muestra la gráfica de la respuesta en el tiempo de un sistema masaresorte-inerter, en la figura 2.18a se muestra la respuesta en el tiempo del sistema con una constante del resorte de 746 y en la figura 2.18b el resorte tiene una constante de 184.



Figura 2.18: Respuesta en el tiempo de un sistema masa-resorte-inerter (MRI) con diferentes resortes, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].

#### Identificación del amortiguamiento equivalente

De acuerdo a la subsección 1.4.3. calcularemos el coeficiente de amortiguamiento viscoso equivalente. De las gráficas obtenidas de los sistemas de los sistemas analizados en respuesta en el tiempo se tomarán los valores de picos figuras 2.19a,2.20a y 2.21a, el valor de la constante del resorte es 746, mientras que en las figuras 2.19b, 2.20b y 2.21b el valor es de 184.



Figura 2.19: Valores de los picos del sistema masa-resorte con diferentes resortes, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].



Figura 2.20: Valores pico del sistema masa-resorte-amortiguador (MRA) con diferentes resortes, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].



Figura 2.21: Valores picos del sistema masa-resorte-inerter (MRI) con diferentes resortes, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].

En el cuadro 2.3 se muestran el coeficiente de amortiguamiento y la constante de amortiguamiento del sistema masa-resorte de la figura 2.19.

Cuadro 2.3: Coeficientes	constantes de amortiguamiento	en el sistema MR.
(	0	

	Coeficiente de	Constante de
	amortiguamiento $\zeta$	amortiguamiento c
Caso 1. $K = 184$	.022	.59
Caso 2. $K = 746$	.064	1.7362

En el cuadro 2.4.3.3 se muestran el coeficiente de amortiguamiento y la constante de amortiguamiento del sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 2.20.

	Coeficiente de	Constante de
	amortiguamiento $\zeta$	amortiguamiento c
Caso 1. $K = 184$	.233	12.727
Caso 2 $K = 746$	.4121	11.1799

Cuadro 2.4: Coeficientes y constantes de amortiguamiento del sistema MRA.

En el cuadro 2.5 se muestran el coeficiente de amortiguamiento y la constante de amortiguamiento del sistema masa-resorte-amortiguador de la figura 2.21.

Cuadro 2.5: Coeficientes y constantes de amortiguamiento de un sistema MRI.

	Coeficiente de	Constante de
	amortiguamiento $\zeta$	amortiguamiento c
Caso 1 $K = 184$	.108	5.899
Caso 2 $K = 746$	.113	6.1727

#### 2.4.3.4. Validación de los experimentos

A continuación se mostrará las gráficas obtenidas de los experimentos comparándolas con una simulación numérica utilizando los valores de los parámetros.

En la figura 2.22 se muestra la respuesta experimental mostrada en las figuras 2.19a y 2.19b vs. las simulación del sistema masa-resorte.



Figura 2.22: Respuestas experimentales vs. simulación del sistema MR, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].

En la figura 2.23 se muestra la respuesta experimental mostrada en las figuras 2.20a y 2.20b vs. la simulación del sistema masa-resorte.



Figura 2.23: Respuesta experimental vs. simulación del sistema MRA, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].

En la figura 2.24 se muestra la respuesta experimental mostrada en las figuras 2.21a y 2.21b vs. la simulación del sistema masa-resorte.



Figura 2.24: Respuesta experimental vs. simulación del sistema MRI, a) constante del resorte de 746, b) constante del resorte de 184 [21].

Como se puede observar las gráficas de los experimentos realizados se muestra que al implementar un inerter al sistema ayuda a disminuir las oscilaciones del sistema, sin embargo la fricción debido al roce entre el rack y el engrane, así como la fricción entre el eje y la rueda volante no fueron modelados, pero si fue representada en el amortiguamiento del sistema. Debido a que el inerter en forma pasiva solo funciona bajo una sola frecuencia es limitado su uso para en caso de que el sistema cambie ya que se necesitaría cambiar de inerter a uno que se adecue, por lo que es necesario diseñar un inerter que sea capaz de variar su constante de proporcionalidad.

# Capítulo 3

# **Inerter semi-activo**

Debido a que el inerter de forma pasiva solo funciona bajo una sola frecuencia natural es limitado su funcionamiento, para mejorar esto se requiere que inerter que varié su masa, por lo que en el presente trabajo se propone un inerter semi-activo. En este capítulo se mostrará el inerter de masa variable propuesto en el presente trabajo así como los cálculos y simulaciones realizadas.

## **3.1.** Estado del arte

El inerter pasivo funciona bajo una frecuencia natural, para cambiar esta frecuencia es necesario variar la rueda volante, por ende el inerter cambiara su inertancia, por lo que el desarrollar un inerter semi-activo mejoraría el rendimiento ya que funcionaria bajo distintas frecuencias, por lo que la actualidad se han desarrollado distintos tipos de ineters que varían sus propiedades, los cuales son el «rueda volante variable de inercia variable» el cual consiste en que la rueda volante consta con una cámara interna con un pistón la cual permite que esta cámara se llene de un fluido el cual hará varia su momento de inercia (figura 3.1) [11].

Otro diseño de inercia variable sea desarrollado con una caja de engranes planetaria magnética, el cual para variar la inercia depende de la variación del campo magnético de los imanes de la caja de engranes (figura 3.2) [31].



Figura 3.1: Rueda volante variable de inercia variable [11].



Figura 3.2: Esquema de una caja de engranes planetaria [31].



Figura 3.3: Masa de dos terminales con momento de inercia variable [34].



Figura 3.4: Rueda volante con momento de inercia variable [34].

Otro diseño llamado masa de dos terminales con momento de inercia variable es propuesto en [34]. Este diseño consiste en un cilindro hidráulico el cual sus extremos están conectados a un motor hidráulico y este a su vez está conectado a una rueda volante (figura 3.3), la rueda volante cambia su configuración geométrica (figura 3.4).

Otro diseño el cual consiste en una rueda volante con unas masas que cambian de posición por medio de un actuador lineal a diferencia de los anteriores mencionados la rueda volante se conecta directamente al sistema y no por medio de cilindros (figura 3.5), ni tampoco se le agrega algún tipo de componente para cambiar su propiedad [36].

# 3.2. Diseño del inerter semi-activo

El inerter semi-activo que diseñaremos en el presente trabajo será de tipo de engranes, durante la presente concepción de este trabajo se publicó un trabajo relacionado con nuestro





b)

Figura 3.5: a) modelo del inerter en 3D y b) prototipo del inerter [36].



Figura 3.6: Rueda volante sin masa adicionales.

diseño en [36]. Como es sabido el momento de inercia de un cuerpo depende de su geometría y su masa. En el presente trabajo se diseña un volante de inercia para un inerter tipo tornillo de bola. En este caso se emplea como ejemplo una figura compuesta como se muestra en la figura 3.6, los prismas rectangulares son las masas adicionales las cuales se desplazaran para cambiar la inercia de la figura.

El siguiente análisis es para determinar el momento de inercia de la rueda volante para posterior mente calcular el valor de la inertancia para diferentes casos. Primeramente se calculara el valor del volumen de las figuras que componen la geometría del volante de inercia, como lo es el disco y los prismas rectangulares por los cuales se desplazaran las masas adicionales.

El volumen del disco  $V_1$  es

$$V_1 = h\pi r^2$$

donde *h* es la altura y *r* es el radio. Si h = 20mm y r = 100mm entonces

$$V_1 = (20) \pi (100)^2 = 628,318.5307 mm^3$$

El volumen de los prismas rectangulares  $V_2$  es

$$V_2 = abc$$

donde *a* es el largo, *b* ancho y *c* es la altura. Si a = 70mm, b = 20mm y c = 20mm entonces

$$V_2 = (75)(20)(20) = 28,000 mm^3$$

El material que se propuso para el diseño del disco fue PLA (poli-ácido láctico) el cual tiene una densidad de  $\rho = 1250 kg/m^3$ . La masa está dada por

$$m = \rho V$$

donde V es el volumen y  $\rho$  es la densidad del material. La masa del disco  $(m_1)$  y la masa de los primas rectangulares  $(m_2)$  son

$$m_1 = 785.4gr$$
$$m_2 = 35gr$$

la masa total del disco  $(m_t)$  es

$$m_t = 645.4gr$$

El momento de inercia del disco  $(I_d)$  es

$$I_d = \frac{1}{2}m_1r^2$$

donde *r* es el radio del disco y  $m_1$  es la masa del disco. Si r = .1m y  $m_1 = .7854kg$  el momento de inercia del disco es

$$I_d = .003927$$

El momento de inercia del prisma rectangular  $(I_r)$  es

$$I_r = \frac{1}{12}m_2(a^2 + b^2)$$

donde *a* es el largo del prima rectangular, *b* es el ancho del prima rectangular y  $m_2$  es la masa del prisma rectangular. Si a = .07m, b = .02m y  $m_2 = .035kg$  el momento de inercia del prima rectangular es

$$I_r = .00012133$$

El momento de inercia total del disco  $(I_s)$  menos los cuatro prismas rectangulares es

$$I_s = I_d - 4I_r$$

es decir,

#### $I_s = .00344168$

Para variar el momento de inercia se utilizaron unas masas adicionales puestas en distintas posiciones, para estas masas se realizaron los siguientes cálculos. El volumen de los prismas rectangulares  $V_3$  es

$$V_3 = abc$$

donde *a* es el largo, *b* es el ancho y *c* es el espesor. Si a = 20mm, b = 20mm y c = 20mm entonces

$$V_3 = (10) (10) (20) = 8,000 mm^3$$

La masa del prisma rectangular  $(m_3)$  es

$$m_3 = .0624 gr$$

en este caso el material que se propuso para las masas adicionales fue acero dulce el cual tiene una densidad de  $\rho = 7800 kg/m^3$ .

El momento de inercia de las masas  $(I_m)$  es

$$I_m = \frac{1}{12}m_2(a^2 + b^2)$$

es decir

#### $I_m = .00000416$

Al modificar la configuración geometría de la rueda volante se obtuvieron los siguientes resultados con las configuraciones a continuación mostradas, para los cálculos del momento de inercia se utilizó la siguiente ecuación:

$$I_o = I_m + m_3 d^2 (3.1)$$

donde *d* es la distancia el centro de masa de la masa con respecto al origen del eje en el cual se hará girar.

En el cuadro 3.1 se muestra los valores obtenidos de los momentos de inercia y valores de inertancia para distintas configuraciones geométricas (figura 3.7, figura 3.8 y figura 3.9), con los valores de inercia obtenidos se calcula la constante de proporcionalidad, es decir, la inertancia del inerter con la ecuación propuesta en [33]

$$b = I \left(\frac{2\pi}{p}\right)^2 \tag{3.2}$$

donde b es la inertancia, I es el momento de inercia y p es el «pitch» del tornillo de bola.

A continuación se hará un análisis implementando el inerter en un sistema masa-resorte. El sistema masa-resorte-inerter es Cuadro 3.1: Valores de momentos de inercia e inertancia para distintas configuraciones geométricas.

Distancia de las masas adicionales	Momento de inercia	Inertancia
30 <i>mm</i>	.0038	3032.7
55 <i>mm</i>	.0042	3394.6
80 <i>mm</i>	.0051	4073.3



Figura 3.7: Rueda volante con las masas adicionales con una distancia de d = 30mm.



Figura 3.8: Rueda volante con las masas adicionales con una distancia de d = 55mm.



Figura 3.9: Rueda volante con las masas adicionales con una distancia de d = 80mm.



Figura 3.10: Diseño del volante rodante del inerter semi-activo propuesto.

$$\left(m_q + b_p\right)\ddot{x} + kx = u$$

donde k es la constante del resorte con un valor de 1000N/m, u es la entrada,  $m_q$  es el valor de la masa del sistema, p = 1, 2, 3, 4, b es el valor de la inertancia, x es la posición y  $\ddot{x}$  es la aceleración.

Para obtener valores de inertancia con mayor variación se propone una configuración diferente. Se propone una configuración en la cual las masas adicionales pueden colocarse fuera del radio de la rueda volante (figura 3.10).

Para este diseño se calculó el valor de la inertancia para cuando las masas se encuentran



Figura 3.11: Respuesta de un sistema masa-resorte-inerter ante una entrada impulso para el valor de inertancia mínimo y máximo.

en su distancia mínima de d = .030m y máxima de d = .080m.

Para un momento de inercia  $I_{min}$  el valor de inertancia es  $b_{min} = 2967.2764 kg/m^2$ .

Para un momento de inercia  $I_{max}$  el valor de inertancia es  $b_{max} = 7014.8781 kg/m^2$ .

En la figura 3.11 se muestra la gráfica respuesta de un sistema masa-resorte-inerter ante una entrada impulso.

# **3.3.** Ley de control

En esta sección propondremos una ley de control que será utilizada para variar la inertancia, en dicha ley de control se tomará la inertancia mínima y máxima que puede alcanzar el inerter semi-activo de acuerdo a su configuración geométrica. El sistema masa resorte con un inerter de inertancia variable (figura 3.12) se expresa de la siguiente manera

$$(b(\hat{t}) + m)\ddot{x} + kx = 0 \tag{3.3}$$



Figura 3.12: Sistema masa-resorte-inerter.

donde  $b(\hat{t})$  es la inertancia del sistema variante en el tiempo,

la ley de control es la siguiente, propuesta en [14],

$$b\left(\hat{t}\right) = \frac{b_M + b_m}{2} + sign\left(x\dot{x}\right)\frac{b_M - b_m}{2}$$

donde  $b_M$  es la inertancia máxima del inerter,  $b_m$  es la inertancia mínima del inerter, la ecuación (3.3) se escribe como

$$\left(\frac{b(\hat{t})}{m}+1\right)\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\frac{k}{m}=\omega_n^2$$
(3.4)

donde  $\omega_n^2$  es la frecuencia natural, ahora haremos un re-escalamiento del tiempo usando la siguiente transformación

$$\hat{t} = \frac{1}{\omega_n} \tau \Rightarrow \ddot{x} = \omega_n^2 x^{"}(\tau)$$

donde las comillas ( ") ahora representan derivada con respecto a  $\tau$ . Sustituimos el valor de  $\ddot{x}$  en la ecuación (3.4)

$$\left(\frac{b(\hat{t})}{m}+1\right)\omega_n^2 x'' + \omega_n^2 x = 0$$
(3.5)
se divide la ecuación (3.5) de ambos lados entre  $\omega_n^2$ 

$$\left(\frac{b(\hat{t})}{m} + 1\right)x'' + x = 0 \tag{3.6}$$

Sustituyendo la ley de control  $b(\hat{t})$  en la ecuación (3.6) tenemos

$$\left(\frac{b_M + bm}{2m} + sign(x\dot{x})\frac{b_M - bm}{2m} + 1\right)x''(\tau) + x(\tau) = 0$$
(3.7)

la ecuación (3.7) se multiplica por m y nos queda

$$\left(\frac{b_M + bm}{2} + sign\left(x\dot{x}\right)\frac{b_M - bm}{2} + m\right)x''(\tau) + mx(\tau) = 0$$

consideremos ahora la siguiente frecuencia natural promedio definida como

$$\omega_o^2 = \frac{b_M + bm}{2}$$

se escala el tiempo para eliminar  $\omega_o^2$ , mediante la siguiente transformación

$$\tau = \frac{1}{\omega_o^2} \tilde{t} \Rightarrow \frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega_o^2} \frac{d^2 x(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2}$$

sustituimos los valores de obtenidos al re-escalar el tiempo y estos nos queda como

$$\left(1 + sign(x\dot{x})\frac{b_M - b_m}{b_M + b_m} + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)\frac{d^2x(\tilde{t})}{d\tilde{t}^2} + mx(\tilde{t}) = 0$$
(3.8)

donde definimos

$$arepsilon=rac{b_M-b_m}{b_M+b_m}$$

el valor de  $\varepsilon$  es propuesto por [20], se sustituye el valor de  $\varepsilon$  en la ecuación (3.8) y esto nos queda como

$$\left(1 + \varepsilon sign\left(x\dot{x}\right) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)\ddot{x} + mx = 0$$
(3.9)

definamos

$$M(t) = \left(1 + \varepsilon sign(x\dot{x}) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)$$
(3.10)

Se realiza un re-escalamiento en el tiempo no lineal

$$t = \int_0^{\tilde{t}} \frac{1}{M(s)} ds$$

se tiene que

$$\frac{dx}{d\tilde{t}} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}$$
(3.11)

por lo que

$$\frac{d^2x}{d\tilde{t}^2} = \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{dx}{d\tilde{t}}\right)$$
(3.12)

se sustituye el valor de la ecuación (3.11) en la ecuación (3.12) y esto nos queda como

$$\frac{d^2x}{d\tilde{t}^2} = \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)\frac{dt}{dt}$$

se agrega  $\frac{dt}{dt}$  y esto queda como

$$\frac{d^2x}{d\tilde{t}^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tilde{t}}\right) \frac{dt}{d\tilde{t}} \Rightarrow \frac{d^2x}{d\tilde{t}^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \left(\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)^2$$
(3.13)

Ahora tenemos que

$$t\left(\tilde{t}\right) = \int_{0}^{\tilde{t}} \frac{1}{M(s)} ds \tag{3.14}$$

derivamos la ecuación (3.14)

$$\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{1}{M(t)}$$

se sustituyen los valores de las diferenciales en la ecuación (3.9)

$$M(t)\frac{d^2x}{dt} + mx = 0 \tag{3.15}$$

se sustituye la ecuación (3.13) en la ecuación (3.15)

$$M(t)\frac{d^{2}x}{dt^{2}}\left(\frac{1}{M(t)}\right)^{2} + mx = 0$$
(3.16)

se multiplica la ecuación (3.16) por M(t)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + M(t)mx = 0 (3.17)$$

sustituimos la ecuación (3.10) en la ecuación (3.17)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(1 + \varepsilon sign\left(x\frac{dx}{dt}\right) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)mx = 0$$
(3.18)

$$\frac{b_M - b_m}{b_M + b_m} = \{\varepsilon < 1\}$$

el sistema como se muestra en la ecuación (3.18) se ve representado como un sistema de rigidez conmutada [25], en la figura 3.13 se muestra una gráfica en la cual se ve el comportamiento de la ecuación (3.18).

#### 3.3.1. Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del sistema con respecto a la ecuación (3.18) son obtenidos de la siguiente manera. La ecuación (3.18) en variables de estado es escrita de la siguiente forma



Figura 3.13: Gráfica de la simulación del sistema MRI.

$$x = x_1 \qquad \dot{x}_1 = x_2$$
  
$$\dot{x} = x_2 \quad \dot{x}_2 = -\left(1 + \varepsilon sign\left(x_1 x_2\right) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)mx_1$$

los punto de equilibrio están dados por

$$0 = x_2$$
  
$$0 = -\left(1 + \varepsilon sign(x_1 x_2) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)mx_1$$

\_

se sustituye el valor de  $x_2$  en la ecuación de  $\dot{x}_2$ 

$$0 = -\left(1 + \varepsilon \frac{x_1(0)}{|x_1(0)|} + \frac{2m}{b_M + b_m}\right) m x_1$$

$$0 = -\left(1 + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)mx_1$$

$$0 = -\left(m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}\right) x_1$$

por lo tanto

$$0 = x_1$$

los puntos de equilibrio del sistema son

$$x_1 = 0$$
  
 $x_2 = 0$ 

### 3.3.2. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La función candidata para comprobar que el sistema dado por la ecuación (3.18) es

$$V(x) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}gx$$

donde a y g son variables para las cuales su valor estará dado para el valor que se requiera para que cumpla con que la ecuación (3.18) sea estable en el sentido de Lyapunov.

$$\dot{V}(x) = ax_1\dot{x}_1 + gx_2\dot{x}_2$$

donde

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\left(1 + \varepsilon \frac{x_1 x_2}{|x_1 x_2|} + \frac{2m}{b_M + b_m}\right) m x_1$$

se sustituyendo  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2$  en  $\dot{V}(x)$ 

$$\dot{V}(x) = ax_1x_2 + gx_2 \left[ -\left(1 + \varepsilon \frac{x_1x_2}{|x_1x_2|} + \frac{2m}{b_M + b_m}\right) mx_1 \right]$$

se realizan las operaciones necesarias para eliminar el paréntesis

$$\dot{V}(x) = ax_1x_2 + gx_2 \left[ -mx_1 - m\varepsilon \frac{x_1^2 x_2}{|x_1 x_2|} - \frac{2m^2}{b_M + b_m} x_1 \right]$$

se realizan las operaciones necesarias para eliminar el corchete

$$\dot{V}(x) = ax_1x_2 - gmx_2x_1 - gm\varepsilon \frac{x_1^2 x_2^2}{|x_1 x_2|} - g\frac{2m^2}{b_M + b_m}x_1x_2$$

donde

$$\frac{x_1^2 x_2^2}{|x_1 x_2|} = |x_1 x_2|$$

por lo que  $\dot{V}(x)$  es igual a

$$\dot{V}(x) = ax_1x_2 - gmx_2x_1 - gm\varepsilon|x_1x_2| - g\frac{2m^2}{b_M + b_m}x_1x_2$$

$$\dot{V}(x) = x_1 x_2 \left( a - gm - g \frac{2m^2}{b_M + b_m} \right) - gm \varepsilon |x_1 x_2|$$

por lo tanto el valor de *a* y *g* son

$$a = gm + g \frac{2m^2}{b_M + b_m}$$
$$g = 1$$

sustituyendo a y g en  $\dot{V}(x)$ 

$$\dot{V}(x) = -m\varepsilon |x_1 x_2| < 0$$

debido a que la función de Lyapunov que se propuso cumple con la condición de que es menos a cero, se puede concluir que el sistema es estable en el sentido de Lyapunov.



Figura 3.14: Simulación del sistema MRI y la función signo.

## 3.4. Análisis utilizando teoría de Floquet

En esta sección se mencionara una herramienta matemática utilizada en el presente trabajo para el análisis del sistema mostrado en la ecuación (3.18), con este análisis se pretende demostrar que la ley de control propuesta basada en una función signo puede ser considerada como una función periódica. En la figura 3.14 se muestra el comportamiento de sistema dado en la ecuación (3.18) y la función signo.

A continuación se describe brevemente la herramienta matemática principal en el análisis de sistemas periódicos, el teorema de Lyapunov-Floquet [12]. Consideremos el sistema

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3.19}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $A(t) = A(t+T) \in \mathbb{R}^{n \times n} \forall t$  es una función matriz periódica continua por partes y T > 0 es el periodo.

La matriz  $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisface (3.19) y  $\Phi(0) = I$  es llamada matrizant, donde I denota

la matriz identidad, es decir, la matrizant es una matriz fundamental de (3.19) ya que sus vectores columna satisfacen el sistema (3.19). Por lo tanto, alguna solución de (3.19) puede ser escrita como  $x(t) = \Phi(t)x(0)$ . Además, la matrizant satisface la relación  $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$ , que es también una solución del sistema (3.19). La matrizant  $\Phi(t)$  en T, i.e. la expresión  $\Phi(T)$  es llamada la matriz monodromia y sus eigenvalores  $\rho$  los multiplicadores del sistema (3.19), es decir,  $\rho_i$  son raíces de la ecuación característica  $det [\Phi(T) - \rho I] = 0$ ; puede ser demostrado que los multiplicadores son únicos.

Tenemos que *u* son los eigenvectores asociados a los eigenvalores  $\rho$ , i.e.  $\Phi(T)u = \rho u$ . Considere que x(0) = u entonces la solución x(t) puede ser escrito como  $x(t) = \Phi(t)u$ , tomando un periodo de tiempo la solución produce  $x(t+T) = \Phi(t+T) = u = \Phi(t)\Phi(T)u = \rho\Phi(t)u$ , i.e., todos los multiplicadores  $\rho_i$  satisfacen la relación:

$$x(t+T) = \rho x(t) \tag{3.20}$$

La solución en 2*T* da  $x(t+2T) = \rho x(t+T) = \rho^2 x(t)$  y sucesivamente. En consecuencia, dependiendo de la naturaleza del multiplicador, la solución de (3.19) puede converger y diverge. No obstante, la solución del sistema (3.19) también tiene la siguiente propiedad declarada en el teorema de Floquet.

Teorema 1 (Lyapunov-Floquet). La matrizant  $\Phi(t)$  del sistema (3.19) puede ser escrita como

$$\Phi(t) = F(t) e^{tK}$$
(3.21)

donde F(t) es no singular, es una matriz función periódica continua por segmentos, y K es una matriz constante logarítmica dada por

$$K = \frac{1}{T} \ln \Phi(T) \tag{3.22}$$

Los eigenvalores  $\lambda$  de la matriz logarítmica  $K = \frac{1}{T} \ln \Phi(T)$  son llamadas exponentes

Cuadro 5.2. Criterio de estabilidad para el sistema (5.15)								
Propiedad de la solución x	Multiplicadores $\rho_i$							
$\parallel x \parallel \rightarrow 0$	$\mid  ho_i \mid < 1 \forall i$							
$\parallel x \parallel \leq M$	$ \rho_i  \le 1$ y los que tienen $ \rho_k  = 1$ tienen simples							
	divisiones elementales.							
$\parallel x \parallel \to \infty$	$  \rho_i   \ge 1$ y los que tienen $  \rho_k   = 1$ tienen múltiples							
	divisiones elementales.							

Cuadro 3.2: Criterio de estabilidad para el sistema (3.19)

característicos del sistema (3.19) y están relacionados con los multiplicadores por la relación

$$\lambda = \frac{1}{T} \ln \rho$$

El teorema permite expresar la solución como  $x(t) = \Phi(t)x(0) = F(t)e^{tK}x(0)$ , entonces su comportamiento es determinado por los exponentes característicos o los multiplicadores del sistema (3.19), como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 1 (criterio de estabilidad). La naturaleza de la solución  $x(t) = F(t) e^{tK} x(0)$ de (3.19) es determinado ya sea por los multiplicadores y/o exponentes característicos relacionado en la tabla 3.2.

En consecuencia, el teorema de Floquet afirma que la matriz de transición tiene como producto de factorización  $\Phi(t) = F(t) e^{tK}$ , pero la matriz K puede ser compleja, entonces la factorización será no real. En casos prácticos, es conveniente contar con factores Floquet, el siguiente resultado asegura la factorización Floquet real.

Corolario 2 (Factorización Floquet real). La matriz logarítmica  $k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  si, solo si de cualquier de los multiplicadores del sistema satisfaga  $\rho_i < 1 \forall i$  o  $K = \text{Re} \{\frac{1}{T} \ln \Phi(2T)\}$ .

Además, el siguiente teorema es aplicado para reducir un sistema periódico lineal a un sistema lineal con coeficientes constantes.

Teorema 2 (Reducción de Lyapunov). Tenemos que  $F(t) \in C^1(a,b)$  es una función matriz periódica continua no singular entonces la variable cambia

$$x = F(t)y \tag{3.23}$$

transformado el sistema (3.23) en un sistema lineal con coeficientes constantes

$$\dot{y} = Ky \tag{3.24}$$

donde la matriz K y la función matriz F(t) están relacionados por  $\Phi(t) = F(t) e^{tK}$ .

La transformación (3.24) es llamada transformación de Lyapunov del sistema (3.23). Ya que la transformación existe y eso es previsto por el teorema de Floquet, entonces el sistema (3.19) se dice que es reducible al sistema (3.24), además la matriz A(t) es aritméticamente similar a la matriz K.

Por otra parte, la función fundamental de (3.19) puede ser escrita en términos de la matriz Wroskiana. Tenemos  $x_i$  es un conjunto de soluciones de variables de estado linealmente independiente de (3.19) y la matriz Wroskiana está definida por  $W(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ . Por lo tanto, cualquier matriz fundamental  $\Phi(t,0)$  puede ser escrita como  $\Phi(t,0) = W(t)W^{-1}(0)$ .

#### 3.4.1. Cálculo de los instantes de conmutación

En esta sección calcularemos los instantes de conmutación para convertir la función signo en una función periódica.

#### 3.4.1.1. Problema de la velocidad inicial

En el plano de fase *x-x*, durante el movimiento de la trayectoria en cada cuadrante el valor del termino  $sign(x\dot{x})$  es bien definido, entonces la ecuación (3.18) se vuelve integrable, este hecho permite determinar una solución analítica de la ecuación (3.18) en cada cuadrante. Considerando como condiciones de contorno los puntos de cruce del eje de la trayectoria entonces los instantes de conmutación se determinan mediante la evaluación de la solución analítica en los límites de la siguiente manera. El plano de fase *x-x* de la ecuación (3.18) para la condición de velocidad inicial es analizada para cada cuadrante de la siguiente forma:

Cuadrante I. La ecuación (3.18) la expresaremos de la siguiente forma

$$\ddot{x}_1 + \left(1 + \hat{\varepsilon}sign\left(x\dot{x}\right) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)mx_1 = 0$$
(3.25)

donde sus condiciones iniciales son

$$x_0(0) = 0$$
  $\dot{x}_0(0) = 1$ 

donde la respuesta de (3.25) es

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi)$$
  

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2}}$$
  

$$\phi = \arctan\left(\omega_n \frac{x_0}{\dot{x}_0}\right)$$
  
(3.26)

donde 
$$\omega_n^2 = \left(1 + \hat{\varepsilon} sign(x\dot{x}) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)m$$

tenemos que

$$x_1(t_1) = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2}} \sin(\omega_n t_1 + \phi)$$
(3.27)

$$\phi = \arctan\left(\omega_n \frac{x_0}{\dot{x}_0}\right) \tag{3.28}$$

se sustituye el valor de  $\omega_n$  y las condiciones iniciales en (3.27) y (3.28) nos queda

$$x_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} \sin\left(\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}} t_1\right)$$

donde  $\varepsilon = \hat{\varepsilon} sign(x\dot{x})$ 

$$\dot{x}_1(t_1) = \cos\left(\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}t_1\right)$$

para que las condiciones iniciales del siguiente cuadrante sean  $x_1(t_1) = x_1^0$  y  $\dot{x}_1(t_1) = 0$  el valor de  $t_1$  y  $x_1(t_1)$  son

$$t_1 = T_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$
$$\dot{x}_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$

Cuadrante II. Se tiene que

$$x_2(t_2) = \frac{1}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} \sin\left(\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}t_2 - \phi\right)$$
(3.29)

$$\phi = \arctan\left(\omega_n \frac{x_1}{\dot{x}_1}\right) \tag{3.30}$$

las condiciones iniciales son  $x_1(t_1) = x_1^0$  y  $\dot{x}_1(t_1) = 0$ . Evaluando las condiciones iniciales en (3.30), (3.29) nos queda

$$x_2(t_2) = \frac{1}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} \sin\left(\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}} t_2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

la cual puede ser expresada de la siguiente forma

$$x_2(t_2) = \frac{1}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} \cos\left(\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}} t_2\right)$$

$$\dot{x}_{2}(t_{2}) = -\frac{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^{2}}{b_{M} + b_{m}}}}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^{2}}{b_{M} + b_{m}}}} \sin\left(\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^{2}}{b_{M} + b_{m}}}t_{2}\right)$$

para que las condiciones iniciales del siguiente cuadrante sean  $x_2^0(t_2) = 0$  y  $\dot{x_2^0}(t_2) = h$  el

valor de  $t_2$  es

$$t_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{m-\varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$
$$\dot{x}_2^0(t_2) = -\frac{\sqrt{m-\varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}{\sqrt{m+\varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$

tenemos que  $t_2 = T_2 - T_1$  por lo tanto  $T_2 = t_2 + T_1$ 

$$T_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} + \frac{\pi}{2\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$

Cuadrante III. Se tiene que las condiciones iniciales son  $x_2(t_2) = 0$  y  $\dot{x}_2(t_2) = h$ . Evaluando las condiciones iniciales en (3.32), (3.31) nos queda

$$x_3(t_3) = -\frac{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}} \sin\left(\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}t_3 - \phi\right)$$
(3.31)

$$\phi = \arctan\left(\omega_n \frac{x_2}{\dot{x}_2}\right) \tag{3.32}$$

como  $\phi = 0$ , (3.31) resulta

$$x_{3}(t_{3}) = -\frac{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^{2}}{b_{M} + b_{m}}}}{m + \varepsilon m + \frac{2m^{2}}{b_{M} + b_{m}}} \sin\left(\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^{2}}{b_{M} + b_{m}}}t_{3}\right)$$
$$\dot{x}_{3}(t_{3}) = -\frac{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^{2}}{b_{M} + b_{m}}}}{m + \varepsilon m + \frac{2m^{2}}{b_{M} + b_{m}}}\cos\left(\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^{2}}{b_{M} + b_{m}}}t_{3}\right)$$

para que las condiciones iniciales del siguiente cuadrante sean  $x_3^0(t_3) = j$  y  $\dot{x}_3(t_3) = 0$  el valor de  $t_3$  es

$$t_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$
$$x_3^0(t_3) = -\frac{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$

tenemos que  $t_3 = T_3 - T_2$  por lo tanto  $T_3 = t_3 + T_2$ 

$$T_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} + \frac{\pi}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$

Cuadrante IV. Se tiene que las condiciones iniciales son  $x_3^0(t_3) = j$  y  $\dot{x}_3(t_3) = 0$ . Evaluando las condiciones iniciales en (3.34), (3.33) nos queda

$$x_4(t_4) = -\frac{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}} \sin\left(\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}t_4 - \phi\right)$$
(3.33)

$$\phi = \arctan\left(\omega_n \frac{x_3}{\dot{x}_3}\right) \tag{3.34}$$

como  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ , (3.33) resulta

$$x_4(t_4) = -\frac{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}} \sin\left(\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}t_4 - \frac{\pi}{2}\right)$$

la cual se puede expresar de la siguiente forma

$$x_4(t_4) = -\frac{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}} \cos\left(\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}t_4\right)$$
$$\dot{x}_4(t_4) = -\frac{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}} \sin\left(\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}t_4\right)$$

para que las condiciones iniciales del siguiente cuadrante sean  $x_5^0(t_5) = 0$  y  $\dot{x}_5^0(t_5) = k$  el valor de  $t_4$  es

$$t_4 = \frac{\pi}{2\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$
$$\dot{x}_4(t_4) = \frac{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}$$

	Cuadro 3.3: Función signo en forma de una función periódica $q_v(t)$ .
1	$t \in \left(0, rac{\pi}{2\sqrt{m + arepsilon m + rac{2m^2}{b_M + b_m}}} ight)$
-1	$t \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{m+\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}}, \frac{\pi}{2\sqrt{m-\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}} + \frac{\pi}{2\sqrt{m+\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}}\right)$
1	$t \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{m-\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}}+\frac{\pi}{2\sqrt{m+\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}},\frac{\pi}{\sqrt{m+\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}}+\frac{\pi}{2\sqrt{m-\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}}\right)$
-1	$t \in \left(\frac{\pi}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} + \frac{\pi}{2\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}, \frac{\pi}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} + \frac{\pi}{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}\right)$

c • •

tenemos que  $t_4 = T_4 - T_3$  por lo tanto  $T_4 = t_4 + T_3$ 

$$T_4 = rac{\pi}{\sqrt{m - arepsilon m + rac{2m^2}{b_M + b_m}}} + rac{\pi}{\sqrt{m + arepsilon m + rac{2m^2}{b_M + b_m}}}$$

A continuación se mostrará un análisis de la función signo mostrada en forma de una función periódica (Cuadro 3.3)

#### 3.4.1.2. Problema de posición inicial

El termino  $sign(x\dot{x})$  tiene diferentes instantes de cambio de signo, por lo que la función periódica correspondiente  $q_p(t) = q_p(t + T(\hat{\epsilon}))$ , el cual describe la periodicidad del termino  $sign(x\dot{x})$  no puede ser lo mismo que la velocidad inicial. por lo tanto, siguiendo el procedimiento anteriormente descrito, los instantes de  $T_i$  y los valores limites  $(x_i, \dot{x}_i)$  son calculados. Por lo tanto, la función periódica para el problema de posición inicial  $q_p(t)$  es

Del análisis anterior, el termino  $sign(x\dot{x})$  puede ser escrito como una función continua por segmentos y periódica definida por la velocidad inicial y posición inicial como se muestra en los cuadros (3.3) y (3.4)

En el cuadro (3.5) se muestra el cambio de signo en su respectivo periodo y sus condiciones iniciales.

	p $p$ $p$ $p$ $p$ $p$ $p$ $p$ $p$ $p$
-1	$t \in \left(0, rac{\pi}{2\sqrt{m - arepsilon m + rac{2m^2}{b_M + b_m}}} ight)$
1	$t\in\left(rac{\pi}{2\sqrt{m-arepsilon m+rac{2m^2}{b_M+b_m}}},rac{\pi}{2\sqrt{m-arepsilon m+rac{2m^2}{b_M+b_m}}}+rac{\pi}{2\sqrt{m+arepsilon m+rac{2m^2}{b_M+b_m}}} ight)$
-1	$t \in \left(\frac{\pi}{2\sqrt{m-\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}}+\frac{\pi}{2\sqrt{m+\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}},\frac{\pi}{\sqrt{m-\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}}+\frac{\pi}{2\sqrt{m+\varepsilon m+\frac{2m^2}{b_M+b_m}}}\right)$
1	$t \in \left(\frac{\pi}{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} + \frac{\pi}{2\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}, \frac{\pi}{\sqrt{m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}} + \frac{\pi}{\sqrt{m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}}}\right)$

Cuadro 3.4: Función signo en forma de una función periódica  $q_p(t)$ .

					0	
i	$q_v(t)$	$T_i$	$(x,\dot{x})$	$q_p(t)$	$T_i$	$(x,\dot{x})$
0	1	0	(0,1)	-1	0	(1,0)
1	-1	$\frac{\pi}{2\sqrt{w_2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{w_2}},0\right)$	1	$\frac{\pi}{2\sqrt{w_1}}$	$(0, -\sqrt{w_1})$
2	1	$\frac{\pi}{2\sqrt{w_1}} + \frac{\pi}{2\sqrt{w_2}}$	$\left(0,-\frac{\sqrt{w_1}}{\sqrt{w_2}}\right)$	-1	$\frac{\pi}{2\sqrt{w_1}} + \frac{\pi}{2\sqrt{w_2}}$	$\left(-\frac{\sqrt{w_1}}{\sqrt{w_2}},0 ight)$
3	-1	$\frac{\pi}{2\sqrt{w_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{w_2}}$	$\left(-\frac{\sqrt{w_1}}{w_2},0\right)$	1	$\frac{\pi}{\sqrt{w_1}} + \frac{\pi}{2\sqrt{w_2}}$	$\left(0, \frac{w_1}{\sqrt{w_2}}\right)$
4	1	$\frac{\pi}{\sqrt{w_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{w_2}}$	$\left(0, \frac{w_1}{w_2}\right)$	-1	$\frac{\pi}{\sqrt{w_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{w_2}}$	$\left(\frac{w_1}{w_2},0\right)$

Cuadro 3.5: Periodos en cada cambio de signo.

donde  $w_1 = m - \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}$  y  $w_2 = m + \varepsilon m + \frac{2m^2}{b_M + b_m}$ 

Teorema 3. La ecuación

$$\ddot{x} + \left(1 + \hat{\varepsilon}sign\left(x\dot{x}\right) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)mx = 0$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$x(0) = 0$$
  $\dot{x}(0) = 1$   
 $x(0) = 1$   $\dot{x}(0) = 0$ 

puede ser escrita como una ecuación diferencial lineal periódica

$$\ddot{x} + \left(1 + \hat{\varepsilon}q(t) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)mx = 0$$
(3.35)

 $\operatorname{con} q(t) = q(t + T(\hat{\varepsilon}))$  dada por

$$T(\hat{\varepsilon}) = \frac{\pi}{\sqrt{w_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{w_2}}$$

 $y \ 0 < \hat{\varepsilon} < 1.$ 

Aun cuando el valor de las funciones periódicas  $q_p$  y  $q_v$  dependen de las condiciones iniciales descritas, su periodicidad resulta inalterable.

#### 3.4.2. Análisis de estabilidad

La estabilidad del sistema (3.35) es basado en la matriz de monodromia, para proceder con el cálculo la ecuación (3.35) se escribe en la forma en espacio de estados:

$$\dot{x} = A(t)x = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -\left(1 + \hat{\varepsilon}q(t) + \frac{2m}{b_M + b_m}\right)mx & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\\ \dot{x} \end{bmatrix}$$
(3.36)

Tenemos que  $\Phi(t,0)$  es la matriz fundamental de (3.36) y tenemos W(t) denota la

matriz Wroskiana definida por

$$W(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) & x_v(t) \\ \dot{x}_p(t) & \dot{x}_v(t) \end{bmatrix}$$

donde los elementos de su vector columna  $\begin{bmatrix} x_p(t) & \dot{x}_p(t) \end{bmatrix}^T y \begin{bmatrix} x_v(t) & \dot{x}_v(t) \end{bmatrix}^T$  están dadas en el cuadro (3.5), entonces la matriz de monodromia en términos de la matriz Wroskiana es  $\Phi(T,0) = W^{-1}(0)W(T)$  se reduce a:

$$\Phi(T,0) = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_2} & 0\\ 0 & \frac{w_1}{w_2} \end{bmatrix}$$

El multiplicador del sistema son los eigenvalores de la matriz de monodromia, en consecuencia los multiplicadores corresponden a un multiplicador doble  $\rho(\varepsilon)$ :

$$\rho(\hat{\varepsilon}) := \frac{w_1}{w_2} \tag{3.37}$$

el multiplicador (3.37) satisface  $\rho(\hat{\varepsilon}) < 1 \ \forall 0 < \varepsilon < 1$  por lo que la solución trivial de la ecuación (3.35) es asintóticamente estable según el teorema de Floquet, este resultado también esta comprobado por medio de análisis de estabilidad de Lyapunov.

Corolario 3. La matriz de monodromia del sistema (3.35) está dada por

$$\Phi(T,0) = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_2} & 0\\ 0 & \frac{w_1}{w_2} \end{bmatrix}$$

donde los multiplicadores del sistema corresponden a un multiplicador doble

$$\rho(\hat{\varepsilon}) = \frac{w_1}{w_2}$$

Además, el sistema (3.35) es asintóticamente estable ya que  $\rho(\hat{\varepsilon}) < 1 \ \forall 0 < \hat{\varepsilon} < 1$ .

### 3.4.3. Factorización de Floquet.

Los exponentes de Floquet correspondientes de (3.35) están dadas por los multiplicadores (3.37), esto es:

$$\lambda\left(\hat{\varepsilon}\right) := \frac{1}{T} \ln \rho = \frac{1}{T\left(\hat{\varepsilon}\right)} \ln \frac{w_1}{w_2} = \frac{1}{T\left(\hat{\varepsilon}\right)} \ln \alpha\left(\hat{\varepsilon}\right)$$

Dado que  $\rho(\hat{\varepsilon}) < 1$  entonces  $\lambda(\hat{\varepsilon}) < 0$ , por lo tanto la matriz logarítmica  $K(\hat{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^{2x^2}$ , i.e., la factorización de Floquet corresponde a la factorización real dada por  $\Phi(t,0) = F(t)e^{tK}$ , donde la matriz *K* es:

$$K(\hat{\varepsilon}) = \frac{1}{T} \ln \Phi(T, 0) = \begin{bmatrix} \lambda(\hat{\varepsilon}) & 0\\ 0 & \lambda(\hat{\varepsilon}) \end{bmatrix} = \lambda(\hat{\varepsilon})I$$

Por lo tanto,  $e^{tK} = e^{\lambda(\hat{\varepsilon})t}I$  y la matriz de transición es reducida a  $\Phi(t,0) = F(t)e^{\lambda(\hat{\varepsilon})t}$ . Observe que los exponentes de Floquet corresponden a una raíz doble de la ecuación característica  $det [K(\hat{\varepsilon}) - \lambda I] = 0$ .

Corolario 4. La matriz de transición de estado  $\Phi(t,0)$  del periodo del sistema dado por la ecuación (3.35) está dado por

$$\Phi(t,0) = F(t)e^{\lambda(\hat{\varepsilon})t}$$

donde

$$\lambda\left(\hat{\varepsilon}\right) = \frac{1}{T\left(\hat{\varepsilon}\right)} \ln \alpha\left(\hat{\varepsilon}\right)$$

corresponden a los exponentes de Floquet de (3.35) y F(t) es periódica.

Del teorema de reducibilidad de Lyapunov, la transformación de Lyapunov x = F(t)yreduce el sistema (3.35) a una ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = K(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\mathbf{y}(t)$$

		-
Respuesta	Inertancia mínima	Inertancia máxima
1	2967.2764	2967.2764
2	2967.2764	3152.9483
3	2967.2764	3403.4906
4	2967.2764	3718.9031
5	2967.2764	4099.1859
6	2967.2764	4544.3389
7	2967.2764	5054.3622
8	2967.2764	5629.2558
9	2967.2764	6269.0196
10	2967.2764	6973.6537

Cuadro 3.6: Inertancias máximas y mínimas utilizadas.

el sistema reducido tiene un eigenvalor semi-simple doble  $\lambda(\hat{\varepsilon})$ , por lo tanto, su solución es

$$y(t) = e^{\lambda(\hat{\varepsilon})t} y(0)$$

donde  $\lambda(\hat{\varepsilon}) < 0 \ \forall 0 < \hat{\varepsilon} < 1$ , por lo tanto el origen es asintóticamente estable.

Corolario 5. El sistema (3.35) aunque la transformación de Lyapunov x = F(t)y es reducido a  $\dot{y}(t) = K(\hat{\varepsilon})y(t)$  cuya solución está dada por  $y(t) = e^{\lambda(\hat{\varepsilon})t}y(0)$ , donde  $\lambda(\hat{\varepsilon}) < 0$  $\forall 0 < \hat{\varepsilon} < 1$ .

### 3.5. Optimización.

El inerter semi-activo que hemos diseñado cambia su inercia acorde a la reconfiguración de su momento de inercia, por lo tanto, se calcularon distintos valores de inertancia con los cuales se pretende optimizar el tiempo de la respuesta.

En el cuadro 3.7 se muestra los valores de la inertancia en distintas distancias. En las figuras (3.15) y (3.16) se muestran las distintas respuestas del sistema masa-resorte-inerter (MRI), para distintas configuraciones geométricas, en el cuadro 3.6 se muestran las distintas inertancias utilizadas.

A continuación se mostraran los resultados obtenidos de las simulaciones hechas en el



Figura 3.15: Primeras cinco respuestas del sistema MRI.



Figura 3.16: Ultimas cinco respuestas del sistema MRI.



Figura 3.17: Cuadrantes y parte de la trayectoria de la respuesta para analizar con el teorema de Floquet.

Iteración	Distancia de las masas	Inertancia				
1	.03	2967.2764				
2	.0427	3152.9483				
3	.0554	3403.4906				
4	.0681	3718.9031				
5	.0808	4099.1859				
6	.0935	4544.3389				
7	.1062	5054.3622				
8	.1189	5629.2558				
9	.1316	6269.0196				
10	.1443	6973.6537				

Cuadra 2 7. Inartanaia

sistema utilizando la técnica del decremento logarítmico. En el cuadro 3.8 se muestra la relación que tiene la inertancia mínima entre la máxima. En el cuadro 3.9 se muestra el «quality factor» en las distintas combinaciones entre la inertancia máxima y mínima, el cual nos indica el número de oscilaciones que tiene la respuesta en el tiempo el sistema masa-resorte-inerter. Para el sistema dado por la ecuación (3.18) se hará una aproximación para calcular el amortiguamiento viscoso equivalente por medio de la técnica del decremento logarítmico. Como se menciona en la subsección 1.4.3. se necesita el valor de picos consecutivos ( $x_n$  y  $x_{n+1}$ ), para aplicar esta técnica analizaremos la solución en cada cuadrante como se muestra en la figura (3.17).

En la figura 3.18 se muestra las respuestas realizadas en las simulaciones.

Cuadro 3.8: Relación de la inertancia mínima y máxima.	10	0.4219	0.4483	0.4840	0.5288	0.5829	0.6462	0.7187	0.8005	0.8915	0.9917
	6	0.4693	0.4987	0.5383	0.5882	0.6483	0.7187	0.7994	0.8904	0.9915	I
	8	0.5226	0.5553	0.5994	0.6550	0.7220	0.8004	0.8902	0.9915	I	I
	7	0.5821	0.6185	0.6677	0.7295	0.8041	0.8915	0.9915	I	I	I
	9	0.6475	0.6880	0.7427	0.8116	0.8945	0.9917	I	ı	I	I
	5	0.7181	0.7630	0.8237	0.9000	0.9920	ı	I	I	I	I
	4	0.7920	0.8415	0.9084	0.9926	I	ı	ı	ı	I	I
	3	0.8661	0.9203	0.9934	I	I	ı	I	I	I	I
	2	0.9359	0.9945	ı	I	I	ı	I	ı	I	I
	1	0.9958	I	ı	I	I	ı	I	I	I	I
	$b_{min}/b_{max}$	1	5	ю	4	S	9	L	8	6	10

b <sub>min</sub> /b <sub>max</sub>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	761	47	21	13	9	7	5	4	4	3
2	-	571	37	18	11	8	6	5	4	3
3	-	-	477	32	16	10	7	6	5	4
4	-	-	-	425	29	15	9	7	5	4
5	-	-	-	-	395	28	14	9	7	5
6	-	-	-	-	-	379	27	14	9	7
7	-	-	-	-	-	-	371	27	14	9
8	-	-	-	-	-	-	-	369	27	14
9	-	-	-	-	-	-	-	-	372	27
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	377

Cuadro 3.9: «Quality factor» cantidad de picos que se tendrían de las diferentes combinaciones entre la inertancia mínima y máxima



Figura 3.18: Respuesta del sistema MRI utilizando función signo y la técnica del decremento logarítmico.

# Capítulo 4

# Conclusiones

El control de vibraciones de un sistema masa-resorte de un grado de libertad con un inerter semi-activo es abordado aplicando la teoría de un sistema periódico. El inerter semiactivo se induce en los sistemas a través de un dispositivo de rigidez que cambia la rigidez entre un máximo y un mínimo de acuerdo con una ley de control dependiente del estado prescrita, y el rendimiento de dicho dispositivo se caracteriza por el parámetro no dimensionalizado  $\hat{\varepsilon} \in (0, 1)$ . De este modo, las dinámicas del sistema están modeladas por el inerter semi-activo.

Un hecho clave para aplicar el enfoque de sistema periódico es darse cuenta de que el coeficiente de rigidez del sistema se comporta periódicamente a tiempo para las condiciones iniciales estándar. Por lo tanto, la regla de conmutación dependiente del estado relacionada se convierte en una función de tiempo periódico constante a trozos. Para este propósito, la función periódica se caracteriza por el cálculo del instante de conmutación. Este procedimiento nos permite concluir que el sistema se comporta como un sistema asintóticamente isócrono. Por lo tanto, la ecuación diferencial no lineal del sistema se escribe como una ecuación diferencial periódica lineal llamado sistema periódico. De esta manera, la matriz de monodromia y los multiplicadores del sistema se calculan en términos del parámetro del sistema.ĉ.

Los multiplicadores del sistema corresponden a un doble semi-simple multiplicador

que se encuentra dentro del círculo unitario, por lo tanto, la solución trivial del sistema es asintóticamente estable. Además, el fenómeno de amortiguamiento es cuantificado por medio de los exponentes de Floquet y esto muestra que la solución del sistema tiene una factorización de Floquet real. En adición, un problema de optimización basado en el radio de decaimiento optimo es formulado en términos del parámetro  $\hat{\varepsilon}$ .

La aplicación del teorema de Lyapunov al sistema muestra cualitativamente el comportamiento asintótico de la solución trivial, mientras el fenómeno de amortiguamiento inducido por la rigidez conmutada es cuantificado empleando un modelo lineal de amortiguamiento viscoso. Sin embargo esta enfoque implica la aplicación de aproximaciones lineales y suposiciones que conducen a una pérdida de precisión, además, el proceso de cálculo es complicado. No obstante, la aplicación de la teoría del sistema periódico a sistema con el inerter semi-activo proporciona tanto una explicación cualitativa como una herramienta matemática cuantitativa para analizar el fenómeno de disipación evitando aproximaciones lineales.

Conforma al resultado, la presente aproximación proporciona tratamiento novedoso para analizar el esquema de control de vibración de rigidez conmutada de una manera natural y directa, y brinda capacidad de tratamiento matemático para fines de optimización. En adición, la aproximación puede ser extendida para el estudio de los casos de múltiples grados de libertad y sistema forzado.

# Bibliografía

- [1] U. Aldemir. Optimal control of structures with semi-active tuned mass dampers. *Journal of sound and vibration*, 2002.
- [2] Jose L. Almazan, Juan C. De la Llera, Jose a. Inaudi, Diego Lopez-Garcia, and Luis E. Izquierdo. A bidirectional and homogeneous tuned mass damper: A new device for passive control of vibrations. *Engineering Structures*, 29:1548–1560, 2007.
- [3] Mario Silvagni Angelo Bonfitto, Andrea Tonoli. Sensorless active magnetic damper for the control of rotos. *Mechatronics*, 2016.
- [4] Y.L. Xu C. L. Ng. Seismic response control of multi-story building using semi-active friction dampers. *Advances in building technology, volumen II, pag 993-1000*, 2002.
- [5] Naresh K. Chandiramani. Semiactive control of earthquake/ wind excited building using output feedback. *Procedia Engineering*, 2016.
- [6] Martin Dahlmann Chaoqing Min and Thomas Sattel. A concept for semi-active vibration control with a semi-stiffness-switch system. *Journal sound and vibration*, 2017.
- [7] Michael Z.Q. Chen, Yinlong Hu, Lixi Huang, and Guanrong Chen. Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems. *Journal of Sound and Vibration*, 333(7):1874 1887, Mar 2014.

- [8] M.Z.Q. Chen, C. Papageorgiou, F. Scheibe, Fu cheng Wang, and M.C. Smith. The missing mechanical circuit element. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 9(1):10–26, 2009.
- [9] Yingjie Lin David C. Nemir and Roberto A. Osegueda. Semiactive motion control using variable stiffness. *Journal Struct. Eng.*, 1994.
- [10] Clarence W. de Silva. Vibration Damping, Control and Design. 2007.
- [11] James D. Van de Ven. Fluidic variable inertia flywheel. *Warcester Polytechnic Institute*, 2011.
- [12] D.W.Jordan and P.Smith. Nonlinear Ordinary Differential Equations. Oxford, 1977.
- [13] H. Frahm. Divice for damping vibrations of bodies. 1911.
- [14] Tetsuji Sano Junjiro Onoda and Kohichi Kamiyama. Active, passive and semiactive vibration suppression by stiffness vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 1992.
- [15] J.W.Liang and B.F.Feeny. Identifying coulomb and viscous friction from free-vibration decrements. *Nonlinear Dynamics*, 1998.
- [16] S. Graham Kelly. *Fundamentals of Mechanical Vibrations*. Mcgraw-hill Education, 2nd ed edition, 2000.
- [17] Don-Ho Yang Ji-Hwan Shin HyunWook Lee Seoug-Ki Kim and Moon K. Kwak. Active vibration control of structure by active mass damper and multi-modal negative acceleration feedback control algorithm. *Journal of sound and vibration*, 2017.
- [18] Ging-long Lin, Chi-chang Lin, Bo-cheng Chen, and Tsu-teh Soong. Vibration control performance of tuned mass dampers with resettable variable stiffness. *Engineering Structures*, 83:187–197, 2015.

- [19] Zheng Lu, Dianchao Wang, and Peizhen Li. Comparison study of vibration control effects between suspended tuned mass damper and particle damper. 2014, 2014.
- [20] W.P. Baker M.F. Winthrop and R.G. Cobb. A variable stiffness device selection and desing toot for lightly damped structure. *Journal of Sound and Vibration*, 2004.
- [21] Ricardo Arturo Castillo Narvaez. *Tesis: Diseno e implementacion de un inerter para el control pasivo de vibraciones*. 2016.
- [22] Katsushiko Ogata. Ingenieria de Control Moderna (Spanish Edition). Prentice Hall, 3rd edition edition, 3 1999.
- [23] Christakis Papageorgiou and Malcolm C. Smith. Laboratory experimental testing of inerters. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and TuIB18.1 the European Control Conference 2005 Seville, Spain, December, 2005.
- [24] J. Pun and S. E. Semercigi. Joint stiffness control of a one-link flexible arm. *Journal of sound and vibration*, 1997.
- [25] Arun Ramaratnam and Nader Jalili. A switched stiffness approach for structural vibration control theory and real-time implementation. *Journal of sound and vibration*, 2005.
- [26] Singiresu S. Rao. Mechanical Vibrations. Pearson Prentice Hall, 2004.
- [27] A. J. Roffel, R. Lourenco, S. Narasimhan, and S. Yarusevych. Adaptive compensation for detuning in pendulum tuned mass dampers. *Journal of Structural Engineering*, 137(February):242–251, 2011.
- [28] Nadathur Varadarajan Satish Nagarajaiah. Short time fourier transform algorithm for wind response control of building with variable stiffness tmd. *Engineering Structures*, 2004.

- [29] Mehdi Setareh. Floor vibration control using semi-active tuned mass dampers. Canadian Journal of Civil Engineering, 29(1996):76–84, 2002.
- [30] William Thomson. *Theory of Vibration with Applications [Paperback]*. CRC Press, 2004.
- [31] Mi-Ching Tsai and Cheng-Chi Huang. Development of a variable-inertia divice with a magnetic planetary gearbox. *IEEE*, 2010.
- [32] Nadathur Varadarajan and Satish Nagarajaiah. Wind response control of building with variable stiffness tuned mass damper using empirical mode decomposition/hilbert transform. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(4):451–458, 2004.
- [33] Fu-Cheng Wang and Wei-Jiun Su. Impact of inerter nonlinearities on vehicle suspension control. *Vehicle System Dynamics*, 46(7):575 595, Jul 2008.
- [34] Tongyi Xu. Design and analysis of a shock absorber with variable moment of inertia for passive vehicle suspensions. *Journal of Sound and Vibration*, 2015.
- [35] Kazuhiko Yamada and Takuji Kobori. Control algorithm for estimating future rresponse of active variable stiffness structure. *Earthqua engineering and structural dynamics*, 1995.
- [36] Shengyuan Xu Yinlong Hu, Michael Z. Q. Chen and Yuance Liu. Semiactive inerter and its application in adaptive tuned vibration absorbers. *IEEE transactions on control systems technolgy*, 2016.