

Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño



Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería



Control de un cuadróptero

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta

José Ricardo Cuesta García

Ensenada, Baja California, octubre del 2015.

Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño

Control de un cuadróptero

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

Presenta

José Ricardo Cuesta García

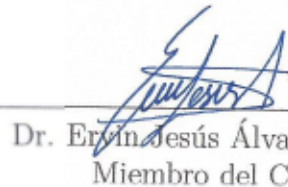
Aprobada por:



Dr. Manuel Moises Miranda Velasco
Director de Tesis



Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos
Miembro del Comité



Dr. Erwin Jesús Álvarez Sánchez
Miembro del Comité



Dr. José Ángel González Fraga
Miembro del Comité



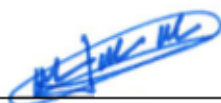
Dr. Miguel Enrique Martínez Rosas
Miembro del Comité

Ensenada, Baja California, octubre del 2015.

Resumen de la tesis de **José Ricardo Cuesta García**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS del programa de Maestría y Doctorado en Ciencias e Ingeniería (MYDCI) de la UABC. Ensenada Baja California, México, octubre del 2015.

Control de un cuadróptero

Resumen Aprobado por:



Dr. Manuel Moises Miranda Velasco
Director de Tesis

En este trabajo se presentan un par de algoritmos de control como una solución al problema de controlar la posición de un cuadróptero en el espacio. Dichos algoritmos están basados en generar un sistema de estructura variable. La propuesta genera una novedosa superficie la cual contiene una discontinuidad. Esta superficie presenta dos conjuntos no conexos en donde se presenta deslizamiento como en un modo deslizante convencional. También se presenta la extensión de los resultados para la regulación de una referencia deseada.

Por la manera en que se generó la superficie de conmutación, los algoritmos de control aquí presentados se implementan en otro tipo de sistemas de menor orden mostrando buenos resultados en simulación y de manera experimental.

Palabras Clave: *cuadróptero, superficie con discontinuidad, modos deslizantes, sistemas de estructura variable.*

Dedicatoria

A mis familiares y amigos.

Agradecimientos

Al Dr. Joaquín Álvarez por su apoyo en todo sentido en el desarrollo de esta tesis.

A mi familia.

A mi director de tesis y sinodales por su compromiso con este trabajo.

Índice general

Índice de figuras	III
Índice de tablas	V
1. Introducción	1
1.1. Justificación	2
1.2. Planteamiento del problema.	3
1.3. Objetivo	3
1.3.1. Objetivos particulares	4
1.4. Metodología	4
1.5. Organización del trabajo	4
2. Antecedentes	6
2.1. Problema de control	6
2.2. Estabilidad	8
2.3. Modos deslizantes	10
2.3.1. Sistemas de estructura variable	10
2.3.2. Control equivalente	12
3. Modelo del cuadróptero	14
3.1. Estado del arte	15
3.1.1. Modelos mecánicos	15
3.1.2. Parámetros no mecánicos	16
3.1.3. Despegue y aterrizaje vertical	16
3.1.4. Otras aplicaciones y trabajos sobre el cuadróptero	17
3.2. Modelo dinámico	17
3.2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	19
3.2.2. Metodología de Newton-Euler	21
3.3. Simplificaciones del modelo	23
3.3.1. Aeronave de despegue vertical en un plano	24
3.3.2. Plantas lineales desacopladas	24
3.3.3. Sistema torsional o rectilíneo	24
3.4. Conclusiones	25

4. Diseño de controlador por modos deslizantes usando una superficie discontinua	26
4.1. Modelo	26
4.2. Controlador	27
4.2.1. Atracción y deslizamiento	28
4.2.2. Comportamiento del sistema en la parte central de la superficie de conmutación	29
4.2.3. Sobrepasso máximo	30
4.3. Regulación	31
4.4. Una familia de superficies discontinuas	31
4.4.1. Ejemplos	32
4.5. Desarrollo matemático de la ley de control 1	33
4.5.1. Región G	34
4.5.2. Superficie s	35
4.5.3. Región R	37
4.5.4. Estabilidad del origen	38
4.5.5. Estabilidad de un punto fijo	38
4.6. Conclusiones	38
5. Diseño de controlador por modos deslizantes usando una superficie deslizante sigmoide	39
5.1. Sistema	40
5.2. Control	42
5.2.1. Superficie deslizante discontinua	42
5.2.2. Superficie deslizante continua	44
5.3. Resultados numéricos	47
5.4. Conclusiones	50
6. Conclusiones	51
Bibliografía	53

Índice de figuras

2.1.	Campo vectorial alrededor de una superficie discontinua.	11
2.2.	Retrato de fase de sistemas conmutados. a) y b) Sistema inestables. c) Sistema estable formado por una adecuada conmutación de a) y b). . .	12
2.3.	Construcción de Filippov de la dinámica del control equivalente en modos deslizantes.	13
3.1.	Los tres ejes de rotación principales de una aeronave.	16
3.2.	Esquema del cuadróptero. (a) Vista en isométrico. (b) Vista superior. .	18
3.3.	Descripción del movimiento del cuadróptero. El ancho de las flechas es proporcional a la velocidad rotacional de las aspas [1].	18
4.1.	Sistema torsional.	27
4.2.	Regiones generadas por la superficie discontinua.	27
4.3.	Campo vectorial y superficie de conmutación.	29
4.4.	Evolución del sistema al dejar la superficie deslizante.	30
4.5.	Resultados numéricos de (a) la posición, (b) esfuerzo de control y (c) plano de fase para el ejemplo 1.	33
4.6.	Retrato de fase del ejemplo 1 cuando las condiciones iniciales están dadas por $x(0) \in X_1 \times X_2$ donde $X_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $X_2 = \{-1,5, 1,5\}$. .	34
4.7.	Retrato de fase de dos superficies discontinuas.	34
4.8.	a) Posición angular y b) esfuerzo de control del ejemplo 3.	34
4.9.	Retrato de fase experimental del ejemplo 3.	35
4.10.	Regiones consideradas para el análisis de estabilidad.	35
4.11.	Regiones generadas por la superficie discontinua.	36
5.1.	Aeronave planar VTOL.	40
5.2.	a) Esquema de despegue de la aeronave PVTOL usando el control propuesto en el teorema 4. b) Altura de la aeronave con respecto al tiempo.	44
5.3.	Superficie deslizante sigmoide.	45
5.4.	Segmento de la superficie dada en (5.7)	45
5.5.	a) Esquema de despegue de la aeronave PVTOL usando el control propuesto en teorema 5. b) Altura de la aeronave con respecto al tiempo. .	47

- 5.6. Resultados en simulación del PVTOL usando el control propuesto en teorema 5. (a) Altura y velocidad, (b) ángulo de giro de la aeronave, (c) entradas de control y (d) plano de fase de la altura y su velocidad. . . . 48
- 5.7. Resultados en simulación del PVTOL usando el control propuesto en teorema 5. (a) Altura y velocidad, (b) ángulo de giro de la aeronave, (c) entradas de control y (d) plano de fase de la altura y su velocidad. . . . 49

Índice de tablas

- 3.1. Algunos efectos físicos rotacionales que actuan sobre el cuadróptero [1]. 23
- 3.2. Algunos efectos físicos rectilíneos que actuan sobre el cuadróptero [1]. . 23

Capítulo 1

Introducción

La agricultura es una actividad de gran importancia estratégica, debido a que es una como base fundamental para el desarrollo autosustentable y riqueza de las naciones. De acuerdo a la Academia Internacional de Ingeniería de los Estados Unidos de América, la mecanización agraria está considerado dentro de los 20 mayores logros de la ingeniería del siglo XX. En la actualidad, la agricultura depende de la tecnología así como de los desarrollos en diversas áreas de la ciencia como: física, biología, entre otras. Algunos de los procesos agrícolas como la irrigación, el drenaje, la conservación, la sanidad, etc. vitales para una agricultura exitosa emplean el conocimiento especializado de ingenieros en cada área [2].

En el contexto de la agricultura moderna, una tarea importante es monitorizar diferentes aspectos relacionados con los cultivos, tales como humedad relativa del aire, temperatura del suelo, contenido de nutrientes, la humedad del suelo, entre otros. Con esta información es posible entender cómo el agua se mueve a través de un campo o comprender la actuación del carbono y nitrógeno en los ciclos del suelo, lo cual permite predecir y mejorar el crecimiento de los cultivos con un mejor uso de los recursos.

Una manera de recolectar dichos datos es a través de una red inalámbrica de sensores, esta red la cual está constituida por pequeños dispositivos distribuidos en un área de estudio específica. Estos dispositivos son capaces de comunicarse entre sí y/o con una central de forma inalámbrica. Cada nodo de la red puede ser un sensor inteligente, el cual provee funciones extra, más allá de las necesarias para obtener una correcta interpretación de las variables medidas [3].

En el campo, una red de sensores es una forma eficiente y eficaz de adquirir el valor de las variables necesarias para el desarrollo del producto cultivado, de tal manera que esta información pueda ser almacenada, analizada e interpretada, permitiendo al agricultor tomar decisiones preventivas o correctivas necesarias para una agricultura eficiente.

Algunas de las variables necesarias en el control del cultivo requieren de sensores que no permiten su utilización de manera fija por situaciones ambientales. En la actualidad algunas de estas mediciones se realizan de manera manual y son ingresadas a la bitácora del cultivo, haciéndolo un proceso lento y altamente propenso a errores humanos.

Con el avance de la tecnología, y el abaratamiento de la misma, en la actualidad es posible contar con vehículos aéreos no tripulados (UAV por sus siglas en inglés Unmanned Aerial Vehicle) que realicen tareas de navegación sin la intervención humana. Existen algunos desarrollos de vehículos terrestres no tripulados, sin embargo, en ciertos cultivos (e.g. el tomate) es importante poder inspeccionar de manera visual la parte superior de la planta (cabeza). Por esta causa es recomendable el uso de un vehículo aéreo no tripulado en donde se controle la posición y seguimiento de una trayectoria con mínimos errores.

Historicamente, los UAV eran simplemente aviones pilotados por sistemas de tele-control y telemetría conocidos como “drones”¹, sin embargo, con el paso del tiempo se han desarrollado e implementado esquemas de control automático para que realicen tareas de manera autónoma. Desde la perspectiva de control de aeronaves a escala se han creado dos variantes; la primera y más antigua fueron los controlados desde una ubicación remota; la segunda, los que vuelan de acuerdo a un plan de vuelo preprogramado usando sistemas más complejos de automatización dinámica, donde ambas variantes incluyen un control interno para la asistencia del piloto.

En situaciones militares, los UAV como sistemas autónomos, pueden operar sin intervención humana alguna durante la misión encomendada, es decir, pueden despegar, volar y aterrizar automáticamente [4]. Los UAV también son utilizados en un pequeño, pero creciente número de aplicaciones civiles, como en labores de lucha contra incendios o seguridad civil, como la vigilancia de oleoductos.

Los vehículos aéreos no tripulados suelen ser preferidos para misiones consideradas aburridas o peligrosas para vehículos tripulados. Otra ventaja es que su duración máxima volando solo es limitada por su combustible y por su sistema de vuelo, sin tener las limitaciones correspondientes a tener tripulación. Es importante notar que los UAV no requieren espacio para un tripulante, por lo que el diseño de los UAV en tamaño y forma se puede ajustar a las necesidades de la tarea a realizar.

1.1. Justificación

Un cuadróptero es un UAV que se eleva y propulsióna mediante cuatro rotores, los cuales están generalmente colocados en las extremidades de soportes en forma de una cruz. Para evitar que el aparato gire respecto a su eje vertical es necesario que dos hélices giren en un sentido y las otras dos en sentido contrario. Los diseños más recientes de cuadrópteros se han vuelto populares en la investigación de UAV debido a su costo e implementación. Debido a su tamaño pequeño y maneobrabilidad, los cuadrópteros pueden realizar vuelos tanto en interiores como en exteriores, ya que estos vehículos emplean un sistema de control y sensores electrónicos para estabilizar la aeronave.

Existen varias ventajas de los cuadrópteros sobre los helicópteros a escala comparable. Primeramente, los cuadrópteros no requieren uniones para variar el ángulo de la aspa del rotor mientras ésta gira, lo cual simplifica el diseño y mantenimiento del

¹Aeronave no tripulada que es guiada de forma remota.

vehículo. En segundo lugar, el uso de cuatro rotores con un movimiento individual de cada rotor permite tener un diámetro menor que el equivalente al rotor de un helicóptero, reduciendo el gasto energético durante el vuelo. Algunos cuadrópteros de pequeña escala tienen protección en los rotores, permitiendo vuelos a través de diversos ambientes con un bajo riesgo de dañar el vehículo o su entorno, y esto hace que este tipo de vehículos sean mas seguros para interactuar en interiores.

En el Cuerpo Académico de Comunicaciones e Instrumentación Electrónica (CACEI)², uno de los intereses principales es realizar la medición de procesos agrícolas utilizando técnicas de procesamiento digital de imágenes (PDI). El PDI permite identificar, de manera no invasiva, la madurez del fruto, plagas, deficiencia de algún nutriente, etc. Una etapa del proyecto es la adquisición de la imagen aérea desde un punto fijo. Dicho punto es determinado por el usuario y dependerá del área o zona que se quiera procesar mediante la imagen adquirida por una cámara.

La importancia de adquirir imágenes de forma adecuada es prioritaria para realizar su procesamiento. Si la imagen se toma de forma periódica bajo condiciones similares, permite un análisis temporal del objeto de estudio. Así, una propuesta del CACEI es utilizar un cuadróptero con una cámara a bordo para la captura de imágenes vía aérea, colocándolo en un punto específico y de tal manera que se realice la adquisición de la imagen de forma automática, permitiendo un mejor análisis.

Una manera de lograr lo anterior es a través de algoritmos de control automático, así el vehículo aéreo será capaz de realizar actividades de inspección, recolectar datos, fotografía, video, etcétera. Estas actividades pueden tener impacto en el área militar, comercial, seguridad, agricultura, investigación, etcétera.

1.2. Planteamiento del problema.

Para lograr la correcta adquisición de imágenes, como se mencionó en la sección anterior es importante que la imagen se tome desde el mismo punto, por lo que es necesario que el cuadróptero cuente con un algoritmo de control de posición. Dada la complejidad del problema, se considera que el primer paso es, proponer un controlador que permita el despegue, aterrizaje y ubicación en un punto fijo del cuadróptero para la correcta adquisición de la imagen a procesar.

1.3. Objetivo

Diseñar un control de regulación para una clase de vehículos aéreos no tripulados, dedicado al despegue y aterrizaje de forma vertical de la aeronave conocida como cuadróptero.

²Cuerpo Académico perteneciente a la Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño de la UABC, Ensenada con el proyecto Procesamiento de Imágenes Aplicado a la Agricultura.

1.3.1. Objetivos particulares

- Diseñar un controlador para regular los ángulos de un cuadróptero en un valor fijo en el espacio de estado.
- Diseñar un controlador para regular la posición de un cuadróptero sobre un punto fijo en el espacio.
- Evaluar el desempeño de convergencia del controlador mediante simulaciones numéricas.

1.4. Metodología

Este trabajo de tesis se enfoca al estudio teórico y al apoyo de herramientas numéricas para las simulaciones del modelo matemático dinámico del mecanismo a considerar.

Para realizar cualquier análisis dinámico es necesario contar con un modelo matemático que describa el fenómeno a estudiar. Las consideraciones usadas en el modelo de un UAV tipo cuadróptero servirán no sólo en este trabajo, sino también a futuros trabajos que se realicen en este tipo de mecanismo, ya sea para su estudio o mejora en el modelo o para el diseño de controladores u otras aplicaciones como son los observadores.

En este modelo se considerará, en caso de presentarse, el fenómeno de fricción en los actuadores, pero será modelado suponiendo que es estático y continuo. Para el desarrollo del controlador se supone que tenemos acceso al estado completo y que el objetivo de control se limitará al caso de regulación de ciertas variables en el espacio de estado.

Una vez que se cuente con las ecuaciones dinámicas del mecanismo, lo siguiente será proponer una ley de control que permita al mecanismo darle cierta autonomía. En particular se buscará que dicho controlador proporcione la acción requerida para que el mecanismo sea llevado de un punto a otro en el espacio aéreo. Esto será de suma utilidad para el despegue y aterrizaje del vehículo.

El diseño del controlador será desarrollado pensando en el UAV como un mecanismo subactuado, por lo cual, el controlador podrá ser empleado en otro mecanismo o sistema equivalente que presente las mismas características que el UAV.

No se abordará en este trabajo la implementación física del controlador en un cuadróptero, pero sí en un mecanismo más simple. Para el modelo dinámico no se consideraran perturbaciones externas o paramétricas, ni el efecto aerodinámico; tampoco se consideran modelos dinámicos de fricción y/o discontinuidades en dicho fenómeno, esto es debido a la metodología empleada.

1.5. Organización del trabajo

La organización de este trabajo se da de la siguiente manera; en el capítulo 2 se dan los preliminares matemáticos los cuales incluyen el problema de control, el criterio

de estabilidad usado en este trabajo y una breve descripción de la teoría de modos deslizantes.

El modelo del cuadróptero se desarrolla en el capítulo 3, donde se describen dos metodologías para obtener dicho modelo. También se describen algunos fenómenos que pueden ser considerados en el modelo matemático del cuadróptero. El modelo del cuadróptero obtenido permite que se deriven otros tres modelos de sistemas más simples pero igualmente estudiados. El modelo más simplificado servirá de base para el desarrollo del controlador.

En el capítulo 4 se presenta el desarrollo de un control de regulación por modos deslizantes, donde la superficie deslizante presenta una discontinuidad, lo cual permite bajo ciertas condiciones que el sistema llegue a la posición deseada con una velocidad constante y posteriormente converja de forma asintótica al punto de equilibrio. La superficie deslizante propuesta, al presentar una discontinuidad, no permite el uso de las herramientas clásicas propuestas por [5] para mostrar que se tiene convergencia al punto de equilibrio. Por lo tanto, se presenta un análisis a partir del campo vectorial, así como resultados numéricos y experimentales para mostrar que el esquema de control propuesto converge al punto de equilibrio. Los lemas, teoremas y corolarios obtenidos son la aportación principal de este trabajo. Se presentan resultados numéricos y experimentales de un sistema torsional que reafirman la teoría.

En el capítulo 5 se implementa un esquema de control para la altitud y el ángulo de giro de un PVTOL (Planar Vertical Take-Off Landing), utilizando un control por modos deslizantes empleando la superficie discontinua del capítulo 4. A partir de este resultado, se desarrolla otra superficie deslizante que llega a una referencia fija en tiempo finito con una velocidad constante acotada. La cota de velocidad y el punto de referencia se establecen como parámetros del control. Además, se muestra la estabilidad global del punto de equilibrio. Se presentan los resultados obtenidos en la simulación numérica al implementar los controladores propuestos.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones obtenidas en este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Antecedentes

En esta capítulo se presentaran las definiciones, teoremas y herramientas básicas que serán empleados a lo largo de este trabajo de tesis. Los temas que se presentan, están la estabilidad en el sentido de Lyapunov, conjuntos invariantes, modos deslizantes y sistemas de estructura variable.

2.1. Problema de control

Un problema clásico en la teoría de control es el diseño de una ley de realimentación con el propósito de imponer una respuesta en estado estable¹ prescrita [6]. Un ejemplo es el problema de que, dada la salida $y(\cdot)$ de una planta controlada, siga una salida de referencia prescrita $y_{\text{ref}}(\cdot)$. Además, de que sólo teniendo acceso a $y(\cdot)$ se pueden rechazar asintóticamente cualquier perturbación no deseada $w(\cdot)$ de una clase particular de perturbaciones. En ambos casos, el objetivo de control es que, el llamado *error de seguimiento*, definido como:

$$e(t) = y_{\text{ref}}(t) - y(t), \quad (2.1)$$

cumpla con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (2.2)$$

En otras palabras, se busca imponer un comportamiento deseado a través de un sistema de control a una respuesta en estado estable de forma tal que el error de seguimiento asociado sea idénticamente cero.

Usualmente un sistema, llamado planta, la cual no puede ser alterada por el diseñador, tiene las siguientes variables asociadas a él:

1. Una variable de *entrada* $u(t)$ la cual influye en la planta y ésta puede ser manipulada.
2. Una variable de *perturbación* $v_p(t)$ la cual influye en la planta pero que no puede ser manipulada.

¹estado estable: respuesta del estado cuando el tiempo incrementa.

3. Una variable medida $y(t)$ la cual es usada para obtener información acerca del estado de la planta; esta variable es usualmente contaminada por el ruido de observación $v_m(t)$.
4. Una variable a controlar $z(t)$ la cual es la variable a controlar.
5. Una variable de *referencia* $r(t)$ la cual representa el valor prescrito de la variable a controlar $z(t)$.

Así, de manera general, el problema de *seguimiento* es el siguiente: para una variable de referencia dada, encontrar una entrada de control apropiada de manera que la variable a controlar siga la variable de referencia, esto es,

$$z(t) \approx r(t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.3)$$

donde t_0 es el tiempo en el cual el control comienza. Usualmente, la variable de referencia no es conocida con anterioridad. Una restricción práctica es que el intervalo de valores en los cuales la entrada $u(t)$ puede variar es limitada. Incrementar este intervalo usualmente involucra reemplazar la planta por una mayor y por lo tanto una inversión.

Por otra parte, es posible definir el problema de control, como un problema de *seguimiento* y, como un caso especial, el de *regulación* [7].

Por otra parte, los siguientes aspectos deben ser tomados en cuenta para el diseño de sistemas de seguimiento que satisfagan el requerimiento básico dado en (2.3):

1. La perturbación influye en la planta de una manera impredecible.
2. Los parámetros de la planta pueden no ser conocidos de manera precisa y pueden variar.
3. El estado inicial de la planta puede ser desconocido.
4. La variable de observación puede no dar directamente información acerca del estado de la planta y aun mas, puede estar contaminada por ruido.

Una clase importante de problemas de seguimiento es donde la variable de referencia es constante por largos periodos de tiempo. En estos casos es usual que la variable de referencia sea un punto de operación del sistema y se hable del problema de *regulación*. Aquí, usualmente, el principal problema es mantener a la variable a controlar en el punto de operación a pesar de las perturbaciones que actúan sobre el sistema.

Considerando lo expuesto anteriormente, podemos emplear la siguiente definición dada por [8]:

Definición 1. Considere $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ y $t \in T \subset \mathbb{R}$; el estado, entrada, salida y tiempo de un sistema dinámico, respectivamente y las funciones vectoriales

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. El problema de *seguimiento asintótico* consiste en que, dado un sistema dinámico descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t), \\ y &= h(x),\end{aligned}$$

y una trayectoria de salida deseada y_d , se debe encontrar una ley de control para la entrada u tal que, comenzando desde cualquier condición inicial del estado en una región Ω , los errores de seguimiento

$$y(t) - y_d(t), \tag{2.4}$$

tiendan a cero, mientras el espacio de estado completo x permanece acotado.

2.2. Estabilidad

Un concepto fundamental en la teoría de control es la estabilidad, el cual puede ser estudiado desde diferentes perspectivas y definiciones de acuerdo a la metodología o aplicación que se esté usando. En este trabajo se hará uso de la definición de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Así, de acuerdo a [7] se tienen las siguientes definiciones.

Definición 2. Considere la ecuación diferencial en variables de estado

$$\dot{x} = f(x(t), t),$$

cuya solución nominal $x_0(t)$ es:

1. *Estable en el sentido de Lyapunov*, si para cualquier tiempo t_0 y cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ (dependiente de ε y posiblemente de t_0) tal que $\|x(t_0) - x_0(t_0)\| \leq \delta$ implique que $\|x(t) - x_0(t)\| < \varepsilon$ para toda $t \geq t_0$.
2. *Asintóticamente estable* si:
 - a) Es estable en el sentido de Lyapunov;
 - b) Para toda t_0 existe una $\rho(t_0) > 0$ (posiblemente dependiente de t_0) tal que $\|x(t_0) - x_0(t_0)\| < \rho$ implique que $\|x(t) - x_0(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.
3. *Asintóticamente estable a lo largo* si:
 - a) Es estable en el sentido de Lyapunov;
 - b) Para cualquier $x(t_0)$ y cualquier t_0 , $\|x(t) - x_0(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Los siguientes conceptos y teoremas tomados de [8] serán utilizados para las demostraciones de los teoremas presentados en el capítulo 4, los cuales representan una de las aportaciones de este trabajo de tesis.

Definición 3. El sistema no lineal $\dot{x} = f(x, t)$ se dice que es *autónomo* si f no depende explícitamente del tiempo, i.e. si las ecuaciones de estado del sistema se pueden escribir como

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.5)$$

En otro caso, el sistema se llama *no autónomo*.

Definición 4. Una función continua escalar $V(x)$ se dice que es *definida positiva localmente* si

1. $V(0) = 0$ y
2. en una bola B_r se tiene que si $x \neq 0$ entonces $V(x) > 0$.

Si además el punto 2 se mantiene para todo el espacio de estado, entonces $V(x)$ se dice que es *definida positiva globalmente*.

Definición 5. Si, en una bola B_r , la función $V(x)$ es definida positiva y tiene derivadas parciales continuas y su derivada con respecto al tiempo a lo largo de cualquier trayectoria de estado del sistema (2.5) es semidefinida negativa, i.e. $\dot{V}(x) \leq 0$, entonces $V(x)$ se dice que es una *función de Lyapunov* para el sistema (2.5).

Definición 6. Un conjunto G es un *conjunto invariante* de un sistema dinámico si para cada trayectoria del sistema que empiece desde un punto en G permanece en G para todo tiempo futuro.

Teorema 1 (Estabilidad local). *Si, en una bola B_r , existe una función escalar $V(x)$ con primeras derivadas parciales continuas tal que*

1. $V(x)$ es definida positiva (localmente en B_r).
2. $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa (localmente en B_r).

Entonces el punto de equilibrio $x = 0$ es estable. Además, si la derivada $\dot{V}(x)$ es definida negativa localmente en B_r , entonces la estabilidad es asintótica.

Teorema 2 (Conjunto invariante local). *Considere un sistema autónomo de la forma (2.5), con f continua y sea $V(x)$ una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Suponga que*

1. Para alguna $l > 0$, la región Ω_l definida por $V(x) < l$ está acotada.
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ para toda x en Ω_l .

Sea R el conjunto de todos los puntos dentro de Ω_l donde $\dot{V}(x) = 0$, y M es el mayor conjunto invariante en R . Entonces, cada solución $x(t)$ originada en Ω_l tiende a M mientras $t \rightarrow \infty$.

2.3. Modos deslizantes

Un problema de estudio importante es el control de sistemas que presentan incertidumbres y/o perturbaciones. Una de las estrategias de control desarrolladas para esta clase de sistemas es el control por modos deslizantes, la cual se describe en [9]. La teoría de control por modos deslizantes es la formalización de controladores tipo todo-nada (ON-OFF) que son caracterizados por un interruptor (switch) que permite o no la acción o actuación de la entrada de control. El control por modos deslizantes es robusto ante incertidumbres e insensible a las perturbaciones acotadas y acopladas a la señal de control, su aplicación a sistemas electro-mecánicos para el caso de regulación ha sido estudiado por diversos autores, como en [10] y [11].

De acuerdo a [8], las imprecisiones del modelo pueden presentarse por la falta de conocimiento en la planta (e.g., parámetros desconocidos de la planta) o por representaciones simplificadas de la dinámica del sistema (e.g. modelar la fricción como fenómeno lineal). Desde el punto de vista de control, las incertidumbres del modelo se pueden clasificar en dos tipos

- incertidumbres estructurales (o paramétricas)
- incertidumbres no estructurales (o dinámicas no modeladas)

Las imprecisiones del modelado pueden tener fuertes efectos adversos en los sistemas de control no lineales. Una forma de enfrentar las incertidumbres del modelo es el control robusto. La estructura usual de un controlador robusto es compuesto por una parte nominal, similar a la linealización por retroalimentación o control inverso y términos adicionales auxiliares para enfrentar la incertidumbre del modelo. Una aproximación sencilla al control robusto, y el tema principal de esta sección, es la llamada metodología de control deslizante.

2.3.1. Sistemas de estructura variable

Un considerable número de procesos en mecánica, ingeniería eléctrica y otras áreas pueden ser caracterizados por el ecuaciones diferenciales cuya dinámica presenta una discontinuidad con respecto al estado. Un ejemplo típico de esto, es la fricción seca (también llamada fricción de Coulomb) en un sistema mecánico cuya fuerza toma dos valores de signo opuesto dependiendo de la dirección del movimiento. Formalmente, un sistema discontinuo puede ser descrito por la ecuación

$$\dot{x} = f(x, t)$$

donde el vector de estado del sistema es $x \in \mathbb{R}$, t es el tiempo y $f(x, t)$ presenta las discontinuidades en un cierto conjunto de dimensión $n - 1$ en el espacio de estado (x, t) . Describamos el conjunto de puntos de la discontinuidad mediante la expresión

$$s_i(x, t) = 0, \quad s_i(x, t) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m.$$

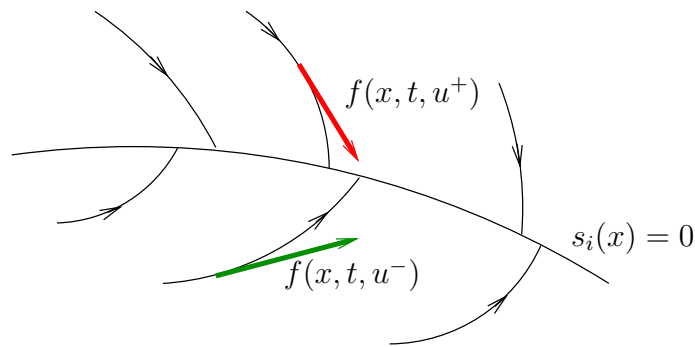


Figura 2.1: Campo vectorial alrededor de una superficie discontinua.

A estas expresiones se les conoce también como superficies de discontinuidad.

En sistemas realimentados, la dinámica discontinua puede ser producida por el lazo de control

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad u \in \mathbb{R}^m$$

con el control es dado por

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(x, t), & s_i(x) > 0, \\ u_i^-(x, t), & s_i(x) < 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m,$$

donde $u^T = (u_1, \dots, u_m)$ y las funciones $u_i^+(x, t)$ y $u_i^-(x, t)$ son continuas.

El vector de estado de ciertos sistemas puede permanecer en una de las superficies de discontinuidad o en su intersección en un tiempo finito. Por ejemplo, en la figura 2.1 se muestran las trayectorias del vector de estado, las cuales apuntan hacia la superficie de discontinuidad $s_i(x) = 0$ en una vecindad cercana. Un término aceptado para describir el comportamiento de este tipo de superficies discontinuas es *modo deslizante* [9].

Para que exista un comportamiento de modo deslizante la distancia hacia la superficie y su velocidad de cambio \dot{s} deben ser de signo opuestos, es decir,

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0.$$

Una característica que presentan los sistemas de estructura variable es que pueden presentar distintos comportamientos dependiendo de la estrategia de conmutación que se asigne en el diseño del controlador. Por ejemplo considere los sistemas cuyo retrato de fase se muestra en la figura 2.2a y 2.2b, cuyo origen es inestable en ambos casos. Ahora suponga que la estrategia de conmutación en el controlador es tal que en ciertas regiones del espacio de estado esté presente uno u otro de los sistemas descritos anteriormente tal como se muestra en la figura 2.2c. Es posible observar que en el nuevo sistema generado el origen es estable a partir de una correcta estrategia de conmutación en el diseño. En este caso la superficie $s_2 = 0$ es simplemente una superficie de conmutación mientras que $s_1 = 0$ presenta la característica de modo deslizante. Así, el diseñar una estrategia de conmutación entre dos sistemas inestables puede darnos un punto de

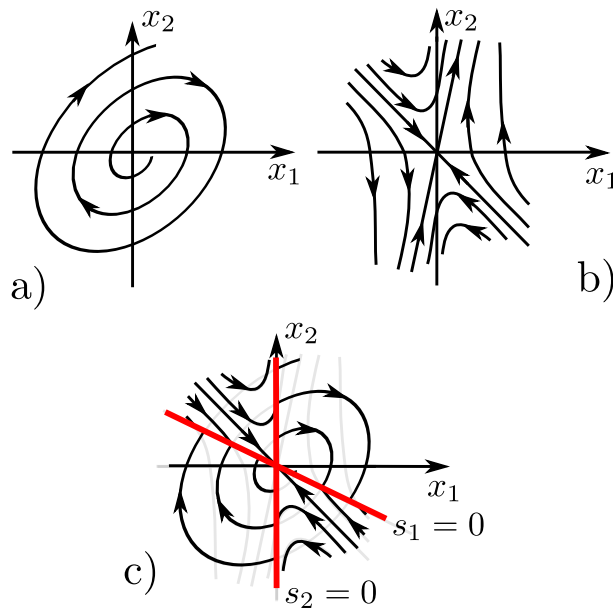


Figura 2.2: Retrato de fase de sistemas conmutados. a) y b) Sistema inestable. c) Sistema estable formado por una adecuada conmutación de a) y b).

equilibrio estable. Sin embargo, es posible el caso contrario, es decir, dos sistemas con orígenes estables pueden generar un sistema con el origen inestable dependiendo de la estrategia de conmutación.

2.3.2. Control equivalente

El movimiento del sistema sobre las superficie deslizante puede tener una interpretación geométrica en el espacio de estado como el "promedio" de la dinámica del sistema en ambos lados de la superficie.

La dinámica mientras se está en el modo deslizante puede ser escrito como

$$\dot{s} = 0. \quad (2.6)$$

Resolviendo la ecuación anterior formalmente para la entrada de control, se obtiene una expresión para u llamada *control equivalente* u_{eq} , el cual puede ser interpretado como una ley de control continuo tal que mantiene la igualdad de (2.6) si la dinámica fuera conocida de manera exacta. De esta forma, para un sistema de la forma

$$\ddot{x} = f + u,$$

tenemos

$$u_{eq} = -f + \ddot{x} - \lambda \dot{\tilde{x}},$$

donde λ es una constante real y x, \tilde{x} son funciones escalares diferenciables. La dinámica del sistema sobre el modo deslizante es

$$\ddot{x} = f + u_{eq} = \ddot{x}_d - \lambda \dot{\tilde{x}}.$$

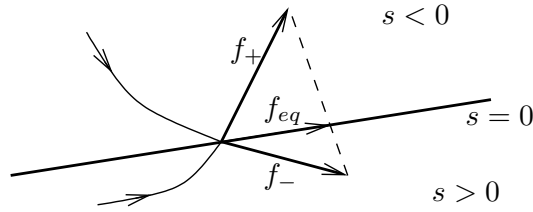


Figura 2.3: Construcción de Filippov de la dinámica del control equivalente en modos deslizantes.

Geoméricamente, el control equivalente puede obtenerse por

$$u_{eq} = \alpha u_+ + (1 - \alpha) u_- \quad (2.7)$$

donde $\alpha \in [0, 1]$. De esta forma, tenemos que el control equivalente es una combinación convexa de los valores de u en ambos lados de la superficie s . El valor de α se puede obtener de (2.6), el cual corresponderá a que las trayectorias del sistema sean tangentes a la superficie. La construcción intuitiva es ilustrada en la figura 2.3, donde $f_+ = (\dot{x}, f + u_+)^T$, $f_- = (\dot{x}, f + u_-)^T$ y $f_{eq} = (\dot{s}, f + u_{eq})^T$. La justificación formal fue desarrollada a inicios de los 60s por el matemático ruso A.F.Filippov.

La teoría presentada en este capítulo sobre modos deslizantes y sistemas de estructura variable será utilizada como fundamento para poder describir los algoritmos de control propuestos en este trabajo de tesis. Por otra parte, la demostración de los resultados de los siguientes capítulos estará basada en la sección de estabilidad.

Capítulo 3

Modelo del cuadróptero

Un cuadróptero es un tipo de UAV que tiene la habilidad de realizar aterrizajes y despegues en un plano vertical. Físicamente, un cuadróptero tiene una forma de cruz con un rotor en cada esquina, esta no es una configuración novedosa de vehículo aéreo, ya que existe desde el año de 1922 [12].

En los últimos tiempos los cuadrópteros han tomado relevancia en la investigación, debido a su pequeño tamaño y ágil maniobrabilidad, aunado al desarrollo de sistemas de sensores y control electrónicos de pequeño tamaño y bajo costo.

Los UAV fueron considerados inicialmente para aplicaciones exclusivamente militares, pero debido a la disminución del costo de manufactura, en la actualidad es posible disponer de estos vehículos voladores para aplicaciones civiles. La mayor ventaja que presentan los UAV sobre los vehículos aéros tripulados es que el tiempo de vuelo está restringido solo por el combustible o la duración de la batería. Además, en caso de tener planes de vuelos automáticos, no son afectados por componente humano como la fatiga. Los vehículos no tripulados también son de suma utilidad para misiones y tareas que están más allá de las limitaciones y resistencia que pueda tener un ser humano.

A diferencia de las aeronaves de alas fijas, los cuadrópteros son clasificados como helicópteros debido a que su ascenso es generado por un conjunto de hélices giratorias. De igual manera, a la mayoría de los helicópteros, los cuadrópteros generalmente usan aspas de manera simétrica, las cuales pueden ser ajustadas como un solo grupo. El movimiento angular del vehículo es generado controlando la velocidad de rotación de uno o más de los rotores, produciendo un cambio en el torque y por lo tanto el giro de la aeronave.

En el cuadróptero, cada rotor tiene un control individual que permite producir una diferencia en la inclinación del vehículo de tal forma que se puede tener un desplazamiento (o translación) transversal o longitudinal, mientras que la altitud depende de la velocidad conjunta de los rotores. De esta forma, es necesario controlar cada rotor para poder manipular la inclinación y la altura. Para lograr este objetivo es importante contar con un modelo matemático apropiado del cuadróptero.

Actualmente existen diversos modelos que describen la dinámica del cuadróptero, los cuales se basan en dos metodologías principalmente: las leyes de Newton y las ecua-

ciones de Euler-Lagrange. Además, existen trabajos que incluyen la dinámica de las aspas, rotores, sensores y/o cámaras de video. Por ejemplo, en la literatura hay estudios centrados en el modelo de la cámara [13]. Otro estudio completo sobre información general de los cuadrópteros se presenta en [14]. Desafortunadamente, en ambos trabajos, los modelos dinámicos son estudiados de manera superficial. En esta parte del trabajo se realiza un estudio del estado del arte de los modelos dinámicos principales del cuadróptero y sus características.

3.1. Estado del arte

Las aplicaciones del cuadróptero están basadas en colocar la aeronave en un punto en el espacio o seguir una trayectoria, por lo que para lograr dichos objetivos, se han investigado y diseñado diferentes tipos de controladores automáticos. Sin embargo, diseñar un controlador requiere de un modelo que represente el comportamiento del sistema a ser controlado, y algunas veces, un modelo más completo que representa al sistema real es usualmente complicado. Por otra parte, un modelo simple puede no representar completamente el comportamiento del sistema. Por esta razón, es importante tener un modelo matemático adecuado, dependiendo de la aplicación.

Algunos modelos son más adecuados para el estudio de controladores, perturbaciones, robustez y otros modelos para el estudio relacionado con la identificación y su implementación física.

En la siguiente sección se introduce y categorizan diferentes modelos matemáticos que describen la dinámica del cuadróptero. Los modelos que se obtienen están basados principalmente en dos metodologías que están enfocadas en analizar al cuadróptero como un sistema puramente mecánico.

3.1.1. Modelos mecánicos

Los sistemas mecánicos son aquellos sistemas constituidos fundamentalmente por componentes, dispositivos o elementos que tienen como función específica transformar o transmitir el movimiento desde las fuentes que lo generan, al transformar distintos tipos de energía. Se caracterizan por presentar elementos o piezas sólidos, con el objeto de realizar movimientos por acción o efecto de una fuerza.

En la literatura existen modelos que incluyen diferentes elementos, por ejemplo, partes mecánicas, aspas, motores de CD, sensores, cámaras, etc. Existen principalmente dos tipos de modelos en la dinámica de mecanismos. Uno de esos modelos usa las leyes de Newton (e.g., en [15, 16, 17]) y los otros aplican la metodología de Euler-Lagrange (e.g. en [1, 18]).

Un modelo básico del cuadróptero y de cualquier aeronave incluye su posición en el espacio tridimensional (largo x , ancho y y alto z) y otras tres coordenadas relacionadas con los ángulos respecto al centro de masa (giro ψ , cabeceo θ y alabeo ϕ , figura 3.1) [19, 20]. Una manera de analizar la dinámica del mecanismo es descomponiendo el

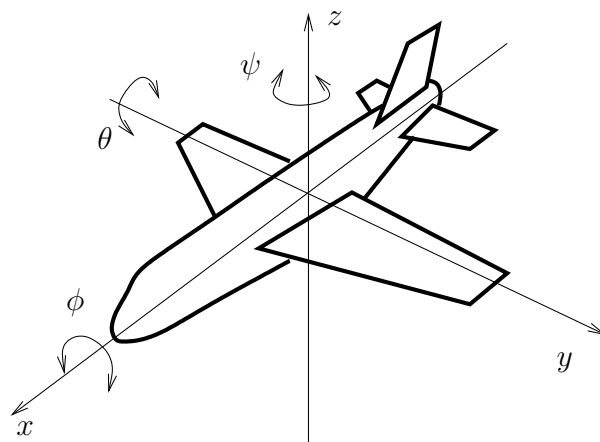


Figura 3.1: Los tres ejes de rotación principales de una aeronave.

modelo en las componentes translacionales y rotacionales, como se muestra en [21, 22]. El modelo mecánico se emplea para el análisis y control del cuadróptero, pero pueden ser considerarse otras variables o elementos.

3.1.2. Parámetros no mecánicos

En [23] y [24], los autores consideran los efectos aerodinámicos del mecanismo. Otras investigaciones muestran los efectos de las aspas [17] o la aerodinámica de las propelas como en [25]. La dinámica de los rotores se incluye en [21, 26, 18, 27]; en estos casos, el rotor es analizado como un motor de CD. En [28], los autores incluyen en el modelo matemático los sensores y su dinámica.

Por otra parte, muchas aplicaciones del cuadróptero incluyen cámaras de video y su comportamiento es incluido en el modelo matemático [29, 30, 13]. En particular, en [29] se considera una cámara de video tipo esférica y en [13] usan la proyección de punto de desvanecimiento.

Algunos autores, desarrollan modelos detallados de las propelas y motores, pero en el modelo mecánico solo son considerados dos de las seis variables de estado (altitud y ángulo) [31].

3.1.3. Despegue y aterrizaje vertical

Dada la complejidad de los modelos, algunos autores agregan restricciones al movimiento para simplificar el modelo del cuadróptero en un vuelo estacionario [29] o usan la linealización del modelo no lineal [16, 32]. En [33], los autores hacen un modelo bi-dimensional del cuadróptero, haciendo que el cuadróptero permanezca en un plano y su movimiento es restringido. Cuando el UAV tiene una restricción planar, la aeronave presenta un despegue y aterrizaje vertical (*VTOL* por sus siglas en inglés Vertical Take-Off Landing), permitiendo que el cuadróptero también sea analizado como un

vehículo VTOL [34, 35]. Este tipo de modelos incluyen la dinámica de tres coordenadas: altitud, desplazamiento y rotación. Estas tres variables están incluidas también en el movimiento de un cuadróptero sin restricciones. Por lo tanto, la dinámica completa del cuadróptero es más compleja comparada con un VTOL. Aunque menos complejo, el problema del VTOL permanece como un problema de investigación [36].

3.1.4. Otras aplicaciones y trabajos sobre el cuadróptero

Para completar la revisión literaria sobre los diversos trabajos y áreas que emplean cuadrópteros tenemos que en [37] muestran un cuadróptero sincronizado con música mientras éste oscila. Por otra parte, otros trabajos incluyen la dinámica de los actuadores. En [38], el modelo del actuador es desarrollado con gran detalle.

La mayor parte de los trabajos reportados usan un cuadróptero de pequeñas dimensiones, de manera que su dinámica es más sencilla de describir. En [39], los autores usan un modelo simplificado de un cuadróptero de dimensiones mayores capaz de llevar carga útil. Por otra parte, usando un controlador, en [34, 40, 27] los autores muestran sus resultados de manera numérica, mientras que [39, 33, 37] los autores muestran sus resultados de manera experimental. En [1, 22] muestran simulaciones y experimentos y en muy pocos estudios, como [21], se enfocan a identificar el sistema.

Finalmente, tenemos los trabajos que hacen una recopilación de estudios. En [14], los autores presentan un estudio general sobre sensores, el sistema de visión, navegación y sus aplicaciones. Por otra parte, en [13] se hace un estudio detallado sobre el trabajo realizado en el área de visión por cámara montados sobre los cuadrópteros.

3.2. Modelo dinámico

En esta sección se describe un modelo dinámico usado para el cuadróptero desde el punto de vista mecánico. El cuadróptero tiene cuatro rotores consistentes en motores eléctricos de CD (véase figura 3.2a). Los dos pares de propelas (D_1, D_3) y (D_2, D_4) giran en dirección opuesta para eliminar el efecto del torque (véase figura 3.2b).

Para lograr el movimiento sobre la dirección de y se incrementa la velocidad del rotor Ω_4 mientras que de manera simultánea se reduce la velocidad del motor Ω_2 (véase figura 3.3d); para avanzar en la dirección x , los rotores trabajan de forma similar [21]. El giro dextrógiro de la aeronave se logra acelerando los rotores que giran en sentido dextrógiro y disminuyendo la velocidad de los rotores que giran en sentido levógiro. Para el giro levógiro se realiza algo similar (véase figura 3.3a y 3.3b). Variando la velocidad de los rotores, todos en la misma cantidad, es posible modificar la fuerza de empuje y de esta manera afectar la altura y lograr así el despegue o aterrizaje vertical (véase figura 3.3c) [16].

Para el desarrollo del modelo dinámico del cuadricóptero, se debe considerar lo siguiente [1]:

- La estructura se supone rígida y simétrica.

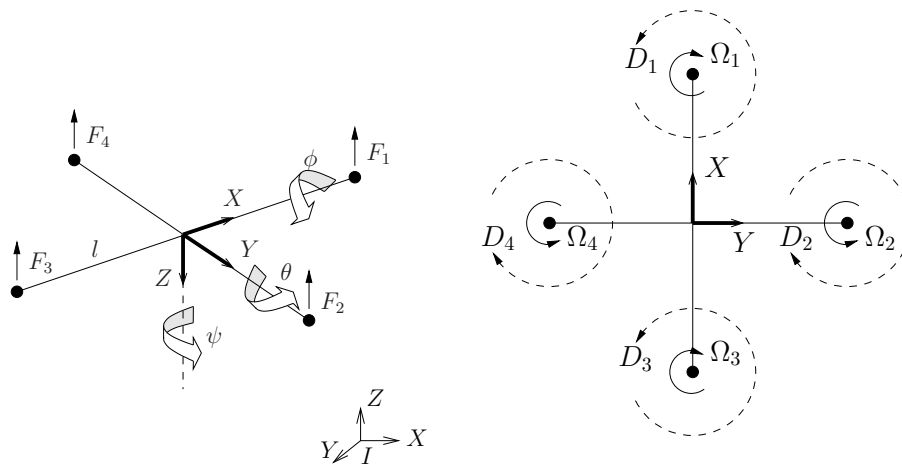


Figura 3.2: Esquema del cuadróptero. (a) Vista en isométrico. (b) Vista superior.

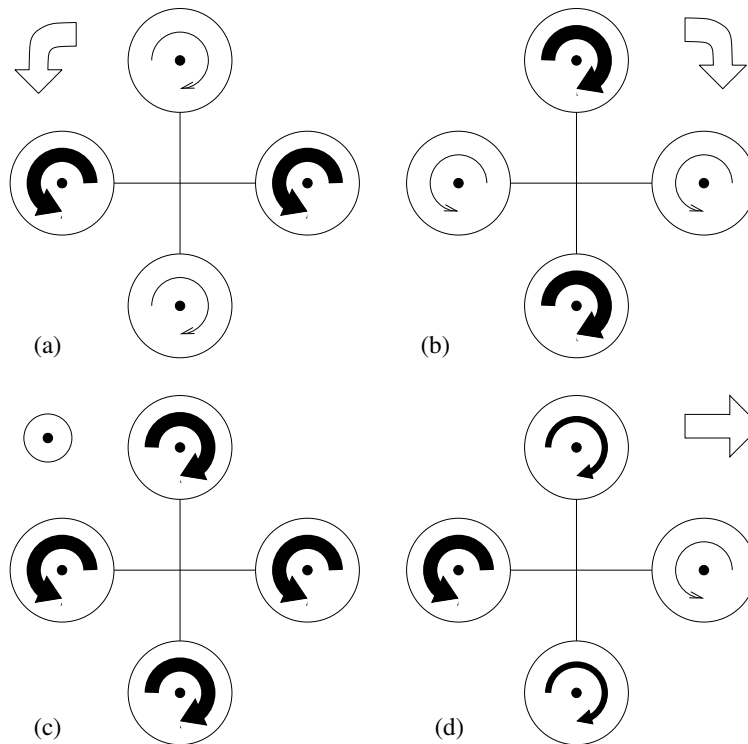


Figura 3.3: Descripción del movimiento del cuadróptero. El ancho de las flechas es proporcional a la velocidad rotacional de las aspas [1].

- El centro de gravedad y el marco de referencia del cuerpo rígido son coincidentes.
- Las propelas son rígidas.
- El empuje y arrastre son proporcionales al cuadrado de la velocidad de las pro-

pelas.

En las siguientes sub-secciones se obtendrá el modelo dinámico del cuadróptero empleando dos metodologías diferentes: ecuaciones de Euler-Lagrange y Newton-Euler.

3.2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

De acuerdo a la estructura del cuadróptero (véase la figura 3.2), las coordenadas generalizadas para el cuadróptero son

$$q = (x, y, z, \psi, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^6, \quad (3.1)$$

donde (x, y, z) denotan la posición del centro de masa del cuadróptero relativo al marco I y (ψ, θ, ϕ) son los ángulos de Euler (cabeceo, alabeo y giro) y representan su orientación. Las coordenadas generalizadas pueden separarse en coordenadas rectangulares y rotacionales de la siguiente forma

$$\xi = (x, y, z) \in \mathcal{R}^3, \quad \eta = (\psi, \theta, \phi) \in \mathcal{S}^3.$$

La energía cinética traslacional es

$$T_t \triangleq \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi},$$

donde m es la masa del cuadróptero. Por otro lado, la energía cinética rotacional es

$$T_r \triangleq \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta},$$

donde \mathbb{J} es la matriz de inercia del cuadróptero expresada en términos de las coordenadas generalizadas η . La energía potencial está dada por

$$U = mgz.$$

Entonces, el lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q, \dot{q}) &= T_t + T_r - U, \\ &= \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta} - mgz. \end{aligned}$$

Observe que no existen términos cruzados entre ξ y η en el lagrangiano como se menciona en [12]. El modelo del cuadróptero se obtiene a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange [41]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F,$$

donde $F = (F_\xi, \tau)^T \in \mathbb{R}^6$, $\tau \in \mathbb{R}^3$ es el momento generalizado y $F_\xi \in \mathbb{R}^3$ es la fuerza traslacional aplicada al vehículo debido a las entradas de control. La fuerza traslacional está dada por

$$F_\xi = R\hat{F},$$

donde

$$\hat{F} = (0, 0, u)^T,$$

y la matriz de rotación¹ R se define de la siguiente forma:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \phi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

La entrada de control u está dada por la suma de las fuerzas en los cuatro rotores, es decir,

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i.$$

Además, de acuerdo a la suposición inicial de que la fuerza es proporcional al cuadrado de la velocidad de las propelas, tenemos que

$$f_i = k_i w_i^2, \quad i = 1, \dots, 4.$$

donde k_i es la constante de proporcionalidad de la propela i -ésima. Por otra parte, los momentos generalizados sobre las variables η son

$$\tau \triangleq (\tau_\psi, \tau_\theta, \tau_\phi)^T,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \tau_\psi &= \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i}, \\ \tau_\theta &= (f_2 - f_4) l, \\ \tau_\phi &= (f_3 - f_1) l, \end{aligned}$$

donde l es la distancia de los motores al centro de gravedad de la aeronave y τ_{M_i} es el par producido por el motor M_i .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden separar en la dinámica para las coordenadas ξ y η como sigue

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} &= F_\xi, \\ \mathbb{J}\ddot{\eta} + \dot{\mathbb{J}}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J} \dot{\eta}) &= \tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La matriz de Coriolis contiene los términos giroscópicos y centrífugos asociados con la dependencia de η y J , esta matriz está definida por

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \dot{\mathbb{J}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbb{J}). \quad (3.4)$$

¹Relación entre los ángulos de Euler y el marco de referencia fijo I .

Considerando (3.4) en la expresión (3.3) se tiene que

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= u \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \sin\phi \\ \cos\theta \cos\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \\ \mathbb{J}\ddot{\eta} &= -C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} + \tau \end{aligned} \quad (3.5)$$

De la ecuación anterior se puede apreciar que el sistema es de 6 grados de libertad mientras que por otra parte, se tienen tres actuadores para el estado η y solo una para ξ , con lo que obtenemos un sistema subactuado (menos actuadores que grados de libertad). La expresión (3.5) es el modelo dinámico del cuadróptero obtenido por la metodología de Euler-Lagrange.

3.2.2. Metodología de Newton-Euler

En la metodología de Newton-Euler consideremos el marco de referencia fijo I de la figura 3.2. La dinámica de un cuerpo rígido bajo fuerzas externas aplicadas al centro del masa son [19]:

$$\begin{pmatrix} mI_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w \times mV \\ w \times Jw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ \tau \end{pmatrix},$$

donde $J \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ es la matriz de inercia, V es el vector de la velocidad lineal y w es la velocidad angular. La expresión del cuadróptero puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \nu, \\ m\dot{\nu} &= RF_b, \\ \dot{R} &= R\hat{w}, \\ J\dot{w} &= -w \times Jw + \tau_a. \end{aligned}$$

La primera aproximación del modelo para el cuadróptero puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \nu, \\ \dot{\nu} &= -ge_3 + R_{e_3} \left(\frac{b}{m} \sum \Omega_i^2 \right), \\ \dot{R} &= R\hat{w}, \\ J\dot{w} &= -w \times Jw - \sum J_r (w \times e_3) \Omega_i + \tau_a, \end{aligned}$$

donde ξ es el vector de posición, R es la matriz de rotación², \hat{w} es la matriz antisimétrica tal que $sk(a)b = a \times b$ para vectores en \mathbb{R}^3 , Ω_i es la velocidad en el rotor i -ésimo, J_r es la inercia del rotor, τ_a es el torque sobre el cuerpo de la aeronave y b es el factor de arrastre.

²Se emplea la misma matriz que la dada en (3.2).

El torque aplicado al cuerpo de la aeronave a lo largo de un eje, es la diferencia entre el torque generado por las propelas opuestas,

$$\tau_a = \begin{pmatrix} lb(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ lb(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{pmatrix},$$

donde l es el factor de empuje y b el factor de arrastre.

El modelo completo de la dinámica del cuadróptero con el movimiento en x, y, z como consecuencia de la rotación es

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) U_1, \\ m\ddot{y} &= (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) U_1, \\ m\ddot{z} &= -mg + \cos \phi \cos \theta U_1, \\ I_{xx}\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz}) - J_r\dot{\theta}\Omega + lU_2, \\ I_{yy}\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx}) + J_r\dot{\phi}\Omega + lU_3, \\ I_{zz}\ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta}(I_{xx} - I_{yy}) + U_4, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $x, y, z, \psi, \theta, \phi$ están definidos como en (3.1) y

$$\begin{aligned} U_1 &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2), \\ U_2 &= b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2), \\ U_3 &= b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2), \\ U_4 &= d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2), \\ \Omega &= \Omega_2 + \Omega_4 - \Omega_1 - \Omega_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

con $U_i, i = 1, \dots, 4$ el empuje generado por las hélices. Definiendo el vector de estados como

$$x = \left(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi} \right)^T,$$

la ecuación diferencial descrita en ecuaciones de estado será

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ (\cos x_7 \sin x_9 \cos x_{11} + \sin x_7 \sin x_{11}) U_1/m \\ x_4 \\ (\cos x_7 \sin x_9 \sin x_{11} - \sin x_7 \cos x_{11}) U_1/m \\ x_6 \\ -g + \cos x_7 \cos x_9/mU_1 \\ x_8 \\ x_{12}x_{10} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_r}{I_x} x_{10}\Omega + \frac{l}{I_x} U_2 \\ x_{10} \\ x_{12}x_8 \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_r}{I_y} x_8\Omega + \frac{l}{I_y} U_3 \\ x_{12} \\ x_{10}x_8 \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{1}{I_z} U_4 \end{pmatrix}.$$

En las tablas 3.1 y 3.2 se muestran algunos de los efectos físicos que pueden actuar sobre el cuadróptero.

Momentos debidos al alabeo	
efecto giroscópico del cuerpo	$\dot{\theta}\dot{\psi}(I_{yy} - I_{zz})$
efecto giroscópico de las propelas	$J_r\dot{\theta}\Omega$
efecto de los actuadores	$l(T_4 - T_2)$
momento debido al vuelo hacia los lados	$h\sum_{i=1}^4 H_{yi}$
momento debido al vuelo hacia la dirección	$(-1)^{i+1}\sum_{i=1}^4 R_{mxi}$
Momentos debidos al cabeceo	
efecto giroscópico del cuerpo	$\dot{\phi}\dot{\psi}(I_{zz} - I_{xx})$
efecto giroscópico de las propelas	$J_r\dot{\phi}\Omega$
efecto de los actuadores	$l(T_1 - T_3)$
momento debido al vuelo hacia la dirección	$h\sum_{i=1}^4 H_{xi}$
momento debido al vuelo hacia los lados	$(-1)^{i+1}\sum_{i=1}^4 R_{myi}$
Momentos debidos al guiño	
efecto giroscópico del cuerpo	$\dot{\phi}\dot{\theta}(I_{xx} - I_{yy})$
torque inercial	$J_r\dot{\Omega}$
torque desbalanceado	$(-1)^i\sum_{i=1}^4 Q_i$
fuerza debido al vuelo hacia la dirección	$l(H_{x2} - H_{x4})$
fuerza debido al vuelo hacia los lados	$l(H_{y3} - H_{y1})$

Tabla 3.1: Algunos efectos físicos rotacionales que actúan sobre el cuadróptero [1].

Fuerzas a lo largo del eje z	
fuerza de los actuadores	$\cos\psi\cos\phi\sum_{i=1}^4 T_i$
peso	mg
Fuerzas a lo largo del eje x	
fuerza de los actuadores	$(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi s\psi)\sum_{i=1}^4 T_i$
fuerza sobre el eje x	$-\sum_{i=1}^4 H_{xi}$
fricción	$\frac{1}{2}C_x A_c \rho \dot{x} x $
Fuerzas a lo largo del eje y	
fuerza de los actuadores	$(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi c\psi)\sum_{i=1}^4 T_i$
fuerza sobre el eje y	$-\sum_{i=1}^4 H_{yi}$
fricción	$\frac{1}{2}C_y A_c \rho \dot{y} y $

Tabla 3.2: Algunos efectos físicos rectilíneos que actúan sobre el cuadróptero [1].

3.3. Simplificaciones del modelo

En esta sección se determinarán los modelos dinámicos para el despegue y aterrizaje vertical de una aeronave sobre un plano y el modelo de un sistema torsional de un grado de libertad. Estos modelos se obtienen del mismo modelo dinámico del cuadróptero, pero suponiendo determinadas restricciones físicas.

3.3.1. Aeronave de despegue vertical en un plano

Considerando que el movimiento del cuadróptero está confinado sobre un plano vertical, es decir, que se mantengan las siguientes condiciones $y = \phi = \dot{\phi} = \ddot{\phi} = \psi = \dot{\psi} = \ddot{\psi} = 0$, para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$, las expresiones dadas en (3.6) se reducen de la siguiente forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= U_1 \sin \theta, \\ m\ddot{z} &= -mg + U_1 \cos \theta, \\ I_y \ddot{\theta} &= lU_3, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde U_1, U_3 están definidas en (3.7). De acuerdo a [34], las ecuaciones descritas en (3.8) describen el movimiento del despegue o aterrizaje vertical o *PVTOL* de objetos aéreos que se mueven sobre un plano. Debido al movimiento confinado del PVTOL, se tiene que $U_2 = U_4 = \Omega = 0$.

3.3.2. Plantas lineales desacopladas

Considere el sistema PVTOL dado en (3.8) con el siguiente cambio de variables

$$U_1 = \frac{mg + V_1}{\cos \theta}, \quad U_3 = \frac{V_2}{l}, \tag{3.9}$$

con $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$. Entonces, de las ecuaciones dadas en (3.8) y sin considerar la variable x , tenemos que

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= V_1, \\ I_y \ddot{\theta} &= V_2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde V_1 y V_2 serán las nuevas entradas de control. Observe que en este caso tenemos dos plantas que son lineales y están desacopladas. La variable x no se considera debido a que éste estado es subactuado y queda en función de V_1 y θ , por lo que su evolución es libre y no se considera para este modelo.

3.3.3. Sistema torsional o rectilíneo

Considere la segunda ecuación del sistema dado en (3.10) y que dicho movimiento se ve afectado por una fuerza de fricción viscosa (provocada por el viento u otro factor). Entonces, de las consideraciones anteriores y de (3.10) tenemos que

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = u, \tag{3.11}$$

donde $b = \hat{b}/I_y$, $u = V_2/I_y$ y \hat{b} es el coeficiente de fricción viscosa. La ecuación diferencial dada en (3.11) también describe a un *sistema torsional* (o rectilíneo) de un grado de libertad con amortiguador o fricción viscosa [42].

3.4. Conclusiones

Existen varios fenómenos físicos que afectan el comportamiento del cuadróptero. En muchos casos, en la literatura revisada usan modelos simplificados para reducir los cálculos y el análisis para sus estudios. Los modelos dinámicos descritos en las secciones anteriores son usados de manera exitosa para el diseño e implementación de las leyes de control propuestas por los respectivos autores. En las tablas 3.1 y 3.2 resumimos algunos de los efectos dinámicos que pueden ser considerados en el modelo del cuadróptero.

Haciendo las consideraciones adecuadas del modelo del cuadróptero, es posible obtener los modelos dinámicos de otros sistemas mecánicos de menor orden. Las reducciones en los modelos nos permitirán plantear y analizar el algoritmo de control generado en este trabajo de tesis y posteriormente escalarlo al modelo del PVTOL y del cuadróptero para resolver el problema original de esta tesis.

Capítulo 4

Diseño de controlador por modos deslizantes usando una superficie discontinua

En este capítulo se propone un esquema de control para el sistema representado por la ecuación (3.11). Dicho esquema presenta una superficie deslizante discontinua (es decir, que no es conexa) que permite la estabilización global del origen de manera asintótica. Se dan argumentos para tener una primera conjetura sobre la estabilidad del origen y posteriormente se analiza formalmente mediante lemas y un teorema. Además, se propone una familia de superficies discontinuas con las mismas cualidades de estabilidad. Se incluyen ejemplos numéricos y experimentales para ilustrar y complementar la teoría.

4.1. Modelo

Considere el sistema mecánico torsional que se ilustra en la figura 4.1. Dicho sistema cuenta con una carga inercial dada por J y una fricción viscosa cuyo coeficiente está dado por b . La entrada de control u se aplica a la flecha principal mediante un motor de corriente directa por medio de engranes y bandas dentadas. La salida del sistema (q) es la posición angular de la carga inercial medida por un encoder óptico conectado mecánicamente a la flecha mediante engranes y bandas dentadas. Una expresión que puede describir al sistema antes descrito es

$$J\ddot{q} + b\dot{q} = u. \quad (4.1)$$

Definiendo la posición y velocidad angular como x_1 y x_2 , respectivamente, tenemos que las ecuaciones de estado del sistema descrito en (4.1) son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= J^{-1}(u - bx_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

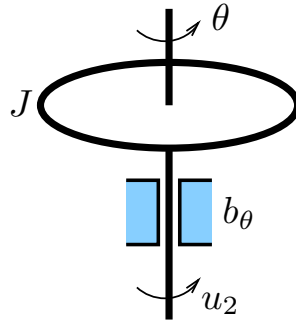


Figura 4.1: Sistema torsional.

De esta forma, dado el sistema (4.2), el objetivo es diseñar un controlador para que dicho sistema tenga una velocidad constante mientras alcanza una referencia deseada.

4.2. Controlador

Suponga que en el sistema (4.2) se utiliza el siguiente controlador

$$u = -\alpha \operatorname{sign}(\beta \operatorname{sign} x_1 + x_2), \quad (4.3)$$

con α, β constantes reales positivas y la función $\operatorname{sign}(\cdot)$ se define como

$$\operatorname{sign}(\xi) = \begin{cases} -1, & \xi < 0 \\ [-1, 1], & \xi = 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

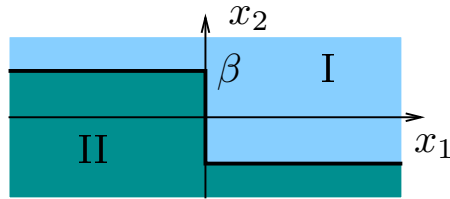


Figura 4.2: Regiones generadas por la superficie discontinua.

La ley de control (4.3) divide el espacio de estado en dos regiones, tal como se muestra en la figura 4.2. Las regiones están delimitadas en el plano de fase por la superficie

$$x_2 = -\beta \operatorname{sign} x_1. \quad (4.5)$$

La región I se tiene cuando $x_2 + \beta \operatorname{sign} x_1 > 0$, mientras que $x_2 + \beta \operatorname{sign} x_1 < 0$ define a la región II. Así, dentro de las regiones, las ecuaciones de estado (4.2) son

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= J^{-1}(\mp \alpha - b x_2), \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde el signo negativo (positivo) de α corresponde a la región I (II). De esta forma, las soluciones de (4.6) dentro de las regiones son

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} + (1 - e^{-\hat{b}(t-t_0)})(x_{20} \pm \hat{\alpha})/\hat{b} \mp \hat{\alpha}(t - t_0) \\ x_2(t) &= e^{-\hat{b}(t-t_0)}(x_{20} \pm \hat{\alpha}) \mp \hat{\alpha} \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde $\hat{\alpha} = \alpha/b$, $\hat{b} = b/J$ y $x_{10} = x_1(t_0)$, $x_{20} = x_2(t_0)$ son las condiciones iniciales del sistema en el instante t_0 .

4.2.1. Atracción y deslizamiento

Observe de (4.7) que, si la superficie

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = -\beta \operatorname{sign} x_1\}$$

es atractora, las trayectorias convergerán a dicha superficie en tiempo finito, y si además dicha superficie es deslizante, la solución evolucionará sobre la superficie [9].

En nuestro caso, debido a la construcción de la superficie, si ésta es atractora y deslizante, impondrá una velocidad constante dada por β (véase figura 4.3).

Entonces, para que la superficie

$$\beta \operatorname{sign} x_1 + x_2 = 0$$

sea atractora, la componente vertical del campo vectorial debe apuntar hacia la superficie, es decir, se debe satisfacer que $\dot{x}_2 < 0$ para la región I y que $\dot{x}_2 > 0$ para la región II.

Las condiciones que se deben cumplir para que $\dot{x}_2 > 0$ cuando el sistema se encuentra en la región II. Primeramente, dado $\dot{x}_2 > 0$, entonces de (4.6) se tiene que $J^{-1}(\alpha - bx_2) > 0$, por lo que $x_2 < \hat{\alpha}$. De esta forma, cuando la velocidad es negativa (i.e. $x_2 < 0$) la desigualdad anterior siempre se satisface debido a que $\hat{\alpha}$ es positiva. Sin embargo, cuando la velocidad es positiva, ésta no puede ser mayor a $\hat{\alpha}$; es decir, la velocidad impuesta β tiene que satisfacer que $\beta < \hat{\alpha}$. Con el procedimiento anterior en la región I se llega a la misma condición. Por lo que, la superficie S es atractora si

$$\beta < \hat{\alpha}. \quad (4.8)$$

Por otra parte, la superficie (4.5) es deslizante debido a que $\dot{x}_1 = x_2$, independientemente de la región. Así, sobre la superficie, cuando $x_1 < 0$, se tiene que $x_2 > 0$, entonces la solución se deslizará sobre la superficie de izquierda a derecha y, cuando $x_1 > 0$, la solución se deslizará sobre la superficie de derecha a izquierda.

Por lo que, se concluye que la superficie (4.5) del sistema (4.2)-(4.3) es atractora y deslizante si se satisface (4.8).

La condición (4.8) aparece también como una restricción natural del sistema, ya que éste no podrá adquirir una velocidad mayor que la aportada por la entrada menos la oposición que ofrece la fricción y su relación con la carga inercial.

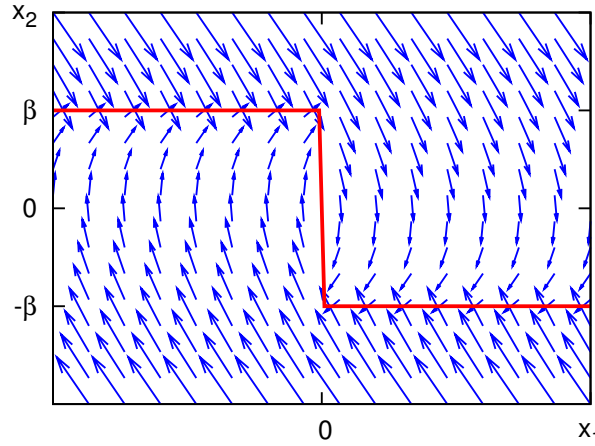


Figura 4.3: Campo vectorial y superficie de conmutación.

En la figura 4.3 se puede apreciar que el campo vectorial apunta hacia la superficie s , es decir, en la región I la componente vertical del campo vectorial apunta hacia abajo y en la región II la componente vertical del campo vectorial apunta hacia arriba. Observe que en ambos casos esta característica se mantiene en cualquier parte de la respectiva región. También podemos apreciar que la componente horizontal del campo vectorial apunta hacia la derecha cuando $x_2 > 0$, mientras que cuando $x_2 < 0$ la componente horizontal del campo vectorial apunta hacia la izquierda. Observe que esta característica es indistinta a la región.

4.2.2. Comportamiento del sistema en la parte central de la superficie de conmutación

En la sección anterior se demostró que la superficie (4.5) es atractora y deslizante y que estando sobre dicha superficie, la posición x_1 se dirige a cero con una rapidez β . Lo siguiente en nuestro análisis, es determinar el comportamiento cuando la solución deja la superficie, es decir, cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = \pm\beta$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la solución deja la superficie en el instante $t_0 = 0$, es decir, $x(0) = (0, \pm\beta)^T$, por lo que (4.7) quedará como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \pm(1 - e^{-\hat{b}t})(\beta + \hat{\alpha})/\hat{b} \mp \hat{\alpha}t, \\ x_2(t) &= \pm e^{-\hat{b}t}(\beta + \hat{\alpha}) \mp \hat{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Determinando el tiempo t_1 en que la solución cruza nuevamente el eje x_2 , tal como se muestra en la figura 4.4.

Expandiendo en series de Taylor y truncando hasta el tercer término, se puede despejar el tiempo t_1 que satisface $x_1(t_1) \approx 0$, obteniendo que

$$t_1 \approx t_1^+ = \frac{2}{\hat{b}} \frac{\beta}{\beta + \hat{\alpha}}. \quad (4.10)$$

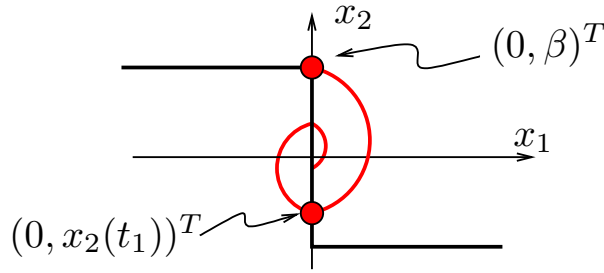


Figura 4.4: Evolución del sistema al dejar la superficie deslizante.

Al sustituir t_1^+ en $x_2(t)$ y expandiendo en series de Taylor hasta el tercer término, se obtiene que

$$x_2(t_1^+) \approx \pm\beta \cdot \frac{\beta - \hat{\alpha}}{\beta + \hat{\alpha}}. \quad (4.11)$$

Debido a que $|(\beta - \hat{\alpha})/(\beta + \hat{\alpha})| < 1$ para toda $\hat{\alpha}, \beta > 0$ tenemos que $x_2(t_1) < x_2(t_0)$. Considerando ahora el punto $x(t_1^+)$ como la nueva condición inicial, podemos reemplazar β por $x_2(t_1^+)$ en (4.9) y realizar el mismo procedimiento antes descrito. De esta forma, cuando la solución deje la superficie deslizante, ésta cruzará el eje x_2 con una velocidad menor con la que salió y así sucederá cada que $x_1 = 0$ y $|x_2| \leq \beta$, por lo que $x_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

4.2.3. Sobrepasso máximo

Suponga las condiciones que dieron origen a la ecuación (4.9), entonces el sobrepasso que tendrá la posición x_1 sucederá cuando $\dot{x}_1 = x_2 = 0$. Resolviendo, obtenemos

$$t^* = -\frac{1}{\hat{b}} \ln \left(\frac{\hat{\alpha}}{\beta + \hat{\alpha}} \right) \quad (4.12)$$

De esta forma, tenemos que el sobrepasso está dado por

$$x_1(t^*) = \pm \frac{\beta}{\hat{b}} \pm \frac{\hat{\alpha}}{\hat{b}} \ln \left(\frac{\hat{\alpha}}{\beta + \hat{\alpha}} \right) \quad (4.13)$$

Remplazando β por la condición inicial de la velocidad $x_{20} \in (-\beta, \beta)$ en (4.9), se realiza el mismo procedimiento antes descrito. Haciendo eso de manera iterativa y de acuerdo al apartado anterior, tenemos que $x_2 \rightarrow 0$ por lo que, de la ecuación (4.13), tenemos que $x_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por otra parte, de las ecuaciones de estado (4.6) y de la solución (4.7), se tiene que el origen es el único punto de equilibrio.

De esta forma, obtenemos el siguiente resultado:

Conjetura 1. *Si el sistema (4.2) tiene a (4.3) como ley de control, entonces el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio asintótico global.*

4.3. Regulación

Si el objetivo de control deseado es que el sistema (4.1) llegue a una posición constante $x_d \neq 0$, al definir la siguiente ley de control

$$u = -\alpha \operatorname{sign}(\beta \operatorname{sign}(x_1 - x_d) + x_2), \quad (4.14)$$

y considerando el error $e_1 = x_1 - x_d$ y $e_2 = x_2$, obtenemos las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= J^{-1}(-\alpha \operatorname{sign}(\beta \operatorname{sign} e_1 + e_2) - be_2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Al aplicar la conjetura 1 al sistema dado por la expresión (4.15) tenemos que $e_1 \rightarrow 0$ y $e_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que se concluye que $x_1 \rightarrow x_d$ y $x_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

4.4. Una familia de superficies discontinuas

Sin pérdida de generalidad, suponga el sistema (4.1) con $J = 1$ y la ley de control $u = -\alpha \operatorname{sign}(s)$, donde s se puede definir como

$$s = \beta \operatorname{sign} x_1 + x_2 + f(x_1, x_2), \quad (4.16)$$

con f una función escalar y diferenciable. Se muestra que la superficie (4.16), bajo ciertas condiciones de f , sea una superficie atractora y deslizante para todo el espacio de estado fuera de $x_1 = 0$.

Si $x_1 > 0$ entonces $s = \beta + x_2 + f(x_1, x_2)$. Así, la superficie s es atractora si $s\dot{s} < 0$ cuando $s \neq 0$. En este caso tenemos que

$$s\dot{s} = -\alpha(1 - f_{x_2})|s| - sx_2(b(1 + f_{x_2}) - f_{x_1}), \quad (4.17)$$

donde $f_{x_i} = \partial f / \partial x_i$ con $i = \{1, 2\}$. Una manera sencilla de que $s\dot{s} < 0$ es considerar

1. $1 - f_{x_2} > 0$ y
2. $b(1 + f_{x_2}) - f_{x_1} = 0$.

Del primer punto obtenemos que $f_{x_2} < 1$ y del segundo punto tenemos la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = b \left(1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right). \quad (4.18)$$

Una función que soluciona la ecuación diferencial parcial es

$$f(x_1, x_2) = c(bx_1 + x_2) + bx_1, \quad (4.19)$$

con c una constante real. Debido a la condición que $f_{x_2} < 1$, obtenemos que $c < 1$. Si

$$x_1 < 0 \Rightarrow s = -\beta + x_2 + f(x_1, x_2)$$

y se realiza un procedimiento similar al anterior y se llega a las mismas condiciones. Finalmente, tenemos que una superficie atractora será

$$s = \beta \operatorname{sign} x_1 + (1 + c)(x_2 + bx_1), \quad c < 1. \quad (4.20)$$

Sobre la superficie, la dinámica está dada por $\dot{x}_1 + bx_1 = -\beta/(1 + c) \operatorname{sign} x_1$, por lo que $x_1 \rightarrow 0$. De esta forma la superficie es atractora y deslizante. Por último, la solución deja la superficie cuando $x = (0, \pm\beta)^T$ al igual que sucede con la superficie (4.5) y, al tener condiciones iniciales idénticas, las soluciones y su estabilidad también serán idénticas. De esta forma podemos concluir que el sistema (4.2), con el controlador visto en esta sección, tiene un punto de equilibrio en el origen y es asintóticamente estable.

En general, cualquier superficie deslizante atractora de la forma (4.16) estabiliza el origen del sistema (4.1).

4.4.1. Ejemplos

Ejemplo 1 (Estabilización del origen). *Considere el sistema (4.1) y la entrada de control (4.3) con los siguientes parámetros¹ $b = 0.05$, $J = 0.0206$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 1$ y las condiciones iniciales $x_1(0) = 0.5$ y $x_2(0) = 1.5$. Los resultados numéricos de la posición, esfuerzo de control y plano de fase se presentan en la figura 4.5 cuando $t \in [0, 5]$.*

En la figura 4.6 se muestran los resultados numéricos cuando las condiciones iniciales están dadas por $x(0) \in X_1 \times X_2$ donde $X_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $X_2 = \{-1.5, 1.5\}$.

Ejemplo 2 (Otra superficie). *Considere el sistema (4.1), la entrada de control $u = -\alpha \operatorname{sign} s$, con $s = \beta \operatorname{sign} x_1 + (1 + c)(x_2 + bx_1)$, los parámetros $b = 0.05$, $J = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 1$, $c = 0$ y las condiciones iniciales $x(0) = (0, \pm 30)^T$. En la figura 4.7 se muestra la solución numérica ante las consideraciones anteriores y se compara cuando la superficie es $s = \beta \operatorname{sign} x_1 + x_2$ con la mismas consideraciones.*

Observe que la evolución es la misma para ambas superficies deslizantes desde la condición inicial hasta que la solución tiene contacto con su respectiva superficie discontinua. Después, la solución evoluciona sobre la superficie para llegar al punto $(0, \pm\beta)$, y desde ese punto, las soluciones vuelven a ser idénticas.

Ejemplo 3 (Experimento). *Para implementar físicamente el controlador propuesto en (4.3) se usó el equipo ECP-220 de Educational Control Products con el que cuenta el Laboratorio de Control del CICESE. El equipo se describe en la sección 4.1. La inercia del disco usando 4 masas de 0.5kg a 10cm de la flecha principal es $J = 0.0206 \text{kg m}^2$. De acuerdo al manual, el coeficiente de la fricción viscosa es $b = 0.05 \frac{\text{N/m}}{\text{rad/s}}$. Para el*

¹Los parámetros b, J se obtienen del manual de operación del equipo ECP-220. Los parámetros α, β son a elección del diseñador.

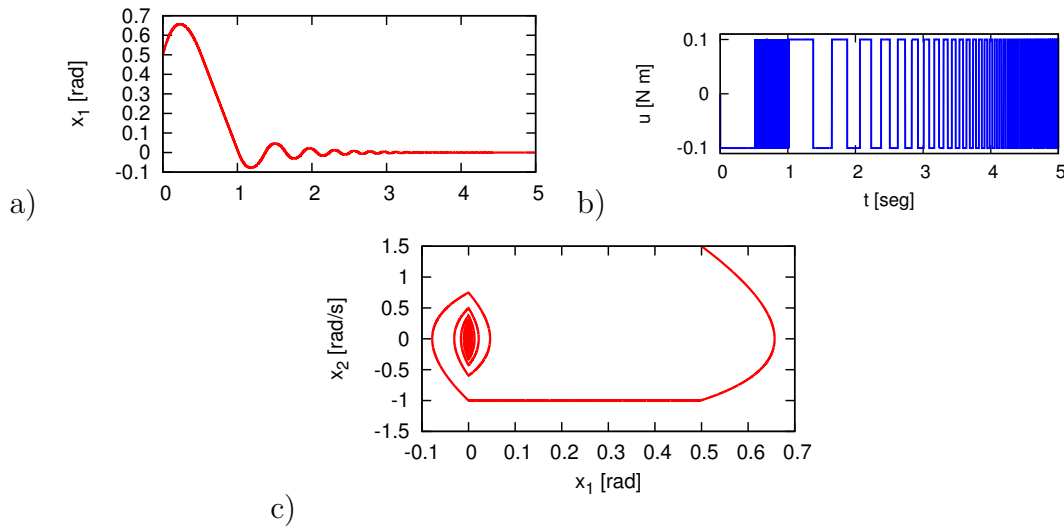


Figura 4.5: Resultados numéricos de (a) la posición, (b) esfuerzo de control y (c) plano de fase para el ejemplo 1.

controlador se propusieron los siguientes parámetros, $\alpha = 0.1$ y $\beta = 1$. Para estimar la velocidad se emplea un observador lineal con una ganancia $K = [122.57, 3.45 \times 10^3]^T$. En la figura 4.8 se muestra la posición angular y el esfuerzo de control, mientras que en la figura 4.9 se muestra el resultado en el plano de fase $x_1 - x_2$, junto con otros experimentos a diferentes condiciones iniciales.

4.5. Desarrollo matemático de la ley de control

En esta sección se presenta la formalización de la conjetura 1 dada en la sección 4.2. Sin pérdida de generalidad, considere el sistema dado por (4.2) con $J = 1$. Como se vió en la figura 4.2, el controlador (4.3) divide el espacio de estado en dos regiones. Para demostrar que el origen es asintóticamente estable de forma global, dividiremos el espacio de estado en tres regiones tal como se muestra en la figura 4.10. Las regiones dadas en la figura 4.10 están relacionadas con las regiones de la figura 4.2. El objetivo de la prueba de estabilidad es demostrar que cualquier trayectoria que empiece fuera de G es atraída hacia G . Dentro de G , las trayectorias se dirigen hacia la superficie atractora s o a la región R . Si la trayectoria está sobre la superficie s , ésta la lleva hacia la región R para finalmente llegar al origen. De esta forma el origen es asintóticamente estable de forma global.

A continuación se analizará cada una de las regiones de acuerdo a lo descrito anteriormente.

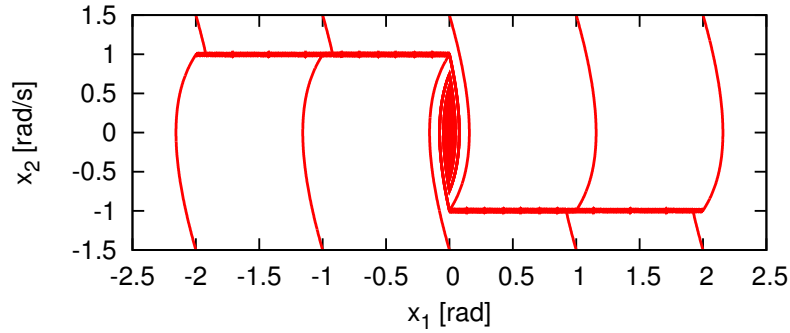


Figura 4.6: Retrato de fase del ejemplo 1 cuando las condiciones iniciales están dadas por $x(0) \in X_1 \times X_2$ donde $X_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $X_2 = \{-1.5, 1.5\}$.

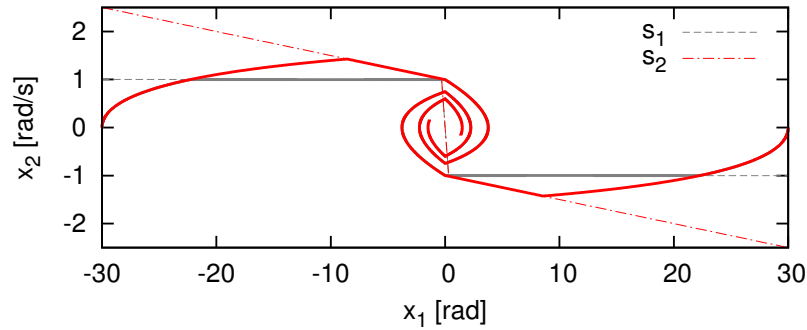


Figura 4.7: Retrato de fase de dos superficies discontinuas.

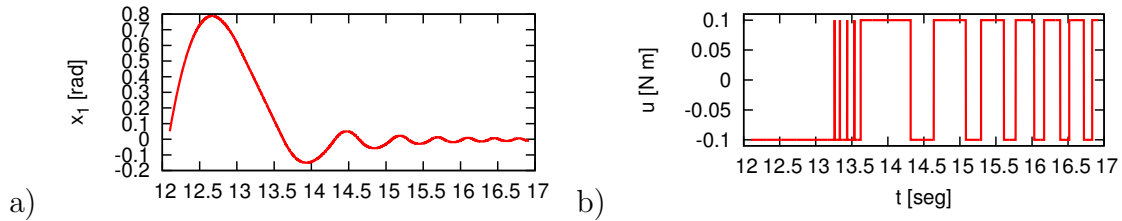


Figura 4.8: a) Posición angular y b) esfuerzo de control del ejemplo 3.

4.5.1. Región G

En esta sección se demuestra que la región $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2| \leq \beta\}$ es atractora y cualquier órbita que inicie fuera, converge en tiempo finito a G . Con este resultado se tiene que cualquier solución que empiece fuera de G convergerá a G y una vez estando en G permanecerá en G . La región G se ilustra en la figura 4.10a. Así, el resultado es el siguiente lema.

Lema 1. *Sea el sistema en lazo cerrado dado por (4.2) y (4.3), entonces la región*

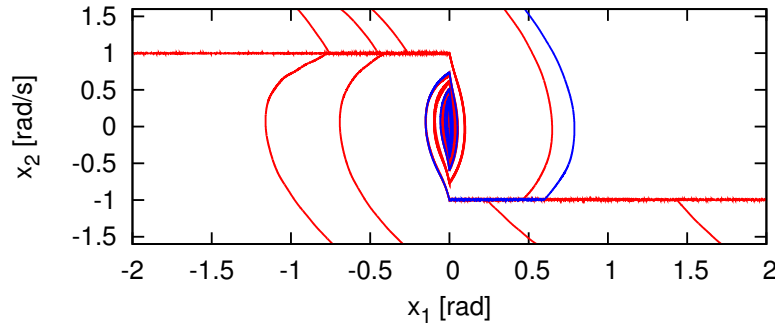


Figura 4.9: Retrato de fase experimental del ejemplo 3.

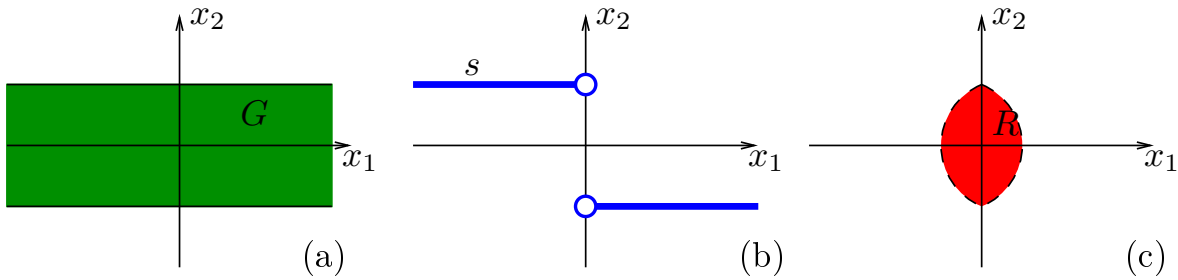


Figura 4.10: Regiones consideradas para el análisis de estabilidad.

$G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_2| \leq \beta\}$ es atractora.

Demostración. Sea $G^c = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \notin G\}$ y V una función escalar $V : G^c \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V = \frac{1}{2}x_2^2$, la cual es definida positiva en G^c . Por otra parte $\dot{V} = x_2\dot{x}_2 = x_2(-bx_2 - \alpha \text{sign}(\beta \text{sign} x_1 + x_2))$ y dado que $|x_2| > \beta$, tenemos que $\text{sign}(\beta \text{sign} x_1 + x_2) = \text{sign} x_2$. Así

$$\dot{V} = -bx_2^2 - \alpha|x_2| < 0,$$

y de esta forma las trayectorias se dirigen hacia G . □

Observación 1. La demostración anterior, sólo nos garantiza que la solución se acercará a G sobre la dirección de x_2 , pero no permite determinar nada respecto a la forma en que evolucionará sobre la dirección de x_1 . De igual manera, este resultado sólo confirma que la región G es un conjunto invariante, pero no la evolución del estado dentro de G .

4.5.2. Superficie s

En esta sección se demuestra que la superficie

$$s = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \beta \text{sign} x_1 + x_2 = 0, x_1 \neq 0\},$$

es atractora y deslizante. Con este resultado se determinan las condiciones para que las soluciones cercanas a la superficie s se dirijan hacia s y permanezcan en s , y de esta forma la solución se desplazará a la velocidad impuesta dada por β . Por otra parte, el deslizamiento sobre la superficie s se dará de manera que la posición se aproxime a cero. La superficie s se ilustra en la figura 4.10b.

Si la superficie $s = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -\beta \operatorname{sign} x_1, x_1 \neq 0\}$ es atractora, las trayectorias convergerán a dicha superficie en tiempo finito, y si dicha superficie es deslizante, la solución evolucionará sobre la superficie [9].

Entonces, para que la superficie $\beta \operatorname{sign} x_1 + x_2 = 0$ sea atractora, la componente vertical del campo vectorial debe apuntar hacia la superficie, es decir, se debe satisfacer que $\dot{x}_2 < 0$ para la región I y que $\dot{x}_2 > 0$ para la región II (véase figura 4.11).

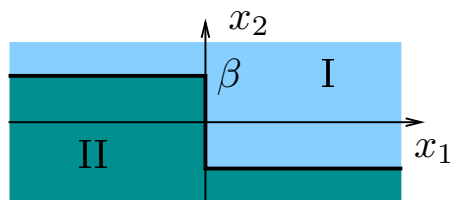


Figura 4.11: Regiones generadas por la superficie discontinua.

Las condiciones que se deben cumplir para que $\dot{x}_2 > 0$ cuando el sistema se encuentra en la región II. Dado que $\dot{x}_2 > 0$, entonces de (4.6) tenemos que $\alpha - bx_2 > 0$, por lo que $x_2 < \hat{\alpha} = \alpha/b$. De esta forma, cuando la velocidad es negativa (i.e. $x_2 < 0$) la desigualdad anterior siempre se satisface debido a que $\hat{\alpha}$ es positiva. Sin embargo, cuando la velocidad es positiva ésta no puede ser mayor a $\hat{\alpha}$; es decir, la velocidad impuesta β tiene que satisfacer que $\beta < \hat{\alpha}$. Un razonamiento similar se emplea cuando se está en la región I y se llega a la misma condición. De esta forma, la superficie s es atractora si

$$\beta < \hat{\alpha}. \quad (4.21)$$

Lo anterior se describe y demuestra en el siguiente lema.

Lema 2. *Sea el sistema realimentado dado por (4.2)-(4.3) y la superficie dada por $s = \beta \operatorname{sign} x_1 + x_2$ con $x_1 \neq 0$. Si $b\beta - \alpha < 0$ entonces la superficie s es atractora y deslizante.*

Demostración. Para que la superficie sea atractora se emplea el teorema 1. Se propone la siguiente función escalar $V(x_1, x_2) = |\beta \operatorname{sign} x_1 + x_2|$, la cual es definida positiva para toda $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\beta \operatorname{sign} x_1 + x_2 \neq 0$. Por otra parte,

$$\dot{V} = \operatorname{sign} (\beta \operatorname{sign} x_1 + x_2) (-bx_2 - \alpha \operatorname{sign} (\beta \operatorname{sign} x_1 + x_2)),$$

simplificando se tiene que

$$\dot{V} = -bx_2 \operatorname{sign} (\beta \operatorname{sign} x_1 + x_2) - \alpha. \quad (4.22)$$

Si $|x_2| > \beta$, entonces $\text{sign}(\beta \text{sign} x_1 + x_2) = \text{sign} x_2$, por lo tanto $\dot{V} = -b|x_2| - \alpha < 0$. Si $|x_2| < \beta$ entonces $\text{sign}(\beta \text{sign} x_1 + x_2) = \text{sign} x_1$, por lo que $\dot{V} = -bx_2 \text{sign} x_1 - \alpha$ y dado que $|x_2| < \beta$ tenemos que

$$-b\beta - \alpha < -bx_2 \text{sign} x_1 - \alpha < b\beta - \alpha.$$

De la desigualdad de la derecha tenemos que

$$\dot{V} = -bx_2 \text{sign} x_1 - \alpha < b\beta - \alpha$$

y dado que $b\beta - \alpha < 0$ entonces $\dot{V} < 0$ y por lo tanto la superficie es atractora. El deslizamiento se tiene debido a que $\dot{x}_1 = x_2$ y a que $\alpha > 0$; así, si $x_2 > 0$ las soluciones se desplazarán de izquierda a derecha, mientras que si $x_2 < 0$, las soluciones se desplazarán de derecha a izquierda. Para la superficie, el primer caso sucede cuando $x_1 < 0$ y el segundo caso se presenta cuando $x_1 > 0$. \square

4.5.3. Región R

En esta sección se demuestra que la región $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha|x_1| + \frac{1}{2}x_2^2 < \frac{1}{2}\beta^2\}$ tiene al origen como punto de equilibrio asintótico. Con este resultado se tiene que cualquier solución que empiece en R converja al origen conforme el tiempo incrementa. La región R se ilustra en la figura 4.10c. El resultado de lo descrito anteriormente se da en el siguiente lema.

Lema 3. *Si una solución del sistema realimentado (4.2)-(4.3) empieza dentro de la región*

$$R = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \alpha|x_1| + \frac{1}{2}x_2^2 < \frac{1}{2}\beta^2 \right\}$$

entonces $x \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Si el sistema (4.2), (4.3) está en la región R se tiene que $\text{sign}(\beta \text{sign} x_1 + x_2) = \text{sign} x_1$. Considere una función escalar $V : R \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V = \alpha|x_1| + \frac{1}{2}x_2^2$, la cual es definida positiva en R . Por otra parte, $\dot{V} = \alpha x_2 \text{sign} x_1 + x_2(-bx_2 - \alpha \text{sign} x_1)$, simplificando se tiene

$$\dot{V} = -bx_2^2 < 0.$$

Usaremos el teorema 2 para demostrar que el origen es asintóticamente estable. Tenemos que la región $x \in R$ tal que $\dot{V}(x) = 0$ está dado por $(x_1, 0)$ con $|x_1| < \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha}$, donde el máximo conjunto invariante dentro de esta última región es el origen. Así, de acuerdo al teorema 2, tenemos que el origen es asintóticamente estable. \square

Observación 2. La curva que delimita a la región R (forma de doble ojiva) está dada por la curva solución que tendría el sistema en cada región en ausencia de fricción, i.e. cuando $b = 0$. De esta forma, la región R delimita el escenario del sistema sin disipación de energía, el cual es un caso límite, por tratarse del caso conservativo.

4.5.4. Estabilidad del origen

Finalmente, gracias a los lemas 1, 2 y 3 podemos llegar al siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea el sistema realimentado dado en (4.2)-(4.3). Si $b\beta - \alpha < 0$ entonces el origen es asintóticamente estable de forma global.*

Demostración. Usando el lema 1 tenemos que cualquier trayectoria que empiece en G^c es atraída por G . Dentro de G , las trayectorias se dirigen hacia la superficie atractora s (véase lema 2) o a la región R . Si la trayectoria está sobre la superficie s , ésta la lleva hacia la región R para finalmente converger al origen (véase lema 3). De esta forma el origen es asintóticamente estable de forma global. \square

4.5.5. Estabilidad de un punto fijo

Un resultado inmediato del teorema 3 es el siguiente corolario:

Corolario 1. *Considere el sistema descrito por*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 - \alpha \operatorname{sign}(\beta \operatorname{sign}(x_1 - x_d) + x_2),\end{aligned}\tag{4.23}$$

con b, α, β constantes reales positivas, $x_d \in \mathbb{R}$ es un valor de referencia constante. Si $b\beta - \alpha < 0$, entonces $x_1 \rightarrow x_d$ y $x_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Haciendo $e_1 = x_1 - x_d$ y $e_2 = x_2$ tenemos que

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= -be_2 - \alpha \operatorname{sign}(\beta \operatorname{sign}(e_1) + e_2),\end{aligned}\tag{4.24}$$

Estas ecuaciones tiene la forma descrita en (4.2)-(4.3) y aplicando el teorema 3 obtenemos que $e_1 \rightarrow 0$ y $e_2 \rightarrow 0$ por lo que $x_1 \rightarrow x_d$ y $x_2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. \square

4.6. Conclusiones

El control discontinuo con una superficie deslizando discontinua descrito en este trabajo permite que un sistema torsional alcance una posición angular deseada. Para demostrar la estabilidad del sistema en lazo cerrado se usó un análisis diferente al convencional, debido a que la superficie es discontinua y no se pueden emplear las herramientas clásicas para su análisis. Si se desea que el sistema se mueva a una velocidad constante para alcanzar la posición deseada, se debe satisfacer la condición (4.8), la cual es una restricción físicamente viable y necesaria. El resultado obtenido se puede extender a otras superficies gracias a la similitud en la discontinuidad de la superficie. Finalmente, los experimentos muestran resultados favorables y además similares a los obtenidos numéricamente.

Capítulo 5

Diseño de controlador por modos deslizantes usando una superficie deslizante sigmoide

El modelo y control de un avión con movimiento en un plano con despegue y aterrizaje vertical ha sido estudiado extensamente por varios investigadores [43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50]. Uno de los primeros trabajos en proponer un esquema de control automático es presentado en [48], donde se desarrolla una aproximación mediante un procedimiento de linealización entrada-salida que produce un seguimiento acotado y la estabilización asintótica de un avión con despegue y aterrizaje vertical/corto (V/STOL por sus siglas en inglés), el modelo de este tipo de aeronave es no lineal subactuado de 6 grados de libertad, por lo que propone usar el modelo de un PVTOL como una simplificación para estudiar el control de altitud del avión. En [49] se propone una extensión del resultado propuesto en [48], proponiendo un modelo matemático simplificado, el cual permite un desacoplamiento entre las variables, lo que permite analizar el problema de control por partes. En general los primeros esquemas de control propuestos son obtenidos por procesos de linealización y presentan sensibilidad a perturbaciones, en [50] se presenta un esquema de control robusto para regulación de movimientos laterales con una altitud constante. Varios autores utilizan esta aproximación y proponen diversas estrategias de control considerando únicamente como objetivo de control la posición [45, 47, 46], algunos otros proponen esquemas de control de la posición considerando la altura constante [51, 48, 50]. En la mayoría de los trabajos se considera el uso de una función saturación para limitar el ángulo de giro y la velocidad de la aeronave, para evitar que la dinámica interna desestabilice al sistema. Algunos trabajos [44, 52] consideran en el diseño del esquema de control esta saturación, pero solo muestran estabilidad local.

Recordando que cuando el cuadróptero restringido a un plano es un tipo de VTOL (ver sección 3.3.1), en este capítulo se implementa un esquema de control para la altitud y el ángulo de giro de un PVTOL, utilizando un control por modos deslizantes considerando una superficie discontinua. También se desarrolla un esquema de control que está basado en el propuesto en [53], con la diferencia que llega a una referencia fija

en tiempo finito con una velocidad constante acotada. A la velocidad constante definida por el usuario también se le conoce como *velocidad crucero*. La cota de velocidad y el punto de referencia se establecen como parámetros del control. Además, se muestra la estabilidad global del punto de equilibrio. Se presentan los resultados obtenidos en la simulación numérica al implementar los controladores propuestos.

El capítulo se divide de la siguiente manera; en la siguiente sección se presenta el modelo utilizado, en la sección 3 se desarrolla el esquema de control, un experimento numérico se presenta en la sección 4 y finalmente en la sección 5 se dan las conclusiones del trabajo.

5.1. Sistema

Considerando un modelo simplificado de aeronave PVTOL, el esquema de este sistema se ilustra en la figura 5.1 [34]. Considere $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un marco de referencia inercial fijo y $(\mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b)$ con $\mathbf{j}_b = \mathbf{j}$ un marco movible referido a la aeronave (ejes del cuerpo).

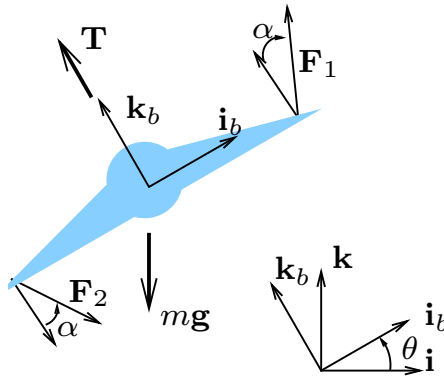


Figura 5.1: Aeronave planar VTOL.

Las fuerzas que actúan sobre el sistema son

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T\mathbf{k}_b, \\ \mathbf{F}_1 &= (\sin \alpha \mathbf{i}_b + \cos \alpha \mathbf{k}_b)F, \\ \mathbf{F}_2 &= (\sin \alpha \mathbf{i}_b - \cos \alpha \mathbf{k}_b)F, \\ m\mathbf{g} &= -mg\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento escritas en términos del centro de masa C son

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_C &= \mathbf{T} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + m\mathbf{g}, \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_C &= \mathbf{C}M_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{C}M_2 \times \mathbf{F}_2, \end{aligned}$$

donde \mathbf{a}_C es la aceleración de C , $\boldsymbol{\sigma}_C$ es el momento angular sobre C , M_1 y M_2 son los puntos donde las fuerzas F_1 y F_2 son aplicadas. Expandiendo estas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{k}) &= T\mathbf{k}_b + 2F \sin \alpha \mathbf{i}_b - mg\mathbf{k}, \\ -J\ddot{\theta}\mathbf{j}_b &= -2lF \cos \alpha \mathbf{j}_b, \end{aligned}$$

donde J es el momento de inercia sobre C y l es la distancia del punto C a los puntos M_1 y M_2 . Definiendo

$$\begin{aligned} u_1 &= T/m, \\ u_2 &= \frac{2F}{m} \cos \alpha, \\ \varepsilon &= \tan \alpha, \\ \lambda &= \frac{ml}{J}, \end{aligned}$$

y proyectando sobre el marco de referencia fijo, se tiene que

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -u_1 \sin \theta + \varepsilon u_2 \cos \theta, \\ \ddot{z} &= u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - g, \\ \ddot{\theta} &= \lambda u_2, \end{aligned}$$

donde x, z, θ corresponde respectivamente al movimiento horizontal, vertical y al ángulo de giro de la aeronave. Considerando $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, z_1 = z, z_2 = \dot{z}$ y $\theta_1 = \theta, \theta_2 = \dot{\theta}$ se tiene que en variables de estado, la dinámica del modelo de la aeronave PVTOL es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -u_1 \sin \theta + \varepsilon u_2 \cos \theta, \\ \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= u_1 \cos \theta + \varepsilon u_2 \sin \theta - g, \\ \dot{\theta}_1 &= \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= \lambda u_2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Utilizando la transformación propuesta en [54]

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - \frac{\varepsilon}{\lambda} \sin \theta_1, \\ \xi_2 &= x_2 - \frac{\varepsilon}{\lambda} \theta_2 \cos \theta_1, \\ \zeta_1 &= z_1 + \frac{\varepsilon}{\lambda} (\cos \theta_1 - 1), \\ \zeta_2 &= z_2 - \frac{\varepsilon}{\lambda} \theta_2 \sin \theta_1, \\ \psi_1 &= \theta_1, \\ \psi_2 &= \theta_2, \end{aligned} \tag{5.2}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -\bar{u}_1 \sin \psi_1, \\ \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 &= \bar{u}_1 \cos \psi_1 - g, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= u_2, \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $\bar{u}_1 = u_1 - \varepsilon \psi_2^2$ y consideraremos que $\lambda = 1$. Se puede apreciar en la ecuación (5.3) que la entrada u_2 sólo afecta al último estado, desacoplándose de las variables de movimiento x y z de la ecuación (5.1).

5.2. Control

Aunque el objetivo en este capítulo es relativa a la altura z de la aeronave PVTOL, se deben considerar las otras dos variables libres, es decir, la posición horizontal x y el ángulo de giro de la aeronave θ . El sistema (5.1) tiene tres grados de libertad y solo dos actuadores, por lo tanto se trata de un sistema subactuado. Para el despegue o aterrizaje la variable de mayor importancia es el ángulo de giro, ya que éste siempre debe ser cero. Debido a esta consideración y a que se trata de un sistema subactuado, la posición horizontal de la aeronave no será analizada en este capítulo.

Para simplificar el análisis, del sistema reducido (5.3), se considera

$$\bar{u}_1 \cos \psi_1 - g = v_1,$$

donde v_1 es la nueva entrada de control encargada de imponer la dinámica en lazo cerrado para la altura. Así, se tiene que

$$\bar{u}_1 = \frac{v_1 + g}{\cos \psi_1}. \quad (5.4)$$

Finalmente, al sustituir (5.4) en (5.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= -(v_1 + g) \tan \psi_1, \\ \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 &= v_1, \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= u_2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

de esta forma se desacoplan las variables asociadas a la altura ζ y al ángulo de giro ψ .

5.2.1. Superficie deslizante discontinua

Dado que el objetivo de control es imponer una dinámica en la aeronave que le permita desplazarse de una altura a otra y mientras lo hace, la aeronave acelere (despegue) hasta alcanzar una velocidad constante (velocidad crucero) y posteriormente desacelere hasta llegar a la altura deseada (aterrizaje), nos basaremos en el controlador descrito en el capítulo 4.

Dada la forma de las ecuaciones en (5.5) es posible obtener el siguiente resultado.

Teorema 4. *Considere el sistema dado en (5.5) y las siguientes leyes de control*

$$\begin{aligned} v_1 &= -b_1 \zeta_2 - \alpha_1 \operatorname{sign}(\beta_1 \operatorname{sign}(\zeta_1 - \zeta_d) + z_2) \\ u_2 &= -b_2 \psi_2 - \alpha_2 \operatorname{sign}(\beta_2 \operatorname{sign}(\psi_1 - \psi_d) + \psi_2) \end{aligned}$$

donde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ son constantes reales positivas y $(\zeta_d, \psi_d) \subset \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ es un punto de operación fijo. Si $b_1 \beta_1 - \alpha_1 < 0$ y $b_2 \beta_2 - \alpha_2 < 0$, entonces $\zeta \rightarrow \zeta_d$ y $\psi \rightarrow \psi_d$ cuando $t \rightarrow \infty$ y la velocidad crucero estará dada por β_1 y β_2 para z_2 y ψ_2 , respectivamente.

Demostración. Sustituyendo las leyes de control en el sistema (5.5), tenemos las siguientes ecuaciones de estado en lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \\ \dot{\zeta}_2 &= -b_1\zeta_2 - \alpha_1 \operatorname{sign}(\beta_1 \operatorname{sign}(\zeta_1 - \zeta_d) + \zeta_2), \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -b_2\psi_2 - \alpha_2 \operatorname{sign}(\beta_2 \operatorname{sign}(\psi_1 - \psi_d) + \psi_2).\end{aligned}$$

Dado que se tienen dos sistemas desacoplados de segundo orden cada uno y por el teorema 3 dado en el capítulo 4, tenemos que $(\zeta_1, \zeta_2) \rightarrow (\zeta_d, 0)$ y que $(\psi_1, \psi_2) \rightarrow (\psi_d, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. \square

En este caso solo se ha considerado controlar las variables ζ y ψ . Debido a que el sistema (5.5) es subactuado, la variable ξ no podrá ser manipulada mientras el objetivo de control esté sobre ζ y ψ . En otras palabras, si el objetivo es que la aeronave tenga un ángulo de giro fijo distinto de cero, está inevitablemente se moverá sobre la componente horizontal; e.g. si el ángulo fijo es positivo (negativo) se moverá a la izquierda (derecha), aunque se conserve la altura deseada.

Para aplicar el resultado del teorema 4 al sistema (5.1) se debe considerar que $u = \bar{u}_1 + \varepsilon\psi_2^2$ y $\bar{u}_1 = (v_1 + g)/\cos\psi_1$. Por otra parte, se tiene que si $\psi_d = 0$ y por el cambio de variables dado en (5.2) se tiene que $\theta_1 \rightarrow 0$ y entonces $z_1 \rightarrow \zeta_d$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo 4. *Considere el sistema dado en (5.1) con los siguientes parámetros, $\varepsilon = 0.1$, $\lambda = 1$, $g = 9.81$ y el controlador descrito en el teorema 4 con los siguientes parámetros de diseño $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$. Las condiciones iniciales del sistema son $(x_{10}, x_{20}, z_{10}, z_{20}, \theta_{10}, \theta_{20})^T = 0 \in \mathbb{R}^6$, el tiempo de simulación es $t \in [0, 5]$ y las referencias deseadas son $z_d = 2$ y $\theta_d = 0$.*

En la figura 5.2 se muestra un esquema de despegue de la aeronave PVTOL y cada dibujo que se muestra está espaciado del siguiente por la misma diferencia de tiempo (equitemporal). La aeronave inicia en el origen (dibujo inferior) y va subiendo a la posición deseada. Observe que al inicio y al final del trayecto, la distancia entre dibujos no es constante. Se observa que en una región entre el origen y el punto de referencia la distancia entre los dibujos es constante, lo que indica que la velocidad de la aeronave también es constante.

El controlador para la altura dado en el teorema 4 también es útil en el aterrizaje de la aeronave PVTOL al hacer $z_d = 0$. Sin embargo, de manera práctica la aeronave chocará con la referencia utilizada para el aterrizaje, debido a que se tienen sobretiros al momento en que la aeronave alcanza la altura deseada y esos sobretiros no son recomendables al momento de aterrizar (véase figura 5.2, dibujos superiores).

Para evitar los sobretiros generados al aplicar el control dado en el teorema 4, pero conservando la velocidad crucero proponemos el controlador que se describe a continuación.

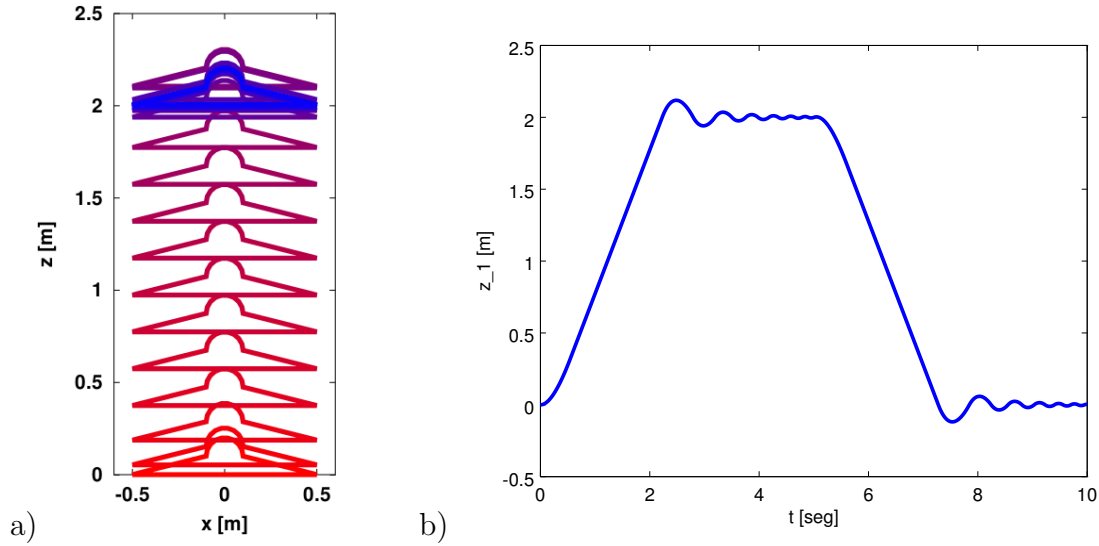


Figura 5.2: a) Esquema de despegue de la aeronave PVTOL usando el control propuesto en el teorema 4. b) Altura de la aeronave con respecto al tiempo.

5.2.2. Superficie deslizante continua

Considere el sistema dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + u_1.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Con la siguiente ley de control

$$u_1 = -\alpha \operatorname{sign} s,$$

donde b y α son constantes reales positivas y

$$s = \begin{cases} 2\alpha x_1 + x_2^2 \operatorname{sign} x_2, & |x_1| < \frac{\beta^2}{2\alpha}, \\ \beta \operatorname{sign} x_1 + x_2, & |x_1| \geq \frac{\beta^2}{2\alpha}, \end{cases}\tag{5.7}$$

con β una constante real positiva. En la figura 5.3 se muestra el lugar geométrico donde $s = 0$.

Observe que cuando $|x_1| \geq \beta^2/2\alpha$ se tiene el mismo controlador que en el teorema 3 (compárese la expresión de la superficie del controlador (4.3) con la superficie 5.7), por lo que solo se presenta el estudio del caso en que $|x_1| < \beta^2/2\alpha$.

Una forma usual de demostrar que la superficie s es atractora es comprobar que $s \cdot \dot{s} < 0$, [5]. En el caso de la superficie (5.7), por la complejidad de la desigualdad, se presenta un análisis diferente que se basa en la geometría de la superficie y la dirección del campo vectorial alrededor de dicha superficie.

Primeramente, considere que $-\beta^2/2\alpha < x_1 < 0$; en ese intervalo se tiene que $s = 2\alpha x_1 + x_2^2 = 0$, por lo que el lugar geométrico está dado por $x_2 = (-2\alpha x_1)^{1/2} = f(x_1)$.

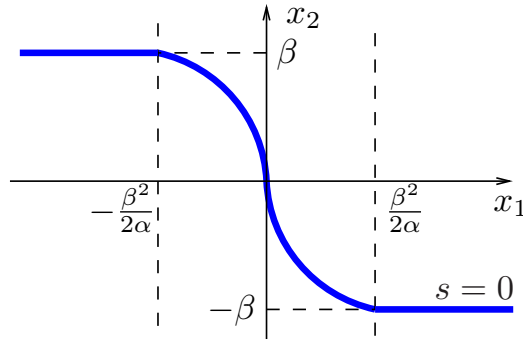


Figura 5.3: Superficie deslizante sigmoide.

La pendiente de la recta tangente en cualquier punto sobre la superficie está dada por

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\alpha}{x_2}.$$

La pendiente del campo vectorial está dado por

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -b \pm \frac{\alpha}{x_2},$$

donde el signo positivo (negativo) corresponde cuando x_2 es menor (mayor) que $(-2\alpha x_1)^{1/2}$.

Entonces, para que la superficie sea atractora se debe satisfacer (véase figura 5.4):

1. La pendiente del campo vectorial debe ser menor que la derivada de la función $f(x_1)$ cuando $x_2 > (-2\alpha x_1)^{1/2}$.
2. La pendiente del campo vectorial debe ser mayor que la derivada de la función $f(x_1)$ cuando $x_2 < (-2\alpha x_1)^{1/2}$.

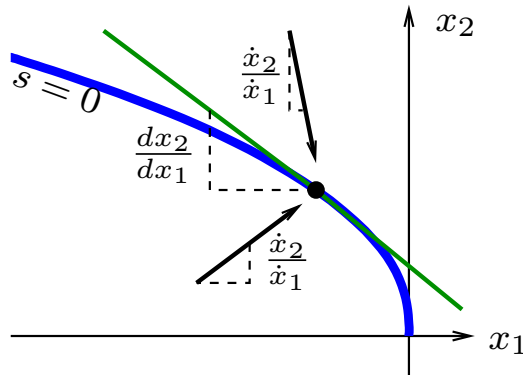


Figura 5.4: Segmento de la superficie dada en (5.7)

Por lo tanto, para que la superficie s sea atractiva se tiene que cumplir con

1. $-b - \frac{\alpha}{x_2} < \frac{-\alpha}{x_2} \rightarrow b > 0.$
2. $-b + \frac{\alpha}{x_2} > \frac{-\alpha}{x_2} \rightarrow bx_2 < 2\alpha.$

El valor máximo que puede tomar x_2 dentro del intervalo de análisis es $x_2 = \beta$, por lo que, de la segunda desigualdad se tiene que $b\beta < 2\alpha$. Esta desigualdad siempre se satisface debido a que la condición del teorema 3 es $\alpha > b\beta$. Para el caso en que $0 < x_1 < \beta^2/2\alpha$ se hace un procedimiento similar y se llegan a las mismas condiciones.

La superficie propuesta se diseñó de manera que está asociada a la curva solución que tendría el sistema si éste fuera conservativo y ante una entrada constante, de manera que pase por el origen a partir de la velocidad crucero β . La solución del sistema conservativo considerando que las condiciones iniciales son $(y_{10}, y_{20})^T = (\mp\beta^2/2\alpha, \pm\beta)^T$ es

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mp\frac{\alpha}{2}t^2 \pm \beta t \mp \frac{\beta^2}{2\alpha}, \\ y_2(t) &= \mp\alpha t \pm \beta, \end{aligned}$$

donde obtenemos que el tiempo en llegar al origen está dado por $t = \beta/\alpha$.

Teorema 5. *Considere el sistema dado en (5.5) y las siguientes leyes de control*

$$\begin{aligned} v_1 &= -b_1\zeta_2 - \alpha_1 \text{sign}(s) \\ u_2 &= -b_2\psi_2 - \alpha_2 \text{sign}(\beta_2 \text{sign}(\psi_1 - \psi_d) + \psi_2) \end{aligned}$$

con

$$s = \begin{cases} 2\alpha_1(\zeta_1 - \zeta_d) + \zeta_2^2 \text{sign} \zeta_2, & |\zeta_1 - \zeta_d| < \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1}, \\ \beta_1 \text{sign}(\zeta_1 - \zeta_d) + \zeta_2, & |\zeta_1 - \zeta_d| \geq \frac{\beta_1^2}{2\alpha_1}, \end{cases}$$

donde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ son constantes reales positivas y $(\zeta_d, \psi_d) \subset \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ es un punto de operación fijo. Si $b_1\beta_1 - \alpha_1 < 0$ y $b_2\beta_2 - \alpha_2 < 0$, entonces $\zeta \rightarrow \zeta_d$ y $\psi \rightarrow \psi_d$ cuando $t \rightarrow \infty$ y la velocidad crucero estará dada por β_1 y β_2 para ζ_2 y ψ_2 , respectivamente. Además la convergencia a la altura deseada ζ_d se dará en tiempo finito.

Demostración. Al sustituir las leyes de control en (5.5) tenemos que el ángulo de giro ψ_1 permanece idéntica que en el teorema 3, mientras que para la altura obtenemos la misma estructura dada en (5.6) con la superficie (5.7). Por lo descrito en la sección anterior tenemos que la altura no presentará sobretiros, llegará a la referencia en tiempo finito y mientras lo hace será con una velocidad constante. \square

Para aplicar el resultado del teorema 5 al sistema (5.1) se debe considerar que $u = \bar{u}_1 + \varepsilon\psi_2^2$ y $\bar{u}_1 = (v_1 + g)/\cos\psi_1$. Además, se tiene que si $\psi_d = 0$ y por el cambio de variables dado en (5.2) se obtiene que $\theta_1 \rightarrow 0$ y entonces $z_1 \rightarrow \zeta_d$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo 5. *Considere el mismo sistema, parámetros, condiciones iniciales y referencias deseadas que se usaron en el ejemplo 1. En la figura 5.5 se muestra un esquema de*

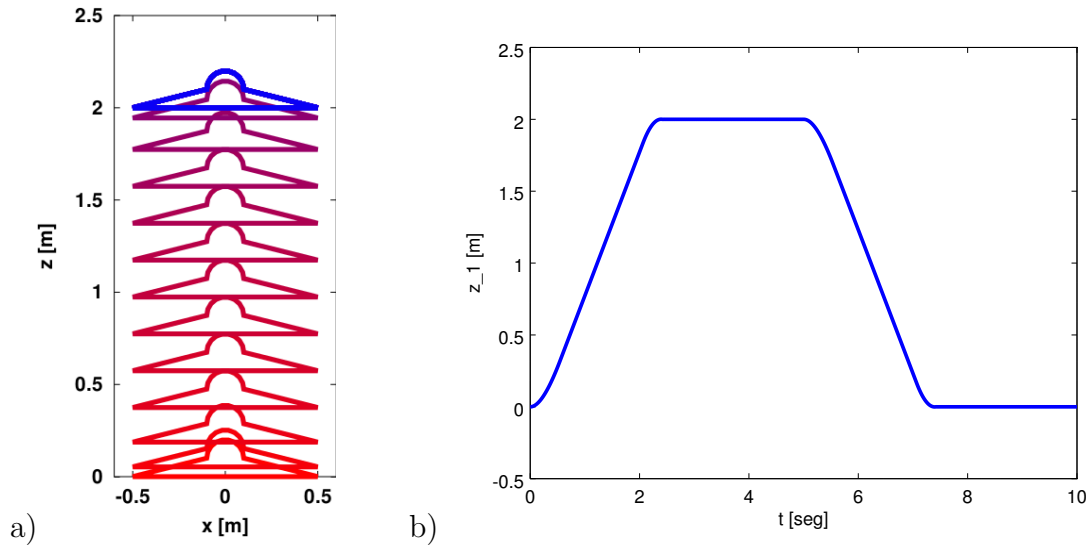


Figura 5.5: a) Esquema de despegue de la aeronave PVTOL usando el control propuesto en teorema 5. b) Altura de la aeronave con respecto al tiempo.

despegue de la aeronave PVTOL, pero empleando los controladores dados en el teorema 5. Observe que al igual que en el ejemplo 1, los dibujos están equiespaciados en el intermedio del trayecto, lo que indica que la velocidad de la aeronave es constante. También es posible apreciar que no existen sobretiros al llegar a la altura deseada (compárese con la figura 5.2).

5.3. Resultados numéricos

En los siguientes ejemplos numéricos se muestran los resultados dados en los teoremas 4 y 5 aplicados al sistema dado en (5.1). Las gráficas de altura, velocidad, el ángulo de giro, las entradas de control y el plano de fase, permiten hacer comparaciones entre los algoritmos propuestos en esta tesis.

Ejemplo 6. *Considere el sistema dado en (5.1) con los siguientes parámetros, $\varepsilon = 0.1$, $\lambda = 1$, $g = 9.81$ y el controlador descrito en el teorema 4 con los siguientes parámetros de diseño $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$. Las condiciones iniciales del sistema son $(x_{10}, x_{20}, z_{10}, z_{20}, \theta_{10}, \theta_{20})^T = (0, 0, 0, 0, 0.2, 0)^T$, el tiempo de simulación es $t \in [0, 10]$ y las referencias deseadas son $\theta_d = 0$ y*

$$z_d = \begin{cases} 2, & t \leq 5, \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$

En este ejemplo se tiene que el ángulo es distinto de cero y la referencia deseada de altura es despegar hasta llegar a los 2 metros y después aterrizar (0 metros). En la figura 5.6a se muestra la altura de la aeronave y su respectiva velocidad. Observe que

la velocidad crucero se presenta durante los intervalos de transición entre la condición inicial y la referencia deseada, ya sea en el despegue o en el aterrizaje. Por otra parte, la velocidad de la altura de la aeronave no excede en magnitud el valor de diseño β_1 .

La figura 5.6b muestra el ángulo de giro de la aeronave el cual es controlado por la entrada u_2 y se puede apreciar que éste llega a la referencia fija deseada, i.e. $\theta_d = 0$. En la figura 5.6c se muestran las entradas de control requeridas para cumplir con los dos objetivos de regulación. Finalmente, en la figura 5.6d se muestra el plano de fase $z_1 - z_2$, donde el punto de la izquierda corresponde al origen $z = 0 \in \mathbb{R}^2$, mientras que el punto de la derecha está dado por la otra referencia deseada, i.e. $z = (2, 0)^T$. En el plano de fase se puede apreciar fácilmente que la velocidad se mantiene constante en un intervalo mientras la trayectoria va de un punto a otro.

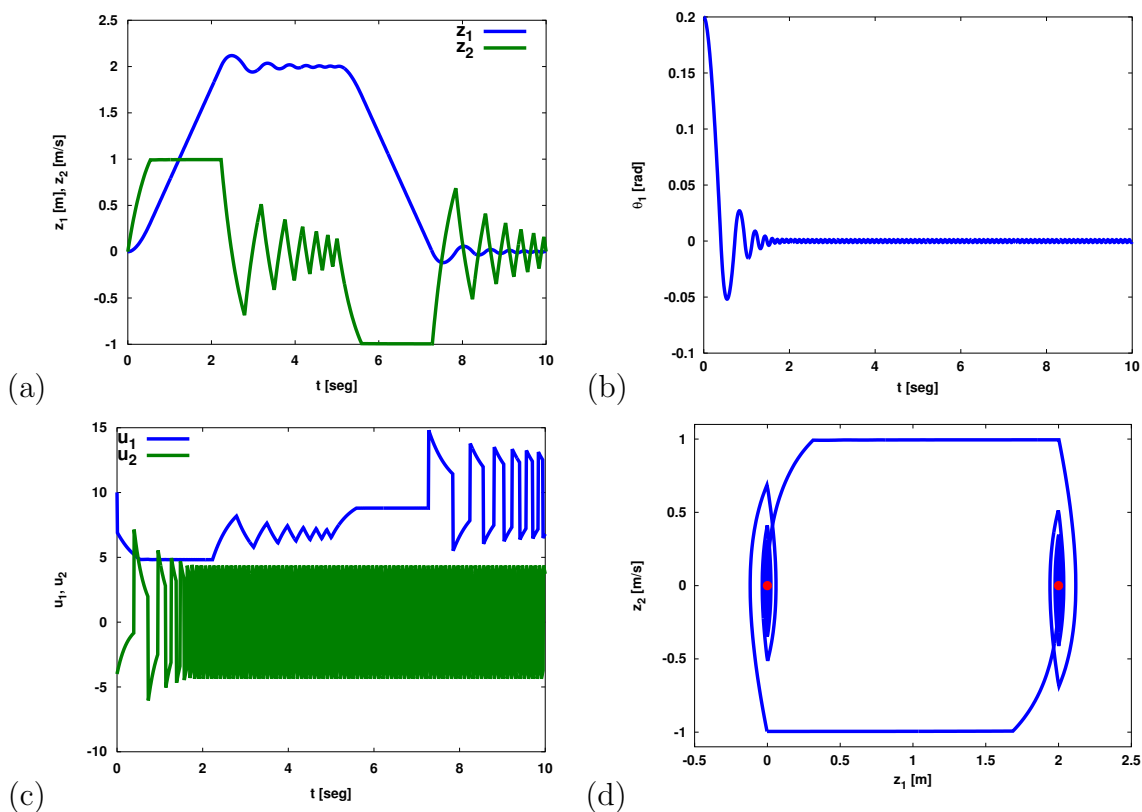


Figura 5.6: Resultados en simulación del PVTOL usando el control propuesto en teorema 5. (a) Altura y velocidad, (b) ángulo de giro de la aeronave, (c) entradas de control y (d) plano de fase de la altura y su velocidad.

Ejemplo 7. Considere el mismo sistema, parámetros, condiciones iniciales y referencias deseadas que se usaron en el ejemplo 6, pero empleando los controladores descritos en el teorema 5.

En la figura 5.7a se muestran las variables de estado asociadas con la altura z_1 y la velocidad z_2 . Se observa que se alcanza la referencia deseada z_d y la velocidad

se mantiene constante en diversos intervalos de tiempo, coincidiendo éstos entre el movimiento inicial y el final, observe que este comportamiento se presenta tanto en el despegue como en el aterrizaje. A diferencia de la respuesta de la figura 5.6a, en este caso no se presentan sobretiros al desplazarse la aeronave de una posición fija a otra.

Dado que el control para el ángulo de giro es el mismo que el empleado en el teorema 4, el resultado es idéntico y éste se muestra en la figura 5.7b. En la figura 5.7c se muestran las entradas de control requeridas para cumplir con los dos objetivos de regulación. La diferencia entre las señales de control contra las propuestas en el teorema 4 solo se presenta en u_1 , ya que es la entrada asociada con la altura. Finalmente, en la figura 5.7d se muestra el plano de fase $z_1 - z_2$. Al igual que en el ejemplo anterior, en la figura se indican los puntos $(0,0)$ y $(2,0)$, correspondientes a los puntos fijos deseados. También se observa que la velocidad se mantiene constante en un intervalo mientras la trayectoria va de un punto a otro.

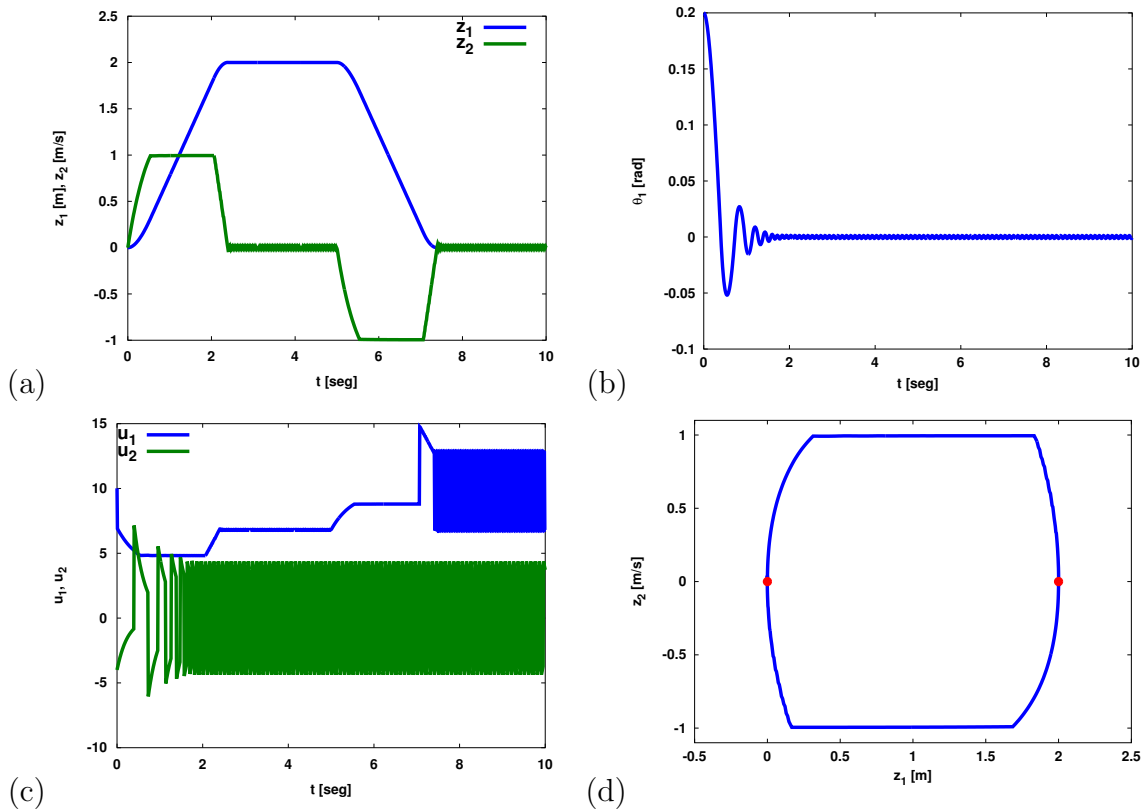


Figura 5.7: Resultados en simulación del PVTOL usando el control propuesto en teorema 5. (a) Altura y velocidad, (b) ángulo de giro de la aeronave, (c) entradas de control y (d) plano de fase de la altura y su velocidad.

5.4. Conclusiones

La ley de control del teorema 4 permite tener una velocidad constante mientras el sistema PVTOL alcanza un punto fijo deseado. Por otra parte, la ley de control para regulación del teorema 5 permite que el sistema no tenga sobretiros al momento de aterrizar (o de alcanzar un punto fijo) y hacerlo en tiempo finito. Debido al desacoplamiento entre variables del sistema es posible aplicar el control de altura propuesto en este trabajo independientemente si se busca controlar el ángulo de giro o la posición horizontal de la aeronave.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de tesis se presentaron un par de leyes de control de estructura variable para regulación de sistemas mecánicos de segundo orden y con la propiedad de conservar una velocidad constante. Las leyes de control propuestas se basan en el uso de modos deslizantes, los cuales se sabe que presentan robustez ante perturbaciones acotadas e incertidumbres paramétricas.

La primera ley de control que se propone en este trabajo (capítulo 4) presenta un par de regiones planas en la componente de la velocidad, lo que causa que el sistema no supere una rapidez la cual es un parámetro de diseño. Esta característica hace ver el efecto como una "velocidad crucero" que el sistema toma en un intervalo de tiempo después de alcanzar dicha velocidad y antes de llegar a la posición final. La estabilidad que presenta el sistema con el controlador se da de forma global y asintótica.

El controlador está diseñado para sistemas mecánicos de segundo orden, sin embargo es posible extender el resultado a sistemas de $2n$ dimensiones donde cada subsistema se pueda desacoplar y escribir como sistemas de segundo orden independientes. Esta característica permite que la ley de control propuesta se pueda aplicar a sistemas torsionales, lineales, vehículos aéreos como el PVTOL o el cuadróptero, sistemas no lineales con un primer lazo de control linealizante y sistemas subactuados.

Este controlador también conmuta entre el orden del modo deslizante; cuando se encuentra con rapidez constante el controlador tiene una superficie deslizante de orden uno; cuando la solución deja esa superficie deslizante el controlador presenta una superficie deslizando de orden dos. Esto produce una entrada de control con frecuencia infinita para regular la velocidad y al dejar la superficie deslizando la conmutación es de una frecuencia finita y va aumentando hasta llegar a infinito cuando se alcanza el punto deseado. Esta acción de control afecta al igual que cualquier modo deslizante clásico debido al efecto de "chattering".

Se logró implementar físicamente el controlador con éxito en un sistema mecánico torsional ECP-220 de la compañía Educational Control Products localizado en el Laboratorio de Control del CICESE. Los parámetros de diseño fueron obtenidos de manera sencilla a pesar de no tener una identificación previa de los parámetros propios de la planta. Los resultados experimentales coinciden con gran similitud a lo esperado de

acuerdo a las simulaciones.

El controlador del capítulo 4 presenta un sobretiro al momento de empezar a disminuir su velocidad una vez que llegó a la referencia deseada. Este comportamiento no es el deseado cuando se aplica al control de altura de un vehículo aéreo, por lo que se propone una segunda ley de control. La ley de control propuesta en el capítulo 5 es suave y permite conservar las mismas características de velocidad acotada y robustez que el controlador del capítulo 4. Esta propuesta logra, debido al diseño de la estrategia de conmutación, que la posición del sistema no presenta sobretiros, por lo que este controlador es conveniente para el aterrizaje. Otra ventaja que tiene este controlador es que converge a la referencia en tiempo finito y no excede en amplitud la entrada de control.

Debido a que el PVTOL es un cuádróptero restringido en un plano, se pueden ocupar estos resultados para controlar un cuádróptero por secciones transversales o extender directamente la implementación del controlador a un sistema mecánico de orden mayor. En particular, con el cuádróptero se puede regular primeramente el ángulo θ y la altura z , posteriormente el ángulo ϕ y la altura z , finalmente regular el ángulo ψ . Las simulaciones realizadas del controlador propuesto sobre un PVTOL mostraron los resultados esperados.

Debido a la generalidad en el análisis de estabilidad en sistemas de segundo orden que se utilizó al diseñar los controladores, éstos pueden usarse en otras aplicaciones como circuitos, estructuras sísmicas, robótica, seguimiento de trayectoria, etc. La conmutación entre el orden del modo deslizante al usar la superficie no conexas abre la posibilidad de una nueva área de estudio.

Bibliografía

- [1] Samir Bouabdallah and Roland Siegwart. Full control of a quadrotor. *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, (1):153–158, October 2007.
- [2] Marcel Mazoyer. *A History of World Agriculture: From the Neolithic Age to the Current Crisis*. New York: Monthly Review Press, 2006.
- [3] F. L. Lewis. Wireless sensor network. documento en línea.
- [4] Martin E. Dempsey. *Eyes of the Army*. United States Army, 2010.
- [5] Vadim I. Utkin. *Sliding modes in control and optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [6] Alberto Isidori. *Nonlinear control systems*, volume I. Springer-Verlag, third edition, 1995.
- [7] Huibert Kwakernaak and Raphael Sivan. *Linear optimal control systems*. Wiley-Interscience, 1972.
- [8] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied nonlinear control*. Prentice Hall, 1991.
- [9] Vadim I. Utkin. *Sliding modes and their applications in variable structure systems*. MIR, 1978.
- [10] Vadim I. Utkin and Hao-Chi Chang. Sliding mode control on electro-mechanical systems. *Mathematical Problems in Engeneering*, 8(4-5):451–473, 2002.
- [11] Y Orlov, J Alvarez, L Acho, and L Aguilar. Global position regulation of friction manipulators via switched chattering control. *International Journal of Control*, 76(14):1446–1452, 2003.
- [12] P Castillo, R Lozano, and AE Dzul. *Modelling And Control Of Mini-Flying Machines*. Springer, 2005.
- [13] Debadatta Sahoo, Amit Kumar, and K. Sujatha. A Survey on Remotely Operated Quadrotor Aerial Vehicle using the Camera Perspective. *International Journal of Computer Applications*, 11(10):1–6, December 2010.

- [14] Shweta Gupte and James M. Conrad. A survey of quadrotor Unmanned Aerial Vehicles. *2012 Proceedings of IEEE Southeastcon*, pages 1–6, March 2012.
- [15] TJ Koo and Shankar Sastry. Output tracking control design of a helicopter model based on approximate linearization. *Proceedings of 37th IEEE Conference on Decision and Control*, (December):3635–3640, 1998.
- [16] T Hamel, R Mahony, R Lozano, and J Ostrowski. Dynamic modelling and configuration stabilization for an X4-flyer. *IFAC*, 2002.
- [17] Paul Pounds, Robert Mahony, and Peter Corke. Modelling and control of a quadrotor robot. *Proceedings Australasian Conference on Robotics and Automation 2006*, 2006.
- [18] Tommaso Bresciani. *Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter*. PhD thesis, Lund University, 2008.
- [19] S. Bouabdallah, P. Murrieri, and R. Siegwart. Design and control of an indoor micro quadrotor. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*, pages 4393–4398 Vol.5, 2004.
- [20] Samir Bouabdallah and Roland Siegwart. Backstepping and Sliding-mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2005. Proceedings.*, (April):2247–2252, 2005.
- [21] L Derafa, T Madani, and A Benallegue. Dynamic Modelling and Experimental Identification of Four Rotors Helicopter Parameters. *IEEE International Conference on Industrial Technology, 2006.*, pages 1834–1839, 2006.
- [22] T Puls and a Hein. 3D trajectory control for quadcopter. *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 640–645, October 2010.
- [23] S Bouabdallah. *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 2007.
- [24] GM Hoffmann, H Huang, Steven Waslander, and Claire Tomlin. Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment. *Proceedings of the 2007 AIAA Conference on Guidance, Control, and Navigation*, pages 1–20, 2007.
- [25] Pierre-jean Bristeau, Philippe Martin, Erwan Salaün, and Nicolas Petit. The role of propeller in the aerodynamics in the model of a quadrotor UAV. *Proceedings of the European Control Conference*, pages 683–688, 2009.
- [26] Ashfaq Ahmad Mian and Wang Daobo. Modeling and Backstepping-based Non-linear Control Strategy for a 6 DOF Quadrotor Helicopter. *Chinese Journal of Aeronautics*, 21(3):261–268, June 2008.

- [27] Daniel Mellinger and Vijay Kumar. Control and planning for vehicles with uncertainty in dynamics. *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 960–965, May 2010.
- [28] RW Beard. Quadrotor dynamics and control. Technical report, Brigham Young University, 2008.
- [29] Nicolas Guenard, Tarek Hamel, and Robert Mahony. A Practical Visual Servo Control for an Unmanned Aerial Vehicle. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(2):331–340, April 2008.
- [30] Nicolas Guenard, Tarek Hamel, and Robert Mahony. A practical visual servo control for an unmanned aerial vehicle. *Robotics, IEEE Transactions*, 24(2):331–340, 2008.
- [31] Vedran Sikiric. *Control of Quadcopter*. PhD thesis, Royal Institute of Technology, 2008.
- [32] P. Pounds and R. Mahony. Design principles of large quadrotors for practical applications. *2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 3265–3270, May 2009.
- [33] Sergei Lupashin, A Schollig, Michael Sherback, and R D’Andrea. A simple learning strategy for high-speed quadcopter multi-flips. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2010.*, pages 1642–1648, 2010.
- [34] Philippe Martin, S Devasia, and Brad Paden. A different look at output tracking: Control of a VTOL aircraft. *CDC*, (December):2376–2381, 1994.
- [35] Arthur C Smith. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [36] D. Mellinger, N. Michael, and V. Kumar. Trajectory generation and control for precise aggressive maneuvers with quadrotors. *The International Journal of Robotics Research*, 31(5):664–674, January 2012.
- [37] A Schollig, Federico Augugliaro, Sergei Lupashin, and R D’Andrea. Synchronizing the motion of a quadcopter to music. *ICRA), 2010 IEEE.*, pages 3355–3360, 2010.
- [38] F Hoffmann, N Goddemeier, and T Bertram. Attitude estimation and control of a quadcopter. *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1072–1077, October 2010.
- [39] P. Pounds, R. Mahony, and P. Corke. Modelling and control of a large quadrotor robot. *Control Engineering Practice*, 18(7):691–699, July 2010.

- [40] Abdellah Mokhtari and A Benallegue. Dynamic Feedback Controller of Euler Angles and Wind parameters estimation for a Quadrotor. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings.*, pages 2359–2366, 2004.
- [41] Dare A. Wells. *Dinámica de Lagrange*. McGraw-Hill, 1972.
- [42] Katsuhiko Ogata. *System Dynamics*. Prentice Hall, 1978.
- [43] Xinhua Wang. Takeoff/landing control based on acceleration measurements for VTOL aircraft. *Journal of the Franklin Institute*, 350(10):3045–3063, December 2013.
- [44] Jinchang Hu and Honghua Zhang. Immersion and invariance based command-filtered adaptive backstepping control of VTOL vehicles. *Automatica*, 49(7):2160–2167, July 2013.
- [45] Abdelkader Abdessameud and Abdelhamid Tayebi. Global trajectory tracking control of VTOL-UAVs without linear velocity measurements. *Automatica*, 46(6):1053–1059, June 2010.
- [46] Xinhua Wang, Jinkun Liu, and Kai-Yuan Cai. Tracking control for a velocity-sensorless VTOL aircraft with delayed outputs. *Automatica*, 45(12):2876–2882, December 2009.
- [47] M. Benosman. Nonlinear Control Allocation for Non-Minimum Phase Systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(2):394–404, March 2009.
- [48] John Hauser, Shankar Sastry, and George Meyer. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: Application to V/STOL aircraft. *Automatica*, 28(4):665–679, July 1992.
- [49] Philippe Martin, Santosh Devasia, and Brad Paden. A different look at output tracking: control of a vtol aircraft. *Automatica*, 32(1):101–107, January 1996.
- [50] W. Zhang and R.D. Brandt. Robust hovering control of a PVTOL aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(3):343–351, May 1999.
- [51] J.R. Azinheira and A. Moutinho. Hover Control of an UAV With Backstepping Design Including Input Saturations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(3):517–526, May 2008.
- [52] Sanchez-Rodriguez Omar, Chimal-Eguia Juan Carlos, and Barron-Fernandez Ricardo. Nonlinear Control Approach Applied to PVTOL with Restricted Cartesian Dynamic. *Cybernetics and Physics*, 2(3):169–176, 2013.
- [53] Ricardo Cuesta, Joaquin Alvarez, Cesar Liera, and Moises Miranda. Superficie discontinua aplicada a un sistema torsional. In *Congreso Nacional de Control Automatico, 2013*. AMCA, 2013.

- [54] Reza Olfati-Saber. *Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles* by Reza Olfati-Saber Submitted to the Department of Electrical Engineering and Computer Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.