



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

ESCUELA SUPERIOR DE CIENCIAS MARINAS



EFEECTO DE LA VISCOSIDAD, ESTRATIFICACION
Y ROTACION EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS
ONDAS INTERNAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
O C E A N O L O G O
PRESENTA
EDUARDO ANTONIO GONZALEZ GONZALEZ

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, AGOSTO DE 1984

RESUMEN

Se analiza la estabilidad de perturbaciones infinitesimales en un flujo con esfuerzo lineal, en términos de los números de Richardson, Reynolds y Rossby que representan su densidad, viscosidad y rotación, respectivamente. La perturbación se encuentra representada por el vector número de onda cuya solución aparece en términos de una transformada espacial. Se estudia el caso simplificado de una onda perpendicular al flujo, lo que permite obtener condiciones suficientes y necesarias de estabilidad. El principal resultado es la nueva zona inestable por arriba del valor de Richardson de 0.25; mientras que éste último se obtiene en el límite, al tomar un valor de Reynolds muy grande. Todo esto en base a valores obtenidos de una superficie que varía continuamente al cambiar Reynolds y Richardson. Se integran numéricamente las mismas ecuaciones por medio del método de Hamming, analizándose sus resultados en términos de gráficas de rapidez contra el tiempo. Todo lo anterior haciendo énfasis en una posible aplicación futura a ondas internas en laboratorio y en el océano.

EFFECTO DE LA VISCOSIDAD, ESTRATIFICACION
Y ROTACION EN EL COMPORTAMIENTO DE LAS
ONDAS INTERNAS

T E S I S
QUE PRESENTA:
EDUARDO ANTONIO GONZALEZ GONZALEZ

Aprobada por:



Presidente del Jurado
M.C. René Pinet Plasencia



Sinodal Propietario
Dr. José Luis Ochoa



Sinodal Propietario
Oc. Modesto Ortiz Figueroa



Sinodal Suplente
Mat. Miguel Angel Ibarra



Sinodal Suplente
Oc. Armando Trasviña Castro

DEDICATORIA

A mi Madre, porque ésto es obra suya, ya que con su amor, sacrificio y ejemplo ha sido el apoyo para que vaya logrando mis metas.

A mi hermana, que siempre ha sido parte mía y que con su alegría y vida ha sido muchos hermanos en uno.

A mi Abuelita, porque su amor, cuidados y pensamientos nunca podré olvidar.

A mis tíos Orlando, Ricardo e Inés, que siempre han estado tan cerca de mí, y que con el resto de mi familia, han sido un gran apoyo en mi educación.

A Cecilia, por su amor y porque ha vivido mis divagues y ocurrencias, y me ha ayudado a lo largo de todo el tiempo que ha durado éste trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es el resultado de cinco años en ésta Universidad, por lo que son muchos maestros que no podría enumerar, a los que agradezco sus enseñanzas. Sin embargo, siempre hay alguien que sobresale, y que Yo he tenido la suerte de que también fuera mi Director de Tesis, el M.C. René Pinet sin el cual, el presente trabajo nunca lo hubiera podido realizar.

También quiero mencionar a los Sinodales de ésta tesis debido a su interés, opiniones y paciencia mostrados en éstos meses.

Quiero también agradecer a la directora de la Escuela Superior de Ciencias Marinas, Ocean. Guadalupe G. de Ballesteros y subdirectores, M.C. Roberto Millán y Ocean. Lorenzo Gómez Morín la ayuda e interés brindados.

Al Centro de Cálculo Electrónico del CICESE agradezco el haberme permitido utilizar su computadora y demás equipos, así como la ayuda prestada por sus operadores.

Agradezco también a todos los que supieron animarme; y quiero mencionar al P.O. Marco Julio Ulloa por la ayuda brindada en la elaboración de los signos utilizados en éste escrito.

Otra vez doy las gracias a mi Madre sin la que nunca hubiera realizado éste trabajo ni ésta carrera.

INDICE

	página
Lista de gráficas.....	i
Lista de símbolos.....	ii
I Introducción.....	1
II Modelo matemático.....	7
II.1 Planteamiento de las ecuaciones.....	3
II.2 Transformaciones.....	10
II.3 Adimensionalización del modelo.....	13
II.4 Solución analítica de las ecuaciones.....	15
III Simulaciones numéricas.....	18
IV Resultados.....	21
V Discusiones.....	25
VI Conclusiones.....	30
VII Recomendaciones.....	32
VIII Bibliografía.....	33
Apéndice I.....	37
Apéndice II.....	38
Gráficas.....	39

LISTA DE GRAFICAS

página

Figura (1)_Curva de estabilidad para el caso sin viscosidad.....	39
Figura (2)_Soluciones gráficas de la ecuación cúbica de	40
Figura (3)_Figuras con ángulos diferentes de la superficie de estabilidad.....	41
Figura (4)_Gráficas estereoscópicas de la superficie de estabilidad.....	42
Figura (5)_Líneas de S/R_0 constantes vistas de perfil..	43
Figura (6)_Curvas de rapidez contra tiempo sin considerar la viscosidad.....	44
Figura (7)_Curvas de rapidez contra tiempo incluyendo viscosidad.....	45
Figura (8)_Curvas de rapidez contra tiempo observando con detalle el efecto de la viscosidad.....	46
Figura (9)_Curvas de rapidez contra tiempo en un ángulo = $\pi/2$	47
Figura (10)_Otras curvas de rapidez contra tiempo viendo el efecto de Reynolds y Richardson.....	48

LISTA DE SÍMBOLOS

- U Campo de velocidades.
- U_0 Término de advección media.
- σ Esfuerzo lineal.
- $|u|$ Perturbaciones infinitesimales dentro de un régimen de
 $|v|$ flujo preestablecido, usadas para linealizar el modelo.
 $|w|$ Donde (u, v, w) son velocidades con respecto a los ejes
 $|p|$ cartesianos (x, y, z) y p, ρ la presión dinámica y la
 $|p|$ densidad, respectivamente.
- $\bar{\rho}(z)$ Estructura de densidad media.
- ρ' Fluctuaciones en la densidad media.
- ρ_0 Densidad de referencia, usada en la aproximación de Boussinesq.
- Ψ Viscosidad cinemática.
- θ Anomalia de la densidad $(=\rho'/\rho_0)$.
- $\left| \begin{array}{l} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_t \end{array} \right|$ Derivadas parciales con respecto a (x, y, z, t) .
- t Tiempo.
- f Efecto de la rotación de la tierra, siendo dos veces la componente local de la velocidad angular.

$\begin{vmatrix} D_z \\ D_t \\ D_\tau \end{vmatrix}$ Derivadas totales con respecto a (z, t, τ) .

∇^2 Laplaciano $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)$.

$\begin{vmatrix} u^*(t) \\ v^*(t) \\ w^*(t) \\ p^*(t) \\ \theta^*(t) \end{vmatrix}$ Modulaciones de las perturbaciones infinitesimales.

$\begin{vmatrix} a \\ \gamma \\ \lambda \end{vmatrix}$ Números de onda en las direcciones (x, y, z) .

N_0^2 Frecuencia de Brunt-Väisälä $(= -[g/\rho_0] D_z \bar{\rho})$, constante.

g Aceleración gravitacional.

Re Número de Reynolds $(=\sigma/\Psi \tilde{a}^2)$.

Ro Número de Rossby $(=\sigma/f)$.

Jo Número de Richardson $(=N_0^2/\sigma^2)$.

τ Tiempo adimensional $(=\sigma t)$.

k^2 Magnitud del vector de onda $(=a^2 + \gamma^2 + [\lambda + \sigma \alpha t]^2)$.

$\tilde{a}^2$ Magnitud del vector de onda en el plano horizontal $(=a^2 + \gamma^2)$.

$\tilde{u}$ Modulación de la velocidad en la dirección x , después de realizar una rotación de ejes $(=[a/\tilde{a}]u^* + [\gamma/\tilde{a}]v^*)$.

$\tilde{v}$ Modulación de la velocidad en la dirección y , después de realizar una rotación de ejes $(=[\gamma/\tilde{a}]u^* - [a/\tilde{a}]v^*)$.

- $\tilde{a}$ Proyección en el plano horizontal del vector de onda.
- S Inclinação de la perturbación ($\lambda/\tilde{a}$).
- K_0^2 Magnitud del vector de onda al rotar ejes ($=1+S^2$).
- θ Angulo con el eje x de la perturbación ($\cos\theta = a/\tilde{a}$).
- D Operador derivada.
- ω Frecuencia de oscilación de las perturbaciones.
- ω^2 Frecuencia de las soluciones a orden cero, caso sin viscosidad ($=1/K_0^2 \{J_0 + S/R_0[S/R_0 - 1]\}$).
- $\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix}$ Condiciones iniciales del modelo.
- KMP Transformada de Kelvin-Marcus-Press.
- ξ Angulo vertical de la perturbación (se obtiene de $S = \lambda/\tilde{a}$).
- Δt Intervalo numérico usado en el método de Hamming.

I INTRODUCCION

En las últimas décadas la Estabilidad Hidrodinámica ha empezado a ser usada con mayor frecuencia en la investigación de las ondas internas tanto en fluidos a escala relativamente pequeña como en fluidos geofísicos. Su importancia radica en la relación que posee con fenómenos como las ondas internas y la turbulencia, por lo que ha influido en ciencias como la Oceanografía, Meteorología y la Ingeniería.

Las primeras investigaciones teóricas y experimentales dentro de éste campo fueron realizadas por Reynolds y Helmholtz en el siglo pasado. Mientras que los principales avances en éste siglo se hicieron prácticamente dentro de la Ingeniería Hidráulica, en estudios de flujos a través de tubos ó canales.

Los estudios básicos en la Estabilidad Hidrodinámica ó Análisis de Estabilidad, y en especial en la estabilidad de flujos paralelos que es la base del presente trabajo, tratan sobre el comportamiento de un regimen de flujo laminar en el que se introducen perturbaciones infinitesimales y su desarrollo durante un intervalo inicial de tiempo (v.eg. Lin, 1966); si éstas decaen hasta dejar al flujo sin cambio se considera estable. Será inestable si dichas perturbaciones crecen, pudiendo dar origen a turbulencia.

Lo anterior provocó intentos de establecer criterios de estabilidad, básicamente por medio de parámetros adimensionales como son el número de Reynolds y el de Richardson. Obteniéndose resultados que muestran condiciones necesarias pero no suficientes sobre la aparición de inestabilidades. En el caso del número de Reynolds, que predice la aparición de turbulencia para valores alrededor de 2×10^3 , se ha logrado medir flujos con Reynolds de magnitudes mayores, que sin embargo continúan siendo estables debido al tamaño de las perturbaciones. Se han obtenido inclusive, desarrollos teóricos que muestran como la viscosidad en ciertas circunstancias puede crear inestabilidades en un regimen por medio del número de Reynolds (Lin, 1966), fenómeno que no ha sido explicado claramente. El número de Richardson presenta un comportamiento semejante alrededor del valor de $1/4$; ya que para valores menores no es una condición suficiente de inestabilidad.

El tratamiento matemático clásico consiste en partir de las ecuaciones de movimiento y llegar a la ecuación de Orr-Sommerfeld (Lin, 1966; Betchov y Criminale, 1967), en un espacio bidimensional y sin estratificación ni rotación. Otro tratamiento, por medio de la ecuación de Taylor-Goldstein (v. Roberts, 1975) para un flujo estratificado pero sin viscosidad, lleva al teorema de Miles-Howard (Miles, 1961; Miles y Howard, 1964) que establece como condición suficiente de

estabilidad para un flujo, el que posea un número de Richardson mayor que $1/4$; mientras que con Richardson de $1/4$ la ecuación se indetermina. Otro criterio es el semicírculo de Howard (v. eg. Turner, 1973) que se basa en las velocidades de una onda compleja cuyas inestabilidades caen dentro de dicho semicírculo.

Investigaciones numéricas han sido realizadas entre otros por Hazel (1972), que esencialmente observa curvas de crecimiento de flujos de diferentes perfiles de velocidad y densidad.

En lo que se refiere a experimentación en laboratorio, Thorpe (1973) y Turner (1973) hacen una revisión de dichos experimentos, que principalmente se han realizado en túneles de viento ó en canales con dos ó mas fluidos a través de los cuales se observan fenómenos como inestabilidades de Kelvin-Helmholtz (Thorpe, 1968) ó circulación sobre obstáculos. En éste punto se nota claramente la relación existente entre el análisis de estabilidad y las ondas internas (atmosféricas y oceánicas), ya que el primero ofrece las herramientas necesarias para tratar muchos de los aspectos que se presentan en las segundas, tanto teórica como experimentalmente.

En lo que respecta a ondas internas en el océano, aunque ya Kelvin en el siglo pasado desarrolla las primeras teorías,

no es sino hasta en las últimas dos décadas en que han ocurrido avances sensibles; entre los que destacan los trabajos de Phillips (1966) y Garrett y Munk (1973). Una revisión de dichos trabajos y las teorías establecidas la dan Turner (1973), Roberts (1975) y Munk (1980).

Hay cinco tipos básicos de ondas en el océano: capilares, sonoras, planetarias, inerciales y gravitacionales. De éstas, las que se propagan entre masas de agua de diferente densidad son llamadas ondas internas. En el presente trabajo se estudian ondas internas gravitacionales las cuales se han logrado reproducir en laboratorio (Thorpe, 1968; Hall y Pao, 1971; Phillips, 1968), y que en el caso de perturbaciones creadas por esfuerzos han sido observadas en el océano (Woods, 1968) y en la atmósfera (Atlas et al., 1970). En el presente trabajo se hablará de ondas internas, como aquellas cuya fuerza restauradora es la gravedad (ondas internas gravitatorias).

La importancia dinámica esencial de las ondas internas radica en que parecen ser el principal eslabón que permite la transmisión de energía de la parte superior del océano, proveniente en última instancia del sol, hacia el interior de aquel. Se cree que ésta transmisión de energía ocurre principalmente por medio del rompimiento de dichas ondas y la creación de turbulencia (junto con fenómenos a escala pequeña

como son las microestructuras). Lo anterior está íntimamente relacionado con los valores aproximadamente constantes que se observan a través de los años de los parámetros físicos del océano, lo cual tiene gran repercusión en el clima del planeta. Todo lo cual involucra a los coeficientes de difusión oceánicos.

También son importantes desde el punto de vista biológico y químico debido a que permiten la distribución y disipación tanto de nutrientes como de contaminantes. Geológicamente han tratado de ser relacionadas con movimientos de sedimentos y corrientes de turbidez (v. Roberts, 1975).

El presente trabajo tiene como objetivos principales el tratar de tener un modelo matemático lo más completo posible alrededor del caso en que la velocidad macroscópica del flujo es perpendicular a las perturbaciones que aparecen en él. Lo anterior se hace para tratar de establecer un criterio de inestabilidad suficiente, en base a los números de Reynolds y de Richardson. Y al mismo tiempo se explora la posibilidad de que la viscosidad esté causando inestabilidades a través del número de Reynolds, como lo predice el modelo analítico bajo ciertas condiciones, y no sólo la disipación de perturbaciones. Todo esto siendo un caso particular de un modelo matemático que estudia la estabilidad de fluidos (v. Pinet, 1981).

Para lo cual se hará uso de herramientas teóricas y numéricas que permitan tratar un fluido incompresible, estratificado, con rotación y viscosidad; en un campo con esfuerzo lineal y sin fronteras, en el que se estudia el desarrollo en los tiempos iniciales de perturbaciones tridimensionales introducidas.

Lo anterior se hace evitando las ecuaciones de Orr-Sommerfeld y Taylor-Goldstein cuyos inconvenientes principales son: para la primera de ellas, presentar muchos caminos asintóticos para su solución analítica mientras que numéricamente aparecen errores por truncamiento por ser una ecuación de cuarto orden multiplicada por $1/Re$ (generalmente muy pequeño). La de Taylor-Goldstein se indetermina con un número de Richardson de $1/4$. Y ambas son usadas por lo general en espacios bidimensionales y sin incluir todos los parámetros que pueden afectar el fluido (la primera de ellas no considera estratificación ni rotación, y la segunda no involucra rotación y viscosidad).

II. MODELO MATEMATICO

Los modelos de Análisis de Estabilidad poseen varios pasos en común a lo largo de sus desarrollos matemáticos. En primer lugar, suponen que hay una solución conocida para las ecuaciones diferenciales básicas que representan el flujo principal, como sería la solución para las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso de un flujo de Poiseuille (v.eg. Batchelor, 1967).

A continuación se introduce una pequeña perturbación en estas ecuaciones, lo cual permitirá determinar su estabilidad. El siguiente paso será la linealización del sistema al considerar dichas perturbaciones infinitesimales y en muchos casos se considera un flujo que varía sólo en una dirección (flujo paralelo).

A las ecuaciones diferenciales básicas se les supone soluciones representables ondulatoriamente, como sería el considerar ondas del tipo de Tollmien-Schlichting que viajen en una dirección.

Otro paso común es el adimensionamiento de las ecuaciones para trabajar así con parámetros que permitan simplificar más el sistema al comparar entre sí la importancia física que tienen las variables involucradas.

El sistema que se presenta , sigue básicamente los pasos matemáticos mencionados, distinguiéndose de los tratamientos clásicos por el tipo de transformaciones que se realizan, como se verá detalladamente a continuación.

II.1_ Planteamiento de las Ecuaciones:

Se considera una estratificación vertical de la densidad $\bar{\rho}(z)$ en un fluido incompresible, con un plano horizontal (x,y) , siendo z vertical y positiva hacia arriba. El sistema se encuentra en rotación, por lo que se incluye el parámetro f . Tomemos un campo de velocidades estacionario con un esfuerzo uniforme en la dirección x cuya ecuación será:

$$U = U_0 + \sigma z \dots\dots\dots 1$$

Donde U_0 y σ son constantes al igual que U . En éste trabajo nos referiremos a σ como el 'esfuerzo'. Con ésto se establece un sistema sencillo de ecuaciones de movimiento y de continuidad:

$$-(1/\rho) \partial_x P = 0$$

$$-(1/\rho) \partial_y P = fU \dots \dots \dots 2$$

$$-(1/\rho) \partial_z P = \rho g$$

$$\partial_x U = 0$$

Donde P es la presión y g la aceleración gravitacional. Introduzcamos una perturbación en éste régimen por medio de las variables u, v, w, p, ρ que representan variaciones de velocidad en los ejes (x, y, z) , en el campo de presión y en la densidad, respectivamente. Nótese que tendremos un fluido representado por cinco variables y sólo cuatro ecuaciones, por lo que será necesario tomar una quinta ecuación que representará la conservación de masa (permitiendo difusión por transporte); sin considerar la difusión por temperatura en los fenómenos estudiados (cuyo planteamiento se presenta en el apéndice I). Así, las ecuaciones de continuidad, de Navier-Stokes ó movimiento y de conservación de masa serán:

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0$$

$$\partial_t u + (U + u) \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z (U + u) = -\partial_x p + f v + \Psi \nabla^2 u$$

$$\partial_t v + (U + u) \partial_x v + v \partial_y v + w \partial_z v = -\partial_y p - f u + \Psi \nabla^2 v \dots \dots \dots 3$$

$$\partial_t w + (U + u) \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w = -\partial_z p - \theta g + \Psi \nabla^2 w$$

$$\partial_t \theta + (U + u) \partial_x \theta + v \partial_y \theta + (w/\rho_0) \partial_z (\bar{\rho} + \rho') = 0$$

Donde $\theta = \rho'/\rho_0$; y Ψ, p, ρ_0 son la viscosidad cinemática, la presión dinámica (p/ρ_0) y la densidad de referencia,

respectivamente. Para llegar al sistema (3) se usaron los planteamientos de (2) y la aproximación de Boussinesq (v.eg. Turner, 1973) que básicamente representa el considerar que una pequeña perturbación en la densidad, sólo afecta el término de boyancia de un volumen de agua. Nótese que el sistema es no lineal, por lo que consideraremos perturbaciones infinitesimales que lo linealicen y permitan tener un sistema más tratable. Obtendremos:

$$\begin{aligned}\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w &= 0 \\ \partial_t u + U \partial_x u + w \partial_z U &= -\partial_x p + f v + \Psi \nabla^2 u \\ \partial_t v + U \partial_x v &= -\partial_y p - f u + \Psi \nabla^2 v \dots\dots\dots 4 \\ \partial_t w + U \partial_x w &= -\partial_z p - g \theta + \Psi \nabla^2 w \\ \partial_t \theta + U \partial_x \theta + (w/\rho_0) D_z \bar{\rho} &= 0\end{aligned}$$

II.2_Transformaciones:

Siguiendo el tratamiento de Pinet(1981), consideremos soluciones tipo ondas dadas por la siguiente transformada, la cual puede representar cualquier condición inicial ya que en el tiempo cero es una componente de Fourier en el espacio.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^*(t) \\ v^*(t) \\ w^*(t) \\ p^*(t) \\ \theta^*(t) \end{pmatrix} \text{EXP} \{i(\alpha x + \gamma y - [\lambda + \sigma \alpha t]z)\} \dots 5$$

Donde α , γ , λ son los números de onda, que se consideran reales en general. Este método fué aplicado por primera vez por Kelvin (Thomson, 1877) y recientemente por Marcus y Press (1977) para tratar flujos por medio de funciones de Green; al aplicarlo a nuestro sistema de ecuaciones (2), nos llevará a criterios de estabilidad pero evitando la ecuación de Taylor-Goldstein.

La interpretación básica (Marcus y Press, 1977) de ésta transformada es en el sentido de que hemos hecho una expansión lagrangiana pero continuando en nuestro sistema euleriano, donde estudiaremos el comportamiento de las velocidades en un punto (amplitud de la transformada), que son las envolventes del vector de onda al transcurrir el tiempo.

La sustitución de la transformada de Kelvin-Marcus-Press (ó transformada KMP) en el sistema (4), nos dará un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con el tiempo como variable independiente.

$$\begin{aligned}
au^* + \gamma v^* &= (\lambda + \sigma \alpha t) w^* \\
D_t u^* + U_0 i \alpha u^* + \sigma w^* &= -i \alpha p^* + f v^* - \Psi k^2 u^* \\
D_t v^* + U_0 i \alpha v^* &= -i \gamma p^* - f u^* - \Psi k^2 v^* \dots\dots\dots 6 \\
D_t w^* + U_0 i \alpha w^* &= i(\lambda + \sigma \alpha t) p^* - \Psi k^2 w^* - g \theta^* \\
D_t \theta^* + U_0 i \alpha \theta^* &= (N_0^2 / g) w^*
\end{aligned}$$

donde $N_0^2 = - (g / \rho_0) D_z \bar{\rho}$ es la frecuencia de Brunt-Väisälä considerada constante. Y $k^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + (\lambda + \sigma \alpha t)^2$ es la magnitud del vector de onda.

Alineémos el sistema de coordenadas con el frente de onda de las perturbaciones aplicando las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 \\
\tilde{u} &= au^* + \gamma v^* \dots\dots\dots 7 \\
\tilde{v} &= \gamma u^* - \alpha v^*
\end{aligned}$$

Lo que sustituido en las tres primeras ecuaciones de (6) será:

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= (\lambda + \sigma \alpha t) w^* \\
D_t(\tilde{u}) + U_0(i\alpha[\tilde{u}]) &= -i\tilde{\alpha}^2 p^* - \Psi k^2(\tilde{u}) - f\tilde{v} - \alpha \sigma w^* \dots\dots 8 \\
D_t(\tilde{v}) + U_0 i \alpha(\tilde{v}) &= -\Psi k^2(\tilde{v}) + f\tilde{u} - \sigma \gamma w^*
\end{aligned}$$

Lo anterior nos permitirá eliminar la presión de nuestras ecuaciones, empleando la ecuación para la componente vertical. Nuestro sistema se reducirá a:

$$\begin{aligned}
D_t(k^2 w^*) + U_0 i a (k^2 w^*) &= -g a^2 \theta^* - \Psi k^2 (k^2 w^*) - f(\lambda + \sigma a t) \tilde{a} \tilde{v} \\
D_t(\tilde{a} \tilde{v}) + U_0 i a (\tilde{a} \tilde{v}) &= -\Psi k^2 (\tilde{a} \tilde{v}) + [f(\lambda + \sigma a t) - \gamma \sigma] w^* \dots 9 \\
D_t \theta^* + U_0 i a \theta^* &= (N_0^2 / g) w^*
\end{aligned}$$

Nótese que los términos de advección media U_0 , pueden ser eliminados por medio de una transformada Galileana que físicamente se interpreta como si nuestro sistema de referencia se moviera con una velocidad U_0 .

$$\begin{vmatrix} v^* \\ w^* \\ \theta^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_0(t) \\ w_0(t) \\ \theta_0(t) \end{vmatrix} \text{EXP}(-i a U_0 t) \dots \dots \dots 10$$

Con lo que el sistema (9) se volverá:

$$\begin{aligned}
D_t(k^2 w_0) + \Psi k^2 (k^2 w_0) &= -f(\lambda + \sigma a t) \tilde{a} v_0 - g \tilde{a}^2 \theta_0 \\
D_t(\tilde{a} v_0) + \Psi k^2 (\tilde{a} v_0) &= [f(\lambda + \sigma a t) - \sigma \gamma] w_0 \dots \dots 11 \\
D_t \theta_0 &= (N_0^2 / g) w_0
\end{aligned}$$

II.3_Adimensionalización del Modelo:

Pinet (1981) encuentra que hay dos caminos básicos en el adimensionamiento del modelo, dependiendo de qué parámetro se use para adimensionar el tiempo. En el presente trabajo esto se realizará con el esfuerzo, que posee unidades de frecuencia.

El otro camino sería utilizar el parámetro f , donde las soluciones del sistema describen ondas inerciales (ver Pinet, ob. cit.). Tenemos como escala de referencia de longitud a $1/\alpha$. Mientras que las velocidades se pueden escalar con g/σ . Así, podremos definir las siguientes cantidades adimensionales:

$$\tau = \sigma t$$

$$S = \lambda/\tilde{\alpha} \quad (\tilde{\alpha} \neq 0)$$

$$Re = \sigma/\Psi\tilde{\alpha}^2$$

$$Ro = \sigma/f \dots\dots\dots 12$$

$$Jo = N_o^2/\sigma^2$$

$$K_o^2 = 1 + (S + \tau \cos \theta)^2$$

$$\cos(\theta) = \alpha/\tilde{\alpha}$$

Donde Re , Ro , Jo son los números de Reynolds, Rossby y Richardson, respectivamente. Mientras que $\cos(\theta)$ representa el ángulo de la perturbación con el eje x . Lo anterior nos llevará al sistema de ecuaciones diferenciales general:

$$\begin{aligned} D_\tau(K_o^2 w_o) + K_o^2/Re (K_o^2 w_o) &= -1/Ro (S + \tau \cos[\theta])v_o - \theta_o \\ D_\tau v_o + (K_o^2/Re)v_o &= ([S + \tau \cos[\theta]]/Ro - \sin[\theta])w_o \dots\dots\dots 13 \\ D_\tau \theta_o &= J_o w_o \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones no es lineal con respecto al tiempo por lo que no se conoce una solución analítica directa del mismo, excepto para cuando $\cos(\theta) = 0$, en que se simplifican términos y se llega a soluciones y criterios de

estabilidad, entre los que están resultados ya establecidos por otros investigadores. En éste trabajo se tratará analítica y numéricamente el sistema (13) pero enfocándonos en el ángulo $(\theta) = \pi/2$ que nos permitirá comparar ambos resultados.

II.4_ Solución Analítica de las Ecuaciones:

Como se mencionó anteriormente, tomando $\theta = \pi/2$ obtendremos un sistema lineal más sencillo; que representa soluciones de ondas perpendiculares al flujo. Escrito matricialmente, considerando la derivada (D) como un operador lineal, tendremos:

$$\begin{vmatrix} D + K_0^2/Re & S/R_0 & 1 \\ -1/K_0^2 (S/R_0 - 1) & D + K_0^2/Re & 0 \\ -J_0/K_0^2 & 0 & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_0^2 w_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \end{vmatrix} = 0 \quad ..14$$

Que tendrá soluciones no triviales cuando el determinante de (14) sea:

$$D^3 + 2K_0^2 D^2 / Re + (J_0 / K_0^2 + [K_0^2 / Re]^2 + S / K_0^2 R_0 [S / R_0 - 1]) D + J_0 / Re = 0 \quad ..15$$

Suponiendo soluciones tipo $EXP(-i\omega\tau)$:

$$\omega^3 + 2i\omega^2 K_0^2 / \text{Re} - (J_0 / K_0^2 + S^2 / K_0^2 \text{Ro}^2 - S / K_0^2 \text{Ro} + [K_0^2 / \text{Re}]^2) \omega - iJ_0 / \text{Re} = 0 \quad 16$$

Esta ecuación puede ser 'modulada' por los valores de los parámetros de Reynolds y Rossby. El considerar al número de Rossby finito mientras que a Reynolds infinito (despreciando así la viscosidad), nos llevará a un criterio semejante al de Miles-Howard (v.eg. Miles, 1961). Escribamos (16) como:

$$\omega_0^3 - 1/K_0^2 (J_0 + S/\text{Ro}[S/\text{Ro} - 1])\omega_0 = 0 \dots\dots\dots 17$$

tal que $a^2 = 1/K_0^2 (J_0 + S/\text{Ro}[S/\text{Ro} - 1])$

Tendremos tres valores como solución:

$$\omega_0(1) = a ; \quad \omega_0(2) = -a ; \quad \omega_0(3) = 0 \dots\dots\dots 18$$

Siendo las soluciones sin viscosidad de la forma:

$$\begin{vmatrix} K_0^2 w_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \end{vmatrix} = F_1 \text{EXP}(-ia\tau) + F_2 \text{EXP}(ia\tau) + F_3 \dots\dots\dots 19$$

Estas serán soluciones oscilatorias siempre que a sea real ($a^2 > 0$). Suponiendo que S es real; la frecuencia será imaginaria sólo si

$$(S/\text{Ro})^2 - S/\text{Ro} + J_0 < 0 \dots\dots\dots 20$$

Igualando a cero la ecuación (20), obtendremos una parábola en el espacio de parámetros $(S/\text{Ro}, J_0)$. Ocurriendo las inestabilidades bajo la curva ($a = \text{imaginario positivo}$), cuyo valor máximo está en $J_0 = 1/4$, como se vé en la figura (1). Sobre dicha curva obtendremos curvas neutras, cuya amplitud no

variará con el tiempo (caso sin viscosidad).

Volviendo a la ecuación (16), se vé que es una ecuación de tercer orden, cuya solución se puede obtener por medio de cambios de variable (v. Spivak, 1972), siendo:

$$\omega = (-q/2 \pm [q^2/4 + p^3/27]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - p/3(-q/2 \pm [q^2/4 + p^3/27]^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - b/3 \dots 21$$

Donde $q = -b^3/27 + b^4/9 - cb/3 + d$

$$p = -b^2/3 + c$$

$$b = 2iK_0^2/Re$$

$$c = -(J_0/K_0^2 + S^2/K_0^2 Ro^2 - S/K_0^2 Ro + [K_0^2/Re]^2)$$

$$d = -iJ_0/Re$$

Cuya solución se puede ver gráficamente de la figura (2) a la (5), y que se analiza en los resultados (capítulo IV).

III SIMULACIONES NUMERICAS

Se empleó una microcomputadora Hewlett-Packard modelo HP9830A para realizar las diferentes simulaciones, programando el sistema (13) en BASIC.

Se encontró que el mejor método numérico que se podía usar para resolver las integraciones numéricas, tanto del sistema general (ecuación [13]) como del caso particular con $\vartheta = \pi/2$, era el de Hamming (v.eg. James et al., 1967); ya que el haber empleado el método de Euler en un principio ocasionó inestabilidades numéricas en algunos casos. Por otra parte, el método de Hamming presenta un error por paso del orden Δ^5 y errores acumulativos menores que métodos como el de Runge-Kutta modificado, factor importante por el hecho de estar calculando una gran cantidad de pasos. Aunque hay que señalar que los primeros cuatro valores de la integración son aproximados por el método de Euler debido a que son valores preestablecidos que necesita el de Hamming para empezar a iterar. Sin embargo, se consideró que por ser éstos pocos valores e integrados en un principio, no sería un error significativo para los cálculos posteriores.

Se decidió trabajar numéricamente el sistema (13), que es el caso general y apartir de él estudiar el comportamiento

en $\theta = \pi/2$, lo cual nos permitirá en un futuro, hacer simulaciones con diferentes ángulos empleando el mismo modelo.

Este método esencialmente consiste en ajustar una parábola con tres coordenadas en común (de las cuatro preestablecidas), cuya área se emplea en una ecuación de predicción, que por medio de la regla de Simpson es reajustada para obtener la ecuación de corrección. Hasta aquí es esencialmente el método de Milne, pero Hamming encontró que por medio de una ecuación de modificación se ahorra tiempo y se eliminan la mayoría de los errores por truncamiento al irnos acercando a la convergencia con la solución verdadera (todo lo anterior se realiza para cada paso).

Para éste método de integración existen dos criterios de estabilidad numérica, habiéndose empleado

$$\Delta t < 0.65 / |\partial_y f| \dots\dots\dots 22$$

Donde Δt es el intervalo de tiempo y $\partial_y f$ es el valor calculado de la ecuación diferencial. En nuestro caso éste criterio fué escrito como:

$$\Delta t < 0.65 / [F(I)^2 + G(I)^2 + H(I)^2]^{\frac{1}{2}} \dots\dots 23$$

Siendo $F(I), G(I), H(I)$ las derivadas con respecto a v_0, w_0, θ_0

calculadas. Así, si Δt es mayor que la razón dada en (23), el programa divide Δt el número de veces necesarias para evitar la inestabilidad numérica.

IV RESULTADOS

Con la ecuación (21) podemos ver el comportamiento de ω en un espacio tridimensional (ω imaginaria, S/Ro , Jo) al graficar los parámetros que aparecen en la solución; a la vez podemos hacer comparaciones con el caso sin viscosidad dado por la ecuación (20). Nótese que se puede ver en las gráficas estereoscópicas de la figura (4) que la parábola se conserva para ω imaginaria igual a cero.

Debido a que tenemos una ecuación cúbica, obtenemos tres soluciones (figura [2]). En éste caso dos de ellas resultaron iguales y el comportamiento de la tercera simplemente es el de amortiguar las ondas presentes (figura [2-C]). El efecto inestabilizador aparece cuando ω imaginaria es mayor que cero (que producirá un crecimiento exponencial).

Esto último difiere del caso sin viscosidad debido a que hay una nueva zona de inestabilidad arriba de $Jo = 1/4$, como se nota principalmente en la figura (5) donde se han graficado de perfil (con el eje S/Ro hacia afuera de la hoja), las líneas S/Ro constantes, cuyos valores se encuentran cercanos al vértice de la parábola. Hay que hacer notar que en ésta ocasión la parte estable se amortigua debido al efecto de la viscosidad (con ω imaginaria < 0). Lo esencial de éstas soluciones es determinar el lugar donde ω imaginaria se vuelve

positiva con respecto a J_0 y tratar de establecer el efecto de los demás parámetros involucrados en la solución. Esto se hizo variando el número de Reynolds y observando las zonas de inestabilidad obtenidas para Richardson.

# RICHARDSON	# REYNOLDS
> 0.35	$< 5 \times 10^1$
$0.3 - 0.35$	$1 \times 10^2 - 1 \times 10^3$
0.3	$1 \times 10^4 - 1 \times 10^5$
0.25	$\geq 3 \times 10^5$

Un punto importante que se puede apreciar es que la curva de ω es continua al variar Reynolds. Es decir, el efecto de cambiar Reynolds se traduce en un movimiento de la superficie que forma la ω imaginaria.

Nótese también la zona de alto amortiguamiento que se aprecia mejor en la gráfica (3), para J_0 cercano al valor de 1.

Con respecto a las simulaciones numéricas de la ecuación (13), del capítulo anterior; se procedió en primer lugar a implementar en el programa del modelo, órdenes que comenzaran los experimentos numéricos con valores iniciales de velocidades u , v , w aleatorios. Hay que hacer notar que la distribución de donde surgen éstos, es una distribución de 'caja'. Es decir, todos los valores entre -1×10^{-6} y 1×10^{-6} tienen la misma probabilidad de ocurrencia. El elegir valores aleatorios fué

hecho pensando en la experimentación en laboratorio, en donde debemos considerar que tendremos un campo con velocidades aleatorias, en el que alguna de ellas crecerá hasta formar una onda observable, y por lo tanto medible, a partir de la cual se verá el desarrollo en sí del fluido.

El análisis del comportamiento del modelo se hizo en base a gráficas de rapidez contra el tiempo, por considerarse que éste parámetro sería más fácil medirlo en los futuros experimentos en canales, a través de un hot-wire por ejemplo.

En la figura (6) se muestran las gráficas obtenidas para las ecuaciones del sistema (13) con un ángulo $\theta = \pi/2$ y tomando a Reynolds (Re) de 3×10^5 como un caso sin viscosidad. Richardson (Ri) varía de 0.2 a 0.8, la inclinación vertical de la perturbación (S), que representa a λ/α es 1.0 y Rossby (Ro) 2.0. Lo anterior nos sitúa a lo largo de una recta vertical que pasa por el vértice de las parábolas de las figuras (1) y (2), a menos que otra cosa se indique, las gráficas que se presentan fueron realizadas a lo largo de ésta recta por ser el caso más representativo.

Se volvió a correr el programa con los mismos parámetros pero incluyendo ahora la viscosidad a través de $Re = 1 \times 10^2$, la figura (7) muestra los resultados obtenidos. En este juego de gráficas el comportamiento de (4-C) obtenido numéricamente, comparado con el predicho analíticamente, nos llevó a realizar

una investigación detallada de la influencia de Reynolds alrededor de éste comportamiento ondulatorio graficado.

La figura (8) muestra variaciones de Reynolds de 1×10^8 hasta 1×10^9 , con Richardson (Ri) fijo en 0.33 . Nótese que se ha cambiado la escala horizontal para tener tiempo suficiente de ver la inestabilidad que se desarrolla en (8-C).

Por último, en la figura (9) se trata de localizar la zona inestable pero utilizando un ángulo $\theta = 0$, pero como es posible apreciar, dicha zona no es localizada.

V. DISCUSIONES

El principal objetivo de éste punto es analizar la forma que toma en la realidad el desarrollo matemático anterior y cuestionar su verdadera aplicación.

En primer lugar señalaré una situación obvia, que es el tener en mente que éste modelo (sin fronteras) puede ser aplicado tanto a fenómenos oceánicos como atmosféricos. Por lo que una alternativa para probarlo físicamente podría ser el utilizar datos meteorológicos.

Veamos el efecto de considerar una frecuencia de Brunt-Väisälä constante; que nos sitúa en una termoclina difusa. Para ver el tipo de ondas internas que podemos estudiar en ésta zona, tomemos la ecuación (16) y consideremos despreciable el efecto de la viscosidad (haciendo Reynolds tender a infinito):

$$\omega^3 - (J_0/K_0^2 + [S/K_0^2 R_0][S/R_0 - 1])\omega = 0 \dots\dots 24$$

Si además tomamos $f \ll \omega$; es decir, ondas de período corto por lo que es posible despreciar la rotación terrestre, nos quedará:

$$\omega^3 - (J_0/K_0^2)\omega = 0 \dots\dots 25$$

donde $K_0^2 = 1 + \tan^2(\xi)$, ya que $S = \lambda/\tilde{a}$ es la inclinación de la perturbación. Tendremos

$$\omega^2 = N_0^2/[\sigma^2(1 + \tan^2(\xi))]\dots\dots\dots 26$$

que por relaciones trigonométricas nos lleva a la ecuación:

$$\omega = \pm N_0 \cos(\xi) \dots\dots\dots 27$$

Relación obtenida por Phillips para ondas internas de escala pequeña (v. Phillips, 1966; p.225). Este tipo de fenómenos se presentan en termoclinas de latitudes medias. Que sean de escala pequeña es con respecto al espesor de la capa de Brunt-Väisälä constante. Nótese también que el valor máximo ocurre cuando son ondas que viajan con el vector de onda horizontal.

Por otro lado, como se mencionó anteriormente, el efecto de la transformada KMP es el de fijarnos condiciones iniciales espaciales a partir de las cuales se estudian los parámetros en términos eulerianos, de las ondas influenciadas por el esfuerzo del flujo.

También con la ayuda de la transformada KMP podemos en cierta forma fijar nuestras condiciones a frontera, ya que debido a que es una transformada en el espacio, podemos usarla

para representar nuestro fondo por medio de sumas de ondas (series de Fourier). Así, en el fondo de un canal podemos poner una estructura senoidal transversal, que nos representará la perturbación inicial perpendicular al esfuerzo. En el caso del océano, la forma de tomar el ángulo de noventa grados, tal vez podría hacerse en zonas donde se presentaran corrientes a lo largo de la costa con un oleaje perpendicular ; ó en el océano profundo, en regiones donde las corrientes (que pudieran crear esfuerzos) fueran perpendiculares a ondas internas. Lo difícil y costoso de realizar lo anterior hizo imposible el haber usado datos oceánicos en el presente trabajo.

Sin embargo, los datos obtenidos en las investigaciones realizadas por Eriksen (1978) ó Korotayev y Panlateyev (1977), podrían emplearse como base para posteriores investigaciones en el océano. Basicamente ellos obtienen registros de tiempo de temperatura y corrientes que son empleados para obtener los números de Richardson, en zonas donde se presentan ondas internas y algunos rompimientos de las mismas. El principal problema sería el establecer el ángulo entre el esfuerzo y las ondas observadas.

En el caso de tener ondas que viajen a lo largo del esfuerzo, las inestabilidades que aparecieran en el flujo serían del tipo de Kelvin-Helmholtz, ocurriendo en el momento en que la velocidad de las partículas fuera mayor que la

velocidad de fase de la onda. Pero debido a que nosotros poseemos un ángulo entre las perturbaciones y el flujo, no podemos saber sin la ayuda de la experimentación, si las inestabilidades que aparecen son del tipo Kelvin-Helmholtz.

Un fenómeno importante que puede ser observado en la solución para ω^3 (ecuación [20]), es el comportamiento de la viscosidad, que en los dos primeros términos de la ecuación pueden combinarse para crear inestabilidades, mientras que en el tercero siempre tiende a amortiguar cualquier perturbación. Situación que va más de acuerdo con la forma de pensar que se tiene sobre el efecto de la viscosidad. Sería interesante ver si el teorema de Squire (v. Lin, 1966) puede aplicarse a un caso tridimensional, lo cual podría dar una nueva interpretación al efecto producido por la viscosidad en el modelo presentado.

Por último señalaré dos limitaciones que presenta el modelo: En primer lugar, éstas soluciones son válidas únicamente para los tiempos iniciales como ya se había mencionado. Debido a que un crecimiento exponencial, influenciado por el esfuerzo en el fluido, producirá inestabilidades en las perturbaciones creadas; además de que las perturbaciones dejarían de ser infinitesimales. Y en segundo lugar debido a que sólo poseemos soluciones analíticas cuando el flujo es perpendicular a las perturbaciones. Esto

quiere decir que hasta ahora, la única forma de estudiar el caso general en que las perturbaciones van en cualquier dirección con respecto al flujo, es por medios numéricos ó experimentación en laboratorio.

Con respecto a la integración numérica realizada con el método de Hamming, aunque en un principio fué útil debido a que no se poseía la solución de ω^3 , y que nos permitía conocer los órdenes de magnitudes de los parámetros (principalmente de Reynolds), al final las figuras tridimensionales del tipo de la gráfica (5) resultaron brindar más información; lo anterior básicamente debido a que era difícil determinar con exactitud si un comportamiento estudiado crecía ó se amortiguaba, debido a que no son discontinuidades las zonas estudiadas y que ésto ocurría en lapsos de tiempo relativamente largos.

VI. CONCLUSIONES

Se ha llegado a conocer en forma completa (analíticamente), un caso particular ($\theta = \pi/2$) de un modelo matemático de estabilidad de flujos paralelos. Obteniéndose principalmente, condiciones suficientes y necesarias de estabilidad en base a los números de Richardson y Reynolds.

Lo anterior puede ser la principal base (sin olvidar la experimentación en laboratorio) para tratar el caso general donde no se conoce la zona de inestabilidad ni soluciones analíticas.

El comportamiento del número de Reynolds (viscosidad) aparece en el tratamiento como un efecto natural e implícito, y sin tener que recurrir a procedimientos asintóticos.

Por medio del modelo numérico basado en el método de Hamming para resolver ecuaciones diferenciales, se ha llegado a los resultados analíticos a que había llegado Pinet (1981), para un ángulo $\theta = \pi/2$. Hasta el momento la forma más completa de obtener información gráfica de los experimentos numéricos realizados, es a través de graficar líneas de S/R_0 constantes y de rapidez contra el tiempo.

No obstante lo anterior, es notoria la falta que hace la experimentación en laboratorio para corroborar los resultados obtenidos y la posible diferencia con tratamientos como el de Miles (1961) e inclusive la posibilidad de haber interpretado algún fenómeno de una manera equivocada.

VII RECOMENDACIONES

En base a la sección anterior es obvio ver lo definitivo que será la experimentación en laboratorio (y su posible confirmación con mediciones oceánicas) para señalar con exactitud las diferencias de éste modelo con los de otros autores, así como su verdadera aportación en el estudio de los flujos paralelos. Este experimento podría basarse en los de Thorpe (1968, 1971, 1973), en un canal cerrado. Aunque sería esencial en primer lugar, ver la forma de obtener las condiciones impuestas por el sistema (2).

Consistiría en llenar dicho tubo de 3 cm.X 10 cm.X 2 mt. (donde se podrían hacer observaciones por dos ó tres segundos) con dos ó más capas de agua de diferente densidad (la forma más fácil sería con diferencias de salinidad), dejarlo reposar horizontalmente y después inclinarlo un cierto ángulo para producir un esfuerzo en el interior por la diferencia de densidad. A la vez habría que tenerlo montado en una base que rotara para simular el parámetro f . La forma de observar las inestabilidades que serían del tipo Kelvin-Helmholtz es por medio de pintar una ó varias capas de agua, mientras que las mediciones se podrían hacer con fotografías (longitudes de onda y velocidad de partículas en suspensión) ó empleando un hot-wire.

VIII BIBLIOGRAFIA

Atlas, D., Metcalf, J. I., Richter, J. H., Gossard, E. E., 1970. The birth of CAT and microscale turbulence. Journal of Atmospheric Science 27, 6.

Batchelor, G. K., 1967. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press.

Betchov, R., Criminale, W. O., 1967. Stability of Parallel Flows. Academic Press.

Brooke Benjamin, T., 1963. The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows. Journal of Fluid Mechanics 16, 436-450.

Eriksen, C. C., 1978. Measurements and models of fine structure, internal gravity waves, and wave breaking in the deep ocean. Journal of Geophysical Research 83, 2989-3011.

Garrett, C., Munk W., 1979. Internal waves in the ocean. Annual Review of Fluid Mechanics 11, 339-369.

Hall, M.J., Pao, Y.H., 1971. Internal wave breaking in a two-fluid system. Boeing Scientific Research. Seattle, Washington. Doc. D1-82-1076.

Hazel, P., 1972. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows. Journal of Fluid Mechanics 51, 39-61.

James, M.L., Smith, G.M., Wolford, J.C., 1967. Métodos Numéricos Aplicados a la Computación Digital con Fortran. Representación y Servicios de Ingeniería.

Korotayev, G.K., Panlateyev, N.A., 1977. Experimental studies of hydrodynamic instability in the ocean. Oceanology 17, 6.

Lin, C.C., 1966. The Theory of Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press.

Marcus, P.S., Press, W.H., 1976. On Green's functions for small disturbances of plane couette flow. Journal of Fluid Mechanics 74, 525-534.

Miles, J.W., 1961. On the stability of heterogeneous shear flows. Journal of Fluid Mechanics 10, 496-508.

Miles, J.W., Howard, L.N., 1964. Note on a heterogeneous shear flow. Journal of Fluid Mechanics 20, 331-336.

Munk, W., 1981. Internal waves and small scale processes. En: Bruce A. Warren y Carl Wunsch (ed.). Evolution of Physical Oceanography. The MIT Press.

Phillips, O.M., George, W.K., Wide, R.P., 1968. A note on the interaction between internal gravity waves and currents. Deep Sea Research 15, 267-273.

Pinet, R., 1981. Wave interaction with mean shear. Tesis de Maestría en Ciencias presentada en la Universidad de Washington.

Roberts, J., 1975. Internal Gravity Waves in the Ocean. Marcel Dekker, Inc.

Spivak, M., 1980. Cálculo infinitesimal. Editorial Reverté.

Thomson, W., 1887. Philosophical Magazine 24(5), 188.

Thorpe, S.A., 1968. A method of producing a shear flow in a stratified flow. Journal of Fluid Mechanics 32, 693-704.

Thorpe, S.A., 1973. Turbulence in stable stratified fluids: a review of laboratory experiments. Boundary Layer Meteorology 5, 95-119.

Turner, J.S., 1973. Bouyancy Effects in Fluids. Cambridge University Press.

Woods, J.D., 1968. Wave induced shear instability in the summer thermocline. Journal of Fluid Mechanics 32, 791-789.

APENDICE I

Considerando una ecuación de conservación de masa donde sólo hay transporte por difusión, y escribiendo la densidad como una suma de un campo medio más una perturbación, tendremos:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \dots\dots\dots 1$$

Y teniendo un campo de velocidades $(U, 0, 0)$:

$$\partial_t(\bar{\rho} + \rho') + (U + u)\partial_x(\bar{\rho} + \rho') + v\partial_y(\bar{\rho} + \rho') + w\partial_z(\bar{\rho} + \rho') = 0 \dots 2$$

Como el campo de velocidades es constante en el tiempo, podremos eliminarlo del primer término. Mientras que en el segundo y tercero se eliminan debido a que se considera a $\bar{\rho}$ únicamente como función de z . Dándonos:

$$\partial_t \rho' + (U + u)\partial_x \rho' + v\partial_y \rho' + w\partial_z(\bar{\rho} + \rho') = 0 \dots 3$$

Aplicando la aproximación de Boussinesq (dividiendo así, entre ρ_0) llegaremos a la quinta ecuación de (3).

$$\partial_t \theta + (U + u)\partial_x \theta + v\partial_y \theta + (w/\rho_0)\partial_z(\bar{\rho} + \rho') = 0 \dots 4$$

APENDICE II

Lista de símbolos usados en la graficación.

V_0	Condiciones iniciales aleatorias (velocidad horizontal, velocidad vertical y anomalía de densidad).
W_0	
TH_0	
R_0	Número de Rossby.
Re	Número de Reynolds.
J_0	Número de Richardson.
F	Angulo entre la perturbación y el flujo.
$W(iM)$	ω imaginaria.
DT	Intervalo de tiempo utilizado en la iteración.
L_0	S aleatoria (no se usó en las gráficas presentadas).
E	Representa un número elevado a un cierto exponente (por ejemplo 1×10^8).

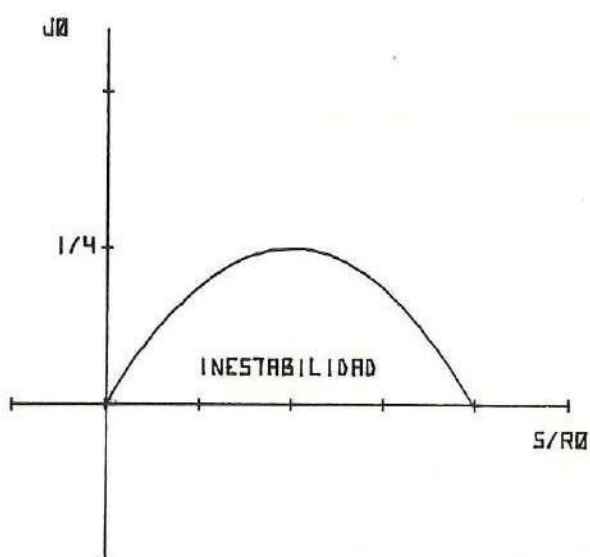


Figura (1)_Curva de estabilidad para el caso sin viscosidad dado por la ecuación (20) en un espacio adimensional. Nótese que el máximo valor de inestabilidad se alcanza en $J_0 = 1/4$. Sobre la parábola se obtienen crecimientos neutros debido a la ausencia de viscosidad, mientras que las inestabilidades ocurren en su interior.

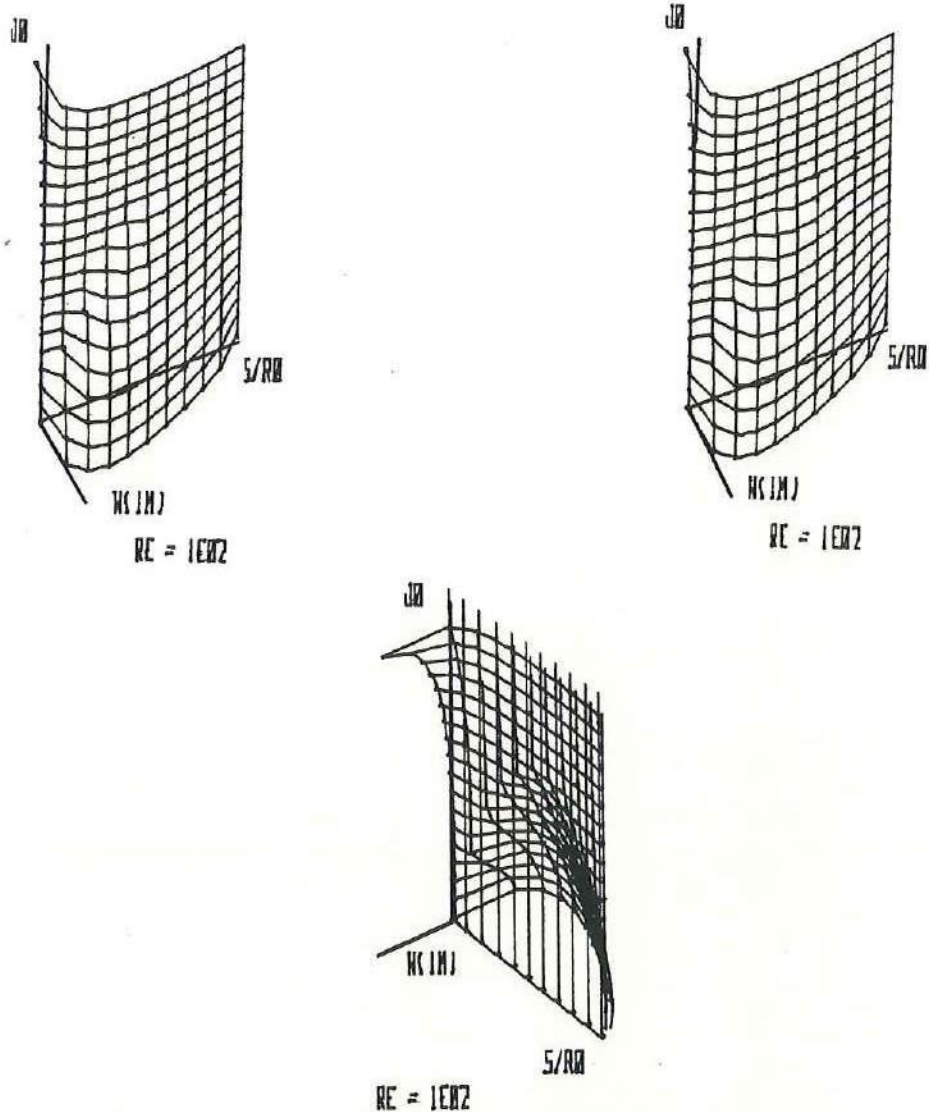


Figura (2)_Soluciones gráficas en un espacio tridimensional de la ecuación (21). Las inestabilidades ocurren para $\omega(\text{Im})$ positiva, mientras que las negativas indican amortiguamiento.

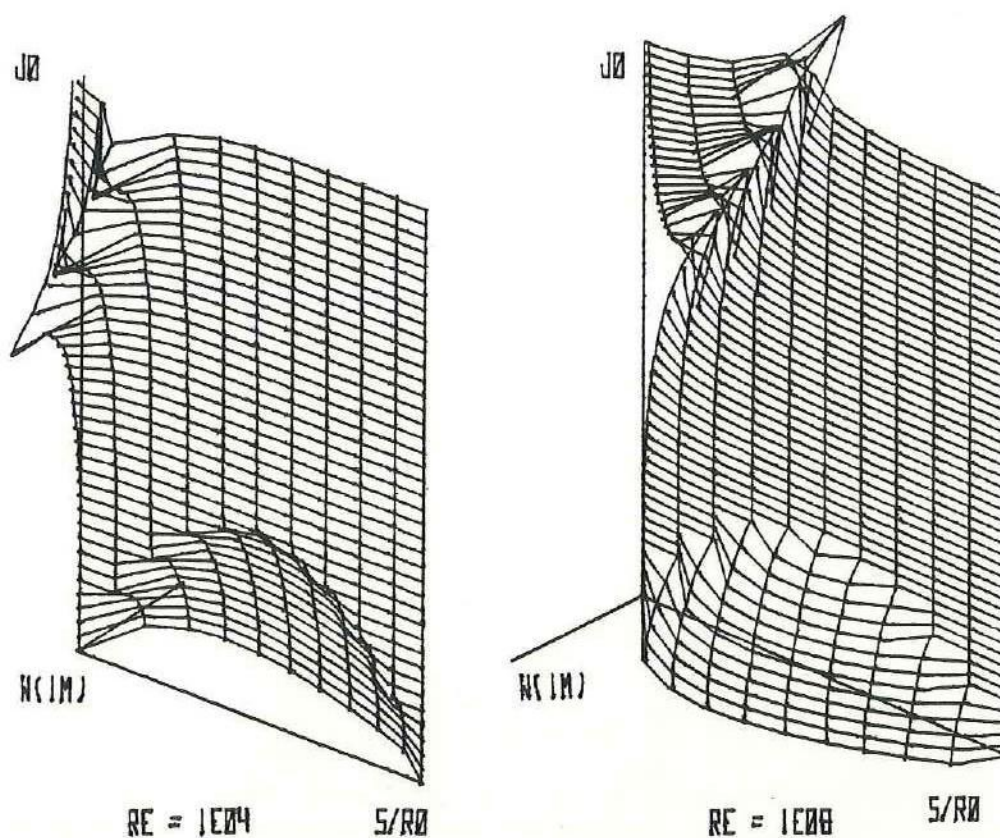


Figura (3)_Dos ángulos diferentes de la superficie de estabilidad dada por la ecuación (21), con Reynolds diferentes. Nótese el hundimiento para Richardson alto; indicador de fuerte amortiguamiento. Graficado con un intervalo de $Jo = 0.2$

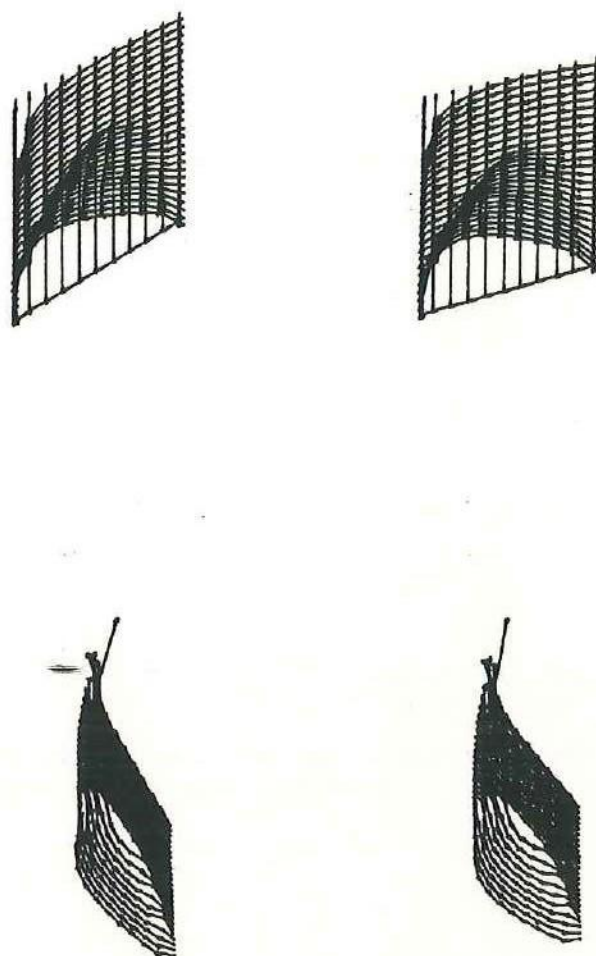


Figura (4)_Gráficas estereoscópicas donde se han marcado las zonas inestables que delínean una parábola en $\omega(\text{Im}) = 0$ (observándolas a través de dos tubos ó lentes estereoscópicos se ven en tercera dimensión).

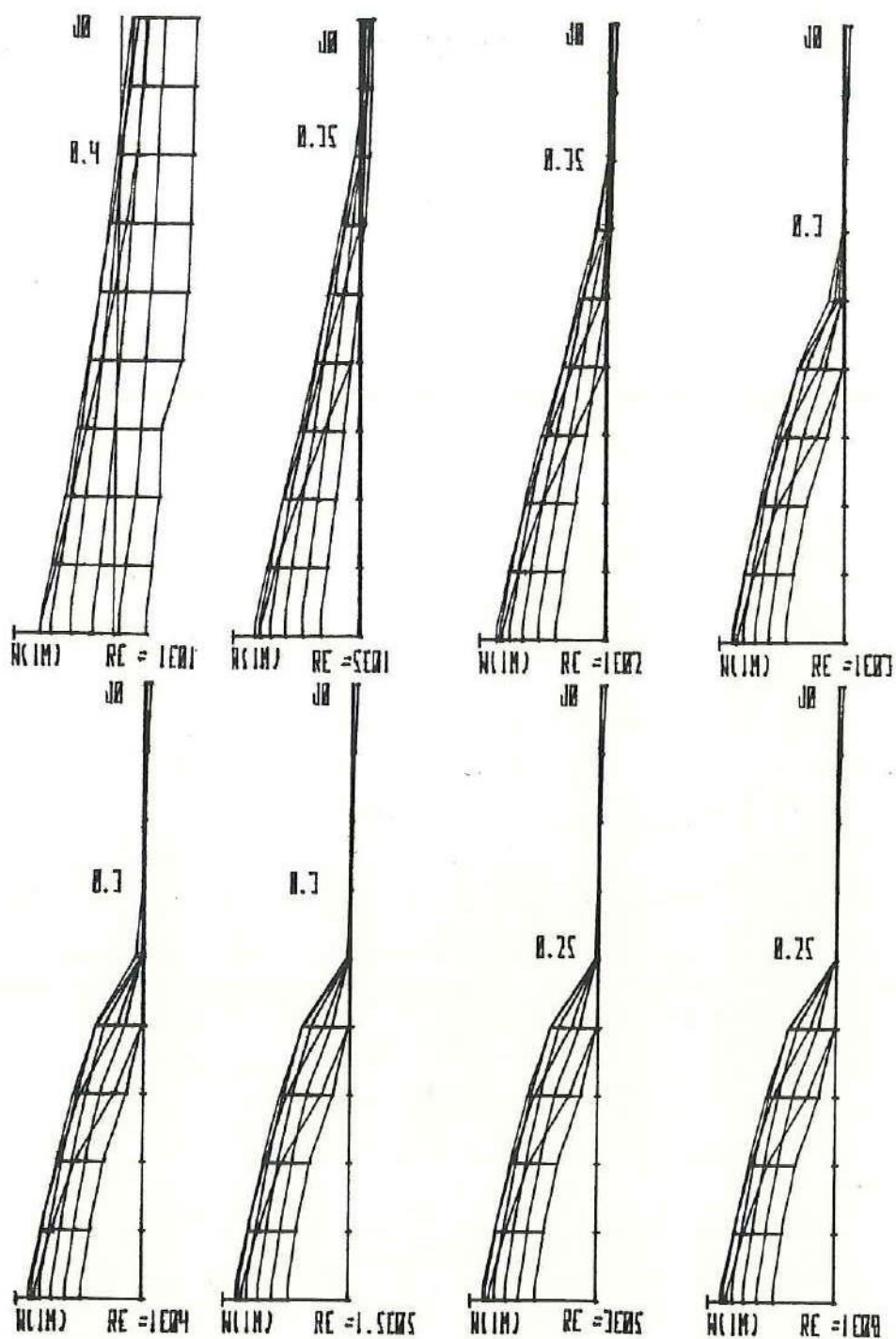


Figura (5)_Gráficas de perfil de líneas de S/R_o constantes cercanas a la zona de máxima inestabilidad; haciendo variar Reynolds. En $Re = 1 \times 10^8$ se obtiene el caso sin viscosidad.

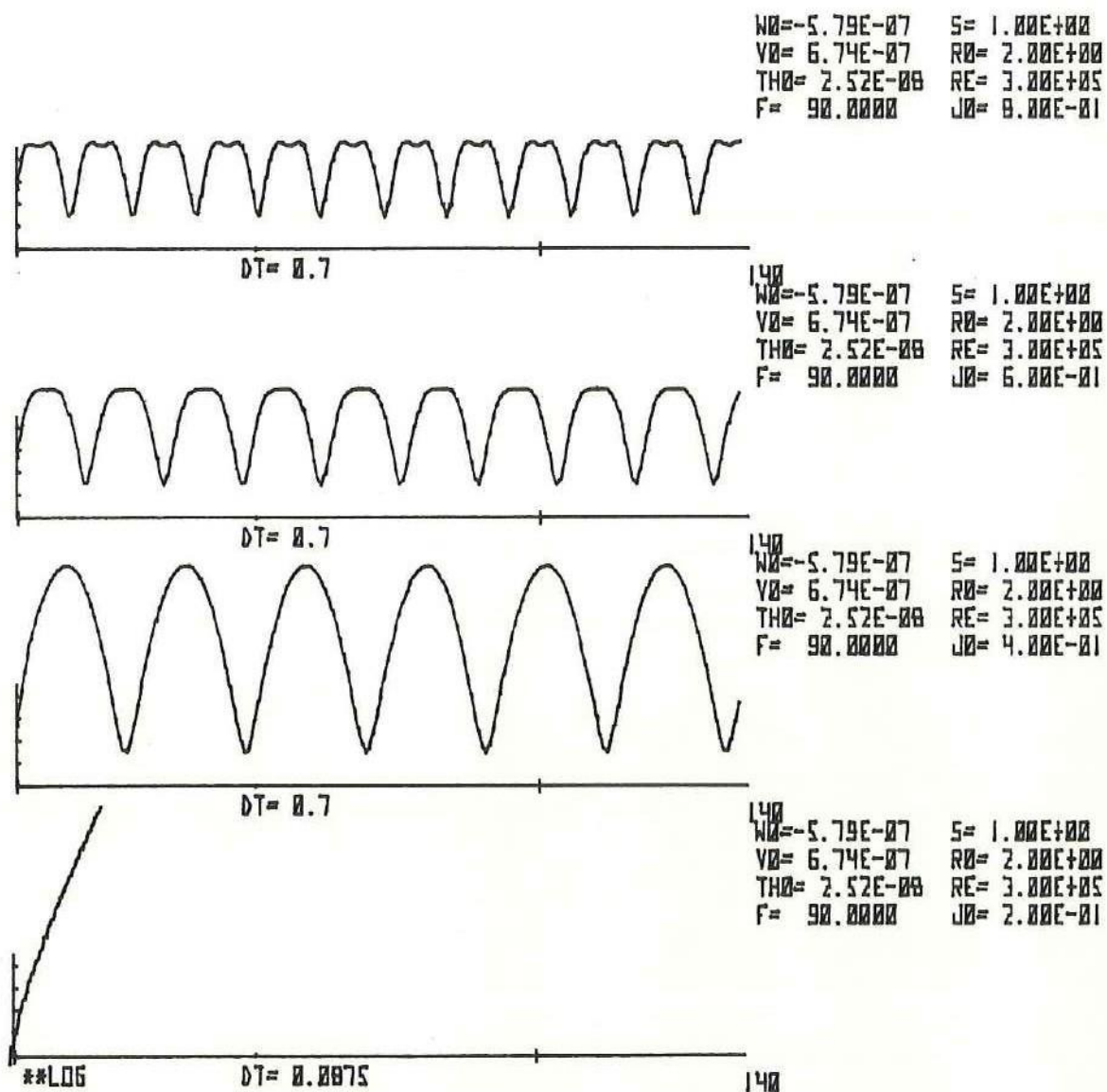


Figura (6)_Gráficas de rapidez contra tiempo variando Richardson y considerando un flujo sin viscosidad (Reynolds muy alto).

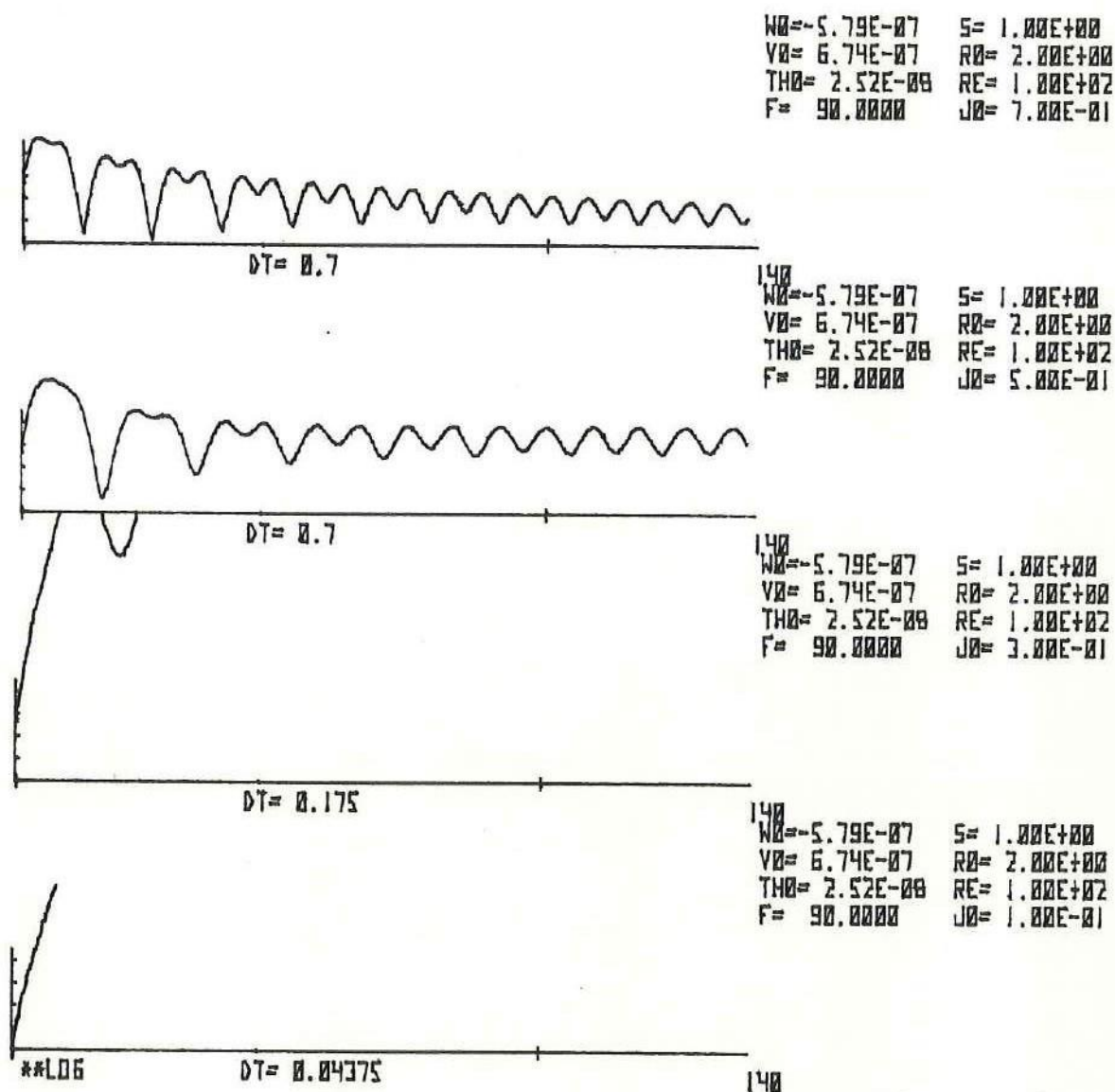


Figura (7)_Gráficas de rapidez contra el tiempo, observando el efecto de la viscosidad.

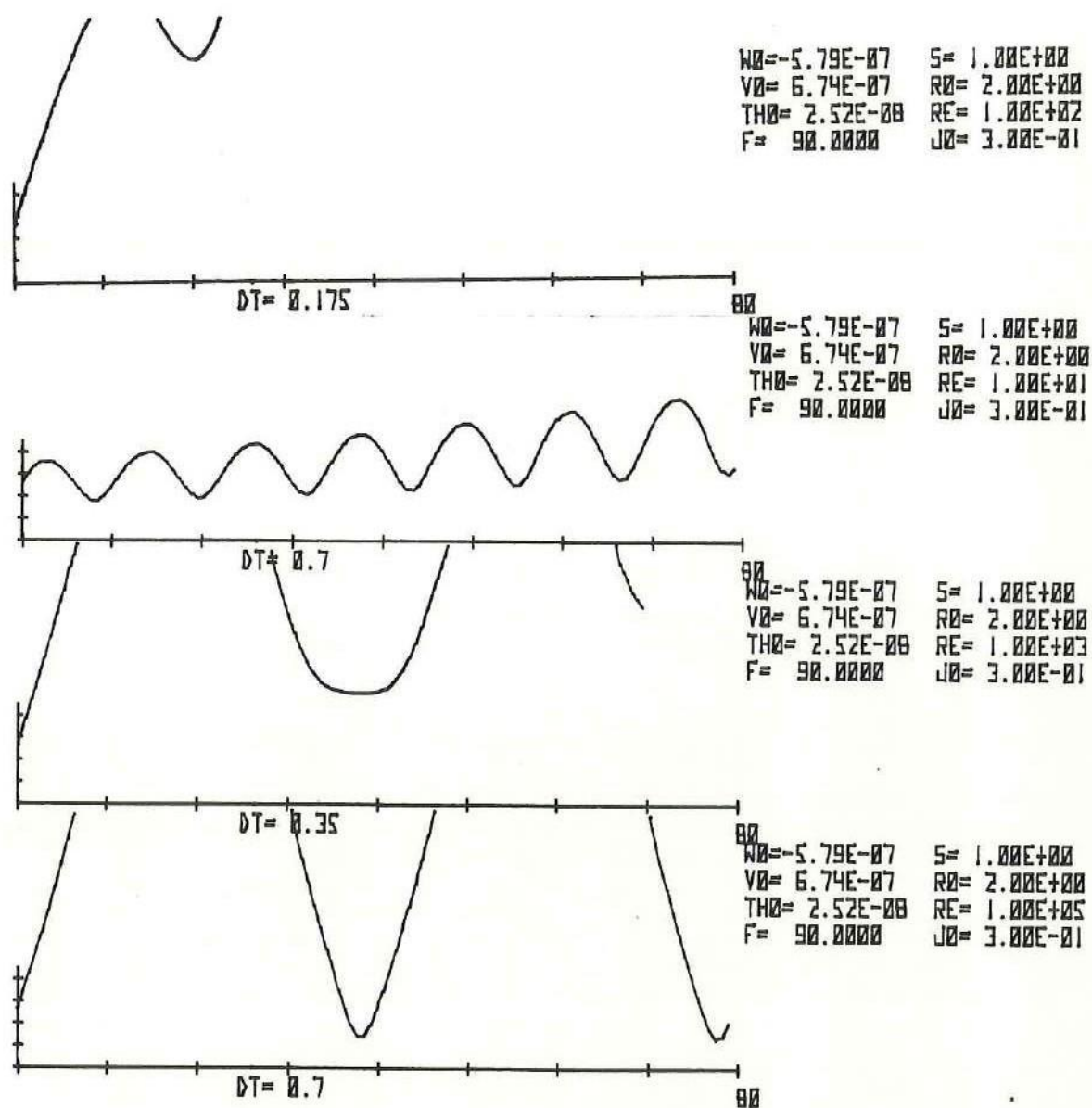


Figura (8)_Rapidez contra el tiempo observando el efecto de la viscosidad alrededor de $Re = 1 \times 10^2$.

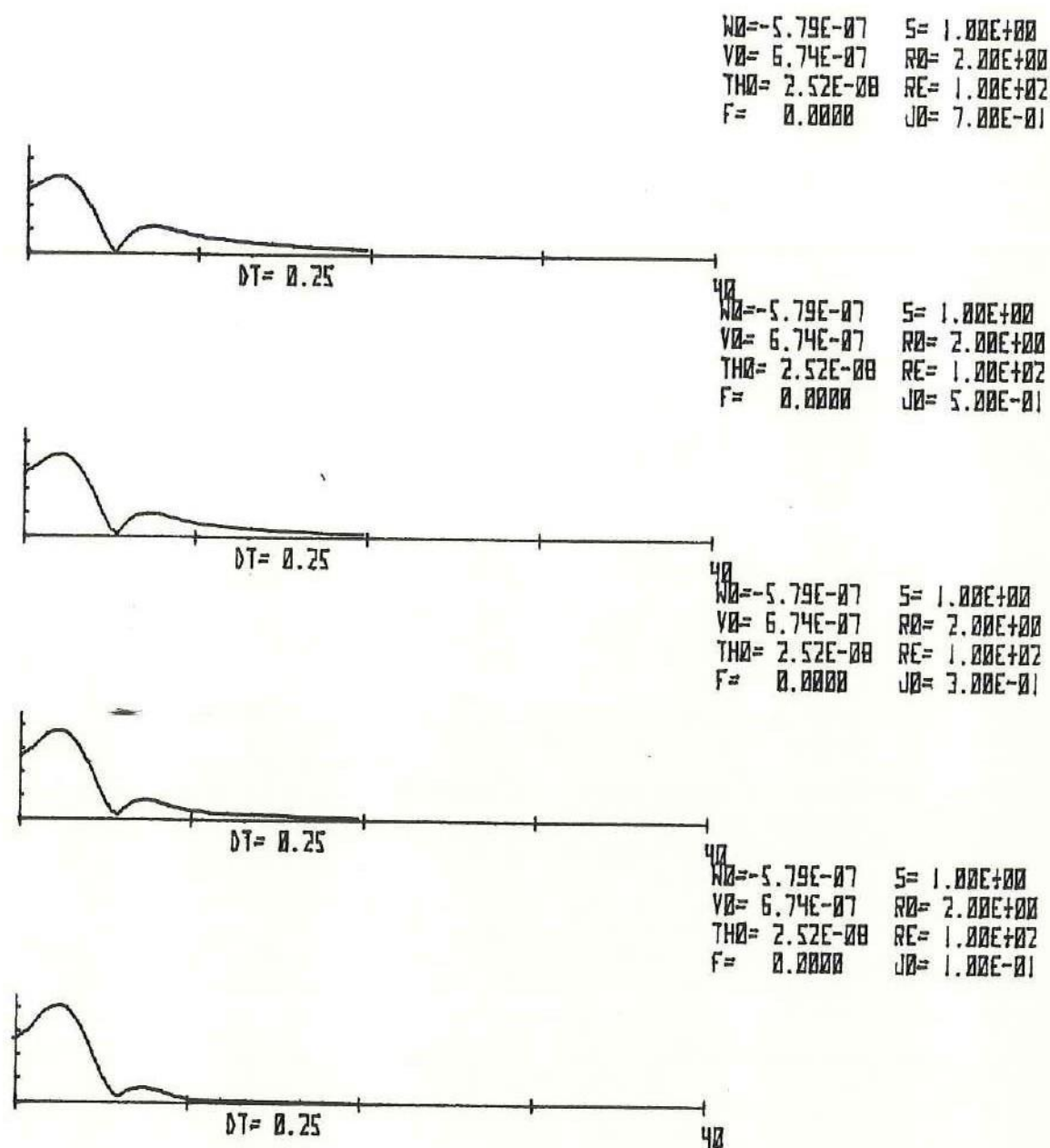


Figura (9)_Rapidez contra el tiempo empleando un ángulo $\theta = 0$,
 nótese que la zona inestable ha desaparecido.

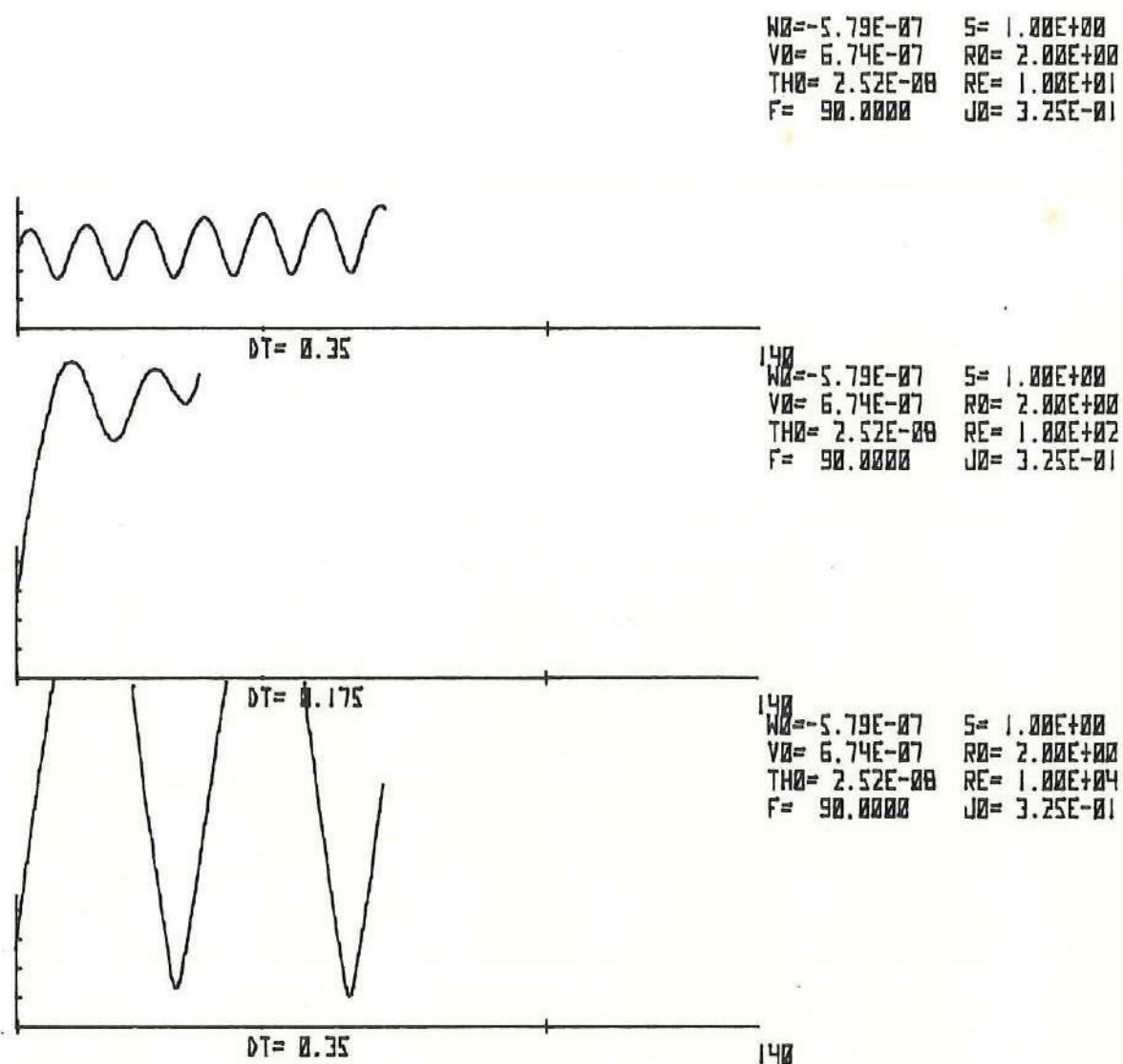


Figura (10)_Otra variación de Reynolds en un ángulo $\theta = \pi/2$,
graficando rapidez contra tiempo.