

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS

"PARAMETRIZACIÓN DE LA FRICCIÓN LINEAL DE FONDO PARA
EL GOLFO DE CALIFORNIA MEDIANTE LA COMPARACIÓN
DE DOS MODELOS DE MAREA"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
OCEANOLOGO

PRESENTA:

Javier Zavala Garay

Ensenada, B.C., Mayo de 1993.

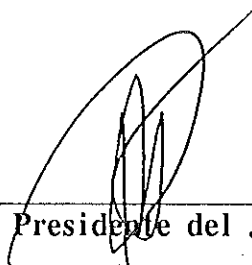
**"PARAMETRIZACIÓN DE LA FRICCIÓN LINEAL DE FONDO PARA
EL GOLFO DE CALIFORNIA MEDIANTE LA COMPARACIÓN
DE DOS MODELOS DE MAREA"**

T E S I S

QUE PRESENTA:

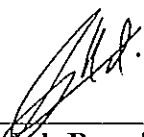
Javier Zavala Garay

Aprobada por:



Presidente del Jurado

Dr. Pedro Ripa Alsina



Sinodal Propietario

M.C. Antonio Martínez A.



Sinodal Propietario

M.C. René Pinet P.

*A mi familia: Mary, Raúl,
Edith y Mauricio,
con todo mi amor.*

*Al especial recuerdo de Juan y Rogelio,
porque aún están en mí.*

A Luisa y Laura.

*"Y cumple con tu deber, no importa si humilde,
no importa si aparentemente malo.
Es mejor así que seguir el sendero ajeno.
Morir en el deber de uno es vivir,
vivir en el de otro es morir."
Gita 3:35 .*

Agradecimientos :

Al Dr. Pedro Ripa mi más sincera gratitud por haberme permitido realizar este sencillo trabajo bajo su asesoramiento y por su gran apoyo.

También quiero agradecer al M.C. A. Amador por su valiosa ayuda para el buen desarrollo de este trabajo.

Al Oc. Gilberto Velázquez por toda su ayuda en materia computacional y su gran disposición, mil gracias. A mis sinodales propietarios René y Toño por todo su apoyo a lo largo de mi carrera, pero más que nada por su amistad y confianza.

A Gloria, Griselda, Chilis, Hector y toda la banda gracias por su amistad y espero alguna vez poder corresponderles.

ÍNDICE GENERAL

	Página
1. INTRODUCCIÓN	1
2. ANTECEDENTES	3
3. DESCRIPCIÓN DEL ÁREA DE ESTUDIO	5
4. MODELO BIDIMENSIONAL	7
4.1 Ecuaciones de evolución	7
4.2 Interacción de términos alineales	9
4.3 Solución numérica	10
5. MODELO UNIDIMENSIONAL	12
5.1 Ecuaciones de evolución	12
5.2 Linealización de la fricción	15
5.3 Solución armónica	17
5.4 Solución numérica	18
6. METODOLOGÍA	20
6.1 Modelo bidimensional	20
6.2 Modelo unidimensional	22
7. RESULTADOS	27
8. DISCUSIONES	35
9. CONCLUSIONES	38
10. BIBLIOGRAFÍA	39

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los procesos que mayor importancia tienen en la dinámica del Golfo de California es la marea. Este cuerpo de agua tiene dimensiones adecuadas para la resonancia en la banda semidiurna; lo que aunado al asomeramiento en la parte norte provocan amplitudes de hasta 2 m sólo para la componente M_2 (componente semidiurna lunar). Como consecuencia, corrientes de magnitud considerable son provocadas por esta componente, siendo así responsable en gran parte de la disipación de energía dentro del Golfo. Filloux (1973) estima que de todas las componentes lunares, la M_2 disipa cerca del 90%. Por estas características esta componente ha provocado gran interés en investigaciones.

Varios autores han descrito la componente M_2 mediante modelos numéricos bidimensionales y alineales (ver por ejemplo Grijalva, 1972; Stock, 1976; Quirós, 1983; Quirós et al, 1992) obteniéndose resultados muy acordes con las observaciones. Dichos modelos tienen la ventaja de que, por ser más realistas, proveen estimaciones fidedignas de procesos alineales como transporte residual y disipación. Sin embargo, debido a su complejidad, tiempo y costo de cálculo, resulta muy difícil y confuso establecer donde y por qué fallan en la reproducción de observaciones, cuando esto ocurre. Por estas razones es también difícil analizar cómo responde el modelo cuando se hace una variación de los parámetros.

Mediante estas modelaciones se ha podido observar que los movimientos en esta cuenca (debido a su forma elongada) son preferencialmente en una dirección, por esta razón es posible representar la marea semidiurna de manera muy aproximada mediante un modelo unidimensional. Si además suponemos que los términos no lineales son poco importantes y reemplazamos el término

de fricción por uno lineal obtenemos un modelo unidimensional y que es lineal. Estas modelaciones han sido también ya realizadas por varias personas (Stock y Filloux, 1974; Godin, 1984; De León y Ripa, 1988; Ripa y Velázquez, 1993) obteniéndose muy buenos ajustes con las observaciones. Dicho modelo tiene la ventaja de poder ser resuelto en forma rápida y directamente en el dominio de las frecuencias, de manera que se reduce enormemente el tiempo de cálculo. Es así posible analizar la respuesta del modelo ante una variación de los parámetros, además de que, por ser lineal permite estudiar cada componente por separado (Godin, 1984). Sin embargo, experiencias realizadas con este modelo sobre disipación, arrojan dudas sobre las parametrizaciones de la fricción hasta ahora empleadas (Ripa y Velázquez, 1993).

El objetivo de este trabajo es evaluar cuál de los dos modelos (unidimensional o bidimensional) proporciona la mejor estimación para amplitudes y fases de valores observados para la componente M_2 , así como estimar las disipaciones de ambos modelos y en base a éstas, realizar diferentes parametrizaciones para la fricción lineal de fondo, utilizada en el modelo unidimensional.

2. ANTECEDENTES

La marea en el Golfo de California ha sido estudiada de diversas maneras. La primer modelación de la M_2 fue hecha por Hendershott y Speranza (1971), quienes proponen a esta componente como una onda de Kelvin inducida por la co-oscilación con el Océano Pacífico que sufre una reflexión en la cabeza y es en gran medida disipada. Utilizando un ancho y profundidad de la cuenca constantes, estos autores estimaron que la disipación total dentro del golfo debía ser de 10 a 20×10^9 W.

Un año después, Grijalva (1972) realizó una segunda modelación de la componente M_2 utilizando una topografía variable y un término de fricción alineal. Este autor, encuentra que su modelo sobreestima los pocos valores de amplitud observados hasta entonces.

Filloux (1973) encuentra a partir de mediciones, que la mayor parte de la energía disipada está asociada a las componentes semidiurnas y principalmente a la M_2 , para la que estima una disipación total de 4.35×10^9 W.

Posteriormente, Stock y Filloux (1974) desarrollan el primer modelo unidimensional para el Golfo de California y separan el forzamiento astronómico y de co-oscilación, demostrando que la marea es producida en más de un 95% por el forzamiento en la boca. Estos autores desarrollan una expresión para la energía promediada en el tiempo, estimando una disipación total de 4.6×10^9 W.

Stock (1976) desarrolla un modelo bidimensional y experimenta con diferentes parametrizaciones lineales y alineales de la fricción. Encuentra un buen ajuste con las observaciones y calcula una disipación de 4.9×10^9 W, pero utilizando un coeficiente de fricción alineal de 0.01, siendo que el

normalmente usado es de 0.003. Quirós (1983) usando un modelo similar al de Stock, pero incluyendo términos advectivos estima corrientes residuales, pero no reporta un valor de disipación total.

Godin (1984) demuestra que el efecto de fricción con el fondo es pequeño y reescribe las ecuaciones en forma lineal con un coeficiente de fricción que depende de la velocidad máxima y amplitud relativa de la componente armónica que se esté considerando. Un modelo similar fue desarrollado por De León (1988) quien también propone uno "cuasi-bidimensional" agregando una corrección transversal debido a la rotación terrestre. Esta autora trabaja con las cuatro componentes principales (M_2 , S_2 , O_1 y K_1) obteniendo un buen ajuste con las observaciones. Ripa (1990) señala la posibilidad de utilizar este modelo como un interpolador dinámico, para evaluar la calidad de las componentes obtenidas por el análisis armónico de los datos de estaciones mareográficas.

Ripa y Velázquez (1993) obtienen un excelente ajuste con las observaciones para un término de fricción lineal, pero señalan que el coeficiente que proporciona el mejor ajuste es probablemente demasiado grande, indicando la necesidad de realizar parametrizaciones no uniformes de la fricción lineal.

Actualmente M. L. Argote y A. Amador (del Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada) trabajan con un modelo bidimensional de mayor resolución espacial, para describir más detalladamente la disipación a lo largo del golfo. Dicho modelo es también utilizado en el presente trabajo.

3. DESCRIPCIÓN DEL ÁREA DE ESTUDIO

El Golfo de California se encuentra localizado en la parte occidental de México, entre los $22^{\circ} 50'$ y $31^{\circ} 58'$ de latitud Norte y de los $107^{\circ} 20'$ hasta los $114^{\circ} 45'$ de longitud Oeste. Se encuentra rodeado por la península de Baja California al Oeste y por los estados de Sonora y Sinaloa al Este. Es un mar marginal formado por una cuenca semicerrada comunicada con el Océano Pacífico por el extremo SE (boca) y cerrado en el extremo NO (cabeza).

Tiene un ancho promedio de 146 km y una longitud de 1070 km. Su profundidad, con un promedio de 729 m, es muy variada ya que es de 1670 m en la boca y decrece irregularmente a profundidades bajas en la parte Norte (figura 1).

Topográficamente el Golfo de California puede ser dividido en varias cuencas, encontrándose estas a lo largo del golfo siendo las más profundas las de la parte Sur. En la parte Norte a unos $2/3$ de su longitud a partir de la entrada, presenta una sección estrecha producida por las islas Tiburón, Angel de la Guarda, San Lorenzo y San Esteban, las que por su ubicación modifican en cierto grado algunos aspectos del comportamiento general del golfo.

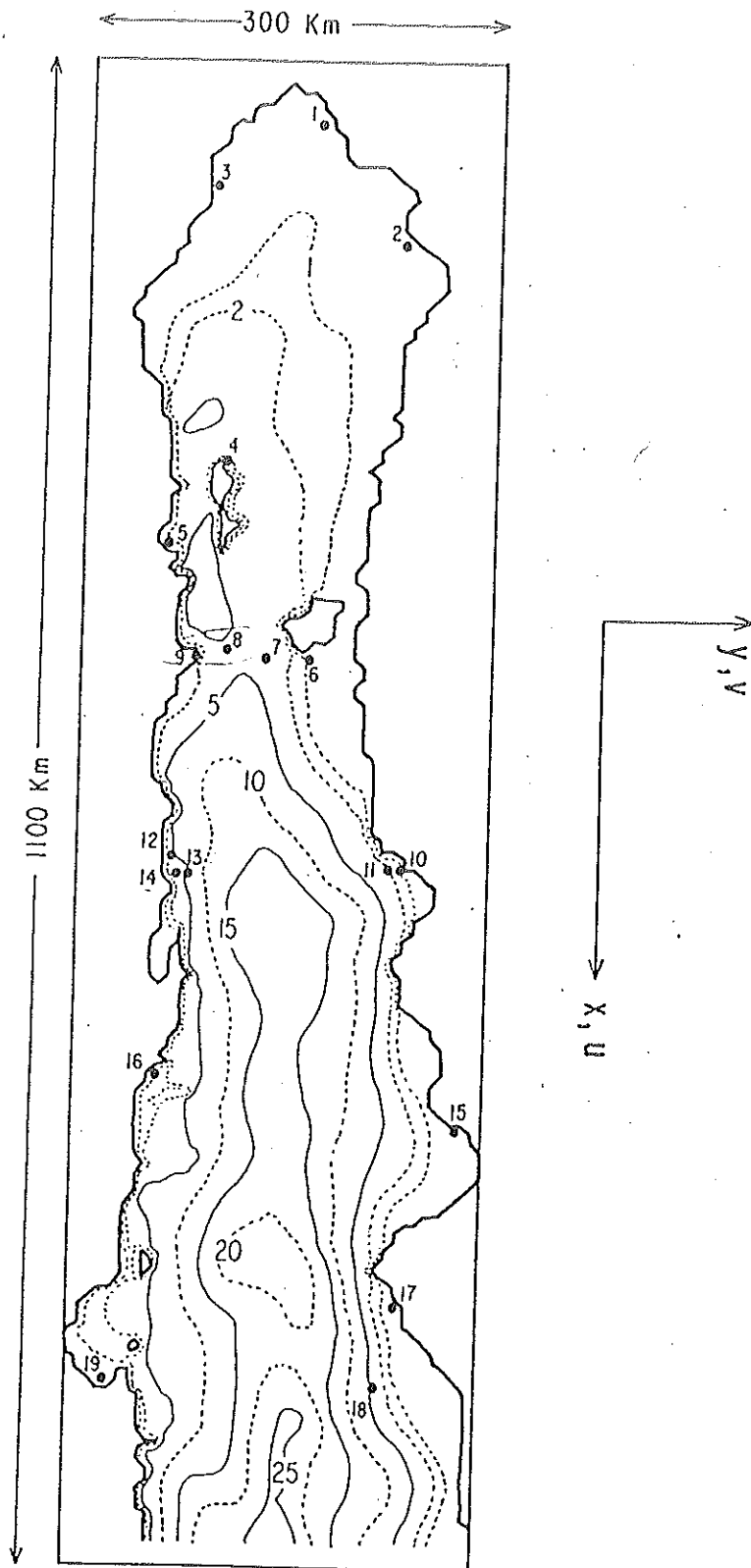


Figura 1. Ejes coordenados y batimetría del Golfo de California. Los contornos, en cientos de metros, están indicados por números grandes. Los números pequeños indican la localización de las 19 estaciones analizadas (tomado de Ripa y Velázquez, 1993).

4. MODELO BIDIMENSIONAL

En esta sección se analizan algunos aspectos teóricos sobre el modelo bidimensional: Se describen las ecuaciones resueltas, se deduce la ecuación de balance de energía, se analiza el efecto de los términos alineales y se mencionan algunos aspectos sobre la solución numérica.

4.1 ECUACIONES DE EVOLUCIÓN

Para definir las ecuaciones resueltas se utiliza un sistema de coordenadas cartesiano (x,y) a lo largo y ancho del golfo, con el eje x aumentando hacia la boca y el eje y hacia el continente (figura 1). Sea $v(x,y,t)$ la velocidad de la corriente, con componentes u y v en esas direcciones, $h(x,y)$ la profundidad y $\eta(x,y,t)$ la elevación de la superficie. Las ecuaciones aquí resueltas son las de marea de Laplace verticalmente integradas (sin tomar en cuenta la fuerza directa de los astros sobre el golfo):

$$\partial_t \eta + \partial_x((\eta+h)u) + \partial_y((\eta+h)v) = 0 \quad (1a)$$

$$(\partial_t + u\partial_x + v\partial_y)u - fv + g\partial_x \eta = \tau_x \quad (1b)$$

$$(\partial_t + u\partial_x + v\partial_y)v + fu + g\partial_y \eta = \tau_y \quad (1c)$$

donde $\bar{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ representa el esfuerzo del fondo usualmente considerado como una función cuadrática de la velocidad en la forma

$$\bar{\tau} = -r(\eta+h)^{-1}(u|v|, v|v|),$$

$f(x,y)$ es el parámetro de Coriolis, g es la aceleración debida a la gravedad y r es un coeficiente de fricción con el fondo (del orden de 3×10^{-3}).

Las condiciones de frontera consideradas son, de flujo nulo perpendicular a las costas $y = y_1(x)$ y $y = y_2(x)$, es decir,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en} \quad (x, y_1) \quad \text{y} \quad (x, y_2) \quad (2)$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la costa, y la condición en la boca (que representa el forzamiento por el Océano Pacífico)

$$\eta(L, y, t) = \sum_{i=1}^n \eta_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad (3)$$

donde (η_i, ϕ_i) es la amplitud y fase de la componente armónica de frecuencia ω_i y n es el número de armónicos considerados.

Para obtener una expresión para la energía se multiplica (1a) por $\rho(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + g\eta)$, (1b) por $\rho(\eta+h)u$, (1c) por $\rho(\eta+h)v$ y se suma para obtener

$$\partial_t E_2 + \nabla \cdot \mathbf{F}_2 = -D_2 \quad (4)$$

donde E_2 es la densidad de energía mecánica (cinética más potencial), $\mathbf{F}_2$ es el flujo de energía y D_2 la disipación, definidas como

$$E_2 = \frac{1}{2}\rho(\eta+h)(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}\rho g \eta^2, \quad (5a)$$

$$\mathbf{F}_2 = \rho g \eta(\eta+h)\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho |\mathbf{v}|^2(\eta+h)\mathbf{v}, \quad (5b)$$

$$D_2 = r\rho |\mathbf{v}|^3. \quad (5c)$$

4.2 INTERACCIÓN DE TÉRMINOS ALINEALES

La marea en el Océano Pacífico puede ser representada como una superposición de armónicos, debido a que el efecto de los términos alineales es pequeño. Sin embargo, dentro del golfo los términos advectivos y la desaceleración por fricción pueden cobrar importancia, causando una interacción entre las componentes de marea. Estrictamente hablando, una representación de la marea dentro del golfo por una superposición de armónicos es precluida por esta interacción.

Como se verá en la sección 5.2 el término de fricción alineal puede contribuir con otras frecuencias. Un efecto similar puede suceder si los términos advectivos no son despreciados y/o si la elevación η es comparable con la profundidad. Bowden (1983) ejemplifica este hecho con un caso muy sencillo en el que hay movimiento sólo en dirección x con profundidad constante y sin tomar en cuenta la fricción y el efecto de Coriolis. Bajo estas suposiciones las ecuaciones (1a) y (1b) se reducen a

$$\partial_x((\eta+h)u) = -\partial_t\eta \quad (5.1a)$$

$$(\partial_t + u\partial_x)u = -g\partial_x\eta \quad (5.1b)$$

cuya solución puede ser escrita como

$$\eta = \eta_1 + \eta_2, \quad u = u_1 + u_2$$

donde η_1 , u_1 son las soluciones en el caso lineal y η_2 , u_2 representa la solución de segundo orden provocada por los términos adicionales. La solución para el caso lineal esta dada por

$$\eta_1 = A \cos(kx - \omega t),$$

$$u_1 = \frac{c}{h} A \cos(kx - \omega t),$$

donde A es la amplitud de la onda, k es el número de onda y $c = (gh)^{1/2}$ es su celeridad. Sustituyendo esta solución en (5.1a) y (5.1b), reteniendo los términos de orden A^2 se encuentra

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = A \cos(kx - \omega t) - \frac{3}{4} \frac{kx A^2}{h} \sin 2(kx - \omega t)$$

se ve que aparece un término con el doble frecuencia y número de onda de la original. La solución para u contiene términos similares. Si términos de orden mayor a A^2 son retenidos, aparecen términos de mayor frecuencia.

4.3 SOLUCIÓN NUMÉRICA

Las ecuaciones (1), (2) y (3) constituyen el modelo bidimensional (Hunter, 1980), que al integrarlo en el tiempo tiene por solución datos de elevación y velocidad en cada instante, separados por el intervalo de tiempo Δt . En este trabajo únicamente se estudia la componente M_2 por ser la más energética, por lo que no es afectada significativamente por otras

componentes. Esto nos permite despreciar los términos no lineales y hace más válida la comparación con el modelo unidimensional.

Las condiciones iniciales consideradas son

$$v(x,y,0) = 0 \quad \text{y} \quad \eta(x,y,0) = 0.$$

Los parámetros fijos utilizados en el modelo son

$$f = 6.6 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

que es el valor en el punto medio del golfo, y

$$r = 0.0037$$

que es el coeficiente de fricción propuesto por Godin (1984) para el Golfo de California.

Se utiliza una malla de 162 celdas a lo largo del golfo y de 40 celdas a lo ancho de éste, cuya resolución espacial es de 6.6 km x 6.6 km.

El intervalo de tiempo utilizado en este trabajo fue de 12.42 segundos, obedece al criterio de estabilidad de Courant, Friedrich y Levy (1928)

$$\Delta t < \frac{1}{[gh_{\text{máx}}(\Delta x^{-2} + \Delta y^{-2})]^{1/2}}$$

donde $h_{\text{máx}}$ es la profundidad máxima de la malla y Δx y Δy son las resoluciones espaciales.

El modelo se corrió hasta encontrar un régimen estacionario cíclico.

5. MODELO UNIDIMENSIONAL

En esta sección se analizan las simplificaciones hechas para obtener las ecuaciones del modelo unidimensional, se estudian las posibles linealizaciones de la fricción, se plantea la solución armónica, y se mencionan algunos aspectos sobre su solución numérica. No se profundiza demasiado en los dos últimos puntos con el objeto de no hacer repetitivo el presente trabajo (para información más detallada al respecto, ver Ripa y Velázquez, 1993).

5.1 ECUACIONES DE EVOLUCIÓN

Las ecuaciones (1) son las de movimiento de marea. Estas ecuaciones son no lineales, pero pueden ser linealizadas bajo ciertas suposiciones.

Si los términos advectivos son pequeños, entonces pueden ser despreciados. Si además las amplitudes de marea η son pequeñas comparadas con la profundidad h , entonces $(h+\eta)$ puede ser reemplazado por h en (1). Bajo estas simplificaciones y reemplazando $-r h^{-1} |v| v$ por $-\lambda v$, obtenemos las ecuaciones lineales.

Por el momento vamos a suponer el término de fricción lineal como $-\lambda(u,v)$, donde λ es una constante (en la siguiente sección analizaremos que tipo de constante y justificaremos esta linealización). Bajo estas simplificaciones las ecuaciones resultantes son

$$\partial_t \eta + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0 \quad (6a)$$

$$\partial_t u - fv + g \partial_x \eta = -\lambda u \quad (6b)$$

$$\partial_t v + fu + g \partial_y \eta = -\lambda v \quad (6c)$$

Estas ecuaciones son lineales, por lo que pueden ser resueltas para cada componente armónica en forma independiente. Las soluciones de varias constituyentes pueden ser entonces sumadas, aplicando el principio de superposición, para tratar de reproducir la marea.

En el caso de una cuenca elongada y angosta como el Golfo de California, estas ecuaciones pueden ser simplificadas aún más obteniendo así (presumiblemente) una buena reproducción del proceso (que es el objetivo de toda buena simplificación). Lo siguiente corresponde a la derivación del modelo unidimensional de Ripa y Velázquez (1993).

Primero despreciamos $-fv$ frente a los otros términos en (2.11a) y reemplazamos a h por su media transversal en cada x ,

$$\bar{h}(x) = \frac{1}{W(x)} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} h(x,y) dy, \quad (7)$$

donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ definen las costas y su diferencia es el ancho $W(x)$. Integrando las ecuaciones (6a) y (6b) a lo ancho del golfo para cada valor fijo de x , despreciando la diferencia entre $\bar{h}(x)$ y $h(x,y)$, aplicando la ecuación de ambas costas laterales y la condición de flujo nulo en ellas de la forma,

$$y = y_j(x) \rightarrow v(x, y_j(x), t) = u(x, y_j(x), t) y'_j(x), \quad (8)$$

con $j = 1, 2$

donde la prima indica diferenciación con respecto de x , obtenemos las ecuaciones del modelo unidimensional.

Estas ecuaciones están en función de los nuevos campos $\bar{\eta}(x,t)$ y $\bar{u}(x,t)$ definidos de manera análoga a $\bar{h}(x)$,

$$\partial_t \bar{\eta} + W^{-1} \partial_x (W \bar{h} \bar{u}) = 0 \quad (9a)$$

$$\partial_t \bar{u} + \lambda \bar{u} + g \partial_x \bar{\eta} = 0 \quad (9b)$$

con las condiciones de frontera de flujo nulo en la cabeza del golfo

$$W \bar{h} \bar{u} = 0, \quad \text{en } x = 0 \quad (10)$$

(que implica $\bar{u}(0,t) = 0$ sólo para $W(0)\bar{h}(0)$ diferente de cero), y el forzamiento del Océano Pacífico en la boca

$$\bar{\eta}(L,t) = \eta_b(t). \quad (11)$$

Multiplicando (9a) por $g\bar{\eta}$ y (9b) por $W\bar{h}\bar{u}$ se obtiene la ecuación de conservación de energía,

$$\partial_t E_1 + \partial_x F_1 = -D_1, \quad (12)$$

donde E_1 representa la densidad de energía mecánica, F_1 el flujo de energía y D_1 la disipación para el modelo unidimensional, definidos como

$$E_1 = \frac{1}{2} \rho W (g \bar{\eta}^2 + \bar{h} \bar{u}^2), \quad (13a)$$

$$F_1 = \rho W g \bar{h} (\bar{\eta} \bar{u}), \quad (13b)$$

$$D_1 = \lambda \rho W \bar{h} \bar{u}^2. \quad (13c)$$

Resulta interesante comparar estas ecuaciones en que aparecen sólo términos de orden cuadrático con las del modelo bidimensional (5) en las que aparecen términos de hasta orden cuártico para el flujo de energía como consecuencia de los términos alineales. En particular, la disipación depende ahora del cuadrado de la velocidad (mientras que en el alineal es función del cubo de la velocidad), debido a la linealización de la fricción propuesta.

5.2 LINEALIZACIÓN DE LA FRICCIÓN

Hasta este momento hemos definido a λ como una constante independiente de la posición. Sin embargo, esta aproximación puede no ser tan realista debido a que el término de fricción no lineal depende también de la profundidad.

En el caso de señales armónicas como la marea, es posible linealizar la expresión cuadrática de $\bar{\tau}$ de una manera no tan arbitraria. Para ilustrar este hecho supongamos el caso unidimensional en el que

$$\bar{\tau} = (\tau_x, \tau_y) \propto (\bar{u}|\bar{u}|, 0) \quad (14)$$

Si $\bar{u}$ varía de forma armónica, entonces puede ser escrita como

$$\bar{u} = U(x) \cos(\omega t + \phi(x)), \quad (15)$$

donde $U(x)$ es la amplitud de la velocidad, ω su frecuencia y $\phi(x)$ su fase.

Sustituyendo (15) en (14) y expandiendo mediante una serie de Fourier obtenemos

$$\bar{u} |\bar{u}| = \frac{8}{3\pi} U(x)^2 \cos(\omega t) + a_1 \cos(2\omega t) + \dots \quad (16)$$

Es decir, para una constante armónica de frecuencia ω el esfuerzo con el fondo de esa misma frecuencia es afectado como

$$\bar{\tau} \propto \frac{8}{3\pi} U(x) \bar{u} \quad (17)$$

Más precisamente, el término cuadrático de fricción puede ser linealizado como

$$\bar{\tau} = \frac{8}{3\pi} r U \bar{h}^{-1} \bar{u} \equiv \lambda \bar{u}. \quad (18)$$

En esta representación λ es una función de x , es decir,

$$\lambda(x) = \frac{k U(x)}{\bar{h}(x)}, \quad (19)$$

con $k = r \frac{8}{3\pi}$; para $r = 0.0036$ es $k = 3.14 \times 10^{-3}$.

Sin embargo, para una zona restringida es usual (aunque puede ser incorrecto) considerar el producto $k U(x)$ como independiente de la posición. Más aún, si las variaciones de profundidad no son muy grandes quizá una buena aproximación sea considerar a λ independiente de la posición. El Golfo de California tiene una topografía muy variada además de estar en resonancia

con la componente M_2 (lo que provoca grandes variaciones espaciales de la amplitud y consecuentemente de la velocidad) por lo que considerar a λ independiente de la posición puede no ser tan correcto.

5.3 SOLUCIÓN ARMÓNICA

Las ecuaciones (9), (10) y (11) constituyen el modelo unidimensional, al que imponemos una solución armónica para la elevación y la velocidad en notación compleja como

$$\tilde{\eta}(x) = \text{Re}[Z(x)e^{-i\omega t}], \quad (20a)$$

$$\tilde{u}(x) = \text{Re}[U(x)e^{-i\omega t}], \quad (20b)$$

donde $Z(x)$ y $U(x)$ son las amplitudes complejas de $\tilde{\eta}$ y $\tilde{u}$ respectivamente y ω la frecuencia en cuestión (la M_2 en este caso). Sustituyendo (20) en (9) obtenemos las ecuaciones en función de las amplitudes complejas

$$-i\omega Z + W^{-1}(W\bar{h}U)' = 0 \quad (21a)$$

$$-i(\omega + i\lambda)U + gZ' = 0 \quad (21b)$$

Éstas son las ecuaciones resueltas en este trabajo, con las condiciones de frontera

$$W\bar{h}U = 0 \quad \text{en } x = 0,$$

$$Z = \eta_b \quad \text{en } x = L.$$

Además es aplicada, una corrección transversal debido al efecto de Coriolis suponiendo un balance geostrófico en (6c),

$$fu + g\partial_y\eta \approx 0 \rightarrow \eta(x,y,t) \approx \bar{\eta}(x,t) - gf^{-1}\bar{u}(x,t)(y-\bar{y}).$$

La disipación puede también obtenerse de la amplitud compleja de la velocidad mediante

$$\begin{aligned} D_1 &= \lambda\rho W\bar{h}\bar{u}^2 = \lambda\rho W\bar{h}\bar{u}\left[\frac{1}{2}\bar{u}e^{-i\omega_1} + \frac{1}{2}\bar{u}^*e^{i\omega_1}\right]^2 \\ &= \lambda\rho W\bar{h}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\bar{u}^2e^{-2i\omega_1}\right] + \frac{1}{2}\lambda\rho W\bar{h}|\bar{u}|^2, \end{aligned} \quad (22)$$

donde el primer término es oscilante con el doble de frecuencia y el segundo es el valor medio.

5.4 SOLUCIÓN NUMÉRICA

Las ecuaciones (21) pueden ser resueltas por diferencias finitas si se definen los campos U y Z en puntos alternados. Se comienza con $WhU(0) = 0$ en la cabeza y con un valor arbitrario de $Z(\frac{1}{2}\Delta x)$. Como las ecuaciones son lineales, podemos al final escalar nuestra solución de tal manera que la elevación en la boca coincida con la medida o, alternativamente, que se ajuste mejor a todo el conjunto de observaciones, dando así igual peso a todas. El criterio de ajuste aquí utilizado fue el de tomar en cuenta todas las observaciones para no dar mayor peso a la observación en la boca.

La "malla" utilizada en este trabajo se obtuvo del modelo bidimensional computando el ancho y promediando la profundidad para cada valor fijo de x . Por lo tanto, son 162 celdas con una resolución espacial de 6.6 km.

6. METODOLOGÍA

6.1 MODELO BIDIMENSIONAL

El modelo bidimensional fue ya implementado en lenguaje Fortran 77 por el M.C. Alberto Amador (del Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada) quien gentilmente lo proporcionó para su uso. Algunas modificaciones son realizadas a los datos de salida con el objeto de hacer posibles las comparaciones con el modelo unidimensional. Recordemos que el modelo unidimensional fue deducido promediando las variables a lo ancho del golfo y que además su solución son las amplitudes complejas de la marea (es decir, en el espacio de las frecuencias).

Se calcula la parte real (A_r) e imaginaria (A_i) de la amplitud compleja $A(x,y)$ definidas como

$$A(x,y) = \frac{2}{T} \int_0^{t+T} \eta_2(x,y,t) e^{i\omega t} dt \equiv A_r + iA_i, \quad (23)$$

donde T es el período. Este vector complejo tiene un módulo ($|A|$) y fase (ϕ_A) definidas por

$$|A| = [(A_r)^2 + (A_i)^2]^{1/2}, \quad (24a)$$

$$\phi_A = \tan^{-1} \left(\frac{A_i}{A_r} \right). \quad (24b)$$

Teniendo datos observados (ϕ) de un total de 19 estaciones localizadas a lo largo del golfo para la componente M_2 , se calcula el error para la aproximación del modelo para amplitudes mediante la raíz cuadrática media "rcm" (temporal y aritmética) de las diferencias entre observaciones y modelo

$$\epsilon_A = \left[\frac{1}{19} \sum \frac{1}{2} (|\phi| - |A|)^2 \right]^{1/2}, \quad (25)$$

donde las sumatorias son sobre las 19 estaciones y el factor $\frac{1}{2}$ es debido al promedio temporal.

Para las fases, el error de ajuste es cuantificado mediante la rcm de las diferencias de fases, pesadas por los valores de $|\phi|^2$, o sea

$$\epsilon_F = \left[\frac{\sum |\phi|^2 (\phi_o - \phi_A)^2}{\sum |\phi|^2} \right]^{1/2}, \quad (26)$$

donde las sumatorias son sobre las 19 estaciones.

Por otra parte se calcula la disipación por unidad de longitud promediada en un ciclo de marea, mediante

$$D_2(x) = r\rho < \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} [u^2(x,y,t) + v^2(x,y,t)]^{3/2} dy >, \quad (27)$$

donde ρ es la densidad del agua (considerada constante) y " $\langle \cdot \rangle$ " indica el promedio temporal en un período. Nótese que esta expresión no es más que el promedio temporal de la expresión (5c) integrada transversalmente. Además se calcula la disipación total, desde la cabeza ($x = 0$) hasta la boca ($x = L$):

$$D_{2T} = \int_{x=0}^{x=L} D_2(x) dx. \quad (28)$$

6.2 MODELO UNIDIMENSIONAL

Se implementó el modelo unidimensional en lenguaje "C" y se realizaron corridas para la componente M_2 guardándose las partes reales e imaginarias de la amplitud.

Dado que la solución encontrada es de una ecuación lineal, es posible multiplicar ésta por un número complejo cualquiera (μ) que nos proporciona el mejor ajuste tomando en cuenta todas las observaciones en el sentido de cuadrados mínimos, como

$$\epsilon_c^2 = \frac{\sum |o - \mu z|^2}{\sum |o|^2} : \text{mínimo}, \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{\sum z^* o}{\sum |z|^2}, \quad (29)$$

donde las sumatorias son sobre las 19 estaciones y z es el vector complejo que define la amplitud y fase modeladas de cada estación de manera análoga a A .

Una vez ajustados los datos se calcula el error de manera análoga al modelo bidimensional mediante (25) y (26) para cada una de las versiones de la fricción señaladas más adelante. Además, se calcula la disipación promedio en un ciclo de marea a lo largo del golfo mediante

$$D_1(x) = \frac{1}{2} \rho \lambda(x) W(x) \bar{h}(x) |u(x)|^2, \quad (30)$$

que corresponde al valor medio en la expresión (22). La disipación total de este modelo (D_{1T}) es definida de manera análoga a (28).

Se realizan los siguientes casos para diferentes parametrizaciones de la fricción lineal:

- a) Coeficiente de fricción constante y óptimo en cuanto a ajuste de las observaciones, propuesto por Ripa y Velázquez (1993)

$$\lambda_1 = 2 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

y coeficiente de fricción igual a una constante λ_0 tal que la disipación total sea igual a la obtenida para el modelo bidimensional.

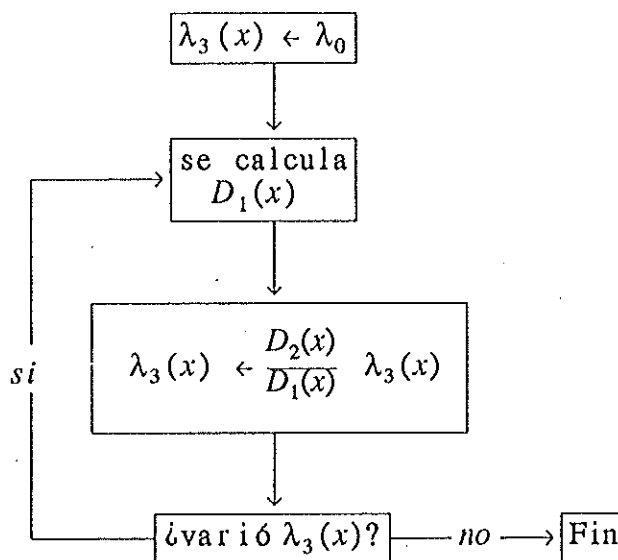
$$\lambda_2 = \lambda_0.$$

Como D_{IT} es en muy buena aproximación proporcional a λ , este valor se obtiene haciendo iterar el modelo para diferentes valores de λ_0 propuesto como

$$\lambda_0 = \lambda_1 \frac{D_{2T}}{D_{1T}},$$

y computando sus disipaciones totales.

- b) Coeficiente de fricción como una función de la posición tal que $D_1(x) = D_2(x)$. La forma de obtener este valor se ilustra en el siguiente diagrama

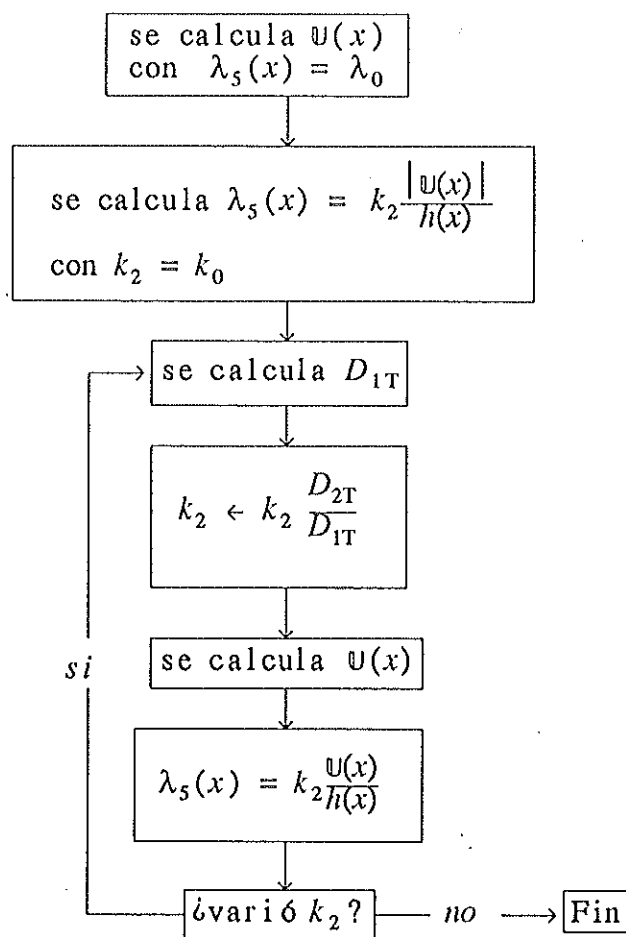


- c) Coeficiente de fricción inversamente proporcional a la profundidad

$$\lambda_4(x) = \frac{k}{h(x)},$$

donde k es una constante elegida de tal forma que la disipación total sea igual a la del bidimensional o encontrando el k óptimo que minimiza los errores.

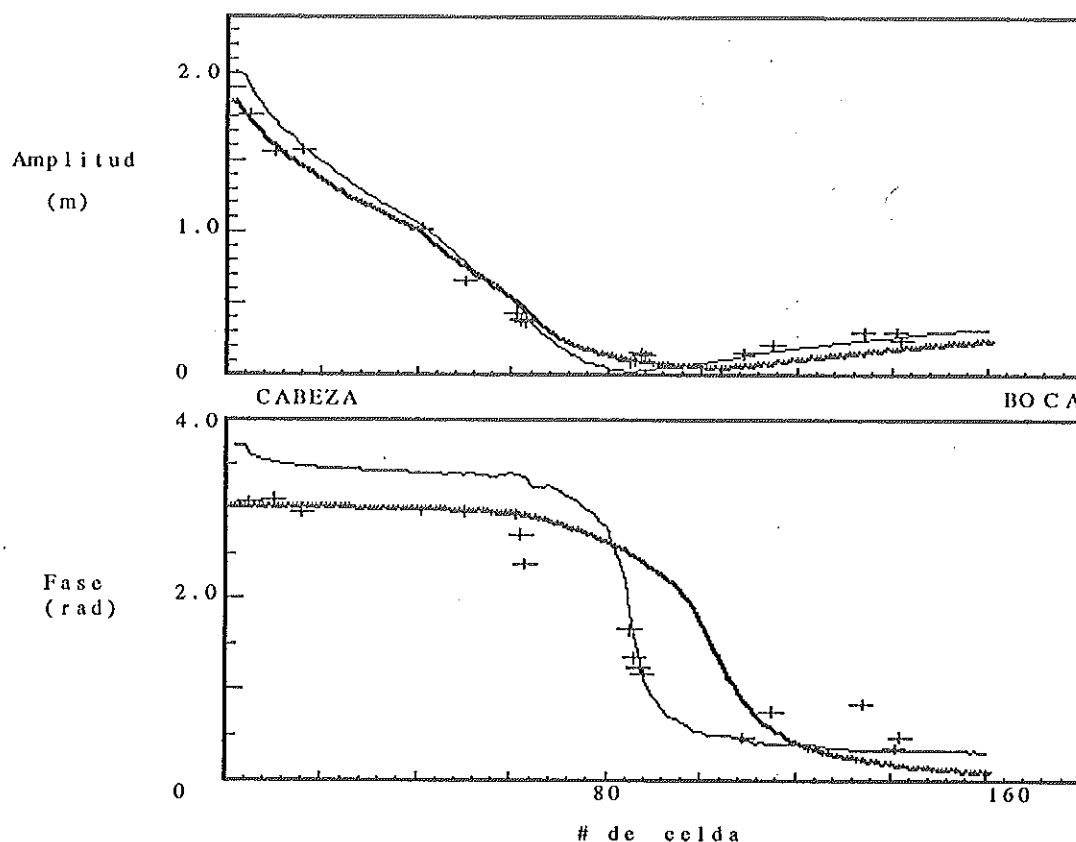
- d) Coeficiente de fricción similar al de (c), pero además proporcional a la amplitud de la velocidad en cada punto. La forma de obtener este valor se muestra en el siguiente diagrama



Para todas estas parametrizaciones se realizan gráficas de x vs $D(x)$ para ver cuál de todas ellas presenta la mejor descripción espacial de la disipación obtenida para el modelo bidimensional. Además, los errores ε_A y ε_F son calculados para cada caso.

7. RESULTADOS

En la gráfica 1 se muestran los valores obtenidos de amplitud y fase a lo largo del golfo por ambos modelos, así como los valores observados.



Gráfica 1. Amplitud y fase para el modelo unidimensional (línea gruesa) y modelo bidimensional (línea delgada) así como valores observados (+) para la componente M_2 .

Ambos modelos reproducen bien las observaciones, siendo la mayor discrepancia entre ellos y observaciones la de las fases. Aunque el modelo bidimensional sobreestima en general las fases en la parte Norte, presenta un cambio más abrupto de esta variable en la región de la cuenca de Guaymas, lo cual es un hecho empírico que el modelo unidimensional no logra

reproducir (Ripa y Velázquez, 1993). Las gráficas correspondientes a las otras parametrizaciones de la fricción no se presentan por ser prácticamente indistinguibles con la gráfica 1.

La idea principal de este trabajo es tratar de mejorar el modelo unidimensional tomando en cuenta no sólo el ajuste de amplitudes y fases, sino además la disipación (total y a lo largo del golfo) de tal manera que proporcione una descripción global más realista del fenómeno.

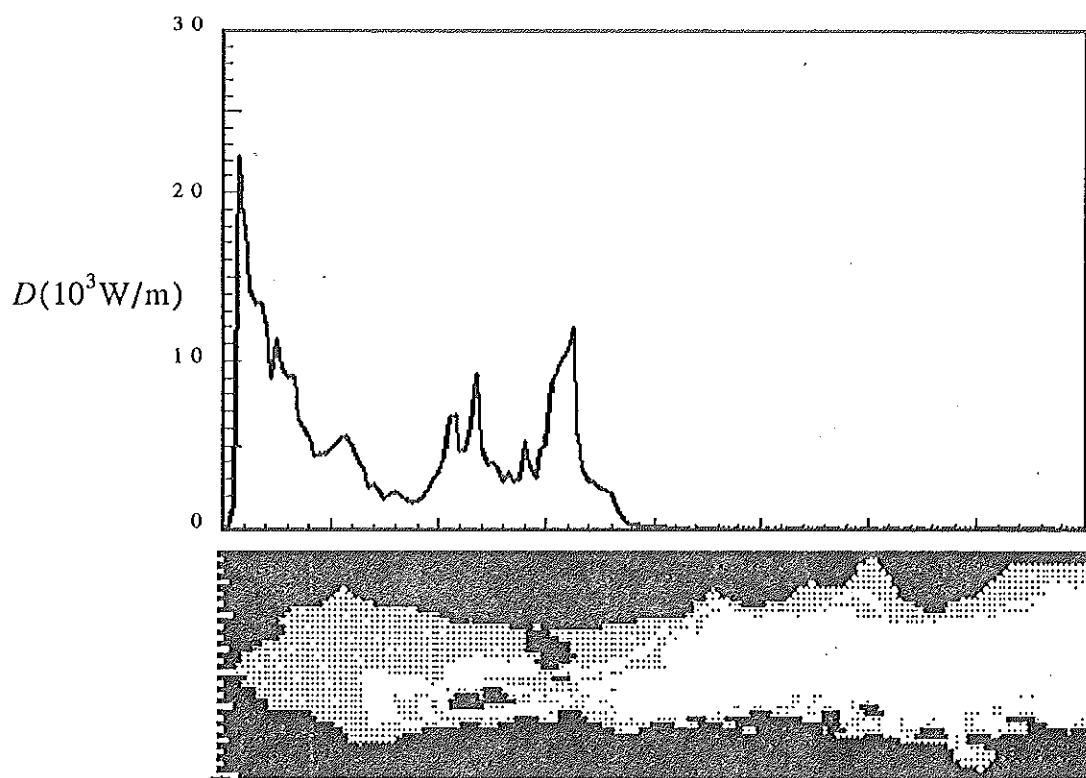
En la tabla I se encuentran resumidos los resultados de este trabajo. En ella se tabulan los errores de amplitud (ϵ_A), el desfase (ϵ_F) y la disipación total para el modelo bidimensional, así como para el unidimensional con las diferentes parametrizaciones de la fricción lineal. Para cada uno de los casos (excepto b) se encuentran tabulados dos valores, para dos versiones de la constante involucrada. Una cuando la constante es tal que la disipación total sea igual a la del bidimensional (subíndice 2), y la otra, para el valor óptimo que nos provee el mejor ajuste para esa parametrización (subíndice 1).

TABLA I
Resumen de resultados

CASO	FRICCIÓN	ε_A (cm)	ε_F (min.)	D_T ($10^9 W$)
Bidimensional	$-r \bar{u} h^{-1}$	3.3	11.8	2.72
Unidimensional	$\lambda(x) =$			
a_1	$2 \times 10^{-5} s^{-1}$	5.1	6.7	8.27
a_2	$5.57 \times 10^{-6} s^{-1}$	5.8	10.0	2.72
b	$\lambda_0 \frac{D_2(x)}{D_1(x)}$	6.5	10.1	2.72
c_1	$\frac{1.8 \times 10^{-3} ms^{-1}}{\bar{h}(x)}$	5.8	8.9	3.38
c_2	$\frac{1.4 \times 10^{-3} ms^{-1}}{\bar{h}(x)}$	5.8	9.3	2.72
d_1	$\frac{5.8 \times 10^{-3} u }{\bar{h}(x)}$	5.9	9.6	2.73
d_2	$\frac{5.7 \times 10^{-3} u }{\bar{h}(x)}$	5.9	9.6	2.72

La disipación total para el modelo bidimensional a lo largo del golfo se muestra en la gráfica 2, en donde se ha incluido un bosquejo de la batimetría del golfo. Se puede observar que la mayor disipación ocurre entre las grandes islas, en donde la sección transversal se reduce, y en la cabeza, donde la cuenca es muy somera. Su valor total, que tomaremos como referencia fue calculada en $2.72 \times 10^9 W$. Si se deseara usar otro valor de

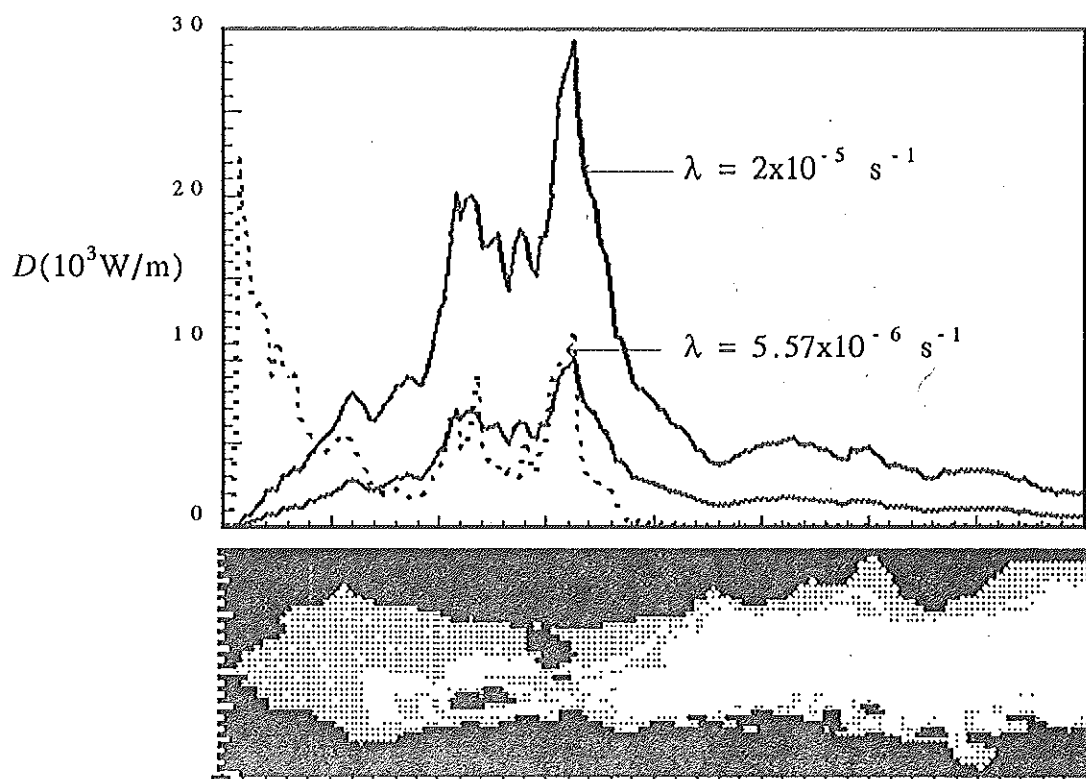
disipación total, se deberían simplemente cambiar los valores de la segunda columna en forma proporcional. Por lo tanto, el valor de referencia utilizado no representa una limitación de este trabajo.



Gráfica 2. Disipación a lo largo del Golfo de California para el modelo bidimensional.

Comparando los errores del modelo bidimensional con los del caso a_1 , se ve que el primero reproduce bien las amplitudes pero no así las fases, en donde el modelo unidimensional es dos veces mejor. Sin embargo, este valor de λ implica una disipación total unas tres veces mayor que la del bidimensional, además de dar una descripción espacial de la disipación muy mala en comparación con la del bidimensional, ya que estima valores muy bajos en la cabeza y muy altos en la zona adyacente a la boca (gráfica 3).

Si se elige entonces igualar las disipaciones totales (caso a_2) el error de amplitud resulta casi el mismo que para el caso anterior, pero el error de fase aumenta considerablemente (aunque sigue siendo menor que el del bidimensional).

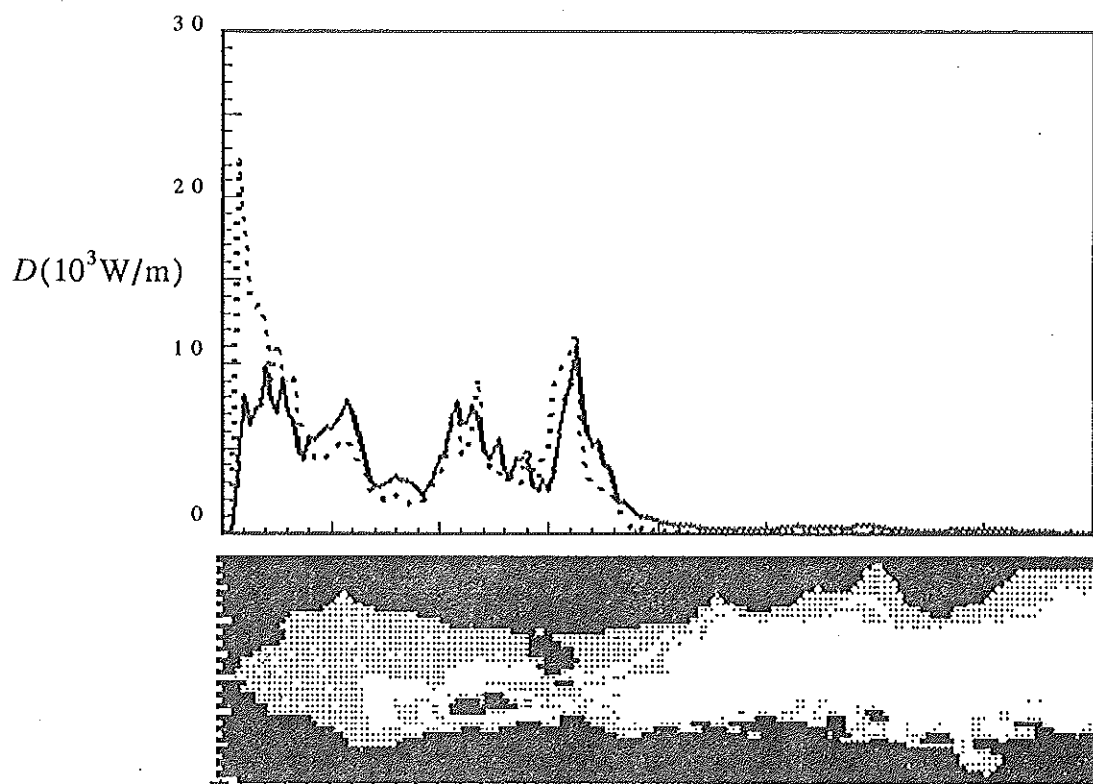


Gráfica 3. Disipación para el modelo unidimensional con λ constante (línea continua) y para el modelo bidimensional (línea punteada).

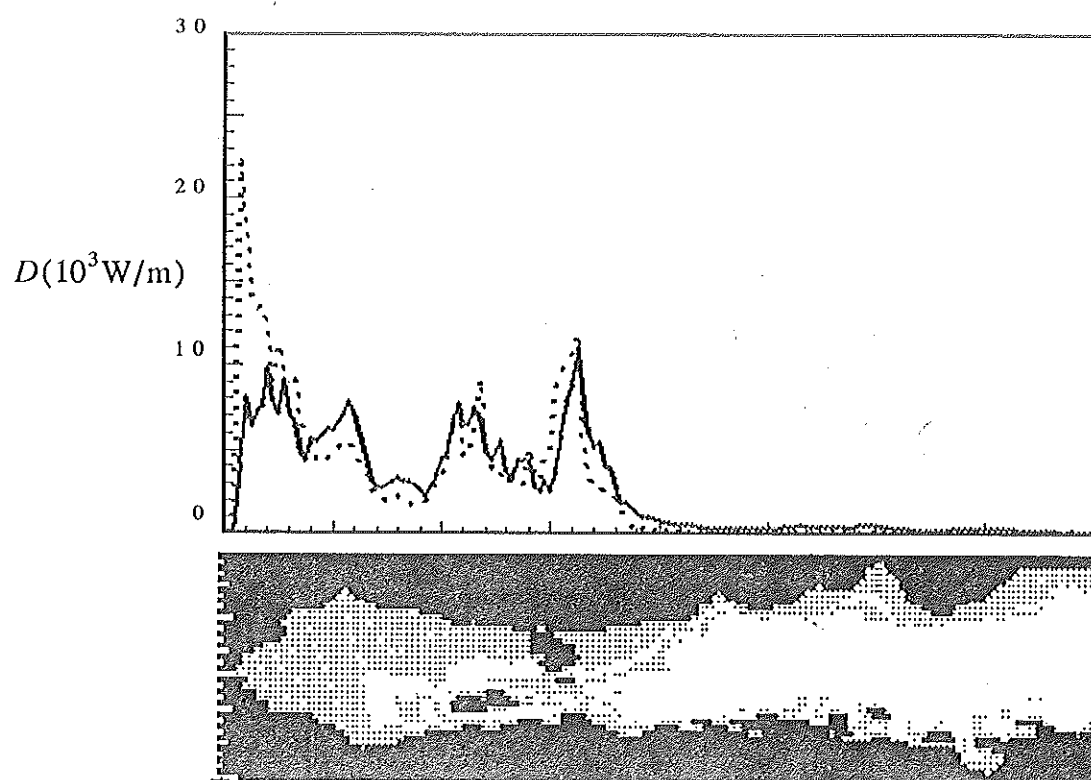
Para el caso b, en el cual se hace coincidir las disipaciones a lo largo del golfo, el error aumenta, aunque no considerablemente.

Para los casos restantes los errores de amplitud y fase son muy similares siendo el promedio un $\varepsilon_A = 6 \text{ cm}$ y un $\varepsilon_F = 6 \text{ minutos}$.

Tomando en cuenta las descripciones espaciales de la disipación, las diferentes parametrizaciones de fricción mejoran el modelo en este sentido en el orden en que aparecen (excluyendo obviamente, el caso b). Las gráficas 4 y 5 ilustran este hecho; en donde se muestra la disipación para los casos c y d respectivamente (línea continua) comparada con la del modelo bidimensional (línea punteada).



Gráfica 4. Disipación para el modelo unidimensional con $\lambda = k/h$ (línea continua) y para el modelo bidimensional (línea punteada).



Gráfica 5. Disipación para el modelo unidimensional con $\lambda = k|u|/\bar{h}$ (línea continua) y para el modelo bidimensional (línea punteada).

En la tabla II se muestra la disipación calculada por regiones a lo largo del golfo para ambos modelos. Cada región tiene un ancho de 10 celdas (66 km) y se encuentran numeradas de la cabeza a la boca. En esta tabla se puede verificar como la parametrización más adecuada es la correspondiente al caso d y como en general todas ellas no pueden reproducir la alta disipación que ocurre en la cabeza.

TABLA II

Disipación por regiones para el modelo bidimensional (2D) y el unidimensional (1D) con las diferentes parametrizaciones de la fricción realizadas.

REGIÓN	2D	DISIPACIÓN ($10^6 W$)				
		MODELO 1D		(CASO)		
		a_1	a_2	c_1	c_2	d
1. Cabeza	824.28	72.69	25.15	384.58	476.113	544.20
2. Sn. Felipe	394.10	274.99	95.12	405.73	505.470	395.06
3. Pto. Peñasco	234.59	463.43	160.27	334.78	418.543	274.58
4.	161.39	613.65	212.16	207.38	259.757	143.08
5. Isla Angel de	360.47	1193.35	412.50	404.27	506.752	448.92
6. la Guarda	282.42	1097.03	379.10	243.55	305.469	222.71
7. Isla Tiburón	410.13	1542.17	532.68	439.47	551.422	555.21
8.	39.72	684.71	236.31	110.02	138.120	65.67
9.	4.37	369.32	127.25	31.28	39.290	8.93
10. Guaymas	3.08	279.5	96.01	17.88	22.487	3.69
11.	3.65	329.58	112.80	26.53	33.394	6.40
12. Loreto	2.41	293.49	99.81	26.18	32.998	5.68
13.	1.32	238.84	80.47	17.20	21.705	3.16
14. Topolobampo	1.27	212.43	70.75	14.42	18.233	2.37
15. La Paz	0.89	202.29	66.26	14.55	18.447	2.35
16. Boca	0.30	140.21	44.93	7.17	9.111	0.82
TOTAL ($10^9 W$)	2.72	8.27	2.72	3.38	2.72	2.72

8. DISCUSIONES

La raíz cuadrática media de las observaciones (rcm) es de 53.8 cm que comparados con los ε_A de ambos modelos resultan errores del 7% para el bidimensional y de 10% para el unidimensional por lo que los errores son prácticamente iguales. Comparando el desfase con el período de la M_2 (12.42 h) resultan errores de 2% para el modelo bidimensional y de 1% para el unidimensional. Sin embargo este error no es tan pequeño, ya que el desfase está pesado por la amplitud en cada punto de la observación. Como podemos observar en la gráfica 1, las mayores discrepancias entre el modelo bidimensional y las observaciones es en la cabeza, donde las amplitudes son grandes, mientras que para el unidimensional las mayores discrepancias están en el punto anfibrómico virtual, donde la amplitud es pequeña, por lo que el desfase definido mediante (26) es mayor para el bidimensional. La rcm de la diferencia entre modelo y observaciones en las fases sin ser pesadas por la amplitud de la observación es de 58 min. para el bidimensional y de 49 min. para el mejor ajuste del unidimensional.

Es importante notar que para el bidimensional se mantuvieron fijas las amplitudes y fases en la boca, por lo que no podemos asegurar que éstos sean los mejores resultados que se puedan obtener para este modelo.

Aunque para el caso b (λ como una función de x) la descripción de la disipación es exacta, los errores de amplitud y fase son los más grandes entre los casos estudiados, además de no ser una parametrización que esté expresada mediante alguna formulación, por lo que no la consideramos muy buena.

Por otra parte, el buen ajuste entre el modelo unidimensional y bidimensional demuestran la poca importancia de los términos alineales de la marea dentro del golfo.

Tomando en cuenta la linealización propuesta mediante (18) podemos ver que la contribución de la frecuencia en cuestión es

$$\lambda = \frac{8}{3\pi} \frac{rU(x)}{\bar{h}(x)} = 0.85 \frac{rU(x)}{\bar{h}(x)},$$

que es proporcional al 85% de la magnitud de la velocidad, por lo que para componentes muy energéticas (como lo es la M_2) esta linealización es válida, ya que el efecto de otras componentes menos energéticas debe ser menor al 15% de su contribución total. Sin embargo, para componentes menos energéticas la contribución debida a otras frecuencias puede ser importante, por ejemplo, la componente K_1 tiene una rcm de 22.86 cm por lo que su contribucion para esa misma frecuencia es proporcional a 20 cm (85% de rcm), mientras que la contribución de la M_2 a otras frecuencias debe ser proporcional a 8 cm (15% de rcm) por lo que su efecto no puede ser despreciado.

Según esta linealización, la constante de ajuste debe ser 3.14×10^{-3} mientras que el valor para el mejor ajuste fue de 5.7×10^{-3} , que es del mismo orden de magnitud. La discrepancia entre estos dos valores puede ser debida a los promedios de velocidad y profundidad manejados en el modelo unidimensional. Por otra parte no hay acuerdo sobre el valor óptimo de r para el golfo; de hecho, Stock (1976) y posteriormente Godin (1984) proponen que r debe variar a lo largo del mismo.

La disipación total para el modelo bidimensional resulta menor que los valores reportados hasta ahora. Stock (1976) estimó una disipación total de

4.9×10^9 W (en comparación con 2.7×10^9 W, que es el valor obtenido en este trabajo, con el modelo bidimensional) pero con un coeficiente de fricción de 0.01 que es unas dos veces y media más grande que el valor aquí utilizado (0.0037) por lo que no es de extrañarse que la disipación sea de aproximadamente el doble. Filloux (1973) estimó a partir de mediciones una disipación total similar a la de Stock lo que implicaría que prácticamente toda la disipación dentro del golfo se lleva a cabo por fricción en el fondo. Bray y Robles (1991) mencionan que muy probablemente la disipación dentro del golfo se lleve a cabo mediante dos mecanismos: la fricción en el fondo y la generación de ondas internas por la marea.

El caso d es el más realista en términos generales para el modelo unidimensional: los errores asociados no son demasiado grandes, la descripción espacial de la disipación es muy buena (gráfica 5) y además el coeficiente que proporciona el mejor ajuste, es el mismo con el que se obtiene una disipación total igual a la del modelo bidimensional.

Para los diferentes casos de fricción estudiados los errores en amplitud aumentaron muy poco mientras que los de fase aumentaron en casi un 60% con respecto al mejor ajuste (caso a). Este resultado muestra la sensibilidad de las fases al parámetro de la fricción, tal y como lo reportan Ripa y Velázquez (1993).

Cabe aclarar que la parametrización del caso d es para soluciones armónicas como lo es la marea. Para el caso más general, en el que el forzamiento no sea de manera armónica una buena representación de la fricción lineal puede ser obtenida de suponer λ como inversa a la profundidad ($\lambda \sim h^{-1}$) en cuyo caso (6) serían las ecuaciones a resolver (ver gráfica 4).

9. CONCLUSIONES

Se estudiaron dos modelos para la marea en el Golfo de California: uno bidimensional y alineal y el otro unidimensional y lineal. Se encontró que, en términos generales, el modelo bidimensional es mejor en la reproducción de amplitudes de marea; mientras que el modelo unidimensional lo es para las fases. Se analizaron diferentes parametrizaciones de la fricción lineal encontrando que la que provee el mínimo error (coeficiente de fricción constante) describe muy mal cuantitativa y cualitativamente la disipación.

El modelo unidimensional con un coeficiente de fricción proporcional a la magnitud de la velocidad de la M_2 y al inverso de la profundidad, en cada punto, proporciona prácticamente la misma descripción del fenómeno (amplitudes fases y disipación) que el modelo bidimensional pero con la ventaja de ser un modelo notablemente más sencillo y en el que es posible una variación fácil de los parámetros.

La similitud entre las predicciones de ambos modelos enfatiza la poca importancia de los términos alineales en la reproducción de las elevaciones, aunque éstos pueden ser importantes en otros procesos como corrientes residuales (Quirós et al, 1992). Esto constituye una ventaja del modelo bidimensional.

10. BIBLIOGRAFÍA

- Bowden, K. F., 1983. "Physical Oceanography of Coastal Waters". John Wiley & Sons. Ontario. 301 pp.
- Bray, N. A. y Robles J. M., 1991. "Physical Oceanography of the Gulf of California". Invited review paper in the Gulf and Peninsular Province of the Californias. Edited by J. P. Doupchin and B. R. Simoneit. Tulsa, Oklahoma. 47: 511-553.
- De León, A., 1988. "Modelos unidimensionales de la marea en el Golfo de California". Tesis de licenciatura, U.A.B.C., 81 pp.
- Filloux, J. H., 1973. "Tidal paterns and energy balance in the Gulf of California". Nature, 243:217-221.
- Godin, G., 1984. "Frictional damping of the tide in the Gulf of California". Geofísica Internacional, 24:295-313.
- Grijalva, N., 1972. "Tidal computation in the Gulf of California". Geofísica Internacional, 12:13-34.
- Hendershott, M. C. y A. Speranza., 1971. "Co-oscillation tides in long, narrow bays; the Taylor problem revised". Deep Sea Research, 18:959-980.
- Hunter, J., 1980. "Users manual for tow dimentional numerical hidrodinamic model". Report U80-5. Unit for Coastal and Estuarine Studies.
- Quirós, G. A., 1983. "Circulación residual en el Golfo de California, un modelo numérico". Tesis de maestría. CICESE, 98 pp.
- Quirós, G., Badan-Dangon, A. y Ripa, P., 1992. "M2 currents and residual flow in the Gulf of California". Netherlands Journal of Sea Research, 28(4):251-259.

- Ripa, P., 1990. "Uso de un modelo sencillo de la marea en el Golfo de California para el control de calidad de componentes armónicas". Comunicaciones Académicas. CICESE. Serie Oceanografía Física. CEOFN9001.
- Ripa, P. y Velázquez, G., 1993. "Modelo unidimensional de la marea en el Golfo de California". Geofísica Internacional. En prensa.
- Stock, G. G., 1976. "Modeling of tides and tidal dissipation in the Gulf of California". Ph. D. Thesis. University of California at San Diego. San Diego, California. 133 pp.
- Stock, G. G. y Filloux, J. H., 1974. "Direct gravitational driving and tidal energy balance in elongated gulfs". Journal of Physical Oceanography, 5:376-379.