

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS



ESTUDIO DE LA ENTROPÍA DE AGUJEROS NEGROS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

FÍSICO

PRESENTA

SINUHÉ ALEJANDRO PÉREZ PAYÁN

Ensenada, Baja California

Junio de 2006

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO DE LA ENTROPÍA DE AGUJEROS NEGROS

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

SINUHÉ ALEJANDRO PÉREZ PAYÁN

APROBADO POR:



DR. OSCAR MIGUEL SABIDO MORENO

Presidente del Jurado



DR. JORGE ALBERTO  
VILLAVICENCIO AGUILAR

Secretario



DR. ROBERTO ROMO  
MARTÍNEZ

1er. Vocal

RESUMEN de la tesis que como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Física presenta Sinuhé Alejandro Pérez Payán. Ensenada, Baja California, México. Junio de 2006.

## ESTUDIO DE LA ENTROPÍA DE AGUJEROS NEGROS

Resumen aprobado por:



---

Dr. Oscar Miguel Sabido Moreno

Director de Tesis

Se presenta un estudio de la Entropía de Agujeros Negros mediante tres formalismos diferentes. Primeramente se vio el formalismo usado por Hawking, después se estudió la Entropía de Agujeros Negros mediante el uso del ensemble canónico, por último, se calculó esta propiedad termodinámica con el uso de las integrales de trayectoria de Feynman. Para el primero de estos formalismos se muestra que la Entropía es directamente proporcional al área del agujero (Entropía de Hawking-Bekenstein). Con los dos últimos métodos se obtienen el término calculado con el primer formalismo más una corrección logarítmica, cuyo argumento es el término de Hawking-Bekenstein.

## Dedicatoria

A Mis Padres Francisca y Guillermo.

A mi Hija Andrea Desireé

A mis Hermanos

Y a Ivonne.

## Agradecimientos

Agradezco al Dr. Oscar Miguel Sabido Moreno por dirigir este trabajo, por su amistad y por todo su apoyo.

Quiero agradecer a mis padres Francisca y Guillermo por su apoyo incondicional que me han brindado durante toda mi vida, todo lo que soy se los debo a ustedes.

A Ivonne, por darme todo su amor, cariño y paciencia. Por estar a mi lado durante todo este tiempo. Por haber sido un pilar durante mis estudios profesionales, por su apoyo incondicional y por todas las cosas que vienen.

A mi hija Andrea Desireé, porque nunca pense que una personita le pudiera dar tanta alegría a mi vida.

A mi hermana Julia Desireé, porque no puedo pedir mejor hermana que tú, muchas gracias por todo tu amor y apoyo.

A mi hermano Luis Pedro, que a pesar de todo lo que hemos pasado, podemos contar el uno con el otro.

A mi hermano Atahualpa, por todo su cariño.

Al M. en F. Julio César López Domínguez, por haberme "conectado" para la realización de este trabajo, por su amistad y por todo su apoyo.

A todos mis amigos de Tijuana: Edgar Ilescas (a.k.a. El Brocoli), Adrian Seañez (El Negro), Israel (a.k.a. El Trompas), Octavio (a.k.a. El Tavo), Axel Rosas (a.k.a. El Woody),

por compartir tantas y tantas babosadas juntos en nuestra temprana juventud.

A mis amigos de Ensenada: Francisco Guillen (a.k.a. La Gorda), Jesús Astorga (a.k.a. El Chuy, La Loca Astorga, El Mión, El Pies de Hobbit, etc), Eri Mena(a.k.a. El Nigga), Angel Sayola (a.k.a. El Sayola), Sergio Arregui (a.k.a. El Pollo), Héctor Arias (a.k.a. El Chiki), Roberto Guerrero (a.k.a El Piano), Sergio Siqueiros (a.k.a. El Chicleiros), por tantas aventuras y demasiadas cervezas y cigarros.

A la Sra. Estela de Hernández y al Ing. Juan Manuel Hernández, por todo su apoyo desinteresado, por haberme adoptado durante más de tres años.

A mi tía Silvia por todo su cariño, a mi primo Guastavo y a todos los Hernández, en especial a mi tío Felix (q.e.d), por tantos recuerdos de infancia y los que se siguen acumulando.

A mis cuñadas Mariela y Adela, y a mis respectivos sobrinos: Guillermo Alejandro (a.k.a El Tiki), Amaury, Gustavo Antonio (a.k.a. El Chocho), Jesus Andres (a.k.a. El Wero) y Valeria Desireé (a.k.a. La Tanaka).

A todos mis maestros de la Facultad en especial al M. en C. Jesus Lerma, al Dr. Hector Aceves (a.k.a. El Harvey), al Dr. Roberto Romo y al Dr. Jorge Villavicencio.

También quiero agradecer al CONACYT y al Dr. Octavio Obregón por haberme becado para realizar este trabajo mediante el proyecto de investigación: Aspects of Quantum Gravitation, Field Theory and Strings, cuya referencia es 37851E. Así como también a PROMEP por haberme apoyado con una beca en los últimos meses de la realización de este trabajo, a través del proyecto UGTO-PCT-085.

# Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Relatividad General</b>	<b>3</b>
2.1	Relatividad Especial . . . . .	3
2.2	Principio de Equivalencia . . . . .	9
2.3	Geodésicas . . . . .	14
2.4	La Métrica y Transformación de Coordenadas . . . . .	17
2.5	Símbolos de Christoffel, Geodésicas y Transformación de Coordenadas . . . . .	18
2.6	El Método Variacional para Geodésicas . . . . .	19
2.7	El Límite Newtoniano . . . . .	20
2.8	Principio de Covariancia General . . . . .	22
2.9	Ecuaciones de Campo de Einstein . . . . .	22
2.9.1	Forma Eurística . . . . .	22
2.9.2	Un Enfoque más Sistemático . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Agujeros Negros</b>	<b>29</b>
3.1	Solución de Schwarzschild . . . . .	29
3.2	La Solución de Schwarzschild . . . . .	32
3.3	Física de Agujeros Negros . . . . .	35

3.3.1 Singularidades . . . . .	35
3.4 Diagramas de Espacio y de Espacio-Tiempo . . . . .	36
3.5 Diagramas de Espacio-Tiempo en Coordenadas de Schwarzschild . . . . .	38
3.6 Una Partícula que cae Radialmente . . . . .	41
3.7 Coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	43
<b>4 Entropía de Agujeros Negros</b>	<b>47</b>
4.1 Entropía de Hawking . . . . .	47
4.1.1 La Segunda Ley . . . . .	49
4.2 Ensemble Canónico . . . . .	51
4.2.1 Termodinámica . . . . .	56
4.3 Integrales de Trayectoria de Feynman . . . . .	58
<b>5 Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>APENDICE I: TENSORES</b>	<b>67</b>

## Lista de Figuras

1	Los ejes primados están rotados respecto de los no primados. . . . .	3
2	Cono de luz donde se muestran los vectores tipo-tiempo, tipo-espacio y tipo luz ó vectores nulos. . . . .	9
3	Un experimentador y dos piedras flotando libremente en algún lugar del espacio, esto es, en ausencia de fuerzas. . . . .	11
4	Aceleración constante hacia arriba simula el efecto de un campo gravitacional: el experimentador y las piedras caen hacia el fondo de la caja. . . . .	11
5	El efecto de un campo gravitacional constante es indistinguible para el experimentador de aquel a aceleración constante . . . . .	12
6	La caída libre en un campo gravitacional tiene el mismo efecto como si no hubiera campo gravitacional. . . . .	13
7	El experimentador y las piedras en un campo gravitacional no uniforme, las piedras se acercaran una o otra mientras caen al fondo del elevador. . . . .	14
8	El experimentador y las piedras caiendo en un campo gravitacional no uniforme. El experimentador flota junto con las piedras las cuales se acercan entre si, indicando la presencia del alguna fuerza. . . . .	15

9	La primera figura (izquierda) es un diagrama espacial del espacio-tiempo de Minkowski, la segunda (derecha) es un diagrama de espacial, con una dimensión suprimida . . . . .	37
10	En figura de la izquierda se muestra un diagrama de espacio-tiempo con una dimensión suprimida, en la figura de la derecha se muestra el diagrama espacio-tiempo con dos dimensiones suprimidas. . . . .	37
11	Solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild, con dos dimensiones suprimidas. . . . .	40
12	Partícula que cae radialmente en tiempos $t$ y el tiempo propio. . . . .	42
13	Extensión analítica de la solución de Schwarzschild. . . . .	44
14	Solución de Schwarzschild en coordenadas avanzadas Eddington-Finkelstein. . . . .	45
15	Solución de Schwarzschild en coordenadas retardadas Eddington-Finkelstein. . . . .	46

## Capítulo 1

# INTRODUCCIÓN

En los primeros treinta años del siglo pasado surgieron dos teorías que cambiaron radicalmente la visión que el hombre tenía de la física y de la propia realidad: la teoría General de la Relatividad (1915) y la Mecánica Cuántica (aproximadamente 1926). Albert Einstein fue responsable de la primera, y desempeñó un papel fundamental en el desarrollo de la segunda. La mayoría de los físicos pronto admitieron tanto la Relatividad Especial como la Mecánica Cuántica porque describían fenómenos que podían ser observados directamente. Por otro lado, la Relatividad General fue en gran parte ignorada porque matemáticamente resultaba demasiado compleja, no era susceptible a comprobación en el laboratorio y se trataba de una teoría en verdad clásica que no parecía compatible con la Mecánica Cuántica. De ese modo la Relatividad General permaneció en el limbo por casi cincuenta años.

El gran desarrollo de las observaciones astronómicas iniciado a principios de la década de los setenta suscitó una renovación del interés por la teoría clásica de la Relatividad General ya que muchos de los nuevos fenómenos descubiertos, como quásares, púlsares y fuentes compactas de rayos X, indicaban la existencia de campos gravitatorios muy intensos que sólo cabía describir por medio de la Relatividad General.

Al principio de la década de los setenta Bekenstein (Bekenstein, 1973, 1974a,b) propuso

la cuantización de los Agujeros Negros, sugirió que la temperatura del objeto es proporcional a la gravedad superficial y más aún, que la entropía es proporcional al área del horizonte de eventos. Propuso que el área de un Agujero Negro no extremo (carga eléctrica diferente a su masa) juega el papel de un invariante adiabático y concluye que el área del horizonte debería tener un espectro discreto con eigenvalores uniformemente espaciados.

Otro resultado de la época fue el descubrimiento de las leyes mecánicas (Barden et al., 1973) en el marco de la Relatividad General, las cuales gobiernan a los Agujeros Negros no extremos. Estas leyes son muy similares a las leyes de la termodinámica, esta similitud no era bien entendida hasta que Hawking (Hawking, 1975; Gibbons y Hawking, 1977) descubrió que los Agujeros Negros se evaporan y que su radiación es la de un cuerpo negro con temperatura proporcional a la gravedad superficial.

Estos sorprendentes resultados de hace tres décadas apuntan hacia una relación más profunda entre la Relatividad General, la Mecánica Cuántica y las propiedades termodinámicas de los Agujeros Negros. Los cálculos semiclásicos de Hawking dieron una interpretación de la relación entre la Mecánica Clásica de los Agujeros Negros y su termodinámica, la cual lleva a entender el incremento de la entropía.

## Capítulo 2

# RELATIVIDAD GENERAL

### 2.1 Relatividad Especial

Frecuentemente se dice que la Relatividad Especial (RE) es una teoría 4-dimensional: tres dimensiones espaciales y una temporal, a diferencia de la Relatividad Galileana (Mecánica Newtoniana (MN)), donde se consideraban tres dimensiones espaciales y un parámetro temporal. Sin embargo no existía ninguna razón de considerar estos aspectos aparte de una sola teoría de espacio-tiempo cuatrodimensional.

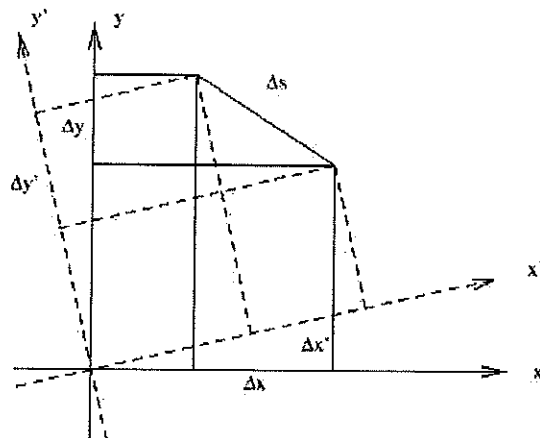


FIGURA 1.- Los ejes primados están rotados respecto de los no primados.

Consideremos un plano 2-dimensional. Típicamente es conveniente etiquetar los puntos en dicho plano introduciendo coordenadas, por ejemplo, definiendo una base ortogonal dada

por  $x$  e  $y$  y proyectar cada punto sobre estos ejes de la manera usual. Sin embargo, es claro que la mayoría de los aspectos geométricos del plano, son independientes de nuestra elección de una base. Un ejemplo sencillo es el de considerar la distancia entre dos puntos, la cual está dada por

$$s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2, \quad (1)$$

en un sistema de coordenadas cartesiano, definido por los ejes  $x'$  y  $y'$ , que están rotados con respecto a los originales (ver figura 1), la fórmula para la distancia se ve inalterada

$$s^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2, \quad (2)$$

por lo tanto decimos que la distancia es un invariante bajo tal cambio de coordenadas. Aunque usamos dos números distintos para etiquetar cada punto, los números no son la esencia de la geometría, ya que podemos rotar ejes y dejar la distancia invariante. En la MN no existe la noción de rotar el espacio y el tiempo en si mismos, sino la noción de un tiempo absoluto tiene como consecuencia coordenadas independientes.

Sin embargo este no es el caso de la RE. Consideremos las coordenadas  $(t, x, y, z)$  en el "espacio-tiempo", las coordenadas espaciales  $(x, y, z)$  conforman un sistema cartesiano, construido por ejemplo soldando varillas rígidas que se intersectan en ángulos rectos, que se mueve libremente sin acelerarse. La coordenada temporal se define por un conjunto de relojes que no se mueven respecto a las coordenadas espaciales (ya que este es un experimento pensado, podemos imaginar que las varillas son infinitamente largas, y que hay un reloj en cada punto del espacio). Los relojes están sincronizados de la siguiente manera: si uno viaja de un punto a otro en el espacio en línea recta a velocidad constante, la diferencia

de tiempo entre los relojes al final del viaje es el mismo, si uno hubiese hecho el mismo viaje, a la misma velocidad, en la dirección contraria. Entonces el sistema de coordenadas construido es un marco inercial.

Un evento es definido como un punto en el espacio a un tiempo, caracterizado por  $(t, x, y, z)$ , donde el intervalo entre dos eventos está dado por

$$s^2 = (c \Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \quad (3)$$

donde  $c$  es un factor de conversión entre el espacio y el tiempo, con unidades de velocidad. Si ponemos una marco de referencia  $(t', x', y', z')$  repitiendo el procedimiento anterior, pero permitiendo un cambio en las posiciones, ángulos y velocidad entre las coordenadas nuevas y las coordenadas viejas, el intervalo se mantiene invariante

$$s^2 = (c \Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2, \quad (4)$$

como veremos más adelante, la transformación de coordenadas que hemos definido implícitamente lo que hace es rotar el espacio y el tiempo en si mismos.

Denotemos las coordenadas del espacio-tiempo por un superíndice que varía de 0 a 3,

$$x^a = (x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (5)$$

donde  $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  y donde por simplicidad hemos tomado  $c = 1$ .

Podemos escribir el intervalo de espacio-tiempo en una forma mas compacta, introduciendo

una matriz se  $4 \times 4$ , como

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

por lo que el intervalo de espacio-tiempo toma la forma

$$s^2 = \eta_{ab} \Delta x^a \Delta x^b, \quad (7)$$

donde se ha usado la convención de suma de Einstein, en la cual índices repetidos que aparecen arriba (superíndices) y abajo (subíndices) son sumados.

Ahora podemos considerar transformaciones de coordenadas en el espacio-tiempo. ¿Qué clase de transformaciones dejan al intervalo de espacio-tiempo invariante? Una son las traslaciones de la forma

$$x^a \rightarrow x^{a'} = x^a + dx^a, \quad (8)$$

las traslaciones dejan las diferencias  $\Delta x^a$  igual (sin cambio), por lo que no es de sorprenderse de que no haya cambio en el intervalo. La otra clase de transformaciones lineales es la de multiplicar a  $x^a$  por una matriz (independiente del espacio-tiempo)

$$x^{a'} = \Lambda_b^{a'} x^b, \quad (9)$$

o en notación matricial convencional

$$x' = \Lambda x, \quad (10)$$

donde bajo estas transformaciones la diferencia  $\Delta x^a$  sí sufre cambios, por lo que debemos de multiplicar por la matriz  $\Lambda$ . Ahora nos hacemos la misma pregunta: ¿Qué clase de matrices

me dejan invariante el intervalo? Lo que queremos es que el intervalo sea invariante bajo estas transformaciones, entonces

$$s^2 = (\Delta x)^T \eta (\Delta x) = (\Delta x')^T \eta (\Delta x') = (\Delta x)^T \Lambda^T \eta \Lambda (\Delta x), \quad (11)$$

y por lo tanto

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda, \quad (12)$$

o

$$\eta_{ab} = \Lambda_a^{c'} \Lambda_b^{d'} \eta_{c'd'} \quad (13)$$

entonces buscamos matrices  $\Lambda_a^{c'}$  tales que las componentes de la matriz  $\eta_{c'd'}$  sean las mismas que las de  $\eta_{ab}$ . Las matrices que satisfacen la ecuación anterior son conocidas como las transformaciones de Lorentz, y el conjunto de éstas forman un grupo bajo multiplicación de matrices, conocido como el grupo de Lorentz. Las transformaciones de Lorentz se clasifican en diferentes categorías. Primero, hay rotaciones convencionales, tales como las rotaciones en el plano  $x - y$

$$\Lambda_b^{a'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

el ángulo de rotación  $\theta$  es una variable periódica, con periodo  $2\pi$ . También existen los *boosts*, los cuales se pueden pensar como rotaciones entre el espacio-tiempo y las direcciones

del tiempo. Un ejemplo es

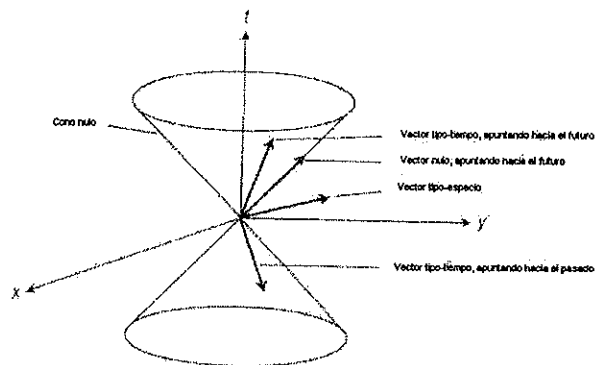
$$\Lambda_b^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

donde el parámetro de *boost*  $\phi$ , a diferencia del ángulo de rotación, está definido de  $-\infty$  a  $\infty$ . Explicítamente podemos escribir las Transformaciones de Lorentz como

$$t' = \beta(t - vx/c^2), \quad x' = \beta(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (16)$$

donde  $\beta = (1 - v^2 - c^2)^{-1/2}$ . Una herramienta muy útil es el diagrama de espacio-tiempo, el cual se construye con ejes iniciales  $t$  y  $x$  en ángulos rectos y suprimiendo los ejes  $y$  y  $z$ . De acuerdo a (15), bajo un boost en el plano  $x - t$  el eje  $x'$  ( $t' = 0$ ) está dado por  $t = x \tan \eta$ , mientras que el eje  $t'$  ( $x' = 0$ ) está dado por  $t = x / \tan \eta$ . Podemos ver que los ejes del espacio y el tiempo están rotados, pero se cortan en lugar de permanecer ortogonales, en el sentido euclideano tradicional. También resulta interesante considerar las trayectorias de viaje con velocidad  $c = 1$ . Estas, están dadas en el sistema de coordenadas original  $x = \pm t$ . En el nuevo sistema, las trayectorias definidas por  $x' = \pm t'$  son las mismas que las definidas por  $x = \pm t$ ; las cuales son invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Sabemos que ésta es la velocidad de la luz, por lo que hemos encontrado que  $c$  es la misma en cualquier marco de referencia. A un conjunto de puntos, los cuales todos están conectados a un sólo evento por líneas rectas que se mueven a la velocidad de la luz se le llama cono de luz; y todo este conjunto es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Los conos de luz se dividen en futuro y pasado; el conjunto de puntos que están dentro del futuro y el pasado

del cono de luz de un punto  $p$  se le llaman timelike, los que están fuera del cono de luz se llaman spacelike y aquellos que están sobre el cono de luz se les llama lightlike o nulos (ver figura 2).



**FIGURA 2.-** Cono de luz donde se muestran los vectores tipo-tiempo, tipo-espacio y tipo luz ó vectores nulos.

## 2.2 Principio de Equivalencia

Una de las fallas que tiene la teoría clásica de la gravedad de Newton, es que no es invariante ante transformaciones de Lorentz. Esto condujo a Einstein a reformular la teoría de la gravitación de Newton por algo más complicado, la razón de esto, es que de acuerdo a la RE, la masa es sólo otra forma de energía.

La pregunta que surge es la siguiente: ¿Cómo encontramos una mejor teoría?. Einstein atacó este problema pensando en tres temas relacionados:

- 1) El Principio de Equivalencia de la RE.
- 2) La relación entre masa inercial y masa gravitacional.

### 3) RE y aceleraciones.

Considerando el primer tema, recordemos que la RE postula que hay marcos de referencia inerciales preferenciales, por ejemplo, aquellos que viajan a velocidad constante unos de otros. Pasando al segundo tema, de acuerdo a la mecánica clásica de Newton, hay dos conceptos independientes de masa: masa inercial  $m_i$ , la cual es a causa a la resistencia a la aceleración, y la masa gravitacional  $m_g$ . Un hecho empírico importante es que la masa inercial de un cuerpo es igual a la masa gravitacional. Einstein sorprendido ante estos hechos, concluyo que la igualdad entre la masa inercial y la gravitacional sugería una relación más estrecha entre la inercia y la gravedad, es decir, los efectos de la gravedad y la aceleración localmente son indistinguibles. Einstein sostuvo esto mediante unos experimentos pensados, que también se conocen como los experimentos del elevador.

Consideremos a una persona en una caja sellada (elevador) en algún lado del espacio exterior. En la ausencia de fuerzas, está persona flotará. De igual manera, si suelta dos rocas, éstas flotarán libremente junto con él (ver figura 1). Ahora, supongamos que un agente externo acelera la caja hacia arriba con aceleración constante (ver Figura 2). Entonces, la persona será empujada hacia abajo del elevador con una fuerza constante y también verá que las rocas caen hacia el piso. Ahora consideremos que la caja está inmersa en un campo gravitacional constante. De nuevo será empujado a la parte baja del elevador con una fuerza constante e igualmente caerán hacia el piso las rocas. Sin poder hacer un experimento dentro del elevador, ¿puede la persona decir si lo que está experimentando es debido al campo gravitacional o debido a que un agente externo lo está acelerando hacia arriba? Claramente, los efectos de la gravedad y de la aceleración son indistinguibles localmente. Consideremos

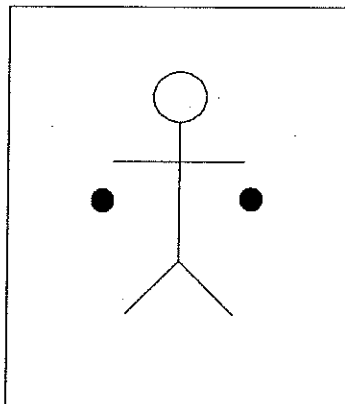


FIGURA 3.- Un experimentador y dos piedras flotando libremente en algún lugar del espacio, esto es, en ausencia de fuerzas.

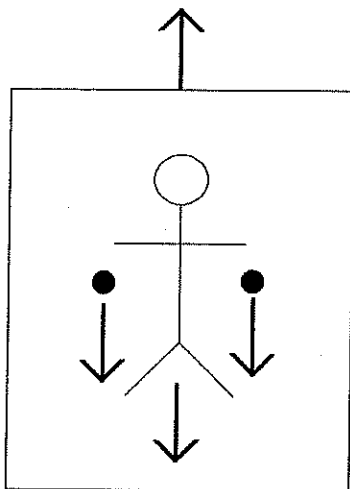
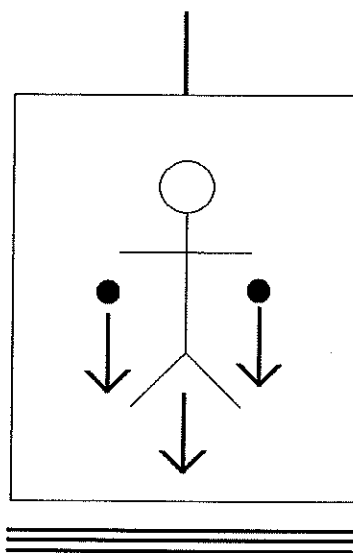


FIGURA 4.- Aceleración constante hacia arriba simula el efecto de un campo gravitacional: el experimentador y las piedras caen hacia el fondo de la caja.

ahora que alguien corta el cable del elevador (figura 4). Entonces el elevador caerá libremente hacia abajo, como en la figura 1, la persona y las rocas flotarán como cuando no hay



**FIGURA 5.-** El efecto de un campo gravitacional constante es indistinguible para el experimentador de aquel a aceleración constante

gravedad. Esto quiere decir que localmente, el efecto de la gravedad puede ser eliminada por un marco de referencia que cae libremente. En las situaciones mencionadas se ha enfatizado en los conceptos de aceleración constante y en localmente. Para ver el significado de esto consideremos a nuestro experimentador en su elevador en el campo gravitacional de la Tierra. Este campo gravitacional no es constante pero sí es esféricamente simétrico. Por lo tanto las rocas se acercarán mutuamente conforme van cayendo hacia el piso del elevador, en la dirección del centro del campo gravitacional. De este modo, si alguien corta el cable, y el elevador está en caída libre (figura 6), la persona flotará así como las rocas, pero nuestro experimentador notará que las rocas se están acercando una hacia otra por alguna razón, entonces llegará a la conclusión de que existe alguna fuerza responsable por eso. Por lo que, en un campo gravitacional que no es constante, los efectos de la gravedad no se pueden

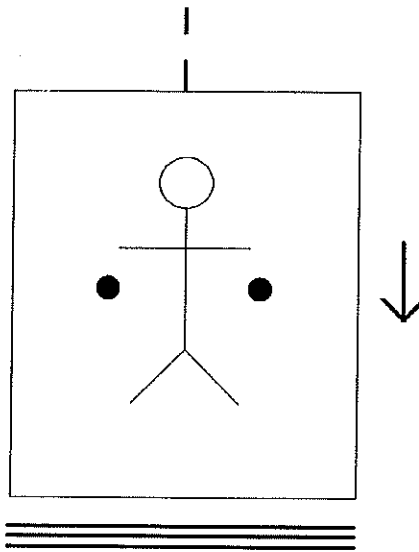


FIGURA 6.- La caída libre en un campo gravitacional tiene el mismo efecto como si no hubiera campo gravitacional.

eliminar por el hecho de ir en un sistema de referencia en caída libre. Ésto sólo es posible localmente, a escalas donde el campo gravitacional es esencialmente constante.

Einstein formalizó los resultados de estos experimentos pensados en lo que se conoce como el Principio de Equivalencia:

*Para cada punto en el espacio-tiempo en presencia de un campo gravitacional arbitrario es posible escoger un sistema de coordenadas localmente inercial tal que, dentro de una región suficientemente pequeña alrededor de un punto, las leyes de la física tienen la misma forma que en los sistemas de coordenadas cartesianos no acelerados en ausencia de gravitación.*

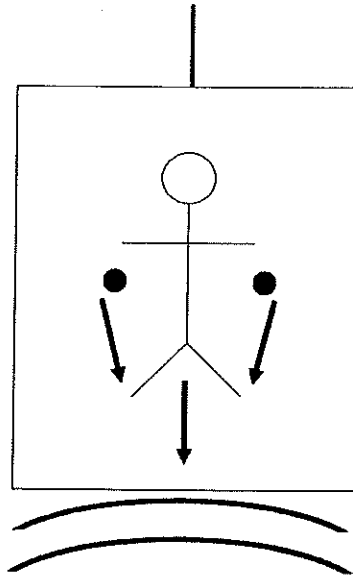


FIGURA 7.- El experimentador y las piedras en un campo gravitacional no uniforme, las piedras se acercaran una o otra mientras caen al fondo del elevador.

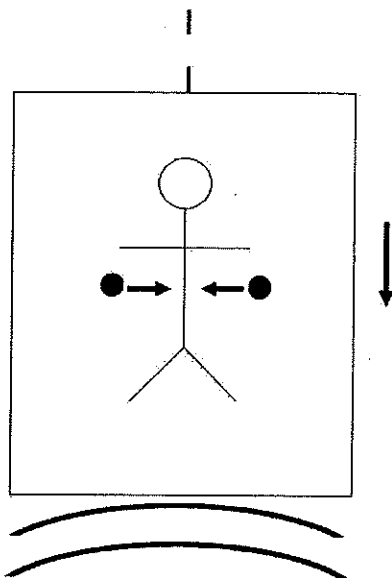
### 2.3 Geodésicas

Podemos aprender los efectos de la gravitación transformando las leyes de la física (las ecuaciones de movimiento) de un sistema inercial de coordenadas cartesianas a otro sistema de coordenadas (acelerado, curvilíneo). Veamos lo anterior para el movimiento de una partícula libre masiva, descrita en un sistema de coordenadas inercial  $x^a$  por

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x'^a(\tau) = 0, \quad (17)$$

donde  $\tau$  es el tiempo propio, y está definido de la siguiente manera

$$d^2\tau = \eta_{a'b'} dx'^a dx'^b. \quad (18)$$



**FIGURA 8.**- El experimentador y las piedras caiendo en un campo gravitacional no uniforme. El experimentador flota junto con las piedras las cuales se acercan entre si, indicando la presencia del alguna fuerza.

Primero, el tiempo propio no puede depender de las coordenadas utilizadas para describir el movimiento de la partícula, entonces

$$d^2\tau = \eta_{a'b'} dx'^a dx'^b \quad (19)$$

$$= \eta_{ab} \frac{\partial x'^a}{\partial x^a} \frac{\partial x'^b}{\partial x^b} dx^a dx^b. \quad (20)$$

Podemos notar que en las nuevas coordenadas, el tiempo propio y la distancia ya no son medidas por la métrica de Minkowski, sino por

$$d^2\tau = g_{ab} dx^a dx^b, \quad (21)$$

donde el el tensor métrico lo definimos como

$$g_{ab} = \eta_{ab} \frac{\partial x'^a}{\partial x^a} \frac{\partial x'^b}{\partial x^b}. \quad (22)$$

Como la expresión (21) está en términos de un sistema de coordenadas cualquiera podemos prescindir de las primas ya que los índices son mudos.

Volviendo a la ecuación de movimiento, sabemos que por la regla de la cadena podemos escribir

$$\frac{d}{d\tau} x'^a(\tau) = \frac{\partial x'^a}{\partial x^a} \frac{dx^a}{d\tau}, \quad (23)$$

donde  $\partial x'^a / \partial x^a$  es una matriz invertible en cada punto. Derivando una vez más encontramos

$$\frac{d^2}{d\tau^2} x'^a(\tau) = \frac{\partial x'^a}{\partial x^a} \frac{d^2 x^a}{d^2 \tau} + \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^b \partial x^c} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} \quad (24)$$

$$= \frac{\partial x'^a}{\partial x^a} \left[ \frac{d^2 x^a}{d^2 \tau} + \frac{\partial x^a}{\partial x'^a} \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^b \partial x^c} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} \right]. \quad (25)$$

Ya que la matriz que aparece afuera de los párentesis cuadrados es invertible, en términos de las coordenadas  $x^a$ , la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{d^2 x^a}{d^2 \tau} + \frac{\partial x^a}{\partial x'^a} \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^b \partial x^c} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0. \quad (26)$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación geodésica. Podemos reescribir la ecuación anterior de manera más compacta

$$\frac{d^2 x^a}{d^2 \tau} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0, \quad (27)$$

donde

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{\partial x^a}{\partial x'^a} \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^b \partial x^c}, \quad (28)$$

a  $\Gamma_{bc}^a$  se le conoce como símbolos de Christoffel. De la ecuación de la geodésica vemos que los símbolos de Christoffel pueden ser expresados en términos del tensor métrico y sus primeras derivadas

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}) \quad (29)$$

aquí  $g^{ad}$  es la métrica inversa, esto es,  $g^{ad}g_{db} = \delta_b^a$ .

En base a esto uno puede reconocer que la métrica juega el papel similar al del potencial gravitacional. Dada una métrica se pueden calcular los símbolos de Christoffel sin tener que determinar en que sistema coordenado se está. Esto identifica al tensor métrico como una variable dinámica fundamental en la gravitación.

## 2.4 La Métrica y Transformación de Coordenadas

En la sección anterior vimos que el movimiento de una partícula libre en el espacio de Minkowski, en coordenadas curvilíneas, es descrito en términos de una métrica modificada,  $g_{ab}$ , y un término de fuerza  $\Gamma_{bc}^a$  representando una "pseudo fuerza" sobre la partícula. Del principio de equivalencia de Einstein se sigue que una descripción apropiada de un campo gravitacional real debe ser en términos del tensor métrico  $g_{ab}(x)$  (y sus símbolos de Christoffel asociados) y sólo se puede relacionar localmente con la métrica de Minkowski mediante una transformación de coordenadas. Entonces nuestro punto de partida es equipar el espacio-tiempo con una métrica  $g_{ab}(x)$ .

A un espacio-tiempo equipado con un tensor métrico  $g_{ab}$  se le llama espacio-tiempo métrico. La métrica tiene la información de como medir distancias mediante

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b. \quad (30)$$

Tales distancias no deben depender del sistema de coordenadas que se está usando. Por lo tanto, cambiando de las coordenadas  $x^a$  a las coordenadas  $x'^a(x^a)$  y exigiendo que

$$g_{ab}dx^a dx^b = g_{a'b'}dx'^a dx'^b, \quad (31)$$

encontramos que bajo una transformación de coordenadas la métrica se transforma de acuerdo a

$$g_{a'b'} = g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial x'^a} \frac{\partial x^b}{\partial x'^b}. \quad (32)$$

Objetos que se transforman de esta manera bajo una transformación de coordenadas se le conoce como tensores.

Un punto que podemos notar acerca del comportamiento de esta transformación es que si el tensor métrico tiene un eigenvalor positivo y tres negativos, entonces esto será cierto para cualquier sistema de coordenadas (en general los eigenvalores serán diferentes).

## 2.5 Símbolos de Christoffel, Geodésicas y Transformación de Coordenadas

Sabiendo como se transforma la métrica bajo una transformación de coordenadas, podemos determinar como se transforman los símbolos de Christoffel. Un cálculo directo nos da

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{\partial^2 x^a}{\partial x^d \partial x^b \partial x^c} \Gamma_{ef}^d + \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial^2 x^d}{\partial x'^b \partial x'^c}. \quad (33)$$

Así,  $\Gamma_{bc}^a$  no es un tensor. Un cálculo no tan tedioso nos da

$$\frac{d^2 y'^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dy'^b}{d\tau} \frac{dy'^c}{d\tau} = \frac{\partial y'^a}{\partial x^a} \left[ \frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} \right]. \quad (34)$$

Sabemos que haciendo una transformación de un sistema inercial de coordenadas  $x^a$  a uno  $x'^a$ , obtenemos (25). De igual manera, transformando de  $x^a$  a uno  $y'^a$ , encontraremos (25) con la  $x$ 's reemplazadas por las  $y$ 's. Igualando estas dos expresiones llegamos a (34) notando que

$$\frac{\partial y'^a}{\partial x^a} = \frac{\partial y'^a}{\partial x'^a} \frac{\partial x'^a}{\partial x^a}. \quad (35)$$

En cualquier caso, mientras  $\partial y^a / \partial x^a$  sea una matriz invertible, podemos ver que la ecuación de la geodésica es válida en un sistema de coordenadas  $(y)$ , si y solo si es válida en otro sistema de coordenadas  $(x)$ .

## 2.6 El Método Variacional para Geodésicas

Haciendo una transformación de coordenadas arbitrarias, para la ecuación de un recta, obtuvimos la ecuación para la geodésica. Es de esperarse que, en general, una geodésica extremize el tiempo propio o (distancia propia) entre dos puntos en el espacio-tiempo. La acción es simplemente

$$S = \int_{P_1}^{P_2} d\tau, \quad (36)$$

con

$$d\tau^2 = g_{ab} dx^a dx^b. \quad (37)$$

En orden de hacer la variación, es útil introducir un parámetro auxiliar  $s$  de modo que

$$d\tau^2 = \left( g_{ab} \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds} \right)^{1/2} ds, \quad (38)$$

entonces

$$\int d\tau = \int (d\tau/ds) ds = \int \left( g_{ab} \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds} \right)^{1/2} ds. \quad (39)$$

Donde estamos variando las trayectorias

$$x^a(\tau) \rightarrow x^a(\tau) + \delta x^a(\tau) \quad (40)$$

dejando los extremos fijos, y denotaremos las derivadas de  $\tau$  por  $\dot{x}^a(\tau)$ . Haciendo la variación

encontramos que

$$\delta \int d\tau = \frac{1}{2} \int \left( g_{ab} \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds} \right)^{-1/2} ds \left[ \delta g_{ab} \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds} + 2g_{ab} \delta \frac{dx^a}{ds} \frac{dx^b}{ds} \right] \quad (41)$$

$$= \frac{1}{2} \int \left[ \frac{d}{ds} (2g_{ab} \dot{x}^b) - \partial_a (g_{bc}) \dot{x}^b \dot{x}^c \right] \delta x^a \quad (42)$$

$$= \int 2g_{ab} \ddot{x}^b + 2\dot{x}^b \dot{x}^c \left[ \frac{1}{2} (\partial_c g_{ba} + \partial_b g_{ca} - \partial_a g_{bc}) \right] \delta x^a \quad (43)$$

$$= \int d\tau g_{ab} \left[ \ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \right] \delta x^a. \quad (44)$$

El factor de 2 en la primera igualdad es debido a la simetría de la métrica, la segunda igualdad se sigue de la integración por partes y la tercera renombramos los índices y usando la simetría de los índices  $\dot{x}^b \dot{x}^c$ , y el resultado sale de poner los símbolos de Christoffel en términos de la métrica.

## 2.7 El Límite Newtoniano

Vimos que la métrica  $g_{ab}$  juega el papel de potencial para la fuerza gravitacional. Queremos encontrar la relación de estos potenciales con los de Newton. Para esto consideremos una partícula moviéndose lentamente en un campo gravitacional débil y estacionario.

Dividimos las coordenadas de la siguiente manera  $x^a = (t, x^i)$ . Usando el hecho de que  $dx^i/d\tau \ll dt/d\tau$  (lento),  $g_{ab,0} = 0$  (estacionario),  $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ ,  $|h_{ab}| \ll 1$  (débil), la ecuación de la geodésica se reduce a

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} h_{00,i}. \quad (45)$$

La condición de movimiento lento implica que la ecuación de la geodésica se puede ser aproximadamente

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{00}^a \dot{t}^2 = 0. \quad (46)$$

El hecho de que sea estacionaria nos dice que

$$\Gamma_{00}^a = -\frac{1}{2} g^{ab} \partial_b g_{00} = -\frac{1}{2} g^{ai} \partial_i g_{00}. \quad (47)$$

De la condición de campo débil obtenemos

$$\Gamma_{00}^a = -\frac{1}{2}\eta^{ai}\partial_b h_{00}, \quad (48)$$

por lo que

$$\Gamma_{00}^a = 0, \quad \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}\partial_i h_{00}. \quad (49)$$

Entonces la ecuación de la geodésica se divide en

$$\dot{t} = 0 \quad (50)$$

$$\ddot{x}^i = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}. \quad (51)$$

La primera de estas ecuaciones sólo nos dice que  $t$  es constante, podemos usar esto en la segunda ecuación para convertir las derivadas respecto de  $\tau$  en derivadas respecto de la coordenada temporal  $t$ . Por lo tanto obtenemos (45). Comparando la ecuación anterior con

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\phi_{,i}, \quad (52)$$

donde  $\phi$  es el potencial Newtoniano, esto es,

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad (53)$$

lo cual nos conduce a  $h_{00} = -2\phi$  (la constante de integración se fija, exigiendo que la métrica sea la métrica plana en el infinito) ó

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \quad (54)$$

Poniendo las unidades apropiadas (un factor de  $c^2$ ), encontramos que  $\phi \sim 10^{-9}$  en la superficie de la Tierra,  $10^{-6}$  en la superficie del Sol, por lo que la distorsión de la geometría del espacio-tiempo producida por la gravedad es realmente pequeña (lo que justifica las aproximaciones).

## 2.8 Principio de Covariancia General

Ya vimos que el principio de equivalencia de Einstein establece que las leyes de la física deben de ser tales que, en un marco inercial se reducen a las leyes de la RE. Esto lo podemos implementar transformando las leyes de la RE a un sistema arbitrario de coordenadas y declarando que éstas son válidas para cualquier sistema de coordenadas.

Reemplazaremos el principio de equivalencia de Einstein por el principio de covariancia general:

Una ecuación es válida en un campo gravitacional arbitrario si

- 1) La ecuación es válida en ausencia de gravedad, esto es,  $g_{ab} = \eta_{ab} = \Gamma_{bc}^a = 0$  y
- 2) La ecuación es generalmente covariante, es decir, preserva su forma bajo una transformación general de coordenadas.

## 2.9 Ecuaciones de Campo de Einstein

### 2.9.1 Forma Eurística

Para tener una idea de como serían las ecuaciones de campo de Einstein, empezamos con una analogía, una comparación entre las ecuaciones de desviación (geodésicas) en la teoría Newtoniana y en la Relatividad General.

Recordemos que en la teoría de Newton teníamos que

$$\frac{d^2 \delta x^i}{dt^2} = -K_j^i \delta x^j \quad (55)$$

$$K_j^i = \partial^i \partial_j \phi(x), \quad (56)$$

mientras que en la Relatividad General teníamos

$$\frac{D}{D\tau}\delta x^a = K_b^a \delta x^b \quad (57)$$

$$K_b^a = R_{bcd}^a \dot{x}^b \dot{x}^c. \quad (58)$$

La ecuación de campo de Newton es

$$\text{Tr}K = \Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (59)$$

donde  $\Delta = \nabla^2$ . Mientras que en la Relatividad General tenemos

$$\text{Tr}K = R_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b. \quad (60)$$

Esto sugiere de alguna forma que en las ecuaciones de campo de la Relatividad General,  $\Delta\phi$  debería ser reemplazado por el tensor de Ricci  $R_{ab}$ .

Podemos notar, al menos aproximadamente, que la estructura tensorial de esta identificación es compatible con la relación entre  $\phi$  y  $g_{00}$  en el límite Newtoniano, entre la relación  $\rho$  y la componente 0-0 del tensor energía momento ( $T_{00}$ ), y el hecho de que para velocidades pequeñas  $R_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b \sim R_{00}$ .

Ciertamente, recordemos que el campo estático débil producido por una densidad de masa no relativista es

$$g_{00} = -(1 + 2\phi). \quad (61)$$

Además, para materia no relativista tenemos

$$T_{00} = \rho, \quad (62)$$

así, podemos escribir las ecuaciones de campo de Newton como

$$\Delta g_{00} = -8\pi G T_{00}. \quad (63)$$

Lo anterior sugiere que las ecuaciones de campo débil para un tensor de energía momento general puede tomar la forma

$$E_{ab} = -8\pi GT_{ab}, \quad (64)$$

donde  $E_{ab}$  es construido de la métrica, de sus primeras y segundas derivadas. Pero por el principio de equivalencia de Einstein, si ésta ecuación es válida para campos débiles, entonces las ecuaciones que gobiernan los campos gravitacionales de intensidad arbitraria también deben ser de esta forma, con  $E_{ab}$  un tensor construido de la métrica, sus primeras y segundas derivadas.

### 2.9.2 Un Enfoque más Sistemático

Veamos que es lo que sabemos acerca de  $E_{ab}$

1.  $E_{ab}$  es un tensor
2.  $E_{ab}$  tiene las dimensiones de una segunda derivada.
3.  $E_{ab}$  es simétrico ya que  $T_{ab}$  lo es.
4. Debido a que  $T_{ab}$  es una cantidad covariante que se conserva, se tiene que cumplir lo

mismo para  $E_{ab}$ ,

$$\nabla_a T^{ab} = 0 \Rightarrow \nabla_a E^{ab} = 0. \quad (65)$$

5. Finalmente, para un campo débil estacionario y materia no relativista encontramos

$$E_{00} = \Delta g_{00}. \quad (66)$$

Resulta que estas condiciones (1)-(5) determinan a  $E_{ab}$  de forma única. Primeramente, (1)

y (2) nos dicen que  $E_{ab}$  tiene que ser una combinación lineal

$$E_{ab} = aR_{ab} + bg_{ab}R, \quad (67)$$

donde  $R_{ab}$  es el tensor de Ricci y  $R$  es el escalar de curvatura. Con lo anterior la condición (3) se satisface automáticamente.

Para implementar (4), hacemos uso de (255) y de (256) y nos queda

$$2\nabla^a R_{ab} = \nabla_b R. \quad (68)$$

Por lo tanto

$$\nabla^a E_{ab} = \left(\frac{a}{2} + b\right) \nabla_b R. \quad (69)$$

Por lo tanto requerimos ó que  $\nabla_b R = 0$  ó que  $a = -2b$ . La primera posibilidad se descarta (no es consistente), esto lo podemos ver calculando la traza de (64)

$$E_a^a = (a + 4b)R = -8\pi GT_a^a. \quad (70)$$

De este modo  $R$  es proporcional a  $T_a^a$ , y ya que la cantidad no necesariamente tiene que ser constante para una configuración arbitraria de materia, la conclusión a la que se llega es  $a = -2b$ . Así, encontramos que

$$E_{ab} = a\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\right) = aG_{ab}, \quad (71)$$

donde  $G_{ab}$  es el tensor de Einstein. Ahora podemos usar la condición (5) para determinar la constante  $a$ .

De las consideraciones hechas anteriormente, hemos determinado que las que las ecuaciones de campo deben de ser de la forma

$$aG_{ab} = -8\pi GT_{ab}, \quad (72)$$

donde  $a$  es una constante aún por determinar. Si consideramos el límite de campo débil de esta ecuación. Lo que necesitamos encontrar es que  $G_{00}$  sea proporcional a  $\Delta g_{00}$ , y usando la condición (5) podemos fijar el valor de  $a$ . Las manipulaciones que haremos son análogas a las que hicimos en el caso Newtoniano, la principal diferencia es que ahora estamos lidiando con segundas derivadas de la métrica en lugar de las primeras derivadas (que entran en la ecuación geodésica).

Para un sistema no relativista tenemos que  $|T_{ij}| \ll T_{00}$  y por lo tanto  $|G_{ij}| \ll G_{00}$ . Entonces concluimos que

$$|T_{ij}| \ll T_{00} \Rightarrow R_{ij} \sim \frac{1}{2}g_{ij}R. \quad (73)$$

Para un campo débil tenemos que  $g_{ab} \sim \eta_{ab}$  y en particular,

$$R \sim \eta^{ab}R_{ab} = R_k^k - R_{00}, \quad (74)$$

que junto con (73), se transforma en

$$R \sim \frac{3}{2}R - R_{00}, \quad (75)$$

ó

$$R \sim 2R_{00}. \quad (76)$$

En el límite de campo débil,  $R_{00}$  está dado por

$$R_{00} = R_{0k0}^k = \eta^{ik}R_{i0k0}. \quad (77)$$

Además, en este límite sólo la parte lineal (segundas derivadas) de  $R_{abcd}$  va a contribuir, y no los términos en las primeras derivadas. De este modo podemos usar la expresión (245) (notando que sólo contribuyen los dos primeros términos, ya que las  $\Gamma$ 's son cero), además,

en el caso estático podemos ignorar todas las derivadas respecto al tiempo, por lo que nos queda que

$$R_{i0k0} = -\frac{1}{2}g_{00,ik}, \quad (78)$$

por lo tanto

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\Delta g_{00}. \quad (79)$$

Así, poniendo todo junto, obtenemos

$$E_{00} = aG_{00} = a\left(R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R\right) \quad (80)$$

$$= a\left(R_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}R\right) \quad (81)$$

$$= a\left(R_{00} - \frac{1}{2}R\right) \quad (82)$$

$$= a(R_{00} + R_{00}) \quad (83)$$

$$= a(\Delta g_{00}). \quad (84)$$

Con la forma funcional correcta de  $E_{00}$  y comparándola con la condición (5) podemos determinar que  $a = -1$  y por lo tanto  $E_{ab} = -G_{ab}$ .

Finalmente tenemos las ecuaciones de campo de Einstein para una campo gravitacional con una configuración de materia-energía descrita por el tensor de energía-momento  $T_{ab}$

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi GT_{ab}. \quad (85)$$

Otra manera usual de escribir las ecuaciones de Einstein es calculando la traza de (85), lo que nos da

$$R - 2R = 8\pi GT_a^a, \quad (86)$$

sustituyendo en (85) obtenemos

$$R_{ab} = 8\pi G(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T_c^c). \quad (87)$$

En particular, en el vacío  $T_{ab} = 0$ , por lo que las ecuaciones de Einstein son

$$R_{ab} = 0. \quad (88)$$

Una métrica del espacio-tiempo que satisface esta ecuación se dice que es Ricci-plana. No debemos dejarnos impresionar por la simpleza de (88), debido a que en vacío las ecuaciones de Einstein constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, cuya solución requiere del planteamiento de varias suposiciones acerca de la simetría de la métrica lo que permite que las ecuaciones se simplifiquen y podamos llegar a una solución analítica.

## Capítulo 3

### AGUJEROS NEGROS

#### 3.1 Solución de Schwarzschild

Ahora resolveremos las ecuaciones de Einstein en el vacío (D’Inverno, 1992), en el caso más simple: el caso con simetría esférica. Debido a que el objeto de nuestro interés es la métrica, estamos interesados en métricas que tengan dichas simetrías. Intuitivamente, esféricamente simétrico significa que existe un punto privilegiado llamado origen  $O$ , tal que el sistema es invariante ante rotaciones espaciales respecto a  $O$ . Entonces, si fijamos el tiempo y consideramos un punto  $P$  a una distancia  $a$  de  $O$ , las rotaciones espaciales en  $P$  nos darán una 2-esfera centrada en  $O$ . Podemos entonces introducir una coordenada axial  $\phi$  y una coordenada azimutal  $\theta$  sobre la esfera de la manera usual. Trazando una línea perpendicular de  $P$  al plano ecuatorial ( $z = 0$ ) en  $Q$ , entonces  $\phi$  es el ángulo que hace  $OQ$  con el eje positivo  $x$  y  $\theta$  es el ángulo de  $OP$  con el eje positivo  $z$ . Todos los puntos en la 2-esfera serán cubiertos por los rangos coordenados

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi < \phi \leq \pi. \quad (89)$$

Aún más, el elemento de línea de una 2-esfera es

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (90)$$

Es entonces natural asumir que en cuatro dimensiones podemos aumentar  $\theta$  y  $\phi$  con una coordenada tipo-tiempo  $t$  y algún parámetro tipo radial  $r$ , con lo que el elemento de línea se reduce a la forma anterior sobre una 2-esfera con  $t = cte$  y  $r = cte$ . La simetría esférica requiere que el elemento de línea no varíe cuando  $\theta$  y  $\phi$  lo hacen, por lo que  $\theta$  y  $\phi$  sólo aparecen en el elemento de línea en la forma  $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ . Podemos notar que la métrica no puede tener términos cruzados por que debe de ser invariante bajo las reflexiones  $\theta \rightarrow \theta' = \pi - \theta$ , y  $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$ . Nuestro ansatz, es entonces, que existe un sistema de coordenadas

$$(x^a) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi), \quad (91)$$

en el cual el elemento de línea tiene la forma

$$ds^2 = A dt^2 - 2B dt dr - C dr^2 - D(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (92)$$

donde  $A, B, C$  y  $D$  son funciones aún no determinadas de  $t$  y  $r$ , es decir

$$A = A(t, r), \quad B = B(t, r), \quad C = C(t, r), \quad D = D(t, r). \quad (93)$$

Si introducimos una nueva coordenada radial, que tiene la siguiente transformación

$$r \rightarrow r' = D^{\frac{1}{2}}, \quad (94)$$

entonces, el elemento de línea se convierte en

$$ds^2 = A'(t, r') dt^2 - 2B'(t, r') dt dr' - C'(t, r') dr'^2 - D'(t, r')(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (95)$$

Consideremos la diferencial

$$A'(t, r') dt - B'(t, r') dr'. \quad (96)$$

Usando la teoría de las ecuaciones diferenciales, sabemos que podemos multiplicar a esta ecuación por un factor integrante, digamos  $I = I(t, r')$ , con lo cual se convierte en una diferencial exacta. Usando este resultado para definir una nueva coordenada temporal  $t'$  requiriendo que

$$dt' = I(t, r') [A'(t, r')dt - B'(t, r')dr'] . \quad (97)$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$dt'^2 = I^2(A'^2 dt^2 - 2A'B'dtdr' + B'^2 dr'^2), \quad (98)$$

entonces

$$A'dt - 2B'dtdr' = A'^{-1}I^{-2}dt'^2 - A'^{-1}B'^2 dr'^2, \quad (99)$$

y el elemento de línea se convierte en

$$ds^2 = A'^{-1}I^{-2}dt'^2 - (C' - A'^{-1}B'^2) dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2). \quad (100)$$

Definiendo dos nuevas variables  $\nu$  y  $\lambda$  como

$$A'^{-1}I^{-2} = e^\nu \quad (101)$$

y

$$C' - A'^{-1}B'^2 = e^\lambda, \quad (102)$$

y quitando las primadas, finalmente obtenemos la forma

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2), \quad (103)$$

donde

$$\nu = \nu(t, r), \quad \lambda = \lambda(t, r). \quad (104)$$

### 3.2 La Solución de Schwarzschild

Para determinar las funciones desconocidas  $\nu$  y  $\lambda$ , usamos las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. La métrica covariante es

$$g_{ab} = \text{diag} \left( e^\nu, -e^\lambda, -r^2, -r^2 \sin^2 \right) \quad (105)$$

como la métrica es diagonal, su forma contravariante es

$$g^{ab} = \text{diag} \left( e^{-\nu}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2} \right). \quad (106)$$

Si denotamos las derivadas de  $t$  y  $r$  por un punto y una prima respectivamente, entonces, las componentes diferentes de cero del tensor mixto de Einstein son

$$G_0^0 = e^{-\lambda} \left( \frac{\dot{\lambda}}{r} - \frac{1}{r^2} \right), \quad (107)$$

$$G_0^1 = -e^{-\lambda} r^{-1} \dot{\lambda} = -e^{\lambda-\nu} G_1^0, \quad (108)$$

$$G_1^1 = -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right), \quad (109)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left( \frac{\nu' \lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left( -\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right). \quad (110)$$

Las contracciones de Bianchi revelan que la última ecuación es cero si las primeras tres son cero. Por lo tanto hay tres ecuaciones independientes a resolver,

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (111)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (112)$$

$$(113)$$

$$\dot{\lambda} = 0. \quad (114)$$

Sumando las dos primeras, obtenemos

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad (115)$$

integrando nos queda

$$\lambda + \nu = h(t), \quad (116)$$

donde  $h$  es una función arbitraria de integración. Aquí,  $\lambda$  es una función sólo de  $r$  por (114), y entonces (111) es una simple ecuación diferencial ordinaria, que escribimos como

$$e^{-\lambda} - re^{-\lambda}\lambda' = 1 \quad (117)$$

ó equivalentemente

$$(re^{-\lambda})' = 1, \quad (118)$$

integrando obtenemos

$$re^{-\lambda} = r + cte. \quad (119)$$

Escogiendo que la constante de integración sea  $-2m$ , obtenemos

$$e^{\lambda} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (120)$$

En este punto, la métrica se ha reducido a

$$g_{ab} = \text{diag} \left[ e^{h(t)} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right]. \quad (121)$$

Lo último que tenemos que hacer es eliminar  $h(t)$ . Esto lo hacemos haciendo una transformación de coordenada temporal  $t'$ , esto es,  $t \rightarrow t'$ , donde  $t'$  se determina por la relación

$$t' = \int_c^t e^{\frac{1}{2}h(u)} du, \quad (122)$$

donde  $c$  es una constante arbitraria. La única componente de la métrica que cambia es

$$g'_{00} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (123)$$

Omitiendo las primas, hemos mostrado que siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas en el cual la solución esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo en el vacío es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (124)$$

Este es el elemento de línea de Schwarzschild. Podemos notar en el límite  $m \rightarrow 0$  recuperamos el espacio de Minkowski, lo que se debería de esperar. También notamos que la métrica se vuelve progresivamente Minkowskiana si  $r \rightarrow \infty$ . El hecho de que la métrica de Schwarzschild no sea sólo una buena solución, sino la única solución esféricamente simétrica en el vacío, se le conoce como el Teorema de Birkhoff. Es interesante hacer notar, que el resultado es una métrica estática, sin decir nada acerca de la fuente, sólo fue necesario considerar la simetría esférica. Específicamente, no demandamos que la fuente fuera estática; podría ser una estrella colapsándose, siempre y cuando el colapso fuere simétrico. Por lo tanto, un proceso como la explosión de una supernova, que es básicamente esférica, esperaríamos que no generará mucha radiación gravitacional (en comparación con la cantidad energía expulsada por otros medios). Podemos resumir las propiedades de la métrica de Schwarzschild de la siguiente forma

- 1) es esféricamente simétrica;
- 2) es estacionaria;
- 3) es estática  $\Leftrightarrow$  es simétrica en el tiempo e invariante bajo traslaciones temporales;

- 4) es asintóticamente plana;
- 5) tiene masa geométrica  $m = GMc^2$ .

### 3.3 Física de Agujeros Negros

#### 3.3.1 Singularidades

Un problema asociado a las coordenadas, es el hecho de que en general un sistema de coordenadas sólo cubre una porción del espacio. Por ejemplo las coordenadas de Schwarzschild no cubren los ejes  $\theta = (0, \pi)$ , por que el elemento de línea se vuelve degenerado ahí y la métrica deja de ser de rango 4. Esta degeneración se puede remover introduciendo coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , donde

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (125)$$

A estos puntos se les conoce como singularidades de coordenadas, por lo que reflejan deficiencias en el sistema de coordenadas que se está usando y por lo tanto se pueden remover. Hay otros valores de las coordenadas para los cuales, la solución de Schwarzschild es degenerada, es decir, para  $r = 2m$  y  $r = 0$ . A el valor de  $r = 2m$  se le conoce como el radio de Schwarzschild. Dijimos que  $r = 2m$  es una singularidad removible, esto se puede ver mediante la construcción de un escalar de Riemann (el invariante de Kretschmann)

$$R_{abcd}R^{abcd} = 48m^2r^{-6}, \quad (126)$$

el cual es finito en  $r = 2m$ . Ya que es un escalar, su valor es el mismo en cualquier sistema. Por otro lado, en  $r = 0$  este invariante se indetermina. La singularidad en el

origen es irremovible y se le conoce como singularidad real, intrínseca, de curvatura, física o esencial.

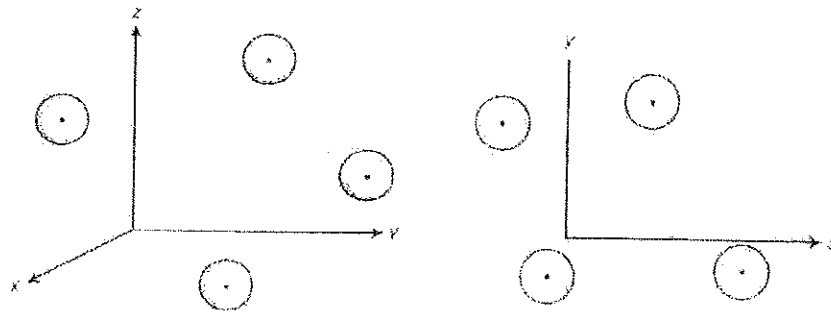
### 3.4 Diagramas de Espacio y de Espacio-Tiempo

La técnica que usaremos para interpretar la solución, es la de investigar la estructura local del cono de luz futuro. Un cono de luz local se define como el lugar geométrico de los puntos  $x^a + dx^a$ , en la vecindad de  $x^a$ , para el cual

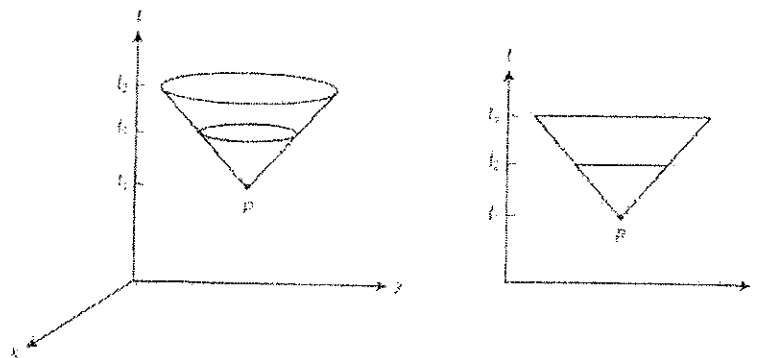
$$g_{ab}dx^a dx^b = 0.$$

La estructura del cono de luz pone restricciones en las posibles historias de un observador, ya que un observador que se mueve en una línea de mundo tipo-tiempo, cuya dirección en cualquier punto está sobre el cono de luz futuro en ese punto. En un diagrama puramente espacial, nos interesaremos en varios puntos del espacio, sobre dos intervalos de tiempo sucesivos, digamos  $t_1$  y  $t_2$ . Al tiempo  $t_1$  se emite un pulso de luz en cada punto, el diagrama espacial nos dice donde se encuentran los frentes de onda de los pulsos de luz al tiempo  $t_2$ . La luz emitida de cada punto, formará un frente de onda esférico centrado en el punto. Si hay simetrías presentes, es suficiente en considerar que pasa si suprimimos una dimensión espacial, en este caso en lugar de esferas tendríamos círculos (ver Figura 7). Ahora, en un diagrama de espacio-tiempo, lo que nos interesan son las historias de los pulsos de luz. Supongamos que tomamos fotos de los frentes de onda en un punto  $P$  a los instantes  $t_1, t_2, t_3$ , etc. La idea de un diagrama de espacio-tiempo, es comparar estas fotos en el tiempo. Ya que esto involucra una foto cuatro-dimensional, suprimimos una coordenada espacial y dibujamos el eje temporal verticalmente. Para ser específicos tomemos  $z = 0$ ,

por lo que los frentes de onda serán ahora círculos, que estarán en el cono de luz futuro y pasarán a través de  $P$  (ver figura 8).



**FIGURA 9.-** La primera figura (izquierda) es un diagrama espacial del espacio-tiempo de Minkowski, la segunda (derecha) es un diagrama de espacial, con una dimensión suprimida



**FIGURA 10.-** En figura de la izquierda se muestra un diagrama de espacio-tiempo con una dimensión suprimida, en la figura de la derecha se muestra el diagrama espacio-tiempo con dos dimensiones suprimidas.

### 3.5 Diagramas de Espacio-Tiempo en Coordenadas de Schwarzschild

Primero consideremos la clase de geodésicas nulas radiales definidas, requiriendo que

$$ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0.$$

Usando el principio variacional, tenemos que

$$\begin{aligned} 2K \equiv g_{ab}dx^a dx^b &= \alpha \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0, \end{aligned} \quad (127)$$

donde el punto denota derivada con respecto a un parámetro  $u$ , a lo largo de una geodésica nula. De la ecuación anterior recordamos que si  $u$  es un parámetro afín, entonces la forma útil para una geodésica es

$$\frac{\partial K}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0.$$

La ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a  $a = 0$  es

$$\frac{d}{du} \left[ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0,$$

que integrando nos da

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (128)$$

donde  $k$  es una constante. Que sustituyendo en (127) encontramos

$$\dot{r}^2 = k^2$$

o

$$\dot{r} = \pm k, \quad (129)$$

de donde se sigue que  $r$  es un parámetro afín. En lugar de buscar la ecuaciones para métricas de estas curvas, busquemos directamente la ecuación en la forma  $t = t(r)$ . Entonces

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/du}{dr/du} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}},$$

que se puede encontrar de (128) y de (129). Tomando la parte positiva de (129), obtenemos

$$\frac{dt}{dr} = \frac{r}{r - 2m}, \quad (130)$$

que, integrando nos da

$$t = r + 2m \ln|r - 2m| + cte. \quad (131)$$

En la región I, por (130),

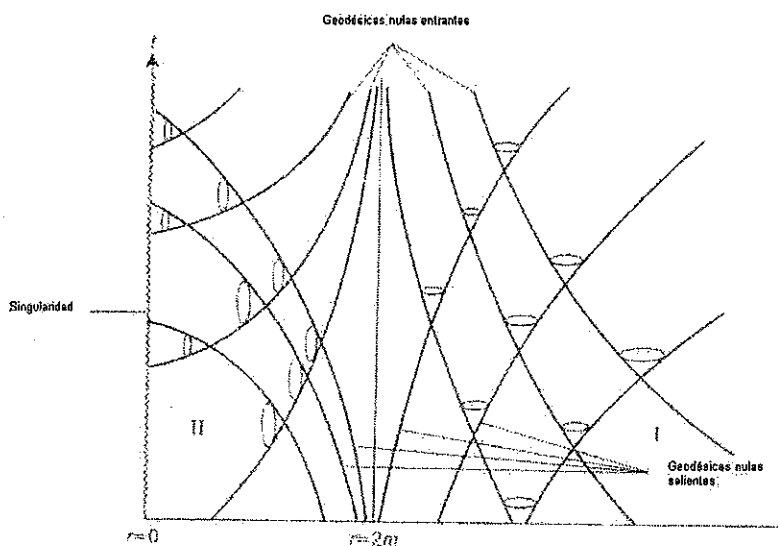
$$r > 2m \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} > 0,$$

por lo que  $r$  crece si  $t$  crece. Similarmente, con signo negativo nos da las geodésicas nulas radiales salientes

$$t = -(r + 2m \ln|r - 2m| + cte). \quad (132)$$

Notamos que, bajo la transformación de  $t \rightarrow -t$ , las geodésicas entrantes y salientes se intercambian, como es de esperarse. Ahora, podemos usar estas congruencias para dibujar el diagrama de espacio-tiempo de la solución de Schwarzschild en las coordenadas de Schwarzschild con dos dimensiones suprimidas.

El diagrama de espacio-tiempo se dibuja para una  $\theta$  y una  $\phi$  fija. Como el diagrama de espacio-tiempo es el mismo para  $\theta$  y  $\phi$ , podemos pensar a cada punto  $(t, r)$  diagrama como una 2-esfera de área  $4\pi r^2$ . Notamos que, mientras,  $r \rightarrow \infty$ , las geodésica nulas hacen un ángulo de  $45^\circ$  con los ejes coordenados tal como en el espacio plano en unidades relativistas,



**FIGURA 11.-** Solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild, con dos dimensiones suprimidas.

lo que es de esperarse ya que la solución es asintóticamente plana. Los conos de luz locales se inclinan en la región II ( $0 < r < 2\pi$ ), ya que  $t$  y  $r$  invierten su carácter. Por ejemplo, la línea  $t = cte$  es una línea tipo-tiempo en la región II por lo que debe de estar sobre el cono de luz local. Un observador en la región II no puede quedarse en reposo, esto es, a un valor constante de  $r$ , pero es forzado a moverse hacia la singularidad intrínseca en  $r = 0$ . Este diagrama sugiere que un observador en la región I, moviéndose desde el origen le tomaría un tiempo infinito para alcanzar el radio de Schwarzschild,  $r = 2m$ . De igual manera se sugiere lo mismo para un rayo de luz entrante.

### 3.6 Una Partícula que cae Radialmente

Consideremos la trayectoria de una partícula entrante. La partícula se moverá sobre una geodésica tipo-tiempo, dada por las ecuaciones

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k, \quad (133)$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 1, \quad (134)$$

donde el punto denota diferenciación respecto a  $\tau$ , el tiempo propio a lo largo de la línea de mundo de la partícula. Diferentes opciones de la constante  $k$ , corresponden a diferentes condiciones iniciales. Escogamos  $k = 1$  que corresponde a una partícula soltada en el infinito con velocidad inicial cero, por lo que, para  $r$  muy grande, tenemos que  $\dot{t} \simeq 1$ , esto es, asintóticamente  $t \simeq \tau$ . Entonces (133) y (134) nos dan

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{r}{2m}.$$

Tomando la raíz negativa e integrando encontramos que

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3(2m)^{\frac{1}{2}}} \left(r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}}\right), \quad (135)$$

donde la partícula está en  $r_0$  a un tiempo propio  $\tau_0$ . El resultado anterior resulta sorprendente, ya que coincide con el caso clásico. No ocurre un comportamiento singular en el radio de Schwarzschild, y la partícula cae continuamente hasta  $r = 0$  en un tiempo propio finito. Si en lugar de esto, describimos el movimiento en términos de las coordenadas de Schwarzschild  $t$ , entonces

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = - \left(\frac{r}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \quad (136)$$

Integrado obtenemos

$$t - t_0 = -\frac{2}{3(2m)^{\frac{1}{2}}} \left( r_0^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{3}{2}} + 6mr^{\frac{1}{2}} - 6mr_0^{\frac{1}{2}} \right) + 2m \ln \frac{\left[ r^{\frac{1}{2}} + (2m)^{\frac{1}{2}} \right] \left[ r_0^{\frac{1}{2}} - (2m)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left[ r_0^{\frac{1}{2}} + (2m)^{\frac{1}{2}} \right] \left[ r^{\frac{1}{2}} - (2m)^{\frac{1}{2}} \right]} \quad (137)$$

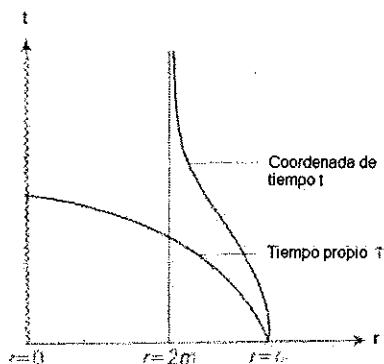
Para situaciones donde  $r_0$  y  $r$  son mucho mayor que  $2m$ , los resultados (135) y (137) son aproximadamente los mismos, como debe de esperarse. Sin embargo, si  $r$  esta muy cerca de  $2m$ , encontramos que

$$r - 2m = (r_0 - 2m) e^{-(t-t_0)/2m},$$

de donde se ve claramente que

$$t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad r - 2m \rightarrow 0$$

por lo que  $r = 2m$  es aproximado pero nunca excede a este valor. La coordenada  $t$  es



**FIGURA 12.-** Partícula que cae radialmente en tiempos  $t$  y el tiempo propio.

útil y tiene significado físico asintóticamente para  $r$  muy grande, ya que corresponde al tiempo propio medido por un observador en reposo que se encuentra muy lejos del origen. Desde el punto de vista de tal observador, el tiempo que le toma a una partícula de prueba

llegar a  $r = 2m$  es infinito. Sin embargo, desde el punto de vista de la partícula, sí llega a  $r = 2m$  y a  $r = 0$  en un tiempo propio finito. Claramente, la coordenada de Schwarzschild es inapropiada para describir este movimiento.

### 3.7 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

La idea es la siguiente: hacemos un cambio a unas coordenadas nuevas de tiempo, en las cuales las geodésicas radiales nulas se vuelvan líneas rectas. De (131) se sigue que el cambio apropiado está dado por

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2m \ln(r - 2m) \quad (138)$$

para  $r > 2m$ , por lo que en el nuevo sistema de coordenadas  $(\bar{t}, r, \theta, \phi)$  (132) se convierte en

$$\bar{t} = -r + cte,$$

que es una línea recta haciendo un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $r$ . Derivando (138), obtenemos

$$d\bar{t} = dt + \frac{2m}{r - 2m} dr,$$

y, sustituyéndolo en el elemento de línea de Schwarzschild, encontramos la forma de Eddington-Finkelstein

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\bar{t}^2 - \frac{4m}{r} d\bar{t}dr - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (139)$$

Esta solución es regular en  $r = 2m$ ; y de hecho lo es para todo el rango  $0 < r < 2\pi$ . Así, en algún sentido, la transformación (16.19) extiende el rango de la coordenada de  $2m < r < \infty$  a  $0 < r < \infty$ . Uno puede objetar que la transformación de coordenadas (138) no puede ser usada en  $r = 2m$  ya que es singular en ese punto. Sin embargo, (138) es sólo un artificio

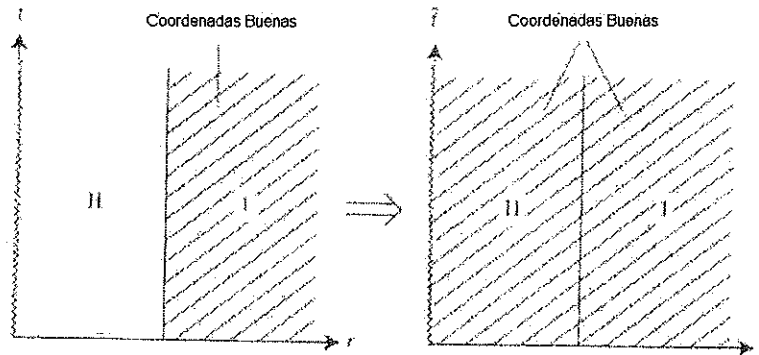


FIGURA 13.- Extensión analítica de la solución de Schwarzschild.

conveniente para obtener la ecuación (124) a partir de la ecuación (139). Nuestro punto de partida son los elementos de línea (124) y (139), dadas estas soluciones, nos hacemos la pregunta, ¿Cual es el rango de coordenadas más grande para el cual la solución es regular? La respuesta es, el parche de  $2m < r < \infty$  (junto con  $-\infty < t < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi$  y  $-\pi < \phi \leq \pi$ , aparte del el problema usual con las coordenadas en en el eje  $\theta = 0, \pi$ ) y el parche  $0 < r < \infty$  para (139) (ver Figura 11). En la región de traslape ( $2m < r < \infty$ ), las dos soluciones están relacionadas por (138), por lo tanto deben de representar la misma solución en esta región. Podemos notar que la solución en las coordenadas de Eddington-Finkelstein ya no es simétrica en el tiempo. Podemos obtener una solución de inversión en el tiempo introduciendo una coordenada de tiempo diferente

$$t \rightarrow t^* = t - 2m \ln(r - 2m),$$

la cual endereza las geodésicas nulas radiales salientes. Podemos escribir (139) en una forma más simple introduciendo una coordenada nula

$$v = t + r,$$

a la cual se le llama parámetro avanzado de tiempo. El elemento de línea resultante es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 - 2dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2). \quad (140)$$

Es fácil mostrar que las geodésicas nulas entrantes están dadas por  $v = cte$ . El diagrama de espacio-tiempo para la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein está dado por la fig(16.10, ponerla). Los conos de luz se abren a conos de  $45^\circ$  cuando

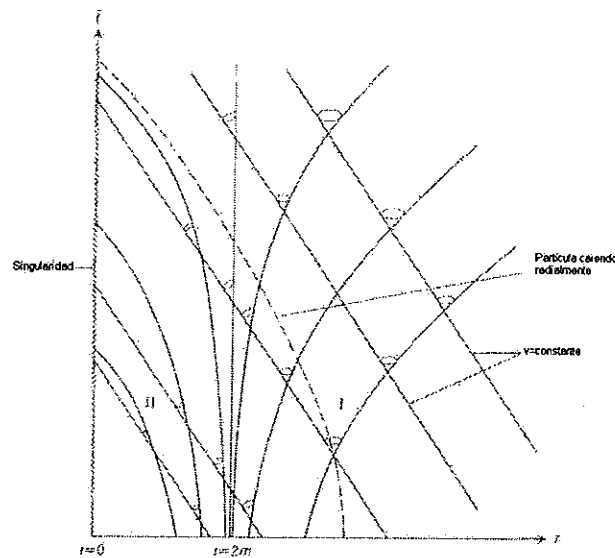


FIGURA 14.- Solución de Schwarzschild en coordenadas avanzadas Eddington-Finkelstein.

$r \rightarrow \infty$ . La orilla del lado izquierdo de todos los conos de luz están a  $-45^\circ$  del eje  $r$ . La orilla del lado derecho empieza al  $45^\circ$  del eje  $r$  en infinito y se inclinan cuando  $r$  disminuye,

volviéndose verticales en  $r = 2m$ , e inclinándose hacia adentro para  $r < 2m$ . Nótese que en  $r = 2m$  fotones salientes se quedan donde están. La fig (16.10) muestra correctamente lo que le pasa a una partícula que cae radialmente.

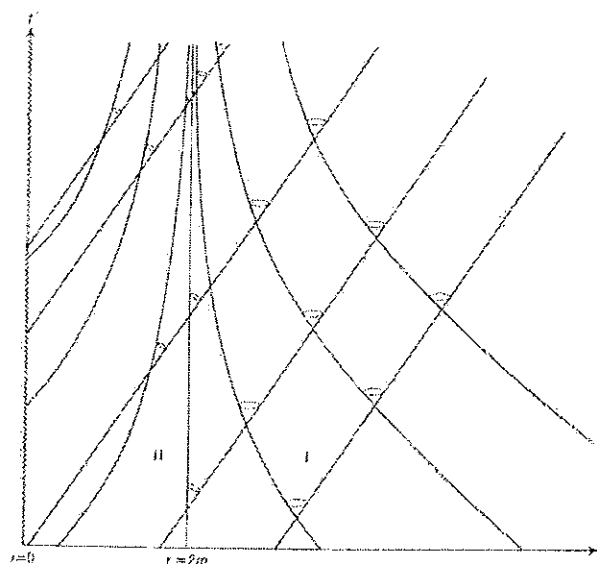


FIGURA 15.- Solución de Schwarzschild en coordenadas retardadas Eddington-Finkelstein.

## Capítulo 4

# ENTROPÍA DE AGUJEROS NEGROS

### 4.1 Entropía de Hawking

Un resultado importante sobre los agujeros negros (Misner et al., 1973), es que el área superficial del horizonte, exhibe una tendencia a aumentar cuando éste sufre alguna transformación . Hawking dio una demostración general de que el área superficial de un agujero negro no puede disminuir en ningún proceso (Hawking, 1971). Para un sistema de varios agujeros negros el teorema de Hawking implica que el área de cada agujero no puede disminuir. Además, cuando dos agujeros chocan y se funden, el área del agujero resultante no puede ser menor que la suma de las áreas iniciales. Es claro entonces que los cambios de un agujero negro, generalmente toman lugar en la dirección de incremento del área. Por otro lado sabemos que la segunda ley de la termodinámica establece que los cambios en un sistema termodinámico cerrado, toman lugar en la dirección de incremento de la entropía. Por lo que es posible pensar que existe una relación entre la entropía y el área de un agujero.

Queremos encontrar el análogo de la expresión termodinámica

$$dE = TdS - PdV. \tag{141}$$

Considerando un agujero negro de masa  $M$ , carga  $Q$  y momento angular  $J$ , su área está

dada por

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 2Mr_+ - Q^2, \quad (142)$$

donde

$$\vec{a} = \frac{\vec{L}}{M}, \quad (143)$$

y

$$r_{\pm} = M - (M - Q^2 - a^2)^{1/2}. \quad (144)$$

derivando (142) y resolviendo para  $dM$  obtenemos

$$dE = \frac{\kappa c^2}{8\pi G} dA + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (145)$$

donde

$$\kappa = \frac{4\pi(r_+ c^2 - GM)}{A}, \quad (146)$$

$$\Omega = \frac{4\pi J}{MA}. \quad (147)$$

$$\Phi = \frac{4\pi Q r_+}{A}. \quad (148)$$

En (145) tenemos la expresión análoga para agujeros negros de la expresión termodinámica (141): los términos  $\Omega dL$  y  $\Phi dQ$  representan el trabajo hecho sobre el agujero por un agente externo que incrementa el momento angular y la carga por  $dL$  y  $dQ$ , respectivamente. Por lo tanto  $\Omega dL + \Phi dQ$  es el análogo de  $-PdV$ , que es el trabajo hecho sobre un sistema termodinámico. El término  $A$  en (145) se parece a la entropía  $S$  en (141), como ya hemos notado: para cualquier cambio del agujero negro  $dA \geq 0$ , mientras que para un sistema termodinámico cerrado implica que  $dS \geq 0$ .

### 4.1.1 La Segunda Ley

La conexión entre la entropía y la información es bien conocida (Shannon y Weaver, 1949; Tribus y McIrving, 1971). La entropía de un sistema mide la incertidumbre o la falta de información que uno tiene acerca de la configuración interna del sistema.

Cuando un agujero negro se forma por un colapso gravitacional, llega a una estado cuasi-estacionario muy rápidamente, caracterizado sólo por tres parámetros: su masa  $M$ , su carga  $Q$  y su momento angular  $J$ . A esto se le conoce como el teorema de no-pelo, entendiéndose por "pelo" cualquier parámetro necesario para describirlo que no sea la masa, carga y momento angular. Por lo que un agujero negro de masa, carga y momento angular dado, puede tener un número muy grande de configuraciones internas, lo que refleja las diferentes configuraciones posibles que pudo tener el cuerpo colapsado. Si no se tomaran en cuenta efectos cuánticos, el número de configuraciones sería infinito, ya que podríamos formar un agujero negro a partir de un número muy grande de pequeñas partículas. Sin embargo, Bekenstein (Bekenstein, 1973) sugirió que las longitudes de onda (de Compton) de es estas partículas pudieran estar restringidas a que fueran menores que el radio del agujero negro y por lo tanto el número posible de configuraciones internas pudiera ser finito, aunque muy grande.

Sea  $\sigma dM dQ d^3 J$  el número configuraciones internas o el número de estados cuánticos que el agujero negro tiene entre los rangos  $M, M + dM$ ,  $Q, Q + dQ$  y momento angular  $d^3 J$ . Por el teorema de "no pelo" no tenemos información acerca del estado interno del agujero, por lo que todas estas configuraciones son igualmente probables. De esta manera la entropía

$S_h$  del agujero negro es

$$S_h = -\sum p_i \ln p_i = \ln \sigma. \quad (149)$$

También podemos expresar la entropía en términos de el número inicial de posibles estados que dan lugar a la formación de un agujero negro, con los rangos arriba mencionados.

Sea  $\{|\alpha_i\rangle\}$  una base completa ortonormal de estados iniciales y sea  $f_i V d^3 P dM dQ d^3 J$  la probabilidad de que el estado inicial de lugar solo a un agujero negro. Entonces  $q_i = f_i \left(\sum f\right)^{-1}$  es la probabilidad de que el agujero negro dado salga de el estado inicial  $|\alpha_i\rangle$ . Entonces la entropía queda como  $S_h = -\sum q_i \ln q_i$ .

La entropía debe ser función solo de  $M, J$  y  $Q$  con las siguientes propiedades:

- (1) La entropía siempre crece cuando radiación o materia entra en el agujero negro.
- (2) Cuando dos agujeros negros colisionan y se fusionan, la entropía del agujero negro final tiene que ser mayor que la suma de los dos agujeros iniciales.

Dada la entropía de un sistema en términos de la energía  $E$ , podemos definir la temperatura como  $T^{-1} = \partial S / \partial E$ . Entonces la temperatura de un agujero negro esta dada por

$$T_h^{-1} = \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_{Q,J}. \quad (150)$$

Consideremos la situación en la que un agujero negro este rodeado por una radiación de cuerpo negro a una temperatura  $T_m$ . La radiación de cuerpo negro se toma sobre todas las posibles especies de partículas en equilibrio térmico con un potencial químico cero. Para cualquier  $T_m$  habrá una razón de acreción de está radiación, sobre el agujero negro. Si  $T_m > T_h$  se sigue de la definición de la temperatura que el decremento de  $S_m$ , causado por la acreción de la radiación, es menor que el incremento de  $S_h$ . Así, la segunda ley para

agujeros negros se mantiene, la cual establece que  $S_m + S_h$  nunca decrece con el tiempo (donde  $S_m$  es la entropía de la materia y radiación afuera del agujero negro). Sin embargo, si  $T_m < T_h$ , la acreción viola la ley. Solo hay dos caminos con los cuales la consistencia se mantiene: O  $T_h$  es idénticamente cero, o los agujeros negros emiten radiación térmica con una temperatura finita diferente de cero. El primer caso es el que se mantiene en la teoría clásica, donde los agujeros negros solo pueden absorber pero no pueden emitir nada. Por lo contrario, el hecho de que los agujeros negros emitan radiación cuántica con una temperatura  $T_h = \kappa/2\pi$  nos permite probar la segunda ley de la termodinámica para agujeros negros y por consiguiente establecer que la entropía de un agujero negro es finita.

El resultado cuántico de que la temperatura es  $\kappa/2\pi$  nos permite integrar la ecuación (145) para obtener

$$dU = \frac{Tc^2}{4G} A + C, \quad (151)$$

comparando con (141) podemos concluir que

$$S_h = \frac{c^2}{4G} A,$$

si tomamos a  $c = 1, G = 1$ , nos queda que

$$S_h = \frac{A}{4}.$$

## 4.2 Ensemble Canónico

Sabemos que la temperatura (de Hawking)

$$k_B T_H = \frac{E_P^2}{8\pi M c^2}, \quad (152)$$

(donde  $E_P^2 = \sqrt{c^5 \hbar / G}$  es la energía de Planck) que emite un agujero negro es proporcional a la constante de Planck  $\hbar$ , i.e un efecto cuántico, por lo que es necesario una teoría cuántica para poder entender mejor las propiedades gravitacionales de un agujero negro. A pesar de la falta de una teoría cuántica de la gravedad convincente, se han hecho varios intentos para identificar los niveles de energía de un agujero negro de Schwarzschild aislado. Bekenstein fue el primero en usar los argumentos de cuantización tipo Bohr-Sommerfeld y sugirió un espectro

$$E_n = \sigma \sqrt{n} E_P, \quad n = 1, 2, \dots \quad (153)$$

donde  $\sigma$  es una constante adimensional de orden 1 (que depende del modelo). Tomando la relación para el espectro como cierta, queremos saber cuales son las implicaciones termodinámicas para un agujero negro, visto desde el punto de vista de un ensamble canónico.

Asumiendo que las degeneraciones  $d_n$  de los niveles de energía sean  $g^n$ , la función de partición para el sistema es

$$Z(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} e^{-\sqrt{n}x} = 1 + e^t \tilde{Z}(t, x), \quad t = \ln g, \quad x = \beta \sigma E_P, \quad (154)$$

donde  $\tilde{Z}$  es la función de partición correspondientes a las suposiciones de Bekenstein y Mukhanov. La serie de arriba converge para  $t < 0$  ( $|g| < 1$ ) y converge para  $t = 0$  ( $g = 1$ ),  $x > 0$ , de acuerdo con el criterio integral de Mcclaurin-Cauchy. Para  $t > 0$  la serie es divergente, pero la función  $Z(t, x)$  la podemos definir como sigue.

La serie obedece la ecuación de calor

$$\partial_t Z = \partial_x^2 Z, \quad (155)$$

con las condiciones de frontera

$$Z(t \rightarrow -\infty, x) = 1, \quad Z(t = 0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x} \equiv \phi(x) \quad (156)$$

$$Z(t, x \rightarrow \infty) = 1, \quad Z(t \neq 0, x = 0) = \frac{1}{1 - e^t} \equiv \eta(t). \quad (157)$$

Para la serie  $\phi(x)$  tenemos que los límites inferiores y superiores

$$\int_1^{\infty} d\nu e^{-\sqrt{\nu}x} = 2 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) e^{-x} \leq \phi(x) - 1 \leq \int_0^{\infty} d\nu e^{-\sqrt{\nu}x} = \frac{2}{x^2}. \quad (158)$$

Observando el comportamiento de  $e^{-\sqrt{n}x}$  entre  $n = k^2$  y  $n = (k+1)^2$ ,  $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$

uno puede afinar estos límites:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} 2ke^{-kx} \right) - e^{-x} = \left( \frac{2}{(1 - e^{-x})^2} - 1 \right) e^{-x} \quad (159)$$

$$\leq \phi(x) - 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2ke^{-kx} = \frac{2e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}. \quad (160)$$

En cuanto a la física del sistema estamos interesados en la función de partición para  $t > 0$ .

A primera vista uno puede considerar resolver la ecuación para  $t > 0, x > 0$  con los valores iniciales arriba mencionados de una manera estandar:

$$Z(t, x) = \int_0^{\infty} dy [K(t, x - y) - K(t, x + y) + \int_0^t d\tau \hat{K}(t - \tau, x)], \quad (161)$$

donde  $K$  es el "heat kernel"

$$K(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad (162)$$

y  $\hat{K}$  es esencialmente su derivada respecto de  $x$ ,

$$\hat{K}(t, x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-x^2/4t} = -2\partial_x K(t, x). \quad (163)$$

Este acercamiento no parece funcionar, ya que las funciones  $\phi$  y  $\eta$  no son lo suficientemente "decentes":  $\eta$  es singular en  $1/t$  para  $t \rightarrow 0$  y  $\phi$  se comporta como  $2/x^2$  para  $x \rightarrow 0$ . Una

extensión a un plano complejo  $g$  de la función  $Z(t, x)$ , definida por la serie (154) se puede definir usando la siguiente relación

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{nx^2}} &= \frac{|x|}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv e^{-x^2 v^2/4 - n/v^2} \\ &= \frac{|x|}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-x^2/(4\tau) - n\tau} = \int_0^\infty d\tau \hat{K}(\tau, x) e^{-n\tau}, \end{aligned} \quad (164)$$

que convierte a la serie (154) en una serie geométrica la cual se puede sumar bajo la integral para  $t < 0, x > 0$ :

$$Z(t = \ln g, x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv e^{-x^2 v^2/4} \frac{1}{1 - e^{(t-1/v^2)}} \quad (165)$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-x^2/(4\tau)} \frac{1}{1 - e^{(t-\tau)}} \quad (166)$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_1^\infty du \frac{e^{-x^2/(4 \ln u)}}{\ln^{3/2} u} \frac{1}{u - g}. \quad (167)$$

Notamos que la relación (166) también se puede escribir como

$$Z(t, x) = \int_0^\infty \hat{K}(\tau, x) \eta(t - \tau) = \int_{-\infty}^t d\tilde{\tau} \hat{K}(t - \tilde{\tau}, x) \eta(\tilde{\tau}), \quad (168)$$

donde  $\tilde{\tau} = t - \tau$ . Observamos que

$$\frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv e^{-x^2 v^2/4} = 1$$

obtenemos

$$\begin{aligned} Z - 1 &= e^t \tilde{Z}(t, x) = e^t \int_0^\infty dv e^{-x^2 v^2/4} \frac{e^{-1/v^2}}{1 - e^{(t-1/v^2)}} \\ &= e^t \int_0^\infty d\tau \hat{K}(\tau, x) e^{-\tau} \eta(t - \tau). \end{aligned} \quad (169)$$

Las integrales convergen para todos los valores de  $g \neq 1, t \neq 0$ . Para  $g > 1 (t > 0)$  (real) se debe tomar el valor principal de las integrales. Las representaciones integrales (165)-(167) para  $Z(t, x)$  son soluciones de la ecuación de calor para todo  $t \neq 0$ , esto se puede ver

reemplazando la derivada de  $1/1 - e^{(t-\tau)}$  respecto de  $t$  en la ecuación (165) por la derivada (negativa) respecto de  $\tau$  e integrando. Podemos notar que  $\tilde{Z}(t, x)$  no es solución de la ecuación de calor (155), solo  $e^t \tilde{Z}(t, x)$  lo es.

Como

$$Z(t, \lambda x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv e^{-x^2 v^2/4} \frac{1}{1 - e^t e^{-\lambda^2/v^2}}, \quad \lambda > 0, \quad (170)$$

vemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Z(t, \lambda x) = \frac{1}{1 - e^t}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Z(t, \lambda x) = 1, \quad (171)$$

en acuerdo con las ecuaciones (157), pero ahora para  $t > 0$ .

Para  $\tilde{Z}(t, x)$  se obtiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} Z(t, \lambda x) = \frac{1}{1 - e^t}, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} Z(t, \lambda x) = e^{-\lambda x}, \quad (172)$$

Las expresiones (165)-(167) o (169) se pueden usar para extender la función  $Z(t = \ln g, x)$  o  $\tilde{Z}(t, x)$  al planos complejos  $g$  ó  $t$ .

De acuerdo con las ecuación (167)  $Z(g, x)$  tiene un corte ramal en el plano complejo  $g$  a lo largo del eje real de 1 a  $\infty$ . La discontinuidad de  $Z$  a lo largo del corte esta dado por

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [Z(g + i\epsilon) - Z(g - i\epsilon)] = 2\pi i \hat{K}(t, x), \quad (173)$$

y  $Z(g, x)$  es una función analítica de  $g$  exepeto en este corte.

Si nos acercamos al corte a lo largo del eje real pero por arriba, el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [Z(g + i\epsilon, x), g > 1,$$

ya no es una función real-valuada de  $g$  ya que tiene una parte imaginaria diferentes de cero

$Z_i(t, x)$ . Entonces, el valor principal de la integral, para la parte real  $Z_r(t, x)$  es

$$Z_r(t, x) = v.p. \int_0^\infty d\tau \hat{K}(\tau, x) \eta(t - \tau), \quad (174)$$

y para la parte imaginaria  $Z_i$

$$Z_i(t, x) = \pi \hat{K}(t, x) = \frac{\sqrt{\pi x}}{2t^{3/2}} e^{-x^2/(4t)}. \quad (175)$$

#### 4.2.1 Termodinámica

En la termodinámica de agujeros negros uno de los regímenes de interés es el del comportamiento del sistema para  $\beta$  grandes (bajas temperaturas), ya que el inverso de la temperatura de Hawking  $\beta_H = 1/(k_B T_H)$  es muy grande para agujeros negros macroscópicos.

De acuerdo con la ecuación (172) la parte real  $\tilde{Z}_r$  de la función de partición  $\tilde{Z}(t, x)$  se comporta como  $\exp(-x)$  para  $x$  grandes, por lo tanto la energía interna asociada  $U = -\partial \ln Z_r / \partial \beta$  es justo  $E_P$ , i.e. el nivel de energía más bajo posible. La razón principal de no usar la parte real  $Z_r$  es que se vuelve negativa para  $x$  pequeña cuando  $t > 0$ .

Ahora, si tomamos la parte imaginaria  $Z_i$ , ecuación (175), como la función de partición para calcular las propiedades termodinámicas tenemos que la energía interna es

$$U = \bar{E} = -\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial \beta} = -\frac{\partial Z_i / \partial \beta}{Z_i} = M c^2, \quad (176)$$

que la identificamos con la energía total en reposo  $M c^2$  del agujero negro y obtenemos

$$U = \frac{\sigma^2 E_P^2}{2t} \beta - \frac{1}{\beta} = M c^2. \quad (177)$$

Resolviendo para  $\beta$  y descartando la raíz negativa nos queda

$$\beta = \frac{M c^2 t}{\sigma^2 E_P^2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{2\sigma^2 E_P^2}{M^2 c^4 t} \right)^{1/2} \right], \quad (178)$$

para  $Mc^2 \gg E_P$  nos conduce a

$$\beta = \frac{2tMc^2}{\sigma^2 E_P^2} \left[ 1 + \frac{\sigma^2 E_P^2}{2tM^2 c^4} \right]. \quad (179)$$

Para  $\sigma^2 = t/\pi$  obtenemos la temperatura de Hawking  $\beta_H$ , más un término pequeño de corrección de orden  $(E_P^2 / (M^2 c)) \beta_H$ .

Ahora, la energía promedio al cuadrado esta dada por

$$\bar{E}^2 = \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2} \frac{\sigma^2 E_P^2}{Z_i} = \frac{\partial Z_i}{\partial t} \frac{\sigma^2 E_P^2}{Z_i} = \left( \frac{x^2}{4t^2} - \frac{3}{2t} \right) \sigma^2 E_P^2, \quad (180)$$

con lo cual podemos calcular las fluctuaciones medias cuadradas

$$\bar{E}^2 - \bar{E}^2 = -\frac{\sigma^2 E_P^2}{2t} - \frac{1}{\beta^2}. \quad (181)$$

Podemos notar que para  $t > 0$  el lado derecho es negativo, lo cual corresponde a un calor específico negativo.

Si definimos el número de niveles promedio  $\bar{N}$  por

$$\bar{N} = \frac{1}{Z_i} \frac{\partial^2 Z_i}{\partial x^2}, \quad (182)$$

obtenemos

$$\bar{N} = \left( \frac{x^2}{4t} - \frac{3}{2t} \right) = \frac{\bar{E}^2}{\sigma^2 E_P^2} \approx \frac{Mc^2}{\sigma^2 E_P^2}. \quad (183)$$

De está manera, para  $\bar{N}$  muy grandes

$$x = \sigma E_P \beta = 2t\sqrt{\bar{N}} = 2t \frac{Mc^2}{\sigma E_P}. \quad (184)$$

Finalmente para la entropía tenemos

$$\frac{S}{k_B} = \ln Z_i + \beta U, \quad (185)$$

con la cual obtenemos

$$\frac{S}{k_B} = \frac{x^2}{4t} + \ln x - \frac{3}{2} \ln t + \ln \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2e} \right) \quad (186)$$

usando la relación (184) e ignorando términos de orden  $O(1)$ , nos queda

$$\frac{S}{k_B} = t\bar{N} + \frac{1}{2} \ln \bar{N} \quad (187)$$

$$= \frac{t}{4\pi\sigma^2} \frac{A}{4l_P^2} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{A}{l_P^2} \right), \quad (188)$$

donde  $A = 4\pi R_s^2 = 16\pi G^2 M^2 / c^4$  es el área del horizonte,  $R_s$  es el radio de Schwarzschild y  $l_P^2 = G\hbar/c^3$  es la distancia de Planck al cuadrado.

Para  $\sigma^2 = t/4\pi$  el término que predomina de  $S/k_B$  es el de el Bekenstein-Hawking  $A/4l_P$ .

### 4.3 Integrales de Trayectoria de Feynman

La formulación de Feynman de la mecánica cuántica basada en las integrales de trayectoria se puede establecer de la siguiente manera

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int D(x) e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}. \quad (189)$$

La interpretación de la ecuación anterior es la siguiente: si queremos saber la amplitud cuántica de que una partícula puntual con posición  $x_i$  a un tiempo  $t_i$  llegue a una posición  $x_f$  a un tiempo  $t_f$ , debemos sumar sobre todas las posibles trayectorias que conectan a estos puntos con un factor de peso que viene dado por la acción clásica para cada camino.

Para tener una visión más clara de este método consideremos el experimento de la doble rendija. A un tiempo un electrón pega sobre una pantalla, por lo que no hay manera de decir por cual de las rendijas pasó el electrón. Si repetimos el experimento una y otra

vez, veremos que aparece un patrón de interferencia de dos ondas, correspondientes a cada una de las rendijas. Por lo que debemos sumar las amplitudes de estas dos ondas, que corresponden a dos caminos diferentes del electrón. Si ponemos más rendijas tendremos más caminos, cada uno de los cuales contribuye con una amplitud. Por lo que es claro que existen muchos caminos que contribuyen a la amplitud final del electrón que se propaga hacia la pantalla.

Generalizando este experimento pensado, podemos concluir que la amplitud de una partícula moviéndose de un punto  $x_i$  a otro punto  $x_f$  consiste de varias componentes, cada una de las cuales corresponde a un camino en particular que conecta a estos puntos. Uno de estos caminos es la trayectoria clásica. Sin embargo existen otros caminos que no son posibles clásicamente, pero que contribuyen a la amplitud cuántica.

### El Propagador

Una cantidad importante para estudiar la evolución de un estado cuántico es

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle, \quad (190)$$

la cual se conoce como el *propagador*. En ésta cantidad está toda la información de cómo la función se propaga en el tiempo, debido a que

$$\begin{aligned} \psi(x_f, t_f) &= \langle x_f, t_f | \psi \rangle = \int \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle dx_i \langle x_i, t_i | \psi \rangle \\ &= \int K(x_f, t_f; x_i, t_i) \langle x_i, t_i | \psi \rangle dx_i. \end{aligned} \quad (191)$$

En otras palabras, es la función de Green para la ecuación de Schrödinger.

El propagador también se puede escribir usando eigenenergías y eigenestados (si el

Hamiltoniano no depende del tiempo),

$$\begin{aligned} K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \langle x_f | e^{-iH(t_f-t_i)/\hbar} | x_i \rangle = \sum \langle x_f | n \rangle e^{-iE_n(t_f-t_i)/\hbar} \langle n | x_i \rangle \\ &= \sum e^{-iE_n(t_f-t_i)/\hbar} \psi^*(x_f) \psi(x_i) \end{aligned} \quad (192)$$

### Función de Partición

Las integrales de trayectoria son de gran utilidad en la mecánica estadística para calcular funciones de partición. Empezando por la definición convencional de una función de partición

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (193)$$

donde  $\beta = 1/k_B T$ , la podemos reescribir haciendo uso de las relaciones de completitud para los eigenestados de energía y los eigenestados de momento.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle = \int dx \sum \langle n | x \rangle \langle x | e^{-\beta H} | n \rangle \\ &= \int dx \sum \langle x | e^{-\beta H} | n \rangle \langle n | x \rangle = \int dx \langle x | e^{-\beta H} | x \rangle. \end{aligned} \quad (194)$$

El operador  $e^{-\beta H}$  es el mismo que  $e^{iHt/\hbar}$  excepto que (la continuación analítica)  $t \rightarrow i\tau = -i\hbar\beta$ . Por lo tanto la función de partición se puede escribir como una integral de trayectoria para todos los caminos cerrados, *i.e.* trayectorias con los mismos puntos de inicio y puntos finales, sobre un intervalo de tiempo  $-i\hbar\beta$ .

Por otro lado, para poder aplicar el formalismo de Feynman ocupamos una ecuación tipo Schrödinger. Esta ecuación la podemos obtener de Makela y Repo (Obregón et al., 2001; Makela y Repo, 1998), para  $Q = 0$  obtenemos

$$\frac{\hbar^2 G^2}{c^6} a^{-s-1} \frac{d}{da} \left( a^s \frac{d}{da} \Psi(a) \right) = \left( a - \frac{2GM}{c^2} \right) \Psi(a), \quad (195)$$

donde  $a$  y  $P_a^2 = -\frac{\hbar^2 G^2}{c^6} a^{-s} \frac{d}{da} \left( a^s \frac{d}{da} \Psi(a) \right)$  son coordenadas de fase obtenidas de las coordenadas del espacio fase  $m$  y  $P_m$ , por medio de transformaciones canónicas apropiadas y  $m \equiv M(t, r)$  y  $p_m(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dr P_M(t, r)$ . La variable  $m$  la podemos definir como la masa  $M$  del agujero cuando las ecuaciones de Einstein se satisfacen (Obregón et al., 2001; Makela y Repo, 1998),  $s$  es un factor de ordenamiento. En particular, si escogemos  $s = 2$  e identificamos  $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ , se obtiene

$$\frac{\hbar^2 G^2}{c^6} \left( \frac{d^2}{da^2} + \frac{2}{a} \frac{d}{da} \right) \Psi(a) = (a - R_s) \Psi(a). \quad (196)$$

Haciendo la transformación

$$\Psi(a) = \frac{1}{a} U(x); \quad x = a - R_s, \quad (197)$$

donde la variable  $x$  describe los grados de libertad de un agujero negro de Schwarzschild, e introduciendo las constantes apropiadas y considerando el hecho de que la energía de excitación asociada a la variable  $a$  no es positiva, la ecuación cuántica (196) se transforma en

$$\left( -\frac{1}{2} l_{pl}^2 E_{pl} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{E_{pl}}{2 l_{pl}^2} x^2 \right) V(x) = \frac{R_s}{4 l_{pl}} E_s V(x), \quad (198)$$

donde  $E_s M c^2$  es la energía del agujero negro y  $l_{pl} = (G\hbar/c^3)$  y  $E_{pl} = (c^5 \hbar/G)$  son la distancia y la energía de Planck respectivamente. Debido a que (198) es un oscilador lineal cuántico, los niveles de energía son

$$\frac{R_s(n)}{4 l_{pl}} E_s(n) = \left( n + \frac{1}{2} \right) E_{pl}, \quad (199)$$

lo cual concuerda con la propuesta de Bekenstein (Bekenstein, 1973, 1974a,b).

Ahora, para una partícula en un potencial  $V(x)$  la función de partición tiene la siguiente forma (Feynman y Hibbs, 1965)

$$Z = \int Dx(\tau) \exp \left[ -\frac{1}{\hbar} \int_0^{\hbar\beta} d\tau \left( \frac{m}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 + V(x) \right) \right]. \quad (200)$$

Por otro lado existen fenómenos importantes en la mecánica estadística donde la aproximación clásica ya no es válida. Cuando esto ocurre es necesario incluir términos en el potencial, que resulta del movimiento a lo largo de la trayectoria.

Si hacemos un desarrollo alrededor de la posición promedio, dada por

$$\bar{x} = \frac{1}{\beta\hbar} \int_0^{\beta\hbar} x(\tau) d\tau, \quad (201)$$

la cual se define para cualquier camino en particular. Se puede caracterizar cada camino por su posición promedio, y llevar a cabo la integración sobre todas estas posiciones. De esta manera la función de partición aproximada es (Feynman y Hibbs, 1965)

$$Z_{approx} = \sqrt{\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}} \int \left( \exp \left\{ -\beta \left[ V(\bar{x}) + \frac{\beta\hbar^2}{24m} V''(\bar{x}) \right] \right\} \right) d\bar{x}, \quad (202)$$

válida a primer orden en  $V''$ . Podemos poner  $Z_{approx}$  de una forma más compacta en términos de un potencial aproximado

$$Z_{approx} = \sqrt{\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}} \int e^{-\beta U(\bar{x})} d\bar{x}, \quad (203)$$

donde

$$U(\bar{x}) = \frac{m\omega^2}{2} \left( x^2 + \frac{\beta\hbar^2}{12m} \right), \quad (204)$$

lo que nos conduce a la función de partición

$$Z_{approx} = \frac{1}{\beta\hbar^2\omega} e^{-\frac{(\beta\hbar\omega)^2}{24}}. \quad (205)$$

Ahora hacemos uso de este resultado para calcular las propiedades termodinámica de interés. Para lograr esto, hacemos el cambio  $\beta \rightarrow -i\beta$ , entonces la función de partición nos queda

$$Z_{approx}^* = -\frac{i}{\beta\hbar\omega} e^{\frac{(\beta\hbar\omega)^2}{24}}. \quad (206)$$

Para la energía interna tenemos que

$$\bar{E} = \frac{\partial \ln(\Im Z_{approx}^*)}{\partial \beta} = -Mc^2, \quad (207)$$

que debería ser la energía interna gravitacional del agujero negro. Esto nos conduce a que la energía es

$$\frac{E_P^2}{8\pi} \beta^2 - Mc^2 \beta - 1 = 0, \quad (208)$$

la solución positiva de esta ecuación para el caso  $E_P \ll Mc^2$  nos conduce a

$$\beta = \frac{8\pi Mc^2}{E_P^2} \left[ 1 + \frac{1}{8\pi} \left( \frac{E_P}{Mc^2} \right)^2 \right] = \beta_H \left( 1 + \frac{1}{\beta_H Mc^2} \right), \quad (209)$$

la cual es la temperatura de Hawking  $\beta_H = \frac{1}{kT_H}$ , más una pequeña corrección, que resulta ser la misma que se obtuvo en (179).

Para calcular la entropía hacemos otra vez el cambio  $\beta \rightarrow -i\beta$ , obteniendo

$$\text{Im} \left( \frac{S}{ik} \right) = \left[ \ln \left( \text{Im} Z_{approx}^* \right) - \beta \bar{E} \right],$$

que en términos de la función de partición queda de la forma

$$\text{Im} \left( \frac{S}{ik} \right) = \left[ \ln \left( \text{Im} Z_{approx}^* \right) - \beta \frac{\partial \ln \left( \text{Im} Z_{approx}^* \right)}{\partial \beta} \right],$$

y sustituyendo (205) obtenemos

$$\left( \frac{S}{k} \right) = \frac{A}{4l_P^2} \left[ 1 + \frac{1}{8\pi} \left( \frac{E_P}{Mc^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{A}{4l_P^2} \left[ 1 + \frac{1}{8\pi} \left( \frac{E_P}{Mc^2} \right)^2 \right] \right) + \frac{1}{2} \ln(24) - 1.$$

En términos de la relación de Bekenstein-Hawking  $\frac{S_{BH}}{k} = \frac{A}{4l_p^2}$  e ignorando términos de orden mayor, obtenemos la corrección logarítmica, que se obtuvo en (188)

$$\frac{S}{k} = \frac{S_{BH}}{k} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{S_{BH}}{k} \right). \quad (210)$$

## Capítulo 5

### CONCLUSIONES

Este trabajo puede dividirse en dos partes. En la primera se estudian los principios físicos y las herramientas matemáticas necesarias para desarrollar la Teoría General de la Relatividad. Destacando el papel fundamental que juega el cálculo tensorial en dicha teoría. Una vez establecido el aparato matemático el cual junto con los principios de equivalencia y covariancia general dan lugar a las ecuaciones de campo de Einstein.

El ejemplo resuelto en detalle corresponde a una métrica con simetría esférica. Esta solución es conocida como la solución de Schwarzschild. Dicha solución da la geometría del espacio tiempo, generada por un objeto esféricamente simétrico. Cabe mencionar que predice la existencia de objetos cuya velocidad de escape es mayor que la de la luz, los cuales son conocido como Agujeros Negros.

La segunda parte de este trabajo se enfoca en el estudio de una de las propiedades desconcertantes la Entropía de Agujeros Negros. El estudio se abordó mediante tres formalismos: Entropía de Hawking utilizando un tratamiento puramente clásico, Entropía mediante el uso del Ensemble canónico y Entropía con el uso de Integrales de Trayectoria de Feynman, este último utilizando una descripción cuántica del fenómeno.

Mediante el estudio clásico se establece la famosa fórmula de la entropía  $S = A/4\pi$  y

la temperatura  $T = \kappa/2\pi$  dichos resultados son contradictorios al hecho que los agujeros negros no pueden radiar, ya que la velocidad de escape es mayor que la de la luz. Esta aparente contradicción indica que se necesita un tratamiento cuántico para estudiar dicho fenómeno.

Los dos formalismos que se utilizan al final, contienen ingredientes cuánticos en su formulación, lo que permite explicar la temperatura y la entropía de los agujeros negros. Lo más sobresaliente al utilizar la mecánica estadística es que simplemente proponiendo un espectro de energía de la forma  $E_n = \sigma\sqrt{n}E_p$ , encontramos que las propiedades termodinámicas de un agujero negro de Schwarzschild están asociadas con la parte imaginaria de la función de partición.

Finalmente por medio del formalismo de las integrales de trayectoria aplicado a agujeros negros, se obtienen las propiedades del agujero negro de Schwarzschild. Con este enfoque la entropía asociada del agujero negro está dada por  $\frac{S}{k} = \frac{S_{BH}}{k} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{S_{BH}}{k} \right)$ . Este resultado nos da la entropía de Hawking-Bekenstein más una corrección logarítmica cuyo argumento es la entropía de Hawking-Bekenstein.

Es importante notar que dicha corrección ha sido obtenida por otros autores usando formulaciones de gravedad cuántica. Este último formalismo (integrales de trayectoria) permite estudiar de manera directa otro tipo de agujeros negros, los cuales son predichos dentro de la teoría de la Relatividad General.

## APENDICE I: TENSORES

### Transformación de Tensores

Para construir ecuaciones generalmente covariantes, necesitamos objetos que se transformen de una manera simple ante una transformación de coordenadas. El ejemplo primordial de tales objetos son los *tensores* (D'Inverno, 1992).

Veamos como se transforma un vector contravariante o tensor contravariante de rango 1, el cual lo escribimos como  $X^a$  en el sistema coordenado  $x^a$  y se transforma bajo una transformación de coordenadas como

$$X'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b, \quad (211)$$

para un tensor covariante,  $X_a$ , tenemos que

$$X'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} X_b. \quad (212)$$

Un tensor contravariante de orden 2, denotado por  $X^{ab}$ , se transforma de acuerdo a

$$X'^{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} X^{cd}, \quad (213)$$

mientras que para un tensor covariante de orden 2 tenemos que

$$X'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} X_{cd}. \quad (214)$$

Si tenemos un tensor mixto, esto es, un tensor con índices contravariantes y covariantes, por ejemplo 1 contravariante y dos covariantes, la regla de transformación nos

dice que se debe de transformar de acuerdo a

$$X'^a_{bc} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} X^d_{ef}. \quad (215)$$

En general, si tenemos un tensor con  $p$  índices contravariantes y  $q$  covariantes se transforma

$$T'^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} = \frac{\partial x'^{a_1}}{\partial x^{a_1}} \dots \frac{\partial x'^{a_p}}{\partial x^{a_p}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x'^{b_1}} \dots \frac{\partial x^{b_q}}{\partial x'^{b_q}} T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}. \quad (216)$$

Ya establecida la regla de transformación de los tensores, veamos otras de las operaciones fundamentales de estos objetos. Se puede deducir directamente de las leyes de transformación que la suma de dos tensores es un tensor (del mismo tipo), esto es

$$X^a_{bc} = Y^a_{bc} + Z^a_{bc} \quad (217)$$

la misma regla se aplica para las restas y la multiplicación por un escalar. En general  $X_{ab} \neq X_{ba}$ . Un tensor covariante se dice ser simétrico si  $X_{ab} = X_{ba}$ , en este caso se tiene  $\frac{1}{2}n(n+1)$  componentes independientes. Un tensor se dice que es antisimétrico si  $X_{ab} = -X_{ba}$  el cual tiene  $\frac{1}{2}n(n-1)$  componentes independientes. Cualquier tensor se puede escribir como la suma de una parte simétrica y una antisimétrica.

Podemos multiplicar dos tensores de tipo  $(p_1, q_1)$  y  $(p_2, q_2)$  y obtener un tensor de tipo  $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$  esto es

$$X^a_{bcd} = Y^a_b Z_{cd} \quad (218)$$

en particular un tensor de tipo  $(p, q)$  cuando se multiplica por un campo escalar  $\phi$ , sigue siendo un tensor de tipo  $(p, q)$ . Dado un tensor mixto de tipo  $(p, q)$  podemos formar un tensor de tipo  $(p-1, q-1)$ , mediante un proceso de contracción, el cual

consiste en igualar un superíndice con un subíndice, por ejemplo

$$X_{bcd}^a \xrightarrow{\text{contracción sobre } a \text{ y } b} X_{bcd}^a = Y_{cd}, \quad (219)$$

este tensor de tipo (1,3) se convirtió en un tensor de tipo (0,2). Notesé también que podemos contraer un tensor multiplicándolo por la delta de Kronecker ( $\delta_b^a$ ),

$$X_{acd}^a = \delta_a^b X_{bcd}^a. \quad (220)$$

También podemos usar  $g_{ab}$  y  $g^{ab}$  para subir y bajar índices, definiendo

$$T_{..a..} = g_{ab} T^{..b..} \quad (221)$$

y

$$T^{..a..} = g^{ab} T_{..b..} \quad (222)$$

### Derivada de un tensor

Los tensores se transforman de manera simple bajo una transformación general de coordenadas, por lo que parecen ser los objetos correctos para construir ecuaciones que satisfagan el principio general de covariancia.

Sin embargo las leyes de la física vienen dadas por ecuaciones diferenciales, por lo que necesitamos saber como derivar tensores. El problema que surge es que la derivada de un tensor no mapea tensores en tensores, es decir, la derivada de un tensor no es un tensor.

Sabemos que un tensor está dado por  $X'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b$ , entonces si derivamos a  $X'^a$  respecto de  $x'^c$  tenemos

$$\partial'_c X'^a = \frac{\partial'}{\partial x'^c} \left( \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b \right) \quad (223)$$

$$= \frac{\partial x^d}{\partial x'^c} \frac{\partial}{\partial x^d} \left( \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b \right) \quad (224)$$

$$= \frac{\partial x^d}{\partial x'^c} \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \partial_d X^b + \frac{\partial x^d}{\partial x'^c} \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^d \partial x^b} X^b. \quad (225)$$

Podemos ver que si el primer término de el lado izquierdo estuviera solo, esto sería la transformación usual para un tensor de tipo (1,1). Sin embargo la presencia del segundo término no deja que  $\partial'_c X'^a$  se transforme como un tensor.

### Derivada Covariante

Acabamos de ver que la derivada de un tensor no es un tensor, entonces la ecuación  $\ddot{x}^a = 0$  tampoco tenía forma covariante, lo que sugiere que el problema de la derivada de un tensor la podemos solucionar de alguna manera introduciendo los símbolos de Christoffel.

Sea  $x'^a$  un sistema de coordenadas inercial. En un sistema inercial podemos usar la derivada parcial  $\partial'_c V'^a$ . Definimos la derivada covariante,  $\nabla_c V^a$  en cualquier otro sistema de coordenadas  $x^a$  exigiendo que se transforme como un tensor (1,1), esto es

$$\nabla_c V^a = \frac{\partial x^a}{\partial x'^a} \frac{\partial x'^c}{\partial x^c} \partial'_c V'^a. \quad (226)$$

Haciendo un poco de álgebra encontramos que

$$\nabla_c V^a = \partial_c X^a + \Gamma_{bc}^a V^b, \quad (227)$$

donde  $\Gamma_{bc}^a$  es

$$\Gamma_{bc}^a V^b = \frac{\partial x^a}{\partial x'^a} \frac{\partial^2 x'^a}{\partial x^b \partial x^c}. \quad (228)$$

Adoptamos a (227) como la definición de la derivada covariante en un espacio-tiempo con una métrica general.

Un hecho importante es que la derivada covariante se reduce a la derivada parcial ordinaria en un sistema de coordenadas localmente inercial.

Estas son algunas de las propiedades más importantes de la derivada covariante

1. Lialidad: Para dos números reales  $a$  y  $b$  y dos tensores  $A^a$   $B^b$  tenemos

$$\nabla_c(aY^a + bZ^a) = a\nabla_c Y^a + b\nabla_c Z^a \quad (229)$$

2. Satisface la regla del producto de derivadas (regla de Leibniz)

$$\nabla_c(Y^a Z_{bd}) = Y^a(\nabla_c Z_{bd}) + (\nabla_c Y^a)Z_{bd} \quad (230)$$

3. Conmuta con la contracción, por ejemplo

$$\delta_b^a \nabla_c T^{ab} = \nabla_c T_a^a \quad (231)$$

4. La métrica es covariantemente constante

$$\nabla_c g_{ab} = 0 \quad (232)$$

5. Las derivadas covariantes conmutan con los escalares: Está es una propiedad bien conocida de las derivadas parciales ordinarias, pero también lo es para las segundas derivadas covariantes de un escalar y es una consecuencia de la simetría de los símbolos de Christoffel (de los dos índices de abajo), que también es conocida como la propiedad de *no torsión* de las derivadas covariantes.

### Principio de Acoplamiento Mínimo

El hecho de que la derivada covariante,  $\nabla_c$ , mapee tensores en tensores y se reduzca a la derivada parcial ordinaria en un sistema localmente inercial sugiere el siguiente algoritmo para obtener los efectos de la gravitación en sistemas físicos y así obtener ecuaciones que satisfagan el principio de covariancia general.

- 1) Escribir las ecuaciones de la RE (invariantes ante una transformación de Lorentz).
- 2) Siempre que aparezca la métrica de Minkowski  $\eta_{ab}$  reemplazarla por  $g_{ab}$ .
- 3) Siempre que aparezca una derivada parcial  $\partial_a$ , reemplazarla por la derivada covariante  $\nabla_a$ .

Por construcción, estas ecuaciones son tensoriales (generalmente covariantes) y válidas en la ausencia de gravedad, por lo tanto satisfacen el principio de covariancia general.

### Diferenciación Covariante a lo largo de una Curva

Hasta ahora, hemos definido la derivada covariante para tensores definidos en cualquier parte del espacio. Frecuentemente, uno se encuentra con tensores que solo están definidos sobre curvas. En esta sección veremos como definir la derivada covariante a lo largo de una curva. Consideremos una curva  $x^a(\tau)$  (donde  $\tau$  puede ser (no necesariamente) el tiempo propio) y el campo vectorial tangente  $X^a(x(\tau)) = \dot{x}^a(\tau)$ . Definimos la derivada covariante  $D/D\tau$  a lo largo de una curva como

$$\frac{D}{D\tau} = X^a \nabla_a = \dot{x}^a(\tau) \nabla_a. \quad (233)$$

Por ejemplo, para un vector tenemos

$$\frac{DV^a}{D\tau} = \dot{x}^c \partial_c X^a + \dot{x}^c \Gamma_{bc}^a V^b \quad (234)$$

$$= \frac{d}{d\tau} V^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^c V^b. \quad (235)$$

Para que esto tenga sentido,  $V^a$  tiene que estar definida sobre la curva y no necesariamente sobre todo el espacio.

### Transporte Paralelo

Primero notemos que en una métrica general (curva) en el espacio-tiempo no tiene

sentido preguntarnos si dos puntos  $x$  e  $y$  son paralelos entre sí. Sin embargo, dada una métrica y una curva que conecta a estos puntos, podemos compararlos arrastrando a uno sobre la curva hacia el otro usando la derivada covariante.

Decimos entonces que un tensor  $T_{b\dots}^{a\dots}$  es transportado paralelamente a lo largo de la curva  $x^a(\tau)$  si

$$\frac{DT_{b\dots}^{a\dots}}{D\tau} = 0. \quad (236)$$

De esta definición surgen algunas consecuencias inmediatas:

1) En un sistema localmente inercial, esta condición se reduce a  $\frac{DT}{D\tau} = 0$ , se debe al hecho de que los tensores no cambian a lo largo de la curva.

2) Tomando a  $T$  como el vector tangente  $X^a(x(\tau)) = \dot{x}^a(\tau)$  a la curva misma, la condición para el transporte paralelo se convierte en

$$\frac{DX^a}{D\tau} = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0, \quad (237)$$

esto es, la ecuación de la geodesica. Por lo tanto las geodésicas son curvas tales que sus vectores tangentes no cambian a lo largo de la curva.

3) Ya que la métrica es covariantemente constante, en particular, es transportada paralelamente a lo largo de cualquier curva. Por lo tanto, si  $V^a$  es transportado paralelamente, también será constante la longitud de la métrica a lo largo de la curva.

### El Tensor de Curvatura de Riemann

Uno de los conceptos más importantes en la Relatividad General es el de describir la curvatura en términos de los tensores, aquí es donde entra el tensor de curvatura de Riemann. Entre otras cosas, finalmente vamos a poder decidir, si una métrica es la

métrica de Minkowski (plana) disfrazada o es una métrica genuina del espacio curvo. También podemos llegar a las ecuaciones de Einstein, es decir, a las ecuaciones de campo para el campo gravitacional.

Recordemos que las ecuaciones que describen el comportamiento de partículas y campos en un campo gravitacional involucran la métrica y los símbolos de Christoffel. Por lo que las ecuaciones para el campo gravitacional deben ser ecuaciones diferenciales generalmente covariantes (tensoriales) de la métrica.

Técnicamente la manera más directa de introducir el tensor de curvatura Riemann es mediante el conmutador de las derivadas covariantes. Para cualquier tensor  $T_{b\dots}^a$  definimos su conmutador como

$$\nabla_c \nabla_d T_{b\dots}^a - \nabla_d \nabla_c T_{b\dots}^a, \quad (238)$$

vamos a trabajar el conmutador de  $X^a$ , recordando que

$$\nabla_c X^a = \partial_c X^a + \Gamma_{bc}^a X^b, \quad (239)$$

como vimos, la ecuación anterior es un tensor (1,1) y sabemos que

$$\nabla_c T_{b\dots}^a = \partial_c T_{b\dots}^a + \Gamma_{dc}^a T_{b\dots}^d + \dots - \Gamma_{bc}^d T_{d\dots}^a + \dots, \quad (240)$$

evaluando  $\nabla_d \nabla_c X^a$  tenemos que

$$\nabla_d \nabla_c X^a = \partial_d (\partial_c X^a + \Gamma_{bc}^a X^b) + \Gamma_{ed}^a (\partial_c X^e + \Gamma_{bc}^e X^b) - \Gamma_{cd}^e (\partial_e X^a + \Gamma_{be}^a X^b). \quad (241)$$

Ahora, para  $\nabla_c \nabla_d X^a$  obtenemos una expresión similar

$$\nabla_c \nabla_d X^a = \partial_c (\partial_d X^a + \Gamma_{bd}^a X^b) + \Gamma_{ec}^a (\partial_d X^e + \Gamma_{bd}^e X^b) - \Gamma_{dc}^e (\partial_e X^a + \Gamma_{be}^a X^b), \quad (242)$$

restando estas ultimas dos ecuaciones, y asumiendo que

$$\partial_d \partial_c X^a = \partial_c \partial_d X^a, \quad (243)$$

obtenemos

$$\nabla_d \nabla_c X^a - \nabla_c \nabla_d X^a = R_{bcd}^a X^b + (\Gamma_{cd}^e - \Gamma_{dc}^e) \nabla_e X^a, \quad (244)$$

donde  $R_{bcd}^a$  se define como

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a. \quad (245)$$

Como sólo estamos interesados en conexiones sin torsión, el último término de (244) es cero, usando  $X_{[ab]} = \frac{1}{2}(X_{ab} - X_{ba})$  (la parte antisimétrica del tensor  $X_{ab}$ ) nos queda

$$\nabla_{[c} \nabla_{d]} X^a = \frac{1}{2} R_{bcd}^a X^b. \quad (246)$$

Ya que la parte izquierda de (246) es un tensor, se sigue que  $R_{bcd}^a$  es un tensor de tipo (1,3). A este tensor se le llama el Tensor de Riemann.

El tensor de Curvatura o tensor de Riemann-Christoffel, es definido mediante (245). Por lo que  $R_{bcd}^a$  depende de la métrica y de sus primeras y segundas derivadas. Se sigue inmediatamente de la definición, que es antisimétrico en el último par de índices

$$R_{bcd}^a = -R_{bdc}^a. \quad (247)$$

El hecho de que los símbolos de Christoffel sean simétricos nos conduce a la identidad

$$R_{bcd}^a + R_{dbc}^a + R_{cdb}^a \equiv 0. \quad (248)$$

Contrayendo el primer índice con la métrica, podemos establecer, que el tensor contraído es simétrico bajo el intercambio de el primer y el último par de índices, esto

es

$$R_{abcd} = R_{cdab}. \quad (249)$$

Combinando está ecuación con (247), notamos que el tensor contraído es antisimétrico en sus primeros pares de índices

$$R_{abcd} = -R_{bacd}, \quad (250)$$

agrupando todas las simetrías, podemos ver que el tensor contraído satisface

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab}. \quad (251)$$

Estás simetrías reducen considerablemente el número de componentes independientes, de hecho, en  $n$  dimensiones, el numero se reduce de  $n^4$  a  $\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ . Se puede mostrar, que el tensor de curvatura satisface un conjunto de identidades diferenciales llamadas las identidades de Biachi:

$$\nabla_a R_{debc} + \nabla_c R_{deab} + \nabla_b R_{deca} \equiv 0. \quad (252)$$

Usando el tensor de curvatura podemos definir otros tensores de gran importancia.

El tensor de Ricci se define por la contracción

$$R_{ab} = R_{acb}^c = g^{cd} R_{dacb}, \quad (253)$$

por lo que el tensor es simétrico de acuerdo a (249). Una contracción sobre el tensor de Ricci, define el escalar de curvatura

$$R = g^{ab} R_{ab}. \quad (254)$$

Estos dos tensores sirven para definir el tensor de Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \quad (255)$$

el cual es simétrico. y por (252), el tensor de Einstein satisface la identidad de contracción de Bianchi

$$\nabla_b G_a^b \equiv 0. \quad (256)$$

### Ecuación de Desviación Geodésica

Sabemos que una partícula que se mueve bajo la influencia de un campo gravitacional está gobernada por la ecuación

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i \phi(x), \quad (257)$$

donde  $\phi$  es el potencial. Ahora consideremos dos partículas cercanas una de la otra, una en  $x^i(t)$  y la otra en  $x^i(t) + \delta x^i(t)$ . La otra partícula obedecerá la ecuación

$$\frac{d^2(x^i + \delta x^i)}{dt^2} = -\partial^i \phi(x^i + \delta x^i). \quad (258)$$

De estas últimas dos ecuaciones podemos deducir una ecuación para  $\delta x^i$

$$\frac{d^2 \delta x^i}{dt^2} = -\partial^i \partial_j \phi(x) \delta x^j, \quad (259)$$

es la contraparte de esta ecuación lo que andamos buscando en el contexto de la Relatividad General. El punto de partida es la ecuación geodésica para  $x^a$  y para su vecina  $x^a + \delta x^a$ ,

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{bc}^a(x) \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0, \quad (260)$$

y

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(x^a + \delta x^a) + \Gamma_{bc}^a(x + \delta x) \frac{d}{d\tau}(x^b + \delta x^b) \frac{d}{d\tau}(x^c + \delta x^c) = 0. \quad (261)$$

La resta de las dos ecuaciones, a primer orden en  $\delta x^a$ , nos da una ecuación para  $\delta x^a$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(\delta x^a) + 2\Gamma_{bc}^a(x) \frac{d}{d\tau}(x^b) \frac{d}{d\tau} \delta x^c + \partial_d \Gamma_{bc}^a(x) \delta x^d \frac{d}{d\tau} x^b \frac{d}{d\tau} x^c = 0. \quad (262)$$

Está ecuación no se ve de forma covariante. En lugar de poner la ecuación en términos de  $d/d\tau$ , es mejor ponerla en términos del operador covariante  $D/D\tau$ , con

$$\frac{D}{D\tau}\delta x^a = \frac{d}{d\tau}\delta x^a + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tau}\delta x^c. \quad (263)$$

Calculando  $(D/D\tau)^2\delta x^a$ , reemplazando  $\ddot{x}^a$  que aparece en la expresión  $-\Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c$  (debido a que  $\ddot{x}^a$  satisface la ecuación de la geodésica) y usando (262), encontramos la ecuación de desviación geodésica

$$\frac{D}{D\tau}\delta x^a = R_{bcd}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \delta x^d. \quad (264)$$

## Bibliografía

- Barden, J., Carter, B., y Hawking, S. (1973). The four laws of black holes mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161.
- Bekenstein, J. (1973). Black holes and entropy. *Phys. Rev. D*, 7:2333.
- Bekenstein, J. (1974a). Generalized second law of thermodynamics in black hole physics. *Phys. Rev. D*, 9:3292.
- Bekenstein, J. (1974b). The quantum mass spectrum of the kerr black hole. *Lett. Nuovo Cimento*, 11:467.
- D'Inverno, R. (1992). *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford University Press.
- Feynman, R. y Hibbs, A. (1965). *Quantum Mechanics and Path Integrals*, page 183. McGraw-Hill, New York.
- Gibbons, G. y Hawking, S. (1977). Actions integrals and partitions functions in quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 15:2752.
- Hawking, S. (1971). Gravitational radiation from colliding black holes. *Phys. Rev. Letters*, 26:1344.
- Hawking, S. (1975). Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:149.

Makela, J. y Repo, P. (1998). A quantum mechanical model of the reissner-nordstroem black hole. *Phys. Rev. D*, 57:4899.

Misner, C., Thorne, K., y Wheeler, J. (1973). *Gravitation*.

Obregón, O., Sabido, M., y Tkach, V. (2001). Entropy using path integrals for quantum black hole models. *Gen. Rel. Grav*, 33:913.

Shannon, C. y Weaver, W. (1949). *The Mathematical theory of communications*. Univerity of Illinois Press.

Tribus, M. y McIrving, E. (1971). An elementary introduction to information theory. *Sci. Amer.*, 225:179.