

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

INSTITUTO DE INGENIERÍA

MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS E INGENIERÍA (DOCTORADO EN CIENCIAS)



“Diseño e implementación de una estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora para abordar aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California”.

**TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS**

MAXIMILIANO DE LAS FUENTES LARA

**DIRECTOR
JOSÉ LUIS ARCOS VEGA**

Mexicali, B. C.

Febrero de 2011

DEDICATORIA

A mi esposa Olga e hijos Maximiliano y Estefanía que su paciencia, comprensión y amor me han apoyado siempre y de forma incondicional a lo largo del camino que hemos compartido juntos.

A mis padres y hermanos que con su ejemplo de trabajo, dedicación, esfuerzo y perseverancia me han motivado para seguir adelante en los retos que a lo largo de mi vida he enfrentado.

AGRADECIMIENTOS

Estoy convencido que las metas, sueños y objetivos planteados son producto de la decisión, disciplina y determinación, sin embargo el trabajo en equipo, la colaboración, la asesoría, la crítica y aportación de los compañeros de trabajo son un elemento medular para avanzar significativamente, es por ello que a continuación presenté los siguientes agradecimientos.

Mi profundo agradecimiento al apoyo que he recibido de la Universidad Autónoma del Estado de Baja California, mi Alma Mater que a lo largo de 25 años de mi vida me ha permitido desarrollarme tanto como estudiante como profesionalmente en el ámbito educativo, así como también en mi realización personal.

Desde luego a mis distinguidos sinodales, los doctores Juan José Sevilla García, Jesús Francisco Galaz Fontes, Gabriel Alejandro López Morteo y Esperanza Viloria Hernández, por sus asesorías, revisión y comentarios siempre con el claro propósito de mejorar la calidad de este proyecto, y desde luego por el apoyo brindado durante todo mi trayecto como estudiante del doctorado en ciencias.

Desde luego mi agradecimiento para los maestros Álvaro Encinas Bringas, Ruth E. Rivera Castellón y Dennice Pérez González quienes colaboraron de manera importante en la experimentación y aplicación de los instrumentos de medición pre-test y post-test del proyecto de investigación realizado.

Mención especial para el Doctor José Luis Arcos Vega quien como maestro, asesor y director de tesis siempre estuvo presente y comprometido con la realización de este trabajo, con la siempre consideración de mis compromisos académicos y administrativos dentro de la Facultad de Ingeniería.

Para todos ellos, mi respeto, reconocimiento y gratitud.

TÍTULO

Diseño e implementación de una estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora para abordar aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California.

RESUMEN

La investigación objeto de esta tesis es un estudio explorativo y comparativo de la aplicación de dos formas de estructurar el proceso de enseñanza de las matemáticas, particularmente sobre el fenómeno sistema masa-resorte y los conceptos matemáticos inherentes en un programa de ecuaciones diferenciales de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California: a través de un esquema tradicional y mediante el diseño e implementación de una estrategia didáctica que incorpora la calculadora gráfica. Dicha estrategia es diseñada e implementada a partir de las teorías cognitivas (Douady, 1985; Duval, 1993, 2000, 2001, 2006a, 2006b; Hitt, 1991, 2003; Radford, 2006), los avances logrados en el campo tecnológico (Demana y Waits, 1998a, 1998b; Jiménez, 2000; Kutzler, 2003; Laborde, 2003) y su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Esta investigación exploró la relación entre el concepto sistema masa-resorte y la eficiencia de los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes cuando son sometidos a dos enfoques de enseñanza distintos. La eficiencia de conocimientos de los estudiantes es valorada y comparada desde la perspectiva de las competencias matemáticas de modelado, planteamiento y resolución de problemas, utilización del lenguaje simbólico y la representación, mientras que se evalúo también el desempeño a través de la actividad cognitiva de representación, tratamiento y conversión. El balance general de la investigación respecto de la eficiencia de conocimientos en cuanto a competencias y actividad cognitiva favorece de manera significativa al grupo experimental.

ÍNDICE

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA.....	1
DEDICATORIA.....	2
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Planteamiento del problema.....	6
1.2 Hipótesis	10
1.3 Objetivos.....	11
1.4 Importancia del estudio.....	12
1.5 Limitaciones del estudio	13
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL	14
2.1 Análisis de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería.....	14
2.2 Esquema reformado de la enseñanza de las matemáticas.....	17
2.3 Dialéctica herramienta (instrumento) – objeto y el juego de marcos.	18
2.4 Dualidad estructural – operacional de los conceptos	21
2.5 Competencia matemática.....	21
2.6 Teoría de las representaciones semióticas.....	25
2.7 Incorporación de tecnología y la calculadora en la enseñanza de las matemáticas.....	30
2.8 La calculadora en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.....	39
2.9 El contenido matemático.....	42
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	47
3.1 Método	48
3.2 Sujetos	49
3.3 Materiales de la investigación.....	50
3.3.1 Instrumento de medición diagnóstica.....	50
3.3.1.1 Validez de Contenido.....	55
3.3.1.2 Validez de Criterio.....	56
3.3.1.3 Validez de Constructo	62
3.3.1.4 Confiabilidad	66
3.3.1.5 Índices de dificultad y de discriminación	72
3.3.2 Estrategia didáctica.....	76
3.3.3 Instrumento de medición (posprueba).....	82
3.3.3.1 Validez de contenido	87
3.3.3.2 Validez de criterio	88
3.3.3.3 Validez de constructo.....	94
3.3.3.4 Confiabilidad	100
3.3.3.5 Índices de dificultad, discriminación y punto biserial.....	104
3.4 Procedimiento	110
CAPÍTULO IV. RESULTADOS	116
4.1 Análisis descriptivo en grupos de pre-test.....	116

4.2	Análisis descriptivo en grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional	124
4.3	Análisis descriptivo en grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora.	131
4.4	Análisis comparativo de grupos con enfoque tradicional y con estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora.....	138
4.4.1	Análisis comparativo específico entre los subgrupos de post-test	139
4.4.2	Comparativo general de enfoques de enseñanza tradicional y con tecnología de calculadora	142
4.4.3	Comparativo de índices de competencias matemáticas entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza	143
4.4.4	Comparativo de índices de actividad cognitiva entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza.....	148
4.4.5	Comparativo de índices de complejidad de la comprensión entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza	151
4.4.6	Comparativo de índices del nivel de dificultad entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza.....	154
4.4.7	Comparativo de índices del registro inicial entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza.....	157
4.4.8	Comparativo de índices del registro final entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza.....	161
4.5	Resultados de la encuesta para evaluar la estrategia didáctica y su aplicación durante el proceso de enseñanza del fenómeno denominado sistema masa-resorte.....	165
CAPÍTULO V.		172
5.1	Discusión.....	172
5.1.1	Diseño y confiabilidad del instrumento pre-test y post-test.....	172
5.1.2	Del instrumento diagnóstico o pre-test	173
5.1.3	Grupos post-test con estrategia de enseñanza tradicional.....	175
5.1.4	Grupos post-test con estrategia de enseñanza con tecnología de la calculadora	176
5.1.5	Comparativo general entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza	178
5.1.6	Índices de competencias matemáticas entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza	179
5.1.7	Índices de actividad cognitiva entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza	180
5.1.8	Índices de complejidad conceptual entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza	181
5.1.9	Índices de nivel de dificultad entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza	181
5.1.10	Índices de registro inicial y final grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza.....	181
5.2	Conclusiones.....	184

5.3 Recomendaciones.....	188
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	191
Apéndice A. Instrumento de medición diagnóstico.....	200
Apéndice B. Estrategia didáctica.....	209
Apéndice C. Instrumento de medición (post-test).....	231
Apéndice D. Instrumento para evaluar la implementación de la estrategia didáctica.....	240
Apéndice E. Hipótesis estadísticas a grupos de Pre-test.....	242
Apéndice F. Hipótesis estadísticas a grupos Post-test con enfoque de enseñanza tradicional	269
Apéndice G. Hipótesis estadísticas a grupos Post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora.	291
Apéndice H. Artículo publicado: Impacto en las competencias matemáticas de los estudiantes de ecuaciones diferenciales a partir de una estrategia didáctica que incorpora calculadora.....	314

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Competencias matemáticas e indicadores de acuerdo a PISA (2003c).	23
Tabla 2. Distribución de los alumnos participantes por grupo.....	49
Tabla 6. Composición del examen diagnóstico en cuanto a su contenido.....	62
Tabla 8. Correspondencia entre reactivo y componente principal (continuación).....	65
Tabla 9. Resultados del diagnóstico y confiabilidad de Kuder-Richarson (continuación).....	68
Tabla 10. Resultados del instrumento de medición diagnóstico mediante el método de mitades partidas.....	69
Tabla 10. Resultados del instrumento de medición diagnóstico mediante el método de mitades partidas (continuación).	70
Tabla 10. Resultados del instrumento de medición diagnóstico mediante el método de mitades partidas (continuación).	71
Tabla 13 Conformación de la estrategia didáctica.....	79
Tabla 13 Conformación de la estrategia didáctica (continuación).	80
Tabla 13 Conformación de la estrategia didáctica (continuación).	81
Tabla 13 Conformación de la estrategia didáctica (continuación).	82
Tabla 14. Distribución de reactivos de acuerdo a la competencia e indicador.....	83
Tabla 16. Comparativo del post-test y el examen colegiado de matemáticas I.	89
Tabla 16. Comparativo del post-test y el examen colegiado de matemáticas I (continuación).....	90
Tabla 17. Comparativo del post-test y el examen colegiado de matemáticas II (continuación).....	92
Tabla 18. Comparativo de calificaciones del post-test y las calificaciones de ecuaciones diferenciales registradas en el historial académico.....	93
Tabla 18. Comparativo de calificaciones del post-test y las calificaciones de ecuaciones diferenciales registradas en el historial académico (continuación).....	94
Tabla 19. Matriz de componentes principales para el post-test	95
Tabla 20. Correspondencia entre reactivo y componente principal para el post- test	97
Tabla 20. Correspondencia entre reactivo y componente principal para el post- test (continuación).....	98

Tabla 20. Correspondencia entre reactivo y componente principal para el post-test (continuación).....	99
Tabla 21. Resultados del post-test y confiabilidad de Kuder-Richarson.....	101
Tabla 23. Calificación del reactivo del post-test de acuerdo al índice de dificultad	105
Tabla 24. Calificación del índice de discriminación de los reactivos del post-test .	106
Tabla 24. Calificación del índice de discriminación de los reactivos del post-test (continuación).....	107
Tabla 25. Calificación del reactivo de acuerdo al coeficiente de correlación del punto biserial	108
Tabla 25. Calificación del reactivo de acuerdo al coeficiente de correlación del punto biserial (continuación).	109
Tabla 26. Mortalidad de los grupos experimentales	113
Tabla 27. Parámetros estadísticos de los grupos en el pre-test	117
Tabla 28. Validación estadística de la uniformidad entre grupos del pre-test.....	117
Tabla 29. Índices promedio de dificultad obtenido en las competencias matemáticas en el pre-test.....	118
Tabla 30. Validación estadística de competencias matemáticas en el pre-test.....	119
Tabla 31. Índices promedio para las actividades cognitivas en el pre-test	120
Tabla 32. Validación estadística de actividades cognitivas del pre-test	120
Tabla 33. Índices promedio de dificultad para la complejidad de la comprensión en el pre-test.	121
Tabla 34. Validación estadística de la complejidad conceptual del pre-test.....	121
Tabla 35. Índices promedio de dificultad para el nivel de complejidad de reactivos del pre-test.....	121
Tabla 36. Validación estadística del nivel de dificultad entre grupos del pre-test.	122
Tabla 37. Índices promedio de dificultad para los registros iniciales de los reactivos en el pre-test.	122
Tabla 38. Validación estadística del registro inicial entre grupos del pre-test	122
Tabla 39. Índices promedio de dificultad para los registros finales de los reactivos del pre-test.....	123
Tabla 40. Validación estadística del registro final entre grupos del pre-test.....	124
Tabla 41. Parámetros estadísticos de los grupos con enfoque de enseñanza tradicional obtenidos en el post-test.....	124

Tabla 42. Validación estadística de la uniformidad entre grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional	125
Tabla 43. Índices promedio de dificultad para las competencias matemáticas de los alumnos del grupo de control en el post-test.....	125
Tabla 44. Validación estadística de competencias matemáticas en grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional.....	126
Tabla 45. Índices promedio de dificultad para la actividad cognitiva de los grupos de control en el post-test	127
Tabla 46. Validación estadística de actividades cognitivas del grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional	127
Tabla 47. Índices promedio de dificultad para la complejidad de la comprensión del grupo de control en el post-test.....	128
Tabla 48. Validación estadística de la complejidad conceptual del grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional	128
Tabla 50. Validación estadística del nivel de dificultad entre grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional	129
Tabla 51. Índice promedio de dificultad para el grupo de control en cuanto al registro inicial de los reactivos en el post-test.	129
Tabla 52. Validación estadística del registro inicial entre grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional.....	130
Tabla 53. Índice promedio de dificultad para el grupo de control en cuanto al registro final de los reactivos en el post-test.	130
Tabla 54. Validación estadística del registro final entre grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional.....	131
Tabla 55. Parámetros estadísticos en cuanto a los aciertos obtenidos por los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.	132
Tabla 56. Validación estadística de la uniformidad entre grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora.....	132
Tabla 57. Índices promedio de dificultad en cuanto a las competencias matemáticas de los estudiantes de los grupos experimentales.	132
Tabla 58. Validación estadística de competencias matemáticas en grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora ...	133
Tabla 59. Índices promedio de dificultad para las actividades cognitivas de los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.	134
Tabla 60. Validación estadística de actividades cognitivas del grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora.....	134

Tabla 61. Índices promedio de dificultad en cuanto a la complejidad de la comprensión de los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.	135
Tabla 62. Validación estadística de la complejidad conceptual del grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora	135
Tabla 63. Índices promedio de los niveles de dificultad de los reactivos del post-test.	136
Tabla 64. Validación estadística del nivel de dificultad entre grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora.....	136
Tabla 65. Índices promedio de dificultad en cuanto a los registros iniciales de los reactivos que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.	137
Tabla 66. Validación estadística del registro inicial entre grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora.....	137
Tabla 67. Índices promedio de dificultad en cuanto a los registros finales de los reactivos que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.	138
Tabla 68. Validación estadística del registro final entre grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora.....	138
Tabla 69. Parámetros estadísticos en cuanto al número de aciertos que obtuvieron los estudiantes en los grupos de control y piloto en el post-test.	139
Tabla 70. Parámetros estadísticos en cuanto al número de aciertos obtenidos por los estudiantes en el post-test.	142
Tabla 71. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto a las competencias matemáticas de los grupos de control y piloto.	144
Tabla 72. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto a la actividad cognitiva de los estudiantes del grupo de control y piloto en el post-test.	148
Tabla 73. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto a la complejidad de la comprensión de los estudiantes del grupo experimental y de control.....	151
Tabla 74. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto a los niveles de dificultad de los reactivos en el post-test, para los estudiantes del grupo de control y experimental.	154
Tabla 75. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto al registro inicial de los reactivos del post-test de los estudiantes del grupo de control y piloto.....	157

Tabla 76. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto al registro final de los reactivos del post-test, de los estudiantes del grupo piloto y de control.....	161
--	-----

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Sistema masa-resorte	8
Figura 2. La calculadora Texas Instruments, Voyage-200.	36
Figura 3 Secuencia de gráficos y sus respectivas dimensiones con calculadora.	37
Figura 4. Modelo del uso de registros de representación con la calculadora.....	42
Figura 5. Distribución de la dificultad de los reactivos del instrumento de medición diagnóstico.	74
Figura 6. Caracterización de reactivos del Post-Test.....	84
Figura 7. Gráfico de los índices promedio de dificultad obtenido en el pre-test contra las competencias matemáticas	118
Figura 8. Índices promedio de dificultad para el registro final de los reactivos del pre-test.....	123
Figura 9. Gráfico de barras de los índices promedio de dificultad para las competencias matemáticas de los alumnos del grupo de control en el post-test.	126
Figura 10. Gráfico de los índices promedio de dificultad contra las competencias matemáticas de los estudiantes de los grupos experimentales.	133
Figura 11. Gráfico comparativo en cuanto al promedio de reactivos correctos por los grupos de control y piloto.....	140
Figura 12. Comparativo de los índices promedio de dificultad en cuanto a las competencias matemáticas de los estudiantes del grupo de control y piloto en el post-test.	144
Figura 13. Comparativo de los índices promedio de dificultad en cuanto a la actividad cognitiva de los estudiantes del grupo de control y piloto en el post-test.	148
Figura 14. Comparativo de los índices promedio de dificultad en cuanto a la complejidad de la comprensión de los estudiantes del grupo de control y piloto en el post-test.....	152
Figura 15. Comparativo gráfico de los índices promedio en cuanto al nivel de dificultad de los reactivos del post-test, para los estudiantes del grupo de control y piloto.	154
Figura 16. Comparativo gráfico de los índices promedio de dificultad en cuanto al registro inicial de los reactivos del post-test, de los estudiantes del grupo de control y piloto.	158

Figura 17. Gráfico comparativo de los índices promedio de dificultad en cuanto al registro final de los reactivos en el post-test.	162
Figura 18. Importancia de que en los cursos de matemáticas se incorpore nuevas tecnologías.	165
Figura 19. Tiempo utilizado para la implementación de la estrategia didáctica.....	166
Figura 20. Organización de la implementación de la estrategia didáctica	166
Figura 21. Equipo, mobiliario e instalaciones con que se llevó a cabo la implementación de la estrategia didáctica.....	167
Figura 22. Conocimientos del instructor durante la implementación de la estrategia didáctica.....	168
Figura 23. Promoción del estudiante para con las ecuaciones diferenciales	168
Figura 24. Mejoramiento de las habilidades matemáticas de los estudiantes a partir de la incorporación de la calculadora.....	169
Figura 25. Participación del estudiante en cursos asistidos totalmente con tecnología de la calculadora.....	169
Figura 26. Acercamiento al conocimiento de manera sencilla y atractiva a través de la calculadora.	170
Figura 27. Habilidades y conocimientos de nivel superior.....	170

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

En México, la calculadora tiene una fuerte repercusión en el nivel superior. Todos los estudiantes de ingeniería cuentan con una calculadora ya sea científica, programable, gráfica o con sistema de cómputo algebraico. Sin embargo a diferencia de otros países, no se le ha utilizado de manera planificada y se ha restringido su uso al de una herramienta para realizar cálculos rápidos y no para el desarrollo de conceptos.

Queralt (2000) en el análisis que realiza respecto del uso de la calculadora gráfica señala que al margen de su presencia y potencialidad del dispositivo electrónico, el avance con respecto a su incorporación en la educación ha sido efímera, pues básicamente esto se debe a la resistencia del profesorado para su aceptación.

Rosa (2001) apunta que el atraso existente en la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas se debe entre otras cosas a las concepciones de los docentes respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como también a la ignorancia de las potencialidades que dichos instrumentos poseen.

Para el año 2000 el Consejo Nacional para la Enseñanza de las Matemáticas (con siglas en inglés) NCTM publicó el libro *Principles and Standards for School Mathematics (PSSM)*, en el cual distingue como eje rectores los principios siguientes: igualdad o equidad de la educación, currículo, enseñanza, aprendizaje, evaluación que apoye la enseñanza y el aprendizaje, *y el uso de tecnología*; en cuanto a los estándares, discrimina dos áreas, la de contenido y la de proceso, en esta última se apuntan: la resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, *conexiones*, *y representación* (que no estaba en la versión del anterior del PSSM).

Chavarría y Ruiz (2000) presentan resultados del Third International Mathematics and Science Study, TIMSS, un estudio de carácter comparativo realizado en 1999, con la participación de 37 países y estudiantes de octavo año (segundo de secundaria en México),

en el cual Estados Unidos obtuvo la posición 18 (en el área de matemáticas), mientras que países asiáticos como Singapur, República de Corea, Taiwán, Hong Kong y Japón estuvieron en los primeros lugares, presuponiendo que los resultados obtenidos por estudiantes de Estados Unidos de alguna manera se deben a que los estudiantes no acceden a la comprensión matemática, sino que más bien a la repetición de procedimientos básicos, característica de una enseñanza predominantemente tradicional y algorítmica.

La investigación en Matemática Educativa, y particularmente la que concierne a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, ha contribuido a aclarar ciertos aspectos de esta problemática. Como por ejemplo la ausencia de significados para las nociones del cálculo bajo la enseñanza tradicional, y el estudio del cálculo por sí mismo, sin ubicarlo como herramienta para modelar, analizar y resolver problemas y situaciones prácticas.

Durante la sexta escuela de verano del ACDCA (Centro Austriaco para la Didáctica del Cómputo Algebraico) Jiménez (2000), presenta una reflexión en torno a la vinculación dinámica de las representaciones del conocimiento matemático como poco aprovechada en relación a los dispositivos electrónicos con los cuales hoy en día se cuenta. El dispositivo Sistemas de Cómputo Algebraico (llamado CAS por su siglas en inglés) además de su acceso simultáneo a dos registros de representación, (en De Las Fuentes 2004 puede observarse el tratamiento con tres registros de manera simultánea) permite trabajar en el ambiente natural de las matemáticas en virtud de su cálculo exacto, no es difícil pensar por la capacidad de esta herramienta tecnológica que se convierta en un elemento común o estándar en la enseñanza de las matemáticas en los niveles de educación media y superior.

Jiménez (2000) hace énfasis en la posibilidad del dispositivo CAS para vincular dinámicamente las representaciones gráfica, tabular o numérica y algebraica o analítica, y que precisamente este hecho permite un enfoque cualitativamente diferente a la enseñanza tradicional, adicionalmente reconoce que en la mayoría de las propuestas didácticas es aún desaprovechado este potencial.

Hay poco desarrollo investigativo en el campo de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales incorporando la calculadora, comparado con lo existente en cálculo y

precálculo, sin embargo encontramos en Saucedo (2005) una propuesta didáctica basada en la experimentación de un fenómeno físico, la variación de la temperatura, a partir del cual es posible generar un modelo matemático, su estudio y análisis mediante la vinculación de los registros tabular, gráfico y algebraico.

Saucedo (2005) señala que a partir de la experimentación y la incorporación de tecnología es factible visualizar matemáticamente (a través de una función) el fenómeno en cuestión promoviendo una mejor comprensión en el estudiante del concepto matemático.

El PEB es el programa para la construcción y equipamiento de la educación, de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE). Dentro de este programa y con el objeto de mejorar la escuela en general y en particular el Reino Unido, está invirtiendo cantidades millonarias de libras esterlinas y probar diferentes enfoques de enseñanza y aprendizaje simultáneamente. Stuebing (2004) señala al respecto que una de las cinco áreas de interés clave en este programa versa sobre la flexibilidad y adaptabilidad en respuesta a los avances de la tecnología en el campo educacional.

En la formación profesional del ingeniero es de suma importancia promover y realizar investigación educativa (NAE, 2005) para entender como los estudiantes aprenden, y como van asociando los conceptos y los algoritmos y modelos asociados a los mismos, especialmente cuando se incorpora tecnología en la enseñanza de las matemáticas, pues las implicaciones tienen que ver tanto en la enseñanza, el aprendizaje, el currículo y la evaluación, por mencionar elementos primordiales, Demana y Waits (1998) señalan que tales investigaciones deben abocarse a la evaluación del aprendizaje, así como también del impacto que tiene en la clase el uso de calculadoras.

Finalmente, el bajo rendimiento en matemáticas al cual se ha hecho alusión con varios escenarios deviene de manera importante de la deficiencia que presentan los estudiantes para representar y efectuar tratamientos y conversiones entre los diferentes registros de representación de los conceptos matemáticos, así como también de la dificultad señalada por De Las Fuentes (1998) en donde los estudiantes no vinculan de manera apropiada los

conceptos matemáticos y los algoritmos asociados a los mismos en la resolución de determinados problemas, particularmente de aquellos que tienen que ver con el estudio y comprensión de fenómenos que se presentan en el campo de la ingeniería, parece deberse a dos importantes aspectos, por una parte, la preponderancia de la enseñanza de las matemáticas basadas en un enfoque tradicional, en el que como señala Jiménez (2000) este se centra en a lo más tres tipos de conexiones, de la representación verbal a la tabular, de la representación tabular a la gráfica, y de la representación analítica a la representación gráfica. Y por otra parte, en virtud de la ausencia del uso de la tecnología (por las concepciones de los profesores), o en su defecto por el uso inadecuado que se da del mismo.

Las actividades en ingeniería relacionadas al diseño e investigación, no sólo requieren de una buena manipulación algebraica, de la determinación de modelos o representaciones algebraicas con las que se pueda estudiar o analizar el proceso físico, químico o fenómeno de que se trate, sino también de una aprehensión conceptual del objeto matemático en cuestión. Solo si es posible operar o trabajar el proceso en distintas representaciones se puede dar un mejor tratamiento de aspectos especializados en nuevas situaciones; y así mismo facultar su estudio.

Los cursos de matemáticas de nivel superior buscan que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos y que puedan ser aplicados en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. En ellos, también se espera que los estudiantes desarrollen competencias y habilidades en el manejo de dichos conceptos en sus diferentes representaciones: algebraico, numérico, gráfico e inclusive en el lenguaje natural, así como también que logren competencias para modelar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje simbólico y formal. Esta acción presupone la plena comprensión de un concepto matemático, cuanto más si la situación de aprendizaje está enmarcada en un contexto físico, de ciencia o de ingeniería.

En el presente estudio se diseñó, implementó y evaluó una estrategia didáctica para la mejor comprensión y aplicación del fenómeno sistema masa-resorte, que involucra en

términos de contenido: ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, se utilizó como herramienta tecnológica la calculadora TI-voyage 200. Esta herramienta de apoyo para la enseñanza y el aprendizaje permite a través de sus aplicaciones visualizar y conectar de manera dinámica las distintas representaciones en la educación matemática a saber: gráfica, numérica, algebraica e icónica.

Actualmente la Facultad de ingeniería campus Mexicali tiene un espacio destinado como laboratorio de matemáticas, que incluye la disponibilidad de *30 calculadoras voyage 200 disponibles para el uso por parte de los estudiantes de la institución*, además de contar con accesorios para la proyección del trabajo realizado con tales dispositivos electrónicos.

Esta investigación y el conocimiento que se obtiene de ella coadyuvarán al fortalecimiento y mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en ingeniería en lo general, y en lo particular en la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y su aplicación en la ingeniería, consecuentemente, y de manera indirecta muy probablemente permitirá también por una parte abatir los altos índices de reprobación y mejorar el aprovechamiento escolar de los estudiantes, así como también y de manera muy importante, contribuir al conocimiento del impacto que la tecnología de avanzada, específicamente la calculadora, tiene en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para ingeniería.

En particular, se propone que a partir de los resultados de la investigación se evalúen los siguientes aspectos:

- La efectividad relativa del diseño, en términos de juzgar si es capaz o no de promover el conocimiento matemático en cuanto a las competencias matemáticas y las actividad cognitiva de representación, tratamiento y conversión, de hacerlo avanzar de una actividad a la siguiente, y de ayudarlo a construir el conocimiento matemático relativo al concepto sistema masa-resorte.

- La naturaleza de las dificultades que, es su caso, enfrenten los estudiantes al interactuar con las actividades de aprendizaje mediadas por la calculadora.
- La publicación de los resultados parciales y finales obtenidos, así como también proposición de otras investigaciones relativas al escenario de estudio, son elementos trascendentes que aportan sustento al trabajo desarrollado.

1.1 Planteamiento del problema

En la actualidad resulta incuestionable que los resultados que se obtienen en los cursos de ciencias básicas (y particularmente de matemáticas) de prácticamente cualquier nivel escolar no son satisfactorios. Un estudio intencional realizado bajo los auspicios de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico PISA (2003b) revela las puntuaciones obtenidas por jóvenes estudiantes de 15 años de edad de los países miembros y asociados, México se incorpora a este organismo desde 1994 y participa en esta evaluación obteniendo un promedio de 385 puntos (contra una media general de la OCDE de 500), muy por debajo de los países europeos y asiáticos.

Reportes de resultados del examen general de egreso de licenciatura (EGEL) del Centro Nacional de Evaluación para la Educación Superior (CENEVAL) referente a estudiantes potencialmente a egresar de algunas carreras de ingeniería promedian en el área de matemáticas 972 puntos, es decir, no se alcanza el mínimo deseable estipulado en la escala de CENEVAL que es de 1000 puntos. Lo que es una situación preocupante, pues una característica esperada de los ingenieros egresados es que cuenten con conocimientos sólidos en las áreas de matemáticas, física y química, para la elaboración de diseños y proyectos que sean la respuesta segura, funcional y económica a problemas de orden social y tecnológico.

Si se observan las características de la enseñanza de las matemáticas en el nivel superior, es factible percatarse del empirismo de los profesores que en él se labora. La gran mayoría de los docentes son profesionales de algún campo de conocimiento pero no se les preparó y mucho menos formó para la docencia.

Estudios muestran claramente que la enseñanza universitaria se centra en el funcionamiento dentro del cuadro analítico o algebraico, en una praxis algorítmica y en la evaluación de las competencias algebraicas correspondientes (Artigue, 1995). Sólo se prepara a los estudiantes con destrezas y capacidades algorítmicas, sin incorporar ni los avances en el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes ni los recursos tecnológicos modernos.

Laborde (2003) señala que la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas permite a los estudiantes visualizar fenómenos matemáticos, hacer conexiones y realizar experimentos, es decir, da la posibilidad de un acceso real a las matemáticas para los estudiantes.

Una experiencia de investigación en la Facultad de Ingeniería de la UABC (De Las Fuentes, Encinas y Bravo 2005), en la que se diseñó e implementó una estrategia didáctica que incorpora la calculadora Voyage 200 para abordar derivadas sucesivas y en la cual se enfatizó la conversión de las representaciones gráficas y algebraicas, permite concluir que los estudiantes asocian (entre la función y su derivada) favorablemente características geométricas esenciales (puntos críticos, inflexión, concavidades, etc.). En esta investigación de carácter explorativa que se llevó a cabo durante 2005 participaron 64 estudiantes de primer semestre, dentro del curso de matemáticas I para ingeniería.

En la formación del ingeniero el 20% de la carga curricular son cursos del área de matemáticas, álgebra lineal, matemáticas I, II, y III, ecuaciones diferenciales, entre otras asignaturas mas. Las ecuaciones diferenciales y el estudio y aprendizaje de las mismas nos permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de virus, sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos, son ejemplos comunes de ello. Uno de los tópicos a estudiar durante el curso de ecuaciones diferenciales, es el denominado sistema masa-resorte, el cual se describe en términos generales a continuación:

A un punto fijo se une el extremo de un resorte (Figura 1), al otro extremo del resorte se le pende un objeto sólido (con masa definida). El peso del objeto estira el resorte a partir de su longitud natural, consecuentemente el resorte ejerce una fuerza de restitución en dirección opuesta, el movimiento del objeto o contrapeso es determinado por el equilibrio entre la fuerza de gravedad y la fuerza de restauración junto con otras fuerzas que pueden estar presentes, tales como una fuerza de amortiguamiento u otra causada por algún mecanismo externo (Ledder, 2006).

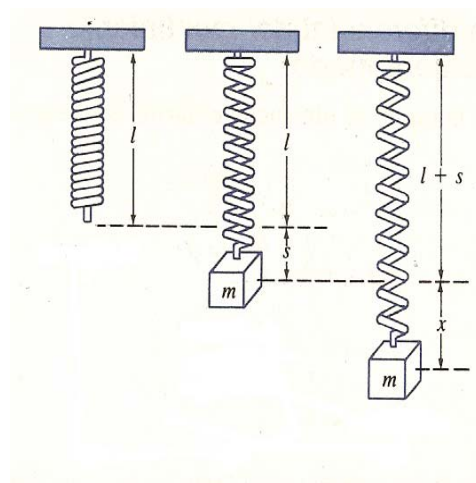


Figura no. 1 Sistema masa-resorte

Obtenida de Zill (2006).

Figura 1. Sistema masa-resorte

El sistema descrito tiene diversas implicaciones prácticas y profesionales, los sistemas de amortiguamiento de vehículos de transporte cotidiano y de carga, como tractocamiones, autobuses y aviones, presentan de manera inherente el sistema citado, los análisis sísmicos para estructuras habitacionales, médicas, de negocios, recreación o de otra índole son modelados a través de los sistemas masa-resorte, la fabricación de productos por medio de robots o maquinaria pesada requiere tanto para su estabilidad como para su producción misma el análisis y diseño de piezas, uniones, brazos o soportes involucrando el sistema mencionado, la aparición del fenómeno que nos ocupa es pues múltiple en las áreas de ingeniería, por ello la importancia de su estudio teórico y comprensión de parte de los estudiantes.

Una situación que impera actualmente en esta universidad son los índices de reprobación estudiantil en los cursos de ecuaciones diferenciales del 25% en promedio, lo cual es preocupante, por tal motivo se rezagan o desertan más de 75 alumnos por semestre solamente debido a esta asignatura. En atención a lo anterior, y centrándonos en la problemática de la enseñanza de las matemáticas en ingeniería, el presente proyecto propone incidir favorablemente en la eficiencia de los conocimientos de los estudiantes, a partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica de enseñanza que incorpora

la calculadora como medio de producción de significados a partir de la vinculación dinámica de 5 registros de representación (icónico, algebraico, tabular, gráfico y verbal) del fenómeno denominado sistema masa-resorte.

Por lo que el problema de investigación se ha planteado mediante el siguiente cuestionamiento: **¿Existe diferencia en la eficiencia de los conocimientos matemáticos empleando el sistema masa-resorte que alcanzan los alumnos de ingeniería cuando son sometidos a una enseñanza tradicional y con estrategia didáctica alterna que incorpora tecnología de la calculadora gráfica en la Facultad de Ingeniería Mexicali?.**

Durante el desarrollo de la investigación se responderán las siguientes preguntas específicas:

1. ¿De qué manera ha influenciado la calculadora la enseñanza de las matemáticas en ingeniería?
2. ¿Cómo se caracteriza el enfoque tradicional de enseñanza de las matemáticas para ingeniería y cuál es su repercusión en los estudiantes respecto del conocimiento que estos logran?
3. ¿Qué problemas se generan en la enseñanza de las matemáticas para ingeniería cuando se utiliza una estrategia didáctica que incorpora la calculadora?
4. ¿Cuáles son los obstáculos para que los estudiantes no aprovechen la tecnología con la que se cuenta hoy en día?
5. ¿Cuáles son las calculadoras que hoy en día se han incorporado en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para ingeniería y cuál es su potencial para desarrollar funciones de mediador en la enseñanza?
6. A partir del diseño e implementación de una estrategia didáctica que incorpora la calculadora y considerando la vinculación entre cinco registros (icónico, gráfico, algebraico, verbal y numérico) de representación, ¿en cuál de ellos los estudiantes logran un mejor desempeño?

1.2 Hipótesis

En esta investigación la eficiencia del conocimiento se considera que puede expresarse de acuerdo a PISA (2003c), mediante las competencias siguientes: modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, ya que en conjunto describen los procesos para el dominio del fenómeno sistema masa-resorte aunado a las ecuaciones diferenciales asociadas (cfr. Tabla 1).

La variable dependiente eficiencia de los conocimientos se cuantificará en una escala de 0 a 100. Para efecto comparativo también se utilizará el índice de dificultad, el cual está relacionado con la proporción de estudiantes que resuelven correctamente un reactivo, y se calcula de acuerdo a Crocker y Algina, (1986). De acuerdo a la definición de las variables estructurales y los objetivos que se persiguen en el estudio, se plantean las hipótesis nula y alternativa de la siguiente forma.

Las variables dependiente e independiente determinadas en el proyecto de investigación son:

La variable dependiente: La eficiencia de los conocimientos matemáticos que adquieren los estudiantes.

La variable independiente: La estrategia de enseñanza utilizada para abordar el concepto en cuestión, en este caso se consideran dos variables independientes, la primera referida al diseño e implementación de una estrategia didáctica que incorpora la calculadora, y la segunda, siguiendo un esquema tradicional de enseñanza.

Para efecto de dar respuesta al problema de esta investigación se han planteado el par de hipótesis siguiente:

Hipótesis nula, (H0)

La enseñanza de los conocimientos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte en el programa de ecuaciones diferenciales mediante una estrategia didáctica que incorpora la calculadora tiene igual influencia en el nivel de eficiencia que alcanzan los alumnos de las competencias matemáticas (Modelar, Plantear y resolver problemas, Representar, Utilizar el lenguaje simbólico y formal, y ejecutar los cálculos) que la enseñanza basada en un esquema tradicionalista.

Hipótesis alternativa, (H1)

La enseñanza de los conocimientos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte en el programa de ecuaciones diferenciales mediante una estrategia didáctica que incorpora la calculadora tiene una mayor influencia en el nivel de eficiencia que alcanzan los alumnos, en las competencias matemáticas, que la enseñanza basada en un esquema tradicionalista.

1.3 Objetivos

En consideración a los planeamientos señalados, el presente proyecto de investigación pretende los objetivos siguientes:

Objetivo general

El objetivo de la investigación es comparar la eficiencia de los conocimientos que alcanzan los estudiantes cuando se abordan los conceptos matemáticos asociados al sistema masa-resorte en el curso de ecuaciones diferenciales a partir de un esquema de enseñanza tradicional y otro que incorpora estrategias didácticas con tecnología de la calculadora.

Los objetivos específicos son los siguientes:

1. Producir una estrategia didáctica que promueva en el alumno la eficiencia del conocimiento matemático relacionado con el sistema masa-resorte.

2. Observar los efectos generados con el diseño e implementación de una estrategia de enseñanza que incorpore la tecnología como medio de producción de significados y estímulo para el desarrollo de competencias matemáticas.
3. Indagar de manera profunda sobre las capacidades y potencialidades de la calculadora como mediador de la enseñanza en las matemáticas para ingeniería

1.4 Importancia del estudio

Ciertos textos de matemáticas del nivel medio superior y superior que han gozado de la popularidad en la última década han sido objeto de revisión y modificación para incluir ejemplos, ejercicios, problemas, proyectos e incluso el tratamiento de algunos tópicos a partir del uso de las calculadoras gráficas simbólicas. Por ejemplo, la décima edición, 2002, del libro de álgebra y trigonometría con geometría analítica de Swokowski y Cole incorporan actividades (en todos los capítulos) apoyados con las calculadoras TI-83 Plus y TI-86. La cuarta edición 2002 del libro de cálculo de James Steward sugiere la realización de las actividades utilizando la calculadora TI-92.

En la actualidad, el empleo de la tecnología de la enseñanza de las matemáticas bajo ciertas consideraciones teóricas ha fortalecido las expectativas de lograr un aprendizaje más significativo y sólido por la mayoría de los alumnos; en este proyecto se propone la utilización de la calculadora gráfica simbólica y programable, que es de fácil acceso a estudiantes (comparada con el equipo de computación), con el propósito de abatir los resultados insatisfactorios de la enseñanza tradicional.

Como producto de esta investigación se espera la obtención de una estrategia didáctica replicable en la enseñanza de las matemáticas para ingeniería, que contribuya a mejorar la eficiencia de los conocimientos alcanzados por los estudiantes cuando se aborda el estudio del fenómeno sistema masa-resorte que involucra ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Desarrollo favorable de las competencias de los estudiantes en cuanto modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar cálculos, puesto que tales competencias refuerzan y enriquecen en general el desempeño matemático de los estudiantes.

La obtención de un mayor conocimiento tanto de la problemática que se presenta cuando se incorpora tecnología de la calculadora en el proceso de enseñanza como de los beneficios y competencias que adquieren o desarrollan los estudiantes de ingeniería.

1.5 Limitaciones del estudio

El estudio está centrado en el desarrollo y mejoramiento de las competencias de los estudiantes de ingeniería en cuanto a: modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y ejecutar cálculos asociados con los conocimientos matemáticos del fenómeno denominado sistema masa-resorte, mediante la incorporación y uso de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden. Para el desarrollo de estas competencias citadas se incorpora tecnología de la calculadora, específicamente se trata de la calculadora voyage-200. El estudio se aboca a los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California.

CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

En virtud de que el planteamiento del problema, así como las hipótesis y objetivos de la investigación involucran de manera preponderante la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos matemáticos, se habrá de revisar y analizar las teorías cognitivas de Raymond Duval, Fernando Hitt y Regine Douady, a la par de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería y el enfoque reformado de la enseñanza. Además, por incluir la tecnología de avanzada, particularmente la calculadora, en la estrategia didáctica para el diseño e implementación, se describirá los avances logrados en el campo tecnológico, Kutzler, Demana, Waits, Jiménez y Laborde.

A continuación y de manera muy breve se caracterizan los enfoques de enseñanza, las teorías cognitivas citadas y los avances en el campo tecnológico.

2.1 Análisis de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería

Al revisar las características de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería, es factible percatarse del empirismo con el que los docentes atienden los procesos educativos. La mayoría son profesionales de alguna especialidad en la propia ingeniería, sin haber tenido preparación en el ámbito docente. La buena dicción, la prestancia, los cambios de volumen y tono de voz, los comentarios introductorios que motiven, la coherencia en las ideas, aclaraciones con lenguaje apropiado, la mímica, además del uso de los recursos tecnológicos como los proyectores, videos, equipo computacional, son claros ejemplos de los recursos con los que cuenta para desarrollar la actividad docente.

Los recursos mencionados serán usados por el profesor sobre la base de sus concepciones de objetivos, contenidos, enseñanza y aprendizaje. Si el docente concibe que mediante una exposición magistral respecto de algún tema de interés para los estudiantes o por organizarlos mediante dinámicas grupales, éstos *aprenderán*, y si además, verifica o corrobora tal aprendizaje por medio de un examen en el cual el alumno reproduce en el momento y lugar preciso definiciones o conceptos matemáticos y ejecuta convenientemente

aunque de manera temporal operaciones de corte un tanto automatizadas por la práctica cotidiana, entonces sus actividades estarán centradas en esa dirección.

En un estudio realizado en argentina por Vilanova (2005) sobre las concepciones de la matemática en los profesores, se encontró que el 45% tiene una visión platónica, es decir, percibe la matemática como una ciencia acabada, rigurosa y lógicamente estructura, un 40% tiene una visión instrumental, es decir, concibe la matemática como un conjunto de normas, leyes y reglas para ser utilizadas como herramientas para atender algún fin externo, y solamente el 1% tiene una visión de la resolución de problemas, donde la matemática se identifica como un proceso de conjeturas y acercamientos al conocimiento, en donde los resultados prevalecen abiertos a revisión.

A partir de estas concepciones es evidente la orientación que cada docente da a la enseñanza de las matemáticas. Para Deiros (2003) la enseñanza de las matemáticas en ingeniería entraña un estilo usual de exposición influenciado por la elaboración de los fundamentos lógicos de la ciencia matemática, lo que en ocasiones dificulta la comprensión de conceptos y procesos de gran utilidad para el ingeniero, en este sentido, el aporte real que la matemática puede hacer en beneficio de la formación del ingeniero, queda oculto para los estudiantes, por tratar los temas de manera abstracta y por enfatizar en la adquisición de habilidades no provechosas.

En la formación del ingeniero se estima que entre el 16% y 20% de la carga curricular son cursos del área de matemáticas, a saber: álgebra lineal, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo multivariable, ecuaciones diferenciales, entre otras asignaturas más. Las ecuaciones diferenciales y el estudio y aprendizaje de las mismas nos permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de virus, sistemas masa-resorte, iluminación, circuitos, son ejemplos comunes de ello. Uno de los tópicos a estudiar durante el curso de ecuaciones diferenciales, es precisamente el denominado sistema masa-resorte, el cual tiene múltiples aplicaciones en las diversas áreas de ingeniería.

Se sabe que entre 2004 y 2009 el porcentaje promedio de reprobación en la unidad de aprendizaje de ecuaciones diferenciales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California es del 23%, lo cual sin lugar a dudas es preocupante, por tal motivo se rezagan o desertan más de 70 alumnos por semestre solamente debido a esta asignatura.

Un estudio realizado por el ITESM – CEM (1997) caracteriza a la enseñanza tradicional como un enfoque que no favorece la resolución de problemas como el escaso pensamiento lógico, el bajo nivel de significancia de los conceptos matemáticos, la nula transferencia de conocimientos a otras áreas, el escaso uso de los recursos tecnológicos, así como índices de aprobación del 45% de los estudiantes de ingeniería en el área de matemáticas. Estos índices se sabe que provocan la deserción en los primeros semestres en detrimento de la correspondiente eficiencia terminal.

Al respecto Prado (2003) señala que los factores que inciden de manera primordial en tal eficiencia terminal son dos: problemas personales de los estudiantes y problemas en los procesos institucionales. La didáctica obsoleta, pobre asociación entre la teoría y la práctica, falta de esquemas de profesionalización de la planta docente, escasa incorporación de nuevas tecnologías y la carencia de programas de apoyo a los estudiantes son características del segundo factor.

En esta identificación del esquema tradicional, la calculadora no es un elemento importante dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante, pues únicamente sirve en su caso para la ejecución de operaciones complejas. Una caracterización del esquema de enseñanza tradicional de las matemáticas por Gerald (2002) señala que el trabajo con la calculadora no tiene que enfatizarse hasta que las habilidades del cálculo estén bien establecidas, aunado a un proceso de evaluación que se distingue por pruebas de medición que se abocan especialmente a la eficiencia con que se utilizan las reglas y algoritmos matemáticos.

Un estudio realizado sobre la manera en que se orienta la enseñanza de las matemáticas en colegios y liceos tanto en Francia como Chile, Castela y Guzmán (2006), señala que en el caso de los franceses se enfatiza en la demostración de la actividad matemática, así como la introducción de los objetos matemáticos a través de su definición, es decir, se enseña la matemática por sí misma, a diferencia de la situación chilena, en la que se enfatiza la dimensión de la resolución de problemas, y se insiste en la experimentación y la exploración.

En contraste, un rasgo que identifica Muñoz (2005) como preocupante de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería es que se insiste demasiado en los aspectos instrumentales o aplicativos de las matemáticas, como si únicamente fuese importante aplicar el concepto, dejando por un lado la comprensión de su significado.

Moreno (2001) señala que es muy importante que los docentes de matemáticas conozcan la historia de las matemáticas, puesto que ahí podrán encontrarse procesos de exploración, conjeturas y pruebas que evidencian que el rigor matemático es producto de la evolución de la disciplina.

Lo anterior permite sin dificultad alguna aceptar que las acciones pedagógicas que pretendan partir de un nivel formal no tendrán el éxito deseado (Moreno 2001).

2.2 Esquema reformado de la enseñanza de las matemáticas

Un esquema reformado de enseñanza es descrito por Gerald (2002) en el cual apunta que se avocan a un currículo estandarizado con un alto nivel en los procesos de razonamiento, los cuales son la expectativa central del curso, además se valora el que los estudiantes determinen modelos y hagan conexiones, lenguaje y comunicación matemático relacionado con la vida real, y actividades contextualizadas, las que permiten abordar la resolución de problemas de calidad, y con énfasis reducido en la rutina de cálculos, tal aprendizaje es mejor evaluado a través de auténticos problemas abiertos, además de métodos alternos de evaluación aunque en menor grado mediante preguntas de respuesta breve y pruebas estándar para valorar ciertas habilidades.

El uso temprano de los recursos tecnológicos como la calculadora o la computadora es deseable, con el propósito de avanzar más en exploraciones y proyectos matemáticos que no son viables realizar con la tecnología de lápiz y papel, es un rasgo importante que distingue a este esquema reformado.

Se consideran en este esquema de enseñanza los diferentes estilos de aprendizaje de los estudiantes, por ejemplo, aquellos que aprenden una rutina de aritmética o de operaciones algebraicas de manera lenta, o algunas veces aquellos que son fuertemente visuales, o espaciales, aquellos con habilidad de razonamiento lógico pero con menos agilidad en las rutinas matemáticas, en general estos alumnos deben incorporarse en grupos heterogéneos en cuanto a su estilo de aprendizaje para lograr mayor equidad.

Otros estudios comparativos sobre la medición de la eficiencia de los conocimientos que los estudiantes alcanzan sobre conceptos de cálculo integral y principios de ecuaciones diferenciales, entre un esquema de enseñanza tradicional y uno reformado que incluye la implementación de situaciones de aprendizaje basadas en la regla de tres, es decir representaciones algebraicas, numéricas y gráficas como el de McGee y Martínez (2003) señalan que los estudiantes que participaron con un esquema reformado obtuvieron una mejor comprensión de los conceptos tratados, toda vez que un estudio estadístico no permite concluir de manera contundente que tales resultados positivos se deben a la aplicación consistente de las representaciones, si indican la importancia de continuar con investigaciones que estudien el impacto que este enfoque de enseñanza genera en los estudiantes.

2.3 Dialéctica herramienta (instrumento) – objeto y el juego de marcos.

En el hecho educativo participan tres actores principales: el que enseña, el que aprende y el saber en juego. Las concepciones del profesor respecto al papel de estos actores se ven reflejadas en las estrategias que diseña y en las acciones que emprende para conseguir el logro de su objetivo central, que el alumno aprenda. Si el alumno sabe matemáticas al

terminar un curso, el profesor ha logrado su objetivo, a continuación se trata de explicar para este referente teórico lo que implica saber matemáticas.

Considerando la dialéctica herramienta-objeto, saber matemáticas implica dos aspectos. En el carácter de objeto significa conocer una serie de conceptos, algoritmos, criterios, y modelos relativos a tales conceptos así como la manera en que estos se relacionan y constituyen un cuerpo organizado y sistematizado de conocimientos; en su carácter de herramienta, significa poder utilizar una serie de conceptos, algoritmos, criterios y modelos para analizar, modelar, resolver e interpretar cierto tipo de situaciones problemáticas.

La dialéctica herramienta – objeto es un proceso cíclico que organiza los respectivos papeles del enseñante y los alumnos, en el transcurso del cual los conceptos matemáticos juegan alternativamente el papel de herramienta para resolver un problema y de objeto tomando un lugar en la construcción de un conocimiento organizado, (Douady R., 1985, 68).

El profesor y el estudiante tradicionalmente se abocan a operar los conceptos matemáticos con carácter únicamente de objeto. El profesor pone al frente las definiciones formales de los conceptos para luego ejemplificarlas con casos concretos que ayuden a darle sentido a las definiciones, contribuyendo a la asignación de significados. En ingeniería uno de los fines es manipular en forma adecuada los modelos, teoremas, algoritmos, entre otros, para resolver problemas; sin embargo, debe tenerse presente que para el alumno el estudio de objetos matemáticos por placer o manipulación estética no es agradable, de hecho se debe estar consciente de la animadversión hacia las matemáticas que el alumno tiene, lo cual quizá se deba en parte a la falta de aplicabilidad cotidiana o práctica de la misma o a la ausencia de sentido del estudio de los objetos matemáticos.

Bajo la concepción dialéctica herramienta - objeto, el conocimiento matemático va apareciendo en papeles alternantes de herramienta o instrumento y objeto. Este proceso en espiral conduce a plantear situaciones problemáticas en donde las nociones son importantes

para su solución y otras en las cuales lo importante es su estudio como parte de una teoría matemática general.

Para Régine Douady uno de los requisitos más obvios para que las propiedades y estructuras de una herramienta conceptual pasen a ser objeto, es que hayan sido una herramienta. Una fase importante en esta teoría es la institucionalización no solo por parte del docente, sino también de los estudiantes, a partir de los procesos de argumentación y validación que realizan.

Esta forma tiene entre sus ventajas la posibilidad de presentar la matemática en contexto y, como expectativa, propiciar de manera más efectiva el desarrollo de actitudes y habilidades de pensamiento muy necesarias en la resolución de problemas, tales como la paciencia, la tenacidad, la capacidad de análisis, la intuición, por citar algunos.

En el estudio y práctica de la ingeniería se genera información respecto de algún proceso, fenómeno o experimento donde esta información regularmente se obtiene a través de algún equipo o instrumento de medición, que proporciona los datos en forma gráfica o numérica. Esta situación permite planear y presentar situaciones problemáticas cuya documentación esté dada en algún cuadro de los mencionados, incluso únicamente verbal, de tal forma que para resolverlo es insuficiente manipular solamente el cuadro original, generando en el estudiante una sensación de ansiedad o perturbación que lo obliga a cambiar de cuadro y a utilizar otros recursos cognitivos adicionales para poder resolverlo.

En este sentido el diseño de los problemas también se fundamenta en un precepto teórico de matemática educativa, lo que Régine Douady (1985) denominó juego de marcos para referirse a la interacción que debe existir entre el marco algebraico, el marco numérico y el marco geométrico, el marco físico, etc. La esencia de esta teoría es referida a la posibilidad de analizar y resolver una situación problemática desde distintos escenarios, realizando transferencia entre los mismos.

2.4 Dualidad estructural – operacional de los conceptos

Una perspectiva adicional de los conceptos matemáticos que no debe omitirse es la dualidad estructural-operacional, aunque el enfoque tradicional que ya se ha descrito en los párrafos anteriores se ha distinguido por un discurso formal y el manejo operacional o procedimental de los conceptos, aquí las visiones estructural y operacional no son excluyentes, por el contrario son incluyentes, pero por organización se describen y analizan de manera separada. Una visión estructural se refiere a las características, atributos ontológicos y definición del propio concepto, se distingue también por la apropiación de una regularidad; una visión operacional o procedimental se refiere al dominio de las fases que implica la secuencia de operaciones involucradas, la utilización de algoritmos, como, cuando y donde se usan (Contreras, 2004).

Para Sfard (1991) la visión estructural se caracteriza por un ente que posee rasgos propios, es estática, instantánea e integradora, en tanto que la visión operacional se matiza por acciones y algoritmos, es dinámica y procedimental o secuencial.

2.5 Competencia matemática

Mucho se ha escrito sobre el ámbito de las competencias en la educación (Álvarez, 2006; Proenza y Leyva, 2006; Martínez, 2008; Zabala, 2008; Goñi, 2009), pero para simplificar se definirá como el uso eficiente y responsable del conocimiento para hacer frente a situaciones problemáticas relevantes (Goñi, 2009) para el éxito en el desempeño profesional (Martínez, 2008). Dentro del proyecto PISA ('Programme for Indicators of Student Achievement') se realizó una definición y selección de las competencias consideradas esenciales para la vida de las personas y el buen funcionamiento de la sociedad (Martínez, 2008); y en este marco se identifican 8 competencias básicas y entre ellas se encuentra la competencia matemática.

La determinación de la eficiencia de los conocimientos que logran los estudiantes se llevará a cabo mediante competencias matemáticas (las que ya se han enlistado en párrafos anteriores), asumiendo el modelo que PISA-OCDE han tomado para las evaluaciones

internacionales que a partir de 2000 han venido realizando, en razón de lo anterior se dedicará un espacio para declarar la manera en que la competencia matemática forma parte de esta investigación.

De acuerdo a PISA (2003d) la competencia matemática enfatiza en el uso funcional del conocimiento matemático en situaciones diversas de manera reflexiva y basada en una comprensión profunda, se aclara que la competencia y el conocimiento no son antagónicos, sino mas bien existe una dependencia y una interrelación entre ambos, el conocimiento matemático no debe verse solamente desde una perspectiva conceptual, es decir una persona no es competente solo por saber algo, o solo por saber hacer algo, sino por saber hacer algo, a partir del saber, es decir saber hacer a partir del saber comprendiendo lo que se hace, como se hace y porque se hace, en este sentido la teoría y la práctica no pueden estar desasociadas. De hecho el cuestionamiento sobre la desconexión entre la teoría y la práctica ha provocado, como consecuencia, una fuerte corriente de opinión favorable a una enseñanza de competencias (Zabala y Arnau, 2008). La Universidad Autónoma de Baja California, años atrás ha optado ya por un modelo basado en competencias, y las modificaciones actuales a sus Planes y Programas de estudio se realizan bajo el citado modelo.

Es importante resaltar la distinción entre conocimiento y competencia, esta última se diferencia radicalmente por la transferibilidad; es decir la habilidad de *ver* la similitud y aplicar lo que saben en nuevos contextos (Goñi, 2009). Por lo que aplicando esto a las competencias matemáticas podemos aseverar que *los problemas con contextos extra-matemáticos... son preferibles como instrumentos para evaluar la competencia matemática, ya que es más probable encontrar problemas de este tipo en la vida cotidiana* (Proenza y Leyva, 2006, 12).

Las competencias, y específicamente las competencias matemáticas valoran el uso armónico de los conocimientos factuales, conceptuales, procedimentales y actitudinales (Zabalza y Arnau, 2008) para la reflexión y determinación de soluciones a problemas reales y/o de la vida diaria. Con el objeto de acotar la problemática planteada, solo se estudian los

conocimientos conceptuales y procedimentales. Similarmente, las competencias matemáticas como pensar y razonar, argumentar y comunicar, que son consideradas de acuerdo a PISA (2003d) como generales no serán objeto de análisis por esta investigación, mientras que modelar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje lógico y formal son consideradas como competencias de corte específico.

En esta investigación la eficiencia del conocimiento se considera que puede expresarse de acuerdo a PISA (2003c), mediante las competencias matemáticas siguientes (ver tabla 1): modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico y formal (Martínez, 2008), ya que en conjunto describen los procesos para el dominio del fenómeno sistema masa-resorte; por lo que su análisis permitirá la determinación de la eficiencia de los conocimientos que logran los estudiantes.

Tabla 1. Competencias matemáticas e indicadores de acuerdo a PISA (2003c).

Competencia	Indicadores
Modelar	- Estructurar el campo o situación que va a modelarse. - Traducir la realidad a una estructura matemática. - Interpretar los modelos matemáticos en términos reales. - Trabajar con un modelo matemático. - Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados. - Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones). - Dirigir y controlar el proceso de modelización.
Plantear y resolver problemas	- Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados). - Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.
Representar	- Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones. - Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.
Utilizar el lenguaje simbólico y formal	- Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural. - Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal. - Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas. Utilizar variables, resolver ecuaciones. - Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

La variable establecida para caracterizar los reactivos en la evaluación PISA es la relativa al nivel de complejidad cognitiva con que se requiere la actuación competente de los estudiantes. Los expertos del estudio PISA/OCDE consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los reactivos con los que se evalúan las competencias: nivel de reproducción, nivel de conexión y nivel de reflexión pues las tareas propuestas a los estudiantes plantean diferentes tipos y niveles de demandas cognitivas. A continuación se describe y ejemplifica cada uno de ellos.

Nivel de Reproducción

En el nivel de reproducción se engloban aquellos ejercicios que son relativamente familiares y que exigen básicamente la reiteración de los conocimientos practicados, como son las representaciones de hechos y problemas comunes, recuerdo de objetos y propiedades matemáticas familiares, reconocimiento de equivalencias, utilización de procesos rutinarios, aplicación de algoritmos, manejo de expresiones con símbolos y fórmulas familiares, o la realización de operaciones sencillas.

Nivel de Conexión

El nivel de conexiones permite resolver problemas que no son simplemente rutinarios, pero que están situados en contextos familiares o cercanos. Plantean mayores exigencias para su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones de una misma situación, o bien enlazar diferentes aspectos con el fin de alcanzar una solución.

Nivel de Reflexión

Este nivel de complejidad moviliza competencias que requieren cierta comprensión y reflexión por parte del alumno, creatividad para identificar conceptos o enlazar conocimientos de distintas procedencias. Las tareas de este nivel requieren competencias más complejas, implican un mayor número de elementos, exigen generalización y explicación o justificación de los resultados.

2.6 Teoría de las representaciones semióticas

Desde la perspectiva de la teoría de representaciones semióticas de Raymond Duval, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, consecuentemente para su estudio y tratamiento se requiere contar representaciones de los mismos, las representaciones externas a las que hacemos alusión pueden ser de carácter geométrico, algebraico y numérico del objeto. Como lo señala el mismo Duval (2000, 4), *el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, debido a que a diferencia de otros campos de conocimiento (biología, geología, física), no existen otras maneras de lograr el acceso a los objetos matemáticos sino producir algunas representaciones*. En este sentido, las representaciones permiten el acceso al objeto matemático. A través de estos procesos de representación, tratamiento y conversión se permite exteriorizar las representaciones mentales de los individuos, motivando la retroalimentación y mejoramiento de las mismas. Lo cual conduce a la formación de preceptos matemáticos y a la conceptualización de objetos matemáticos.

Desde la perspectiva de Duval (2006a) la actividad cognitiva de representación constituye una marca o conjunto de marcas perceptibles e identificables respecto de un objeto matemático, el tratamiento es la transformación de la representación dentro del mismo registro de representación, y la conversión es la transformación de la representación en otra representación de un registro diferente al original pero que conserva su esencia.

A través de estos procesos de representación, tratamiento y conversión se permite exteriorizar las representaciones mentales de los individuos, motivando la retroalimentación y mejoramiento de las mismas. Lo cual conduce a la formación de preceptos matemáticos y a la conceptualización de objetos matemáticos.

En D'Amore, B., (2001) encontramos la definición de Juan Díaz Godino respecto a objeto matemático, la cual a la letra dice: *Un objeto matemático es todo aquello indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas*. Con la consiguiente clasificación y descripción de los mismos.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje
- Situaciones
- Acciones
- Conceptos
- Propiedad o atributo de los objetos
- Argumentos

Investigaciones de especialistas en matemática educativa enmarcados en la teoría de las representaciones semióticas indican que es común confundir precisamente los objetos matemáticos y sus representaciones, quizá esta confusión se deba al estudio y tratamiento de los conceptos de matemáticas basado únicamente en alguna de las representaciones, o bien, por tratar de manera aislada dichas representaciones. A la vez, es muy común que dentro de los programas o contenidos temáticos de los cursos de matemáticas, se establezca como objetivo, que el estudiante adquiera o desarrolle ciertas competencias o habilidades específicamente en alguna de las representaciones citadas.

Un estudio realizado por Guzmán (1998) con estudiantes de cálculo, en el que a través de una prueba de respuesta abierta, evalúa el desempeño logrado respecto a la noción de función y su significado, y en el que incluye la consideración de los registros de representación gráfico, algebraico y el lenguaje natural, reveló la preponderancia que dan los estudiantes a que las respuestas se queden en el mismo registro en el cual se planteó la pregunta, o en su defecto recurren al registro algebraico. Además solo el 14 % de los estudiantes incurre en las representaciones gráficas. El 50% de los estudiantes recurren al registro algebraico como mecanismo para emitir una respuesta al problema que se les plantea, lo cual deja ver la preponderancia de la enseñanza algorítmica.

En el proyecto de De Las Fuentes (1998) sobre la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos para funciones lineales y cuadráticas, se observó en general que los cambios de registro que más les causó dificultad a los estudiantes fueron del gráfico al algebraico y del verbal al algebraico e incluso se

exhibió las incompetencias en el cuadro algebraico de carácter elemental. Además de deficiencias con relación a la asociación de las variables visuales y las unidades significativas de la expresión algebraica.

Dentro de las capacidades de la calculadora dotada con Sistema de Cómputo Algebraico (CAS) se ha mencionado que la vinculación dinámica entre representaciones es de suma importancia como proceso de enriquecimiento de los conceptos matemáticos de estudio, Castillo (2003) diseña e implementa con estudiantes de precálculo una estrategia didáctica basada en la coordinación de los registros gráfico, analítico y verbal o de lenguaje natural, abordando el concepto de funciones senoidales, asumiendo que la actividad de conversión (fundamental para el proceso de apropiación conceptual) mas que las de formación y tratamiento presenta serias dificultades para la mayoría de los estudiantes.

La teoría de las representaciones de Duval da primordial importancia a la habilidad para cambiar de un registro de representación semiótica a otro, (Descartes designó el término registro para referirse a los espacios diferentes de representaciones semióticas) dicha habilidad resulta necesaria para el aprendizaje de las matemáticas, además de considerar al conocimiento conceptual (la comprensión) como el invariante de múltiples representaciones semióticas.

En este sentido se explica un sistema semiótico como aquel registro que permite la tres importantes actividades cognitivas: representar, es decir, la manera de exteriorizar, palpar o denotar un objeto matemático, un concepto o alguna propiedad de los mismos, la transformación interna, también llamada tratamiento, el cual se efectúa dentro del mismo registro de representación original, y el que depende de alguna manera de las convenciones o reglas matemáticas de ejecución, por ejemplo, no se llevan a cabo con el mismo algoritmo la suma o resta de dos decimales que la de dos fracciones, y por último, la transformación externa o conversión, caracterizada por la congruencia (transparencia) o no congruencia (opaco), y que consiste en transitar de un registro semiótico a otro, por ejemplo, del registro gráfico al algebraico.

La transformación externa o conversión no es vista únicamente desde una perspectiva matemática, en la cual, se pretenden o buscan economías o apoyo en los tratamientos de alguno de los registros, sino cognoscitiva, la que lleva a los mecanismos de comprensión subyacente (Duval, 2001).

Una investigación llevada a cabo por Santos y Arteaga (2000) con 40 estudiantes de nivel medio superior para explorar la competencia sobre el uso de conexiones entre representaciones gráficas y simbólicas que involucran conceptos de variación y optimización, permite concluir que el uso eficaz de las representaciones por los estudiantes robustece su comprensión matemática, propiciando que en el proceso de enseñanza se incluya la interpretación de problemas originales a partir de las distintas representaciones.

A través de estos procesos de representación, tratamiento y conversión se permite exteriorizar las representaciones mentales de los individuos, motivando la retroalimentación y mejoramiento de las mismas. Lo cual conduce a la formación de preceptos matemáticos, consecuentemente a la posibilidad de conceptualizar los objetos matemáticos de interés.

Hitt (2003) enfatiza la importancia que tiene el balancear los diferentes tipos de representación, de manera que no se llegue a priorizar uno u otro, en detrimento de alguno de ellos; pues las actividades en ingeniería de diseño, proyecto e investigación, no sólo requieren de una buena manipulación algebraica, sino de la determinación de modelos o representaciones algebraicas con las que se pueda estudiar o analizar el proceso; Cistac (2009) indica que precisamente en la etapa de construcción inicial de las capacidades tecnológicas es esencial enlazar los conceptos matemáticos con el proceso físico; con lo cual interrelacionar contenidos; y con ello el cambio en las representaciones semióticas

Bajo esta perspectiva, es entonces muy importante que los docentes promuevan entre sus estudiantes situaciones didácticas o problemas en los que para poder resolverlos, utilicen y realicen conversiones entre distintos registros de representación. Congruente, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (Consejo Nacional de profesores de

Matemáticas) (Ferrini-Mundy, 2000) incluyó por primera vez las conexiones y representaciones como parte del proceso matemático.

Sin embargo para Duval (2006a) para entender las dificultades que varios estudiantes tienen con el aprendizaje de las matemáticas propone dos tipos de transformaciones en las representaciones semióticas: Tratamiento y conversión. Estas transformaciones afectan cualquier actividad matemática y explican el tipo de sistema semiótico que se necesita para una situación específica, pues permiten analizar la causa de los problemas en el entendimiento de las matemáticas y no tratar las deficiencias como frecuentemente se subestiman al considerarlas como una problemática en el aprendizaje de conceptos (Duval, 2006a).

Existen radicales diferencias entre estos dos tipos de representaciones semióticas (Duval, 2006a): ‘Tratamiento semiótico’ se refiere a transformaciones en las representaciones que ocurren en el mismo registro de representación; mientras que ‘Conversión semiótica’ se relaciona con transformaciones en las representaciones que ocurren en cambios de registro de representación; por ejemplo pasando de la notación algebraica de una ecuación a su representación grafica.

Estos dos tipos de transformaciones de las representaciones semióticas han de ser entendidas y evaluadas separadamente como fuentes de incomprensión en el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2006a); a pesar de que la ‘conversión semiótica’ representa mayor complejidad y dificultad (Duval, 2006b; Radford, 2006) que el ‘tratamiento semiótico’, pues cualquier cambio en el registro de representación requiere primeramente un reconocimiento de la existencia del mismo objeto entre dos distintas representaciones semióticas; lo cual representa una brecha que hay en el aprendizaje, pues el traslado entre registros no se efectúa espontáneamente (Guzmán, 1998) . Por lo que la habilidad para el manejo *tratamiento semiótico* de un registro de representación a otro es frecuentemente un componente crítico en el progreso del aprendizaje de las competencias matemáticas, esta transformación puede vincularse con la competencia matemática de utilizar el lenguaje simbólico y formal propuesta por PISA (2003c).

La importancia y deficiencia en las transformaciones de las representaciones semióticas, es ilustrada en un estudio en nuestra propia universidad, donde De Las Fuentes (1998) realizó una valoración sobre la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos para funciones lineales y cuadráticas; se observó en general que los cambios de registro que más les causó dificultad a los estudiantes fueron del gráfico al algebraico y del verbal al algebraico, además de deficiencias con relación a la asociación de las variables visuales y las unidades significativas de la expresión algebraica.

Estudios muestran claramente que la enseñanza universitaria se centra en el funcionamiento dentro del cuadro analítico o algebraico, en una praxis algorítmica y en la evaluación de las competencias algebraicas correspondientes (Artigue, 1995). Jiménez (2000), presenta una reflexión en torno a la vinculación dinámica de las representaciones del conocimiento matemático como poco aprovechada en relación a los dispositivos electrónicos con los cuales hoy en día se cuenta. Lo cual es lamentable, pues la utilización de la tecnología en la enseñanza permite manipular dinámicamente los objetos matemáticos en diferentes contextos de representación, los que en un esquema tradicional sin tecnología es imposible o complejo de obtener Giandini y Salerno (2009).

2.7 Incorporación de tecnología y la calculadora en la enseñanza de las matemáticas

La incorporación de la tecnología promueve modificaciones en la forma de enseñanza, en la manera en que el estudiante aprende, así como también en el currículo; estudios realizados por Artigue (1995) señalan que la enseñanza universitaria a los estudiantes se les prepara con destrezas y capacidades algorítmicas, sin incorporar ni los avances en el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes ni los recursos tecnológicos modernos. Similarmente, Demana y Waits (1998b) señalan de la necesidad no solo de preparar a los docentes en el campo tecnológico y proporcionarles material didáctico basado en tecnología, sino de proveer un desarrollo profesional del docente. De Las Fuentes (1998) señala que la dificultad de que los estudiantes no vinculen de manera apropiada los conceptos matemáticos y los algoritmos asociados a los mismos en la resolución de determinados problemas –particularmente de aquellos que tienen que ver con el estudio y comprensión de

fenómenos que se presentan en el campo de la ingeniería–, parece deberse a dos importantes aspectos, por una parte, la preponderancia de la enseñanza de las matemáticas basadas en un enfoque tradicional; y por otra parte, la ausencia o el uso inadecuado de la tecnología (por las concepciones de los profesores).

Rosa (2001) apunta que el atraso existente en la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas se debe entre otras cosas a las concepciones de los docentes respecto a la enseñanza y aprendizaje, así como también a la ignorancia de las potencialidades que dichos instrumentos poseen. Pues tal y como Laborde (2003) y Saucedo (2005) señalan que la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas permite a los estudiantes visualizar fenómenos matemáticos, hacer conexiones y realizar experimentos, promoviendo una mejor comprensión en el estudiante del concepto matemático. Una propia experiencia (De Las Fuentes, Encinas y Bravo 2005), en la que se diseñó e implementó una estrategia didáctica que incorpora la calculadora Voyage 200 para abordar derivadas sucesivas, permite concluir un impacto favorable en la asociación de características geométricas esenciales (puntos críticos, inflexión, concavidades).

La experiencia de Demana y Waits (1998) se inicia con trabajos en la enseñanza de las matemáticas apoyados por computadora, con el objeto de visualizar registros gráficos, las dificultades encontradas en esos momentos fue la poca disponibilidad de equipo de cómputo tanto para los docentes como para los estudiantes, además que los laboratorios existentes estaban destinados a cursos que no eran de matemáticas. De hecho aquellos profesores y estudiantes que podía estudiar y apoyarse con equipo de cómputo eran considerados como privilegiados (Demana y Waits 1998).

En Ortega, Nesterova y Mendoza (2009) se reportan los resultados de la aplicación de una estrategia didáctica para el aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica, se incluyó dentro de la estrategia didáctica el software winplot, los resultados señalan que el empleo de diferentes registros fue un factor muy importante en el aprendizaje de los participantes, pues se observa que la representación gráfica modifica los procesos de pensamiento de los

estudiantes, de realizar un proceso que en su mayoría es mecánico (en el caso de métodos algebraicos) a un proceso de observación y deducción.

La puesta en escena de estrategias didácticas (Arellano y Solana, 2009) en donde está presente la noción de conceptos del cálculo y se incluye el software denominado Geometre, concluyen por una parte que la tecnología brinda un importante apoyo en la labor de investigación en matemática educativa, por otra parte, el uso de los recursos tecnológicos puede motivar el diseño de exploraciones asociadas al pensamiento matemático, así como también la confrontación rápida de problemas no triviales y la experimentación sistemática.

Otro diseño (Sosa, Aparicio y Tuyub, 2008) de estrategias didácticas basado en la teoría de representaciones semióticas en donde está presente la noción de variación en las áreas de geometría analítica y cálculo en el nivel medio superior también incluyen tecnología computacional, específicamente el software denominado Cabri, el motivo de la implementación de esta estrategia didáctica con tecnología computacional es precisamente la promoción de la visualización y la transformación de una representación a otra, así como la contextualización de las propiedades y atributos de los conceptos matemáticos, además de favorecer la exploración y la experimentación.

En 1986 con la entrada de la calculadora japonesa (con un costo relativamente bajo) casio con la posibilidad de obtención de gráficos, los estudiantes tenían la posibilidad de portarla, y remontar la ausencia de visualización en los registros gráficos. A partir de 1996 se incorpora en la calculadora el sistema CAS, Cabri geometre, memoria flash, conexión con internet, entre otros aditamentos que permite equiparar a la calculadora (portátil y económica en cuanto al consumo de energía) con una computadora.

La calculadora ha tenido en los últimos años influencia en la enseñanza de la ingeniería, las ciencias básicas y particularmente en las matemáticas, especialistas en educación matemática han reconocido la necesidad de incorporar esta tecnología en los procesos de enseñanza e investigar los efectos cognitivos que provoca en los estudiantes, las habilidades y actitudes que favorece.

Revisando las modificaciones curriculares en torno a la enseñanza de las matemáticas que se están implementando en diferentes sistemas educativos en el mundo, se puede apreciar que se está fomentando a que los estudiantes aprendan el manejo de la calculadora electrónica, en Colombia (Eduteka, 2006), a partir del año 2000 se arranca un proyecto piloto con el propósito general de mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y su aprendizaje mediante la incorporación de calculadoras, este proyecto se desarrolla con estudiantes de los diferentes niveles de educación básica secundaria y media con la participación de 60 instituciones, se pretende construir ambientes matemáticos adecuados para los jóvenes estudiantes a partir del diseño e implementación de estrategias didácticas que incorporan la calculadora como instrumento de mediación, a la par de una formación y consolidación docente sensible a las necesidades del sistema educativo colombiano.

La experiencia obtenida al paso del tiempo (Eduteka, 2006) ha permitido observar que la incorporación de la calculadora en el ámbito educacional contribuye a modificar los enfoques de enseñanza favoreciendo la exploración de objetos matemáticos en distintos registros de representación como estrategia de aprendizaje, además de la construcción de contextos o realidad virtual matemática que estimulan la actividad intelectual de los estudiantes.

Un deseo importante dentro de las habilidades que se espera de los estudiantes tiene que ver con el planteamiento de regularidades sobre el concepto de estudio, regularidades que permiten afianzar el conocimiento de algún objeto matemático. En este sentido la calculadora ofrece la oportunidad de conjeturar propiedades y comprobar visualmente situaciones que algebraicamente no es viable observar (Lupiáñez y Moreno, 2001)

Dentro de una investigación en el campo de las ecuaciones diferenciales (Morales y Hernández, 2009) se diseñó e implementó una situación didáctica que incluye el software Cabri (incluido para uso de calculadoras gráficas y simbólicas) para propiciar en los estudiantes universitarios argumentos sobre los campos de pendientes de una ecuación diferencial e identificar el comportamiento de la misma, lo anterior dentro de un marco de

prácticas de modelación y gráficas, en esta investigación se aborda de manera cualitativamente diferente a lo tradicional las ecuaciones diferenciales y se concluye que con la potencialidad visual es posible observar la rapidez de crecimiento o decrecimiento de las pendientes, así como su comportamiento en el tiempo, pero sobre todo promueve elementos argumentativos en los estudiantes para resignificar el campo de pendientes de las ecuaciones diferenciales.

Una de las consideraciones medulares de la incorporación de las calculadoras en la enseñanza tiene que ver con el balance en el uso o distribución del tiempo, Demana y Waits (1998b) apunta que si bien es cierto anteriormente la distribución mayoritaria del tiempo de una clase se enfocaba al cómputo de lápiz y papel, además de una incipiente resolución de problemas como consecuencia del desarrollo conceptual, ahora, la resolución de problemas, la argumentación e interpretación, así como el cómputo (mental, papel y lápiz y el cómputo con tecnología) deben estar equilibrados. Infinidad de autores (Moreno y Rojano, 1999; Hernández, 2000; Karen, 2000; Queralt, 2000; Bower, 2003; Heugl, 2003; Laborde, 2003; De Faria, 2005; Eduteka, 2006) confirman que la incorporación de la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas contribuye a modificar los enfoques de enseñanza y estimulan la actividad intelectual de los estudiantes; pero que existe resistencia del profesorado para su aceptación; y que es necesario investigación sobre los efectos cognitivos que provoca en los estudiantes, las habilidades y actitudes que favorece.

Un avance importante en la tecnología de las calculadoras es la interconectividad, ya sea a partir de diversos sensores (temperatura, posición) para la recolección, tratamiento y análisis de datos, o directamente con la computadora e internet, Kutzler (2003) provee una vasto cúmulo de posibilidades de interconectividad no solo para experimentar y documentar diversas estrategias de aprendizaje, sino también para otras actividades importantes como la evaluación, los tutoriales, trabajos en grupos y el aprovechamiento de la potencialidad de la calculadora en sus distintas funcionalidades, listas, gráficas, sistema CAS, por mencionar algunas.

Con el afán de entender los procesos de articulación, los investigadores y educadores han abocado sus esfuerzos a la utilización de la calculadora gráfica como mediador en los procesos de aprendizaje, en virtud de la posibilidad que tiene esta de abordar una situación matemática no solamente desde los puntos de vista numérico, gráfico y simbólico, sino de tratar de manera integrada tales contextos (Moreno y Rojano 1999).

Actualmente las calculadoras además de poseer un lenguaje de programación sumamente accesible, están dotadas de capacidades funcionales muy versátiles. Son de dimensiones compactas, poco peso y su fuente de alimentación es autónoma y duradera. Su pantalla se ha ampliado, desde aceptar solamente un renglón de entrada, hasta constituirse en un verdadero monitor en miniatura. No solamente efectúan con rapidez cálculos numéricos impresionantes, sino que también pueden ejecutar operaciones simbólicas. La calculadora moderna cuenta con las capacidades funcionales necesarias para emplearla prácticamente en cualquier curso de matemáticas para ingeniería, el modelo al cual se hace alusión y forma parte del trabajo de investigación que aquí se plantea es el modelo TI-Voyage200 (Ver figura 2). La cual cuenta con el Software Avanzado de Matemáticas (SAM), que es el nombre del software de matemáticas disponible en la Voyage 200. Las capacidades del SAM son las siguientes:

- Poderoso Sistema Algebraico Computacional (CAS) y notación algebraica, que muestra expresiones matemáticas de la misma forma que los libros de texto.
- La pantalla principal puede retener y recuperar hasta 99 entradas previas.
- Aplicaciones interactivas para la exploración de geometría euclidiana, analítica y transformacional (basadas en Cabri Geometry IITM y The Geometer's Sketchpad®).
- Resultados reales y complejos.
- Manipulación simbólica para álgebra y cálculo.
- Unidades simbólicas para uso en ecuaciones, cálculos y conversiones de unidades. Más de 100 unidades en 28 categorías. 20 constantes con unidades simbólicas.
- Gráfica funciones, ecuaciones paramétricas y polares, secuencias definidas recursivamente, superficies tridimensionales y ecuaciones diferenciales. Define y guarda hasta 99 gráficas de ecuaciones para cada tipo de gráfico.
- Evaluación numérica de funciones en tablas y/o variables definidas.

-

M.C. MAXIMILIANO DE LAS FUENTES LARA
DOCTORADO EN CIENCIAS

Una de las bondades de los recursos tecnológicos computadoras y/o calculadoras actuales es la visión potencial de los fenómenos, intentando por una parte reducir la abstracción de la matemática y por otra contextualizar el objeto matemático para promover los significados y movilidad de distintas representaciones.

Una estrategia didáctica para abordar problemas de optimización (problemas ubicados dentro del programa de matemáticas I), el caso del problema de la caja sin tapa, es un ejemplo de la potencialidad integradora de distintos registros; para su desarrollo se elaboró un programa que permite abordar distintas propuestas virtuales, promoviendo el sentido y relación de las diferentes representaciones. En la figura 3 se exhibe una secuencia de gráficos que muestra los diferentes registros de representación y la relación de los mismos.

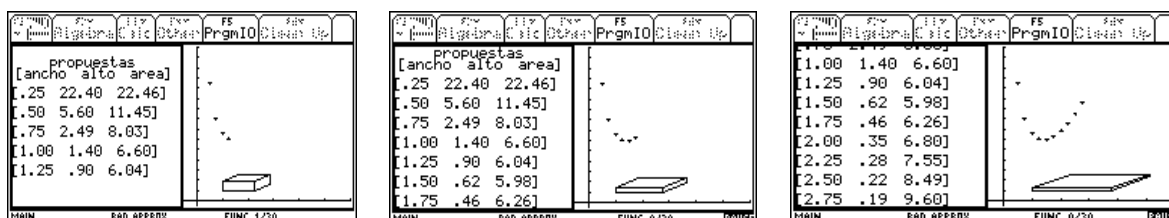


Figura 3 Secuencia de gráficos y sus respectivas dimensiones con calculadora.

El artículo completo, para el caso del problema de la caja sin tapa, puede revisarse en la Revista Innovaciones Educativas de Texas Instruments, 5ta. Edición. 2004.

En el proyecto desarrollado por Heugl (2003), en el Centro Austriaco de Didáctica del Álgebra Computacional con estudiantes de 13 y 14 años, valora el avance logrado en diversas competencias en el campo algebraico y la influencia de la calculadora, particularmente por el uso del CAS, sus observaciones respecto a la influencia de la calculadora en el proyecto indican una disminución del énfasis de las habilidades del cálculo, en contraparte, la comprensión conceptual, el modelado y la interpretación aumenta, además la calculadora permite el uso paralelo de varios prototipos o registros, deseable en el establecimiento de conexiones entre estos durante el proceso de aprendizaje.

Algunos otros países han incorporado la calculadora de manera importante en sus procesos educativos, por ejemplo Laborde (2003) señala que en Francia existe un énfasis persistente en el uso de calculadoras y computadoras en los nuevos planes de estudio de los diferentes niveles de educación.

En Costa Rica, a partir de 1990, (De Faria 2005) se han venido realizando proyectos de investigaciones con estudiantes de ingeniería en los que incorporan la calculadora como medio para vincular los diferentes registros semióticos de representación, de producción de significados matemáticos y para explorar y conectar la matemática con otras ciencias como la química, física, biología y agronomía.

Una investigación de carácter exploratorio realizada por Gómez, P. y Meza, V. durante 1993 y 1994 con estudiantes de la Universidad de los Andes en la que consideraron dos esquemas de enseñanza caracterizados por la presencia o ausencia de la tecnología de la calculadora para el tratamiento de temas de precálculo y cuyo objetivo fue el de analizar la influencia de la calculadora gráfica en el diseño curricular, así como también la interacción dentro del salón de clase del profesor y del estudiante entre sí y con el conocimiento, se encontró que el grupo que utilizó la calculadora para el desarrollo de sus actividades se caracterizó por la experimentación evidenciada esta en el desempeño clasificado como operacional gráfico. A la vez se observó mayor evidencia de reconocimiento de atributos de los objetos en el grupo que usó calculadoras que en el grupo en que no se usaron y una tendencia al manejo estructural en los registros gráfico y algebraico.

En la actualidad, el empleo de la tecnología de la enseñanza de las matemáticas bajo ciertas consideraciones teóricas ha fortalecido las expectativas de lograr un aprendizaje más significativo y sólido por la mayoría de los alumnos, en De Las Fuentes, Encinas y Rivera (2007b), se concluye que a través del diseño de programas (en calculadora) emparejados con estrategias didácticas es viable promover en el estudiante de ingeniería la habilidad de plantear adecuadamente expresiones algebraicas a partir de la observación de trayectorias de objetos. En este proyecto se propone la utilización de la calculadora gráfica simbólica y programable, que es de fácil acceso a estudiantes (comparada con el equipo de

computación), con el propósito de abatir los resultados insatisfactorios de la enseñanza tradicional.

Respecto del uso de las tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas Lupiáñez y Moreno (2001) señalan que la instrumentación de la misma debe entenderse como un proceso de enriquecimiento, con el propósito de mejorar las capacidades cognitivas, no de sustituirlas. Así pues las calculadoras vienen a dar la posibilidad de actuar en la búsqueda y adquisición de nuevos conocimientos.

Un deseo importante dentro de las habilidades que se espera de los estudiantes tiene que ver con el planteamiento de regularidades sobre el concepto de estudio, regularidades que permiten afianzar el conocimiento de algún objeto matemático. En este sentido la calculadora ofrece la oportunidad de conjeturar propiedades y comprobar visualmente situaciones que algebraicamente no es viable observar, (Lupiáñez y Moreno, 2001)

2.8 La calculadora en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales

Los cursos de matemáticas, particularmente los de ecuaciones diferenciales en ingeniería no se han identificado precisamente por la incorporación de herramientas tecnológicas para su enseñanza.

Una investigación realizada por Hernández (2000) con 30 estudiantes de ingeniería del Instituto Tecnológico de ciudad Madero, durante el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, en la que se diseñó e implementó situaciones de aprendizaje (para abordar ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden) y en la que los estudiantes podían utilizar calculadoras TI-92, determinó que algunas de las ventajas que se logran cuando se incorpora tecnología de la calculadora, son las que a continuación se mencionan:

- a) Reducción de tiempo para los desarrollos algebraicos, lo cual contrae mayor tiempo para el análisis de los conceptos y modelos.

- b) Algunos métodos (fracciones parciales, por partes) para resolver integrales que aparecen de manera natural en la resolución de ecuaciones diferenciales pueden ser aplicados con relativa facilidad.
- c) La posibilidad de variar los parámetros enriquecen las aplicaciones (circuitos, vibraciones) de las ecuaciones diferenciales.
- d) La calculadora permite emitir los resultados a través de diversas representaciones numérica, gráfica y algebraica.
- e) La calculadora permite la elaboración de programas y sus funciones son versátiles.

Se encuentra en Karen (2000) producto de sus investigaciones que los estudiantes del curso de ecuaciones diferenciales que contaban con tecnología de la calculadora sustentan o argumentan sus resultados mediante los campos de pendiente (una representación geométrica de la solución de una ecuación diferencial, que no es viable llevar a cabo sin el apoyo de tecnología), en este estudio Karen concluye que la interacción adicional con la tecnología refuerza entonces la constitución de una comprensión de una explicación matemática, además que la tecnología permite a los estudiantes en el caso del tratamiento de las ecuaciones diferenciales utilizar estrategias cualitativas además de las estrategias analíticas tradicionales.

En Bower (2003) se encuentra una propuesta con 12 actividades exploratorias para abordar diversos temas de álgebra y cálculo para estudiantes de ingeniería. Dichas actividades son asistidas con tecnología de la calculadora voyage 200, y es de notarse la potencialidad de la misma para la recolección y análisis de datos, además de la posibilidad de manipular algebraicamente las expresiones matemáticas y producir gráficas en dos y tres dimensiones.

Una de las actividades en especial llama la atención, por el tema asociado a las ecuaciones diferenciales y la experimentación que se realiza para recabar datos a través de un resorte conectado a un platillo con masa ligera, los dispositivos CBL y el lector de posición conectado a la calculadora, estos con el fin de transmitir la información del movimiento de la masa a intervalos de tiempo y buscar la ecuación de regresión adecuada. Aquí se pone en juego diversos conocimientos matemáticos del estudiante desde una perspectiva

problemática vinculada al campo de la ingeniería, además de la necesidad de transitar entre diversos registros de representación semiótica, evocando desde la perspectiva de los autores a la calculadora voyage 200 como una herramienta personal de aprendizaje.

En el capítulo 7 del libro de Barton y Dile (1999) se presenta un conjunto de actividades tendientes al estudio del campo de pendientes y soluciones de ecuaciones diferenciales, el tratamiento y las secuencias propuestas giran en torno a las representaciones gráficas, numéricas y algebraicas, y son mediadas por tecnología de la calculadora, particularmente por la TI-89 y el sistema CAS que tiene incorporado. Además de guiar cada una de las instrucciones y comandos requeridos en el uso de la calculadora citada empleando como pretexto para la inmersión de la actividad intelectual del estudiante situaciones de la realidad como la trayectoria de una pelota de basebola o el decaimiento del carbono-14 para el establecimiento de la edad de organismos muertos.

A partir de la teoría semiótica, la dialéctica herramienta – objeto y el juego de marcos, así como los antecedentes de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería, los resultados de investigación en matemática educativa en el ámbito nacional e internacional, y las potencialidades de la calculadora voyage 200 se ha optado por utilizar un modelo (ver figura 4) que incorpora 5 diferentes registros de representación como base para el diseño de las estrategias didácticas a implementar en el grupo experimental.

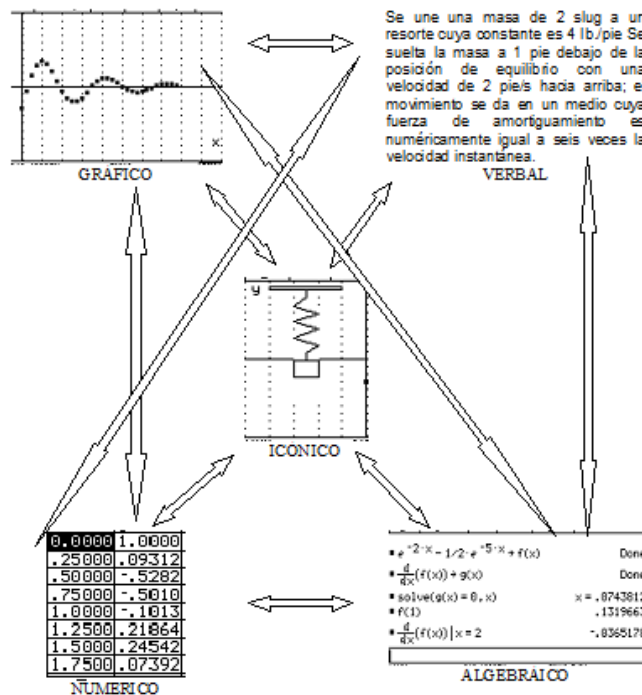


Figura 4. Modelo del uso de registros de representación con la calculadora

2.9 El contenido matemático

De la carta descriptiva del curso de ecuaciones diferenciales se menciona que está situado en la etapa básica y dentro del área de ciencias básicas. Su cometido es proporcionar a los estudiantes los conocimientos, métodos, técnicas y criterios para que mediante la modelación matemática represente fenómenos de la ciencia en general y de la ingeniería en particular. Favoreciendo en el estudiante el razonamiento crítico, la creatividad, el trabajo en equipo y el interés por la búsqueda de información. La competencia específica en donde se encuentra el objeto de estudio sistema masa – resorte, (el cual se ubica en la unidad 4 del curso de ecuaciones diferenciales), señala la utilización de los conceptos y procedimientos para proponer modelos matemáticos que representen fenómenos y problemas físicos, aplicando los métodos de resolución de las ecuaciones diferenciales de orden superior, así como discutir la validez de los resultados encontrados.

El contenido matemático objeto de estudio para el sistema masa-resorte, así como el previo presenta a continuación:

Previos al objeto de estudio

- Función, función derivada, condiciones iniciales, pendiente, ecuación diferencial ordinaria lineal de primero y segundo orden, solución de ecuaciones algebraicas de segundo grado, velocidad, aceleración, puntos críticos.

Referentes al objeto de estudio (fenómeno sistema masa-resorte).

- Movimiento libre no amortiguado, movimiento libre amortiguado en sus tres dimensiones, sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado, además del movimiento forzado. ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden homogéneas y no homogéneas, rigidez, amortiguamiento, fuerza, desplazamiento, masa, función, función derivada, ecuación de movimiento, condiciones iniciales, periodo, amplitud, frecuencia, velocidad, aceleración.

2.10 Sumario

Después de revisar y analizar los referentes teóricos en los párrafos anteriores, se presenta a continuación un resumen de los mismos, con el único propósito de anunciar de manera sintética la consideración medular de cada uno de ellos para el proyecto de investigación que se presenta.

Se ha descrito por una parte el esquema de enseñanza tradicional de las matemáticas para ingeniería (ITESM – CEM, 1997; Deiros, 2003; Vilanova, 2005, Gerald, 2002, Castela y Guzmán, 2006; Moreno, 2001) en donde el discurso prioriza la actividad algorítmica y algebraica (Muñoz, 2005), dejando de lado el uso de otros contextos importantes en las matemáticas y en donde el uso de la tecnología, y en particular el de la calculadora científica o simbólica juega un papel sin trascendencia y de participación única y exclusiva para la ejecución de los cálculos sencillos o complejos, en este esquema la evaluación se aboca a determinar la eficiencia en que los estudiantes aplican teoremas, propiedades, reglas y algoritmos (Gerald, 2002).

En contraparte, el esquema de enseñanza reformado (Gerald, 2002; McGee y Martínez 2003) valora la atención de competencias de modelado y resolución de problemas de la

vida real, así como la utilización de tecnología para la realización de exploraciones y experimentos, el esquema reformado incluye en la búsqueda del aprendizaje del estudiante la utilización de representaciones algebraicas, numéricas y gráficas.

En la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos (Douady, 1985) las matemáticas y su enseñanza se basan en la armonía del conocimiento de conceptos, modelos, criterios y algoritmos con la utilización de los mismos en la atención a problemas cotidianos y aquellos que guardan un contexto incluso solo matemático, la esencia de esta dialéctica es que durante el proceso de la enseñanza se debe alternar de manera cíclica los conceptos matemáticos utilizados desde las perspectivas de objeto y de instrumento o herramienta. Ligado a este referente teórico es necesario la interacción de un contexto o marco a otro, privilegiando que el proceso de solución de alguna situación problemática se de en distintos escenarios.

En el proceso de enseñanza de las matemáticas la visión procedimental u operacional no debe ser la única, la búsqueda de un equilibrio entre la atención a los algoritmos o secuencias de operaciones y los atributos y regularidades de los conceptos es fundamental, pues el trabajo realizado desde la perspectiva estructural posibilita precisamente la disposición de los conceptos matemáticos en contextos distintos al original.

En este proyecto de investigación se enfatiza en la competencia matemática (Tuning, 2007; PISA 2003, 2003b, 2003c, 2003d; Álvarez, 2006; Proenza y Leyva, 2006; Martínez, 2008; Zabala y Arnau, 2008; Goñi, 2009), competencia en la que se privilegia la armonía entre la comprensión por parte del estudiante de sus acciones y decisiones certeras, es decir, el saber algo, el saber hacer algo y el saber, entender o comprender de dichos saberes son parte fundamental de la vida de las personas, es de interés en el esquema de enseñanza propuesto en este proyecto de investigación la puesta en escena de tales principios. Desde una visión más simple de las competencias, quien es competente tiene que estar en posibilidad de responder las siguientes preguntas: ¿Qué se hace?, ¿Cómo se hace? y ¿Porqué se hace?, luego entonces no hay disociación de la teoría y la práctica del conocimiento (Zabala y Arnau, 2008).

Algunos de los teóricos de las representaciones semióticas (Duval, 1993, 2000, 2001, 2006a, 2006b; Hitt, 1991, 2003; Radford, 2006) postulan que para la apropiación conceptual y consecuente aprendizaje de las matemáticas es menester que el estudiante transite adecuadamente (en ambos sentidos) en los distintos registros de representación (algebraico, numérico, gráfico, físico virtual y lenguaje natural), así como también de un manejo equilibrado o balanceado de los registros sin privilegio de alguno de ellos.

Debido a la intangibilidad de los objetos matemáticos el uso de representaciones semióticas es la única forma o mecanismo de acceso a los mismos. En esta teoría de representaciones semióticas es menester el desarrollo de tres actividades cognitivas, la identificación y transformación de marcas o signos llamada representación y tratamiento respectivamente, y la conversión que implica el tránsito de un registro a otro y viceversa. Estas actividades cognitivas permiten precisamente la conceptualización de los conceptos, atributos, situaciones, argumentos, lenguaje, también llamados objetos matemáticos.

Muchos autores (Moreno y Rojano, 1999; Hernández, 2000; Karen, 2000; Queralt, 2000; Bower, 2003; Heugl, 2003; Laborde, 2003; De Faria, 2005; Eduteka, 2006) coinciden que la incorporación de la tecnología en la educación promueve la generación de nuevos problemas que resolver, de la posibilidad de generar inferencias y conjeturas por parte de los estudiantes, experimentar y explorar conceptos matemáticos (Sosa, Aparicio y Tuyub, 2008; Arellano y Solana, 2009; Ortega, Nesterova y Mendoza, 2009; Saucedo, 2005; Laborde, 2003; Eduteka, 2006; Lupiañez y Moreno, 2001; Morales y Hernández, 2009) pero también que es posible reducir los tiempos de ejecución de cálculos complejos (Demana y Waits, 1998a;1998b) y que se le puede dedicar más tiempo al tratamiento de competencias de modelado, análisis e interpretación de resultados, en general contribuyen a modificar radicalmente los esquemas de enseñanza, en particular con la calculadora esta situación no es la excepción, pues se ha demostrado la capacidad de visualización y potencialidad de la misma en diferentes áreas de las matemáticas y física (Kutzler, 2003; De Las Fuentes y Valdez, 2004; De Las Fuentes, Encinas y Bravo 2005; Laborde, 2003; Saucedo, 2005; Heugl, 2003; Gómez y Meza, 1994; Herget, 2000; Kutzler y Vlasta, 2003;

Rebekah, 2006; De Las Fuentes, Encinas y Rivera, 2007b; De Las Fuentes y Arcos 2007c; De Las Fuentes, Arcos y Díaz, 2008; Barton y Diehl, 1999; Bower, Brueningsen, Gough y Turley, 2003; Karen, 2000) en lo particular, y ciencias e ingeniería en lo general, en este proyecto de investigación se ha aprovechado la experiencia de investigadores y especialistas en el área que han utilizado este instrumento tecnológico y su potencialidad a partir de sus cualidades técnicas de programación estructurada, capacidad de memoria, sistema de cómputo algebraico entre muchas otras más, con propósitos de experimentación, ejecución de proyectos, exploración e incluso de investigación misma.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Como se mencionó con anterioridad el objetivo de la investigación es comparar la eficiencia de los conocimientos que alcanzan los estudiantes cuando se abordan los conceptos matemáticos asociados al sistema masa-resorte en el curso de ecuaciones diferenciales a partir de un esquema de enseñanza tradicional y otro que incorpora estrategias didácticas con tecnología de la calculadora. En virtud de lo anterior, se ha decidido emplear una metodología de investigación de corte cuantitativo. Dicha metodología se integra de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006) por los pasos enlistados a continuación:

1. Concepción de la idea
2. Planteamiento del problema que incluye el objetivo general, objetivos particulares, y preguntas de investigación.
3. Revisión de la literatura y establecimiento del marco teórico
4. Establecimiento del tipo de investigación, en este caso descriptivo y comparativo.
5. Definición de variables e hipótesis
6. Selección del diseño de la experimentación, en este caso: experimento *puro*.
7. Selección de los grupos experimentales.
8. Recolección de datos, lo cual implica el diseño del instrumento de medición diagnóstica, estrategia didáctica e instrumento post-test, así como la administración de los mismos, la validación de los instrumentos, codificación y archivo de datos son también acciones de esta etapa metodológica.
9. El análisis de datos, que implica: análisis de los índices obtenidos y pruebas estadísticas.
10. Presentación de resultados, discusión y conclusión.

3.1 Método

Se realizó un estudio explorativo y comparativo con dos grupos de estudiantes en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, la cual tiene como propósito la formación profesional de estudiantes en el área de la ingeniería.

En virtud de manipular de manera intencional variables independientes y medir la variable dependiente, así como para el establecimiento de la comparación de los dos grupos el diseño de investigación utilizado es el denominado experimento *puro* de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006). Con el objeto de comprobar la conjetura objeto de esta investigación se usa la prueba de hipótesis de medias (Walpole y Myers 1989), así como el análisis matricial para dar tratamiento a la información generada por los instrumentos de medición.

Desde esta perspectiva en el siguiente capítulo se presenta un análisis explorativo toda vez que dentro de la Facultad de Ingeniería no se cuentan con estudios similares que permitan conocer las competencias matemáticas de primera instancia en el caso de los estudiantes que se incorporan a los cursos de ecuaciones diferenciales. Otro de mayor profundidad con carácter comparativo, tomando como referentes los esquemas de enseñanza tradicional y el otro con inclusión de tecnología de la calculadora, el cual permitirá establecer el nivel de eficiencia de los estudiantes de los grupos experimentales y probar las hipótesis estadísticas propuestas.

Para realizar la experimentación, los estudiantes se organizaron en grupos formados por tres integrantes; haciéndoles entrega a cada uno de ellos una calculadora simbólica del tipo voyage 200. Previamente se les capacitó en el uso básico de la máquina (edición de ecuaciones, gráficas de funciones, ventanas de gráficos, determinación de críticos relativos y raíces reales), ya que algunos de ellos no habían tenido contacto con la calculadora simbólica voyage 200. Se entregó a cada estudiante del equipo un cuadernillo con la estrategia didáctica y las instrucciones a seguir para el desarrollo de las actividades fueron emitidas de manera verbal por el instructor. También se indicó que las respuestas que fueran anotadas no las borrarán, aunque después consideraran que estas estuvieran

equivocadas. Posteriormente, se discuten las propuestas a nivel grupal y el profesor institucionaliza el conocimiento adquirido.

Participaron en la investigación 66 estudiantes de la Facultad de Ingeniería, 36 de ellos integraron el grupo experimental, y el resto trabajaron de manera tradicional, la experimentación tuvo una duración de 12 días incluyendo la aplicación del post-test.

3.2 Sujetos

Para llevar a cabo la investigación se seleccionaron cuatro grupos, los definidos por los grupos de registro ante el Departamento de Servicios Estudiantiles y Gestión Escolar como 651, 657, 658 y 661, y con los que se contó con la autorización y colaboración de los profesores a cargo para llevar a cabo la experimentación de este proyecto de investigación, originalmente se inicio la experimentación con 90 estudiantes distribuidos por diversos, ver tabla 2.

Tabla 2. Distribución de los alumnos participantes por grupo

Grupo	Esquema de enseñanza	Nomenclatura del grupo	Cantidad de alumnos
658	Estrategia didáctica con tecnología de la calculadora	658-E	19
661	Tradicional	661-T	15
651	Estrategia didáctica con tecnología de la calculadora	651-E	14
651	Tradicional	651-T	14
657	Estrategia didáctica con tecnología de la calculadora	657-E	14
657	Tradicional	657-T	14

Se aclara que todos los estudiantes estaban debidamente matriculados en la Facultad de Ingeniería de la UABC Campus Mexicali, en el tercer semestre cursando la asignatura de ecuaciones diferenciales; en virtud de que el fenómeno sistema masa-resorte es estudiado en la cuarta unidad (aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior) de la asignatura citada. Cabe aclarar que la población total de estudiantes que cursan

semestralmente la unidad de aprendizaje de ecuaciones diferenciales alcanza los 300 estudiantes, distribuidos en 12 grupos de 20 hasta 35 alumnos.

3.3 Materiales de la investigación

Para el desarrollo de la investigación se determinó como necesario diseñar un instrumento de medición diagnóstico (pre-test), la estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora, y un instrumento de medición (post-test) para evaluar el avance educativo logrado por los estudiantes de los grupos seleccionados a partir de la puesta en práctica de la estrategia didáctica. A continuación se describen cada uno de tales materiales.

3.3.1 Instrumento de medición diagnóstica

Con el propósito de establecer las condiciones de los estudiantes en cuanto a sus competencias matemáticas específicas (modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones), logradas hasta el momento previo al inicio de abordar el estudio del fenómeno sistema masa-resorte, y establecer de manera paralela las habilidades en cuanto a su actividad cognitiva para la representación, tratamiento y conversión de objetos matemáticos, se diseñó y aplicó un instrumento de medición diagnóstico o pre-test con la consideración de los criterios de Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004) para la generación de reactivos en la construcción de exámenes del tipo criterial alineado con el currículum, a la vez es matricial ya que involucra amplitud en contenidos conceptuales y procedimentales, los cuales han sido estudiados y tratados por los estudiantes tanto en cursos de cálculo diferencial e integral, probabilidad y estadística y métodos numéricos previos, como en el propio de ecuaciones diferenciales.

La validez total (contenido, criterio y constructo), la determinación de la calidad técnica (índices de dificultad y discriminación) de cada uno de los reactivos y el establecimiento de la confiabilidad en su conjunto definen el instrumento de medición al cual se hace alusión aquí.

El instrumento de medición diagnóstico (ver apéndice A) está integrado por 40 reactivos de opción múltiple, y el análisis de los resultados de la administración permite establecer las condiciones de los estudiantes en cuanto a las competencias matemáticas previas a la puesta en marcha de la experimentación, en otras palabras el análisis de los resultados de la administración ha posibilitado explorar la eficiencia de conocimientos de los alumnos alrededor de las competencias matemáticas, la complejidad conceptual y las habilidades en torno a los distintos registros de representación. En la tabla 3 se muestra la identificación de cada uno de los reactivos que conforman el instrumento diagnóstico con la competencia matemática, su indicador correspondiente, la actividad cognitiva, la complejidad estructural, así como el nivel de dificultad del reactivo, el registro inicial y final respectivo.

Tabla 3. Identificación de reactivos del instrumento de medición diagnóstico

No. de reactivo	Competencia	Indicador	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad
1	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.	Representación	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reproducción
2	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.	Representación	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
3	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.	Tratamiento	Gráfico	Gráfico	Estructural	Conexión
4	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Representación	Lenguaje natural	Numérico	Estructural	Reproducción
5	Representar	Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones.	Tratamiento	Algebraico	Algebraico	Operacional	Reproducción
6	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Representación	Algebraico	Numérico	Estructural	Reproducción

Tabla 3. Identificación de reactivos del instrumento de medición diagnóstico
(continuación).

No. de reactivo	Competencia	Indicador	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad
7	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
8	Modelar	Traducir la realidad a una estructura matemática.	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Conexión
9	Modelar	Interpretar los modelos matemáticos en términos reales.	Conversión	Algebraico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión
10	Modelar	Trabajar con un modelo matemático	Conversión	Gráfico	Algebraico	Estructural	Conexión
11	Modelar	Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones).	Tratamiento	Algebraico	Algebraico	Operacional	Reproducción
12	Plantear y resolver problemas	Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados).	Tratamiento	Lenguaje natural	Algebraico	Operacional	Reproducción
13	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Tratamiento	Algebraico	Lenguaje natural	Operacional	Reproducción
14	Representar	Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones.	Representación	Gráfico	Algebraico	Estructural	Reproducción
15	Representar	Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones.	Conversión	Algebraico	Gráfico	Operacional	Conexión

Tabla 3. Identificación de reactivos del instrumento de medición diagnóstico
(continuación).

No. de reactivo	Competencia	Indicador	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad
16	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.	Conversión	Gráfico	Algebraico	Estructural	Conexión
17	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Algebraico	Lenguaje natural	Operacional	Conexión
18	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.	Representación	Algebraico	Algebraico	Estructural	Reproducción
19	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.	Tratamiento	Algebraico	Algebraico	Operacional	Reproducción
20	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Tratamiento	Algebraico	Algebraico	Operacional	Reproducción
21	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.	Conversión	Algebraico	Gráfico	Estructural	Reproducción
22	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Tratamiento	Algebraico	Númérico	Operacional	Reproducción
23	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.	Representación	Gráfico	Algebraico	Estructural	Reproducción
24	Pensar y razonar	Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis)	Representación	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción

Tabla 3. Identificación de reactivos del instrumento de medición diagnóstico
(continuación).

No. de reactivo	Competencia	Indicador	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad
25	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Conversión	Algebraico	Numérico	Operacional	Reproducción
26	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
27	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Representación	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
28	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Conversión	Numérico	Algebraico	Operacional	Reproducción
29	Utilizar el lenguaje simbólico-formal y técnico, ejecutar los calculo	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Tratamiento	Algebraico	Algebraico	Operacional	Reproducción
30	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.	Representación	Algebraico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
31	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Tratamiento	Lenguaje natural	Numérico	Operacional	Reproducción
32	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Tratamiento	Lenguaje natural	Numérico	Operacional	Reproducción
33	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.	Conversión	Numérico	Algebraico	Operacional	Conexión
34	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Tratamiento	Algebraico	Numérico	Operacional	Reproducción

Tabla 3. Identificación de reactivos del instrumento de medición diagnóstico
(continuación).

No. de reactivo	Competencia	Indicador	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad
35	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.	Representación	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reproducción
36	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Tratamiento	Algebraico	Algebraico	Operacional	Reproducción
37	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Algebraico	Lenguaje natural	Operacional	Reproducción
38	Pensar y razonar.	Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis)	Representación	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reproducción
39	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Tratamiento	Gráfico	Númérico	Operacional	Reproducción
40	Pensar y razonar.	Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis)	Representación	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción

Para juzgar la calidad de la prueba diagnóstico se ha contemplado el análisis de su validez total, que incluye la validez de contenido, de criterio y de constructo, la confiabilidad, y los índices de dificultad y discriminación.

3.3.1.1 Validez de Contenido

Los conceptos y procedimientos matemáticos implicados en el diagnóstico, así como los registros de representación y la actividad cognitiva requerida en el mismo forman parte cabalmente del currículo que los estudiantes han llevado a cabo a través de los cursos

propedéutico de álgebra, geometría y trigonometría, de matemáticas I (cálculo diferencial) y II (cálculo integral), métodos numéricos, probabilidad y estadística y ecuaciones diferenciales, como puede constatarse en los contenidos programáticos de la Facultad de Ingeniería.

En el proceso de aplicación del instrumento diagnóstico (como parte del proceso de calibración del mismo) han participado docentes del área de matemáticas, quienes imparten o han impartido las unidades de aprendizaje mencionadas, con el señalamiento de que el instrumento no alude a conocimientos, habilidades, competencias o procedimientos ajenos a los estudiados por los alumnos de ingeniería.

Se cuenta con instrumentos de medición similar, los llamados exámenes colegiados alineados con el currículo, criterial y de gran escala, de opción simple, una respuesta correcta y el resto son distractores, con el objeto de establecer el logro educativo o académico, en relación a sus competencias matemáticas durante y al final de la unidad de aprendizaje, para los casos de matemáticas I y II, aunque también se tiene la experiencia en la Facultad de Ingeniería con el diseño y aplicación de exámenes de estas mismas características para las áreas de termodinámica, circuitos I, II y programación.

3.3.1.2 Validez de Criterio

Para la validez de criterio se ha considerado importante señalar que a los estudiantes que se les aplicó el instrumento de medición diagnóstico, realizaron de manera formal y como parte de su evaluación de curso el denominado examen colegiado de matemáticas I y II durante el periodo 2007-1, 2007-2 e inclusive 2008-1, respectivamente, dicho examen se ha venido aplicando a los estudiantes desde el año 2005, el examen de matemáticas I consta de 75 reactivos, y el de matemáticas II, consta de 50 reactivos. Si bien el recorrido escolar de los alumnos no es precisamente lineal, se rescató de la base de datos de la Coordinación de Formación Básica de la Facultad de Ingeniería Campus Mexicali (responsable del diseño, aplicación y análisis estadístico de exámenes colegiados de matemáticas), algunos de los resultados de jóvenes que participaron de manera voluntaria en el diagnóstico, para el caso

de matemáticas I se contó con las calificaciones de 60 jóvenes, en donde la correlación muestral de Pearson calculada es de 0.78 (ver tabla 4).

El coeficiente de correlación muestral para tal efecto puede calcularse mediante:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

Donde:

r es el coeficiente de correlación muestral

$$S_{xx} = \sum (\bar{x} - x_i)^2, \quad S_{yy} = \sum (\bar{y} - y_i)^2 \quad y \quad S_{xy} = \sum (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

En el caso particular que nos ocupa: $\bar{x} = 53.5417$, $\bar{y} = 60.5500$, $S_{xx} = 13441.1458$, $S_{yy} = 16646.8500$ y $S_{xy} = 11733.1250$, por lo que al sustituir en la ecuación se tiene que

$r = \frac{11733.1250}{\sqrt{(13441.1458)(16646.8500)}}$, lo que finalmente arroja como coeficiente de correlación a $r = 0.78$.

Tabla 4. Comparativo de calificaciones del instrumento de medición diagnóstico y el examen colegiado de matemáticas I.

No.	Grupo	Matrícula	Aciertos en el instrumento de medición diagnóstico	Calificación obtenida instrumento de medición diagnóstico	Calificaciones del examen colegiado de matemáticas I	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	658	194891	25	62.50	76	80.2517	238.7025	138.4063
2	658	188903	17	42.50	44	121.9184	273.9025	182.7396
3	658	193091	9	22.50	59	963.5851	2.4025	48.1146
4	658	190338	33	82.50	87	838.5851	699.6025	765.9479
5	658	191345	23	57.50	56	15.6684	20.7025	-18.0104
6	654	193251	25	62.50	67	80.2517	41.6025	57.7813
7	654	192094	18	45.00	53	72.9601	57.0025	64.4896
8	654	192482	32	80.00	93	700.0434	1053.0025	858.5729
9	654	191826	22	55.00	76	2.1267	238.7025	22.5313
10	654	188676	13	32.50	36	442.7517	602.7025	516.5729
11	654	193590	26	65.00	71	131.2934	109.2025	119.7396
12	654	194166	28	70.00	72	270.8767	131.1025	188.4479

Tabla 4. Comparativo de calificaciones del instrumento de medición diagnóstico y el examen colegiado de matemáticas I (continuación).

No.	Grupo	Matrícula	Aciertos en el instrumento de medición diagnóstico	Calificación obtenida instrumento de medición diagnóstico	Calificaciones del examen colegiado de matemáticas I	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
13	654	191340	18	45.00	65	72.9601	19.8025	-38.0104
14	654	186036	13	32.50	30	442.7517	933.3025	642.8229
15	654	190444	23	57.50	63	15.6684	6.0025	9.6979
16	654	194344	27	67.50	64	194.8351	11.9025	48.1563
17	657	185579	14	35.00	30	343.7934	933.3025	566.4479
18	654	187702	19	47.50	40	36.5017	422.3025	124.1563
19	654	192555	27	67.50	84	194.8351	549.9025	327.3229
20	654	193533	23	57.50	68	15.6684	55.5025	29.4896
21	654	194042	29	72.50	81	359.4184	418.2025	387.6979
22	651	191716	15	37.50	45	257.3351	241.8025	249.4479
23	651	191983	27	67.50	79	194.8351	340.4025	257.5313
24	651	191422	28	70.00	65	270.8767	19.8025	73.2396
25	651	192251	19	47.50	52	36.5017	73.1025	51.6563
26	651	187761	14	35.00	24	343.7934	1335.9025	677.6979
27	651	193186	16	40.00	57	183.3767	12.6025	48.0729
28	651	191025	24	60.00	73	41.7101	155.0025	80.4063
29	651	190564	22	55.00	56	2.1267	20.7025	-6.6354
30	651	190448	30	75.00	68	460.4601	55.5025	159.8646
31	651	192073	16	40.00	59	183.3767	2.4025	20.9896
32	651	193142	22	55.00	72	2.1267	131.1025	16.6979
33	651	192797	13	32.50	55	442.7517	30.8025	116.7813
34	651	191685	24	60.00	72	41.7101	131.1025	73.9479
35	651	193504	16	40.00	51	183.3767	91.2025	129.3229
36	651	190371	26	65.00	71	131.2934	109.2025	119.7396
37	651	192665	28	70.00	73	270.8767	155.0025	204.9063
38	651	193790	25	62.50	81	80.2517	418.2025	183.1979
39	651	190683	15	37.50	17	257.3351	1896.6025	698.6146
40	661	185566	15	37.50	63	257.3351	6.0025	-39.3021
41	661	187676	14	35.00	30	343.7934	933.3025	566.4479
42	661	188476	14	35.00	22	343.7934	1486.1025	714.7813
43	661	187454	17	42.50	63	121.9184	6.0025	-27.0521
44	657	192161	16	40.00	55	183.3767	30.8025	75.1562
45	657	190695	28	70.00	60	270.8767	0.3025	-9.0521
46	657	192767	25	62.50	64	80.2517	11.9025	30.9063
47	657	190915	31	77.50	83	574.0017	504.0025	537.8646
48	657	187520	16	40.00	41	183.3767	382.2025	264.7396
49	657	192743	23	57.50	76	15.6684	238.7025	61.1563
50	657	194248	30	75.00	73	460.4601	155.0025	267.1563

Tabla 4. Comparativo de calificaciones del instrumento de medición diagnóstico y el examen colegiado de matemáticas I (continuación).

No.	Grupo	Matrícula	Aciertos en el instrumento de medición diagnóstico	Calificación obtenida instrumento de medición diagnóstico	Calificaciones del examen colegiado de matemáticas I	(xi - xt)^2	(yi - yt)^2	(xi - xt)(yi - yt)
51	657	193029	19	47.50	53	36.5017	57.0025	45.6146
52	657	193950	28	70.00	76	270.8767	238.7025	254.2813
53	657	191783	17	42.50	61	121.9184	0.2025	-4.9688
54	657	191335	28	70.00	75	270.8767	208.8025	237.8229
55	657	193848	14	35.00	48	343.7934	157.5025	232.6979
56	657	193752	16	40.00	56	183.3767	20.7025	61.6146
57	657	192045	25	62.50	59	80.2517	2.4025	-13.8854
58	657	194221	29	72.50	73	359.4184	155.0025	236.0313
59	657	191196	17	42.50	57	121.9184	12.6025	39.1979
60	657	190666	19	47.50	60	36.5017	0.3025	3.3229

En la tabla 4, x_i corresponde al x -ésimo dato de la calificación obtenida en el instrumento diagnóstico, x_t es el valor promedio de las calificaciones obtenidas del instrumento diagnóstico, mientras que y_i , se refiere al y -ésimo dato obtenido por el examen colegiado de matemáticas I, finalmente y_t es el valor promedio.

Para el caso de matemáticas II, se contó con 69 estudiantes que realizaron el diagnóstico (ver tabla 5), obteniendo un coeficiente de correlación de Pearson de 0.80. Dichos coeficientes son calificados como correlaciones positivas considerables de acuerdo a la escala de Hernández, Fernández y Baptista (2006). En ambos casos se rechazaría la hipótesis de no asociación lineal con un nivel de significancia de 0.01.

El coeficiente de correlación muestral para tal efecto puede calcularse mediante:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

Donde:

r es el coeficiente de correlación muestral

$$S_{xx} = \sum (\bar{x} - x_i)^2, \quad S_{yy} = \sum (\bar{y} - y_i)^2 \quad y \quad S_{xy} = \sum (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

En el caso particular que nos ocupa: $\bar{x} = 52.3188$, $\bar{y} = 51.1449$, $S_{xx} = 16816.4855$, $S_{yy} = 15758.5507$ y $S_{xy} = 13104.3116$, por lo que al sustituir en la ecuación se tiene que

$$r = \frac{13104.3116}{\sqrt{(16816.4855)(15758.5507)}}, \text{ lo que finalmente arroja como coeficiente de correlación a } r = 0.80.$$

Tabla 5. Comparativo de calificaciones del instrumento de medición diagnóstico y el examen colegiado de matemáticas II.

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el instrumento de medición diagnóstico	Calificación obtenida instrumento de medición diagnóstico	Calificación del examen colegiado de matemáticas II	(xi - xt)^2	(yi - yt)^2	(xi - xt)(yi - yt)
1	658	185872	27	67.5	56	230.4676	23.5717	73.7056
2	658	194891	25	62.5	82	103.6560	952.0355	314.1404
3	658	188903	17	42.5	44	96.4096	51.0500	70.1549
4	658	193091	9	22.5	34	889.1633	293.9485	511.2419
5	658	194290	29	72.5	66	407.2792	220.6732	299.7926
6	658	192988	25	62.5	60	103.6560	78.4123	90.1549
7	658	186071	24	60	72	59.0002	434.9340	160.1911
8	658	190338	33	82.5	84	910.9024	1079.4558	991.6042
9	658	191345	23	57.5	52	26.8444	0.7311	4.4303
10	658	188344	18	45	54	53.5654	8.1514	-20.8958
11	658	187985	24	60	60	59.0002	78.4123	68.0172
12	654	193251	25	62.5	58	103.6560	46.9920	69.7926
13	654	192094	18	45	52	53.5654	0.7311	-6.2581
14	654	192482	32	80	92	766.2466	1669.1369	1130.9158
15	654	192285	17	42.5	52	96.4096	0.7311	-8.3958
16	654	192541	14	35	30	299.9422	447.1080	366.2056
17	654	188676	13	32.5	36	392.7864	229.3688	300.1549
18	654	193590	26	65	72	160.8118	434.9340	264.4665
19	654	194166	28	70	64	312.6234	165.2529	227.2926
20	654	191340	18	45	48	53.5654	9.8906	23.0172
21	654	186036	13	32.5	38	392.7864	172.7891	260.5172
22	654	190444	23	57.5	53	26.8444	3.4413	9.6114
23	657	185579	14	35	50	299.9422	1.3109	19.8288
24	654	187702	19	47.5	46	23.2212	26.4703	24.7926
25	654	192555	27	67.5	62	230.4676	117.8326	164.7926
26	654	193533	23	57.5	58	26.8444	46.9920	35.5172
27	654	194042	29	72.5	76	407.2792	617.7746	501.6042
28	651	188616	19	47.5	48	23.2212	9.8906	15.1549
29	651	191716	15	37.5	20	219.5980	970.0065	461.5317
30	651	191983	27	67.5	60	230.4676	78.4123	134.4303

Tabla 5. Comparativo de calificaciones del instrumento de medición diagnóstico y el examen colegiado de matemáticas II (continuación).

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el instrumento de medición diagnóstico	Calificación obtenida instrumento de medición diagnóstico	Calificación del examen colegiado de matemáticas II	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
31	651	183574	11	27.5	18	615.9748	1098.5862	822.6187
32	651	191422	28	70	64	312.6234	165.2529	227.2926
33	651	192251	19	47.5	30	23.2212	447.1080	101.8940
34	651	187761	14	35	46	299.9422	26.4703	89.1042
35	651	192478	14	35	36	299.9422	229.3688	262.2926
36	651	190564	22	55	46	7.1886	26.4703	-13.7944
37	651	190448	30	75	60	514.4350	78.4123	200.8433
38	651	192073	16	40	34	151.7538	293.9485	211.2056
39	651	192797	13	32.5	50	392.7864	1.3109	22.6911
40	651	191685	24	60	52	59.0002	0.7311	6.5679
41	651	193504	16	40	26	151.7538	632.2674	309.7564
42	651	190371	26	65	64	160.8118	165.2529	163.0172
43	651	192665	28	70	64	312.6234	165.2529	227.2926
44	651	193790	25	62.5	66	103.6560	220.6732	151.2419
45	651	190683	15	37.5	48	219.5980	9.8906	46.6042
46	651	192192	11	27.5	48	615.9748	9.8906	78.0535
47	651	188544	23	57.5	60	26.8444	78.4123	45.8795
48	661	187967	17	42.5	30	96.4096	447.1080	207.6187
49	661	185566	15	37.5	34	219.5980	293.9485	254.0679
50	661	187676	14	35	30	299.9422	447.1080	366.2056
51	661	188476	14	35	36	299.9422	229.3688	262.2926
52	661	187454	17	42.5	42	96.4096	83.6297	89.7926
53	657	192161	16	40	50	151.7538	1.3109	14.1042
54	657	187154	18	45	46	53.5654	26.4703	37.6549
55	657	190695	28	70	56	312.6234	23.5717	85.8433
56	657	192767	25	62.5	58	103.6560	46.9920	69.7926
57	657	190915	31	77.5	74	634.0908	522.3543	575.5172
58	657	187520	16	40	52	151.7538	0.7311	-10.5335
59	657	194248	30	75	64	514.4350	165.2529	291.5679
60	657	193950	28	70	52	312.6234	0.7311	15.1187
61	657	191783	17	42.5	26	96.4096	632.2674	246.8940
62	657	191845	31	77.5	64	634.0908	165.2529	323.7056
63	657	191335	28	70	54	312.6234	8.1514	50.4810
64	657	188500	15	37.5	32	219.5980	366.5283	283.7056
65	657	193848	14	35	46	299.9422	26.4703	89.1042
66	657	193752	16	40	48	151.7538	9.8906	38.7419
67	657	194221	29	72.5	58	407.2792	46.9920	138.3433
68	657	191196	17	42.5	34	96.4096	293.9485	168.3433
69	657	190666	19	47.5	52	23.2212	0.7311	-4.1205

En la composición del examen diagnóstico (ver tabla 6) en cuanto a los reactivos, puede notarse la preponderancia de reactivos asociados a los cursos de matemáticas I y II, y los coeficientes de correlación positiva evidenciada consecuentemente la validez de criterio del instrumento de medición diagnóstico.

Tabla 6. Composición del examen diagnóstico en cuanto a su contenido.

Reactivos	Curso asociado	Cantidad de reactivos	Porcentaje
2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 16, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 28 y 29	Matemáticas I	18	45.00 %
13, 17, 21, 22 y 23	Matemáticas II	5	12.50 %
1, 9, 15, 20 y 30	Ecuaciones diferenciales	5	12.50 %
6 y 33	Métodos numéricos	2	5.00 %
12, 31 y 32	Probabilidad y estadística	3	7.50%
34, 35, 36, 37, 38, 39 y 40	Álgebra	7	17.50 %

3.1.1.3 Validez de Constructo

Un análisis factorial deriva en la validez de constructo y parte de la premisa que las variables observables cuentan con correlación tal que las hacen depender de variables dimensionales o subyacentes, indica prácticamente las dimensiones y los reactivos que las conforman (Hernández, 2006).

Previo al análisis factorial es conveniente verificar si las variables de la muestra son aceptables para tal efecto, lo cual se realiza mediante el índice de Káiser-Meyer-Olkin (KMO), el índice contrasta si las correlaciones parciales entre las variables son pequeñas. Adicionalmente, se sugiere aplicar la prueba de esfericidad de Bartlett, la cual contrasta si la matriz de correlaciones es una matriz identidad que indicaría que el modelo factorial es inadecuado. Es decir, si la prueba resulta no significativa no se debe efectuar el análisis factorial, en este caso se consideraría como un conjunto de elementos o variables no correlacionados. Se señala que para este cálculo se han excluido los reactivos con deficiente discriminación e incluso aquellos con bajo índice de dificultad (menor a 0.2), a saber: 6, 10, 13, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 27, 29, 30, 33, 34, 35, 37 y 38.

En este caso se obtuvo un indicador KMO = 0.546, el cual se considera bajo, pero suficiente para aplicar el método de componentes principales. Un valor de significatividad menor a 0.05 es aceptable, el caso que nos ocupa es 0.004, con lo cual es viable observar que la correlación entre las variables es distinta de cero.

El análisis de componentes mediante rotación de máxima variación en 24 iteraciones y 9 componentes extraídos conduce a los resultados de la tabla 7.

Tabla 7. Matriz de Componentes Rotados

Reactivos	Componentes								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-.705	-.183	.039	-.065	.039	.050	.086	.144	.166
2	.044	.184	.405	-.151	-.029	.659	.175	.091	.188
3	.122	.087	-.019	-.031	-.020	-.754	.113	.149	.334
4	.447	.065	.045	-.026	-.354	-.045	-.415	.218	.162
5	.390	.031	-.772	.049	-.028	-.018	.141	.002	.036
7	.205	-.246	-.013	.345	-.053	.351	.591	-.084	.053
8	.487	-.001	.119	.103	-.253	-.570	.087	.211	-.155
9	.050	.078	.069	-.835	-.162	.046	-.133	.043	-.094
11	.630	-.023	.035	.154	-.037	-.003	-.237	.167	.140
12	.268	.188	-.283	-.015	.252	.212	-.278	.555	-.217
14	.135	.492	-.192	.293	-.152	.034	-.220	-.213	-.012
16	-.209	-.720	-.074	-.204	.133	-.035	-.061	.119	.100
17	-.197	-.017	-.041	.145	.807	-.034	.003	.019	-.115
21	-.183	.115	-.432	.344	-.236	.015	-.214	.268	.429
24	.021	.146	-.012	-.011	.032	.206	-.034	-.861	.074
25	.205	.314	.133	.699	-.146	-.068	.041	.083	-.119
26	.028	.605	.340	-.013	.375	-.017	-.043	-.135	.036
28	-.175	.101	-.044	.042	.012	-.134	.866	.033	-.076
31	-.134	.032	.059	-.006	-.064	.073	.065	.178	-.856
32	.130	.067	.691	.122	-.356	.155	.014	-.042	-.105
36	.046	-.833	.089	.128	.052	.019	-.031	-.159	-.057
39	-.756	-.051	.172	.096	-.015	.072	-.133	.019	-.194
40	.139	-.114	-.165	-.162	.609	.184	.034	.066	.287

Con los 9 factores o componentes extraídos se explica el 69.23% de la totalidad de la varianza de las variables. La tabla 8 exhibe la correspondencia de los respectivos componentes.

Tabla 8. Correspondencia entre reactivo y componente principal

No. de reactivo	Competencia	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad	Índice de dificultad	Componente
1	Representar	Representación	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reproducción	0.64	9
2	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	Representación	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	0.45	6
3	Representar	Tratamiento	Gráfico	Gráfico	Estructural	Conexión	0.53	9
4	Representar	Representación	Lenguaje natural	Númérico	Estructural	Reproducción	0.79	1
5	Representar	Tratamiento	Algebraico	Algebraico	Operacional	Reproducción	0.63	1
7	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	Tratamiento	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	0.62	7
8	Modelar	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reproducción	0.78	1
9	Modelar	Conversión	Algebraico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión	0.41	2
11	Modelar	Tratamiento	Algebraico	Algebraico	Operacional	Reproducción	0.78	1
12	Plantear y resolver problemas	Tratamiento	Lenguaje natural	Algebraico	Operacional	Reproducción	0.67	8
14	Representar	Representación	Gráfico	Algebraico	Estructural	Reproducción	0.6	2
16	Representar	Conversión	Gráfico	Algebraico	Estructural	Conexión	0.74	5
17	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	Tratamiento	Algebraico	Lenguaje natural	Operacional	Conexión	0.5	5

Tabla 8. Correspondencia entre reactivo y componente principal (continuación).

No. de reactivo	Competencia	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad	Índice de dificultad	Componente
21	Representar	Conversión	Algebraico	Gráfico	Estructural	Reproducción	0.38	9
24	Pensar y razonar	Representación	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	0.48	6
25	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Conversión	Algebraico	Númérico	Operacional	Reproducción	0.62	4
26	Representar	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	0.6	2
28	Representar	Conversión	Númérico	Algebraico	Operacional	Reproducción	0.89	7
31	Plantear y resolver problemas	Tratamiento	Lenguaje natural	Númérico	Operacional	Reproducción	0.2	8
32	Plantear y resolver problemas	Tratamiento	Lenguaje natural	Númérico	Operacional	Reproducción	0.77	3
36	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	Tratamiento	Algebraico	Algebraico	Operacional	Reproducción	0.76	4
39	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	Tratamiento	Gráfico	Númérico	Operacional	Reproducción	0.4	3
40	Pensar y razonar	Representación	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	0.18	5

De la estructuración resultante por componentes, es viable observar que el factor 1 y 2 incorporan los reactivos relacionados con la competencia matemática de modelado y representación, con un nivel de dificultad mayormente de reproducción, en cuanto a las actividades cognitivas y los registros de origen y destino no se encuentra regularidad alguna, sin embargo el factor 2 es eminentemente estructural.

Los factores 3 y 4 se identifican por la competencia matemática asociada a la utilización del lenguaje simbólico, formal y técnico, en cuanto a la actividad cognitiva destaca el tratamiento, la complejidad conceptual es de corte operacional y el nivel de dificultad es netamente de reproducción.

El factor 6 se matiza por que los registros de origen y destino son en el lenguaje natural, la actividad cognitiva es de representación, la complejidad de la comprensión es estructural y el nivel de dificultad es de reproducción. En el caso del componente 7 no se encontró regularidad alguna.

La competencia matemática referente al planteamiento y resolución de problemas se identifica en el componente 8, el registro original es el lenguaje natural, la complejidad de la comprensión es del tipo operacional y el nivel de dificultad es de reproducción.

El factor 9 se aboca a la competencia matemática únicamente de representar y se asocia expresamente a la complejidad de la comprensión de corte estructural. Este incluso pudiera asociarse con el componente 2.

Las actividades cognitivas quedaron representadas en los distintos componentes, toda vez que para tales actividades (representación, tratamiento y conversión) es menester la dualidad conceptual y diversas competencias matemáticas. Lo anterior revela de alguna manera la consistencia en la estructura de la prueba diagnóstica. Sin embargo debe señalarse que no hay una delimitación precisa en cuanto a los componentes generados, esto es explicable por la multiplicidad de variables involucradas, alrededor de los registros de representación de origen y destino de cada reactivo, de la actividad cognitiva requerida para el proceso de solución del problema, de la complejidad estructural o procedimental del reactivo, y de la competencia matemática requerida.

3.1.1.4 Confiabilidad

La confiabilidad del instrumento de medición diagnóstico es establecida a partir del coeficiente de Kuder – Richardson (KR21), cuyos parámetros involucrados son el número de reactivos, media y desviación estándar de los resultados de los estudiantes, el coeficiente de Kuder es un parámetro de cada examen y no de un reactivo en particular. Se calcula con la fórmula siguiente:

$$r = \left[\frac{k}{k-1} \right] \left[1 - \frac{m(k-m)}{k s^2} \right]$$

Donde:

r es el coeficiente de confiabilidad de Kuder – Richarson

k es el número de reactivos de la prueba

m es la media de los aciertos obtenidos

s es la desviación estándar

La confiabilidad del diagnóstico calculada es 0.74 (ver tabla 9), considerado como aceptable para Lafourcade (1971) para el caso de exámenes no estandarizados.

Tabla 9. Resultados del diagnóstico y confiabilidad de Kuder-Richarson

No.	Grupo	Matrícula	Aciertos		No.	Grupo	Matrícula	Aciertos
1	658	185872	27		48	651	190564	22
2	658	194891	25		49	651	190448	30
3	658	188903	17		50	651	192073	16
4	658	193091	9		51	651	193142	22
5	658	194290	29		52	651	192797	13
6	658	190017	17		53	651	191685	24
7	658	187235	15		54	651	193504	16
8	658	192988	25		55	651	190371	26
9	658	186251	23		56	651	192665	28
10	658	186071	24		57	651	193790	25
11	658	190338	33		58	651	190683	15
12	658	191345	23		59	651	188339	11
13	658	188344	18		60	651	192192	11
14	658	187985	24		61	651	188544	23
15	654	191646	24		62	661	187967	17
16	654	193251	25		63	661	272330	18
17	654	192094	18		64	661	185566	15
18	654	192792	23		65	661	187499	28
19	654	192173	17		66	661	187899	23
20	654	192482	32		67	661	156593	15
21	654	192285	17		68	661	186281	25
22	654	186845	12		69	661	187676	14
23	654	192541	14		70	661	188476	14
24	654	191826	22		71	661	187454	17
25	654	188676	13		72	661	193875	26

Tabla 9. Resultados del diagnóstico y confiabilidad de Kuder-Richarson (continuación).

No.	Grupo	Matrícula	Aciertos		No.	Grupo	Matrícula	Aciertos
26	654	193590	26		73	657	192161	16
27	654	194166	28		74	657	187154	18
28	654	191340	18		75	657	192819	27
29	654	186036	13		76	657	190695	28
30	654	190444	23		77	657	192767	25
31	654	194344	27		78	657	190915	31
32	657	185579	14		79	657	187520	16
33	654	187702	19		80	657	192743	23
34	654	192555	27		81	657	194248	30
35	654	193533	23		82	657	193029	19
36	654	194042	29		83	657	193950	28
37	651	188616	19		84	657	191783	17
38	651	191716	15		85	657	191845	31
39	651	191983	27		86	657	191335	28
40	651	183574	11		87	657	188500	15
41	651	191422	28		88	657	193848	14
42	651	187278	18		89	657	193752	16
43	651	192251	19		90	657	192045	25
44	651	187761	14		91	657	194221	29
45	651	192478	14		92	657	191196	17
46	651	193186	16		93	657	190666	19
47	651	191025	24		94	657	193770	13

Sustituyendo los valores estadísticos obtenidos se tiene que:

$$r = \left[\frac{40}{40-1} \right] \left[1 - \frac{20.82(40-20.82)}{40(5.95^2)} \right], \text{ lo que finalmente resulta que } r = 0.74$$

También se calculó la confiabilidad por el método de mitades partidas, Si el instrumento es confiable, las puntuaciones de ambas mitades deben estar fuertemente correlacionadas (ver resultados en la tabla 10). Un individuo con baja puntuación en una mitad, tenderá a tener también una baja puntuación en la otra mitad. El coeficiente de correlación muestral para tal efecto puede calcularse mediante:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

Donde:

r es el coeficiente de correlación muestral

$$S_{xx} = \sum (\bar{x} - x_i)^2, \quad S_{yy} = \sum (\bar{y} - y_i)^2 \quad \text{y} \quad S_{xy} = \sum (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

En este caso particular se obtuvo que: $\bar{x} = 9.5851$, $\bar{y} = 11.2340$, $S_{xx} = 838.8191$, $S_{yy} = 1032.8511$ y $S_{xy} = 713.1277$, luego, al sustituir en la ecuación se tiene que:

$$r = \frac{713.1277}{\sqrt{(838.8191)(1032.8511)}} \text{ obteniendo un coeficiente de } 0.77, \text{ calificado como}$$

correlación positiva considerable de acuerdo a la escala de Hernández, Fernández y Baptista (2006).

La estimación de la confiabilidad r_t se calcula a través del método de mitades partidas

corregido por la fórmula de Spearman-Brown $r_t = \frac{2r}{1+r}$ en donde r es el coeficiente de correlación obtenido por mitades partidas.

$$r_t = \frac{2(0.77)}{1+0.77}, \text{ en donde se obtiene un coeficiente de confiabilidad } r_t = 0.87, \text{ calificado}$$

como apropiado por Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004).

Tabla 10. Resultados del instrumento de medición diagnóstico mediante el método de mitades partidas

No.	Grupo	Matrícula	Aciertos de la mitad impar	Aciertos de la mitad par	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	658	185872	15	12	29.3211	0.5867	4.1476
2	658	194891	12	13	5.8317	3.1186	4.2646
3	658	188903	6	11	12.8530	0.0548	0.8391
4	658	193091	6	3	12.8530	67.7995	29.5199
5	658	194290	13	16	11.6615	22.7144	16.2752
6	658	190017	7	10	6.6828	1.5229	3.1901
7	658	187235	7	8	6.6828	10.4590	8.3603
8	658	192988	12	13	5.8317	3.1186	4.2646
9	658	186251	11	12	2.0019	0.5867	1.0837
10	658	186071	11	13	2.0019	3.1186	2.4986
11	658	190338	14	19	19.4913	60.3101	34.2859
12	658	191345	11	12	2.0019	0.5867	1.0837

Tabla 10. Resultados del instrumento de medición diagnóstico mediante el método de mitades partidas (continuación).

No.	Grupo	Matrícula	Aciertos de la mitad impar	Aciertos de la mitad par	$(x_i - x_t)^2$	$(y_i - y_t)^2$	$(x_i - x_t)(y_i - y_t)$
13	658	188344	9	9	0.3423	4.9909	1.3072
14	658	187985	11	13	2.0019	3.1186	2.4986
15	654	191646	11	13	2.0019	3.1186	2.4986
16	654	193251	13	12	11.6615	0.5867	2.6157
17	654	192094	7	11	6.6828	0.0548	0.6050
18	654	192792	11	12	2.0019	0.5867	1.0837
19	654	192173	9	8	0.3423	10.4590	1.8923
20	654	192482	15	17	29.3211	33.2463	31.2220
21	654	192285	8	9	2.5126	4.9909	3.5412
22	654	186845	6	6	12.8530	27.3952	18.7646
23	654	192541	5	9	21.0232	4.9909	10.2433
24	654	191826	10	12	0.1721	0.5867	0.3178
25	654	188676	6	7	12.8530	17.9271	15.1795
26	654	193590	12	14	5.8317	7.6505	6.6795
27	654	194166	15	13	29.3211	3.1186	9.5625
28	654	191340	7	11	6.6828	0.0548	0.6050
29	654	186036	4	9	31.1934	4.9909	12.4774
30	654	190444	10	13	0.1721	3.1186	0.7327
31	654	194344	13	14	11.6615	7.6505	9.4455
32	657	185579	5	9	21.0232	4.9909	10.2433
33	654	187702	9	10	0.3423	1.5229	0.7220
34	654	192555	12	15	5.8317	14.1824	9.0944
35	654	193533	11	12	2.0019	0.5867	1.0837
36	654	194042	16	13	41.1509	3.1186	11.3284
37	651	188616	8	11	2.5126	0.0548	0.3710
38	651	191716	4	11	31.1934	0.0548	1.3072
39	651	191983	11	16	2.0019	22.7144	6.7433
40	651	183574	7	4	6.6828	52.3314	18.7008
41	651	191422	12	16	5.8317	22.7144	11.5093
42	651	187278	7	11	6.6828	0.0548	0.6050
43	651	192251	9	10	0.3423	1.5229	0.7220
44	651	187761	5	9	21.0232	4.9909	10.2433
45	651	192478	7	7	6.6828	17.9271	10.9455
46	651	193186	9	7	0.3423	17.9271	2.4774
47	651	191025	11	13	2.0019	3.1186	2.4986
48	651	190564	10	12	0.1721	0.5867	0.3178
49	651	190448	13	17	11.6615	33.2463	19.6901
50	651	192073	7	9	6.6828	4.9909	5.7752
51	651	193142	10	12	0.1721	0.5867	0.3178
52	651	192797	7	6	6.6828	27.3952	13.5306

Tabla 10. Resultados del instrumento de medición diagnóstico mediante el método de mitades partidas (continuación).

No.	Grupo	Matrícula	Aciertos de la mitad impar	Aciertos de la mitad par	$(x_i - x_t)^2$	$(y_i - y_t)^2$	$(x_i - x_t)(y_i - y_t)$
53	651	191685	11	13	2.0019	3.1186	2.4986
54	651	193504	9	7	0.3423	17.9271	2.4774
55	651	190371	12	14	5.8317	7.6505	6.6795
56	651	192665	12	16	5.8317	22.7144	11.5093
57	651	193790	12	13	5.8317	3.1186	4.2646
58	651	190683	6	9	12.8530	4.9909	8.0093
59	651	188339	5	6	21.0232	27.3952	23.9986
60	651	192192	6	5	12.8530	38.8633	22.3497
61	651	188544	11	12	2.0019	0.5867	1.0837
62	661	187967	8	9	2.5126	4.9909	3.5412
63	661	272330	9	9	0.3423	4.9909	1.3072
64	661	185566	7	8	6.6828	10.4590	8.3603
65	661	187499	12	16	5.8317	22.7144	11.5093
66	661	187899	10	13	0.1721	3.1186	0.7327
67	661	156593	8	7	2.5126	17.9271	6.7114
68	661	186281	10	15	0.1721	14.1824	1.5625
69	661	187676	7	7	6.6828	17.9271	10.9455
70	661	188476	6	8	12.8530	10.4590	11.5944
71	661	187454	6	11	12.8530	0.0548	0.8391
72	661	193875	12	14	5.8317	7.6505	6.6795
73	657	192161	8	8	2.5126	10.4590	5.1263
74	657	187154	9	9	0.3423	4.9909	1.3072
75	657	192819	14	13	19.4913	3.1186	7.7965
76	657	190695	14	14	19.4913	7.6505	12.2114
77	657	192767	13	12	11.6615	0.5867	2.6157
78	657	190915	14	17	19.4913	33.2463	25.4561
79	657	187520	5	11	21.0232	0.0548	1.0731
80	657	192743	11	12	2.0019	0.5867	1.0837
81	657	194248	15	15	29.3211	14.1824	20.3923
82	657	193029	8	11	2.5126	0.0548	0.3710
83	657	193950	12	16	5.8317	22.7144	11.5093
84	657	191783	8	9	2.5126	4.9909	3.5412
85	657	191845	14	17	19.4913	33.2463	25.4561
86	657	191335	11	17	2.0019	33.2463	8.1582
87	657	188500	7	8	6.6828	10.4590	8.3603
88	657	193848	6	8	12.8530	10.4590	11.5944
89	657	193752	8	8	2.5126	10.4590	5.1263
90	657	192045	11	14	2.0019	7.6505	3.9135
91	657	194221	15	14	29.3211	7.6505	14.9774
92	657	191196	7	10	6.6828	1.5229	3.1901
93	657	190666	8	11	2.5126	0.0548	0.3710
94	657	193770	7	6	6.6828	27.3952	13.5306

3.1.1.5 Índices de dificultad y de discriminación

Dificultad

El índice de dificultad está relacionado con la proporción de estudiantes que resuelven correctamente un reactivo, y se calcula de acuerdo a Crocker y Algina, (1986), En el que se calculará el índice de dificultad o valor p del reactivo, es decir, la proporción de examinados que contestaron correctamente el reactivo. Para ello se empleará la fórmula:

$$p = c / t$$

Donde:

c es el número de examinados que tuvieron correcto el reactivo

t es el total de examinados

El instrumento diagnóstico es considerado como una prueba criterial en virtud de que se pretende determinar competencias académicas y apoyar el diagnóstico del diseño instruccional. La tabla 11 muestra los índices de dificultad calculados para los reactivos del diagnóstico y el calificativo correspondiente según Backhoff (2000).

Tabla 11. Calificación del reactivo del pre-test de acuerdo al índice de dificultad

No. de Reactivo	Índice de dificultad	Calificación	Observaciones
1	0.64	Dificultad media	Ninguna
2	0.45	Medianamente difíciles	Ninguna
3	0.53	Dificultad media	Ninguna
4	0.79	Medianamente fáciles	Ninguna
5	0.63	Dificultad media	Ninguna
6	0.37	Medianamente difíciles	Ninguna
7	0.62	Dificultad media	Ninguna
8	0.78	Medianamente fáciles	Ninguna
9	0.41	Medianamente difíciles	Ninguna
10	0.29	Altamente difícil	Ninguna
11	0.78	Medianamente fáciles	Ninguna
12	0.67	Dificultad media	Ninguna
13	0.32	Altamente difícil	Ninguna
14	0.60	Dificultad media	Ninguna
15	0.11	Altamente difícil	Se excluye del análisis
16	0.74	Medianamente fáciles	Ninguna
17	0.50	Medianamente difíciles	Ninguna
18	0.69	Dificultad media	Ninguna
19	0.62	Dificultad media	Ninguna
20	0.17	Altamente difícil	Se excluye del análisis

Tabla 11. Calificación del reactivo del pre-test de acuerdo al índice de dificultad
(continuación).

No. de Reactivo	Índice de dificultad	Calificación	Observaciones
21	0.38	Medianamente difíciles	Ninguna
22	0.62	Dificultad media	Ninguna
23	0.70	Dificultad media	Ninguna
24	0.48	Medianamente difíciles	Ninguna
25	0.62	Dificultad media	Ninguna
26	0.60	Dificultad media	Ninguna
27	0.60	Dificultad media	Ninguna
28	0.89	Altamente fáciles	Ninguna
29	0.38	Medianamente difíciles	Se excluye del análisis
30	0.22	Altamente difícil	Ninguna
31	0.20	Altamente difícil	Ninguna
32	0.77	Medianamente fáciles	Ninguna
33	0.30	Altamente difícil	Se excluye del análisis
34	0.52	Medianamente difíciles	Ninguna
35	0.76	Medianamente fáciles	Ninguna
36	0.76	Medianamente fáciles	Ninguna
37	0.66	Dificultad media	Se excluye del análisis
38	0.10	Altamente difícil	Ninguna
39	0.40	Medianamente difíciles	Ninguna
40	0.18	Altamente difícil	Se excluye del análisis

En donde puede observarse una combinación equitativa y adecuada entre reactivos medianamente fáciles (18%), de dificultad media (38%), medianamente difíciles (24%), y altamente difíciles (18%), y altamente fáciles (2%). Tal distribución se visualiza de manera más esquemática en la figura 5.

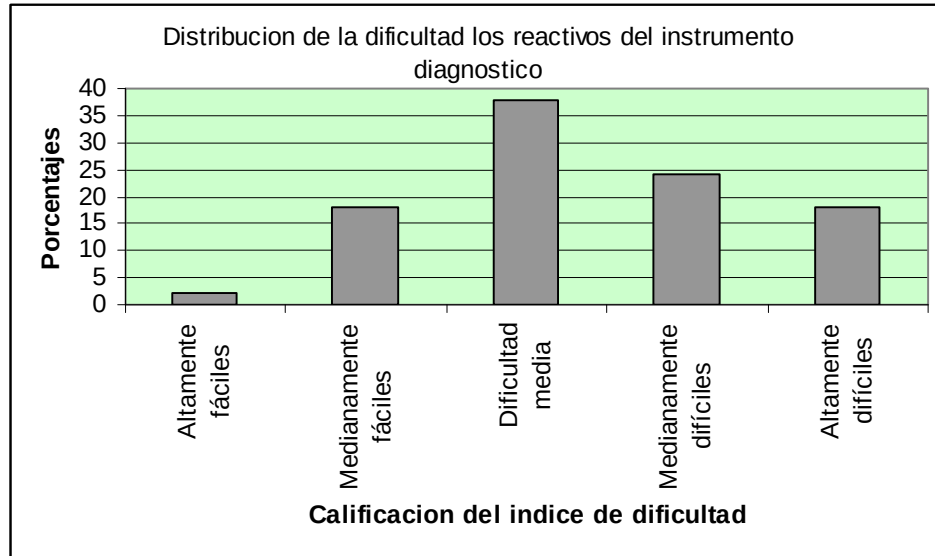


Figura 5. Distribución de la dificultad de los reactivos del instrumento de medición diagnóstico.

Discriminación

El índice de discriminación del reactivo permite diferenciar (discriminar) entre aquellos estudiantes que obtuvieron buenas calificaciones en la prueba y aquellos que obtuvieron bajo puntaje, está relacionado entonces con la posibilidad alta de responder correctamente el reactivo aquellos estudiantes con un desempeño en general sobresaliente en la prueba, situación opuesta para el caso de los estudiantes con un desempeño deficiente, en este análisis se considera el 54% de la población muestral, toda vez que se incluye el 27% de los estudiantes con alto rendimiento e igual porcentaje de estudiantes con el más bajo rendimiento, por cada reactivo que se revisa.

La tabla 12 muestra el índice de discriminación de cada reactivo que compone el diagnóstico, calificándolo de acuerdo a Ebel y Frisbie (1986).

Tabla 12. Calificación del índice de discriminación de los reactivos del pre-test

No. de Reactivo	Índice de discriminación	Calificación	Observaciones
1	0.47	Excelente	Ninguna
2	0.39	Bueno	Ninguna

Tabla 12. Calificación del índice de discriminación de los reactivos del pre-test
(continuación).

No. de Reactivo	Índice de discriminación	Calificación	Observaciones
3	0.56	Excelente	Ninguna
4	0.37	Bueno	Ninguna
5	0.43	Excelente	Ninguna
6	0.53	Excelente	Ninguna
7	0.42	Excelente	Ninguna
8	0.50	Excelente	Ninguna
9	0.40	Excelente	Ninguna
10	0.45	Excelente	Ninguna
11	0.41	Excelente	Ninguna
12	0.47	Excelente	Ninguna
13	0.23	Regular	Ninguna
14	0.65	Excelente	Ninguna
15	0.08	Malo	Se excluye del análisis
16	0.33	Bueno	Ninguna
17	0.26	Regular	Ninguna
18	0.20	Regular	Ninguna
19	0.64	Excelente	Ninguna
20	0.03	Malo	Se excluye del análisis
21	0.35	Bueno	Ninguna
22	0.30	Bueno	Ninguna
23	0.38	Bueno	Ninguna
24	0.44	Excelente	Ninguna
25	0.47	Excelente	Ninguna
26	0.78	Excelente	Ninguna
27	0.21	Regular	Ninguna
28	0.19	Malo	Ninguna
29	0.10	Malo	Se excluye del análisis
30	0.33	Bueno	Ninguna
31	0.37	Bueno	Ninguna
32	0.41	Excelente	Ninguna
33	-0.07	Malo	Se excluye del análisis
34	0.47	Excelente	Ninguna
35	0.46	Excelente	Ninguna
36	0.45	Excelente	Ninguna
37	0.16	Malo	Se excluye del análisis
38	0.51	Excelente	Ninguna
39	0.83	Excelente	Ninguna
40	0.16	Malo	Se excluye del análisis

Se cuenta con que el 85% de los reactivos tienen discriminación excelente o buena, mientras que el 12% es discriminación regular. Además el promedio de discriminación es 0.43, el cual cae dentro de una calificación considerada como excelente (mayor que 0.39), de acuerdo al mismo criterio.

El balance general a partir de la confiabilidad calculada mediante los métodos de Kuder Richarson (KR21) y mitades partidas, la determinación de la dificultad y el índice de discriminación, así como el establecimiento de la validez total respecto del instrumento diagnóstico, evidencian que tal pre-test o preprueba cuenta con la calidad suficiente y necesaria para diagnosticar las competencias específicas y elementos conceptuales y procedimentales que los estudiantes tienen previo a la aplicación de la estrategia didáctica.

3.3.2 Estrategia didáctica

Esta investigación, como se ha mencionado anteriormente explora la relación entre el concepto sistema masa-resorte y la eficiencia de los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes cuando son sometidos a dos enfoques de enseñanza distintos. Uno tradicional y otro alternativo que incorpora tecnología de la calculadora, en el cual se diseña una estrategia didáctica con 13 actividades (ver apéndice B) basada en los siguientes aspectos teóricos:

La estrategia didáctica es diseñada a partir:

1. Las teorías cognitivas de representación semiótica (Duval; 1993, 2000, 2006a y 2006b, Hitt, 1991 y 2003) toda vez que en las actividades que los estudiantes tienen que realizar en la estrategia se enfatiza en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro, además de promover el equilibrio de los distintos registros de representación (algebraico, numérico y geométrico) para no privilegiar en particular alguno de ellos.
2. Los avances logrados en el campo tecnológico (Kutzler, 2003), (Demana y Waits, 1998b) y su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, rescatando dos

aspectos de la enseñanza de las matemáticas, trivialización y visualización, calificados como fundamentales en los referentes teóricos citados, la trivialización en el sentido de no ser obstáculo (por la presencia y uso de la calculadora) en la complejidad algebraica de las ecuaciones diferenciales involucradas durante el proceso de modelización y resolución del fenómeno en cuestión, y la visualización en el sentido de ilustrar el objeto matemático desde sus diferentes representaciones, esta última consideración o estilo de enseñanza se le reconoce como *el poder de la visualización*. Y finalmente, (Laborde, 2003) por su aplicación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, específicamente por promover en la estrategia didáctica la construcción de relaciones entre las distintas representaciones, así como de la posibilidad de conexión entre los registros, además de privilegiar los cálculos rápidos mediante el sistema de cómputo algebraico integrado a la calculadora e inherente a la propia estrategia didáctica.

3. Las consideraciones para la enseñanza de competencias (PISA, 2003a, 2003b, 2003c, 2003d; Zabala y Arnau, 2008), con las que se ha destacado el trabajo por parte de los estudiantes en los diferentes indicadores que conforman cada una de las competencias matemáticas de modelado, planteamiento y resolución de problemas, representación y utilización del lenguaje simbólico y formal.

4. La dialéctica herramienta – objeto (Douady, 1985), dado que la estrategia didáctica está diseñada de tal forma que los conceptos matemáticos involucrados en las actividades de aprendizaje van alternando su rol, de herramienta a objeto y viceversa.

De propias experiencias recientes (De Las Fuentes y Arcos, 2007c) se encuentran algunos aspectos al incorporar la tecnología de la calculadora para abordar el fenómeno sistema masa-resorte, aspectos que son considerados e integrados en el diseño de la estrategia didáctica, a saber:

- La mitad del grupo experimental tuvo conflicto con la manipulación de unidades, mezclando en sus cálculos por ejemplo, pies con pulgadas.

- La determinación de extremos relativos, en algunos casos, se basaba primero en la obtención de la derivada y posteriormente en la resolución $x'(t) = 0$, no obstante la previa capacitación para la obtención de críticos de manera directa en el ambiente gráfico de la calculadora.
- Extrañeza general por la convención de los parámetros (posición y velocidad), en el sentido del comportamiento gráfico y la posición y velocidad del contrapeso.
- En general los estudiantes pudieron describir físicamente el movimiento para cada uno de los casos con amortiguamiento y asociarlo al comportamiento gráfico.

Además durante el mismo estudio (De Las Fuentes y Arcos, 2007c) se identificaron algunas situaciones que se considera fueron motivo para que los estudiantes no obtuvieran aún mejores resultados en la evaluación que se les aplicó posterior a la puesta en práctica de la estrategia didáctica, a saber:

- El manejo insuficiente de las condiciones iniciales de manera formal.
- El énfasis en el proceso de resolución de las distintas ecuaciones diferenciales que modelan los movimientos del sistema masa-resorte.
- El poco tiempo (así considerado después de los resultados obtenidos) dedicado a la experimentación son ejemplo de ello.

A la vez se detectaron en cuanto a la estrategia didáctica, como necesario reforzar la parte correspondiente al tránsito del contexto numérico al físico, así como también del contexto analítico al físico.

El diseño detallado de la estrategia didáctica a partir del referente teórico se muestra en la tabla 13, en la cual se señala cada actividad y las competencias matemáticas específicas relacionadas, así como los registros de representación involucrados, la dualidad conceptual, la actividad cognitiva, el carácter de objeto o instrumento del concepto matemático en la propia actividad, y finalmente el contenido curricular y las características de uso de la calculadora.

Tabla 13 Conformación de la estrategia didáctica

No. de Actividad	Competencias específicas relacionadas	Actividades cognitivas relacionadas	Registros de representación relacionados	Dualidad conceptual	Dialéctica herramienta objeto	Contenido curricular	Uso de la calculadora
1	Plantear y resolver problemas. Representar. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Representación tratamiento	Algebraico, Numérico, Gráfico Lenguaje natural, Físico virtual	Operacional Estructural	Herramienta	Cálculo rigidez del resorte (analítica y experimental), manejo y transformación de unidades, desplazamiento, fuerza, deformación.	Edición de listas de números, editor de gráficos en discreto, ventana de gráficos
2	Representar.	Representación	Gráfico Lenguaje natural Físico virtual	Estructural	Objeto	Movimiento libre no amortiguado, comportamiento físico y gráfico, condiciones iniciales, desplazamiento extremo, raíces de la ecuación, recta tangente, periodo, amplitud y frecuencia	Editor de programas
2 ^a	Representar. Modelar. Plantear y resolver problemas. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Representación · Tratamiento. Conversión	Algebraico Numérico Gráfico Lenguaje natural	Estructural Operacional	Herramienta	Movimiento libre no amortiguado, comportamiento físico y gráfico, condiciones iniciales, desplazamiento extremo, raíces de la ecuación, recta tangente, dirección, periodo, amplitud y frecuencia, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, función, velocidad instantánea, aceleración, ecuación de movimiento	Editor de ecuaciones y gráficos en continuo, ventana de graficos, determinación de máximos y mínimos, evaluación de una función, derivada puntual
3	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Representación · Conversión	Algebraico Lenguaje natural	Operacional	Objeto	ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, condiciones iniciales	Pantalla principal, uso de CAS

Tabla 13 Conformación de la estrategia didáctica (continuación).

No. de Actividad	Competencias específicas relacionadas	Actividades cognitivas relacionadas	Registros de representación relacionados	Dualidad conceptual	Dialéctica herramienta objeto	Contenido curricular	Uso de la calculadora
3 ^a	Representar. Modelar, Plantear y resolver problemas. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Representación. Tratamiento. Conversión	Algebraico Gráfico Lenguaje natural	Estructural Operacional	Objeto	Movimiento libre no amortiguado, comportamiento físico y gráfico, condiciones iniciales, desplazamiento extremo, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, ecuación de movimiento	Pantalla principal, uso de CAS
4	Representar.	Representación	Gráfico Lenguaje natural Físico virtual	Estructural	Objeto	Movimiento sobreamortiguado, velocidad de la masa, posición de equilibrio	Editor de programas
4 ^a	Representar. Modelar, Plantear y resolver problemas. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Representación. Tratamiento. Conversión	Algebraico Numérico Gráfico Lenguaje natural	Estructural Operacional	Herramienta	Comportamiento físico y gráfico, condiciones iniciales, desplazamiento extremo, raíces de la ecuación, recta tangente, dirección, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, función, velocidad instantánea, ecuación de movimiento	editor de ecuaciones y graficación en continuo, ventana de graficación, determinación del desplazamiento extremo, ecuación de la recta tangente
5	Representar.	Representación	Gráfico Lenguaje natural Físico virtual	Estructural	Objeto	Movimiento subamortiguado, condiciones iniciales, desplazamiento extremo, posición de equilibrio	Editor de programas
5 ^a	Representar. Modelar, Plantear y resolver problemas. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Representación. Tratamiento. Conversión	Algebraico Numérico Gráfico Lenguaje natural	Estructural Operacional	Herramienta	Comportamiento físico y gráfico, condiciones iniciales, desplazamiento extremo, raíces de la ecuación, recta tangente, dirección, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, función, velocidad instantánea, fórmula general, ecuación de movimiento	Editor de ecuaciones y graficación en continuo, ventana de graficación, determinación del desplazamiento extremo, ecuación de la recta tangente

Tabla 13 Conformación de la estrategia didáctica (continuación).

No. de Actividad	Competencias específicas relacionadas	Actividades cognitivas relacionadas	Registros de representación relacionados	Dualidad conceptual	Dialéctica herramienta objeto	Contenido curricular	Uso de la calculadora
6	Representar.	Representación	Gráfico Lenguaje natural Físico virtual	Estructural	Objeto	Movimiento críticamente amortiguado, condiciones iniciales, desplazamiento extremo, posición de equilibrio	Editor de programas
6 ^a	Representar. Modelar, Plantear y resolver problemas. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Representación · Tratamiento. Conversión	Algebraico Numérico Gráfico Lenguaje natural	Estructural Operacional	Herramienta	Comportamiento físico y gráfico, condiciones iniciales, desplazamiento extremo, raíces de la ecuación, recta tangente, dirección, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, función, velocidad instantánea, fórmula general, ecuación de movimiento	Editor de ecuaciones, gráficos y tabulación, ventana de gráficos, determinación del desplazamiento extremo, el paso
7	Representar. Modelar, Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Representación · Tratamiento. Conversión	Algebraico Gráfico	Operacional	Objeto	Comportamiento gráfico, condiciones iniciales, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, ecuación de movimiento	Editor de programas
8	Representar. Modelar, Plantear y resolver problemas. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.	Representación · Tratamiento. Conversión	Algebraico Numérico Gráfico Lenguaje natural	Estructural Operacional	Herramienta	Desplazamiento, fuerza, deformación. desplazamiento extremo, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden,	Pantalla principal, uso de CAS
9	Representar.	Representación ·	Gráfico Lenguaje natural	Estructural	Objeto	Movimiento libre no amortiguado ecuación de movimiento, desplazamiento extremo, dirección	Pantalla principal, uso de CAS
10	Representar.	Representación ·	Numérico Lenguaje natural	Estructural	Objeto	Movimiento subamortiguado	Pantalla principal, uso de CAS

Tabla 13 Conformación de la estrategia didáctica (continuación).

No. de Actividad	Competencias específicas relacionadas	Actividades cognitivas relacionadas	Registros de representación relacionados	Dualidad conceptual	Dialéctica herramienta objeto	Contenido curricular	Uso de la calculadora
11	Representar.	Representación	Númérico Lenguaje natural	Estructural	Objeto	Movimiento libre no amortiguado	Pantalla principal, uso de CAS
12	Representar. Modelar,	Representación	Lenguaje natural Algebraico Físico virtual	Estructural	Herramienta	Sistema de ecuaciones diferenciales para un sistema masa-resorte	Pantalla principal, uso de CAS
13	Representar. Modelar, Plantear y resolver problemas. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	Representación · Tratamiento. Conversión	Algebraico Númérico Gráfico Lenguaje natural	Estructural Operacional	Objeto	Movimiento forzado no amortiguado, resonancia, condiciones iniciales, ecuación de movimiento, ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden	Pantalla principal, uso de CAS

La tabla anterior muestra para cada actividad cuales competencias se pretende fortalecer, involucrando de manera importante la interacción del estudiante con la calculadora y el contenido curricular planteado. Estas actividades incorporan para su desarrollo un programa para la calculadora, con el propósito de que el estudiante interactúe de manera virtual con el sistema masa-resorte e infiera los rasgos de velocidad, aceleración, continuidad y restitución del movimiento sobreamortiguado.

3.3.3 Instrumento de medición (posprueba)

El instrumento de medición post-test está constituido por 37 reactivos y se ha diseñado bajo las mismas consideraciones que el diagnóstico, a diferencia que se aboca a determinar la eficiencia de conocimientos adquirido por los estudiantes en cuanto a sus competencias matemáticas, alrededor de los conceptos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte (ver apéndice C).

El número de reactivos del post-test se estructura de acuerdo a las competencias matemáticas y sus indicadores respectivos propuestos por PISA (2003c) (Cfr. Tabla 1, secc. 2.5 Competencia matemática) según se ilustra en la tabla 14.

Tabla 14. Distribución de reactivos de acuerdo a la competencia e indicador

Competencia / Indicador	No. del reactivo	Cantidad de reactivos	%
Modelar		4	10.82
Traducir la realidad a una estructura matemática.	14, 15	2	5.41
Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.	31, 33	2	5.41
Plantear y resolver problemas		7	18.92
Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	1, 16, 24, 25, 35, 36, 37	7	18.92
Representar		5	13.51
Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito.	5, 6, 10, 13, 28	5	13.51
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos.		21	56.75
Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	3, 17, 18	3	8.10
Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.	2	1	2.70
Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.	7	1	2.70
Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	4, 8, 9, 11, 12, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 29, 30, 32, 34	16	43.24

Según se expresa en la tabla anterior, cada reactivo del instrumento post-test esta caracterizado para valorar alguna competencia matemática en alguno de sus respectivos indicadores; esto se ilustra en la figura 6 que muestra la caracterización de 4 reactivos del instrumento, que comprenden la competencia matemática de la utilización del lenguaje simbólico y formal.

No. de Reactivo: 2
Indicador: Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
Una masa que pesa 4 libras se une a un resorte cuya constante es 18 libras por pie. El periodo del movimiento armónico simple es:
A) $\frac{1}{6}\pi$ B) π C) $\frac{1}{12}\pi$ D) 2π
No. de Reactivo: 7
Indicador: Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.

Una fuerza de 400 newtons alarga un resorte 2 metros. Una masa de 50 kilogramos se une al extremo del resorte y se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 10 metros por segundo. Las condiciones del sistema son:			
A) $x(0) = -10$ y $x'(0) = 0$		B) $x(0) = 10$ y $x'(0) = 0$	
C) $x(0) = 0$ y $x'(0) = -10$		D) $x(0) = 0$ y $x'(0) = 10$	
No. de Reactivo: 8			
Indicador: Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.			
Un sistema masa-resorte tiene las siguientes condiciones iniciales de posición (en pies) y velocidad (en pies por segundo), $x(0) = -2$ y $x'(0) = 2$, bajo estas circunstancias la masa en $t = 0$ segundos:			
A) Se encuentra en reposo		B) Se encuentra 2 pies sobre la posición de equilibrio	
C) Se dirige hacia arriba		D) Se presenta un desplazamiento extremo	
No. de Reactivo: 18			
Indicador: Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos			
Un sistema masa-resorte tiene por ecuación de movimiento $x(t) = -e^{-t}$ donde t es el tiempo en segundos y $x(t)$ la posición en pies. La velocidad del contrapeso en $t = 0$ segundos es:			
A) 0 pie/s		B) 1 pie/s	
C) -1 pie/s		D) indeterminada	

Figura 6. Caracterización de reactivos del Post-Test

El post-test se administró posterior a la terminación de la aplicación de la estrategia didáctica en el grupo experimental y de igual forma para el caso de los estudiantes del grupo de control, de manera que la comparación de los resultados permite responder al planteamiento hipotético de origen.

En la tabla 15 se indica el resumen de correspondencia entre el reactivo y la competencia e indicador, así como también la actividad cognitiva, registro original y final y la complejidad del conocimiento. Se aclara que esta clasificación en su definición implica la consideración del predominio de alguna de las competencias e indicadores sobre otros, al igual que en lo referente a las actividades cognitivas, toda vez que en realidad para la resolución de alguna situación problemática esta es atribuida al conjunto de competencias generales y específicas que el estudiante posee y utiliza.

Tabla 15. Correspondencia del reactivo e indicador y competencia del post-test

No. de reactivo	Competencia	Indicador	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad
1	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Tratamiento	Lenguaje natural	Númérico	Operacional	Reproducción
2	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.	Tratamiento	Lenguaje natural	Númérico	Operacional	Reproducción
3	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Tratamiento	Lenguaje natural	Númérico	Operacional	Reproducción
4	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Representación	Algebraico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
5	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Representación	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reproducción
6	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Representación	Lenguaje natural	Gráfico	Estructural	Reproducción
7	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.	Representación	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reproducción
8	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Representación	Algebraico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
9	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
10	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Tratamiento	Lenguaje natural	Gráfico	Estructural	Conexión
11	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
12	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Númérico	Númérico	Estructural	Conexión
13	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción
14	Modelar	Traducir la realidad a una estructura matemática.	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Conexión
15	Modelar	Traducir la realidad a una estructura matemática.	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Conexión

Tabla 15. Correspondencia del reactivo e indicador y competencia del post-test
(continuación).

No. de reactivo	Competencia	Indicador	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad
16	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Conexión
17	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Conversión	Algebraico	Numérico	Operacional	Reproducción
18	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.	Conversión	Algebraico	Numérico	Operacional	Reproducción
19	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Conexión
20	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión
21	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión
22	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión
23	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión
24	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Conversión	Gráfico	Algebraico	Estructural	Reflexión
25	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reflexión
26	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Numérico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión
27	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Tratamiento	Numérico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión
28	Representar	Escoger y relacionar entre diferentes formas de representación de acuerdo a la situación y el propósito	Tratamiento	Lenguaje natural	Gráfico	Estructural	Conexión
29	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Conversión	Algebraico	Gráfico	Operacional	Conexión

Tabla 15. Correspondencia del reactivo e indicador y competencia del post-test
(continuación).

No. de reactivo	Competencia	Indicador	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad
30	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Representación	Algebraico	Lenguaje natural	Estructural	Reflexión
31	Modelar	Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.	Conversión	Gráfico	Algebraico	Estructural	Reflexión
32	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Conversión	Algebraico	Númérico	Operacional	Conexión
33	Modelar	Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados.	Conversión	Númérico	Algebraico	Estructural	Reflexión
34	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural.	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión
35	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Conversión	Algebraico	Algebraico	Estructural	Reflexión
36	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Conversión	Gráfico	Númérico	Estructural	Reflexión
37	Plantear y resolver problemas	Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.	Conversión	Gráfico	Númérico	Estructural	Reflexión

Para juzgar la calidad del post-test se ha contemplado el análisis de su validez total, que incluye la validez de contenido, de criterio y de constructo, la confiabilidad, y los índices de dificultad y discriminación, con el objeto de predecir el éxito de los estudiantes se ha adicionado el cálculo del coeficiente de correlación del punto biserial.

3.3.3.1 Validez de contenido

Los conceptos y procedimientos matemáticos implicados en el instrumento, así como los registros de representación y la actividad cognitiva requerida en el mismo forman parte cabalmente del currículo que los estudiantes han llevado a cabo a través del curso de ecuaciones diferenciales, como puede constatarse en el contenido programático.

En el proceso de diseño y aplicación del instrumento de medición (como parte del proceso de calibración del mismo) han participado docentes del área de matemáticas, quienes

imparten o han impartido el curso de ecuaciones diferenciales, con el señalamiento de que el instrumento no alude a conocimientos, habilidades, competencias o procedimientos ajenos a los estudiados por los alumnos de ingeniería.

Se cuenta con instrumentos de medición similar, los llamados exámenes colegiados y alineados con el currículo, criterial y de gran escala, de opción simple, una respuesta correcta y el resto son distractores, con el objeto de establecer el logro educativo o académico, en relación a sus competencias matemáticas durante y al final de la unidad de aprendizaje.

3.3.3.2 Validez de criterio

Para la validez de criterio se ha considerado importante señalar que a los estudiantes que se les aplicó el instrumento de medición post-test, realizaron de manera formal y como parte de su evaluación de curso el denominado examen colegiado de matemáticas I y II durante los periodos 2007-1, 2007-2 y 2008-1 respectivamente, dicho examen se ha venido aplicando a los estudiantes desde el año 2005, como se mencionó anteriormente el examen de matemáticas I consta de 75 reactivos, y el de matemáticas II, consta de 50 reactivos. Si bien el recorrido escolar de los alumnos no es precisamente lineal, se rescató de la base de datos de la Coordinación de Formación Básica de la Facultad de Ingeniería Campus Mexicali (encargada y responsable del diseño y aplicación de exámenes colegiados de matemáticas), algunos de los resultados de jóvenes que participaron en los grupos de control y experimental, para el caso de matemáticas I se contó con las calificaciones de 34 jóvenes (ver resultados en la tabla 16), cuya correlación muestral de Pearson obtenida es de 0.73, coeficiente calificado como correlación positiva considerable de acuerdo a la escala de Hernández, Fernández y Baptista (2006) y evidenciando cuantitativamente la citada validez de criterio. El coeficiente de correlación muestral para tal efecto se calculó

mediante:
$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$
 donde: r es el coeficiente de correlación muestral

$$S_{xx} = \sum (\bar{x} - x_i)^2, \quad S_{yy} = \sum (\bar{y} - y_i)^2 \quad y \quad S_{xy} = \sum (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

En el caso particular que nos ocupa: $\bar{x} = 16.9118$, $\bar{y} = 56.7059$, $S_{xx} = 10830.7910$, $S_{yy} = 7499.0588$ y $S_{xy} = 6554.3720$, por lo que al sustituir en la ecuación se tiene que

$$r = \frac{6554.3720}{\sqrt{(10830.7910)(7499.0588)}} ,$$

lo que finalmente arroja como coeficiente de correlación a $r = 0.73$.

Tabla 16. Comparativo del post-test y el examen colegiado de matemáticas I.

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el post-test	Calificación obtenida en el examen colegiado de matemáticas I	(xi - xt)^2	(yi - yt)^2	(xi - xt)(yi - yt)
1	658	194891	27	76	743.4075	372.2630	526.0638
2	658	188903	16	44	6.0724	161.4394	31.3102
3	658	192720	20	71	69.6654	204.3218	119.3070
4	658	194834	8	21	580.1282	1274.9100	860.0065
5	658	194290	22	76	189.1172	372.2630	265.3325
6	658	185764	11	48	255.2883	75.7924	139.1003
7	658	187235	12	28	176.2267	824.0277	381.0717
8	658	186071	19	65	31.8534	68.7924	46.8110
9	658	190338	33	87	1890.6597	917.7336	1317.2403
10	658	188394	20	57	69.6654	0.0865	2.4549
11	654	192555	19	84	31.8534	744.9689	154.0447
12	654	192896	13	57	111.7743	0.0865	-3.1095
13	651	190370	17	69	0.0569	151.1453	2.9318
14	651	191726	7	45	717.6266	137.0277	313.5837
15	651	191422	24	65	367.0057	68.7924	158.8937
16	651	190505	21	63	122.0867	39.6159	69.5455
17	651	192478	6	55	869.7342	2.9100	50.3086
18	651	190564	23	56	270.7568	0.4983	-11.6151
19	651	192835	22	59	189.1172	5.2630	31.5487
20	651	190448	29	68	1067.3881	127.5571	368.9891
21	651	192073	14	41	61.9311	246.6747	123.5996
22	651	193142	20	72	69.6654	233.9100	127.6536
23	651	191685	22	72	189.1172	233.9100	210.3245
24	651	187525	15	43	26.6972	187.8512	70.8174
25	651	192192	18	64	8.6505	53.2042	21.4533
26	661	192544	9	45	457.2390	137.0277	250.3086
27	661	193074	10	33	348.9590	561.9689	442.8364
28	661	188270	12	47	176.2267	94.2042	128.8460
29	661	193875	15	45	26.6972	137.0277	60.4835
30	657	192766	14	56	61.9311	0.4983	5.5550

Tabla 16. Comparativo del post-test y el examen colegiado de matemáticas I (continuación).

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el post-test	Calificación obtenida en el examen colegiado de matemáticas I	$(x_i - x_t)^2$	$(y_i - y_t)^2$	$(x_i - x_t)(y_i - y_t)$
31	657	187154	13	52	111.7743	22.1453	49.7522
32	657	192009	8	52	580.1282	22.1453	113.3452
33	657	191845	10	53	348.9590	13.7336	69.2275
34	657	192045	26	59	603.3311	5.2630	56.3499

En la tabla anterior, x_i corresponde al x -ésimo dato del número de aciertos obtenidos en el instrumento de medición post-test, x_t es el valor promedio del número de aciertos en el post-test, mientras que y_i , se refiere al y -ésimo dato obtenido por el examen colegiado de matemáticas I, finalmente y_t es el valor promedio.

Para el caso de matemáticas II, se contó con 38 de los 66 estudiantes que realizaron el post-test (ver resultados en tabla 17), obteniendo un coeficiente de correlación de Pearson de 0.79. En ambos casos se rechazaría la hipótesis de no asociación lineal con un nivel de significancia de 0.01.

El coeficiente de correlación muestral para tal efecto se calculó mediante:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

Donde:

r es el coeficiente de correlación muestral

$$S_{xx} = \sum (\bar{x} - x_i)^2, \quad S_{yy} = \sum (\bar{y} - y_i)^2 \quad y \quad S_{xy} = \sum (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

En el caso particular que nos ocupa: $\bar{x} = 17.1842$, $\bar{y} = 47.2105$, $S_{xx} = 1517.7105$, $S_{yy} = 11236.3158$ y $S_{xy} = 3255.5263$, por lo que al sustituir en la ecuación se tiene que

$$r = \frac{3255.5263}{\sqrt{(1517.7105)(11236.3158)}}$$
, lo que finalmente arroja como coeficiente de correlación a $r = 0.79$.

Tabla 17. Comparativo del post-test y el examen colegiado de matemáticas II.

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el post-test	Calificación obtenida en examen colegiado de matemáticas II	(xi - xt)^2	(yi - yt)^2	(xi - xt)(yi - yt)
1	658	194891	27	82	96.3497	1210.3075	341.4861
2	658	188903	16	44	1.4024	10.3075	3.8019
3	658	192720	20	48	7.9287	0.6233	2.2230
4	658	194834	8	26	84.3497	449.8864	194.8019
5	658	194290	22	66	23.1918	353.0443	90.4861
6	658	192988	25	60	61.0866	163.5706	99.9598
7	658	186071	19	72	3.2971	614.5180	45.0125
8	658	190338	33	84	250.1392	1353.4654	581.8546
9	658	188394	20	54	7.9287	46.0970	19.1177
10	658	187985	24	60	46.4550	163.5706	87.1704
11	654	192555	19	62	3.2971	218.7285	26.8546
12	654	192896	13	46	17.5076	1.4654	5.0651
13	651	190370	17	48	0.0339	0.6233	-0.1454
14	651	191726	7	20	103.7181	740.4127	277.1177
15	651	191422	24	64	46.4550	281.8864	114.4335
16	651	190505	21	52	14.5602	22.9391	18.2756
17	651	192478	6	36	125.0866	125.6759	125.3809
18	651	191025	11	44	38.2445	10.3075	19.8546
19	651	192835	22	48	23.1918	0.6233	3.8019
20	651	190448	29	60	139.6129	163.5706	151.1177
21	651	192073	14	34	10.1392	174.5180	42.0651
22	651	190334	16	40	1.4024	51.9917	8.5388
23	651	191685	22	52	23.1918	22.9391	23.0651
24	651	190683	18	48	0.6655	0.6233	0.6440
25	651	187525	15	28	4.7708	369.0443	41.9598
26	651	192192	18	48	0.6655	0.6233	0.6440
27	651	188544	19	60	3.2971	163.5706	23.2230
28	661	192544	9	42	66.9813	27.1496	42.6440
29	661	193074	10	26	51.6129	449.8864	152.3809
30	661	188270	12	8	26.8760	1537.4654	203.2756

Tabla 17. Comparativo del post-test y el examen colegiado de matemáticas II (continuación).

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el post-test	Calificación obtenida en examen colegiado de matemáticas II	(xi - xt)^2	(yi - yt)^2	(xi - xt)(yi - yt)
31	661	187454	13	42	17.5076	27.1496	21.8019
32	661	193875	15	46	4.7708	1.4654	2.6440
33	657	192766	14	46	10.1392	1.4654	3.8546
34	657	187154	13	46	17.5076	1.4654	5.0651
35	657	192743	9	16	66.9813	974.0970	255.4335
36	657	192045	26	70	77.7181	519.3601	200.9072
37	657	194232	11	50	38.2445	7.7812	-17.2507
38	661	191128	16	16	1.4024	974.0970	36.9598

De manera adicional se calculó el coeficiente de correlación de Pearson para 60 estudiantes de los grupos experimentales (ver resultados en tabla 18) y la calificación obtenida en el curso de ecuaciones diferenciales, siendo este coeficiente de 0.71. De esta manera queda evidenciada la validez de criterio del instrumento de medición post-test.

El coeficiente de correlación muestral para tal efecto se calculó mediante:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

Donde:

r es el coeficiente de correlación muestral

$$S_{xx} = \sum (\bar{x} - x_i)^2, \quad S_{yy} = \sum (\bar{y} - y_i)^2 \quad \text{y} \quad S_{xy} = \sum (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

En el caso particular que nos ocupa: $\bar{x} = 15.1270$, $\bar{y} = 67.7500$, $S_{xx} = 2426.7333$, $S_{yy} = 14989.2500$ y $S_{xy} = 4300.5000$, por lo que al sustituir en la ecuación se tiene que

$r = \frac{4300.5000}{\sqrt{(2426.7333)(14989.2500)}}$, lo que finalmente arroja como coeficiente de correlación a $r = 0.71$.

Tabla 18. Comparativo de calificaciones del post-test y las calificaciones de ecuaciones diferenciales registradas en el historial académico.

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el post-test	Calificación obtenida en ecuaciones diferenciales	$(x_i - x_t)^2$	$(y_i - y_t)^2$	$(x_i - x_t)(y_i - y_t)$
1	658	194891	27	94	133.7878	689.0625	303.6250
2	658	188903	16	73	0.3211	27.5625	2.9750
3	658	192720	20	80	20.8544	150.0625	55.9417
4	658	194834	8	60	55.2544	60.0625	57.6083
5	658	194290	22	94	43.1211	689.0625	172.3750
6	658	190017	10	63	29.5211	22.5625	25.8083
7	658	185764	11	70	19.6544	5.0625	-9.9750
8	658	187235	12	75	11.7878	52.5625	-24.8917
9	658	192988	25	75	91.5211	52.5625	69.3583
10	658	186251	23	90	57.2544	495.0625	168.3583
11	658	186071	19	75	12.7211	52.5625	25.8583
12	658	190338	33	100	308.5878	1040.0625	566.5250
13	658	188394	20	68	20.8544	0.0625	1.1417
14	658	187985	24	88	73.3878	410.0625	173.4750
15	658	158252	13	60	5.9211	60.0625	18.8583
16	658	184876	3	65	154.5878	7.5625	34.1917
17	654	188590	8	20	55.2544	2280.0625	354.9417
18	654	188676	13	60	5.9211	60.0625	18.8583
19	654	192552	13	84	5.9211	264.0625	-39.5417
20	654	192555	19	83	12.7211	232.5625	54.3917
21	654	192896	13	73	5.9211	27.5625	-12.7750
22	651	190370	17	72	2.4544	18.0625	6.6583
23	651	191726	7	30	71.1211	1425.0625	318.3583
24	651	191422	24	90	73.3878	495.0625	190.6083
25	651	187278	6	64	88.9878	14.0625	35.3750
26	651	190505	21	66	30.9878	3.0625	-9.7417
27	651	192478	6	40	88.9878	770.0625	261.7750
28	651	191025	11	60	19.6544	60.0625	34.3583
29	651	186139	19	65	12.7211	7.5625	-9.8083
30	651	190564	23	65	57.2544	7.5625	-20.8083
31	651	192835	22	70	43.1211	5.0625	14.7750
32	651	190448	29	83	184.0544	232.5625	206.8917
33	651	192073	14	60	2.0544	60.0625	11.1083
34	651	193142	20	75	20.8544	52.5625	33.1083
35	651	190334	16	60	0.3211	60.0625	-4.3917
36	651	191685	22	90	43.1211	495.0625	146.1083
37	651	190371	15	70	0.1878	5.0625	-0.9750
38	651	190683	18	62	6.5878	33.0625	-14.7583
39	651	187525	15	60	0.1878	60.0625	3.3583
40	651	192192	18	65	6.5878	7.5625	-7.0583

Tabla 18. Comparativo de calificaciones del post-test y las calificaciones de ecuaciones diferenciales registradas en el historial académico (continuación).

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el post-test	Calificación obtenida en ecuaciones diferenciales	$(x_i - x_t)^2$	$(y_i - y_t)^2$	$(x_i - x_t)(y_i - y_t)$
41	651	188544	19	74	12.7211	39.0625	22.2917
42	661	192544	9	60	41.3878	60.0625	49.8583
43	661	174979	7	20	71.1211	2280.0625	402.6917
44	661	272330	10	60	29.5211	60.0625	42.1083
45	661	188683	10	60	29.5211	60.0625	42.1083
46	661	187499	11	60	19.6544	60.0625	34.3583
47	661	156593	6	60	88.9878	60.0625	73.1083
48	661	186281	13	68	5.9211	0.0625	-0.6083
49	661	193074	10	60	29.5211	60.0625	42.1083
50	661	188270	12	63	11.7878	22.5625	16.3083
51	661	185194	12	60	11.7878	60.0625	26.6083
52	661	187454	13	40	5.9211	770.0625	67.5250
53	661	193875	15	77	0.1878	85.5625	-4.0083
54	657	192766	14	80	2.0544	150.0625	-17.5583
55	657	187154	13	60	5.9211	60.0625	18.8583
56	657	191664	16	78	0.3211	105.0625	5.8083
57	657	192743	9	60	41.3878	60.0625	49.8583
58	657	191845	10	71	29.5211	10.5625	-17.6583
59	657	192045	26	90	111.6544	495.0625	235.1083
60	661	191128	16	67	0.3211	0.5625	-0.4250

3.3.3.3 Validez de constructo

Primeramente se verifica si las variables de la muestra son aceptables, lo cual se realiza mediante el índice de Káiser-Meyer-Olkin (KMO), el índice contrasta si las correlaciones parciales entre las variables son pequeñas. Adicionalmente, se sugiere aplicar la prueba de esfericidad de Bartlett, la cual contrasta si la matriz de correlaciones es una matriz identidad que indicaría que el modelo factorial es inadecuado. Es decir, si la prueba resulta no significativa no se debe efectuar el análisis factorial, en este caso se consideraría como un conjunto de elementos o variables no correlacionados. Se señala que con el propósito de identificar los componentes principales se ha excluido un pequeño grupo de 8 reactivos, a saber: 2, 17, 25, 28, 31, 32, 35 y 36, toda vez que estos cuentan con índice de dificultad relativamente bajos (Backhoff, 2000).

En el caso particular se obtuvo un indicador KMO = 0.501, el cual se considera bajo, pero suficiente para aplicar el método de componentes principales. Un valor de significatividad menor a 0.05 es aceptable, el caso que nos ocupa es 0.004, con lo cual es viable observar que la correlación entre las variables es distinta de cero.

Se utilizó el Software SPSS para llevar a cabo el análisis de componentes mediante variación máxima, los resultados se muestran en la tabla 19.

Tabla 19. Matriz de componentes principales para el post-test

ITEM	1	2	3	4	5	6
1	-0.0692	0.6049	-0.1011	0.0818	-0.2156	0.1768
3	-0.0641	-0.2317	0.3187	0.4779	0.0810	0.5723
4	0.5208	-0.1802	-0.2000	0.1692	0.2567	-0.3041
5	0.1592	0.3435	-0.4706	-0.0128	0.1733	-0.2197
6	0.2997	-0.2830	0.1378	0.1828	0.2867	0.0039
7	0.3404	-0.0170	-0.1095	0.1430	0.3025	0.3573
8	0.1523	0.0887	-0.0932	0.1160	-0.3985	0.0646
9	-0.5677	-0.1628	0.1613	-0.4127	0.3206	0.1223
10	-0.3298	-0.0415	-0.3699	0.2406	-0.1575	-0.1804
11	0.5644	-0.1176	0.2733	-0.1155	-0.3838	-0.2620
12	0.4295	0.0047	-0.3902	-0.2585	0.3327	0.0063
13	0.0295	0.3519	-0.3232	0.3440	0.0807	-0.2229
14	0.1287	0.4500	0.1616	-0.1379	-0.0187	0.3044
15	-0.1131	-0.6362	-0.1187	-0.0314	-0.3500	-0.3056
16	-0.0621	-0.0231	0.1094	0.4517	0.3580	-0.3510
18	-0.1775	0.2752	0.5929	0.2315	0.2479	-0.1992
19	0.1661	-0.4439	-0.1304	-0.0860	-0.3698	-0.0123
20	0.5223	-0.0547	0.3825	0.0465	-0.1777	-0.0838
21	0.5700	-0.0757	0.1965	0.2826	-0.0239	-0.0621
22	0.5057	0.1754	0.2785	0.3259	-0.0783	-0.0564
23	0.6443	0.2554	0.0558	-0.3219	0.1534	0.0566
24	0.2410	-0.2783	0.0286	0.2117	-0.0949	0.1324
26	-0.4075	0.4965	-0.1168	0.1820	-0.3580	-0.1579
27	0.3136	-0.2017	-0.2437	-0.1030	0.3021	0.0516
29	-0.5378	-0.1634	0.2788	-0.0365	0.3466	-0.0412
30	-0.2127	-0.2337	-0.1689	0.3160	-0.2440	0.5207
33	-0.1031	0.1479	0.5030	0.1955	-0.0445	-0.1847
34	0.4373	0.2185	0.2160	-0.4321	-0.1607	0.2478
37	0.2356	0.0662	-0.4271	0.4548	0.0951	0.2650

Tabla 19 Matriz de componentes principales para el post-test (continuación).

ITEM	7	8	9	10	11	12
1	0.1392	-0.1638	0.1395	-0.1843	-0.2271	0.3883
3	-0.2343	-0.0284	0.0932	0.1464	0.2006	0.1209
4	0.2356	0.0129	0.3164	-0.0817	0.1711	-0.1355
5	-0.2804	-0.0293	0.1628	-0.1172	0.4252	0.1073
6	-0.1458	-0.3047	-0.0128	0.1482	-0.1816	0.3692
7	0.4470	0.2954	-0.0887	-0.0223	-0.2345	0.0627
8	-0.1789	0.5869	0.0303	-0.2543	0.3225	0.0644
9	0.1936	-0.0024	0.0050	-0.2031	0.0506	0.0715
10	0.0754	0.1565	-0.5618	-0.0185	0.0023	-0.0401
11	-0.0850	-0.0476	-0.2228	0.1043	-0.0625	-0.1347
12	0.1314	-0.1814	-0.3185	-0.0649	0.0151	-0.1110
13	0.0860	0.0038	0.1174	0.3919	-0.0829	-0.0720
14	-0.0867	0.3491	0.0658	0.0509	0.0947	0.0352
15	-0.1504	0.1713	0.2604	0.1124	-0.0883	0.1548
16	-0.0065	0.3493	-0.1029	0.0843	-0.0432	0.4140
18	-0.0089	0.0831	-0.2469	0.0932	-0.0618	-0.1060
19	0.3055	-0.0382	0.0788	0.2704	0.0594	0.2636
20	0.1186	0.1195	-0.3909	0.1755	0.1947	-0.0054
21	0.0345	-0.0784	-0.0191	-0.5347	-0.0420	0.1252
22	-0.2433	-0.0453	0.0776	-0.2226	-0.2523	-0.1981
23	0.2012	0.0371	-0.0474	0.2174	0.2570	0.0298
24	0.4225	0.1742	0.3215	-0.1314	-0.1651	-0.3444
26	0.0743	-0.0353	0.0651	0.1373	-0.2432	-0.1546
27	-0.6537	0.0597	0.0146	0.0617	-0.2278	-0.2091
29	0.0101	0.3464	0.1475	0.1068	0.0434	-0.2307
30	-0.0700	-0.2316	-0.2712	-0.0145	0.1713	-0.1516
33	0.1262	-0.4007	0.2438	0.0834	0.3826	-0.1117
34	-0.1297	0.1430	0.1551	0.2918	-0.1903	0.0713
37	0.0261	-0.0097	0.0784	0.2887	0.0819	-0.1076

Con los 12 factores o componentes extraídos se explica el 72% de la totalidad de la variancia de las variables. A continuación se procede a simplificarla (ver tabla 20) para hacer explícito las dimensiones obtenidas y los reactivos que las componen.

Tabla 20. Correspondencia entre reactivo y componente principal para el post-test

No. de reactivo	Competencia	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad	Componente
1	Plantear y resolver problemas	Tratamiento	Lenguaje natural	Numérico	Operacional	Reproducción	2
2	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Lenguaje natural	Numérico	Operacional	Reproducción	Se excluye
3	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Lenguaje natural	Numérico	Operacional	Reproducción	6
4	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Representación	Algebraico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	1
5	Representar	Representación	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reproducción	11
6	Representar	Representación	Lenguaje natural	Gráfico	Estructural	Reproducción	12
7	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Representación	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reproducción	7
8	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Representación	Algebraico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	8
9	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	7
10	Representar	Tratamiento	Lenguaje natural	Gráfico	Estructural	Conexión	4
11	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	1
12	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Numérico	Numérico	Estructural	Conexión	1
13	Representar	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Reproducción	10
14	Modelar	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Conexión	2
15	Modelar	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Conexión	9
16	Plantear y resolver problemas	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Conexión	4

Tabla 20. Correspondencia entre reactivo y componente principal para el post-test (continuación).

No. de reactivo	Competencia	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad	Componente
17	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Conversión	Algebraico	Numérico	Operacional	Reproducción	Se excluye
18	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Conversión	Algebraico	Numérico	Operacional	Reproducción	3
19	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Lenguaje natural	Lenguaje natural	Estructural	Conexión	7
20	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión	3
21	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión	1
22	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión	1
23	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión	1
24	Plantear y resolver problemas	Conversión	Gráfico	Algebraico	Estructural	Reflexión	7
25	Plantear y resolver problemas	Conversión	Lenguaje natural	Algebraico	Estructural	Reflexión	Se excluye
26	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Numérico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión	2
27	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Tratamiento	Numérico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión	1
28	Representar	Tratamiento	Lenguaje natural	Gráfico	Estructural	Conexión	Se excluye
29	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Conversión	Algebraico	Gráfico	Operacional	Conexión	5
30	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Representación	Algebraico	Lenguaje natural	Estructural	Reflexión	6

Tabla 20. Correspondencia entre reactivo y componente principal para el post-test (continuación).

No. de reactivo	Competencia	Actividad cognitiva	Registro original	Registro final	Complejidad de la comprensión	Nivel de dificultad	Componente
31	Modelar	Conversión	Gráfico	Algebraico	Estructural	Reflexión	Se excluye
32	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Conversión	Algebraico	Númérico	Operacional	Conexión	Se excluye
33	Modelar	Conversión	Númérico	Algebraico	Estructural	Reflexión	3
34	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	Representación	Gráfico	Lenguaje natural	Estructural	Conexión	1
35	Plantear y resolver problemas	Conversión	Algebraico	Algebraico	Estructural	Reflexión	Se excluye
36	Plantear y resolver problemas	Conversión	Gráfico	Númérico	Estructural	Reflexión	Se excluye
37	Plantear y resolver problemas	Conversión	Gráfico	Númérico	Estructural	Reflexión	4

De la estructuración resultante por componentes, es viable observar que los factores 1, 6 y 8 en general incorporan los reactivos relacionados con la complejidad de la comprensión del tipo estructural, nivel de dificultad del tipo de reproducción y conexión, actividad cognitiva de representación y tratamiento, así como predominio del registro gráfico de origen y lenguaje natural como registro final del reactivo, de manera contundente está representada la competencia matemática referida a la utilización del lenguaje simbólico, formal y técnico y la ejecución de los cálculos.

Los factores, 2, 3, 5 y 9 representan diversas competencias matemáticas entre las cuales se exhiben el modelado, la actividad cognitiva enfatiza tanto el tratamiento como la conversión y el nivel de dificultad preponderante es la conexión.

Los componentes 10 y 12 se caracterizan por una comprensión del tipo estructural, de registros gráficos y de lenguaje natural, de la competencia matemática de representación y de igual actividad cognitiva, así como también de un nivel de dificultad de reproducción

Finalmente los factores 4 y 7, evidencia la competencia matemática referida al planteamiento y resolución de problemas, así como también la utilización del lenguaje simbólico y formal, este componente es eminentemente de corte estructural.

Las actividades cognitivas quedaron representadas en los campos de componentes, toda vez que para tales actividades (representación, tratamiento y conversión) es menester la dualidad conceptual y diversas competencias matemáticas. Lo anterior revela de alguna manera la consistencia en la estructura de la prueba. Sin embargo debe señalarse que no hay una delimitación precisa en cuanto a los componentes generados, esto es explicable por la multiplicidad de variables involucradas, alrededor de los registros de representación de origen y destino de cada reactivo, de la actividad cognitiva requerida para el proceso de solución del problema, de la complejidad estructural o procedimental del reactivo, y de la competencia matemática e indicadores requeridos.

3.3.3.4 Confiabilidad

La confiabilidad del instrumento de medición post-test es establecida a partir del coeficiente de Kuder – Richarson (KR21), cuyos parámetros involucrados son el número de reactivos, media y desviación estándar de los resultados de los 66 estudiantes que conforman los grupos experimentales (ver tabla 21). Se calcula con la fórmula siguiente:

$$r = \left[\frac{k}{k-1} \right] \left[1 - \frac{m(k-m)}{k s^2} \right]$$

Donde:

r es el coeficiente de confiabilidad de Kuder – Richarson

k es el número de reactivos de la prueba

m es la media de los aciertos obtenidos

s es la desviación estándar

Sustituyendo los valores estadísticos obtenidos se tiene que:

$$r = \left[\frac{37}{37-1} \right] \left[1 - \frac{16.6970(37-16.6970)}{37(7.3887^2)} \right], \text{ lo que finalmente resulta que } r = 0.86$$

Tabla 21. Resultados del post-test y confiabilidad de Kuder-Richarson

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el post-test	No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos en el post-test
1	658	194891	27	34	651	193142	20
2	658	188903	16	35	651	192797	20
3	658	192720	20	36	651	190334	16
4	658	194834	8	37	651	191685	22
5	658	194290	22	38	651	190371	15
6	658	190017	10	39	651	190683	18
7	658	185764	11	40	651	187525	15
8	658	187235	12	41	651	192192	18
9	658	192988	25	42	651	188544	19
10	658	186251	23	43	661	192544	9
11	658	186071	19	44	661	174979	7
12	658	190338	33	45	661	272330	10
13	658	188394	20	46	661	188683	10
14	658	187985	24	47	661	187499	11
15	658	158252	13	48	661	156593	6
16	658	184876	3	49	661	186281	13
17	654	188590	8	50	661	193074	10
18	654	188676	13	51	661	188270	12
19	654	192552	13	52	661	185194	12
20	654	192555	19	53	661	187454	13
21	654	192896	13	54	661	193875	15
22	651	190370	17	55	657	192766	14
23	651	191716	7	56	657	187154	13
24	651	191422	24	57	657	190695	7
25	651	187278	6	58	657	191664	16
26	651	190505	21	59	657	190861	11
27	651	192478	6	60	657	192743	9
28	651	191025	11	61	657	192009	8
29	651	186139	19	62	657	191845	10
30	651	190564	23	63	657	192045	26
31	651	192835	22	64	657	190666	9
32	651	190448	29	65	657	194232	11
33	651	192073	14	66	661	191128	16

La confiabilidad del post-test obtenida mediante el coeficiente KR21 calculada es 0.86, considerado como aceptable para Lafourcade (1971).

También se calculó la confiabilidad por el método de mitades partidas corregido por la fórmula de Spearman-Brown obteniendo un coeficiente de 0.90, calificado como apropiado por Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004). Ver resultados de los estudiantes en la tabla 22.

El coeficiente de correlación muestral para tal efecto puede calcularse mediante:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}$$

Donde:

r es el coeficiente de correlación muestral

$$S_{xx} = \sum (\bar{x} - x_i)^2, \quad S_{yy} = \sum (\bar{y} - y_i)^2 \quad \text{y} \quad S_{xy} = \sum (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

En este caso particular se obtuvo que: $\bar{x} = 7.3939$, $\bar{y} = 7.2121$, $S_{xx} = 791.7576$, $S_{yy} = 1595.0303$ y $S_{xy} = 556.4848$, luego, al sustituir en la ecuación se tiene que:

$$r = \frac{556.4848}{\sqrt{(791.7576)(1595.0303)}} \quad \text{obteniendo un coeficiente de } 0.81, \text{ calificado como}$$

correlación positiva considerable de acuerdo a la escala de Hernández, Fernández y Baptista (2006).

La estimación de la confiabilidad r_t se calcula a través del método de mitades partidas

corregido por la fórmula de Spearman-Brown $r_t = \frac{2r}{1+r}$ en donde r es el coeficiente de

correlación obtenido por mitades partidas.

$$r_t = \frac{2(0.81)}{1+0.81}, \text{ en donde se obtiene un coeficiente de confiabilidad } r_t = 0.90$$

Tabla 22 Resultados del post-test para la confiabilidad mediante el método de mitades partidas.

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos por los alumnos en el post-test	Aciertos obtenidos en reactivos impar	Aciertos obtenidos en reactivos par	(xi - xt)^2	(yi - yt)^2	(xi - xt)(yi - yt)
1	658	194891	27	14	12	43.6400	22.9238	31.6290
2	658	188903	16	8	8	0.3673	0.6208	0.4775
3	658	192720	20	10	10	6.7916	7.7723	7.2654

Tabla 22 Resultados del post-test para la confiabilidad mediante el método de mitades partidas (continuación).

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos por los alumnos en el post-test	Aciertos obtenidos en reactivos impar	Aciertos obtenidos en reactivos par	$(x_i - x_t)^2$	$(y_i - y_t)^2$	$(x_i - x_t)(y_i - y_t)$
4	658	194834	8	3	5	19.3067	4.8935	9.7199
5	658	194290	22	11	10	13.0037	7.7723	10.0533
6	658	190017	10	4	6	11.5188	1.4692	4.1139
7	658	185764	11	5	6	5.7309	1.4692	2.9017
8	658	187235	12	5	6	5.7309	1.4692	2.9017
9	658	192988	25	14	11	43.6400	14.3480	25.0230
10	658	186251	23	12	10	21.2158	7.7723	12.8411
11	658	186071	19	9	10	2.5794	7.7723	4.4775
12	658	190338	33	15	17	57.8522	95.8026	74.4472
13	658	188394	20	8	12	0.3673	22.9238	2.9017
14	658	187985	24	12	12	21.2158	22.9238	22.0533
15	658	158252	13	7	5	0.1552	4.8935	0.8714
16	658	184876	3	2	1	29.0946	38.5904	33.5078
17	654	188590	8	4	4	11.5188	10.3177	10.9017
18	654	188676	13	7	6	0.1552	1.4692	0.4775
19	654	192552	13	5	7	5.7309	0.0450	0.5078
20	654	192555	19	11	7	13.0037	0.0450	-0.7649
21	654	192896	13	7	6	0.1552	1.4692	0.4775
22	651	190370	17	8	8	0.3673	0.6208	0.4775
23	651	191716	7	2	5	29.0946	4.8935	11.9320
24	651	191422	24	14	9	43.6400	3.1965	11.8108
25	651	187278	6	3	3	19.3067	17.7420	18.5078
26	651	190505	21	11	10	13.0037	7.7723	10.0533
27	651	192478	6	3	3	19.3067	17.7420	18.5078
28	651	191025	11	6	5	1.9431	4.8935	3.0836
29	651	186139	19	8	10	0.3673	7.7723	1.6896
30	651	190564	23	12	11	21.2158	14.3480	17.4472
31	651	192835	22	11	11	13.0037	14.3480	13.6593
32	651	190448	29	14	14	43.6400	46.0753	44.8411
33	651	192073	14	7	6	0.1552	1.4692	0.4775
34	651	193142	20	10	9	6.7916	3.1965	4.6593
35	651	192797	20	11	8	13.0037	0.6208	2.8411
36	651	190334	16	7	8	0.1552	0.6208	-0.3104
37	651	191685	22	12	9	21.2158	3.1965	8.2351
38	651	190371	15	7	7	0.1552	0.0450	0.0836
39	651	190683	18	9	8	2.5794	0.6208	1.2654
40	651	187525	15	7	7	0.1552	0.0450	0.0836

Tabla 22 Resultados del post-test para la confiabilidad mediante el método de mitades partidas (continuación).

No.	Grupo	Matrícula de los alumnos	Aciertos obtenidos por los alumnos en el post-test	Aciertos obtenidos en reactivos impar	Aciertos obtenidos en reactivos par	$(x_i - x_t)^2$	$(y_i - y_t)^2$	$(x_i - x_t)(y_i - y_t)$
41	651	192192	18	9	8	2.5794	0.6208	1.2654
42	651	188544	19	8	11	0.3673	14.3480	2.2957
43	661	192544	9	4	5	11.5188	4.8935	7.5078
44	661	174979	7	5	2	5.7309	27.1662	12.4775
45	661	272330	10	5	5	5.7309	4.8935	5.2957
46	661	188683	10	6	4	1.9431	10.3177	4.4775
47	661	187499	11	4	6	11.5188	1.4692	4.1139
48	661	156593	6	4	2	11.5188	27.1662	17.6896
49	661	186281	13	7	6	0.1552	1.4692	0.4775
50	661	193074	10	3	6	19.3067	1.4692	5.3260
51	661	188270	12	6	5	1.9431	4.8935	3.0836
52	661	185194	12	6	5	1.9431	4.8935	3.0836
53	661	187454	13	7	6	0.1552	1.4692	0.4775
54	661	193875	15	7	8	0.1552	0.6208	-0.3104
55	657	192766	14	7	7	0.1552	0.0450	0.0836
56	657	187154	13	5	7	5.7309	0.0450	0.5078
57	657	190695	7	3	4	19.3067	10.3177	14.1139
58	657	191664	16	9	7	2.5794	0.0450	-0.3407
59	657	190861	11	4	7	11.5188	0.0450	0.7199
60	657	192743	9	4	5	11.5188	4.8935	7.5078
61	657	192009	8	4	3	11.5188	17.7420	14.2957
62	657	191845	10	7	3	0.1552	17.7420	1.6593
63	657	192045	26	15	10	57.8522	7.7723	21.2048
64	657	190666	9	2	7	29.0946	0.0450	1.1442
65	657	194232	11	5	6	5.7309	1.4692	2.9017
66	661	191128	16	7	9	0.1552	3.1965	-0.7043

3.3.3.5 Índices de dificultad, discriminación y punto biserial

Dificultad

El índice de dificultad como se mencionó en párrafos anteriores está relacionado con la proporción de estudiantes que resuelven correctamente un reactivo, y se calcula de acuerdo a Crocker y Algina, (1986). Cabe señalar que se tomó la decisión de eliminar los reactivos 13, 16 y 19 en virtud de que cuentan con un índice de discriminación inferior al mínimo

establecido por los especialistas. La tabla 23 muestra los índices de dificultad calculados para los reactivos del post-test y el calificativo correspondiente según Backhoff (2000).

Tabla 23. Calificación del reactivo del post-test de acuerdo al índice de dificultad

No. de Reactivo	Índice de dificultad	Calificación	Observaciones
1	0.39	Medianamente difíciles	Ninguna
2	0.36	Medianamente difíciles	Ninguna
3	0.30	Altamente difíciles	Ninguna
4	0.48	Medianamente difíciles	Ninguna
5	0.36	Medianamente difíciles	Ninguna
6	0.58	Dificultad media	Ninguna
7	0.53	Dificultad media	Ninguna
8	0.62	Dificultad media	Ninguna
9	0.47	Medianamente difíciles	Ninguna
10	0.39	Medianamente difíciles	Ninguna
11	0.50	Medianamente difíciles	Ninguna
12	0.71	Dificultad media	Ninguna
13	0.41	Medianamente difíciles	Se excluye
14	0.18	Altamente difíciles	Ninguna
15	0.50	Medianamente difíciles	Ninguna
16	0.26	Altamente difíciles	Se excluye
17	0.26	Altamente difíciles	Ninguna
18	0.33	Medianamente difíciles	Ninguna
19	0.33	Medianamente difíciles	Se excluye
20	0.42	Medianamente difíciles	Ninguna
21	0.39	Medianamente difíciles	Ninguna
22	0.32	Altamente difíciles	Ninguna
23	0.65	Dificultad media	Ninguna
24	0.33	Medianamente difíciles	Ninguna
25	0.30	Altamente difíciles	Ninguna
26	0.47	Medianamente difíciles	Ninguna
27	0.30	Altamente difíciles	Ninguna
28	0.30	Altamente difíciles	Ninguna
29	0.47	Medianamente difíciles	Ninguna
30	0.29	Altamente difíciles	Ninguna
31	0.27	Altamente difíciles	Ninguna
32	0.23	Altamente difíciles	Ninguna
33	0.45	Medianamente difíciles	Ninguna
34	0.45	Medianamente difíciles	Ninguna
35	0.38	Medianamente difíciles	Ninguna
36	0.33	Medianamente difíciles	Ninguna
37	0.42	Medianamente difíciles	Ninguna

En donde puede observarse una combinación equitativa y adecuada entre reactivos altamente difíciles (29%), medianamente difíciles (56%), y de dificultad media (15%). El promedio de dificultad resultante es de 0.41, lo cual califica al instrumento en lo general como medianamente difícil.

Discriminación

El índice de discriminación del reactivo permite diferenciar (discriminar) entre aquellos estudiantes que obtuvieron buenas calificaciones en la prueba y aquellos que obtuvieron bajo puntaje, está relacionado entonces con la posibilidad alta de responder correctamente el reactivo aquellos estudiantes con un desempeño en general sobresaliente en la prueba, situación opuesta para el caso de los estudiantes con un desempeño deficiente, en este análisis se considera el 54% de la población muestral, toda vez que se incluye el 27% de los estudiantes con alto rendimiento e igual porcentaje de estudiantes con el más bajo rendimiento, por cada reactivo que se revisa.

La tabla 24 muestra el índice de discriminación de cada reactivo que compone el diagnóstico, calificándolo de acuerdo a Ebel y Frisbie (1986).

Tabla 24. Calificación del índice de discriminación de los reactivos del post-test

No. de Reactivo	Índice de discriminación	Calificación	Observación
1	0.66	Excelente	Ninguna
2	0.31	Bueno	Ninguna
3	0.42	Excelente	Ninguna
4	0.49	Excelente	Ninguna
5	0.42	Excelente	Ninguna
6	0.55	Excelente	Ninguna
7	0.77	Excelente	Ninguna
8	0.26	Regular	Ninguna
9	0.54	Excelente	Ninguna
10	0.37	Bueno	Ninguna
11	0.77	Excelente	Ninguna
12	0.49	Excelente	Ninguna
13	-0.32	Malo	Se excluye
14	0.13	Malo	Ninguna
15	0.60	Excelente	Ninguna

Tabla 24. Calificación del índice de discriminación de los reactivos del post-test (continuación).

No. de Reactivo	Índice de discriminación	Calificación	Observación
16	0.02	Malo	Se excluye
17	0.36	Bueno	Ninguna
18	0.42	Excelente	Ninguna
19	0.13	Malo	Se excluye
20	0.60	Excelente	Ninguna
21	0.71	Excelente	Ninguna
22	0.71	Excelente	Ninguna
23	0.66	Excelente	Ninguna
24	0.20	Regular	Ninguna
25	0.59	Excelente	Ninguna
26	0.71	Excelente	Ninguna
27	0.42	Excelente	Ninguna
28	0.59	Excelente	Ninguna
29	0.77	Excelente	Ninguna
30	0.25	Regular	Ninguna
31	0.19	Malo	Ninguna
32	0.19	Malo	Ninguna
33	0.15	Malo	Ninguna
34	0.31	Bueno	Ninguna
35	0.48	Excelente	Ninguna
36	0.25	Regular	Ninguna
37	0.48	Excelente	Ninguna

Se cuenta con que el 76 % de los reactivos tienen discriminación excelente o buena, el 12% tienen discriminación regular, mientras que solo el 12 % es discriminación pobre o mala. Además el promedio de discriminación es 0.465, el cual cae dentro de una calificación considerada como excelente (mayor que 0.40).

Coefficiente de correlación del punto biserial

Otro elemento considerado importante en la confiabilidad y validez del instrumento, tiene que ver con el coeficiente de correlación del punto biserial, toda vez que este considera el 100% de la población muestral, no solo al 54% como en el caso del índice de discriminación, según Henrysson (1971) este coeficiente es un indicador de validez predictiva, y aquí se calcula de acuerdo al modelo de Backhoff (2000), relacionando la respuesta a un reactivo por un estudiante y el resultado que obtuvo de la prueba, la

interpretación de este coeficiente se hace del mismo modo que la del coeficiente de correlación de Pearson. Los valores obtenidos con la población muestral de estudiantes se señala a continuación (tabla 25) con la calificación de acuerdo a los rangos descritos por Backhoff (2000), el estadístico t y el correspondiente nivel de significancia α .

Tabla 25. Calificación del reactivo de acuerdo al coeficiente de correlación del punto biserial

No. de reactivo	Coeficiente de correlación del punto biserial.	Calificación	Estadístico t	Coeficiente de significación alfa
1	0.23	Regular	1.883	0.10
2	0.12	Pobre	0.983	0.40
3	0.17	Regular	1.388	0.20
4	0.21	Regular	1.679	0.10
5	0.16	Regular	1.276	0.30
6	0.15	Regular	1.211	0.30
7	0.27	Bueno	2.267	0.03
8	0.13	Pobre	1.052	0.30
9	0.17	Regular	1.406	0.20
10	0.15	Regular	1.189	0.30
11	0.25	Regular	2.100	0.04
12	0.18	Regular	1.476	0.2
13	-0.08	Discriminación negativa	-0.61	0.60
14	0.08	Pobre	0.605	0.60
15	0.20	Regular	1.660	0.20
16	0.02	Pobre	0.154	0.90
17	0.15	Regular	1.250	0.30
18	0.14	Pobre	1.120	0.30
19	0.06	Pobre	0.489	0.80
20	0.22	Regular	1.788	0.10
21	0.24	Regular	1.937	0.10
22	0.25	Regular	2.099	0.04
23	0.23	Regular	1.871	0.10
24	0.02	Pobre	0.176	0.90
25	0.18	Regular	1.442	0.20
26	0.20	Regular	1.647	0.20
27	0.12	Pobre	0.955	0.40
28	0.22	Regular	1.783	0.10

Tabla 25. Calificación del reactivo de acuerdo al coeficiente de correlación del punto biserial (continuación).

No. de reactivo	Coeficiente de correlación del punto biserial.	Calificación	Estadístico t	Coeficiente de significación alfa
29	0.25	Regular	2.07	0.05
30	0.13	Pobre	1.059	0.30
31	0.08	Pobre	0.612	0.60
32	0.09	Pobre	0.731	0.60
33	0.06	Pobre	0.508	0.80
34	0.11	Pobre	0.919	0.40
35	0.16	Regular	1.336	0.20
36	0.10	Pobre	0.811	0.60
37	0.16	Regular	1.336	0.20

Los reactivos con coeficiente de correlación biserial calificados como bueno (reactivo 7) o regular (reactivos 11, 22 y 29) y cuyo nivel de significancia es menor o igual a 0.04 en todos los casos sugieren que los alumnos tienen un desempeño favorable en general cuando la complejidad de la comprensión en la que sobresalen es del tipo estructural. Además se observa como regularidad en estos mismos reactivos que el registro original es gráfico, haciendo notar que el 32% de los reactivos cuentan con el registro gráfico como el inicial, lo que el dominio de tal registro inicial promueve el éxito en el aprovechamiento de los estudiantes. En estos reactivos la competencia matemática es la referida a la utilización del lenguaje simbólico y formal, se anota que el 57% de los reactivos corresponden a tal competencia.

El balance general a partir de la confiabilidad calculada, la determinación de la dificultad y los índices de discriminación, así como el establecimiento de la validez total respecto del instrumento post-test, evidencian que tal instrumento cuenta con la calidad suficiente y necesaria para establecer las competencias matemáticas específicas y elementos conceptuales y procedimentales que los estudiantes tiene después de la aplicación de la estrategia didáctica.

3.4 Procedimiento

Se seleccionaron 4 grupos del tercer semestre de ingeniería, a saber 651, 657, 658 y 661, considerando principalmente la disponibilidad de los docentes y estudiantes involucrados.

Se diseñó y aplicó a los grupos citados un instrumento de medición diagnóstica, con el objeto de establecer las condiciones de los conocimientos de los estudiantes en cuanto a las competencias específicas (modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones) logradas hasta el momento previo al inicio de abordar el estudio del fenómeno sistema masa-resorte.

Con el objeto de probar el instrumento de evaluación diagnóstica (el cual originalmente fue diseñado con 40 reactivos) este fue administrado en tres ocasiones en momentos y con alumnos distintos, con el propósito de calibrarlo en términos tanto de redacción, de contenido, dificultad y de discriminación. La segunda administración se llevó a cabo durante el mes de abril de 2008, y se aplicó a tres grupos de la unidad de aprendizaje de ecuaciones diferenciales, los grupos 651, 658 y 661, la tercera y última administración se llevó a cabo a principios de septiembre de 2008 y recoge la información de 94 alumnos distribuidos en los grupos 651, 657, 658 y 661, los aplicadores fueron docentes de los mismos grupos y se les explicó la importancia y el propósito del instrumento, de manera que a su vez se difundiera la información con sus alumnos, de forma adicional se les invitó a realizar su mejor esfuerzo en el proceso de resolución del diagnóstico, aún sin embargo los docentes reportaron que algunos estudiantes no mostraban un interés sobresaliente en la resolución, y entregaron el diagnóstico en un tiempo relativamente corto, por ello para efecto de calcular los parámetros de validez y confiabilidad fueron excluidos. Cabe señalar que durante la administración del instrumento no se permitió el uso de equipo de cómputo o calculadoras. Después de concluida la aplicación de los diagnósticos estos fueron entregados al investigador para captar y analizar la información, con la que se formó una base de datos y procesó en hoja de cálculo Excel y mediante el Paquete Estadístico para las Ciencias Sociales (SPSS: Statistical Package for the Social Science) versión 12.0 para

Windows. La aplicación del instrumento de evaluación diagnóstica permite establecer los niveles de competitividad en cuanto a las competencias específicas, la dualidad conceptual, la manipulación de los registros de representación y el nivel de actividad conceptual.

Cabe apuntar que para verificar la homogeneidad de los grupos a los que se les administró el diagnóstico en cuanto a sus competencias matemáticas, se aplicó entre ellos la prueba de hipótesis de medias, los cálculos y los resultados se presentan en el capítulo IV.

Los resultados indican de alguna manera que la información recabada por el instrumento diagnóstico debe ser considerada de manera importante para el diseño de la estrategia didáctica, toda vez que no hay evidencia para pensar que los grupos no son homogéneos, así como criterio para establecer la igualdad de los grupos en términos de sus competencias matemáticas para efecto de la puesta en marcha de la estrategia didáctica.

Los grupos 651 y 657 se subdividieron en partes iguales, los grupos llamados 651N y 657N serán expuestos a una enseñanza con un esquema tradicional, al igual que el grupo 661, mientras que en el resto de los subgrupos 651E y 657E, así como en el grupo 658 se implementará una estrategia didáctica que incorpora la calculadora como medio para la producción de significados y la vinculación dinámica de los registros de representación.

Desde esta perspectiva el estudio se realiza, con la exploración y comparación de los efectos de ambas estrategias de enseñanza sobre la eficiencia de los conocimientos que alcanzan los estudiantes. La calidad del experimento se verifica mediante su validez interna de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006). A continuación cada una de las fuentes de invalidación interna:

1. Historia

Tanto a los grupos experimentales como a los de control se les ha señalado que su calificación depende únicamente de los resultados que obtengan a partir de su desempeño en el examen post-test, el cual se aplicaría una vez concluida la puesta en escena de la estrategia didáctica, no hay en ningún caso incentivo adicional que su propia calificación.

Las reglas referentes al control asistencial son las mismas para todos los grupos. Se puntualiza que no hay calificación extraordinaria o puntos adicionales por ser partícipe de algún grupo de control o experimental.

2. Maduración

Las condiciones de trabajo estudiantil para todos los grupos queda declarada de antemano, en el entendido que se desarrolla la actividad durante el mismo intervalo de tiempo, en nuestro caso el experimento se lleva a cabo durante dos semanas, a ningún grupo se le dedicó horas extraordinarias.

3. Inestabilidad

Se cuenta con igualdad de circunstancias en términos de la infraestructura que se utiliza para el desarrollo de la experimentación, no obstante los grupos experimentales participan en un aula ubicada en el tercer piso del edificio central de ingeniería, el resto lo hace en el cuarto y primer piso del mismo edificio, los efectos por ruido y de cualquier otra índole son equivalentes para todos los estudiantes que se encuentran en el edificio central.

4. Administración de pruebas

No hay efecto de la aplicación del instrumento diagnóstico sobre los resultados de la post-test, toda vez que en el instrumento inicial no se incluyen reactivos del contenido curricular asociado a los conceptos matemáticos del fenómeno sistema masa resorte. Dejando que sea la influencia de la estrategia didáctica como única en los efectos de las competencias logradas por los estudiantes.

5. Instrumentación

El post-test se ha diseñado con el conocimiento y aprobación de los profesores responsables de los grupos tanto experimental y de control, aseverando el contenido curricular y la estructura del instrumento, es el mismo instrumento que se aplica a todos los grupos, esto elimina variaciones o sesgo como producto de la aplicación de instrumentos diferentes.

6. Selección

Cabe señalar que como producto de la aplicación del instrumento diagnóstico, se estableció con pruebas de medias y variación que todos los grupos implicados en la experimentación resultaron ser homogéneos, en cuanto a la eficiencia de sus competencias, lo anterior permite contar con la tranquilidad necesaria para no pensar que los resultados que se obtengan devienen de grupos de estudiantes sobresalientes, y que después de llevar a cabo la implementación de la estrategia didáctica, y consecuente aplicación de la posprueba estos sean los que logren mejor eficiencia de conocimientos no por la estrategia didáctica, sino porque ya eran estudiantes de alto rendimiento.

7. Mortalidad Experimental

La tabla 26 resume la mortalidad de cada uno de los grupos considerados en el experimento:

Tabla 26. Mortalidad de los grupos experimentales

Grupo	Cantidad original de alumnos, al inicio del semestre	Subgrupo	Cantidad de alumnos del subgrupo, al inicio de la experimentación (en el mes de noviembre de 2008)	Cantidad de alumnos que concluyeron el experimento y que aplicaron el post-test	Cantidad de alumnos que no concluyeron el experimento	Porcentaje de mortalidad (%)
658	24	658-E	19	16	2	11
661	20	661-T	15	13	2	13
651	34	651-E	14	13	2	14
651	34	651-T	14	8	3	21
657	32	657-E	14	7	3	21
657	32	657-T	14	9	3	21

Estos resultados de mortalidad exponen la complejidad de la experimentación (de 11% al 21%) y los obtenidos del post-test, toda vez que la aplicación se realiza (a fines del mes de octubre y principios del mes de noviembre de 2008, esto es a escasas 4 semanas de concluir el semestre) cuando incluso algunos estudiantes saben ya que no acreditarán el curso, ya sea por inasistencias, por ausencia de confianza en sus conocimientos en el tema o simplemente porque se han desmoralizado. Se aclara que en ningún caso había incentivo alguno fuera de la calificación que obtendrían en el post-test y consecuentemente en su

evaluación final. En esta mortalidad se descartó a aquellos estudiantes que no cubrieron con un porcentaje mínimo de asistencia (80%) tanto respecto de los grupos experimentales como de los grupos piloto, así como también de aquellos estudiantes que por alguna razón (la que fuere) no se presentaron en tiempo y forma a la aplicación del post-test, o bien lo resolvieron parcialmente, lo anterior permitió establecer favorablemente la validez y confiabilidad del instrumento.

8. Interacción entre selección y maduración

Tanto los grupos experimental y de control cuentan con horarios que no son límite inicial ni final de una jornada escolar, los horarios de tales grupos son: 8:00, 10:00 y 18:00 horas, no se cuentan con grupos a las 7:00 horas, primera hora con la que se inicia la jornada escolar y en la cual los estudiantes ocasionalmente llegan tarde por múltiples razones, ni a las 13:00 o 14:00 horas, en las que el factor hambre hace estragos, ni a las 20:00 o 21:00 horas cuando el cansancio se hace presente para la mayoría de los estudiantes.

9. Difusión de tratamientos experimentales

Previo al inicio de la experimentación se aclaró con los estudiantes participantes la importancia del mismo, y la necesidad de no compartir materiales ni comunicar estrategias utilizadas durante el experimento, incluso hasta que concluyera la aplicación del instrumento de medición post-test, lo anterior con el propósito de no opacar los efectos la estrategia didáctica.

10. Actuaciones anormales del grupo de control

Los estudiantes de los grupos de control no tienen conocimiento de que se les compara con estudiantes de grupos experimentales en términos de la eficiencia de conocimientos.

Para efecto de recabar la información de los logros de los estudiantes de los grupos experimentales, en cuanto a las competencias matemáticas asociadas al sistema masa-resorte, y en consecuencia evaluar la variable dependiente de este estudio, se diseñó un instrumento de medición (posprueba) que consta de 37 reactivos (ver apéndice a partir de los indicadores señalados en la hipótesis, el cual se aplicó al término de la experimentación.

Después de la aplicación de la estrategia didáctica y la posprueba, se presentó a los grupos (651, 657 y 658) que participaron en la experimentación un cuestionario (ver apéndice D) integrado por 11 preguntas, con el propósito de evaluar desde la perspectiva de los estudiantes el desarrollo de las actividades de aprendizaje en conjunto con la incorporación de la calculadora. El cuestionario se administró a 28 estudiantes de los grupos citados y tiene un nivel de medición del tipo nominal de acuerdo a Hernández (2006), y la codificación utilizada es la siguiente: 1) Totalmente de acuerdo, 2) De acuerdo, 3) Neutral, 4) En desacuerdo y 5) Totalmente en desacuerdo.

Para efecto de validar la información derivada de la encuesta se estimó la confiabilidad mediante el coeficiente alfa de Cronbach a partir de incorporar los datos al software SPSS. En virtud de que el coeficiente obtenido es de 0.78, mayor que 0.75, es considerado aceptable de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2006), la información generada puede considerarse como confiable.

CAPÍTULO IV. RESULTADOS

Este capítulo advierte dos análisis, el primero de ellos descriptivo, toda vez que es el instrumento de medición diagnóstico el que permite establecer el desempeño que tienen los estudiantes en cuanto a sus competencias matemáticas, el manejo de los registros de representación, tratamiento y conversión, desde una perspectiva inicial y final de los reactivos abordados en el diagnóstico, así como también la complejidad estructural y operacional de la comprensión; previo a la implementación de la estrategia didáctica.

Secundariamente se presenta un análisis comparativo entre la eficiencia de conocimientos de los estudiantes de los grupos de control y experimental, logrados a partir de los esquemas de enseñanza tradicional y otro que incorpora tecnología de la calculadora, medidos con la administración de post-test.

4.1 Análisis descriptivo en grupos de pre-test

El instrumento de medición diagnóstica permitió establecer una caracterización de los estudiantes, antes de abordar la cuarta unidad de aprendizaje correspondiente a la asignatura de ecuaciones diferenciales, y en particular al fenómeno multicitado sistema masa-resorte.

Uniformidad en los grupos de pre-test

Una vez revisado el pre-test para cada uno de los estudiantes, se determinó los parámetros estadísticos media aritmética, desviación estándar y variancia (ver tabla 27), encontrando los resultados referentes al número de respuestas correctas por parte de los estudiantes en cada uno de los grupos.

Tabla 27. Parámetros estadísticos de los grupos en el pre-test

No.	Grupo	No. de alumnos	Media del puntaje logrado $\bar{x}$	Desviación estándar s	Variancia s^2
1	651	25	18.0800	5.9085	34.9100
2	654	21	20.0952	5.5669	30.9905
3	657	23	20.7391	6.3045	39.7470
4	658	14	21.2143	5.8727	34.4890
5	661	11	17.5455	4.9672	24.6727

Puede notarse que no hay diferencia significativa en lo que respecta al promedio del número de respuestas correctas de los grupos en el que se administró el pre-test, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso y determinar la uniformidad de los grupos (cfr. Apéndice E); cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 28. Validación estadística de la uniformidad entre grupos del pre-test

Grupos	Resultado de la hipótesis estadística
651 y 654	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
651 y 657	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
651 y 658	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
651 y 661	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
654 y 657	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
654 y 658	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
654 y 661	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
657 y 658	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
657 y 661	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
658 y 661	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado

Competencias matemáticas en los grupos de pre-test

La tabla 29 exhibe los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las competencias matemáticas evaluadas en el instrumento de medición diagnóstica.

Tabla 29. Índices promedio de dificultad obtenido en las competencias matemáticas en el pre-test.

Competencia matemática	Cantidad de reactivos relacionados	Media del índice de dificultad	Desviación estándar	Variancia
Pensar y razonar	2	0.5700	0.1273	0.0162
Plantear y resolver problemas	4	0.4900	0.2731	0.0746
Modelar	4	0.5650	0.2530	0.0640
Representar	13	0.5915	0.1830	0.0335
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	11	0.5964	0.1182	0.0140

Una ilustración gráfica (ver figura 7) permite visualizar claramente que la competencia matemática referida al planteamiento y resolución de problemas es en la que se tiene el más bajo rendimiento por parte de los estudiantes, mientras que se conserva un equilibrio en el resto de las competencias matemáticas.

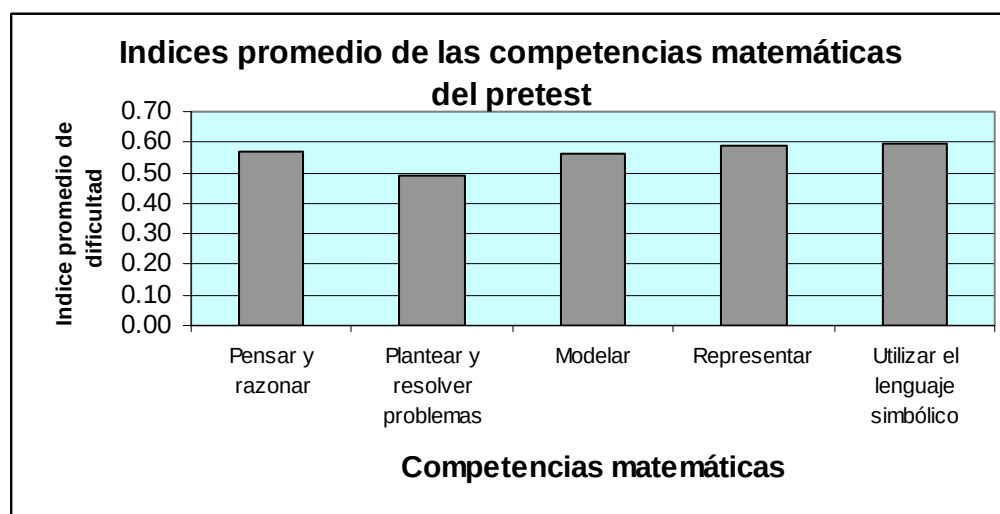


Figura 7. Gráfico de los índices promedio de dificultad obtenido en el pre-test contra las competencias matemáticas

Puede notarse que no hay una diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las competencias matemáticas, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso (cfr. Apéndice E), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 30. Validación estadística de competencias matemáticas en el pre-test

Comparativo entre Competencias matemática		Resultado de la hipótesis estadística
Pensar y razonar	Plantear y resolver problemas	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Pensar y razonar	Modelar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Pensar y razonar	Representar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Pensar y razonar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Plantear y resolver problemas	Modelar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Plantear y resolver problemas	Representar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Plantear y resolver problemas	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Modelar	Representar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Modelar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Representar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Actividades cognitivas en los grupos de pre-test

En la tabla 31 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) evaluadas en el instrumento de medición diagnóstica.

Tabla 31. Índices promedio para las actividades cognitivas en el pre-test

Actividad cognitiva	Cantidad de reactivos relacionados	Media del Índice de dificultad	Desviación estándar	Variancia
Representación	13	0.5815	0.1620	0.0262
Tratamiento	14	0.5671	0.1706	0.0291
Conversión	9	0.5871	0.2295	0.0527

Puede notarse que no hay diferencia significativa en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso (cfr. Apéndice E), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 32. Validación estadística de actividades cognitivas del pre-test

Comparativo entre Actividades Cognitivas		Resultado de la hipótesis estadística
Representación	Tratamiento	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Representación	Conversión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Tratamiento	Conversión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Complejidad conceptual en los grupos de pre-test

En la tabla 33 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para la complejidad conceptual (estructural y operacional) evaluadas en el instrumento de medición diagnóstica.

Tabla 33. Índices promedio de dificultad para la complejidad de la comprensión en el pre-test.

Complejidad de la comprensión	Cantidad de reactivos relacionados	Media del índice de dificultad	Desviación estándar	Variancia
Estructural	20	0.5655	0.1675	0.0792
Operacional	14	0.5929	0.1906	0.0363

Puede notarse que no hay diferencia significativa en lo que respecta a la complejidad conceptual, tratada a partir del índice promedio de dificultad, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso (cfr. Apéndice E), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 34. Validación estadística de la complejidad conceptual del pre-test

Comparativo entre Complejidad conceptual		Resultado de la hipótesis estadística
Estructura	Operación	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Nivel de dificultad en los grupos de pre-test

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al nivel de dificultad de los reactivos presentes calificados como de reproducción y de conexión, tratada a partir del índice promedio de dificultad (ver tabla 35), sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso (cfr. Apéndice E), cuyos resultados se muestran en la tabla 36.

Tabla 35. Índices promedio de dificultad para el nivel de complejidad de reactivos del pre-test.

Nivel de dificultad	Cantidad de reactivos relacionados	Media del índice de dificultad	Desviación estándar	Variancia
Reproducción	29	0.5910	0.1753	0.0307
Conexión	5	0.4940	0.1662	0.0276

Tabla 36. Validación estadística del nivel de dificultad entre grupos del pre-test

Comparativo entre Nivel de dificultad		Resultado de la hipótesis estadística
Reproducción	Conexión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Registro Inicial en los grupos de pre-test

En la tabla 37 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro inicial para el instrumento de medición diagnóstica.

Tabla 37. Índices promedio de dificultad para los registros iniciales de los reactivos en el pre-test.

Registro inicial	Cantidad de reactivos relacionados	Media del índice de dificultad	Desviación estándar	Variancia
Numérico	1	0.8900		
Algebraico	14	0.5314	0.1707	0.0292
Lenguaje natural	12	0.6183	0.1722	0.0297
Gráfico	7	0.5514	0.1603	0.0257

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al lenguaje natural, como registro inicial del reactivo, comparado con el algebraico y el gráfico, el registro inicial numérico se excluye por contar con solo un reactivo. Tal diferencia es analizada a partir del índice promedio de dificultad y para probar tal conjetura se definieron pruebas de hipótesis estadísticas (cfr. Apéndice E), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 38. Validación estadística del registro inicial entre grupos del pre-test

Comparativo entre Registro Inicial		Resultado de la hipótesis estadística
Algebraico	Lenguaje natural	No hay diferencias significativas
Algebraico	Gráfico	No hay diferencias significativas
Lenguaje natural	Gráfico	No hay diferencias significativas

Registro final en los grupos de pre-test

En la tabla 39 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro final para el instrumento de medición diagnóstica.

Tabla 39. Índices promedio de dificultad para los registros finales de los reactivos del pre-test.

Registro final	Cantidad de reactivos relacionados	Media del índice de dificultad	Desviación estándar	Variancia
Numérico	8	0.5363	0.2044	0.0418
Algebraico	15	0.6807	0.1330	0.0177
Lenguaje natural	9	0.4667	0.1352	0.0183
Gráfico	2	0.4550	0.1061	0.0113

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al lenguaje natural y gráfico, como registro final del reactivo (ver figura 8), comparado con el algebraico y el numérico. Tal diferencia es analizada a partir del índice promedio de dificultad y para probar si existen diferencias significativas se definieron las siguientes pruebas de hipótesis estadísticas (cfr. Apéndice E), cuyos resultados se muestran en la tabla 40:

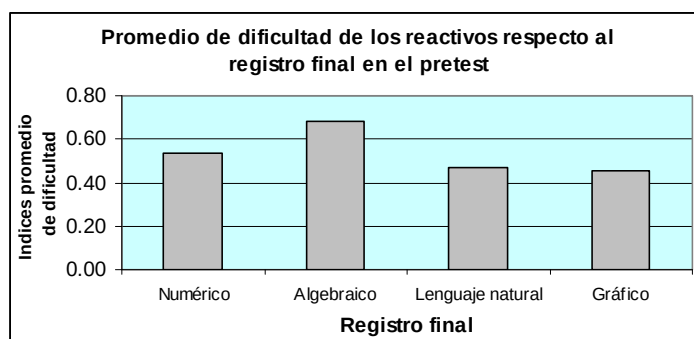


Figura 8. Índices promedio de dificultad para el registro final de los reactivos del pre-test

Tabla 40. Validación estadística del registro final entre grupos del pre-test

Comparativo entre Registro Final		Resultado de la hipótesis estadística
Numérico	Algebraico	No hay diferencias significativas
Numérico	Lenguaje natural	No hay diferencias significativas
Numérico	Grafico	No hay diferencias significativas
Algebraico	Lenguaje natural	No hay diferencias significativas
Algebraico	Grafico	Si hay diferencias significativas
Lenguaje natural	Grafico	No hay diferencias significativas

4.2 Análisis descriptivo en grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la administración del post-test, toda vez que se había concluido el estudio del fenómeno denominado sistema masa-resorte; pero este último se abordó bajo un esquema de enseñanza tradicional, para posteriormente en base a estos resultados poder realizar un comparativo con los grupos en los que se experimentó la estrategia didáctica.

Uniformidad en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

La tabla 41 muestra el número promedio de reactivos correctos que respondieron los grupos con enfoque de enseñanza tradicional. La notación 651-T significa que se trata del grupo de estudiantes con registro de identificación 651, estudiantes que abordaron el estudio del fenómeno sistema masa-resorte bajo un esquema de enseñanza tradicional.

Tabla 41. Parámetros estadísticos de los grupos con enfoque de enseñanza tradicional obtenidos en el post-test.

Grupo	Promedio del número de aciertos	Variancia	Desviación estándar	Número de alumnos
651-T	13.3750	57.6964	7.5958	8
657-T	10.8889	15.8611	3.9826	9
661-T	10.1538	11.6410	3.4119	13

Aunque hay diferencias importantes en los promedios de los grupos, se definen pruebas de hipótesis con el propósito de verificar si la diferencia en tales promedios es significativa (cfr. Apéndice F); cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 42. Validación estadística de la uniformidad entre grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

Grupos	Resultado de la hipótesis estadística
651-T y 657-T	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
651-T y 661-T	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
657-T y 661-T	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado

Competencias matemáticas en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

En la tabla 43 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las competencias matemáticas evaluadas a partir del post-test.

Tabla 43. Índices promedio de dificultad para las competencias matemáticas de los alumnos del grupo de control en el post-test.

Competencias matemáticas	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Cantidad de reactivos
Modelar	0.3250	0.0351	0.1873	4
Plantear y resolver problemas	0.2780	0.0021	0.0455	6
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	0.3325	0.0227	0.1505	20
Representar	0.3333	0.0212	0.1457	4

Una ilustración gráfica (ver figura 9) permite visualizar claramente que la competencia matemática referida al planteamiento y resolución de problemas es en la que se tiene el más bajo rendimiento por parte de los estudiantes, le sigue la competencia de modelado mientras que se conserva un equilibrio en el resto de las competencias matemáticas.

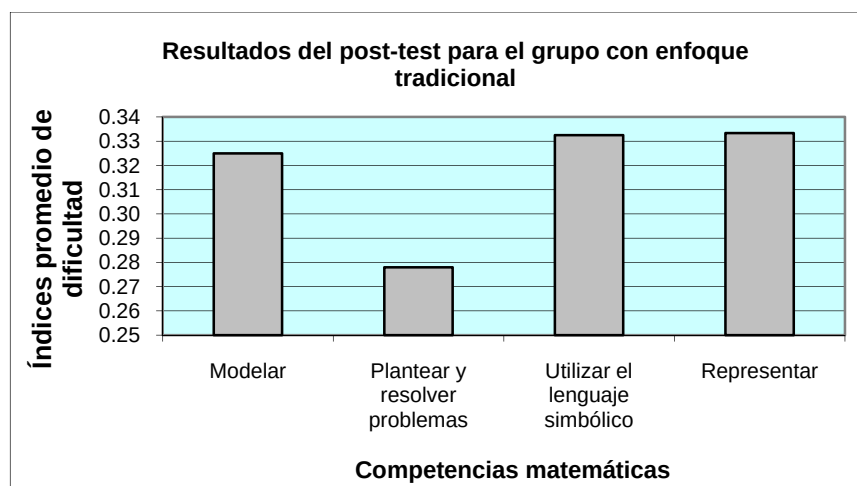


Figura 9. Gráfico de barras de los índices promedio de dificultad para las competencias matemáticas de los alumnos del grupo de control en el post-test.

Puede notarse que hay una diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las competencias matemáticas, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso (cfr. Apéndice F); cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 44. Validación estadística de competencias matemáticas en grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

Comparativo entre Competencias matemática		Resultado de la hipótesis estadística
Plantear y resolver problemas	Modelar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Plantear y resolver problemas	Representar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Plantear y resolver problemas	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Modelar	Representar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Modelar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Representar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Actividades cognitivas en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

La tabla 45 exhibe los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) evaluadas en a partir del post-test.

Tabla 45. Índices promedio de dificultad para la actividad cognitiva de los grupos de control en el post-test

Actividad cognitiva	Índice Promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Cantidad de reactivos
Representación	0.3833	0.0145	0.1203	9
Tratamiento	0.3367	0.0281	0.1676	12
Conversión	0.2831	0.0125	0.1116	13

Puede notarse diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las actividades cognitivas de conversión contra las actividades de tratamiento y sobre todo de representación, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar si tal diferencia es significativa (cfr. Apéndice F), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 46. Validación estadística de actividades cognitivas del grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional

Comparativo entre Actividades Cognitivas		Resultado de la hipótesis estadística
Representación	Tratamiento	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Representación	Conversión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Tratamiento	Conversión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Complejidad conceptual en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

En la tabla 47 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para la complejidad de la comprensión (estructural y operacional) evaluadas con el post-test.

Tabla 47. Índices promedio de dificultad para la complejidad de la comprensión del grupo de control en el post-test.

Complejidad de la comprensión	Índice Promedio de Dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Cantidad de reactivos
Estructural	0.3400	0.0220	0.1485	27
Operacional	0.2843	0.0065	0.0804	7

Con el propósito de establecer si la diferencia existente es significativa se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso (cfr. Apéndice F), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 48. Validación estadística de la complejidad conceptual del grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional

Comparativo entre Complejidad conceptual		Resultado de la hipótesis estadística
Estructura	Operación	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Nivel de dificultad en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

En la tabla 49 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices para el nivel de dificultad de los reactivos del post-test.

Tabla 49. Índices promedio del grupo de control para el nivel de dificultad en el post-test

Nivel de dificultad	Índice Promedio de Dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Cantidad de reactivos
Reproducción	0.3708	0.0113	0.1061	12
Conexión	0.3071	0.0316	0.1777	14
Reflexión	0.3025	0.0088	0.0938	8

Puede notarse que no hay diferencia importante en lo que respecta al nivel de dificultad de los reactivos presentes calificados como de reproducción, conexión y reflexión, tratada a partir del índice promedio de dificultad, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso (cfr. Apéndice F), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 50. Validación estadística del nivel de dificultad entre grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional

Comparativo entre Nivel de dificultad		Resultado de la hipótesis estadística
Reproducción	Conexión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Reproducción	Reflexión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Conexión	Reflexión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Registro inicial en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

En la tabla 51 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro inicial para el instrumento post-test.

Tabla 51. Índice promedio de dificultad para el grupo de control en cuanto al registro inicial de los reactivos en el post-test.

Registro inicial	Índice Promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Cantidad de reactivos
Algebraico	0.3138	0.0155	0.1247	8
Gráfico	0.2727	0.0137	0.1171	11
Lenguaje natural	0.3418	0.0152	0.1233	11
Numérico	0.4750	0.0358	0.1891	4

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al contexto numérico, como registro inicial del reactivo, comparado con el algebraico y el lenguaje natural, pero sobre todo respecto del registro gráfico, tal diferencia es analizada a partir del índice promedio de dificultad y para probar si tales diferencias son significativas se definieron pruebas de hipótesis estadísticas (cfr. Apéndice F), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 52. Validación estadística del registro inicial entre grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional

Comparativo entre Registro Inicial		Resultado de la hipótesis estadística
Algebraico	Lenguaje natural	No hay diferencias significativas
Algebraico	Gráfico	No hay diferencias significativas
Algebraico	Numérico	No hay diferencias significativas
Gráfico	Lenguaje natural	No hay diferencias significativas
Gráfico	Numérico	Si hay diferencias significativas
Lenguaje natural	Numérico	No hay diferencias significativas

Registro final en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional

En la tabla 53 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro final para el instrumento de medición post-test.

Tabla 53. Índice promedio de dificultad para el grupo de control en cuanto al registro final de los reactivos en el post-test.

Registro final	Índice Promedio de Dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Cantidad de reactivos
Algebraico	0.3322	0.0206	0.1437	9
Gráfico	0.3250	0.0144	0.1201	4
Lenguaje natural	0.3192	0.0187	0.1367	12
Numérico	0.3389	0.0266	0.1631	9

Puede notarse que no hay diferencia importante en lo que respecta al índice promedio de dificultad de los distintos registros finales de representación, de cualquier forma se definen pruebas de hipótesis estadísticas (cfr. Apéndice F), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 54. Validación estadística del registro final entre grupos post-test con enfoque de enseñanza tradicional

Comparativo entre Registro Final		Resultado de la hipótesis estadística
Numérico	Algebraico	No hay diferencias significativas
Numérico	Lenguaje natural	No hay diferencias significativas
Numérico	Gráfico	No hay diferencias significativas
Algebraico	Lenguaje natural	No hay diferencias significativas
Algebraico	Gráfico	No hay diferencias significativas
Lenguaje natural	Gráfico	No hay diferencias significativas

4.3 Análisis descriptivo en grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la administración del post-test, toda vez que se había concluido la puesta en escena de la estrategia didáctica y el estudio del fenómeno denominado sistema masa-resorte; por lo que este último se abordó bajo un esquema de enseñanza novedoso apoyado en el uso de la tecnología de la calculadora. Para posteriormente en base a estos resultados poder realizar un comparativo con los grupos en los que se usó un esquema de enseñanza tradicional.

Uniformidad en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

La tabla 55 muestra el número promedio de reactivos correctos que respondieron los grupos con enfoque de enseñanza que incorpora tecnología de la calculadora. La notación 651-E significa que se trata del grupo de estudiantes con registro de identificación 651, estudiantes que abordaron el estudio del fenómeno sistema masa-resorte mediante una estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora.

Tabla 55. Parámetros estadísticos en cuanto a los aciertos obtenidos por los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.

Grupo	Promedio del número de aciertos	Variancia	Desviación estándar	Número de alumnos
651-E	18.2308	20.5256	4.5305	13
657-E	12.1429	38.1429	6.1760	7
658-E	16.6875	59.2958	7.7004	16

Aunque hay diferencias importantes en los promedios de los grupos, se definen pruebas de hipótesis con el propósito de verificar si la diferencia en tales promedios es significativa (cfr. Apéndice G); cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 56. Validación estadística de la uniformidad entre grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

Grupos	Resultado de la hipótesis estadística
651-E y 657-E	Hay diferencias significativas en el puntaje logrado
651-E y 658-E	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado
657-E y 658-E	No hay diferencias significativas en el puntaje logrado

Competencias matemáticas en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

En la tabla 57 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las competencias matemáticas evaluadas a partir del post-test.

Tabla 57. Índices promedio de dificultad en cuanto a las competencias matemáticas de los estudiantes de los grupos experimentales.

Competencias matemáticas	Índice Promedio de Dificultad del grupo experimental	Variancia del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Cantidad de reactivos
Modelar	0.3825	0.0207	0.1438	4
Plantear y resolver problemas	0.4400	0.0048	0.0693	6
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, ejecutar los cálculos	0.5195	0.0274	0.1656	20
Representar	0.5100	0.0199	0.1411	4

Una ilustración gráfica (ver figura 10) permite visualizar claramente que las competencias matemáticas referidas al modelado y al planteamiento y resolución de problemas son las que tienen el más bajo rendimiento por parte de los estudiantes, el resto de las competencias se conservan en equilibrio.

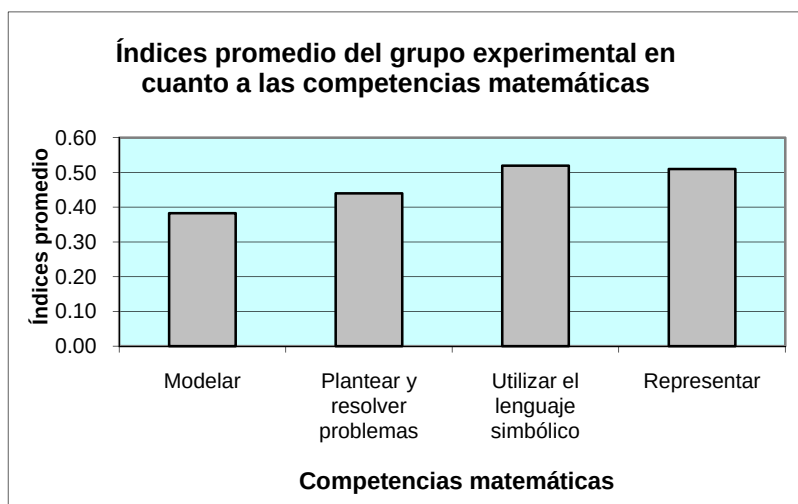


Figura 10. Gráfico de los índices promedio de dificultad contra las competencias matemáticas de los estudiantes de los grupos experimentales.

Puede notarse que hay una diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las competencias matemáticas, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada diferencia en particular caso (cfr. Apéndice G); cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 58. Validación estadística de competencias matemáticas en grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

Comparativo entre Competencias matemática		Resultado de la Hipótesis estadística
Plantear y resolver problemas	Modelar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Plantear y resolver problemas	Representar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Plantear y resolver problemas	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Modelar	Representar	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Modelar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Representar	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y ejecutar los cálculos	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Actividades cognitivas en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

En la tabla 59 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) evaluadas en a partir del post-test.

Tabla 59. Índices promedio de dificultad para las actividades cognitivas de los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.

Actividad cognitiva	Índice Promedio de Dificultad del grupo experimental	Variancia del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Cantidad de reactivos
Representación	0.5656	0.0295	0.1718	9
Tratamiento	0.5017	0.0201	0.1416	12
Conversión	0.4046	0.0135	0.1161	13

Puede notarse diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las actividades cognitivas de conversión contra las actividades de tratamiento y sobre todo de representación, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar si tal diferencia es significativa (cfr. Apéndice G), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 60. Validación estadística de actividades cognitivas del grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

Comparativo entre Actividades Cognitivas		Resultado de la hipótesis estadística
Representación	Tratamiento	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Representación	Conversión	Hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Tratamiento	Conversión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Complejidad conceptual en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

En la tabla 61 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para la complejidad de la comprensión (estructural y operacional) evaluadas con el post-test.

Tabla 61. Índices promedio de dificultad en cuanto a la complejidad de la comprensión de los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.

Complejidad de la comprensión	Índice Promedio de Dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Cantidad de reactivos
Estructural	0.5067	0.0232	0.1524	27
Operacional	0.3843	0.0127	0.1128	7

Con el propósito de establecer si la diferencia existente es significativa se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso (cfr. Apéndice G), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 62. Validación estadística de la complejidad conceptual del grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

Comparativo entre Complejidad conceptual		Resultado de la hipótesis estadística
Estructura	Operación	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Nivel de dificultad en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

En la tabla 63 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices para el nivel de dificultad de los reactivos del post-test.

Tabla 63. Índices promedio de los niveles de dificultad de los reactivos del post-test.

Nivel de dificultad	Índice Promedio de Dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Cantidad de reactivos
Reproducción	0.4925	0.0290	0.1702	12
Conexión	0.5164	0.0255	0.1596	14
Reflexión	0.4038	0.0067	0.0818	8

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al nivel de dificultad de los reactivos presentes calificados como de reflexión contra aquellos etiquetados como de reproducción y conexión, se estima que es natural, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar si en cada caso la diferencia es significativa (cfr. Apéndice G), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 64. Validación estadística del nivel de dificultad entre grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

Comparativo entre Nivel de dificultad		Resultado de la Hipótesis estadística
Reproducción	Conexión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Reproducción	Reflexión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad
Conexión	Reflexión	No hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad

Registro inicial en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

En la tabla 65 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro inicial para el instrumento post-test.

Tabla 65. Índices promedio de dificultad en cuanto a los registros iniciales de los reactivos que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.

Registro inicial	Índice Promedio de Dificultad del grupo experimental	Variancia del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Cantidad de reactivos
Algebraico	0.4488	0.0290	0.1703	8
Gráfico	0.5455	0.0202	0.1421	11
Lenguaje natural	0.4318	0.0188	0.1372	11
Numérico	0.5075	0.0290	0.1704	4

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al contexto del lenguaje natural, como registro inicial del reactivo, comparado con el numérico, pero sobre todo respecto del registro gráfico, tal diferencia es analizada a partir del índice promedio de dificultad y para probar si tales diferencias son significativas se definieron pruebas de hipótesis estadísticas (cfr. Apéndice G), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 66. Validación estadística del registro inicial entre grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

Comparativo entre Registro Inicial		Resultado de la hipótesis estadística
Algebraico	Lenguaje natural	No hay diferencias significativas
Algebraico	Gráfico	No hay diferencias significativas
Algebraico	Númerico	No hay diferencias significativas
Gráfico	Lenguaje natural	No hay diferencias significativas
Gráfico	Númerico	No hay diferencias significativas
Lenguaje natural	Númerico	No hay diferencias significativas

Registro final en los grupos de post-test con enfoque de enseñanza tradicional con tecnología de la calculadora

En la tabla 67 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro final para el instrumento de medición post-test.

Tabla 67. Índices promedio de dificultad en cuanto a los registros finales de los reactivos que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimentales en el post-test.

Registro final	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Cantidad de reactivos
Algebraico	0.4144	0.0171	0.1309	9
Gráfico	0.5350	0.0158	0.1256	4
Lenguaje natural	0.5675	0.0225	0.1499	12
Numérico	0.4100	0.0182	0.1349	9

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al índice promedio de dificultad de los distintos registros finales de representación, en particular el registro numérico y algebraico se encuentran por debajo del resto de los registros de representación, de cualquier forma se definen pruebas de hipótesis estadísticas para verificar si tales diferencias son significativas (cfr. Apéndice G), cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 68. Validación estadística del registro final entre grupos post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora

Comparativo entre registro final		Resultado de la hipótesis estadística
Numérico	Algebraico	No hay diferencias significativas
Numérico	Lenguaje natural	Hay diferencias significativas
Numérico	Gráfico	No hay diferencias significativas
Algebraico	Lenguaje natural	Hay diferencias significativas
Algebraico	Gráfico	No hay diferencias significativas
Lenguaje natural	Gráfico	No hay diferencias significativas

4.4 Análisis comparativo de grupos con enfoque tradicional y con estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora.

A continuación se presentan el comparativo de las eficiencias de conocimientos que alcanzaron los estudiantes desde la perspectiva general de aquellos que abordaron el tema de estudio bajo un esquema tradicional y el otro con tecnología de la calculadora.

En este apartado se presentan tres análisis, el primero de ellos está referido a la eficiencia de conocimientos lograda por los distintos subgrupos en cuanto que se identifican por haber tratado el fenómeno sistema masa-resorte con enfoque tradicional y otro que incorpora tecnología de la calculadora, el segundo es un comparativo general, en donde se integran todos los estudiantes que participaron en dos grupos distinguidos por el enfoque de enseñanza utilizado, y finalmente, un comparativo de los dos grupos citados a partir de las competencias matemáticas, la actividad cognitiva, la complejidad de la comprensión, el nivel de dificultad de los reactivos, los registros de representación inicial y final.

4.4.1 Análisis comparativo específico entre los subgrupos de post-test

La tabla 69 muestra los parámetros estadísticos (índice promedio de dificultad, variancia y desviación estándar) obtenidos de los subgrupos.

Tabla 69. Parámetros estadísticos en cuanto al número de aciertos que obtuvieron los estudiantes en los grupos de control y piloto en el post-test.

Subgrupo	Promedio del número de aciertos	Variancia	Desviación estándar	Número de alumnos
651-E	18.2308	20.5256	4.5305	13
657-E	12.1429	38.1429	6.1760	7
658-E	16.6875	59.2958	7.7004	16
651-T	13.3750	57.6964	7.5958	8
657-T	10.8889	15.8611	3.9826	9
661-T	10.1538	11.6410	3.4119	13

Es de observarse la diferencia en cuanto a los promedio de reactivos correctos que obtuvieron los estudiantes en el post-test en cada uno de los subgrupos, se destaca y puede verse en la figura 11 la mayor eficiencia por el grupo 651-E, estudiantes que abordaron el tema de estudio mediante la estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora.

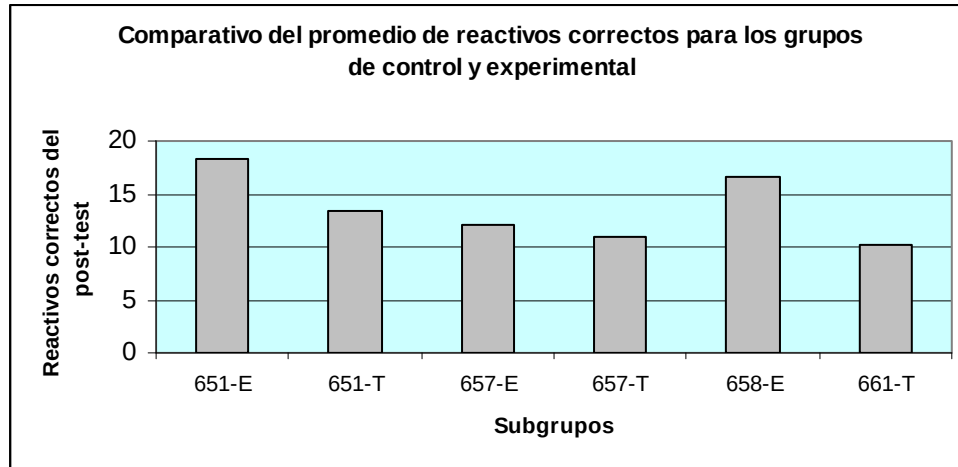


Figura 11. Gráfico comparativo en cuanto al promedio de reactivos correctos por los grupos de control y piloto

Para verificar que la diferencia de los puntajes logrados por los estudiantes en los distintos subgrupos es significativa se han definido las siguientes pruebas de hipótesis estadísticas.

1. Prueba de hipótesis para los grupos 651-E y 651-T, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-E y 651-T en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-E y 651-T en el post-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 19$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.093$ o $t > 2.093$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(12)(4.5305)^2 + (7)(7.5958)^2}{13 + 8 - 2}}$, luego $Sp = 5.8497$

El estadístico $t = \frac{(18.2308 - 13.3750)}{5.8497 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{8}}}$, por lo tanto $t = 2.2806$

Decisión: Como el estadístico es $t = 2.2806$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-E y 651-T.

2. Prueba de hipótesis para los grupos 657-E y 657-T, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657-E y 657-T en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657-E y 657-T en el post-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 14$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.145$ o $t > 2.145$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(6)(6.1760)^2 + (7)(3.9826)^2}{7 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 4.9272$

El estadístico $t = \frac{(12.1429 - 10.8889)}{4.9272 \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = 0.5050$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.5050$, se acepta la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657-E y 657-T.

3. Prueba de hipótesis para los grupos 658-E y 661-T, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 658-E y 661-T en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 658-E y 661-T en el post-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 27$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.052$ o $t > 2.052$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(15)(7.7004)^2 + (12)(3.4119)^2}{16 + 13 - 2}}$, luego $Sp = 6.1738$

El estadístico $t = \frac{(16.6875 - 10.1538)}{6.1738 \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{13}}}$, por lo tanto $t = 2.8344$

Decisión: Como el estadístico es $t = 2.8344$, se rechaza la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 658-E y 661-T.

4.4.2 Comparativo general de enfoques de enseñanza tradicional y con tecnología de calculadora

Con el propósito de tener una visión más general de los resultados obtenidos, se han integrado los subgrupos y se calcularon nuevamente los parámetros estadísticos. A continuación se señalan (ver tabla 70).

Tabla 70. Parámetros estadísticos en cuanto al número de aciertos obtenidos por los estudiantes en el post-test.

Grupo	Promedio del número de aciertos	Variancia	Desviación estándar	Número de alumnos
Grupo experimental (E)	16.3611	43.8944	6.6253	36
Grupo de control (T)	11.2333	24.9437	4.9944	30

La existencia de una diferencia significativa se revisa mediante una prueba de hipótesis con el estadístico z , toda vez que ambas muestras son iguales o mayores que 30 estudiantes.

$$z = \frac{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} \right) + \left(\frac{\sigma_2^2}{n_2} \right)}}$$

Donde:

$\bar{x}_1$ = Promedio del puntaje (número de respuestas correctas) para el primer grupo

$\bar{x}_2$ = Promedio del puntaje para el segundo grupo

n_1 = Número de estudiantes del primer grupo

n_2 = Número de estudiantes del segundo grupo

σ_1^2 = Variancia del puntaje logrado por el primer grupo

σ_2^2 = Variancia del puntaje logrado por el segundo grupo

1. Prueba de hipótesis para los grupos experimental y de control, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos experimental y de control en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos experimental y de control en el post-test.

Al sustituir los valores tenemos que, $z = \frac{(16.3611 - 11.2333)}{\sqrt{\left(\frac{43.8944}{36}\right) + \left(\frac{24.9437}{30}\right)}}$, por lo que $z = 3.5807$

Nivel de significancia $\alpha = 0.05$

Dado que la región de rechazo es: $z < -1.96$ o $z > 1.96$

Decisión: Como el estadístico es $z = 3.5807$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes del grupo experimental contra el grupo de control.

4.4.3 Comparativo de índices de competencias matemáticas entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza

En la tabla 71 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimental y de control respecto de los índices de dificultad para cada una de las competencias matemáticas evaluadas a partir del post-test.

Tabla 71. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto a las competencias matemáticas de los grupos de control y piloto.

Competencias matemáticas	Índice promedio de dificultad del grupo experimental	Variancia del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Número de alumnos del grupo experimental	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Número de alumnos del grupo de control
Modelar	0.3825	0.0207	0.1438	36	0.3250	0.0351	0.1873	30
Plantear y resolver problemas	0.4400	0.0048	0.0693	36	0.2780	0.0021	0.0455	30
Utilizar el lenguaje simbólico	0.5195	0.0274	0.1656	36	0.3325	0.0227	0.1505	30
Representar	0.5100	0.0199	0.1411	36	0.3333	0.0212	0.1457	30

La figura 12 muestra claramente la diferencia de la eficiencia de conocimientos en cuanto a las competencias matemáticas de los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control.

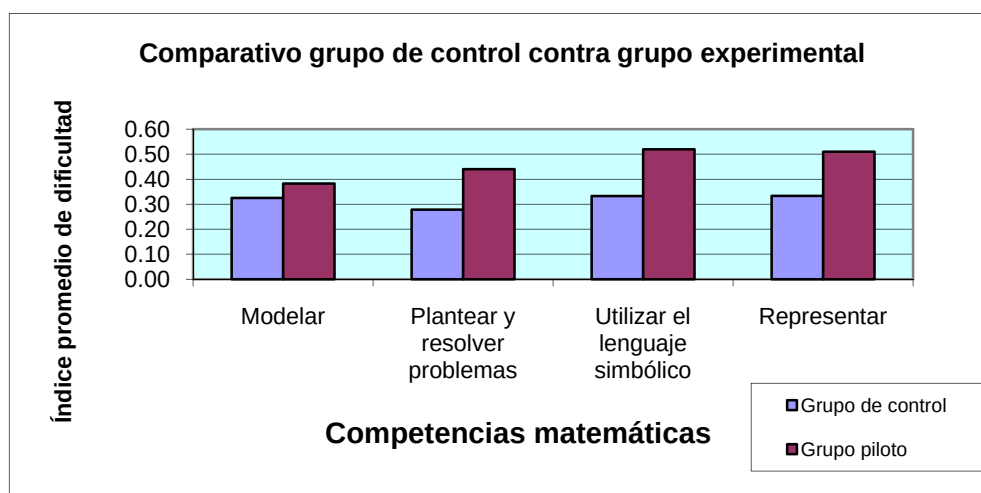


Figura 12. Comparativo de los índices promedio de dificultad en cuanto a las competencias matemáticas de los estudiantes del grupo de control y piloto en el post-test.

Para evidenciar dichas diferencias significativas de los índices promedio que obtuvieron los grupos experimental y de control, se definen las pruebas de hipótesis estadísticas siguientes.

1. Prueba de hipótesis referida a la competencia matemática de modelado, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de modelado.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de modelado.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

Tenemos que $z = \frac{(0.3825 - 0.3250)}{\sqrt{\left(\frac{0.0207}{36}\right) + \left(\frac{0.0351}{30}\right)}}$, por lo que $z = 1.3764$

Decisión: Como el estadístico es $z = 1.3764$, se acepta la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de modelado.

2. Prueba de hipótesis referida a la competencia matemática del planteamiento y resolución de problemas, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de plantear y resolver problemas.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de plantear y resolver problemas.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.4400 - 0.2780)}{\sqrt{\left(\frac{0.0048}{36}\right) + \left(\frac{0.0021}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 11.3608$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 11.3608$, se rechaza la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de planteamiento y resolución de problemas.

3. Prueba de hipótesis referida a la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de utilizar el lenguaje simbólico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de utilizar el lenguaje simbólico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

Tenemos que $z = \frac{(0.5195 - 0.3325)}{\sqrt{\left(\frac{0.0274}{36}\right) + \left(\frac{0.0227}{30}\right)}}$, por lo que $z = 4.8013$

Decisión: Como el estadístico es $z = 4.8013$, se rechaza la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico.

4. Prueba de hipótesis referida a la competencia matemática de representación para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de representar.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de representar.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z :

Tenemos que $z = \frac{(0.5100 - 0.3333)}{\sqrt{\left(\frac{0.0199}{36}\right) + \left(\frac{0.0212}{30}\right)}}$, por lo que $z = 4.9759$

Decisión: Como el estadístico es $z = 4.9759$, se rechaza la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto a la competencia matemática de representación.

4.4.4 Comparativo de índices de actividad cognitiva entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza

En la tabla 72 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimental y de control respecto de los índices de dificultad para cada una de las actividades cognitivas evaluadas a partir del post-test.

Tabla 72. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto a la actividad cognitiva de los estudiantes del grupo de control y piloto en el post-test.

Actividad cognitiva	Índice promedio de dificultad del grupo experimental	Variancia del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Número de alumnos del grupo experimental	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Número de alumnos del grupo de control
Representación	0.5656	0.0295	0.1718	36	0.3833	0.0145	0.1203	30
Tratamiento	0.5017	0.0201	0.1416	36	0.3367	0.0281	0.1676	30
Conversión	0.4046	0.0135	0.1161	36	0.2831	0.0125	0.1116	30

La figura 13 muestra claramente la diferencia de la eficiencia de conocimientos en cuanto a las actividades cognitivas de los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control.

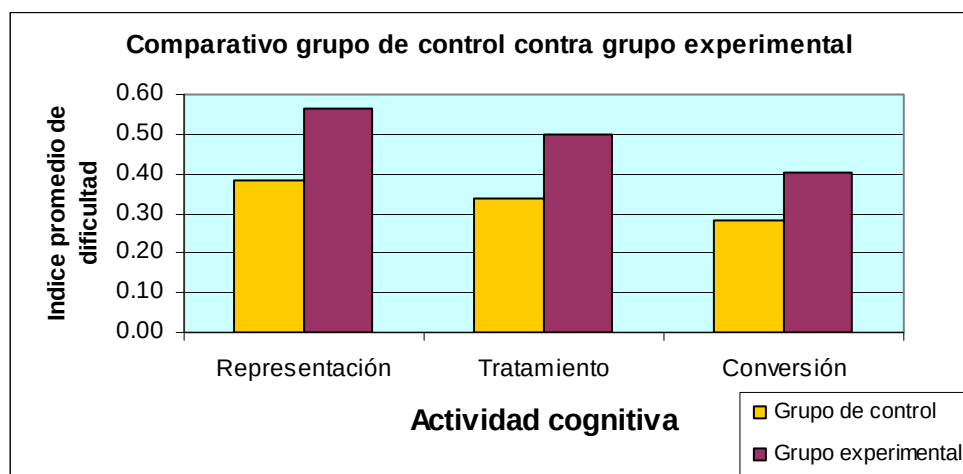


Figura 13. Comparativo de los índices promedio de dificultad en cuanto a la actividad cognitiva de los estudiantes del grupo de control y piloto en el post-test.

Para evidenciar dichas diferencias significativas de los índices promedio que obtuvieron el grupo experimental y de control, se definen las pruebas de hipótesis estadísticas siguientes.

1. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de representación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la actividad cognitiva de representación.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la actividad cognitiva de representación.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.5656 - 0.3833)}{\sqrt{\left(\frac{0.0295}{36}\right) + \left(\frac{0.0145}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 5.0500$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 5.0500$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto a la actividad cognitiva de representación.

2. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de tratamiento, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la actividad cognitiva de tratamiento.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la actividad cognitiva de tratamiento.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

Tenemos que $z = \frac{(0.5017 - 0.3367)}{\sqrt{\left(\frac{0.0201}{36}\right) + \left(\frac{0.0281}{30}\right)}}$, por lo que $z = 4.2694$

Decisión: Como el estadístico es $z = 4.2694$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto a la actividad cognitiva de tratamiento.

3. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de conversión, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la actividad cognitiva de conversión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la actividad cognitiva de conversión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

Tenemos que $z = \frac{(0.4046 - 0.2831)}{\sqrt{\left(\frac{0.0135}{36}\right) + \left(\frac{0.0125}{30}\right)}}$, por lo que $z = 4.3253$

Decisión: Como el estadístico es $z = 4.3253$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto a la actividad cognitiva de conversión.

4.4.5 Comparativo de índices de complejidad de la comprensión entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza

En la tabla 73 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimental y de control respecto de los índices de dificultad para la complejidad de la comprensión, sea esta estructural u operacional evaluadas a partir del post-test.

Tabla 73. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto a la complejidad de la comprensión de los estudiantes del grupo experimental y de control.

Complejidad de la comprensión	Índice promedio de dificultad del grupo experimental	Variancia del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Número de alumnos del grupo experimental	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Número de alumnos del grupo de control
Estructural	0.5067	0.0232	0.1524	36	0.3400	0.0220	0.1485	30
Operacional	0.3843	0.0127	0.1128	36	0.2843	0.0065	0.0804	30

En la figura 14 se muestra claramente la diferencia de la eficiencia de conocimientos en cuanto a la complejidad de la comprensión, sea esta estructural u operacional evaluadas a partir del post-test para los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control.

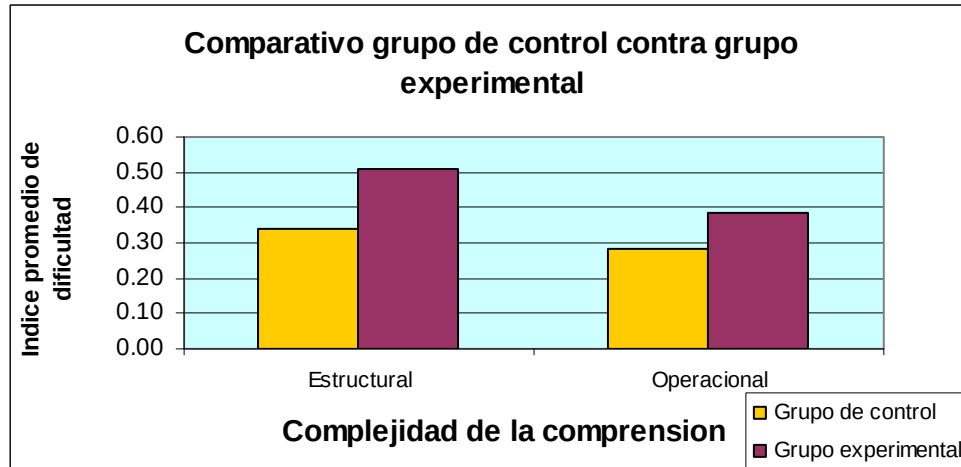


Figura 14. Comparativo de los índices promedio de dificultad en cuanto a la complejidad de la comprensión de los estudiantes del grupo de control y piloto en el post-test.

Para evidenciar dichas diferencias significativas de los índices promedio que obtuvieron los grupos experimental y de control, se definen las pruebas de hipótesis estadísticas siguientes.

1. Prueba de hipótesis referida a la complejidad de la comprensión, específicamente la estructural, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la complejidad estructural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la complejidad estructural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.5067 - 0.3400)}{\sqrt{\left(\frac{0.0232}{36}\right) + \left(\frac{0.0220}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 4.4866$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 4.4866$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto a la complejidad estructural.

2. Prueba de hipótesis referida a la complejidad de la comprensión, específicamente la operacional, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la complejidad operacional.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto a la complejidad operacional.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.3843 - 0.2843)}{\sqrt{\left(\frac{0.0127}{36}\right) + \left(\frac{0.0065}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 4.1923$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 4.1923$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto a la complejidad operacional.

4.4.6 Comparativo de índices del nivel de dificultad entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza

En la tabla 74 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimental y de control respecto de los índices para la dificultad de los reactivos, sea esta de reproducción, conexión o reflexión evaluadas a partir del post-test.

Tabla 74. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto a los niveles de dificultad de los reactivos en el post-test, para los estudiantes del grupo de control y experimental.

Nivel de dificultad	Índice promedio de dificultad del grupo experimental	Variancia del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Número de alumnos del grupo experimental	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Número de alumnos del grupo de control
Reproducción	0.4925	0.0290	0.1702	36	0.3708	0.0113	0.1061	30
Conexión	0.5164	0.0255	0.1596	36	0.3071	0.0316	0.1777	30
Reflexión	0.4038	0.0067	0.0818	36	0.3025	0.0088	0.0938	30

La figura 15 muestra claramente la diferencia en los índices promedio en cuanto los niveles de dificultad de los reactivos evaluados a partir del post-test para los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control.

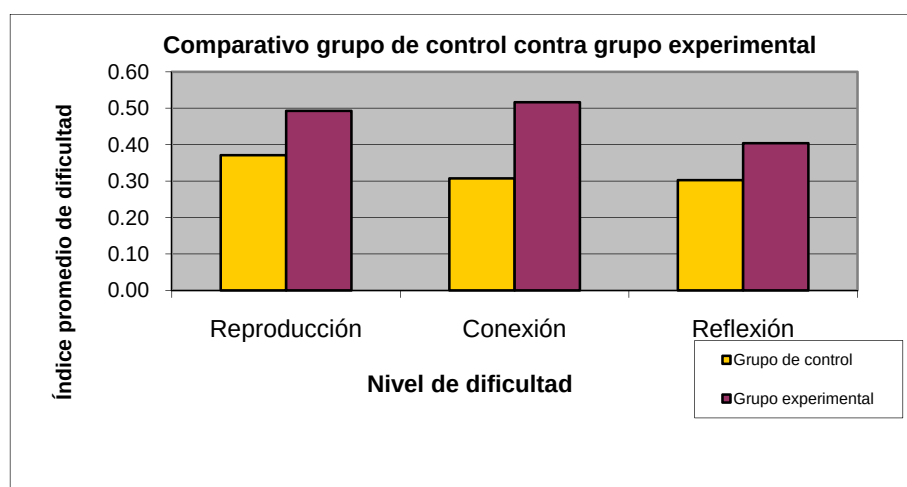


Figura 15. Comparativo gráfico de los índices promedio en cuanto al nivel de dificultad de los reactivos del post-test, para los estudiantes del grupo de control y piloto.

Para evidenciar si dichas diferencias son significativas en cuanto a los índices promedio de los niveles de dificultad que obtuvieron los grupos experimental y de control, se definen las pruebas de hipótesis estadísticas siguientes.

1. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad de reproducción, para el análisis de la relación del índice promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al nivel de reproducción.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al nivel de reproducción.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.4925 - 0.3708)}{\sqrt{\left(\frac{0.0290}{36}\right) + \left(\frac{0.0113}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 3.5417$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 3.5417$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al nivel de reproducción.

2. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad de conexión, para el análisis de la relación del índice promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al nivel de conexión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al nivel de conexión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.5164 - 0.3071)}{\sqrt{\left(\frac{0.0255}{36}\right) + \left(\frac{0.0316}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 4.9887$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 4.9887$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al nivel de conexión.

3. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad de reflexión, para el análisis de la relación del índice promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al nivel de reflexión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al nivel de reflexión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

Tenemos que $z = \frac{(0.4038 - 0.3025)}{\sqrt{\left(\frac{0.0067}{36}\right) + \left(\frac{0.0088}{30}\right)}}$, por lo que $z = 4.6273$

Decisión: Como el estadístico es $z = 4.6273$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al nivel de reflexión.

4.4.7 Comparativo de índices del registro inicial entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza

En la tabla 75 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimental y de control respecto de los índices de dificultad para los registros iniciales de los reactivos a partir del post-test.

Tabla 75. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto al registro inicial de los reactivos del post-test de los estudiantes del grupo de control y piloto.

Registro inicial	Índice promedio de dificultad del grupo experimental	Variancia del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Número de alumnos del grupo experimental	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Número de alumnos del grupo de control
Algebraico	0.4488	0.0290	0.1703	36	0.3138	0.0155	0.1247	30
Gráfico	0.5455	0.0202	0.1421	36	0.2727	0.0137	0.1171	30
Lenguaje natural	0.4318	0.0188	0.1372	36	0.3418	0.0152	0.1233	30
Numérico	0.5075	0.0290	0.1704	36	0.4750	0.0358	0.1891	30

La gráfica de la figura 16 muestra claramente la diferencia en los índices promedio de dificultad de los registros iniciales en los reactivos del post-test para los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control.

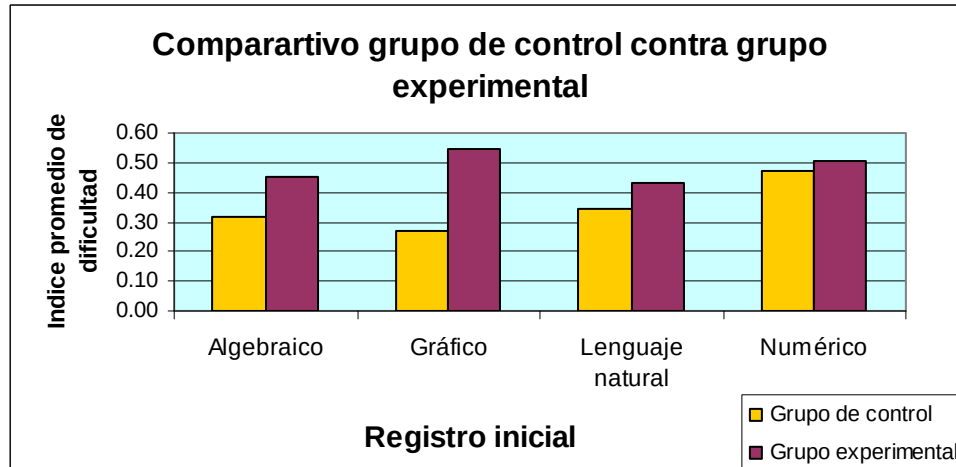


Figura 16. Comparativo gráfico de los índices promedio de dificultad en cuanto al registro inicial de los reactivos del post-test, de los estudiantes del grupo de control y piloto.

Para evidenciar si dichas diferencias son significativas en cuanto a los índices promedio de dificultad que obtuvieron los grupos experimental y de control, se definen las pruebas de hipótesis estadísticas siguientes.

1. Prueba de hipótesis referida al registro inicial algebraico, para el análisis de la relación del índice de dificultad promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial algebraico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial algebraico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.4488 - 0.3138)}{\sqrt{\left(\frac{0.0290}{36}\right) + \left(\frac{0.0155}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 3.7102$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 3.7102$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial algebraico.

2. Prueba de hipótesis referida al registro inicial gráfico, para el análisis de la relación del índice de dificultad promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z :

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.5455 - 0.2727)}{\sqrt{\left(\frac{0.0202}{36}\right) + \left(\frac{0.0137}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 8.5471$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 8.5471$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial gráfico.

3. Prueba de hipótesis referida al registro inicial de lenguaje natural, para el análisis de la relación del índice de dificultad promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial de lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro de lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.4318 - 0.3418)}{\sqrt{\left(\frac{0.0188}{36}\right) + \left(\frac{0.0152}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 2.8053$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 2.8053$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial de lenguaje natural.

4. Prueba de hipótesis referida al registro inicial numérico, para el análisis de la relación del índice de dificultad promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

Tenemos que $z = \frac{(0.5075 - 0.4750)}{\sqrt{\left(\frac{0.0290}{36}\right) + \left(\frac{0.0358}{30}\right)}}$, por lo que $z = 0.7270$

Decisión: Como el estadístico es $z = 0.7270$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial numérico.

4.4.8 Comparativo de índices del registro final entre grupos post-test de ambos enfoques de enseñanza

En la tabla 76 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes de los grupos experimental y de control respecto de los índices de dificultad para los registros finales de los reactivos a partir del post-test.

Tabla 76. Comparativo de los parámetros estadísticos en cuanto al registro final de los reactivos del post-test, de los estudiantes del grupo piloto y de control.

Registro final	Índice promedio de dificultad del grupo experimental	Variancia del grupo experimental	Desviación estándar del grupo experimental	Número de alumnos del grupo experimental	Índice promedio de dificultad del grupo de control	Variancia del grupo de control	Desviación estándar del grupo de control	Número de alumnos del grupo de control
Algebraico	0.4144	0.0171	0.1309	36	0.3322	0.0206	0.1437	30
Gráfico	0.5350	0.0158	0.1256	36	0.3250	0.0144	0.1201	30
Lenguaje natural	0.5675	0.0225	0.1499	36	0.3192	0.0187	0.1367	30
Numérico	0.4100	0.0182	0.1349	36	0.3389	0.0266	0.1631	30

La gráfica de la figura 17 muestra claramente la diferencia en los índices promedio de dificultad de los registros finales en los reactivos del post-test para los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control.

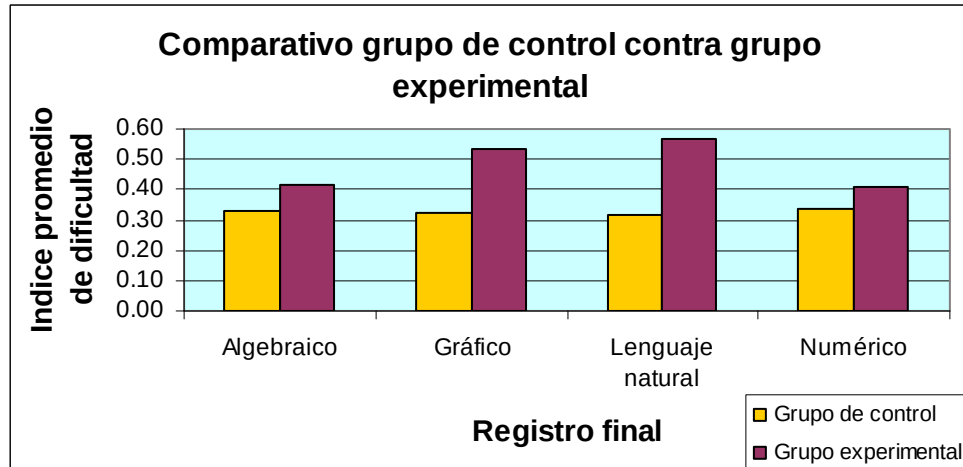


Figura 17. Gráfico comparativo de los índices promedio de dificultad en cuanto al registro final de los reactivos en el post-test.

Para evidenciar si dichas diferencias son significativas en cuanto a los índices promedio de dificultad que obtuvieron los grupos experimental y de control, se definen las pruebas de hipótesis estadísticas siguientes.

1. Prueba de hipótesis referida al registro final algebraico, para el análisis de la relación del índice de dificultad promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final algebraico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final algebraico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.4144 - 0.3322)}{\sqrt{\left(\frac{0.0171}{36}\right) + \left(\frac{0.0206}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 2.4100$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 2.4100$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final algebraico.

2. Prueba de hipótesis referida al registro final gráfico, para el análisis de la relación del índice de dificultad promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z :

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.5350 - 0.3250)}{\sqrt{\left(\frac{0.0158}{36}\right) + \left(\frac{0.0144}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 6.9269$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 6.9269$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final gráfico.

3. Prueba de hipótesis referida al registro final de lenguaje natural, para el análisis de la relación del índice de dificultad promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final de lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final de lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

$$\text{Tenemos que } z = \frac{(0.5675 - 0.3192)}{\sqrt{\left(\frac{0.0225}{36}\right) + \left(\frac{0.0187}{30}\right)}}, \text{ por lo que } z = 7.0320$$

Decisión: Como el estadístico es $z = 7.0320$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro inicial de lenguaje natural.

4. Prueba de hipótesis referida al registro final numérico, para el análisis de la relación del índice de dificultad promedio obtenido por los estudiantes del grupo experimental y de control en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad obtenido en el post-test por los estudiantes del grupo experimental contra los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $z < -1.960$ o $z > 1.960$

Al sustituir los valores para calcular el estadístico z:

Tenemos que $z = \frac{(0.4100 - 0.3389)}{\sqrt{\left(\frac{0.0182}{36}\right) + \left(\frac{0.0266}{30}\right)}}$, por lo que $z = 1.9061$

Decisión: Como el estadístico es $z = 1.9061$, se acepta la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes del grupo experimental y los estudiantes del grupo de control en cuanto al registro final numérico.

4.5 Resultados de la encuesta para evaluar la estrategia didáctica y su aplicación durante el proceso de enseñanza del fenómeno denominado sistema masa-resorte.

Con el propósito de conocer la percepción y opinión de los estudiantes respecto a la implementación de la estrategia didáctica, se elaboró una encuesta alrededor de las actividades de aprendizaje en conjunto con la incorporación de la calculadora. Los resultados de cada uno de los reactivos de la encuesta (cfr. apéndice D) se exhiben en este apartado.

Se encontró que un 78.6 % está totalmente de acuerdo en considerar importante que en los cursos se incorporen nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mientras que el 21.4 % está de acuerdo (ver figura 18).

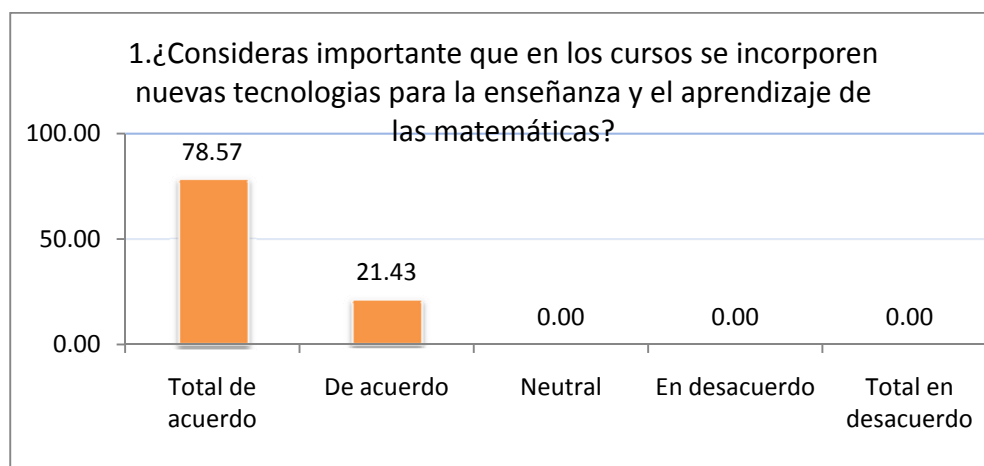


Figura 18. Importancia de que en los cursos de matemáticas se incorpore nuevas tecnologías.

Se obtuvo que el 32.1 % está totalmente de acuerdo en que el tiempo que se utilizó durante la aplicación de la estrategia didáctica fue el adecuado, el 50 % de acuerdo, el 7.1% calificó como neutral el tiempo que se utilizó, mientras que el 10.7 % está en desacuerdo (ver figura 19). Lo anterior evidencia desde la perspectiva de los estudiantes incrementar el tiempo dedicado a la implementación de la estrategia didáctica.

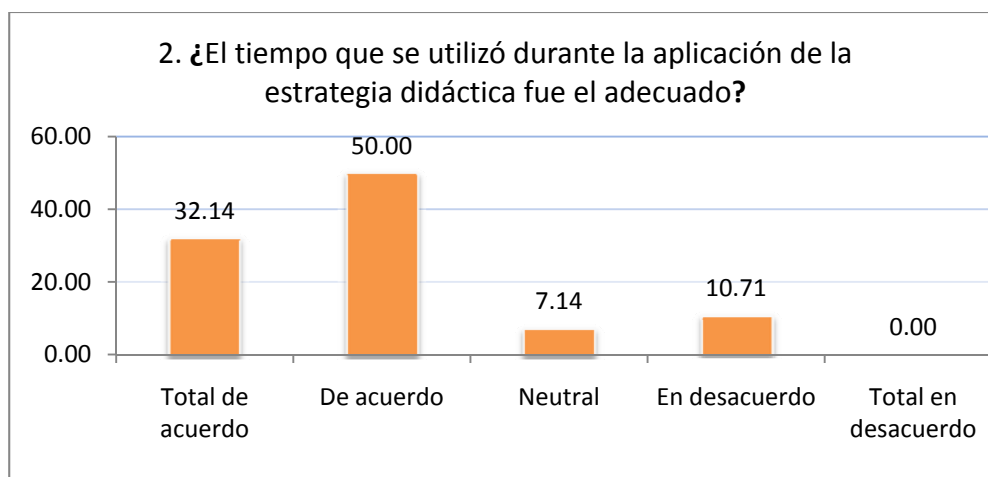


Figura 19. Tiempo utilizado para la implementación de la estrategia didáctica

El 57.1 % de los estudiantes estuvieron totalmente de acuerdo con la organización en el proceso de implementación de la estrategia didáctica, mientras que el 35.7 % estuvo de acuerdo y solo el 7.1 % manifiesta una condición neutral de dicha organización (ver figura 20).

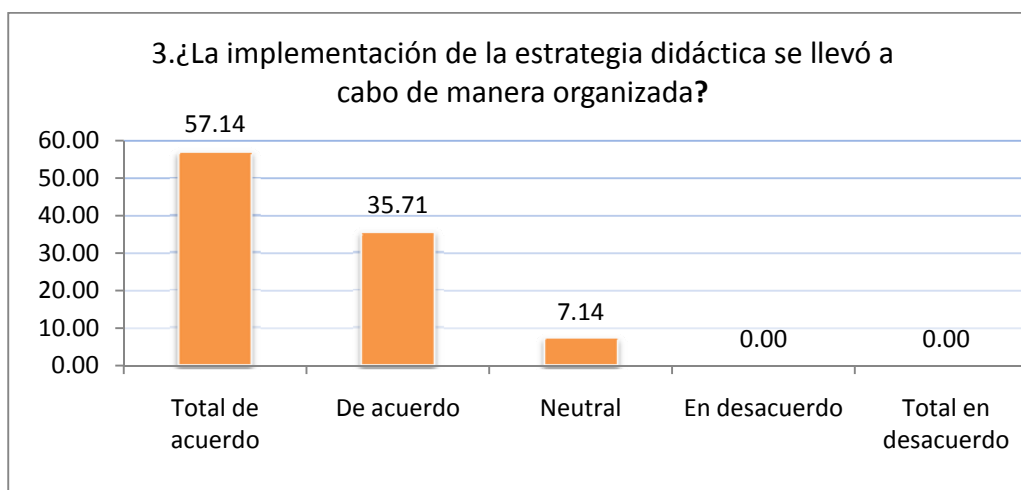


Figura 20. Organización de la implementación de la estrategia didáctica

El 39.3 % de los alumnos coincidió en estar totalmente de acuerdo en cuanto el equipo e instalaciones del laboratorio de matemáticas, lugar donde se llevó a cabo la implementación de la estrategia didáctica, de acuerdo el 53.6 % y neutral el 7.1 % (ver figura 21).

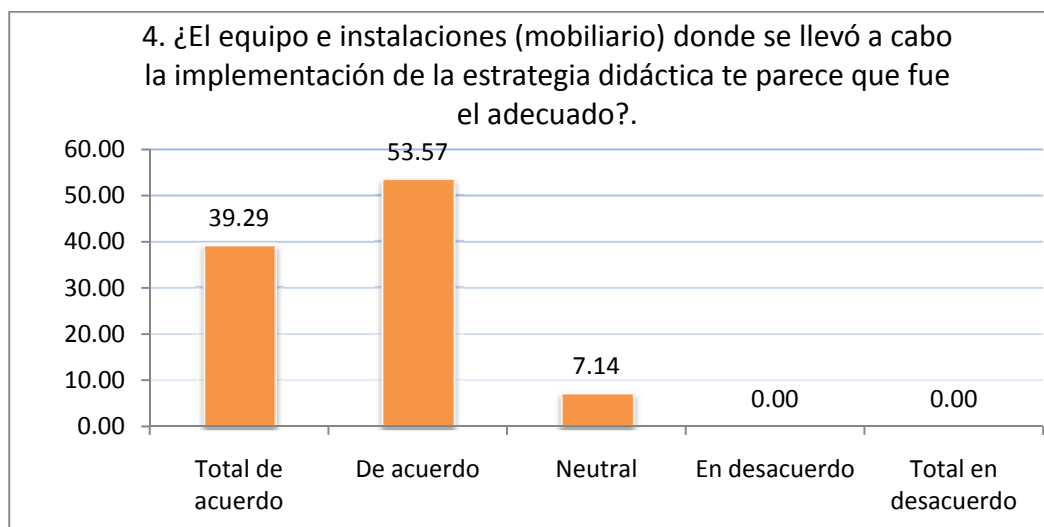


Figura 21. Equipo, mobiliario e instalaciones con que se llevó a cabo la implementación de la estrategia didáctica.

Lo anterior es un indicador de que las instalaciones y disposición del mobiliario deben mejorarse, por ejemplo, cambiar mesabancos por mesas de trabajo, así como instalar pantalla para las proyecciones mediante cañón de video, en vez de utilizar el pizarrón para esta acción.

El 89.3 % de los estudiantes estuvieron totalmente de acuerdo con el instructor que participó en la implementación de la estrategia didáctica contando con los conocimientos para tal efecto, solo el 10.7 % considero estar de acuerdo (ver figura 22).

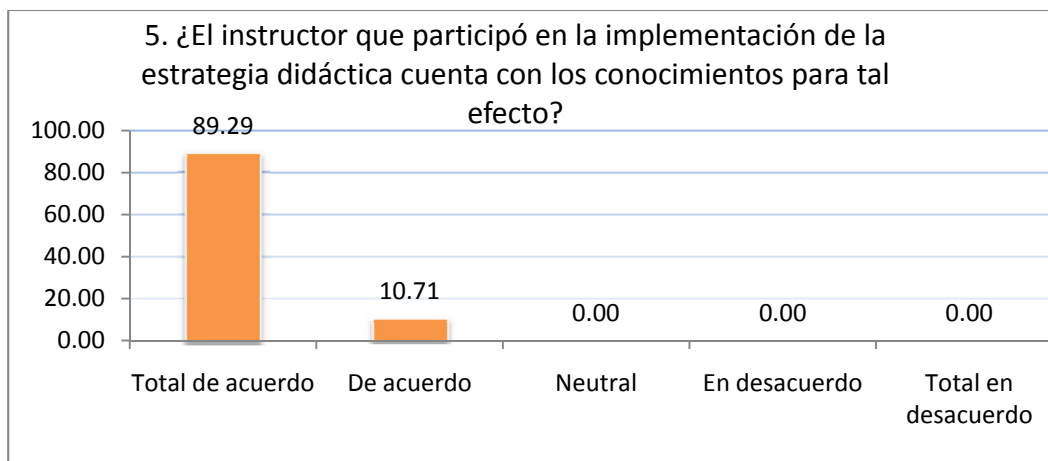


Figura 22. Conocimientos del instructor durante la implementación de la estrategia didáctica

En cuanto a la participación (del estudiante) en la estrategia didáctica que incorpora la calculadora, el 39.3 % está totalmente de acuerdo en que este medio promueve el interés por el estudio de las ecuaciones diferenciales, el 50 % de acuerdo y solamente el 10.7 considera una respuesta neutral al respecto (ver figura 23).

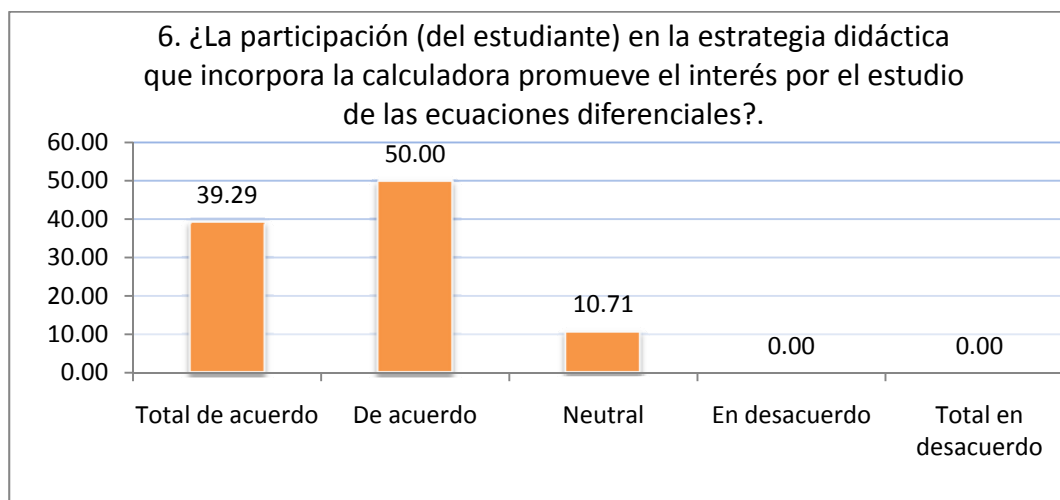


Figura 23. Promoción del estudiante para con las ecuaciones diferenciales

El 42.9 % de los alumnos considera que la participación en la estrategia didáctica que incorpora la calculadora mejora las habilidades y conocimientos de matemáticas, particularmente en ecuaciones diferenciales, el 50 % esta de acuerdo con esta postura y solo el 7.1 % conserva una postura neutral (ver figura 24).

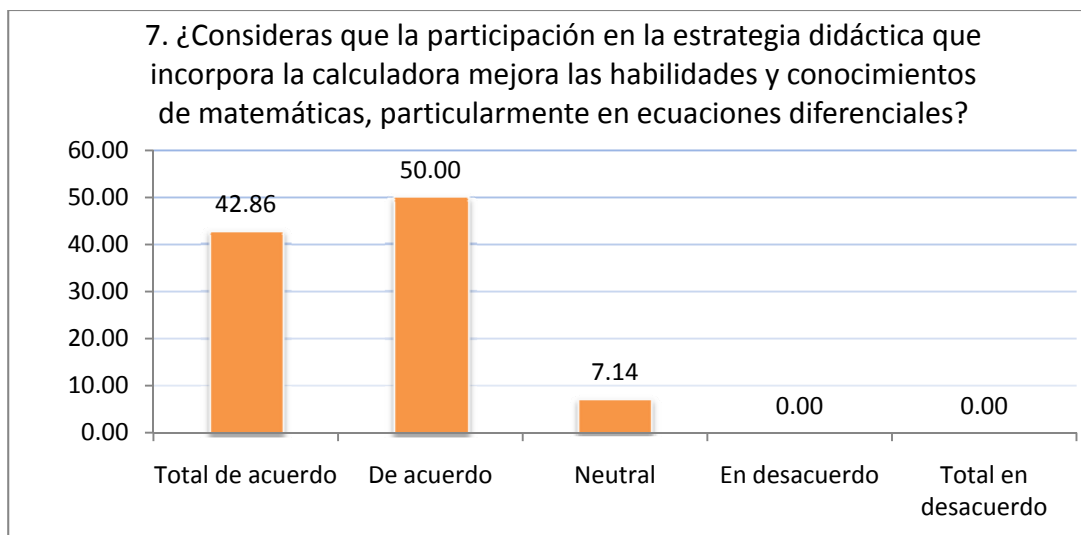


Figura 24. Mejoramiento de las habilidades matemáticas de los estudiantes a partir de la incorporación de la calculadora.

El 46.4 % de los estudiantes participaría en un curso de matemáticas que esté basado en su totalidad en estrategias didácticas que incorporen tecnología de la calculadora, el 28.6 % está de acuerdo, y el 25 % se considera neutral en este rubro (ver figura 25).

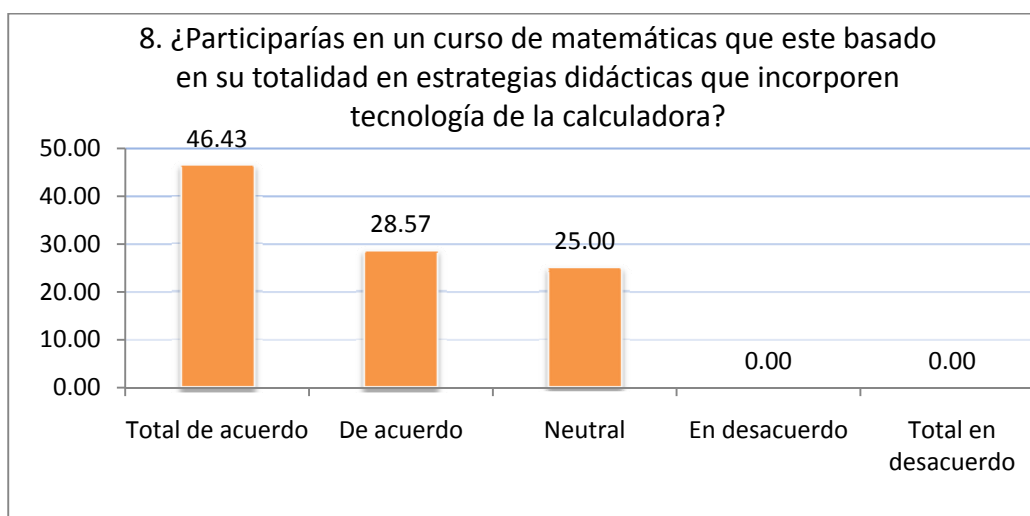


Figura 25. Participación del estudiante en cursos asistidos totalmente con tecnología de la calculadora.

Respecto a la incorporación de la calculadora en el estudio de las ecuaciones diferenciales (particularmente las aplicaciones de segundo orden) el 50 % está totalmente de acuerdo en que esta permite acercarnos al conocimiento de manera más sencilla y atractiva, el 39.3 % está de acuerdo y el 10.7 % conserva una postura neutral (ver figura 26).

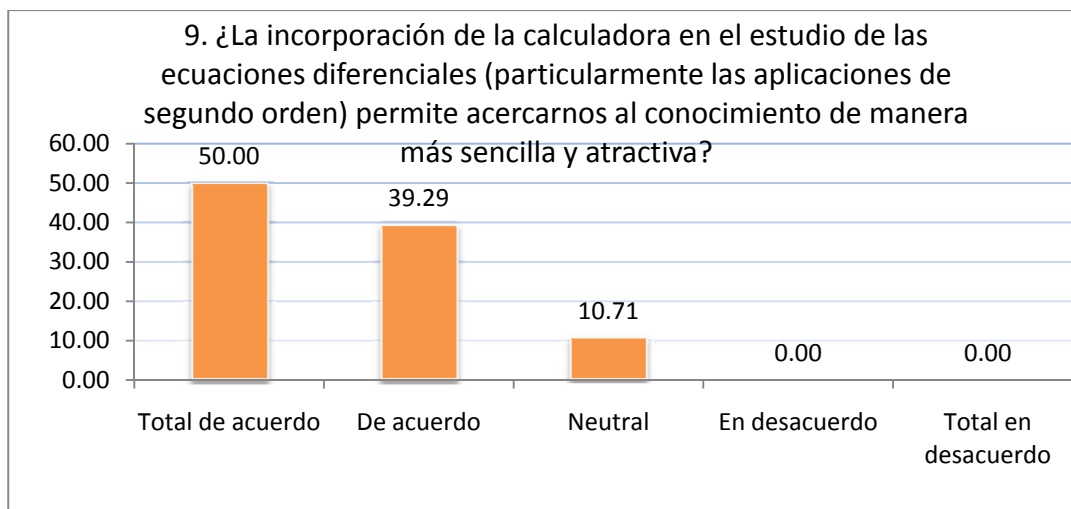


Figura 26. Acercamiento al conocimiento de manera sencilla y atractiva a través de la calculadora.

El 32.1 % está totalmente de acuerdo en considerar que las habilidades y conocimientos adquiridos a través de esta estrategia didáctica que incorpora calculadora son de un nivel superior comparado con las habilidades y conocimientos adquiridos en curso tradicional que excluye la calculadora, el 42.9 % está de acuerdo, el 14.3 % emite un juicio neutral al respecto y el 10.7 % está en desacuerdo (ver figura 27).

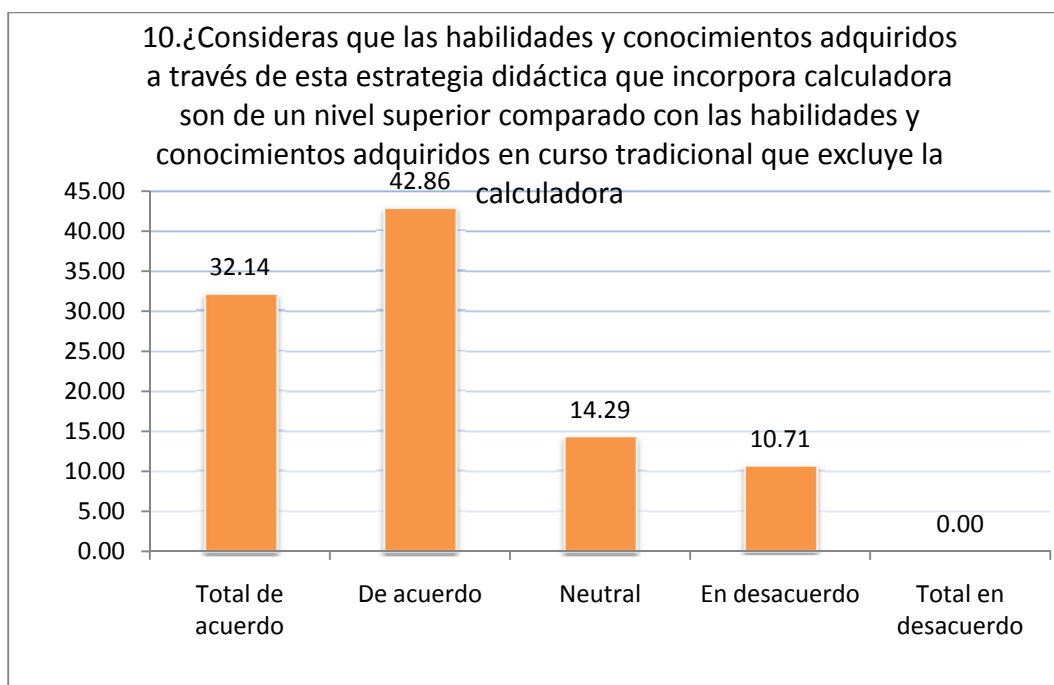


Figura 27. Habilidades y conocimientos de nivel superior

Una percepción respecto del 10% último tiene que ver con la concepción tradicional de las calculadoras, toda vez que durante muchos años el uso que se ha dado a las mismas es básicamente para realizar operaciones aritméticas simples o complejas, operaciones con funciones trigonométricas, entre otras más, pero al cabo cálculos que no necesariamente incluye actividades para promover las competencias matemáticas o la actividad cognitiva.

No se encontró en ningún caso estudiantes que estuvieran totalmente en desacuerdo en alguna de las preguntas del cuestionario. Lo anterior muestra del interés y aceptación por parte de los estudiantes para abordar temas de matemáticas, en particular de ecuaciones diferenciales utilizando tecnología de la calculadora.

Finalmente se agregó una pregunta referente a la disponibilidad de la calculadora y el tipo de la misma con la que cuentan para sus estudios profesionales, se encontró que el 60.7 % de los estudiantes tienen una calculadora científica, 17.9 % de los alumnos cuentan con calculadora gráfica y solamente el 21.4 tiene calculadora de última tecnología, que es la simbólica, toda vez que esta incorpora las funciones de gráficos, programación y el carácter de científica.

CAPÍTULO V.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas del análisis de los resultados de los grupos experimental y de control. Se presenta inicialmente la asociación con las posturas teóricas descritas en el capítulo II de esta tesis, los descubrimientos o hallazgos considerados así relevantes, las conclusiones de acuerdo a las variables en el capítulo anterior, y finalmente un conjunto de recomendaciones respecto a la potencialización de la estrategia didáctica diseñada que incorpora tecnología de la calculadora.

5.1 Discusión

En este apartado de discusión y conclusiones se han agrupado solo por organización y aspectos en común de la siguiente manera: diseño y confiabilidad del instrumento de medición diagnóstico y de la posprueba, resultados de la aplicación del pre-test, discusión sobre los resultados de la aplicación del instrumento de medición post-test a los grupos de alumnos con enfoque de enseñanza tradicional y con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora, un comparativo general entre los grupos de ambas estrategias de enseñanza, de manera adicional en la discusión se incorporan los comentarios comparativos de los grupos de ambos enfoques de enseñanza en cuanto a los índices de dificultad de las competencias matemáticas, de la actividad cognitiva, de la complejidad operacional y estructural, del nivel de dificultad y de los registros de representación inicial y final, para finalmente abordar de manera contundente las conclusiones del proyecto de investigación.

5.1.1 Diseño y confiabilidad del instrumento pre-test y post-test

El diseño de los instrumentos de medición tanto pre-test como post-test cuentan con sustento teórico, toda vez que para su elaboración se consideraron los criterios de Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004). La validación de los instrumentos se llevó a cabo mediante su validez total, sobresale en este caso la validación de contenido por el proceso

de su construcción en cuanto a su socialización, y la validez de criterio por su contrastación con otros instrumentos de medición de referencia probada.

La confiabilidad del diagnóstico se determinó mediante el método de mitades partidas corregido por la fórmula de Spearman-Brown, en donde se obtuvo un coeficiente de 0.87, calificado como apropiado por Contreras, Bachhoff y Larrazolo (2004).

La confiabilidad del instrumento de medición post-test es establecida a partir del coeficiente de Kuder – Richarson (KR21), cuyos parámetros involucrados son el número de reactivos, media y desviación estándar de los resultados de los estudiantes, la confiabilidad calculada es 0.86, también se determinó la confiabilidad por el método de mitades partidas corregido por la fórmula de Spearman-Brown obteniendo un coeficiente de 0.90, en ambos casos puede calificarse como aceptable de acuerdo a la escala de Hernández, Fernández y Baptista (2006).

5.1.2 Del instrumento diagnóstico o pre-test

Dado que no hay diferencias significativas, las pruebas de hipótesis aplicadas entre los grupos 651, 654, 657, 658 y 661 en cuanto al análisis de la relación de los promedios de los puntajes logrados evidencian en todos los casos homogeneidad de los grupos.

En lo general, se evidencia que la competencia matemática con menor rendimiento por parte de los estudiantes es la asociada con el planteamiento y resolución de problemas - caracterizada precisamente por la necesidad de resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante diversas vías-, aunque las pruebas de hipótesis no revelaron diferencia significativa entre esta y el resto de las competencias matemáticas, empero, el índice promedio de dificultad y las diferencias existentes evidencian claramente que los procesos de evaluación habitualmente se abocan a establecer la eficiencia de reglas y algoritmos matemáticos (Artigue, 1995; Gerald 2002), y la enseñanza tradicional que se brinda no favorece la resolución de problemas (ITESM – CEM, 1997), incluso la enseñanza se encuentra en muchas ocasiones matizada por la exposición de los fundamentos lógicos

(Deiros, 2003) más que un énfasis de la dimensión de la resolución de problemas, experimentación y exploración (Castela y Guzmán, 2006).

Tampoco se evidenció con el pre-test por parte de los estudiantes de los diversos grupos que hubiese diferencia significativa en cuanto al dominio de alguna actividad cognitiva en lo particular.

Los resultados del diagnóstico y la prueba de hipótesis muestran claramente equilibrio por parte de los estudiantes en cuanto a los conceptos matemáticos desde una perspectiva estructural y operacional.

Los niveles de dificultad (reproducción y conexión) involucrados en el diseño de los reactivos del pre-test no fueron diferenciados de manera significativa.

Es viable decir que no existe diferencia significativa en cuanto a que los reactivos son resueltos a partir de un registro inicial algebraico, gráfico o de lenguaje natural, sin embargo es de apuntar que cuando el registro inicial del reactivo es gráfico o algebraico muestran mayor dificultad para su resolución.

En el diagnóstico y mediante las pruebas de hipótesis se encuentra que cuando se trata de reactivos cuyo registro final es el lenguaje natural y gráfico la dificultad es mayor para los estudiantes, inclusive se evidencia diferencias significativas entre los registros finales algebraicos y lenguaje natural, así como también entre el algebraico y el gráfico. En el enfoque tradicional no se estima que haya un equilibrio en cuanto al tiempo que se le dedica a la enseñanza de las matemáticas en los diferentes registros de representación, se ha mencionado enfáticamente respecto del predominio del registro algebraico (Artigue, 1995), en contraste especialistas en el tema (Hitt, 2003; Duval 2006a) proponen promover en la enseñanza de las matemáticas el equilibrio de los distintos registros de representación sin privilegiar alguno de ellos.

5.1.3 Grupos post-test con estrategia de enseñanza tradicional

No se encontró diferencia significativa entre los subgrupos que abordaron el tema del fenómeno sistemas masa-resorte mediante un enfoque de enseñanza tradicional en cuanto al promedio logrado de reactivos correctos del post-test, lo cual exhibe de alguna manera la homogeneidad del enfoque tradicional.

El grupo de control (enfoque de enseñanza tradicional) deja entrever a partir de los resultados del post-test la dificultad que presenta para atender favorablemente los reactivos que involucran la competencia matemática de planteamiento y resolución de problemas, aún sin embargo no existe diferencia significativa entre ninguna de las competencias matemáticas. De nueva cuenta en este enfoque de enseñanza se manifiesta la ausencia de tratamiento y dedicación a competencias matemáticas que involucren el planteamiento de problemas y sus diversas formas de resolverlos, para Prado (2003) se trata esencialmente de una pobre asociación entre la teoría y la práctica. En contraste un enfoque de enseñanza que privilegie una dialéctica objeto y herramienta de los conceptos matemáticos, puede favorecer sustancialmente el desempeño de los estudiantes en cuanto a las competencias matemáticas, en particular aquella a la que se hace alusión en este párrafo.

La actividad cognitiva de tratamiento externo o conversión evidencia la mayor dificultad para los estudiantes cuando esta se presenta como necesaria para la resolución de un reactivo. La representación se posiciona como la de menor dificultad y secundariamente la actividad de tratamiento. De acuerdo a las pruebas de hipótesis no hay diferencia significativa entre tales actividades cognitivas para el grupo de control.

En el grupo de control no se evidencia diferencia significativa en cuanto a la complejidad estructural u operacional, aunque si se manifiesta mayor dificultad para aquellos reactivos que implican procedimientos o algoritmos.

Los niveles de dificultad no fueron discriminados notoriamente para el grupo de control, toda vez que las diferencias a partir de las pruebas de hipótesis no son significativas, de

manera natural se presenta mayor dificultad para resolver favorablemente reactivos con nivel de reflexión.

De manera reincidente los estudiantes del grupo de control muestran mayor dificultad para resolver los reactivos cuyo registro inicial es gráfico, mientras que en contraste se tiene el registro inicial numérico, de hecho la prueba de hipótesis sugiere diferencia significativa entre los registros gráfico y numérico. El registro gráfico ha sido desdeñado en la enseñanza tradicional (Gerald, 2002), sobre todo cuando el estudio se origina a partir de este registro, no obstante en las ciencias en lo general y en la ingeniería en lo particular es común realizar análisis a priori en registros gráficos.

En cuanto al registro final en la resolución de reactivos, se observa equilibrio en los promedios del índice de dificultad en el grupo de control.

5.1.4 Grupos post-test con estrategia de enseñanza con tecnología de la calculadora

El promedio de los puntajes logrados por los estudiantes de los subgrupos que participaron con un enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora muestran diferencias importantes, lo cual motiva a investigar de manera más profunda las razones de las mismas, un caso particular se evidencia a partir de las pruebas de hipótesis, en donde se encontró diferencia significativa entre los grupos 651-E y 657-E, no obstante la uniformidad en cuanto al puntaje logrado en el diagnóstico, algunas de las variables que pueden explicar la diferencia significativa son: el factor motivacional del instructor que condujo la estrategia didáctica, así como la cantidad de alumnos, que aunque es la mitad en el grupo 657-E, haya sido mas una influencia no positiva.

La competencia matemática que resultó con el índice promedio más bajo, es la de modelado, seguida por la competencia de planteamiento y resolución de problemas, las pruebas de hipótesis no revelan diferencias significativas entre las competencias matemáticas de los estudiantes de los grupos experimentales. Lo anterior es entendible pero preocupante, toda vez que el modelado es esencial en la práctica de ingeniería, pues esta competencia se manifiesta entre otras cosas por traducir la realidad a una estructura

matemática que permite el estudio y tratamiento profundo de los conceptos y fenómenos físicos, químicos, o de ingeniería.

Para los grupos experimentales la actividad cognitiva con mayor dificultad es la de conversión, seguida por el tratamiento, en este caso se evidencia diferencia significativa entre la actividad cognitiva de conversión y la de representación. Independientemente de la estrategia didáctica se comprende que el desempeño de los estudiantes en este rubro se menor, pues la transformación externa es el nivel más alto de la actividad cognitiva, después de la representación y el tratamiento, el tema es medular toda vez como lo menciona Duval (2001), esta actividad no solo se trata de una alternativa o perspectiva matemática, sino de un mecanismo de comprensión de los conceptos matemáticos.

Aunque no existe diferencia significativa entre la complejidad estructural y operacional en los subgrupos en donde se utilizó un esquema de enseñanza con tecnología de la calculadora, también se deja entrever la menor eficiencia para resolver los reactivos que involucran procedimientos y algoritmos. La estrategia diseñada enfatiza mayormente la procuración de atributos y regularidades que permita identificar y disponer plenamente de los conceptos matemáticos (Gómez, P. y Meza, V. 1993; Sosa, Aparicio y Tuyub, 2008; Arellano y Solano, 2009), presuponiendo que los desarrollos algorítmicos quedan inherentes cuando se usa tecnología de la calculadora, lo anterior como se observa en los resultados contrae el riesgo de disminuir la eficiencia operacional del estudiante, de forma análoga Heugl (2003) observa disminución de las habilidades de cálculo por parte de los estudiantes cuando la práctica de la enseñanza se ve influenciada por calculadora y el CAS.

Para los subgrupos experimentales el menor rendimiento se tiene a partir del registro final numérico, e igualmente el algebraico, de hecho las pruebas de hipótesis evidencian diferencia significativa en el registro final algebraico y el lenguaje natural, así como también diferencia significativa en el registro final numérico y el lenguaje natural.

Destaca un mayor rendimiento por parte de los estudiantes de los subgrupos experimentales en la resolución de reactivos cuyo registro original es gráfico, seguidamente del numérico, sin embargo en ningún caso prevalece diferencia significativa entre alguno de los registros

iniciales de representación. La inclusión de la representación, tratamiento y conversión equilibrado de los registros de representación favorece su manejo, independientemente que sean iniciales o finales, La inclusión de la tecnología de la calculadora y la vinculación dinámica de los registros (De Faria, 2005; Hernández, 2000; Giandini y Salerno, 2009; Jiménez, 2000; Ortega, Nesterova y Mendoza, 2009) en la estrategia didáctica fortalece la posibilidad en el estudiante de enfrentar situaciones distintas a las tradicionales (Karen, 2000; Arellano y Solana 2009), situaciones diversas e incluso de corte práctico o cotidiano.

Los subgrupos experimentales evidencian mayor dificultad para resolver reactivos del nivel de reflexión, mientras que se guarda poca distancia entre los niveles de reproducción y conexión.

5.1.5 Comparativo general entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza

El comparativo realizado entre los subgrupos que participaron con ambos enfoques de enseñanza mostró diferencias significativas en cuanto al promedio del número de aciertos, para los subgrupos del grupo 651, así como también para los subgrupos 658-E y 661-T.

En lo general, la prueba de hipótesis con estadístico z, evidencia diferencia significativa en el promedio del número de aciertos a favor del grupo experimental, con lo que se verifica la conjetura de origen objeto del estudio. En consecuencia la réplica de la estrategia didáctica es una posibilidad interesante para elevar los promedios de los estudiantes sin demeritar ni disminuir la profundidad en que son tratados los conceptos alrededor del fenómeno sistema masa-resorte.

Durante la realización didáctica los estudiantes participaron activamente y con buena disposición pero no todos asistieron en un 100 por ciento al aula por diversas razones, con lo cual se generó porcentajes de mortalidad significativos, los cuales fueron expuestos y analizados en la validación interna de la implementación de la estrategia didáctica. Lo anterior obliga a escuchar y acatar cabalmente lo que los expertos en investigación con estudiantes dicen, que es realizar la investigación no solo con un grupo de control y un grupo experimental, sino que en la medida de lo posible llevar a cabo la investigación con

varios grupos de control y experimentales, de manera que aunque se tenga mortalidad la información restante tenga un carácter válido y confiable. Para el desarrollo de la investigación se acato la voz de la experiencia.

5.1.6 Índices de competencias matemáticas entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza

El comparativo de los grupos experimental y de control en cuanto a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, utilizar el lenguaje simbólico y la representación evidencia diferencia significativa, la eficiencia de conocimientos es mostrada de esta forma, aunque en la competencia matemática de modelado no existe diferencia significativa el índice promedio de dificultad en el grupo experimental es mayor que en el grupo de control. Se esperaba de antemano que en esta competencia matemática de modelado los índices promedio de dificultad resultaran bajos, toda vez que, por una parte el esquema de enseñanza tradicional no la enfatiza, mientras que a partir de la estrategia didáctica se inician esfuerzos que deberán reforzarse inclusive en otras unidades del mismo curso de ecuaciones diferenciales. Esto presupone la necesidad de modificar la estrategia didáctica en cuanto que enfatice actividades que coadyuven a mejorar la traducción de la realidad a estructuras matemáticas, interpretar los modelos matemáticos en términos reales, reflexionar, analizar y ofrecer la crítica y limitaciones de un modelo matemático.

El balance general referido a la eficiencia de conocimientos favorece al grupo experimental, en cuanto a la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico y formal como lo evidenció la prueba de hipótesis de medias respecto al aprovechamiento, en cuanto que con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ se rechaza la hipótesis nula planteada en la investigación, toda vez que se obtiene el estadístico $z = 4.80$ contra el rango de rechazo de la hipótesis nula $t < -1.96$ o $t > 1.96$, lo que significa mayor eficiencia de conocimientos de manera significativa por parte del grupo experimental.

Los índices obtenidos tanto en el diagnóstico (0.34) como en el post-test (0.38) respecto de la competencia de planteamiento y resolución de problemas permiten evidenciar de manera

trascendente la necesidad de modificar no solo la estrategia didáctica en lo particular, en cuanto a tal competencia, lo anterior refleja sin lugar a duda la necesidad de dedicar tiempo mayormente (independientemente del enfoque de enseñanza) al planteamiento, a la reflexión de los problemas que se presentan y al análisis e interpretación de los resultados (Demana y Waits, 1998b), ello puede lograrse en la medida que el trabajo algorítmico o procedimental queden en manos de la automatización, llevada a cabo con tecnología de la calculadora por ejemplo. De hecho el éxito de los estudiantes en cuanto a la eficiencia de conocimientos según el índice de discriminación del punto biserial se matiza por una complejidad de la comprensión estructural más que operacional.

A la vez se observa un notable bajo rendimiento del grupo de control en cuanto a la competencia matemática para el planteamiento y resolución de problemas. Nuevamente se detecta en lo general baja eficiencia en las competencias de modelado y planteamiento y resolución de problemas respecto de las competencias de representación y utilización del lenguaje simbólico y formal. Lo cual evidencia el arraigo del enfoque de enseñanza tradicional.

5.1.7 Índices de actividad cognitiva entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza

Para el caso de las actividades cognitivas, el comparativo entre los grupos de control y experimental evidencia diferencia de manera significativa a favor del grupo experimental la representación, el tratamiento y la conversión. Ambos grupos reflejan menor eficiencia cuando la actividad cognitiva requerida para resolver favorablemente un reactivo es la conversión, le sigue la actividad de tratamiento y la representación. Lo anterior evidencia que la incorporación de la calculadora en la estrategia didáctica y en comunión con la teoría de las representaciones semióticas de Duval promueve favorablemente la representación, el tratamiento y la conversión.

Los índices promedio de dificultad y las pruebas de hipótesis realizadas evidencian la complejidad natural de la actividad cognitiva (tanto en el grupo de control como experimental) requerida en la resolución de los reactivos, toda vez que el tratamiento

externo o conversión conserva el valor más bajo de dificultad, seguidamente esta el tratamiento y la representación como la actividad más simple de llevar a cabo por parte del estudiante, es efectivamente esta última considerada y también llamada de formación como base para proseguir al tratamiento y conversión de los registros de representación, y el dominio de estas actividades cognitivas y el dominio en la coordinación de las mismas (Duval, 2001) es entonces la consideración del éxito del estudiante en cuanto al conocimiento y dominio de los conceptos matemáticos. Se tiene como producto de la implementación de la estrategia didáctica diferencia significativa y favorable para el grupo experimental en contra del grupo de control en cuanto las tres actividades cognitivas.

5.1.8 Índices de complejidad conceptual entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza

El grupo de control comparado con el experimental demuestra de manera significativa mayor dificultad en la complejidad tanto operacional como estructural, aunque en lo general se mantiene con menor eficiencia de resolución para los estudiantes aquellos reactivos que implican procedimientos o algoritmos.

5.1.9 Índices de nivel de dificultad entre grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza

De manera significativa se evidencia que el grupo de control conserva menor eficiencia que el grupo experimental para la resolución de los reactivos cuando estos son definidos de acuerdo al nivel de dificultad de reproducción, conexión y reflexión, manteniéndose en general mayor promedio del índice de dificultad para los reactivos caracterizados por la necesidad de enlazar conocimientos de distintas procedencias.

5.1.10 Índices de registro inicial y final grupos post-test de ambas estrategias de enseñanza

En todos los casos el grupo experimental presenta contra el grupo de control mayor eficiencia cuando se trata de los registros iniciales de representación algebraico, gráfico y

de lenguaje natural, y aunque mínimamente también en el registro inicial numérico, es en este último registro en el que no existe diferencia significativa.

De manera sobresaliente el registro inicial gráfico en el grupo experimental destaca ante cualquier otro registro dentro y fuera del mismo grupo experimental.

En todos los casos el grupo experimental presenta contra el grupo de control mayor eficiencia cuando se trata de los registros finales de representación algebraico, gráfico y de lenguaje natural, y aunque mínimamente también en el registro final numérico, es en este último registro en el que no existe diferencia significativa.

De manera sobresaliente el registro final gráfico en el grupo experimental destaca ante cualquier otro registro de representación dentro y fuera del mismo grupo experimental.

Era de esperarse que a partir del diseño e implementación de la estrategia didáctica y el énfasis que se contempló en cuanto al manejo de la calculadora y la vinculación de los distintos registros que el grupo experimental haya salido fortalecido alrededor del registro gráfico tanto inicial como final, de igual forma se fortaleció el lenguaje natural como registro final a partir de las actividades de la estrategia didáctica tendientes a interpretar y describir verbalmente el fenómeno físico y los objetos matemáticos inherentes como velocidad, condiciones iniciales, desplazamiento extremo, entre otros.

De manera reincidente los estudiantes del grupo de control muestran mayor dificultad para resolver los reactivos cuyo registro inicial es gráfico, mientras que en contraste se tiene el registro inicial numérico, de hecho la prueba de hipótesis sugiere diferencia significativa entre los registros gráfico y numérico.

Destaca un mayor rendimiento por parte de los estudiantes de los subgrupos experimentales en la resolución de reactivos cuyo registro original es gráfico, seguidamente del numérico, sin embargo en ningún caso prevalece diferencia significativa entre alguno de los registros iniciales de representación.

En todos los casos el grupo experimental presenta contra el grupo de control mayor eficiencia cuando se trata de los registros iniciales de representación algebraico, gráfico y de lenguaje natural, y aunque mínimamente también en el registro inicial numérico, es en este último registro en el que no existe diferencia significativa.

De manera sobresaliente el registro inicial gráfico en el grupo experimental destaca ante cualquier otro registro dentro y fuera del mismo grupo experimental.

Se verificó en el pre-test que los índices de dificultad más bajos prevalecen en los registros gráficos y de lenguaje natural, así mismo ocurrió con el grupo de control en los resultados obtenidos por el post-test, lo anterior evidencia el matiz del enfoque de enseñanza tradicional de las matemáticas para ingeniería, en el cual se destaca tratamiento del estudiante en los registros algebraico y numérico, particularmente cuando tal registro es final. La implementación de la estrategia didáctica dejó entrever la promoción del registro tanto gráfico como de lenguaje natural, toda vez de la existencia de diferencias significativas entre el grupo experimental contra el grupo de control.

Destaca el registro gráfico tanto el inicial como el final en términos de la eficiencia que logran los estudiantes del grupo experimental, lo cual evidencia que la estrategia didáctica promueve de manera sustancial esta habilidad en el estudiante, además de acuerdo al coeficiente del punto biserial este registro cuando es el inicial predice un desempeño más favorable en el logro educativo de los estudiantes.

Para el grupo experimental el menor rendimiento se tiene a partir del registro final numérico, e igualmente el algebraico, de hecho las pruebas de hipótesis evidencian diferencia significativa en el registro final algebraico y el lenguaje natural, así como también diferencia significativa en el registro final numérico y el lenguaje natural.

En todos los casos el grupo experimental presenta contra el grupo de control mayor eficiencia cuando se trata de los registros finales de representación algebraico, gráfico y de

lenguaje natural, y aunque mínimamente también en el registro final numérico, es en este último registro en el que no existe diferencia significativa.

De manera sobresaliente el registro final gráfico en el grupo experimental destaca ante cualquier otro registro de representación dentro y fuera del mismo grupo experimental.

5.1.11 Encuesta para evaluar la estrategia didáctica

Se encontró como resultado de la aplicación de la encuesta para evaluar la estrategia didáctica una percepción muy favorable por parte de los estudiantes del grupo experimental en torno al diseño y aplicación de la estrategia didáctica, se destaca primordialmente el uso de tecnología de la calculadora y la motivación que tal tecnología promueve en el estudiante para estudiar y apropiarse de los conceptos matemáticos alrededor del fenómeno sistema masa resorte, se distingue también como apropiada y aceptable la implementación de la estrategia didáctica, misma que involucra la instrucción y la infraestructura para ello, esta encuesta evidencia la aceptación por parte de los estudiantes respecto de la inclusión de tecnología en los cursos de matemáticas.

5.2 Conclusiones

Como se describe al inicio del documento, este trabajo reporta la investigación realizada al poner en práctica una secuencia de actividades didácticas distinta a la tradicional para abordar los conceptos matemáticos alrededor del fenómeno sistema masa-resorte, tratado en el curso de ecuaciones diferenciales, discutido y utilizado en cursos posteriores de vibraciones mecánicas, ingeniería sísmica, ingeniería automotriz, entre otros más del área de la ingeniería y de la ciencia en general, la estrategia didáctica diseñada ex profeso contempla un enfoque que va más allá de lo operativo y de la simple manipulación algorítmica, de hecho, respecto a un esquema tradicional enfatiza en el uso de los registros gráficos y de lenguaje natural.

Al incluir tecnología de la calculadora la propuesta busca que el estudiante construya los conceptos matemáticos a partir de la vinculación de los distintos registros de

representación, así como también del mismo producto de su interacción con él, aquí la teoría de representaciones semióticas juega un papel primordial a partir de las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión, los conceptos matemáticos involucrados se alternan de herramienta y objeto en la resolución de situaciones de ingeniería, desarrollando colateralmente actitudes y competencias para su enfrentamiento.

Las experiencias vividas durante la investigación fueron enriquecedoras. El enfrentamiento a múltiples dificultades dejó valiosas aportaciones sobre las actividades de enseñanza y aprendizaje, una mayor sensibilización respecto a los procesos de los alumnos en su desempeño en el aula. Tales experiencias se refieren a los distintos momentos de la experimentación y documentación del trabajo, mismos que originaron una serie de reflexiones que en calidad de conclusiones se exponen a continuación.

- Se detectó que la mayoría de los estudiantes no están acostumbrados a trabajar en sus clases habituales con estrategias didácticas que incorporan tecnología de la calculadora, sino simplemente con ejercicios más o menos rutinarios con dependencia del profesor como producto de la enseñanza tradicional, de hecho la encuesta aplicada a los estudiantes de los grupos experimentales evidencian sobremanera el poco uso y potencialidad de las calculadoras gráficas y simbólicas (que incluyen el sistema de cómputo algebraico o CAS), pues solamente el 21% cuenta con calculadora de última tecnología y la eficiencia de su uso es muy discutible.
- Cabe destacar, que a decir de los estudiantes el 93% considera que la participación en la estrategia didáctica que incorpora la calculadora mejora las habilidades y conocimientos de matemáticas. El 100% está de acuerdo que es importante que se incorporen nuevas tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- La experiencia puede considerarse como exitosa en varios aspectos, por una parte logra que los estudiantes del grupo experimental se apropien intelectualmente de los problemas que conforman la estrategia didáctica, además se consigue que el estudiante transite adecuadamente del contexto gráfico al contexto físico virtual, los

estudiantes logran describir tanto física como geométricamente los diferentes tipos de movimiento armónico y amortiguado en sus tres dimensiones, sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado. Los estudiantes asocian adecuadamente el gráfico de la ecuación de movimiento a partir de la ecuación diferencial que modela el sistema, y viceversa.

- Haciendo una recapitulación global de la experiencia vivida, analizando los objetivos e hipótesis planteadas de la investigación y los resultados obtenidos, puede decirse que el balance general respecto de la eficiencia de conocimientos que logran los estudiantes a partir de la implementación de la estrategia didáctica favorece de manera significativa al grupo experimental.

De los análisis y tratamiento de los resultados presentados, se pueden obtener las siguientes conclusiones sobre la estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora y su impacto en las competencias matemáticas de los estudiantes de ecuaciones diferenciales:

- La utilización de la calculadora gráfica, programable y simbólica a partir de la estrategia didáctica diseñada, permite desde nuestra perspectiva utilizar el tiempo de manera más eficiente, toda vez que la manipulación numérica y algebraica puede quedar en un segundo término, privilegiando competencias de modelado y planteamiento y resolución de problemas, en donde de forma directa se exige del alumno el desarrollo de las habilidades de análisis e interpretación.
- El abordar el aprendizaje de las competencias matemáticas, tales como: modelado, planteamiento y resolución de problemas, representación y utilización del lenguaje simbólico y formal en sus respectivos indicadores permite de manera más significativa diseñar, planificar y evaluar la estrategia didáctica que se utilice, pues favorece encontrar áreas de oportunidad en los indicadores de las distintas competencias matemáticas.

- Para el aprendizaje de las competencias matemáticas el abordar las transformaciones semióticas de Duval en sus componentes de representación, tratamiento y conversión permite identificar la madurez cognitiva del estudiante, pues aunque la actividad de conversión es preponderante para la adquisición de competencias matemáticas, es necesario tener cierta habilidad en los niveles previos.
- Por otra parte se detectó la necesidad de refinar la potencialidad de las consideraciones teóricas establecidas para la investigación, en este sentido se encuentra aquí una oportunidad más para mejorar la estrategia didáctica, a partir de promover con mayor énfasis la actividad cognitiva de conversión mediante la modificación o el diseño de nuevas actividades de aprendizaje.
- Se identificó el reto de reforzar la competencia de modelado en el grupo experimental, toda vez que uno de los propósitos del curso de ecuaciones diferenciales para ingeniería es precisamente la posibilidad de que los estudiantes modelen los fenómenos físicos, químicos, de ingeniería y de ciencia en general, lo anterior implicará modificar algunos aspectos del diseño de la estrategia didáctica con el apoyo de herramientas de aprovechamiento del aprendizaje en la disciplinas de ingeniería.
- La incorporación de la calculadora gráfica al implementar la estrategia didáctica puede extenderse previo diseño a otros temas y conceptos de matemáticas, tales como las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, cálculo de puntos críticos y transformada de Laplace; pues consecuentemente con la teoría de Duval de las transformaciones semióticas se enfatizaría en el aprendizaje de las competencias matemáticas sobre la manipulación algebraica y numérica.

Se identifican como aportaciones producto de la investigación una estrategia didáctica replicable para abordar el fenómeno sistema masa resorte, que incluye los conceptos matemáticos alrededor de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, dicha

estrategia didáctica incluye la calculadora gráfica, misma que hoy en día está disponible física o virtual por los estudiantes de ingeniería de manera habitual. La metodología de desarrollo de la investigación que incluye el diseño y aplicación de la propia estrategia didáctica, los instrumentos de medición diagnóstico y post-test, así como los mecanismos de validación y confiabilidad correspondientes, así como también un mayor conocimiento respecto del impacto que tiene en el estudiante y durante el proceso de enseñanza y aprendizaje la incorporación de tecnología de la calculadora en cuanto a la eficiencia de conocimientos que logran, es también considerada como una importante aportación.

5.3 Recomendaciones

Aunque los resultados obtenidos fueron favorables para el grupo experimental, es innegable la necesidad de obtener mayor conocimiento sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de ingeniería, el llevar a cabo este proceso de investigación ha permitido obtener experiencia desde varias perspectivas, como docente, como investigador y como administrador. En base a ello, se presentan algunas recomendaciones que se consideran pertinentes describir en este apartado.

Como investigador.

Reforzar la estrategia didáctica de manera que coadyuve a mejorar significativamente las competencias de modelado y de planteamiento y resolución de problemas, pues estas son de singular importancia en la traducción de la realidad a estructuras matemáticas y a la respectiva resolución de problemas que se presentan en la vida cotidiana, sobre todo cuando se trata de resolver problemas de ingeniería. En este sentido y por la potencialidad de la calculadora es viable diseñar actividades que propicien mayor interacción en los estudiantes, por una parte para reforzar el trabajo algorítmico cotidiano, pero sobre todo en la búsqueda de atributos y regularidades de los conceptos matemáticos.

No descuidar en ningún momento la parte procedimental u operacional de los conceptos, que si bien ha sido criticado por especialistas en el esquema de enseñanza tradicional y a

pesar de que puede suplirse con diversas tecnologías tan importante es como la perspectiva estructural de los conceptos matemáticos.

Indagar de manera enfática a través de investigaciones como la que aquí se presenta el efecto de la inclusión de las tecnologías computacionales en cuanto a las competencias matemáticas y el alcance de las actividades cognitivas por parte de los estudiantes.

Diseñar (en la medida de lo posible) tanto el instrumento de medición pre-test como post-test de una manera más equilibrada en cuanto a la distribución de reactivos por las competencias e indicadores respectivos, las actividades cognitivas, los registros de representación inicial y final, y la perspectiva estructural y operacional del conocimiento.

Como docente.

La promoción de la distribución del tiempo de manera equilibrada en cuanto al uso de los distintos registros de representación semiótica, en cuanto al énfasis de las competencias matemáticas de modelado, planeación y resolución de problemas, así como también la incorporación de problemas cotidianos en cátedra y extracátedra que promuevan el interés de los estudiantes para su atención y posterior resolución.

Como administrador.

Promover proyectos de investigación en el que se determine el impacto en la eficiencia de los conocimientos de los estudiantes cuando se enfrentan a conceptos de matemáticas mediados por tecnología.

Promover el diseño de instrumentos de medición con validez, confiabilidad y calidad técnica suficiente para determinar la eficiencia de la aplicación de los diseños instruccionales en los distintos cursos del nivel medio superior y superior.

Evaluar de manera formal y científica el efecto de la implementación de estrategias de mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes universitarios de ingeniería.

Promover proyectos de investigación en las distintas áreas del conocimiento con los cuales sea viable determinar las dificultades y obstáculos por los cuales los estudiantes terminan reprobando o desertando de las asignaturas de matemáticas o aquellas que la requieren para su estudio y profundización.

Un logro interesante que conviene destacar y con el cual se pretende concluir este trabajo son la serie de cuestionamientos que surgen a partir del desarrollo de esta investigación, a saber:

- ¿Existe diferencia de los conocimientos matemáticos en un curso de ecuaciones diferenciales que alcanzan los alumnos de ingeniería cuando son sometidos a una enseñanza tradicional y con estrategia didáctica alterna que incorpora la calculadora en la Facultad de Ingeniería Mexicali?
- Para una generación de alumnos que incorporan tecnología de la calculadora en todos los cursos de matemáticas para ingeniería, ¿habría diferencia significativa en cuanto a las competencias matemáticas logradas con respecto a una generación que no incorpore de manera sistemática la calculadora?
- ¿De qué manera la coordinación de registros de representación incide en la eficiencia de las competencias matemáticas de los estudiantes de ingeniería?
- ¿De qué manera un eficiente manejo del registro gráfico como intermediario incide en la modelación de situaciones problemáticas de ingeniería?

Queda claro que parte del proceso de investigación es la posibilidad de identificar múltiples y diversas problemáticas, por convicción el impacto de la incorporación de tecnología en la enseñanza de las matemáticas, así como la búsqueda del mejoramiento de las competencias matemáticas y en general de eficiencia de conocimientos de los estudiantes a través de la implementación de estrategias y diversos mecanismos son un poderoso atractor para investigar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, C.Y., (2006). Planificar la enseñanza universitaria para el desarrollo de competencias, *Educatio siglo XXI*, Vol. 24 , pp. 17-34.
- Andino, G., Felizzia, D., Leporati, J. y Gática, S. (2003). *Una Propuesta para la enseñanza de temas de análisis matemático en las carreras de ingeniería*, Congreso Latinoamericano de Educación Superior en el Siglo XXI. Recuperado el 15 de marzo de 2007 del sitio web de la Universidad Nacional de San Luis, Argentina: <http://conedsup.unsl.edu.ar/>
- Ansola, E. y Rodríguez, E. (2006). Experiencias en el uso de la calculadora graficadora en un curso semipresencial de matemática numérica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 19, 953-958.
- Arbeláez, J., y Marín, J. (2007). Modelado multicuerpo de un cuarto de vehículo liviano, utilizando el software visualnastran para ser evaluado bajo los criterios de la norma EUSAMA en cuanto a la adhesión. *Scientia Et Technica*. Universidad Tecnológica de Pereira. *Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal*. Vol. 13, num. 35, pp. 237-241. Recuperado el 20 de mayo de 2007 del sitio web <http://redalyc.uaemex.mx>
- Arellano, R. y Solana, S. (2009). El proceso enseñanza – aprendizaje del cálculo con el uso de tecnología. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 22, 1631-1640.
- Artigue, M., Douady R., Moreno L., y Gómez P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. pp. 97-140. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Backhoff, E., Larrazolo, N. y Rosas, M. (2000). Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA). *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 2 (1). Consultado el 1 de julio de 2008 en: <http://redie.uabc.mx/vol2no1/contenido-backhoff.html>
- Badano, C. I., Camuyrano, M. B., y Dodera, M. G., (1998). Hábitos de estudio en matemáticas: una experiencia de medición en el primer año de la universidad. *Revista en Educación Matemática*, 10, 46-57.
- Barton, R. y Diehl, J. (1999). *Advanced Placement Calculus with the TI-89, Explorations*. Estados Unidos de América. Texas Instruments.
- Bower, B., Brueningsen, C., Brueningsen, E., Gough, S. y Turley, W. (2003). *Discovering Math on the Voyage 20: Explorations*. Estados Unidos de América. Texas Instruments.
- Cantoral, R., Farfán, R., Cordero., F., Alanís, J., Garza, A., y Rodríguez, R. (2003). Tratamiento matemático y calculadoras gráficas: *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

- Castela, C. y Guzmán, I. (2005). Comparación de la enseñanza de la geometría en los sistemas escolares chileno y francés. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 18, 295-301.
- Castillo, A., (2002). El concepto de función: una manera de explorar la conversión del registro gráfico al algebraico con cabri. *Memorias de la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 8. 68-76.
- Castillo, A. (2003). La articulación de los registros gráfico, analítico y de la lengua natural. *Memorias de la XIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 13. 75-80.
- Chavarría, J. y Ruiz, A. (2000). *Los “Estándares” en la Educación Matemática de los Estados Unidos: Contexto, Reforma y Lecciones*, 248-256. Recuperado el 07 Marzo, 2007, de <http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/Libros/Uniciencia/Articulos/Volumen2/Parte15/articulo29.html>
- Cistac, G., Bongianino, R., Filippi, J. y Kovac, F., (2009). La simulacion como medio de interrelacion entre herramientas matematicas y procesos tecnologicos, *Formacion Universitaria*, 2(5), 3-11.
- Contreras, L., Bachhoff, E. y Larrazolo, N. (2004). *Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica*. Edit. Manual Moderno, México
- Crocker, L. y Algina, J. (1986). *Introduction to Classical and Modern Test Theory*, Holt, Rinehart and Winston.
- De Faria, E. (2005). Matemáticas y nuevas tecnología en Costa Rica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 18, 749-754.
- Deiros, F. B., (2003). *Apuntes sobre didáctica de la matemática para ingeniería*. Recuperado el 12 de junio de 2007 del sitio web: <http://www.ilustrados.com/publicaciones/EpyAVkkkykeLzKtzAv.php>
- De Las Fuentes, M. (1998). *Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real Empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos. El caso de las funciones lineales y cuadráticas*. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Hermosillo, Sonora. Universidad de Sonora.
- De Las Fuentes, M., y Valdez, C. (2002). Una alternativa gráfica para la resolución de desigualdades. *Memorias de la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 8. 59-67.

- De Las Fuentes, M., y Valdez, C. (2004). Una estrategia didáctica para abordar problemas de optimización, el caso del problema de la caja sin tapa. *Revista Innovaciones Educativas*, 5. p. 5.
- De Las Fuentes, M., Encinas, A., y Bravo, M. (2005). *Enseñanza de derivadas sucesivas*. Memorias del primer foro nacional de ciencias básicas, “La modernidad en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias básicas para la formación del ingeniero”. 1.
- De Las Fuentes, M., Encinas, A., y Rivera, R., (2007a). Construcción colegiada y aplicación de un examen criterial alineado con el currículo para evaluar a gran escala un curso de cálculo diferencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 20. 192-197.
- De Las Fuentes, M., Encinas, A., y Rivera, R., (2007b). El juego utilizando calculadora graficadora como medio para la enseñanza de las ecuaciones paramétricas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 20. 617-622.
- De Las Fuentes, M. y Arcos, J. (2007c). Una alternativa didáctica para el tratamiento del fenómeno sistema masa-resorte empleando la calculadora graficadora: Un estudio en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. *Memorias del 7mo/ Congreso Internacional Retos y Expectativas de la Universidad, el papel de la educación en la construcción de las sociedades del conocimiento*.
- De Las Fuentes, M., Arcos, J. y Díaz, B. (2008). Diseño de una estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora para abordar aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. *Memorias del 8vo/ Congreso Internacional Retos y Expectativas de la Universidad, Universidad y Política Educativa “Ser, Hacer y Deber Ser”*.
- Demana, F. y Waits, B. (1998a). *Panorama de la Tecnología en la Educación*. Recuperado el 12 Marzo de 2007, del sitio de la Universidad de Ohio, Estados Unidos: <http://www.mayh.ohio-state.edu/~waitsb/reformbacklash.pdf>
- Demana, F. y Waits, B. (1998b). *El Rol de la Calculadora Graficadora en la Reforma de las Matemáticas*. Recuperado el 12 Marzo de 2007, del sitio de la Universidad de Ohio, Estados Unidos: <http://www.mayh.ohio-state.edu/~waitsb/roleofgraphcalc.pdf>
- Díaz, G., J. (2004). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Recuperado el 12 Marzo de 2007, del sitio http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf.
- Douady, R. (1985). Juego de marcos y dialéctica herramienta – objeto. *Recherches en Didactique de Mathématique*. Vol. 7, No. 2. pp. 5-31. Versión en español Ernesto Sánchez S. y Gonzalo Zubieta B. *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa*. DME-CINVESTAV. 1993
- Dujet, C. (2006). *Las matemáticas para ingenieros: finalidades, contenidos, didáctica y*

prácticas pedagógicas (Proyecto Matemáticas para Ingenieros). Lyon, Francia: Instituto Nacional de Ciencias Aplicadas.

Duval, R., (1993). Registros de representaciones semióticas y funcionamiento cognoscitivo del pensamiento. Traducción: Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (2000). *Representación, visión y visualización: Funciones cognitivas en el pensamiento matemático*. Recuperado el 12 Marzo de 2007, del sitio de la Université du Littoral Côte-d'Opale, Boulogne, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais, Lille. <http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf>

Duval, R. (2001). *El análisis cognoscitivo de los problemas de comprensión en el Aprendizaje de las matemáticas* Recuperado el 27 de septiembre de 2007, del sitio de la Université du Littoral Laboratoire Mutations de Systèmes Educatifs, et Centre IUFM Nord Pas-de Calais, Lille. <http://www.math.uncc.edu/~sae/dg3/duval.pdf>

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics., *Journal of Educational Studies in Mathematic*, 61(1-2), 103-131.

Duval, R. (2006b). Quelle Sémiotique Pour L'Analyse de L'Activité et des productions mathématiques. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, Número especial, pp. 45-81.

Ebel, R. L. y Frisbie, D. A. (1986). *Essentials of Education Measurement*. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice Hall.

Eduteka, Fundación Gabriel Piedrahita Uribe. (2006, 20 de mayo). *Funcionaria del Ministerio de Educación explica los alcances del proyecto de calculadoras en la enseñanza*. Recuperado el 12 Marzo de 2007, del sitio web <http://www.eduteka.org/Entrevista3.php>

Faria, E. (s.f.). *La tecnología y las múltiples representaciones*. Universidad de Costa Rica. Recuperado el 23 de marzo de 2007 del sitio web http://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/La_tecnología_y_las_múltiples_representaciones.pdf

Ferrini, M. (2000). Principles and Standards for School Mathematics: A Guide for Mathematicians.,

García, V. y Pérez, R. (1989). *La investigación del profesor en el aula*. Madrid, Escuela Española.

Gerald, A. G. (2002). Representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y resolución de problemas. En L. D. English (Ed.), *Manual de investigación internacional en educación matemática* (pp. 197-218). New Jersey, EE. UU.

- Giandini, V. y Salerno, M. (2009). La geometría, los ingresantes y el software maple, *Formación Universitaria*, 2(4), 23-30,
- Godino, J., Vicenc, F., Contreras, A., y Wihelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, Vol. 9, Num. 1, pp. 117-150.
- Gómez, P. y Meza, V. (1994). *Calculadoras Gráficas y Precálculo: Exploración de aspectos relacionados con la comprensión*. Recuperado el 12 Marzo de 2007, del sitio de Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia: <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/libros/libroaportes/comprendion.html>
- Goñi, J.M. (2009). El desarrollo de la competencia matemática en el currículo escolar de la Educación Básica, *Educatio Siglo XXI*, 27(1), 33-57.
- Guzmán, I. (1998). Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, Vol. 1, Num. 1, pp. 5-21.
- Henrysson, S. (1971). Gathering, Analysing, and Using Data on Teste Items. En R.L. Thorndike (Ed.), *Educational Measurement*. Washington, DC: American Council on Education.
- Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B. y Lehmann, E. (2000). *Indispensable Manual Calculation Skills in a CAS Enviroment*. Recuperado el 12 de marzo de 2007 del sitio web http://www.matematicamente.it/approfondimenti/skills_ita.PDF
- Hernández, R. A., (2000). A didactic engineering research performed whitin a course on ordinary differential equations where students use the TI-92 calculator. Recuperado el 12 marzo de 2007 del sitio <http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf>
- Hernández, S. R., Fernández, C. C., y Baptista, L. P., (2006). *Metodología de la investigación* (cuarta edición). México: Mc. Graw Hill.
- Heugl, H. (2003). La necesaria competencia algebraica fundamental en la época de los Sistemas de Cómputo Algebraico (E. Hugues, J. Jiménez, J. Rascón, O. Rodriguez & C. Sánchez, Trad.). En A. Del Castillo, L. Dórame, J. Jiménez Hugues, (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico* (pp 29-66). Hermosillo, Sonora: (Artículo original en inglés Heugl H. The necessary algebraic competente in the age of Computers Algebra Systems. Austrian Center for Didactis of Computer Algebra).
- Hitt, E. F. (1991). Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa. *Educación*

Matemática, 7, 63-75.

Hitt, E. F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes de Tecnología. *Boletín de la Asociación Venezolana*, Vol. X, No. 2.

ITESM – CEM (1997). *Desarrollo personal para rediseño de la práctica docente*, Congreso académico del módulo III del PDHD. México: Dirección de efectividad institucional del ITESM.

Jiménez, J., Hugues, E., y Castillo, A. (2000). *La Experimentación Matemática Escolar apoyada por un dispositivo CAS*. En sexta escuela de verano del Centro Austriaco para la Didáctica del Cómputo Algebraico en Portoroz, Slovenia. Recuperado el 22 de marzo de 2007 del sitio web <http://redexperimental.gob.mx/descargar.php?id=485>

Karen, D., (2000). La influencia de la tecnología en las normas sociomatemáticas en un curso de ecuaciones diferenciales. Recuperado el 12 marzo de 2007 del sitio <http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf>. pp 219-224.

Kutzler, B. (2003). La calculadora algebraica como herramienta pedagógica para enseñar matemáticas (J. Jiménez, Trad.). En A. Del Castillo, L. Dórame, J. Jiménez & E Hugues, (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico* (pp 9-27). Hermosillo, Sonora: (Artículo original en inglés Kutzler B. The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics.

Kutzler, B. y Vlasta, K. (2003). *Introducción a la enseñanza de las matemáticas con calculadora electrónica*. Recuperado el 12 de marzo de 2007 del sitio web <http://b.kutzler.com/downloads/sr-37.pdf>

Laborde, C. (2003). ¿Porqué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas? (J. Jiménez y F. Tapia, Trad.). En J. Jiménez, E Hugues, A. Del Castillo & L. Dórame (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico* (pp 115-127). Hermosillo, Sonora: (Trabajo original presentado en la Conferencia Cumbre Mundial de T3 en Tokio, agosto 2000).

Lafourcade, P, (1971), *Evaluación de los Aprendizajes*, Kapelusz, Buenos Aires, Argentina.

Ledder, G., (2006). *Ecuaciones diferenciales, un enfoque de modelado*. (p. 126). México. Ed. Mc Graw Hill.

Lyn, D. E. (2002). Temas y problemas prioritarios de la investigación internacional en educación matemática. En L. D. English (Ed.), *Manual de investigación internacional en educación matemática* (pp. 3-15). New Jersey, EE. UU.

- Lupiáñez, J. y Moreno, L. (2001). *Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas*, 248-256. Extraído el 06 Marzo, 2007, de http://menweb.mineducacion.gov.co/documentos/Forma_doce_mate_CAPITULO2A.pdf
- Martínez, A. (2008). Aprendizaje de competencias matemáticas, *Revista Avances en Supervisión Educativa*, 8(5).
- McGee, D. y Martínez, P., R. (2003). Un suplemento para un texto de cálculo. *Revista en Educación Matemática*, 15, 1, abril de 2003, pp. 51-65. Puede encontrarse en la página web <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40515103.pdf>
- Morales, V. y Hernández, P. (2009). Resignificación de los campos de pendientes en las ecuaciones diferenciales en un contexto electrónico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 22, 267-276.
- Moreno, L. (2001). *Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas*, 269-280. Extraído el 06 Marzo, 2007, de http://menweb.mineducacion.gov.co/documentos/Forma_doce_mate_CAPITULO2A.pdf
- Moreno, L. y Rojano, T. (1999). Educación matemática: investigación y tecnología en el nuevo siglo. *Revista Avance y Perspectiva*, 18, 325-333.
- Moreno, L. (2001). *La nueva matemática experimental*, 269-280. Extraído el 06 Marzo, 2007, de http://menweb.mineducacion.gov.co/documentos/Forma_doce_mate_CAPITULO2A.pdf
- Muñoz, A. (2005). El uso inadecuado de conceptos matemáticos en las escuelas de ingeniería. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 18, 377-382.
- NAE, (2005). *Educating the Engineer of 2020*. Adapting Engineering Education to the New Century. Recuperado en febrero de 2008 del sitio web <http://www.nap.edu/catalog/11338.html>
- Ortega, A., Nesterova, E. y Mendoza, R. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 22, 561-571.
- PISA. (2003a). *Aprender para el Mundo de Mañana* [Versión electrónica], Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid. Recuperado el 28 de marzo de 2007 del sitio web <http://www.ince.mec.es/pub/pisa2003resumenocde.pdf>
- PISA. (2003b). *Manual de Análisis de Datos* [Versión electrónica], Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid. Recuperado el 28 de marzo de 2007 del sitio web <http://www.ince.mec.es/pub/pisamanualdatos.pdf>

- PISA. (2003c). *Pruebas de Matemáticas y Solución de Problemas* [Versión electrónica], Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid. Recuperado el 28 de marzo de 2007 del sitio web <http://www.ince.mec.es/pub/pisa2003liberados.pdf>
- PISA. (2003d). *Marcos Teóricos de Pisa*. [Versión electrónica], Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid. Recuperado el 28 de marzo de 2007 del sitio web <http://www.ince.mec.es/pub/marcoteoricopisa2003.pdf>
- Prado, C. D. (2005). Plan estratégico para mejorar la eficiencia terminal en cursos de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 18, 169-175.
- Proenza, Y. y Leyva, L.M., Reflexiones sobre la calidad del aprendizaje y de las competencias matematicas, *Revista Iberoamericana de Educacion*, 40(6), 1-11, (2006).
- Queralt, T. (2000). *Un enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras gráficas*. Centro de información, innovación y recursos educativos de Torrent (CEFIRE) España. Recuperado el 12 de marzo de 2007 del sitio web <http://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/Enfoque.pdf>
- Radford, L. (2006). Introducción, Semiótica y educacion matematica, *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 9(Especial), 7-21.
- Rebekah, M., L. (2006). *Como las calculadoras graficadoras y la imagen visual contribuye a la comprensión del concepto de función en los estudiantes universitarios durante el curso de álgebra*. Disertación doctoral, Universidad del Estado de Florida, Estados Unidos.
- Rosa, N. A, (2001, julio). La calculadora y los sistemas semióticos de representación: Hacia un aprendizaje de los conceptos matemáticos. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas Xixim*, 2, Artículo 1. Recuperado el 7 de marzo de 2007 del sitio web Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro: <http://conedsup.unsl.edu.ar/>
- Sfard, A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1-36.
- Saucedo, R., (2005). La exploración de una ecuación diferencial con la ayuda de Voyage 200 y el CBL; un trabajo experimental. *Revista Innovaciones Educativas*, 7. 10-11.
- Santillana. (2006). *Diccionario de las Ciencias de la Educación* (primera edición). México: Editorial Santillana, S.A de C.V.
- Santos, M. y Arteaga, C. (2000). Comprensión de las representaciones gráfica y simbólica

por los estudiantes en las funciones y sus relaciones. Recuperado el 12 marzo de 2007 del sitio <http://www.matedu.cinvestav.mx/e-librosydoc/pme-procee.pdf>. pp 524-530.

- Segura, S. (2004). Sistema de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7, 49-78.
- Sosa, M., Aparicio, L y Tuyub, M. (2008). Diseño de actividades matemáticas con el uso de tecnología. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 22, 1631-1640.
- Stewart, J., (2002). *Cálculo, Trascendentes Tempranas* (cuarta edición). México: Thomson Learning.
- Swokowski, E., y Cole, J., (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (décima edición). México: Thomson Learning.
- Stuebing, S. (2004). Creación de ambientes de aprendizaje del siglo XXI [Versión electrónica], PEB Exchange, *El diario del programa de la OCDE para la construcción y el equipamiento de la educación*, 3, 7-9. Recuperado el 12 de marzo de 2007 del sitio web <http://www.oecd.org/dataoecd/50/24/36010908.pdf> o bien del sitio web <http://www.oecd.org/edu/facilities/journal>
- Tuning, (2007). Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina [Versión electrónica], *Proyecto Tuning 2004-2007*. Recuperado el 16 de mayo de 2007 del sitio web <http://tuning.unideusto.org.tuningal>
- Vilanova, S., Rocerau, M., Medina, P., Astiz, M., Oliver, M., Vecino, S. & Valdez, G. (2005). Concepciones de los docentes sobre la matemática, su incidencia en la enseñanza y el aprendizaje. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, 18, 444-449.
- Walpole, R. E., y Myers, R. H., (1989). *Probabilidad y estadística para ingenieros* (segunda edición). México: Interamericana.
- Zabala, A., y Arnau, L., (2008). *11 Ideas clave, ¿Cómo aprender y enseñar competencias?*. Barcelona. Editorial Grao. Segunda edición.
- Zill, D., (2006). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. México. Ed. Thomson. Octava edición.

Apéndice A.

Instrumento de medición diagnóstico

El presente conjunto de reactivos tiene como propósito determinar la eficiencia de los conocimientos (expresada mediante las competencias siguientes: modelar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones) que los alumnos tienen respecto de conceptos y procedimientos necesarios para abordar el estudio y tratamiento tanto de las ecuaciones diferenciales en general como de aquellos requeridos para el modelado de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Instrucciones: Lee detenidamente cada uno de los cuestionamientos y responde la opción correcta en la hoja de respuesta que se te ha proporcionado para tal efecto.

1.-Determine de las siguientes expresiones la que corresponde a una ecuación diferencial ordinaria lineal?

A) $e^x \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

B) $y'''+2x^3y'y = \cos(2x)$

C) $x \frac{dy}{dx} - (1+x)y^2 = xy$

D) $y'-x^2 \operatorname{sen} y = 2$

2.- Para encontrar el $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ usando valores numéricos, ¿Que procedimiento utiliza?

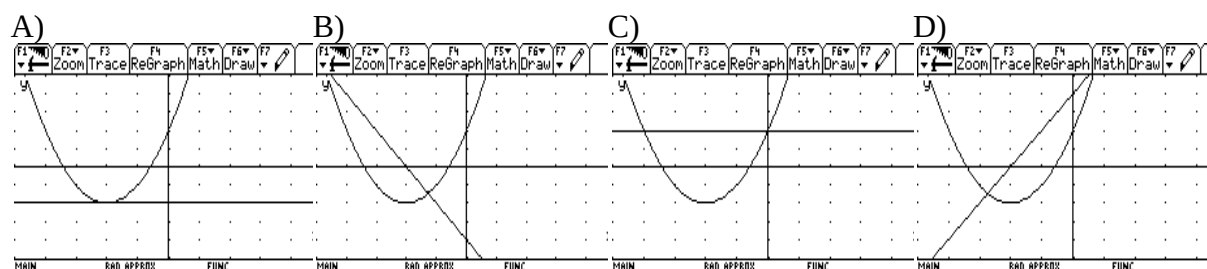
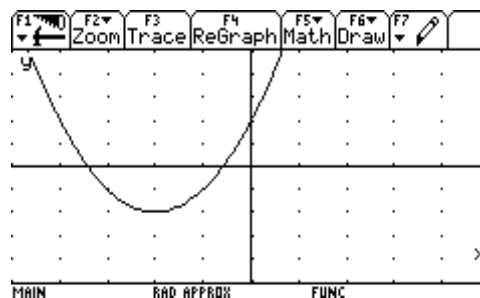
A) Tomar valores para x cada vez más cercanos a a ; encontrar para cada uno de ellos $f(x)$; observar y decidir hacia donde tienden esos valores.

B) Tomar valores para x cada vez más cercanos a a ; tomar algún valor cercano a a ; sustituirlo en $f(x)$ y ese será el límite.

C) Tomar valores para x cada vez más cercanos a a ; tomar algún valor cercano a a ; sustituirlo en $f'(x)$ y ese será el límite.

D) Tomar valores para x cada vez más cercanos a a ; tomar algún valor cercano a a ; sustituirlo en $f(x)$ y en $f'(x)$, la razón será el límite.

3.- La figura siguiente representa una función $f(x)$. Selecciona cual de las opciones siguientes aparece nuevamente $f(x)$ y su correspondiente función derivada.



4. Para el siguiente conjunto de datos, elige el que no representa una función en x

A)

x	y
-4	0
1	1
2	2

B)

x	y
-3	2
1	4
-1	6

C)

x	y
-1	0
1	1
-1	10

D)

x	y
-2	0
2	1
-8	2

5. Para la expresión $y = e^{2x+2}$, determina de las siguientes la que es equivalente.

A) $y = e^{4x}$

B) $y = 2e^{2x}$

C) $y = e^{2x} + e^2$

D) $y = e^{2x}e^2$

6. El número de raíces reales de la ecuación $x^2 - 1 = 0$ es:

A) 0

B) 1

C) 2

D) Ninguna de las anteriores

7. Un argumento para decir que la función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $[a, b]$ es:

A) La función $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$

B) La función derivada de $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a, b]$

C) La segunda derivada de la función $f(x)$ es igual a cero

D) La gráfica de la función es continua en el intervalo $[a, b]$

8. Un mayorista vende un producto por libra (o por fracción de libra); si se ordenan no más de 10 libras, el mayorista cobra \$2 dólares por libra. Sin embargo para atraer órdenes mayores, el mayorista cobra \$1.80 dólares por libra si se ordenan más de 10 libras. Considere que $C(x)$ el costo total de una orden de x libras del producto. De los siguientes modelos determina el que expresa correctamente las consideraciones del mayorista

A) $C(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leq 10 \\ 1.80x & \text{si } 10 < x \end{cases}$

B) $C(x) = \begin{cases} 1.8 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 2x & \text{si } 10 < x \end{cases}$

C) $C(x) = \begin{cases} 1.8x & \text{si } 0 \leq x \\ 2x & \text{si } 10 < x \end{cases}$

D) $C(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ 1.80x & \text{si } 10 < x \end{cases}$

9. Sea $P(t)$ la población en un momento t dado, entonces: $\frac{dP(t)}{dt} \propto P(t)$ significa:

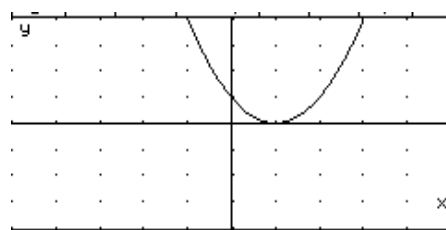
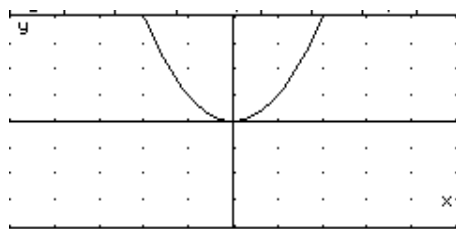
A) La variación de la población es directamente proporcional a la población presente

B) La derivada de la población es infinitamente mayor que la población en un momento t dado

C) La tasa de crecimiento poblacional es igual a la población en un instante t .

D) La derivada de la población es indirectamente proporcional a la población presente en un momento dado.

10. A continuación se presenta la gráfica de la función $f(x)$



A) $f(x+1)$ B) $f(x-1)$

C) $f(x)-1$ D) $-f(x)+1$

En base en ella determina la función correspondiente a la gráfica contigua.

11. El intervalo de valores para los cuales es válida la función $f(x) = \sqrt{4x-12}$ es:

A) $[-3, 0]$

B) $(-\infty, 3]$

C) $(-\infty, -3]$

D) $[3, +\infty)$

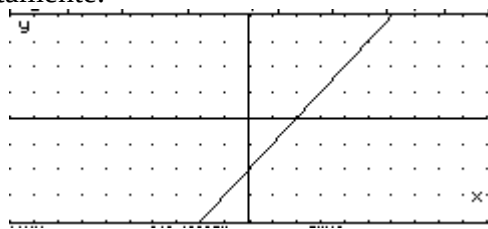
12. Un estudiante deberá tener una calificación promedio entre 82 y 91 en tres exámenes para obtener una calificación de B en un curso particular. Si las calificaciones del estudiante en los primeros dos exámenes son 85 y 96, ¿Cuál deberá ser la calificación del tercer examen para que la calificación del curso sea B?

- A) $x \leq 92$ B) $65 < x > 92$ C) $65 < x < 92$ D) $65 < x$

13. Dada la expresión $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$, esta puede resolverse mediante las técnicas:

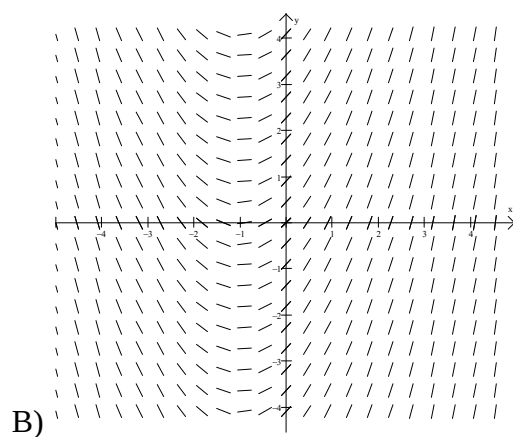
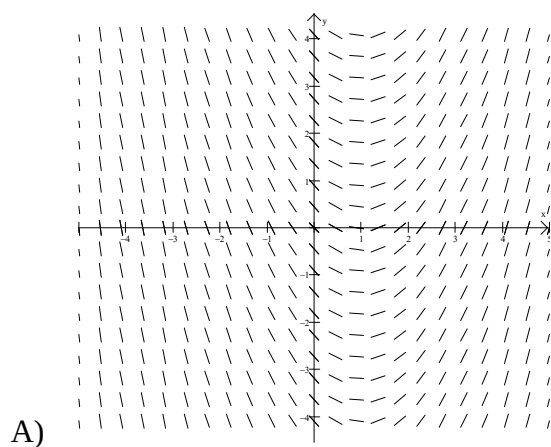
- A) Cambio de variable y por partes B) Sustitución trigonométrica y fracciones parciales
C) Por partes y fracciones parciales D) Por partes y sustitución trigonométrica

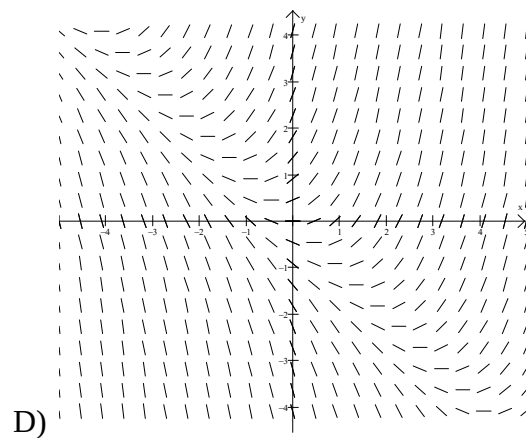
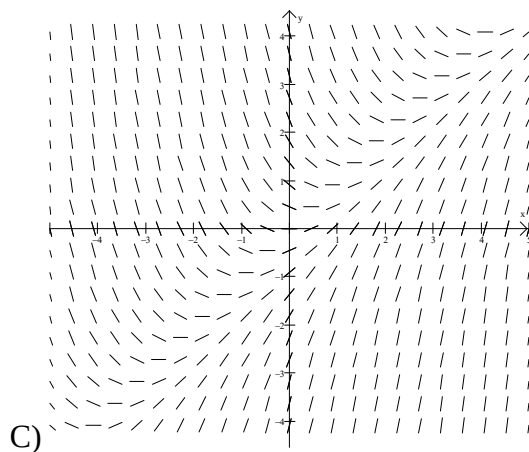
14.- Observa la gráfica siguiente y escoge cual de las opciones dadas enseguida la representa correctamente.



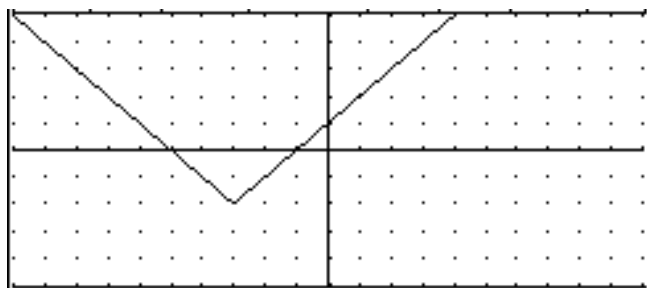
- A) Las parejas ordenadas $(-2, 0)$ y $(2, 0)$
B) Línea recta con pendiente negativa
C) $f(x) = x + 2$
D) Recta con pendiente $m = 1$ y ordenada en $y = -2$

15. Para la ecuación diferencial $y' = x - 1$, relaciona el gráfico con los campos de pendiente que le corresponde.





16. La ecuación de la gráfica que se presenta a continuación es:



A) $y = |x - 3| + 2$

B) $y = |x + 3| - 2$

C) $y = |x + 3| + 2$

D) Ninguna de las anteriores

17. El movimiento libre sobre una recta vertical de una partícula esta dada por la función $s(t) = -16t^2 + 128t + 500$, donde el tiempo esta en segundos y la altura en pies, mediante esta expresión es viable confirmar que:

A) En un tiempo $t = 4$ la partícula se encuentra en la posición más alta

B) La partícula no tiene aceleración constante en $t = 0$.

C) En un tiempo $t = 2$ la partícula se dirige hacia abajo.

D) En un tiempo $t = 4$ la partícula se encuentra a 500 pies de altura.

18. Para el conjunto de todas las x tales que $2x + 3$ es no negativo, su notación es:

A) $\{x/2x + 3 > 0\}$

B) $\{x/2x + 3 \geq 0\}$

C) $\{x/2x + 3 < 0\}$

D) $\{x/2x + 3 \leq 0\}$

19. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{4x+1}$ y $g(x) = x-2$, el valor de $f(g(4))$ es:

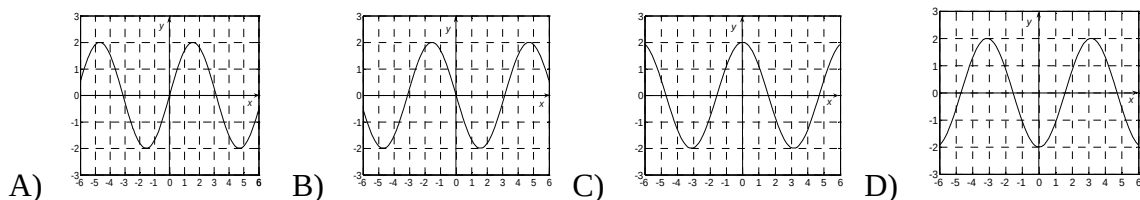
- A) $x = 3$ B) $x = \sqrt{17} - 2$ C) $x = 8$ D) $x = 5$

20. La solución de la ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + 4y = 0$ es:

- A) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ B) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$
C) $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$ D) $y = e^{-2x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$

21. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $f(x)$, si sabemos que

$$f(x) = \int 2\sin(x) dx$$



22. Si existe una función $f(x)$ para la cual $\int_{-2}^3 f(x) dx = 10$ y $\int_{-2}^0 f(x) dx = 1$, ¿cuál es el

resultado de la siguiente integral: $\int_0^3 f(x) dx$?

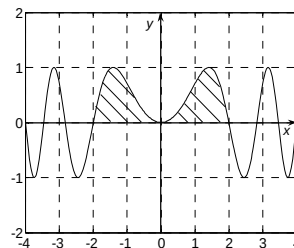
- A) 11 B) 1 C) 10 D) 9

23. La región acotada por el eje x y la función

$y = \sin\left(\frac{\pi}{4} x^2\right)$ se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál de

las siguientes integrales representa su área?

- A) $\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} x^2\right) dx$ B) $\int_{-2}^0 \sin\left(\frac{\pi}{4} x^2\right) dx$
C) $\int_{-2}^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} x^2\right) dx$ D) $\int_2^{-2} \sin\left(\frac{\pi}{4} x^2\right) dx$



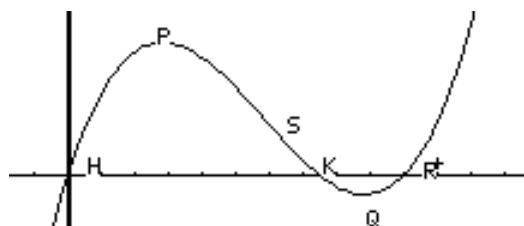
24. Seleccione de entre los términos que se mencionan un significado del concepto de derivada:

- A) Velocidad media
B) Incremento de la variable independiente
C) Pendiente de la recta tangente
D) Razón de cambio promedio

25. Indique la derivada numérica de la función $f(x) = x^3 - 4x + 2$ en $x = 0$

- A) 0
B) -2
C) 2
D) -4

26. En la siguiente gráfica indica en qué intervalo la concavidad de la función es hacia abajo.



- A) (Q , R)
B) (S, Q)
C) (P, S)
D) (Q , K)

27. El punto de inflexión analíticamente se obtiene con:

- A) Tercera derivada
B) Primera derivada
C) Segunda derivada
D) Sin derivar

28. ¿Cuál es la función que representa a la relación entre las variables cuyos valores se dan en la siguiente tabla?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-27	-8	-1	0	1	8	27

- A) $y = x^2$
B) $y = x^3$
C) $y = x^2 + 2$
D) $y = -x^2$

29.- La ecuación de la asíntota horizontal de la función $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 2}$ es:

- A) ∞
B) $y = 3$
C) $y = 0$
D) No existe

30. La ecuación diferencial $y y' = x^2$ de acuerdo al orden y linealidad es:

- A) Primer orden, no lineal B) Primer orden, lineal
C) Segundo orden, no lineal D) Ninguna de las anteriores

31. Un lote de 200 circuitos integrados contiene 20 defectuosos, se eligen 2 al azar, sin reemplazo, del lote. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo circuito seleccionado al azar no sea defectuoso, dado que el primero lo fue?

- A) $\frac{180}{199}$ B) $\frac{179}{199}$ C) $\frac{19}{199}$ D) $\frac{180}{200}$

32. Una tienda de autoservicio ha sido víctima de muchos ladrones durante el mes pasado, pero debido al aumento de las condiciones de seguridad de la tienda, se ha podido aprehender un número considerable de ladrones. Se registro el sexo de cada infractor y si este era su primer robo o si ya había sido sorprendido con anterioridad. Los datos se resumen en la siguiente tabla:

Sexo	Primera aprehensión	Reincidente
Hombre	90	57
Mujer	40	54

Suponiendo que un infractor es elegido al azar, y se sabe que es reincidente, encuentre la probabilidad de que sea hombre.

- A) $\frac{90}{94}$ B) $\frac{57}{147}$ C) $\frac{54}{147}$ D) $\frac{40}{94}$

33. Para la serie $\frac{3}{2} + \frac{9}{40} + \frac{9}{560} + \frac{3}{4480} + \dots$ indique cual es la recurrencia correcta.

- A) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i+1}}{2i+1}$ B) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^i}{2i+3} (-1)^i$ C) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i+1}}{(2i+1)!} (-1)^{2i}$ D) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i+1}}{(2i+1)!} (-1)^i$

34. Determine el valor de la raíz que satisface la ecuación $3(x+1) = 5(x-7) - (x-4)$

- A) $x = 7$ B) $x = 34$ C) $x = 12$ D) $x = 4$

35. Represente por medio de símbolos la proposición: La diferencia de los cubos de dos números.

- A) $(x - y)^3$ B) $x^3 - y$ C) $x - y^3$ D) $x^3 - y^3$

36. Factorice el trinomio $6x^2 + 7x - 20$

- A) $(2x + 5)(3x - 4)$ B) $(2x - 4)(3x + 5)$ C) $(2x - 5)(3x - 4)$ D) $(-2x + 5)(-3x - 4)$

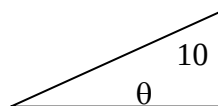
37. La solución de la ecuación $x^2 + 3x + 5 = 0$ tiene:

- A) Dos raíces reales distintas B) Raíz de multiplicidad dos (raíz doble)
C) Raíces complejas conjugadas D) Una raíz real y una imaginaria

38. Es una propiedad de los logaritmos

- A) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$ B) $\log_b MN = \log_b M - \log_b N$
C) $\log_b MN = (\log_b M)(\log_b N)$ D) $\log_b MN = \frac{\log_b M}{\log_b N}$

39. Con base en el triángulo siguiente, determine $\cos \theta$.



6

- A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{5}{3}$

40. Es el exponente que indica la potencia a la que debe elevarse la base para obtener el número.

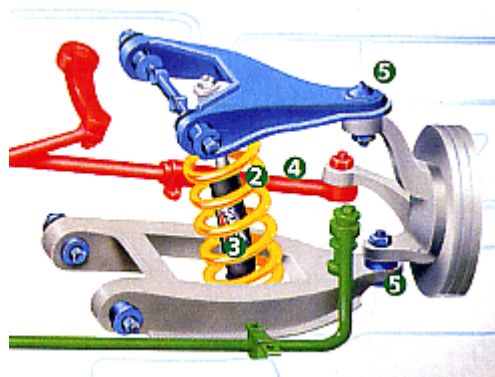
- A) Argumento B) Logaritmo
C) Ecuación Logarítmica D) Ecuación Exponencial

Apéndice B.

Estrategia didáctica

Actividad No. 1 (Actividad introductoria)

Se sabe que para que la suspensión de un vehículo mantenga las ruedas en contacto con el pavimento y proporcione un adecuado nivel de confort y seguridad para el conductor durante la marcha, esta debe trabajar en conjunto (muelle, amortiguador, barra de torsión, etc.) y de manera adecuada, en particular, se sabe que la rigidez del muelle (ver figura contigua) para un vehículo Nissan Sentra proporciona las características citadas cuando esta es alrededor de 20200 N/m mas menos 2% de tolerancia.



Obtenida de la página web:

<http://www.elreca.com/infoprod.htm>

Una empresa nueva esta proponiendo sustituir los muelles originales por otros de nuevo diseño y más económicos que los anteriores, las características de los nuevos resortes, se indican en la tabla siguiente.

Módulo de rigidez G	Diámetro del alambre d	Diámetro del espiral D	Número de vueltas del resorte Nv	Rigidez del resorte K en N/m
77 GPa	12 mm	125 mm	6.5	

La intención es establecer si estos nuevos muelles satisfacen la rigidez requerida para el confort del conductor no se deteriore. Para tal efecto deberá calcularse la rigidez de manera experimental y también de manera analítica, y compararla, en el entendido de que una diferencia mayor a 100 N/m entre ambas determinaciones o que la rigidez total no este dentro de la tolerancia, se concluye que dichos muelles no podrán ser colocados en el sistema de suspensión. Para el cálculo analítico es viable utilizar el modelo $R = \frac{G d}{8 C^3 N_v}$,

donde R es la rigidez del muelle y $C = \frac{D}{d}$ la razón de diámetros.

El experimento se lleva a cabo como lo muestra la figura contigua, obteniendo los datos de desplazamiento y fuerza indicados.



Foto obtenida en Arbeláez (2007)

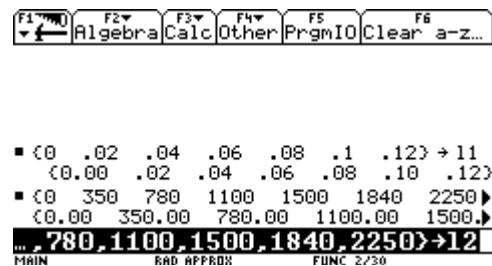
Desplazamiento (m)	Fuerza (N)
0	0
0.02	350
0.04	780
0.06	1100
0.08	1500
0.10	1840
0.12	2250

En base a lo anteriormente expuesto, determine:

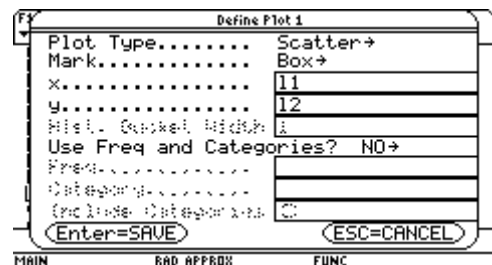
a) Rigidez experimental

Para calcular la rigidez experimental se sugiere visualizar la información en un registro gráfico, de manera que este contexto también permita interpretar la rigidez del muelle. Esta actividad llevada a cabo mediante el apoyo de la calculadora es relativamente simple.

Primeramente deben de editarse las relaciones de datos con las que se cuentan, la siguiente figura lo ejemplifica.



Se pasa posteriormente al editor de ecuaciones, se elige por ejemplo Plot 1. En el modo discreto (Scatter) y con marcas (mark) de cajas o alguna otra que se seleccione, se declara la lista 1 como variable en x y la lista 2 como variable dependiente.



Al presionar en dos ocasiones la tecla ENTER se obtiene la figura siguiente. La que ilustra que la información se encuentra editada y activada en Plot 1 en el modo discreto.

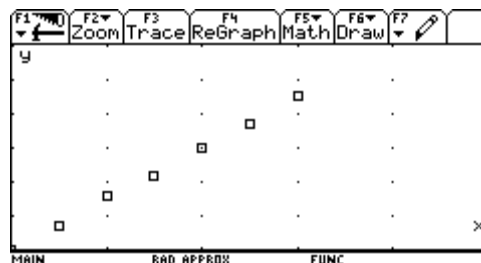


Es evidente que se requiere hacer un ajuste en la ventana de graficación para observar el patrón general. Si se usa la ventana:

$$x_{\min} = 0, x_{\max} = 0.2, x_{\text{scl}} = 0.04$$

$$y_{\min} = 0, y_{\max} = 3000, y_{\text{scl}} = 500$$

Se obtiene la figura siguiente.



Además de dar el resultado de la rigidez experimental, describa su interpretación de la misma en relación al conjunto de datos que se presentan y el gráfico obtenido.

b) Rigidez analítica

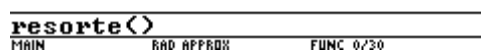
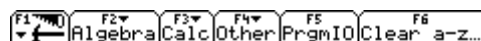
c) Comentarios sobre el comparativo de rigidez experimental y analítica

d) Las conclusiones respecto del nuevo resorte y su incorporación a la suspensión del vehículo

Actividad No. 2 (Movimiento libre no amortiguado)

Antes de empezar con la resolución del problema que se plantea en esta actividad, se revisará la simulación virtual con que se cuenta en la calculadora, las figuras contiguas y las instrucciones ayudarán para este efecto.

Después de encender la calculadora, presiona la tecla CLEAR y ENTER para limpiar la pantalla principal. Después escribe resorte() ENTER para arrancar con el programa de simulación.



Se obtendrá una pantalla como la que se presenta a la derecha, se iniciará con el Movimiento Armónico Simple, por lo tanto se presiona F1

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
MAS	MAL	MSOB	MCA	MSUB	ACTIV	FIN

F1:MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE
 F2:MOVIMIENTO AMORTIGUADOLIBRE
 F3:MOVIMIENTO SOBREAMORTIGUADO
 F4:MOVIMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO
 F5:MOVIMIENTO SUBAMORTIGUADO
 F6:ACTIVIDADES

Se tiene en la pantalla una muy breve descripción del modelo matemático que representa al movimiento y los parámetros que lo conforman.

F7:FIN

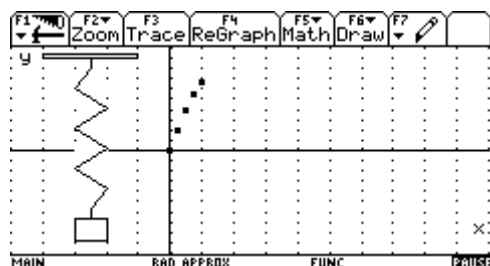
MAIN RAD APPROX FUNC 0/30

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Zoom	Trace	ReGraph	Math	Draw		

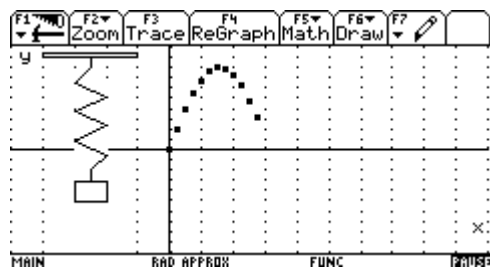
MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE
 O MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO
 LA ECUACION QUE MODELA ESTE MOVIMIENTO
 $m x'' + kx = 0$
 m es la masa del contrapeso
 x'' es la aceleracion
 k es la rigidez del resorte
 x es el desplazamiento

MAIN RAD APPROX FUNC 0/30 12/1993

Para quitar la pausa se presiona la tecla ENTER tantas veces sea requerido, después de presionar en 5 ocasiones la tecla se obtiene la figura mostrada a continuación, en la que es viable observar la extensión del resorte y como va cambiando la altura o posición del mismo respecto a la referencia (eje horizontal).

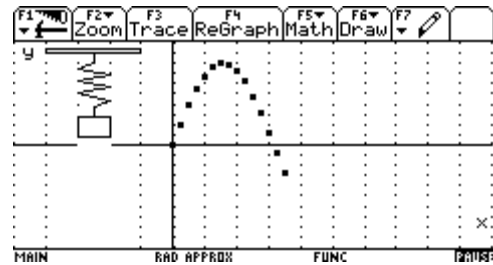


Después de pulsar en más ocasiones la tecla ENTER se encuentra la siguiente figura, responda las siguientes preguntas apoyado en lo que se observa en los gráficos.



- Determine la condición inicial del sistema en lo referente a la posición
- Cuando el punto coordenado se encuentra en el origen, ¿en dónde se encuentra el contrapeso?
- Cuando los puntos coordenados van de subida, ¿hacia donde se dirige el contrapeso?
- Si el conjunto de puntos se unen, y en la parte superior se traza una recta tangente, ¿Cuál es su magnitud?, ¿Qué representará en el sistema masa resorte?

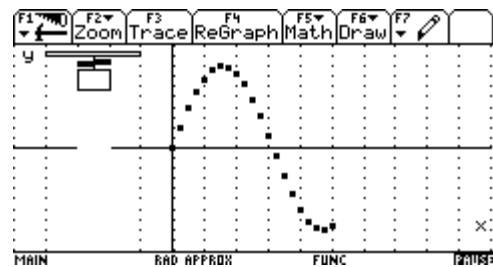
Al proseguir con el movimiento del contrapeso, después de 3 pulsos más, se obtiene la figura contigua.



e) Si se unen los puntos del gráfico, ¿Cómo se interpreta el corte de la gráfica con el eje x respecto del contrapeso?

f) Los puntos del gráfico que se encuentran por debajo del eje horizontal, ¿Qué indican respecto al contrapeso y su posición?

Después de varios pulsos a la tecla ENTER, puede obtenerse el esquema de la derecha.

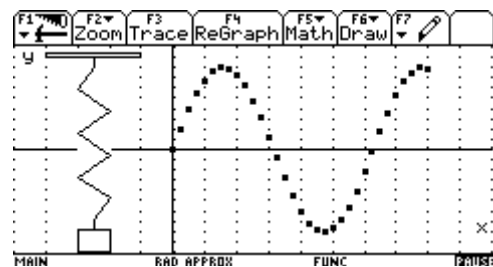


g) ¿Cómo se interpreta el punto más bajo de la curva, respecto del contrapeso?

h) Entre el punto más alto y el más bajo de la gráfica, si se unieran los puntos uno a uno y se trazaran rectas tangentes, ¿Qué signo tiene?

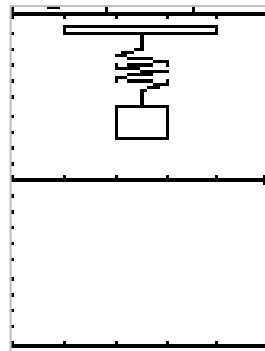
i) Puede ese signo establecer la dirección del contrapeso, si es si conteste, ¿Cuál es la relación?

Detenga en el último pulso la simulación y observe la gráfica, en el mismo señale el periodo y la amplitud, además recuerde como se calcula cada uno de ellos además de la frecuencia.



Actividad No. 2A continuación (Movimiento libre no amortiguado)

Un contrapeso de 64 libras unido al extremo de un resorte hace que éste se estire 0.32 pies. A tiempo $t = 0$ el contrapeso se suelta desde un punto a 8 pulgadas sobre la posición de equilibrio con una velocidad inicial hacia abajo, de 5 pies por segundo haciendo que el contrapeso empiece a oscilar.

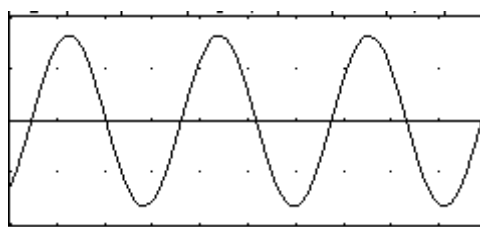


Determine los siguientes cuestionamientos que se solicitan:

- a) La ecuación diferencial que modela el sistema
- b) Las condiciones iniciales del sistema
- c) La ecuación del movimiento del sistema.

d) Una vez obtenida la ecuación de movimiento procede a graficarla con la calculadora, obtendrás un bosquejo como el que se muestra a continuación, utilizando la ventana indicada:

$$\begin{aligned}x_{\min} &= 0, x_{\max} = 2, x_{\text{scl}} = 0.2 \\y_{\min} &= -1.0, y_{\max} = 1.0, y_{\text{scl}} = 0.5\end{aligned}$$



Observa la gráfica y utiliza la calculadora para determinar los aspectos que se solicitan

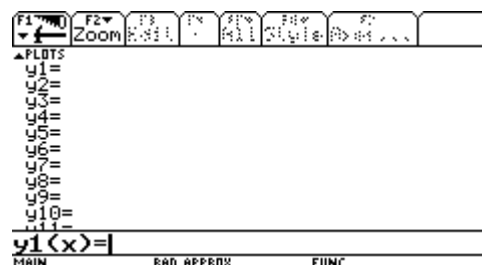
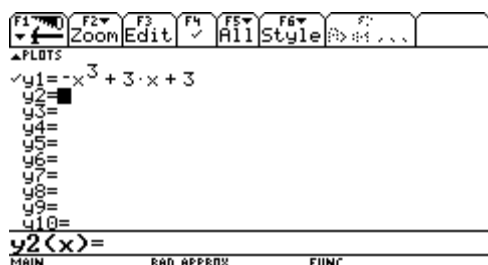
- e) Calcule la amplitud, el periodo del movimiento y la frecuencia
- f) Interprete y describa tales características (amplitud y periodo) apoyado con el gráfico respectivo.

g) ¿En qué momento alcanza el contrapeso su desplazamiento extremo en ambos lados de la posición de equilibrio?

Estos cálculos se pueden llevar a cabo o se pueden verificar con el uso de la calculadora, solamente se requiere seguir las siguientes instrucciones:

En el editor de ecuaciones, en y1 por ejemplo se escribe la función objeto de análisis, aquí se utiliza una elegida arbitrariamente:

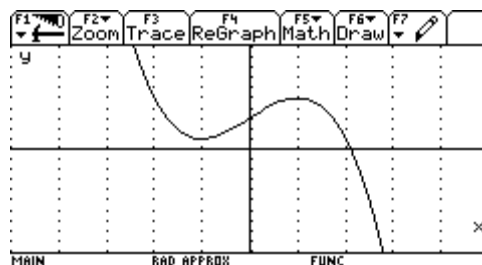
$$y1(x) = -x^3 + 3x + 3$$



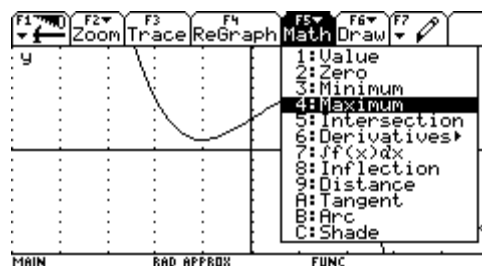
Una vez editada y activada (indicación que se logra con F4 y se exhibe con la palomita a la izquierda de la ecuación). Se procede al ajuste de ventana, la cual se obtiene con las teclas diamante y E. Un ajuste adecuado se logra con la siguiente ventana:

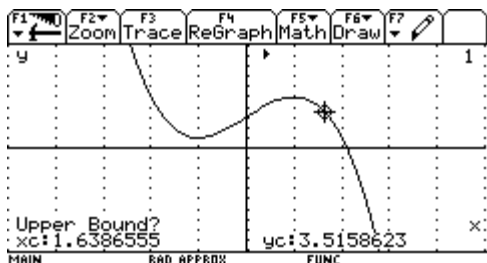
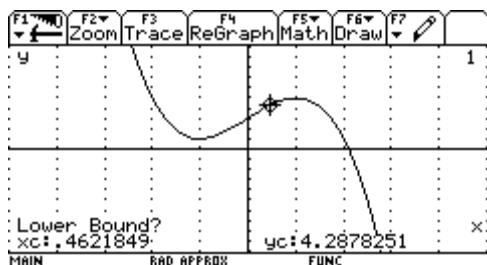
$$\begin{aligned} x_{\min} &= -5, x_{\max} = 5, x_{\text{scl}} = 1 \\ y_{\min} &= -10, y_{\max} = 10, y_{\text{scl}} = 1 \end{aligned}$$

Con lo anterior es viable obtener la gráfica, presionando las teclas diamante y R. Lo que sigue es relativamente sencillo, de la barra de herramientas superior se usará F5



Lo que se va a calcular es precisamente el máximo de la curva, también llamado desplazamiento extremo, si la función que representa al gráfico corresponde a una ecuación de movimiento.



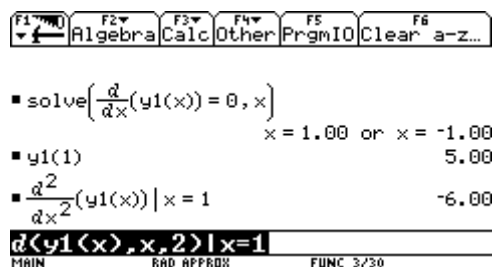
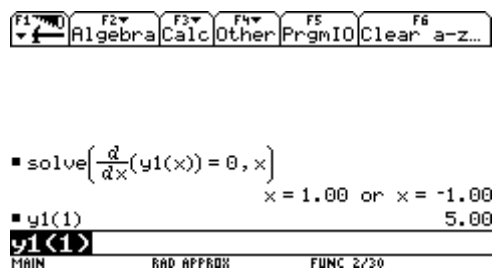


De manera analítica también es bastante sencillo realizar el cálculo, en la pantalla principal, una vez declarada la ecuación en $y1$, como se ha venido realizando, se deriva y resuelve mediante la instrucción mostrada en la pantalla derecha. Finalmente se evalúa la función en la raíz para obtener la coordenada completa.

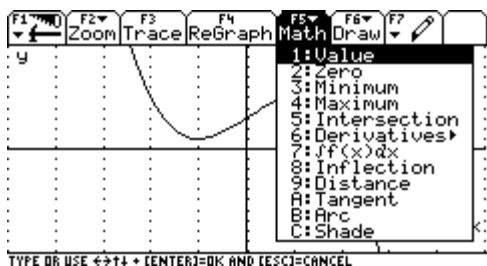
Observe en este caso se producen dos resultados por la geometría de la ecuación arbitraria, para asegurar que se trata de un máximo, el criterio de la segunda derivada es suficiente, el cual puede verificarse como se indica en la siguiente figura.

Debe fijarse un punto previo y uno que se encuentre adelantado, es decir indicar el intervalo dentro del cual se solicita el máximo.

El resultado (coordenada completa del punto máximo) es arrojado de manera inmediata, toda vez que se haya señalado el punto adelantado al desplazamiento extremo.



h) ¿Cuál es la posición del contrapeso en $t = 1$ s?,
La posición del contrapeso puede determinarse también en este ambiente gráfico, si se sigue la siguiente estrategia.



En F5 seleccione la opción 1, correspondiente a evaluar la función.

The screenshot shows the TI-84 Plus CSE calculator in the Function Editor. The top of the screen displays a row of function keys: F1 (left arrow), F2 (Zoom), F3 (Trace), F4 (ReGraph), F5 (Math), F6 (Draw), and F7 (a pencil icon). Below this, a coordinate plane is shown with a grid. A curve is plotted, and a cursor is positioned on it. The bottom of the screen shows the coordinate axes with labels 'xc:1.0000000' and 'yc:5.0000000'. The bottom status bar shows 'MAIN', 'RAD APPRX', and 'FUNC'.

j) Calcule la velocidad instantánea para $t = 1$ segundo

The screenshot shows the TI-84 Plus CSE calculator's Math menu. The menu options are: 1:Value, 2:Zero, 3:Minimum, 4:Maximum, 5:Intersection, 6:Derivatives, 7:if(x)>dx, 8:inflection, 9:Distance, A:Tangent, B:Arc, and C:Shade. The '6:Derivatives' option is highlighted. Below the menu, the text 'TYPE OR USE $\leftrightarrow$+$=$[ENTER]=OK AND [2ND][ENTER]=CANCEL' is visible.

l) ¿Qué relación hay (en caso de haber) entre el signo de la pendiente de la recta tangente en un instante t y la dirección del contrapeso en ese momento?

m) ¿Cómo se clasifica este tipo de movimiento que acabas de analizar?

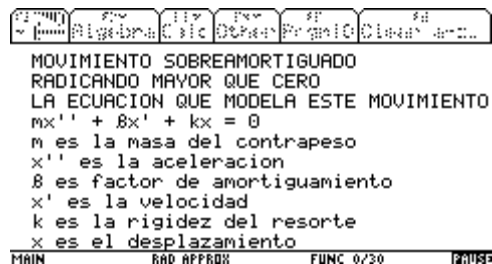
En el mismo ámbito del sistema masa-resorte, interprete el problema de valor inicial $x''(t) + 4x(t) = 0$, sujeto a las condiciones: $x(0) = 2$ y $x'(x) = -4$

En un sistema masa-resorte, se tira hacia abajo la masa (contrapeso) unida a un resorte 10 unidades de longitud respecto de la posición de equilibrio, esta se sujeta y a partir de un tiempo $t = 0$ se suelta desde el reposo en ese instante. Determine:

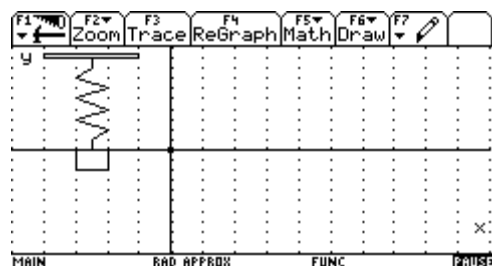
b) La gráfica tiempo contra posición del contrapeso y estime el desplazamiento extremo.

Actividad No. 4 (Movimiento sobrearmortiguado)

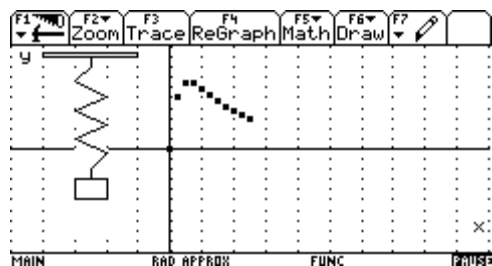
Antes de iniciar con el problema se revisará nuevamente el simulador virtual del sistema, ingresando en F3, en ese momento se activará la siguiente figura, la cual muestra de manera muy breve el modelo matemático y los parámetros involucrados.



El inicio de la simulación es a partir de que se encuentra el contrapeso en la posición de referencia (eje horizontal) y se marca en el origen del sistema de coordenadas el punto correspondiente.



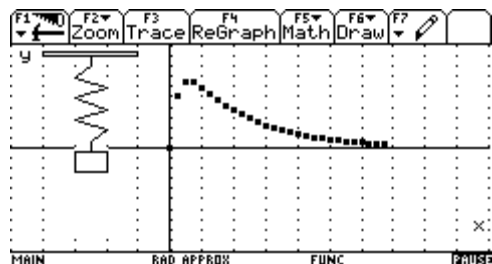
Después de 11 pulsos para eliminar la pausa, se presenta el siguiente esquema, puede notarse en el primer pulso un cambio brusco de posición, es decir un cambio de altura diferenciado de los demás.



a) A través del tiempo y después de que el contrapeso se encontraba en su desplazamiento extremo, indique que esta ocurriendo con la velocidad de la masa.

b) ¿Hacia donde se dirige el contrapeso?

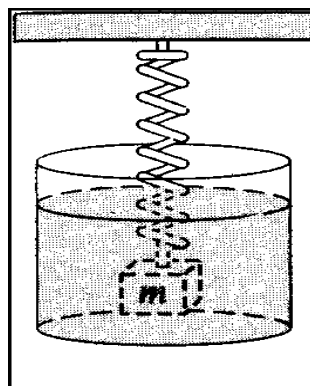
Después de una serie de pulsos adicionales se puede corroborar lo que ocurre con la velocidad, y desde luego asociarla con la magnitud de la recta tangente.



- c) Para $t > 0$, el contrapeso, ¿traspasa el eje de referencia en alguna ocasión?
- d) ¿Cuáles son las diferencias principales entre los dos movimientos analizados?

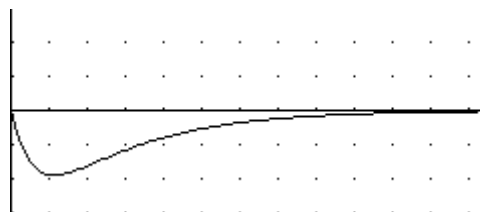
Actividad No. 4A continuación (Movimiento sobrearmortiguado)

Una masa de 1 Kg. está unida a un resorte cuya constante es 16 N/m y todo el sistema se sumerge en un líquido que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 10 veces la velocidad instantánea.

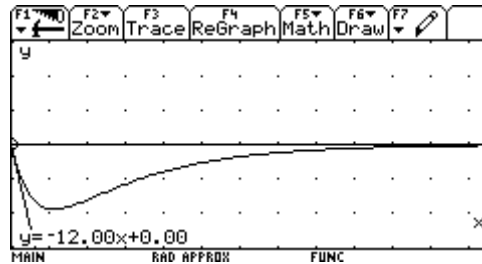


Determine los cuestionamientos que se te solicitan:

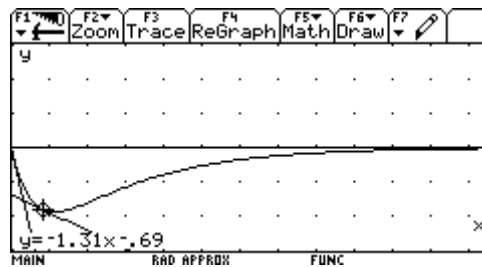
- a) La ecuación diferencial que modela el sistema
- b) La ecuación del movimiento del sistema. Si el contrapeso se suelta partiendo de la posición de equilibrio con una velocidad de 12 m/s hacia arriba.
- c) Si resuelves la ecuación auxiliar mediante la fórmula general, ¿qué signo tiene el radicando?
- d) Una vez obtenida la ecuación de movimiento procede a graficarla, obtendrás una gráfica como la que se muestra a continuación, para tal caso utiliza la ventana siguiente:
 $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 2.5$, $x_{\text{scl}} = 0.2$
 $y_{\min} = -1.5$, $y_{\max} = 1.5$, $y_{\text{scl}} = 0.5$



Antes de responder los incisos se revisará la velocidad inicial en el gráfico obtenido, toda vez que la condición de posición es evidente. En el modo gráfico y en la barra de herramientas se elige F5, luego la instrucción tangente y se declara el valor en el cual se desea que se trace la recta, después se presiona la tecla ENTER para obtener la figura mostrada, de manera automática en el margen inferior izquierdo se impresiona la ecuación de la recta tangente, validando la condición inicial de velocidad.



Verifique con la misma estrategia que en $t = 0.17$ la velocidad es menor que la inicial y negativa también, y que el contrapeso en ese momento se dirige hacia arriba.



e) Ubique en el gráfico el desplazamiento extremo

f) Ubique aproximadamente en la gráfica el momento en el que el contrapeso se encuentra en la posición más alta respecto de la posición de equilibrio

g) Determine el tiempo y la posición del desplazamiento extremo, primero con tecnología de papel y lápiz y luego con tecnología de la calculadora, compara los resultados.

h) ¿Cuántas veces pasa el contrapeso por la posición de equilibrio?

i) ¿Qué sucede con el contrapeso conforme aumenta el tiempo t ?

j) ¿Cómo se clasifica este tipo de movimiento que acaba de analizar?

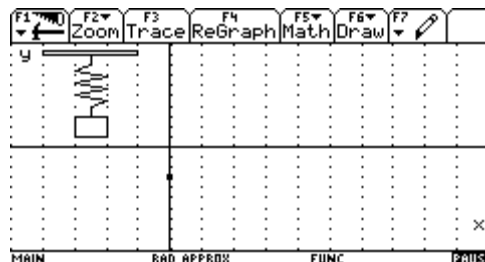
Actividad No. 5 (Movimiento subamortiguado)

Antes de iniciar la actividad se revisará la simulación de manera que se familiarice con el tipo de movimiento que se pretende analizar.

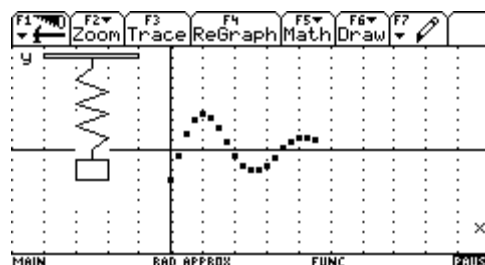
Note que el contrapeso se encuentra sobre la referencia y el primer punto sobre el eje vertical esta a tres unidades bajo el eje x.

a) ¿Cuál es la condición inicial respecto a la posición del contrapeso?

Nota: utilice lenguaje formal matemático



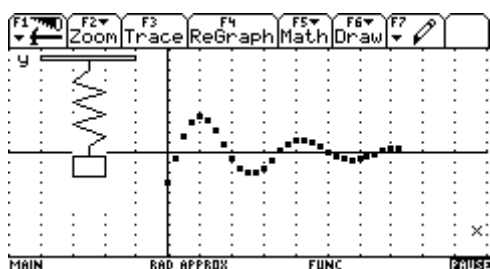
Después de varios pulsos es viable observar el comportamiento gráfico del sistema e irlo contrastando con su efecto físico.



b) Al paso del tiempo que ocurre con los máximos (se asume como máximo toda vez que se cumple que en tal punto la velocidad instantánea o pendiente de la recta tangente es cero)?

c) ¿Físicamente que le ocurre al contrapeso respecto al eje de referencia?

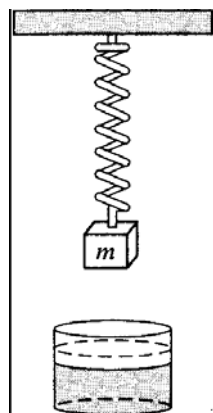
d) Al paso del tiempo, ¿qué ocurre con la velocidad respecto a su magnitud?



Este es el último gráfico que se obtiene de la simulación. Ahora continúe con el problema del sistema masa-resorte que se presenta a continuación.

Actividad No. 5A continuación (Movimiento subamortiguado)

Si se aplica una fuerza de 2 libras a un resorte, éste se estira 1 pie. Utilizando ese mismo resorte, ahora le conectamos un contrapeso de 3.2 libras y el sistema completo se sumerge en un medio que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 0.4 la velocidad instantánea.

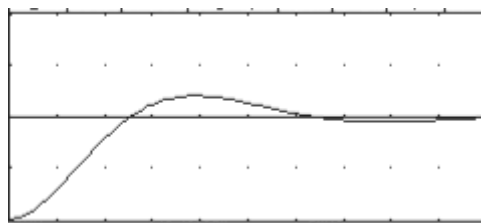


Determine los siguientes cuestionamientos

- a) La ecuación diferencial que modela el sistema
- b) La ecuación del movimiento si el contrapeso parte del reposo 1 pie arriba de la posición de equilibrio.

c) Una vez obtenida la ecuación de movimiento procede a graficarla, obtendrás una gráfica como la que se muestra a continuación, utiliza la ventana siguiente:

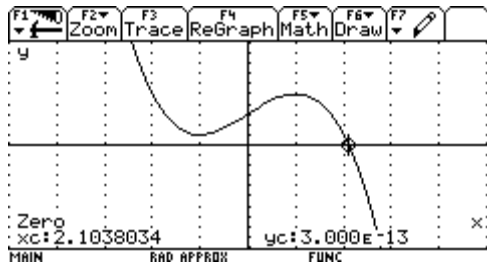
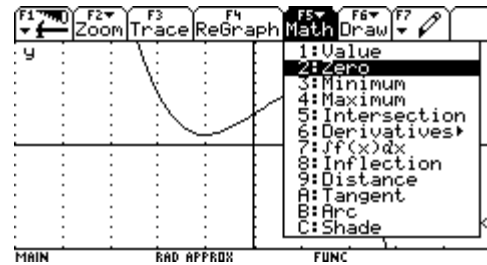
$$\begin{aligned}x_{\min} &= 0, x_{\max} = 2, x_{\text{scl}} = 0.2 \\y_{\min} &= 1.5, y_{\max} = 1.5, y_{\text{scl}} = 0.5\end{aligned}$$



Tome como referencia la gráfica y utilice la calculadora para contestar lo que se solicita, para determinar un corte de la gráfica respecto del eje x la calculadora es de mucha ayuda, toda vez que se especifique el intervalo dentro del cual se encuentra la raíz. A continuación se ilustran algunas estrategias que puede utilizar para tal fin.

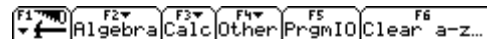
Considere la función polinómica $y_1(x) = -x^3 + 3x + 3$ elegida arbitrariamente y utilizada en casos anteriores.

En el ambiente gráfico se elige la opción 2, correspondiente al cero de la ecuación y se especifica el intervalo dentro del cual se ha identificado la raíz.



Para finalmente obtener la solución en $x = 2.1038034$, donde la ordenada resulta ser cero prácticamente.

Otra alternativa muy interesante dado que se obtienen todas las soluciones reales o imaginarias según sea el caso, es en la pantalla principal con la instrucción cSolve, a la derecha se ejemplifica con la misma expresión.



```

cSolve(y1(x)=0,x)
x = -1.0519017 + .5652359i or x = -1.0519017 - .5652359i

```

d) El tiempo en el que el contrapeso pasa por primera ocasión por la referencia o posición de equilibrio.

e) El tiempo y la posición en el que el contrapeso se encuentra en la parte mas baja

f) El momento en el que el contrapeso pasa por segunda ocasión por la posición de equilibrio, establece también la dirección del contrapeso.

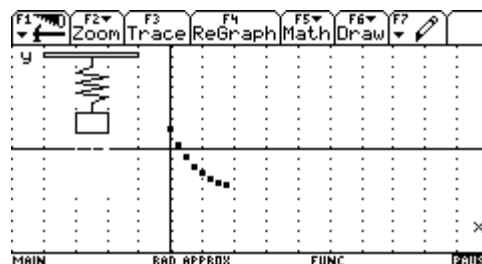
g) ¿Cuántas ocasiones pasa el contrapeso por la posición de equilibrio?

h) ¿Qué sucede con el contrapeso conforme aumenta el tiempo t ?

i) Cuando resolvió la ecuación auxiliar mediante la fórmula general, ¿qué signo tenía el radicando?

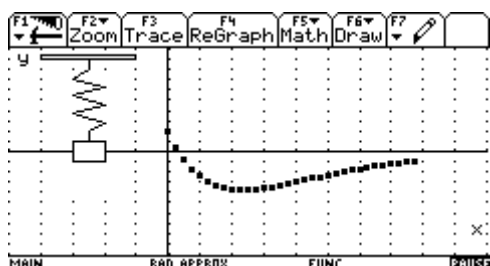
Actividad No. 6 (Movimiento críticamente amortiguado)

Primeramente revise la simulación para el caso de este tipo de movimiento, mediante F4, después de 7 pulsos se obtiene el siguiente gráfico.



a) Cuando el contrapeso pasa por primera vez por la referencia, ¿hacia donde se dirige?

b) En el último momento que se presenta en este gráfico, ¿Cómo es la magnitud de la velocidad del contrapeso con respecto a la condición inicial?



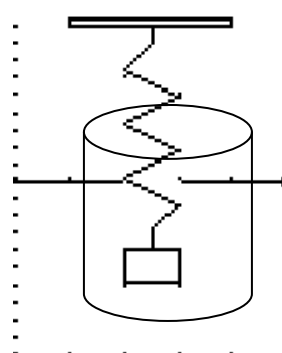
Esta es la última figura de la simulación que se presenta para el movimiento críticamente amortiguado.

c) ¿Cuál es la tendencia del contrapeso con el paso del tiempo?

Actividad No. 6A continuación (Movimiento críticamente amortiguado)

Un resorte con rigidez de 4 libra/pie se le sujeta un contrapeso de 32 libras. El medio a través del cual se mueve ofrece una resistencia numéricamente igual a 4 veces su velocidad instantánea. La pesa se suelta de 1 pie por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 4 pie/segundo hacia arriba.

Determine los siguientes cuestionamientos

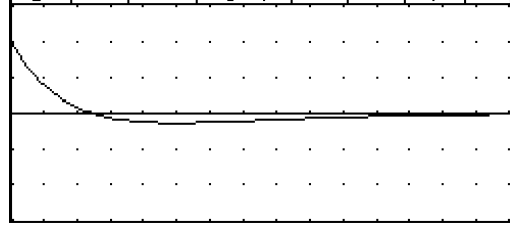


a) La ecuación diferencial que modela el sistema

b) La ecuación del movimiento

c) Una vez obtenida la ecuación de movimiento proceda a graficarla, obtendrá una gráfica como la que se muestra a continuación, utilice la ventana siguiente:

$$\begin{aligned}x_{\min} &= 0, x_{\max} = 3, x_{\text{scl}} = 0.2 \\ y_{\min} &= 1.5, y_{\max} = 1.5, y_{\text{scl}} = 0.5\end{aligned}$$



Tome como referencia la gráfica y utilice la calculadora para contestar los siguientes aspectos:

d) Asocie la velocidad del contrapeso en $t = 0$ para establecer la dirección de la carga en ese instante

e) ¿Cuántas veces pasa el contrapeso por la posición de equilibrio?

f) Al resolver la ecuación auxiliar por la fórmula general como queda el radicando? ($>$, $<$ o igual a cero)

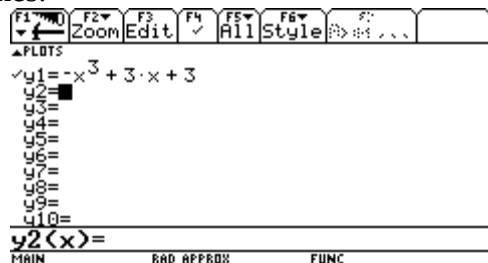
g) Al paso del tiempo, ¿Qué ocurre con el contrapeso respecto a su posición?

h) ¿A partir de qué instante el contrapeso ya no baja de la posición de referencia?

i) A continuación se presenta una tabulación, indague si corresponde a la gráfica de tiempo contra posición del problema en cuestión.

x	y10
0	1
0.25	0.3032
0.5	0
0.75	-0.111
1	-0.135
1.25	-0.123
1.5	-0.099
1.75	-0.075
2	-0.054
2.25	-0.038
2.5	-0.026
2.75	-0.018
3	-0.012

La calculadora puede ser de mucha utilidad para generar tablas de datos, considere la multicada ecuación arbitraria, basta con capturarla en el editor de ecuaciones:



Ajuste primeramente el inicio y paso de la tabla en diamante T, digamos que inicie en 0, y que el avance o paso (step en inglés) sea de 0.25



Después de ajustar las condiciones de la tabla, se presiona ENTER en dos ocasiones y luego diamante Y para generar la tabulación esperada.

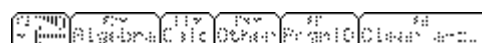
j) Si corresponde entonces conteste la siguiente pregunta ¿Cuántas veces pasa el contrapeso por la posición de equilibrio?, Justifique la respuesta.

Actividad No. 7 (Jugando con la calculadora)

Del menú principal de la calculadora se selecciona F6, que corresponde a las actividades, se propone que se juegue con los casos que se presentan, para efecto de ejemplificar aquí se describirá el caso 3. Primeramente se indican las escalas del gráfico.

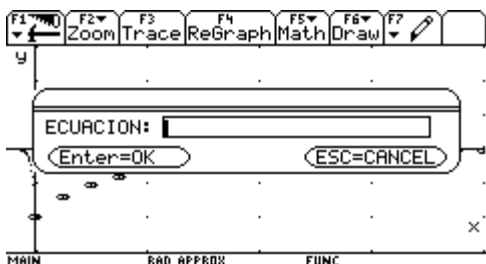
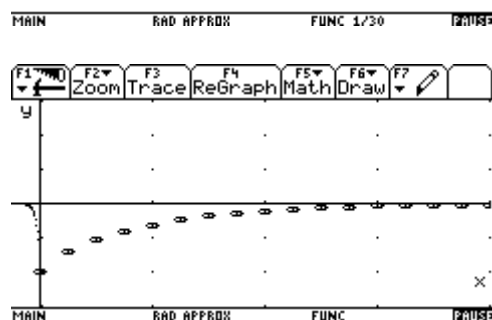
La gráfica muestra el comportamiento tiempo contra posición de un contrapeso que forma parte de un sistema masa-resorte.

El propósito de la actividad es determinar la ecuación diferencial que modele el sistema, previamente habrá de establecerse la ecuación de movimiento, a continuación las condiciones del sistema.



VENTANA DE GRAFICACION

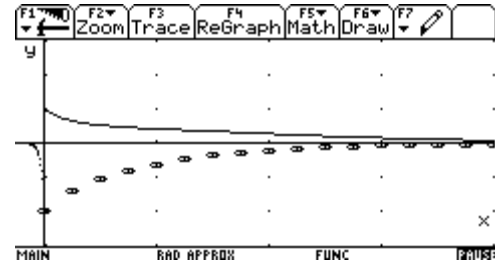
EN EL EJE HORIZONTAL DE 0A 4
PASO 1
EN EL EJE VERTICAL DE -3 A 3
PASO 1



Después de quitar la pausa con la tecla ENTER aparece el editor de ecuaciones, el cual permite introducir la propuesta de ecuación de movimiento que crea pertinente, basado en los conocimientos y habilidades logradas hasta esta etapa del proceso. Considere que la variable de

entrada en el editor es x, a diferencia de la utilizada convencionalmente t para el estudio y tratamiento del sistema masa-resorte.

A continuación se presenta una propuesta arbitraria sujeta a análisis y reflexión, pero cuyo único propósito es mostrar la mecánica del juego.



Una vez que la gráfica de la ecuación de movimiento se monte perfectamente sobre el conjunto de puntos generado por el ordenador se podrá proseguir a la determinación general y específica de la ecuación diferencial que modela el sistema del caso 3. Para los demás casos se procede de manera similar.

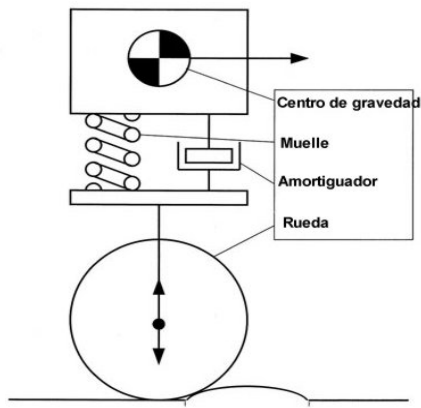
Actividad No. 8 (Investigando y proponiendo soluciones de ingeniería)

El dueño y conductor de una motocicleta Kawasaki, como la que se muestra, esta inconforme con el sistema de suspensión de la misma, toda vez que durante el paso por un bache en el camino percibió que se necesita de mucho tiempo para que la motocicleta se estabilice nuevamente. El dueño de la motocicleta quiere que se le devuelva su dinero por tal incidente, y adquirir otra motocicleta de marca conocida también, como asistentes de ingeniería de la empresa del servicio debe revisarse la situación, y en su caso hacer alguna propuesta en términos de mejoras a los amortiguadores o al resorte que componen el sistema de suspensión.



Imagen obtenida de la página web:
<http://www.arpem.com/motos/modelos/kawasaki/modelos-08/kawasaki-versys-650.html>

Para establecer algo concluyente al respecto se efectuará el análisis de la suspensión con el modelo y los datos que a continuación se presentan, enseguida determine cada uno de los puntos que se señalan.



Datos

Peso de la motocicleta: 180 kg

Peso del conductor: 80 kg

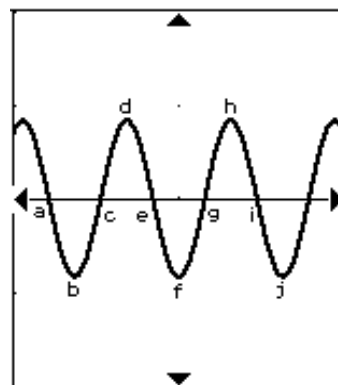
Deformación debida al peso del conductor: 25 mm

Coefficiente de amortiguamiento: $C_c = 3000$ N.s/m

- a) La ecuación diferencial que modela el sistema
- b) La ecuación del movimiento relativo si la rueda parte 0.02 metros arriba de un borde con una velocidad vertical y hacia arriba de 5 metros por segundo.
- c) El momento en el que se tiene el desplazamiento extremo
- d) El desplazamiento extremo
- e) Tiempo que tarda en estabilizarse
- f) Establecer si el piloto tiene razón en la queja presentada
- g) Criterios para mejorar la suspensión en caso de requerirlo
- h) Propuesta y análisis gráfico de la misma

Actividad No. 9 (Complementaria)

Observe la gráfica que se le presenta a continuación y responda los cuestionamientos que se le solicitan



- a) Es el punto en el cual el contrapeso pasa por la posición de equilibrio por segunda vez y va de subida
- b) La dirección del contrapeso en el punto i
- c) La segunda vez que el contrapeso se encuentra en la parte más alta respecto a la posición de equilibrio.
- d) En $t = 0$ la dirección del contrapeso

Actividad no. 10 (Complementaria)

La tabulación que se te presenta responde al conjunto de parejas ordenadas tiempo contra posición (identificada como y_4), de un sistema masa resorte.

Determine en base a su análisis el tipo de movimiento al que corresponde y describa físicamente el movimiento del contrapeso

x	y_4
0	0.1
0.25	-0.782
0.5	-0.731
0.75	-0.361
1	-0.051
1.25	0.087
1.5	0.0962
1.75	0.0534
2	0.0119
2.25	-9E-3
2.5	-0.012
2.75	-7E-3
3	-2E-3

Actividad No. 11 (Complementaria)

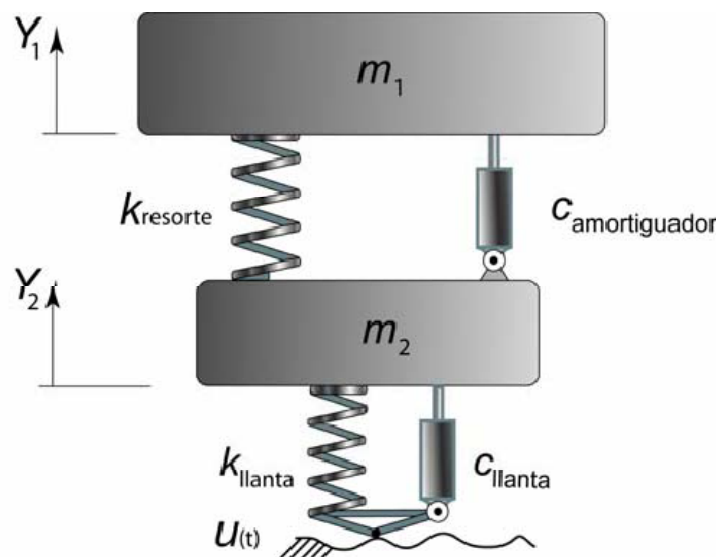
La tabulación que se te presenta responde al conjunto de parejas ordenadas tiempo contra posición (y8), de un sistema masa resorte.

Determina en base a su análisis el tipo de movimiento al que corresponde y describa físicamente el movimiento del contrapeso

x	y8
0	-0.5
0.1963	-0.176
0.3926	0.25
0.589	0.5303
0.7853	0.5
0.9817	0.1767
1.178	-0.25
1.3744	-0.53
1.5707	-0.5
1.7671	-0.176
1.9634	0.25
2.1598	0.5303
2.3561	0.5
2.5525	0.1767
2.7488	-0.25

Actividad No. 12 (Complementaria)

Explique la validez del modelo que se presenta a continuación para el análisis de un sistema de suspensión de un vehículo, y cuales son sus implicaciones matemáticas para efecto de sus respectiva solución.



Actividad No. 13 (Complementaria, movimiento forzado no amortiguado)

Considere un sistema mecánico cuya masa es 200 kilogramos y un resorte o muelle con rigidez de 200000 Newton/metro, sometido a una fuerza externa $f(t) = 2 \sin 10 \sqrt{10} t$, el sistema mecánico no cuenta con amortiguador y las condiciones iniciales son: $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$. Elabore la gráfica de respuesta del sistema y explique su comportamiento.

Apéndice C.

Instrumento de medición (post-test)

1. Un objeto que pesa 32 libras se une a un resorte de 2 pie de longitud. En la posición de equilibrio, el resorte mide 2.4 pie. La rigidez del resorte es de:

- A) 12.8 lb/pie B) 80 lb/pie C) 16 lb/pie D) 64 lb/pie

2. Una masa que pesa 4 libras se une a un resorte cuya constante es 18 libras por pie. El periodo del movimiento armónico simple es:

- A) $\frac{1}{6}\pi$ B) π C) $\frac{1}{12}\pi$ D) 2π

3. Para el caso del problema anterior (problema 2), la frecuencia del sistema es:

- A) $\frac{6}{\pi}$ B) $\frac{1}{\pi}$ C) $\frac{12}{\pi}$ D) $\frac{1}{2\pi}$

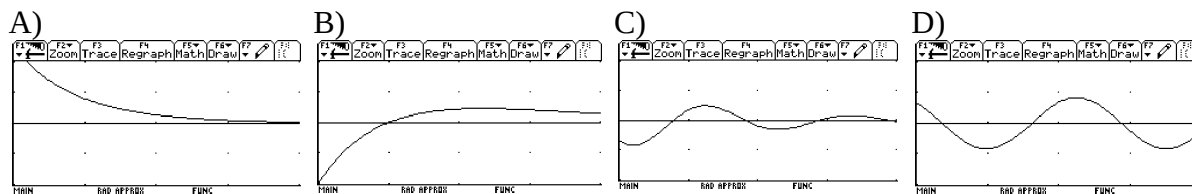
4. La ecuación diferencial $m x'' + k x = 0$ modela el sistema masa-resorte del movimiento:

- A) Amortiguado libre B) Críticamente amortiguado
C) Forzado sin amortiguamiento D) Libre no amortiguado

5. De las ecuaciones diferenciales elige aquella que represente un sistema masa-resorte cuyo movimiento sea del tipo forzado con amortiguamiento.

- A) $m x'' + k x = 0$ B) $m x'' + \beta x' + k x = 0$ C) $m x'' + k x = F(t)$ D) $m x'' + \beta x' + k x = F(t)$

6. Se sabe para un sistema masa-resorte que el movimiento del sistema es no amortiguado, ¿Cuál de las siguientes gráficas representa correctamente al citado sistema?



7. Una fuerza de 400 newtons alarga un resorte 2 metros. Una masa de 50 kilogramos se une al extremo del resorte y se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 10 metros por segundo. Las condiciones del sistema son:

A) $x(0) = -10$ y $x'(0) = 0$ B) $x(0) = 10$ y $x'(0) = 0$

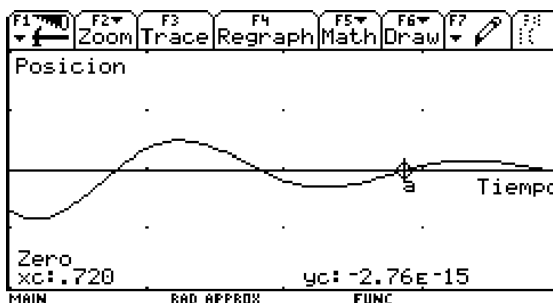
C) $x(0) = 0$ y $x'(0) = -10$ D) $x(0) = 0$ y $x'(0) = 10$

8. Un sistema masa-resorte tiene las siguientes condiciones iniciales de posición (en pies) y velocidad (en pies por segundo), $x(0) = -2$ y $x'(0) = 2$, bajo estas circunstancias la masa en $t = 0$ segundos

A) Se encuentra en reposo B) Se encuentra 2 pies sobre la posición de equilibrio

C) Se dirige hacia arriba D) Se presenta un desplazamiento extremo

9. El gráfico siguiente muestra la posición de un contrapeso sujeto a un resorte para un tiempo determinado, específicamente en $t = 0.72$ segundos (referido con el punto a) el contrapeso:



A) Pasa por la posición de equilibrio al ir hacia abajo por segunda vez

B) Pasa por la posición de equilibrio al ir hacia abajo por tercera vez

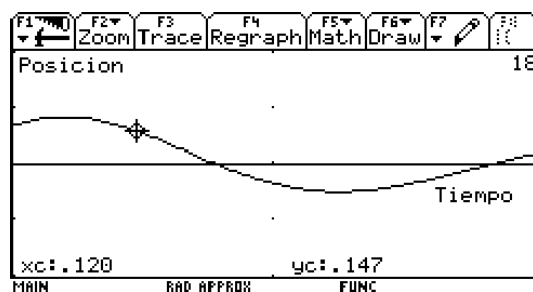
C) Pasa por la posición de equilibrio al ir hacia arriba por segunda vez

D) Pasa por la posición de equilibrio al ir hacia arriba por segunda vez

10. Se sabe que un sistema masa-resorte cuenta con un movimiento del tipo subamortiguado, determine de los conjuntos de datos numéricos siguientes cual representa al sistema citado.

A)		B)		C)		D)	
Tiempo	Posición	Tiempo	Posición	Tiempo	Posición	Tiempo	Posición
0.000	.167	0.000	.167	0.000	.250	0.000	-.250
.250	-.086	.250	-.208	.250	-.092	.250	-.032
.500	.042	.500	.167	.500	-.102	.500	.024
.750	-.019	.750	-.059	.750	-.062	.750	.031
1.000	.007	1.000	-.072	1.000	-.032	1.000	.025
1.250	-.001	1.250	.175	1.250	-.015	1.250	.017
1.500	-7.52E-4	1.500	-.208	1.500	-.007	1.500	.011
1.750	.001	1.750	.159	1.750	-.003	1.750	.007

11. El gráfico siguiente muestra la posición de un contrapeso para un tiempo determinado, específicamente en $t = 0.12$ segundos, de las 4 opciones que se presentan, elige de los enunciados que se presenta el que es correcto respecto del contrapeso:



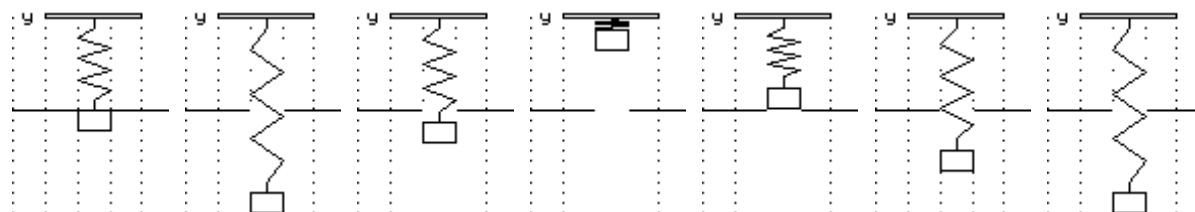
- A) Que se encuentra sobre la posición de equilibrio
- B) Que se dirige hacia abajo
- C) Que se encuentra en la posición de desplazamiento extremo
- D) Que se dirige hacia arriba

12. El siguiente conjunto de datos representa el tiempo y la posición de un contrapeso en movimiento, identifica el tiempo en el cual se tiene el desplazamiento extremo.

Tiempo	Posición
0.000	.167
.200	-.183
.400	-.014
.600	.195
.800	-.148
1.000	-.072
1.200	.208
1.400	-.101

- A) $t = 0$
- B) $t = 0.4$
- C) $t = 0.8$
- D) $t = 1.2$

13. La siguiente secuencia de imágenes corresponden a un sistema masa-resorte, el movimiento de dicho sistema es del tipo:



- A) Amortiguado libre
- B) No amortiguado
- C) Forzado amortiguado
- D) Subamortiguado

14. Se une una masa de 2 slug a un resorte cuya constante es 4 lb/pie. Se suelta la masa a 1 pie debajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 2 pie/s hacia arriba; el movimiento se da en un medio cuya fuerza de amortiguamiento es numéricamente igual a seis veces la velocidad instantánea. La ecuación diferencial que modela el sistema es:

- A) $x'' - 3x' + 2x = 0$
- B) $x'' + 3x' + 2x = 0$
- C) $x'' + 6x' + 2x = 0$
- D) $x'' - 6x' + 2x = 0$

15. De acuerdo al problema anterior (problema 14), las condiciones de posición y velocidad del sistema son:

A) $x(0) = -1$ y $x'(0) = 2$
 C) $x(0) = -1$ y $x'(0) = -2$

B) $x(0) = 1$ y $x'(0) = -2$
 D) $x(0) = 1$ y $x'(0) = 2$

16. Después de unir una pesa de 10 libras a un resorte de 5 pie, éste mide 7 pie. Se quita y se reemplaza con otra de 8 libras, y el sistema se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si se suelta la pesa de la posición de equilibrio a una velocidad de 1 pie por segundo hacia arriba. Entonces la ecuación de movimiento es:

A) $x(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} \sin 4t$

B) $x(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} \cos 4t$

C) $x(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} \sin 4t$

D) $x(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} \cos 4t$

17. En relación al problema anterior, la posición del contrapeso en $t = \frac{\pi}{4}$ segundos es:

A) 0 pie B) $\frac{1}{4}$ pie C) $-\frac{1}{4}$ pie D) Ninguna de los anteriores

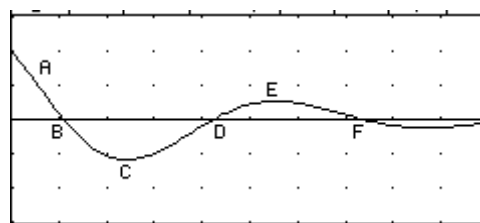
18. Un sistema masa-resorte tiene por ecuación de movimiento $x(t) = -e^{-t}$ donde t es el tiempo en segundos y $x(t)$ la posición en pies. La velocidad del contrapeso en $t = 0$ segundos es:

A) 0 pie/s B) 1 pie/s C) -1 pie/s D) indeterminada

19. Un sistema masa-resorte tiene por ecuación de movimiento $x(t) = -e^{-t}$ donde t es el tiempo en segundos y $x(t)$ la posición en pies. La dirección del contrapeso en $t = 0$ segundos es:

A) Nula B) Hacia arriba C) Hacia abajo D) Fuera de dominio

20. La gráfica que se presenta a continuación, exhibe el comportamiento (tiempo contra posición) de un sistema masa resorte, determine la característica del movimiento del sistema que se solicita:



La dirección del contrapeso en el punto B

A) No se mueve B) Hacia abajo C) Hacia arriba D) Ninguna de las anteriores

21. En base a la gráfica del problema 20. La segunda ocasión que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio y se dirige hacia arriba, es el punto:

- A) B B) C C) D D) F

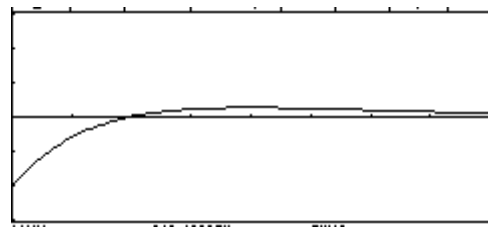
22. En referencia al problema 20. La primera ocasión que el contrapeso pasa por la posición de equilibrio y se dirige hacia abajo

- A) B B) C C) D D) F

23. En base al problema 20. El tipo de movimiento es:

- A) No amortiguado B) Sobreamortiguado
C) Críticamente amortiguado D) Subamortiguado

24. La gráfica que se presenta a continuación, exhibe el comportamiento (tiempo contra posición) de un sistema masa resorte, determine la ecuación diferencial que modela el sistema.



- A) $x''+2x'+x=0$ B) $x''+x=0$ C) $x''+3x'+2x=0$ D) $x''+x'+4x=0$

25. La ecuación de movimiento que corresponde al movimiento sobreamortiguado de un sistema particular masa-resorte es:

- A) $x(t) = -\frac{2}{3}\cos(6t) + \sin(6t)$ B) $x(t) = -e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-4t}$
C) $x(t) = e^{-t}(\frac{2}{3}\cos(6t) - 2\sin(6t))$ D) $x(t) = -2e^{-t} + te^{-t}$

26. La tabulación que se te presenta responde al conjunto de parejas ordenadas tiempo contra posición, de un sistema masa resorte.

Determina en base a su análisis el tipo de movimiento al que corresponde.

t	x(t)
0.0000	-2.0000
.39270	.50000
.78540	2.00000
1.1781	-.50000
1.5708	-2.0000
1.9635	.50000
2.3562	2.00000
2.7489	-.50000

- A) No amortiguado B) Sobreamortiguado
C) Críticamente amortiguado D) Subamortiguado

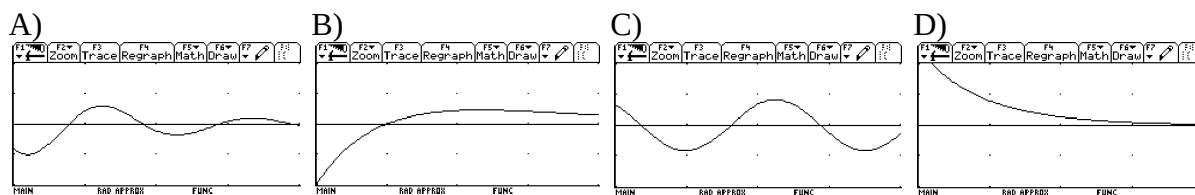
27. La tabulación que se te presenta responde al conjunto de parejas ordenadas tiempo contra posición, de un sistema masa resorte.

Determina en base a su análisis el tipo de movimiento al que corresponde.

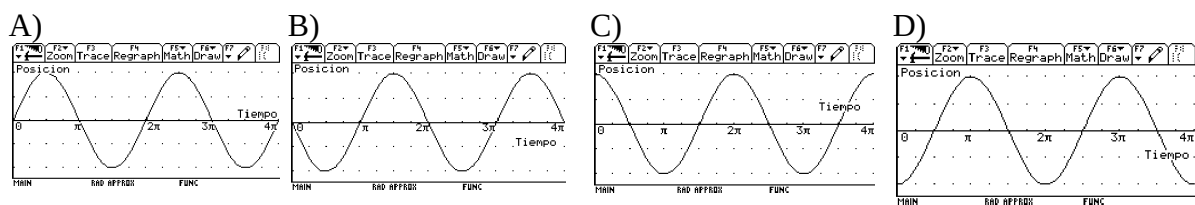
t	$x(t)$
0.0000	1.0000
.25000	.09312
.50000	-.5282
.75000	-.5010
1.0000	-.1013
1.2500	.21864
1.5000	.24542
1.7500	.07392

- A) No amortiguado
C) Críticamente amortiguado
B) Sobreamortiguado
D) Subamortiguado

28. De las siguientes gráficas selecciona aquella que representa al sistema masa-resorte en donde, en $t=0$ el contrapeso parte de una posición por arriba de la posición de equilibrio y en ese mismo momento se dirige hacia arriba.



29. Dada la ecuación diferencial $x'' + x = 0$ que modela un sistema masa resorte, si el contrapeso parte de la posición de equilibrio con velocidad de 1 pie/s y se dirige hacia abajo, selecciona el bosquejo de la gráfica que representa correctamente al sistema.

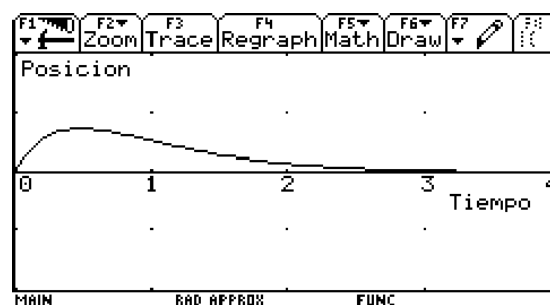


30. La ecuación diferencial $x'' + 5x' + 4x = 0$ sujeta a las condiciones $x(0)=1$ y $x'(0)=1$ representa un sistema masa-resorte, cuya ecuación de movimiento es $x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}$, de las siguientes interpretaciones elige la correcta.

A) Movimiento sobreamortiguado de una masa sobre un resorte. La masa se libera al inicio de una posición 1 unidad	B) Movimiento críticamente amortiguado de una masa sobre un resorte. La masa se libera al inicio de	C) Movimiento sobreamortiguado de una masa sobre un resorte. La masa se libera al inicio de una posición 1 unidad	D) Movimiento críticamente amortiguado de una masa sobre un resorte. La masa se libera al inicio de
---	---	---	---

debajo de la posición de equilibrio con velocidad descendente de 1 pie/s.	una posición 1 unidad debajo de la posición de equilibrio con velocidad descendente de 1 pie/s.	arriba de la posición de equilibrio con velocidad descendente de 1 pie/s.	una posición 1 unidad debajo de la posición de equilibrio con velocidad ascendente de 1 pie/s.
---	---	---	--

31. El gráfico contiguo presenta la posición de un contrapeso en términos del tiempo transcurrido, elige la ecuación diferencial y las condiciones que lo representan correctamente.



- A) $x'' + 4x' + 2x = 0$ sujeta a: $x(0) = 0$ y $x'(0) = -1$ B) $x'' + 4x' + 2x = 0$ sujeta a: $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$
- C) $x'' + 2x' + 4x = 0$ sujeta a: $x(0) = 0$ y $x'(0) = -1$ D) $x'' + 2x' + 4x = 0$ sujeta a: $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$

32. Se sabe que un sistema masa-resorte está representado por la ecuación diferencial $x'' + 2x' + 10x = 0$ sujeta a las condiciones $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$, identifica la tabla de datos correcta de tiempo y posición del contrapeso del sistema

A)			B)			C)			D)		
Tiempo	Posición		Tiempo	Posición		Tiempo	Posición		Tiempo	Posición	
0.000	1.000		0.000	1.000		0.000	1.000		0.000	1.000	
.800	.697		.800	.449		.800	-.331		.800	1.551	
1.600	-.029		1.600	.202		1.600	.018		1.600	1.798	
2.400	-.737		2.400	.091		2.400	.055		2.400	1.909	
3.200	-.998		3.200	.041		3.200	-.040		3.200	1.959	
4.000	-.654		4.000	.018		4.000	.015		4.000	1.982	
4.800	.087		4.800	.008		4.800	-.002		4.800	1.992	
5.600	.776		5.600	.004		5.600	-.002		5.600	1.996	

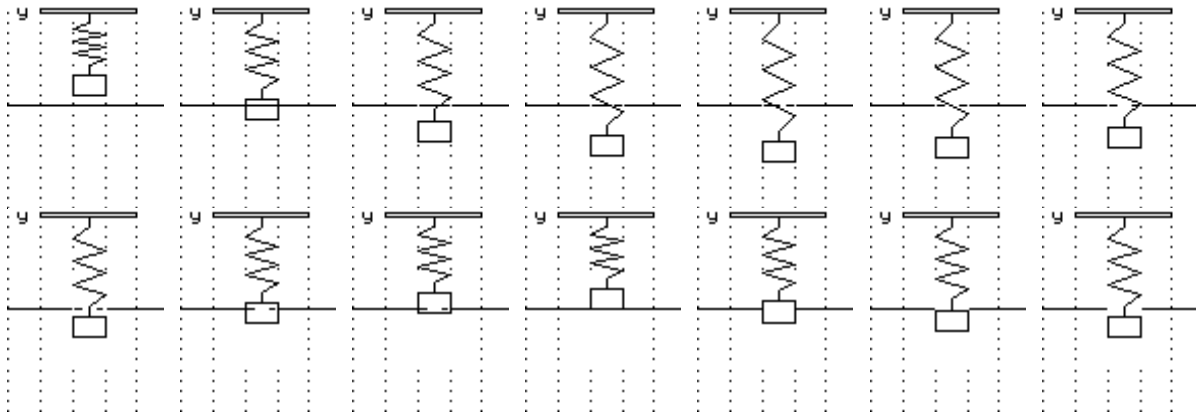
33. El siguiente conjunto de datos corresponden al tiempo y posición contrapeso en movimiento correspondiente a un sistema masa-resorte, identifique la ecuación diferencial que representa dicho sistema.

Tiempo	Posición
0.000	-1.000
.800	-.449
1.600	-.202
2.400	-.091
3.200	-.041
4.000	-.018
4.800	-.008
5.600	-.004

A) $x'' + 2x' + x = 0$ sujeta a: $x(0) = -1$ y $x'(0) = 0$ B) $x'' + 2x' + x = 0$ sujeta a: $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$

C) $x'' + 2x' + 4x = 0$ sujeta a: $x(0) = -1$ y $x'(0) = 0$ D) $x'' + 2x' + 4x = 0$ sujeta a: $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$

34. La siguiente secuencia de imágenes corresponden a un sistema masa-resorte, el movimiento de dicho sistema es del tipo:

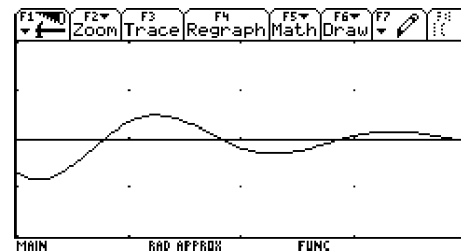


- A) Sobreamortiguado B) No amortiguado
C) Críticamente amortiguado D) Subamortiguado

35. Dada la ecuación diferencial $x'' + bx + 4x = 0$, elige el conjunto de valores de b tal que el movimiento resultante sea del tipo sobreamortiguado.

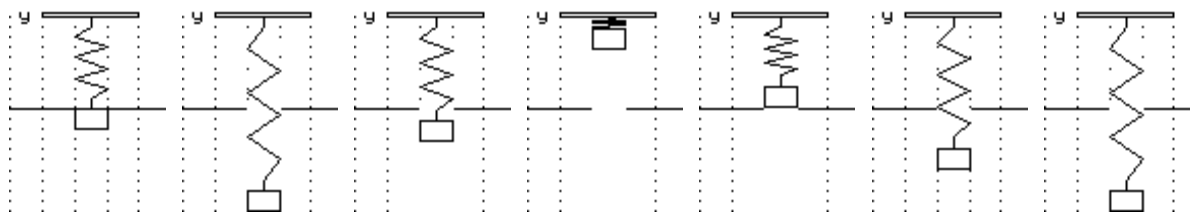
- A) $b > 0$ B) $b > 4$ C) $b < 0$ D) $0 < b < 4$

36. Dada la ecuación diferencial $2x'' + bx + 2x = 0$ elige el conjunto de valores de b tal que el movimiento resultante sea como el que se muestra en la gráfica contigua.



- A) $b > 0$ B) $b > 4$ C) $b < 0$ D) $0 < b < 4$

37. Dada la ecuación diferencial $x'' + bx + x = 0$, elige el valor de b tal que el movimiento resultante sea como el que se muestra en la secuencia siguiente.



A) $b = 1$

B) $b = -1$

C) $b = 0$

D) $b = 2$

Apéndice D.

Instrumento para evaluar la implementación de la estrategia didáctica

Encuesta para evaluar la implementación de la estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora para abordar aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California.

1. Consideras importante que en los cursos se incorporen nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

2. El tiempo que se utilizó durante la aplicación de la estrategia didáctica fue el adecuado.

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

3. La implementación de la estrategia didáctica se llevó a cabo de manera organizada

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

4. El equipo e instalaciones (mobiliario) donde se llevó a cabo la implementación de la estrategia didáctica te parece que fue el adecuado.

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

5. El instructor que participó en la implementación de la estrategia didáctica cuenta con los conocimientos para tal efecto.

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

6. La participación (del estudiante) en la estrategia didáctica que incorpora la calculadora promueve el interés por el estudio de las ecuaciones diferenciales.

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

7. Consideras que la participación en la estrategia didáctica que incorpora la calculadora mejora las habilidades y conocimientos de matemáticas, particularmente en ecuaciones diferenciales.

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

8. Participarías en un curso de matemáticas que este basado en su totalidad en estrategias didácticas que incorporen tecnología de la calculadora.

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

9. La incorporación de la calculadora en el estudio de las ecuaciones diferenciales (particularmente las aplicaciones de segundo orden) permite acercarnos al conocimiento de manera más sencilla y atractiva.

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

10. Consideras que las habilidades y conocimientos adquiridos a través de esta estrategia didáctica que incorpora calculadora son de un nivel superior comparado con las habilidades y conocimientos adquiridos en curso tradicional que excluye la calculadora.

☐	Totalmente de acuerdo	☐	De acuerdo	☐	Neutral	☐	En Desacuerdo	☐	Totalmente en desacuerdo	☐	No aplica
--------------------------	-----------------------	--------------------------	------------	--------------------------	---------	--------------------------	---------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-----------

11. ¿Con qué tipo de calculadora cuentas para el desarrollo de tu estudios de formación profesional de ingeniería? (Subraye)

No tengo	Científica	Programable	Graficadora	Simbólica
----------	------------	-------------	-------------	-----------

Apéndice E.

Hipótesis estadísticas a grupos de Pre-test

HIPÓTESIS DE VERIFICACIÓN DE UNIFORMIDAD A GRUPOS DE PRE-TEST

Una vez revisado el pre-test para cada uno de los estudiantes, se determinó los parámetros estadísticos media aritmética, desviación estándar y variancia (cfr. tabla 27), encontrando los resultados referentes al número de respuestas correctas por parte de los estudiantes en cada uno de los grupos. Donde puede notarse que no hay diferencia significativa en lo que respecta al promedio del número de respuestas correctas de los grupos en el que se administró el pre-test, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso y determinar la uniformidad de los grupos, para tal caso se utiliza la

prueba t , cuyo estadístico se calcula mediante $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_p \sqrt{\left(\frac{1}{n_1}\right) + \left(\frac{1}{n_2}\right)}}$, para $v = n_1 + n_2 - 2$ y

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \text{ donde:}$$

$\bar{x}_1$ = Promedio del puntaje (número de respuestas correctas) para el primer grupo

$\bar{x}_2$ = Promedio del puntaje para el segundo grupo

n_1 = Número de estudiantes del primer grupo

n_2 = Número de estudiantes del segundo grupo

v = Grados de libertad

S_1^2 = Variancia del puntaje logrado por el primer grupo

S_2^2 = Variancia del puntaje logrado por el segundo grupo

1. Prueba de hipótesis para los grupos 651 y 654, para el análisis de la relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 654 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 654 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 44$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.021$ o $t > 2.021$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(24)(5.9085)^2 + (20)(5.5669)^2}{25 + 21 - 2}}, \text{ luego } Sp = 5.7557$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(18.0800 - 20.0952)}{5.7557 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{21}}}, \text{ por lo tanto } t = -1.1828$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.1828$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 654.

2. Prueba de hipótesis para los grupos 651 y 657, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 657 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 657 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 46$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.000$ o $t > 2.000$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(24)(5.9085)^2 + (22)(6.3045)^2}{25 + 23 - 2}}, \text{ luego } Sp = 6.1011$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(18.0800 - 20.7391)}{6.1011 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{23}}}, \text{ por lo tanto } t = -1.5084$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.5084$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 657.

3. Prueba de hipótesis para los grupos 651 y 658, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 658 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 658 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 37$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.030$ o $t > 2.030$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(24)(5.9085)^2 + (13)(5.8727)^2}{25 + 14 - 2}}$, luego $Sp = 5.8959$

El estadístico $t = \frac{(18.0800 - 21.2143)}{5.8959 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{14}}}$, por lo tanto $t = -1.5925$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.5925$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 658.

4. Prueba de hipótesis para los grupos 651 y 661, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 661 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 661 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 34$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.032$ o $t > 2.032$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(24)(5.9085)^2 + (10)(4.9672)^2}{25 + 11 - 2}}, \text{ luego } Sp = 5.6479$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(18.0800 - 17.5455)}{5.6479 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{11}}}, \text{ por lo tanto } t = 0.2615$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.2615$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651 y 661.

5. Prueba de hipótesis para los grupos 654 y 657, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 654 y 657 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 654 y 657 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 42$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.020$ o $t > 2.020$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(20)(5.5669)^2 + (22)(6.3045)^2}{21 + 23 - 2}}, \text{ luego } Sp = 5.9646$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(20.0952 - 20.7391)}{5.9646 \sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{23}}}, \text{ por lo tanto } t = -0.3576$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.3576$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 654 y 657.

6. Prueba de hipótesis para los grupos 654 y 658, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 654 y 658 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 654 y 658 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 33$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.035$ o $t > 2.035$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(20)(5.5669)^2 + (13)(5.8727)^2}{21 + 14 - 2}}, \text{ luego } Sp = 5.6893$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(20.0952 - 21.2143)}{5.6893 \sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{14}}}, \text{ por lo tanto } t = -0.5700$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.5700$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 654 y 658.

7. Prueba de hipótesis para los grupos 654 y 661, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 654 y 661 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 654 y 661 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 30$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.042$ o $t > 2.042$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(20)(5.5669)^2 + (10)(4.9672)^2}{21 + 11 - 2}}, \text{ luego } Sp = 5.3744$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(20.0952 - 17.5455)}{5.3744 \sqrt{\frac{1}{21} + \frac{1}{11}}}, \text{ por lo tanto } t = 1.2746$$

Decisión: Como el estadístico es $t=1.2746$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 654 y 661.

8. Prueba de hipótesis para los grupos 657 y 658, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657 y 658 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657 y 658 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 35$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.030$ o $t > 2.030$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(22)(6.3045)^2 + (13)(5.8727)^2}{23 + 14 - 2}}$, luego $Sp = 6.1476$

El estadístico $t = \frac{(20.7391 - 21.2143)}{6.1476 \sqrt{\frac{1}{23} + \frac{1}{14}}}$, por lo tanto $t = -.2280$

Decisión: Como el estadístico es $t = -.2280$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657 y 658.

9. Prueba de hipótesis para los grupos 657 y 661, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657 y 661 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657 y 661 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 32$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.037$ o $t > 2.037$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(22)(6.3045)^2 + (10)(4.9672)^2}{23 + 11 - 2}}, \text{ luego } Sp = 5.9191$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(20.7391 - 17.5455)}{5.9191 \sqrt{\frac{1}{23} + \frac{1}{11}}}, \text{ por lo tanto } t = 1.4717$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.4717$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657 y 661.

10. Prueba de hipótesis para los grupos 658 y 661, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 658 y 661 en el pre-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 658 y 661 en el pre-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 23$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.069$ o $t > 2.069$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(13)(5.8727)^2 + (10)(4.9672)^2}{14 + 11 - 2}}, \text{ luego } Sp = 5.4973$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(21.2143 - 17.5455)}{5.4973 \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{12}}}, \text{ por lo tanto } t = 1.7231$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.7231$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 658 y 661.

HIPÓTESIS DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS A GRUPOS DE PRE-TEST

La tabla 29 exhibe los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las competencias matemáticas evaluadas en el instrumento de medición diagnóstica. En ella se puede observar que la competencia

matemática referida al planteamiento y resolución de problemas es en la que tiene el más bajo rendimiento por parte de los estudiantes, mientras que se conserva un equilibrio en el resto de las competencias matemáticas.

También, puede notarse que no hay una diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las competencias matemáticas, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso.

1. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas pensar y razonar contra el planteamiento y resolución de problemas, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el pre-test para las competencias matemáticas pensar y razonar, y el planteamiento y resolución de problemas.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el pre-test para las competencias matemáticas pensar y razonar, y el planteamiento y resolución de problemas.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 5$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.571$ o $t > 2.571$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(1)(0.1273)^2 + (3)(0.2731)^2}{2 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.2449$

El estadístico $t = \frac{(0.5700 - 0.4900)}{0.2449 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}}$, por lo tanto $t = 0.3578$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.3578$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a las competencias matemáticas pensar y razonar, y el planteamiento y resolución de problemas.

2. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas pensar y razonar contra el modelado, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el pre-test para las competencias matemáticas pensar y razonar, y el modelado.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el pre-test para las competencias matemáticas pensar y razonar, y el modelado.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 4$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.776$ o $t > 2.776$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(1)(0.1273)^2 + (3)(0.2530)^2}{2 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.2281$

El estadístico $t = \frac{(0.5700 - 5650)}{0.2281 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}}$, por lo tanto $t = 0.0240$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.0240$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a las competencias matemáticas pensar y razonar, y el modelado.

3. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas pensar y razonar contra la competencia matemática representar, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el pre-test para las competencias matemáticas pensar y razonar, y la representación.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el pre-test para las competencias matemáticas pensar y razonar, y la representación.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 13$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.160$ o $t > 2.160$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(1)(0.1273)^2 + (12)(0.1830)^2}{2 + 13 - 2}}$, luego $Sp = 0.1793$

El estadístico $t = \frac{(0.5700 - 0.5915)}{0.1793 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{13}}}$, por lo tanto $t = -0.1578$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.1578$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática pensar y razonar y la competencia de representación.

4. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas pensar y razonar contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el pre-test para las competencias matemáticas pensar y razonar, y la utilización del lenguaje simbólico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el pre-test para las competencias matemáticas pensar y razonar, y la utilización del lenguaje simbólico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 11$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.201$ o $t > 2.201$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(1)(0.1273)^2 + (10)(0.1182)^2}{2 + 11 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1190$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.5700 - 0.5964)}{0.1190 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{11}}}, \text{ por lo tanto } t = -0.2886$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.2886$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática pensar y razonar y la competencia de utilización del lenguaje simbólico.

5. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de modelado, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y el modelado.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y el modelado.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 6$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.447$ o $t > 2.447$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.2731)^2 + (3)(0.2530)^2}{4 + 4 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.2632$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.4900 - 0.5650)}{0.2632 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}}, \text{ por lo tanto } t = -0.4029$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.4029$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de modelado.

6. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de representación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el pre-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y la representación.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y la representación.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 15$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.131$ o $t > 2.131$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.2731)^2 + (12)(0.1830)^2}{4 + 13 - 2}}$, luego $Sp = 0.2042$

El estadístico $t = \frac{(0.4900 - 0.5915)}{0.2042 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{13}}}$, por lo tanto $t = -0.8693$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.8693$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de representación.

7. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el diagnóstico.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y la utilización del lenguaje simbólico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y la utilización del lenguaje simbólico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 13$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.160$ o $t > 2.160$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.2731)^2 + (10)(0.1182)^2}{4 + 11 - 2}}$, luego $Sp = 0.1735$

El estadístico $t = \frac{(0.4900 - 5964)}{0.1735 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{11}}}$, por lo tanto $t = -1.0503$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.0503$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico.

8. Prueba de hipótesis referida a las competencia matemática modelar contra la competencia matemática de representación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el diagnóstico.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y la representación.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y la representación.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 15$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.131$ o $t > 2.131$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.2530)^2 + (12)(0.1830)^2}{4 + 13 - 2}}$, luego $Sp = 0.1989$

El estadístico $t = \frac{(0.5650 - 0.5915)}{0.1989 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{13}}}$, por lo tanto $t = -0.2330$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.2330$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática de modelado y la competencia de representación.

9. Prueba de hipótesis referida a las competencia matemática modelar contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el diagnóstico.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y la utilización del lenguaje simbólico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y la utilización del lenguaje simbólico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 13$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.160$ o $t > 2.160$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.2530)^2 + (10)(0.1182)^2}{4 + 11 - 2}}$, luego $Sp = 0.1597$

El estadístico $t = \frac{(0.5650 - 0.5964)}{0.1597 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{11}}}$, por lo tanto $t = -0.3367$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.3367$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática de modelado y la competencia de utilización del lenguaje simbólico.

10. Prueba de hipótesis referida a las competencia matemática de representación contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el diagnóstico.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de representación y de utilización del lenguaje simbólico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de representación y de utilización del lenguaje simbólico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 22$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.080$ o $t > 2.080$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(12)(0.1830)^2 + (10)(0.1182)^2}{13 + 11 - 2}}$, luego $Sp = 0.1568$

El estadístico $t = \frac{(0.5915 - 0.5964)}{0.1568 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{11}}}$, por lo tanto $t = -0.0762$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.0762$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática de representación y la competencia de utilización del lenguaje simbólico.

HIPOTESIS DE ACTIVIDAD COGNITIVA A GRUPOS DE PRE-TEST

En la tabla 31 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) evaluadas en el instrumento de medición diagnóstica.

Puede notarse que no hay diferencia significativa en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las actividades cognitivas de representación, tratamiento y conversión, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso.

1. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de representación contra la de tratamiento, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el diagnóstico.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad de representación y la de tratamiento.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad de representación y la de tratamiento.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 25$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.060$ o $t > 2.060$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(12)(0.1620)^2 + (13)(0.1706)^2}{13 + 14 - 2}}$, luego $Sp = 0.1665$

El estadístico $t = \frac{(0.5815 - 0.5671)}{0.1665 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{14}}}$, por lo tanto $t = 0.2245$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.2245$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de representación y la de tratamiento.

2. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de representación contra la de conversión, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el diagnóstico.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad de representación y la de conversión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad de representación y la de conversión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 20$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.086$ o $t > 2.086$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(12)(0.1620)^2 + (8)(0.2295)^2}{13 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 0.1918$

El estadístico $t = \frac{(0.5815 - 0.5871)}{0.1918 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = -0.0673$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.0673$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de representación y la de conversión.

3. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de tratamiento contra la de conversión, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el diagnóstico.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad de tratamiento y la de conversión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad de tratamiento y la de conversión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 21$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.080$ o $t > 2.080$

Cálculos: $S_p = \sqrt{\frac{(13)(0.1706)^2 + (8)(0.2295)^2}{14 + 9 - 2}}$, luego $S_p = 0.1951$

El estadístico $t = \frac{(0.5671 - 0.5871)}{0.1951 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = -0.2399$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.2399$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de tratamiento y la de conversión.

HIPOTESIS DE COMPLEJIDAD CONCEPTUAL A GRUPOS DE PRE-TEST

En la tabla 33 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para la complejidad conceptual (estructural y operacional) evaluadas en el instrumento de medición diagnóstica.

Puede notarse que no hay diferencia significativa en lo que respecta a la complejidad conceptual, tratada a partir del índice promedio de dificultad, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso.

1. Prueba de hipótesis referida a la complejidad conceptual de estructura contra la de operación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el diagnóstico.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la complejidad estructural y operacional.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la complejidad estructural y operacional.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 32$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.037$ o $t > 2.037$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(19)(0.1675)^2 + (13)(0.1906)^2}{20 + 14 - 2}}$, luego $Sp = 0.1772$

El estadístico $t = \frac{(0.5655 - 0.5929)}{0.1772 \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{14}}}$, por lo tanto $t = -0.4437$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.4437$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la complejidad estructural y operacional.

HIPOTESIS DE NIVEL DE DIFICULTAD A GRUPOS DE PRE-TEST

En la tabla 35 se muestra los índices promedio obtenidos para el nivel de dificultad; puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al nivel de dificultad de los reactivos presentes calificados como de reproducción y de conexión, tratada a partir del índice promedio de dificultad, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso.

1. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad (reproducción y conexión) de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los niveles de dificultad de reproducción y conexión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los niveles de dificultad de reproducción y conexión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 32$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.037$ o $t > 2.037$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(28)(0.1753)^2 + (4)(0.1662)^2}{29 + 5 - 2}}$, luego $Sp = 0.1741$

El estadístico $t = \frac{(0.5910 - 4940)}{0.1741 \sqrt{\frac{1}{29} + \frac{1}{5}}}$, por lo tanto $t = 1.1505$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.1505$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al nivel de dificultad de los reactivos del diagnóstico.

HIPOTESIS DE REGISTRO INICIAL A GRUPOS DE PRE-TEST

En la tabla 37 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro inicial para el instrumento de medición diagnóstica.

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al lenguaje natural, como registro inicial del reactivo, comparado con el algebraico y el gráfico, el registro inicial numérico se excluye por contar con solo un reactivo. Tal diferencia es analizada a partir del índice promedio de dificultad y para probar tal conjetura se definieron pruebas de hipótesis estadísticas.

1. Prueba de hipótesis referida al registro inicial algebraico y lenguaje natural de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros iniciales algebraico y lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros iniciales algebraico y lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 24$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.064$ o $t > 2.064$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(13)(0.1707)^2 + (11)(0.1722)^2}{14 + 12 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1713$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.5314 - 0.6183)}{0.1713 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{12}}}, \text{ por lo tanto } t = -1.2895$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.2895$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro algebraico y lenguaje natural de los reactivos del diagnóstico.

2. Prueba de hipótesis referida al registro inicial algebraico y gráfico de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros iniciales algebraico y gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros iniciales algebraico y gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 19$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.093$ o $t > 2.093$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(13)(0.1707)^2 + (6)(0.1603)^2}{14 + 7 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1674$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.5314 - 0.5514)}{0.1674 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{7}}}, \text{ por lo tanto } t = -0.2580$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.2580$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro algebraico y el gráfico de los reactivos del diagnóstico.

3. Prueba de hipótesis referida al registro inicial lenguaje natural y gráfico de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros iniciales lenguaje natural y gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros iniciales lenguaje natural y gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 17$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.110$ o $t > 2.110$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(12)(0.1722)^2 + (6)(0.1603)^2}{12 + 6 - 2}}$, luego $Sp = 0.1732$

El estadístico $t = \frac{(0.6183 - 0.5514)}{0.1732 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{6}}}$, por lo tanto $t = -0.8121$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.8121$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro inicial de lenguaje natural y el gráfico de los reactivos del diagnóstico.

HIPOTESIS DE REGISTRO FINAL A GRUPOS DE PRE-TEST

En la tabla 39 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro final para el instrumento de medición diagnóstica.

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al lenguaje natural y gráfico, como registro final del reactivo, comparado con el algebraico y el numérico. Tal

diferencia es analizada a partir del índice promedio de dificultad y para probar si existen diferencias significativas se definieron las siguientes pruebas de hipótesis estadísticas.

1. Prueba de hipótesis referida al registro final numérico y algebraico de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales numérico y algebraico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales numérico y algebraico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 21$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.080$ o $t > 2.080$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(7)(0.2044)^2 + (14)(0.1330)^2}{8 + 15 - 2}}$, luego $Sp = 0.1603$

El estadístico $t = \frac{(0.5363 - 0.6807)}{0.1603 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{15}}}$, por lo tanto $t = -2.0576$

Decisión: Como el estadístico es $t = -2.0576$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final numérico y el algebraico de los reactivos del diagnóstico.

2. Prueba de hipótesis referida al registro final numérico y lenguaje natural de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales numérico y lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales numérico y lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 15$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.131$ o $t > 2.131$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(7)(0.2044)^2 + (8)(0.1352)^2}{8 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 0.1710$

El estadístico $t = \frac{(0.5363 - 0.4667)}{0.1710 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = 0.8376$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.8376$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final numérico y el lenguaje natural de los reactivos del diagnóstico.

3. Prueba de hipótesis referida al registro final numérico y gráfico de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales numérico y gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales numérico y gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 8$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.306$ o $t > 2.306$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(7)(0.2044)^2 + (1)(0.1061)^2}{8 + 2 - 2}}$, luego $Sp = 0.1948$

El estadístico $t = \frac{(0.5363 - 0.4550)}{0.1948 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{2}}}$, por lo tanto $t = 0.5279$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.5279$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final numérico y el gráfico de los reactivos del diagnóstico.

4. Prueba de hipótesis referida al registro final algebraico y lenguaje natural de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales algebraico y lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales algebraico y lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 22$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.074$ o $t > 2.074$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(14)(0.1330)^2 + (8)(0.1352)^2}{15 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 0.1338$

El estadístico $t = \frac{(0.6807 - 0.4667)}{0.1338 \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = 3.7933$

Decisión: Como el estadístico es $t = 3.7933$, se rechaza la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final algebraico y el lenguaje natural de los reactivos del diagnóstico.

5. Prueba de hipótesis referida al registro final algebraico y gráfico de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales algebraico y gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales algebraico y gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 15$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.131$ o $t > 2.131$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(14)(0.1330)^2 + (1)(0.1061)^2}{15 + 2 - 2}}$, luego $Sp = 0.1313$

El estadístico $t = \frac{(0.6807 - 0.4550)}{0.1313\sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{2}}}$, por lo tanto $t = 2.2835$

Decisión: Como el estadístico es $t = 2.2835$, se rechaza la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final algebraico y el gráfico de los reactivos del diagnóstico.

6. Prueba de hipótesis referida al registro final lenguaje natural y gráfico de los reactivos del instrumento diagnóstico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales lenguaje natural y gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el diagnóstico para los registros finales lenguaje natural y gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 9$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.262$ o $t > 2.262$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1352)^2 + (1)(0.1061)^2}{9 + 2 - 2}}$, luego $Sp = 0.1322$

El estadístico $t = \frac{(0.4667 - 0.4550)}{0.1322\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{2}}}$, por lo tanto $t = 0.1132$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.1132$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final lenguaje natural y gráfico de los reactivos del diagnóstico.

Apéndice F.

Hipótesis estadísticas a grupos Post-test con enfoque de enseñanza tradicional

HIPÓTESIS DE VERIFICACIÓN DE UNIFORMIDAD A GRUPOS DE POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA TRADICIONAL

La tabla 41 muestra el número promedio de reactivos correctos que respondieron los grupos con enfoque de enseñanza tradicional. La notación “-T” significa que se trata del grupo de estudiantes que abordaron el estudio del fenómeno sistema masa-resorte bajo un esquema de enseñanza tradicional. Aunque hay diferencias importantes en los promedios de los grupos, se definen pruebas de hipótesis con el propósito de verificar si la diferencia en tales promedios es significativa.

1. Prueba de hipótesis para los grupos 651-T y 657-T, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-T y 657-T en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-T y 657-T en el post-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 15$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.131$ o $t > 2.131$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(7)(7.5958)^2 + (8)(3.9826)^2}{8 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 5.9484$

El estadístico $t = \frac{(13.3750 - 10.8889)}{5.9484 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = 0.8601$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.8601$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-T y 657-T.

2. Prueba de hipótesis para los grupos 651-T y 661-T, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-T y 661-T en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-T y 661-T en el post-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 19$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.093$ o $t > 2.093$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(7)(7.5958)^2 + (12)(3.4119)^2}{8 + 13 - 2}}, \text{ luego } Sp = 5.3487$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(13.3750 - 10.1538)}{5.3487 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{13}}}, \text{ por lo tanto } t = 1.3402$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.3402$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-T y 661-T.

3. Prueba de hipótesis para los grupos 657-T y 661-T, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657-T y 661-T en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657-T y 661-T en el post-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 20$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.086$ o $t > 2.086$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(8)(3.9826)^2 + (12)(3.4119)^2}{9 + 13 - 2}}, \text{ luego } Sp = 3.6509$$

El estadístico $t = \frac{(10.8889 - 10.1538)}{3.6509 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{13}}}$, por lo tanto $t = 0.4643$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.4643$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657-T y 661-T.

HIPÓTESIS DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS A GRUPOS DE POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA TRADICIONAL

En la tabla 43 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las competencias matemáticas evaluadas a partir del post-test.

La figura 9 permite visualizar claramente que la competencia matemática referida al planteamiento y resolución de problemas es en la que se tiene el más bajo rendimiento por parte de los estudiantes, le sigue la competencia de modelado mientras que se conserva un equilibrio en el resto de las competencias matemáticas.

Puede notarse que hay una diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las competencias matemáticas, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso.

1. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de modelado, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y el modelado.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y el modelado.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 8$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.306$ o $t > 2.306$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.1873)^2 + (5)(0.0455)^2}{4 + 6 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1202$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.3250 - 0.2780)}{0.1202 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}}, \text{ por lo tanto } t = 0.6057$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.6057$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de modelado.

2. Prueba de hipótesis referida a las competencia matemática de modelado contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y utilizar el lenguaje simbólico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y utilizar el lenguaje simbólico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 22$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.074$ o $t > 2.074$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.1873)^2 + (19)(0.1505)^2}{4 + 20 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1560$$

El estadístico $t = \frac{(0.3250 - 0.3325)}{0.1560 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{20}}}$, por lo tanto $t = -0.0877$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.0877$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática modelar contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico.

3. Prueba de hipótesis referida a las competencia matemática de modelado contra la competencia matemática de representación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y representación.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y representación.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 6$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.447$ o $t > 2.447$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.1873)^2 + (3)(0.1457)^2}{4 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1677$

El estadístico $t = \frac{(0.3250 - 0.3333)}{0.1677 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = -0.0699$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.0699$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática modelar contra la competencia matemática de representación.

4. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y utilización del lenguaje simbólico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y la utilización del lenguaje simbólico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 24$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.064$ o $t > 2.064$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(5)(0.0455)^2 + (19)(0.1505)^2}{6 + 20 - 2}}$, luego $Sp = 0.1355$

El estadístico $t = \frac{(0.2780 - 0.3325)}{0.1355 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{20}}}$, por lo tanto $t = -0.8640$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.8640$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática plantear y resolver problemas contra la competencia utilización del lenguaje simbólico.

5. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de representación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y representación.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y representación.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 8$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.306$ o $t > 2.306$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(5)(0.0455)^2 + (3)(0.1457)^2}{6 + 4 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.0962$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.2780 - 0.3333)}{0.0962 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}}}, \text{ por lo tanto } t = -0.8905$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.8905$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática plantear y resolver problemas contra la competencia de representación.

6. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas utilizar el lenguaje simbólico contra la competencia matemática de representación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas utilizar el lenguaje simbólico y representar.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas utilizar el lenguaje simbólico y representar.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 22$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.074$ o $t > 2.074$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(19)(0.1505)^2 + (3)(0.1457)^2}{20 + 4 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1498$$

El estadístico $t = \frac{(0.3325 - 0.3333)}{0.1498 \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = -0.0097$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.0097$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática utilizar el lenguaje simbólico y representar.

HIPOTESIS DE ACTIVIDAD COGNITIVA A GRUPOS DE POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA TRADICIONAL

La tabla 45 exhibe los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) evaluadas en a partir del post-test. Puede notarse diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las actividades cognitivas de conversión contra las actividades de tratamiento y sobre todo de representación, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar si tal diferencia es significativa.

1. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de representación contra la de tratamiento, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de representación y la de tratamiento.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de representación y la de tratamiento.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 19$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.093$ o $t > 2.093$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1203)^2 + (11)(0.1676)^2}{9 + 12 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1495$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.3833 - 0.3367)}{0.1495 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{12}}}, \text{ por lo tanto } t = 0.7068$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.7068$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de representación y la de tratamiento.

2. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de representación contra la de conversión, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de representación y la de conversión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de representación y la de conversión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 20$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.086$ o $t > 2.086$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1203)^2 + (12)(0.1116)^2}{9 + 13 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1151$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.3833 - 0.2831)}{0.1151 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{13}}}, \text{ por lo tanto } t = 2.0076$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 2.0076$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio

de dificultad por los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de representación y la de conversión.

3. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de tratamiento contra la de conversión, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de tratamiento y la de conversión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de tratamiento y la de conversión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 23$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.069$ o $t > 2.069$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(11)(0.1676)^2 + (12)(0.1116)^2}{12 + 13 - 2}}$, luego $Sp = 0.1411$

El estadístico $t = \frac{(0.3367 - 0.2831)}{0.1411 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{13}}}$, por lo tanto $t = 0.9489$

Decisión: Como el estadístico es $t = 2.0076$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de tratamiento y la de conversión.

HIPOTESIS DE COMPLEJIDAD CONCEPTUAL A GRUPOS DE POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA TRADICIONAL

En la tabla 47 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para la complejidad de la comprensión (estructural y operacional) evaluadas con el post-test.

Con el propósito de establecer si la diferencia existente es significativa se presenta a continuación la prueba de hipótesis.

1. Prueba de hipótesis referida a la complejidad conceptual de estructura contra la de operación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el post-test para la complejidad estructural y operacional.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el post-test para la complejidad estructural y operacional.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 32$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.037$ o $t > 2.037$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(26)(0.1485)^2 + (6)(0.0804)^2}{27 + 7 - 2}}$, luego $Sp = 0.1383$

El estadístico $t = \frac{(0.3400 - 0.2843)}{0.1383 \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{7}}}$, por lo tanto $t = 0.9495$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.9495$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la complejidad estructural y operacional.

HIPOTESIS DE NIVEL DE DIFICULTAD A GRUPOS DE POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA TRADICIONAL

En la tabla 49 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices para el nivel de dificultad de los reactivos del post-test.

Puede notarse que no hay diferencia importante en lo que respecta al nivel de dificultad de los reactivos presentes calificados como de reproducción, conexión y reflexión, tratada a

partir del índice promedio de dificultad, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada caso.

1. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad reproducción y conexión de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de reproducción y conexión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de reproducción y conexión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 24$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.064$ o $t > 2.064$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(11)(0.1061)^2 + (13)(0.1777)^2}{12 + 14 - 2}}$, luego $Sp = 0.1492$

El estadístico $t = \frac{(0.3708 - 0.3071)}{0.1492 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{14}}}$, por lo tanto $t = 1.0852$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.0852$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al nivel de dificultad de reproducción y de reflexión de los reactivos del post-test.

2. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad reproducción y reflexión de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de reproducción y reflexión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de reproducción y reflexión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 18$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.101$ o $t > 2.101$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(11)(0.1061)^2 + (7)(0.0938)^2}{12 + 8 - 2}}$, luego $Sp = 0.1014$

El estadístico $t = \frac{(0.3708 - 0.3025)}{0.1014 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{8}}}$, por lo tanto $t = 1.4757$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.4757$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al nivel de dificultad de reproducción y de reflexión de los reactivos del post-test.

3. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad conexión y reflexión de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de conexión y reflexión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de conexión y reflexión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 20$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.086$ o $t > 2.086$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(13)(0.1777)^2 + (7)(0.0938)^2}{14 + 8 - 2}}$, luego $Sp = 0.1536$

El estadístico $t = \frac{(0.3071 - 0.3025)}{0.1536 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{8}}}$, por lo tanto $t = 0.0675$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.0675$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al nivel de dificultad de conexión y de reflexión de los reactivos del post-test.

HIPOTESIS DE REGISTRO INICIAL A GRUPOS DE POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA TRADICIONAL

En la tabla 51 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro inicial para el instrumento post-test.

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al contexto numérico, como registro inicial del reactivo, comparado con el algebraico y el lenguaje natural, pero sobre todo respecto del registro gráfico, tal diferencia es analizada a partir del índice promedio de dificultad y para probar si tales diferencias son significativas se definieron pruebas de hipótesis estadísticas.

1. Prueba de hipótesis referida al registro inicial algebraico y gráfico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 17$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.110$ o $t > 2.110$

Cálculos: $S_p = \sqrt{\frac{(7)(0.1247)^2 + (10)(0.1171)^2}{8 + 11 - 2}}$, luego $S_p = 0.1202$

El estadístico $t = \frac{(0.3138 - 0.2727)}{0.1202\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{11}}}$, por lo tanto $t = 0.7358$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.7358$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro algebraico y gráfico de los reactivos del post-test.

2. Prueba de hipótesis referida al registro inicial algebraico y lenguaje natural de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 17$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.110$ o $t > 2.110$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(7)(0.1247)^2 + (10)(0.1233)^2}{8 + 11 - 2}}$, luego $Sp = 0.1238$

El estadístico $t = \frac{(0.3138 - 0.3418)}{0.1238\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{11}}}$, por lo tanto $t = -0.4817$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.4817$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro algebraico y lenguaje natural de los reactivos del post-test.

3. Prueba de hipótesis referida al registro inicial algebraico y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 10$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.228$ o $t > 2.228$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(7)(0.1247)^2 + (3)(0.1891)^2}{8 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1470$

El estadístico $t = \frac{(0.3138 - 0.4750)}{0.1470 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = -1.7907$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.7907$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro algebraico y numérico de los reactivos del post-test.

4. Prueba de hipótesis referida al registro inicial gráfico y lenguaje natural de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales gráfico y lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales gráfico y lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 20$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.086$ o $t > 2.086$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(10)(0.1171)^2 + (10)(0.1233)^2}{11 + 11 - 2}}$, luego $Sp = 0.1202$

El estadístico $t = \frac{(0.2727 - 0.3418)}{0.1202\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{11}}}$, por lo tanto $t = -1.3482$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.3482$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro gráfico y lenguaje natural de los reactivos del post-test.

5. Prueba de hipótesis referida al registro inicial gráfico y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales gráfico y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales gráfico y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 13$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.160$ o $t > 2.160$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(10)(0.1171)^2 + (3)(0.1891)^2}{11 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1371$

El estadístico $t = \frac{(0.2727 - 0.4750)}{0.1371\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = -2.5272$

Decisión: Como el estadístico es $t = -2.5272$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro gráfico y numérico de los reactivos del post-test.

6. Prueba de hipótesis referida al registro inicial lenguaje natural y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales lenguaje natural y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales lenguaje natural y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 13$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.160$ o $t > 2.160$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(10)(0.1233)^2 + (3)(0.1891)^2}{11 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1412$

El estadístico $t = \frac{(0.3418 - 0.4750)}{0.1412 \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = -1.6156$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.6156$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro inicial del lenguaje natural y el registro numérico de los reactivos del post-test.

HIPOTESIS DE REGISTRO FINAL A GRUPOS DE POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA TRADICIONAL

En la tabla 53 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro final para el instrumento de medición post-test.

Puede notarse que no hay diferencia importante en lo que respecta al índice promedio de dificultad de los distintos registros finales de representación, de cualquier forma se definen las siguientes pruebas de hipótesis estadísticas.

1. Prueba de hipótesis referida al registro final algebraico y gráfico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 11$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.201$ o $t > 2.201$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1437)^2 + (3)(0.1201)^2}{9 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1179$

El estadístico $t = \frac{(0.3322 - 0.3250)}{0.1179 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = 0.1016$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.1016$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final algebraico y gráfico de los reactivos del post-test.

2. Prueba de hipótesis referida al registro final algebraico y el lenguaje natural de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y el lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y el lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 19$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.093$ o $t > 2.093$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1437)^2 + (11)(0.1367)^2}{9 + 12 - 2}}$, luego $Sp = 0.1396$

El estadístico $t = \frac{(0.3322 - 0.3192)}{0.1396 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{12}}}$, por lo tanto $t = -0.2111$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.2111$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final algebraico y el lenguaje natural de los reactivos del post-test.

3. Prueba de hipótesis referida al registro final algebraico y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 16$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.120$ o $t > 2.120$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1437)^2 + (8)(0.1631)^2}{9 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 0.1537$

El estadístico $t = \frac{(0.3322 - 0.3389)}{0.1537 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = -0.0924$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.0924$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final algebraico y numérico de los reactivos del post-test.

4. Prueba de hipótesis referida al registro final gráfico y lenguaje natural de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales gráfico y lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales gráfico y lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 14$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.145$ o $t > 2.145$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.1201)^2 + (11)(0.1367)^2}{4 + 12 - 2}}$, luego $Sp = 0.1333$

El estadístico $t = \frac{(0.3250 - 0.3192)}{0.1333 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}}}$, por lo tanto $t = 0.0753$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.0753$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final gráfico y lenguaje natural de los reactivos del post-test.

5. Prueba de hipótesis referida al registro final gráfico y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales gráfico y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales gráfico y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 11$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.201$ o $t > 2.201$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.1201)^2 + (8)(0.1631)^2}{4 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 0.1525$

El estadístico $t = \frac{(0.3250 - 0.3389)}{0.1525\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = -0.1516$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.1516$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final gráfico y numérico de los reactivos del post-test.

6. Prueba de hipótesis referida al registro final lenguaje natural y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales lenguaje natural y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales lenguaje natural y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 19$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.093$ o $t > 2.093$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(11)(0.1367)^2 + (8)(0.1631)^2}{12 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 0.1483$

El estadístico $t = \frac{(0.3192 - 0.3389)}{0.1483\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = -0.3012$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.3012$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final lenguaje natural y numérico de los reactivos del post-test.

Apéndice G.

Hipótesis estadísticas a grupos Post-test con enfoque de enseñanza con tecnología de la calculadora.

HIPÓTESIS DE VERIFICACIÓN DE UNIFORMIDAD A GRUPOS POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA CON TECNOLOGÍA DE LA CALCULADORA

La tabla 55 muestra el número promedio de reactivos correctos que respondieron los grupos con enfoque de enseñanza que incorpora tecnología de la calculadora. La notación “-E” significa que se trata del grupo de estudiantes que abordaron el estudio del fenómeno sistema masa-resorte mediante una estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora.

Aunque hay diferencias importantes en los promedios de los grupos, se definen pruebas de hipótesis con el propósito de verificar si la diferencia en tales promedios es significativa.

1. Prueba de hipótesis para los grupos 651-E y 657-E, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-E y 657-E en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-E y 657-E en el post-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 18$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.101$ o $t > 2.101$

Cálculos: $S_p = \sqrt{\frac{(12)(4.5305)^2 + (6)(6.1760)^2}{13 + 7 - 2}}$, luego $S_p = 5.1378$

El estadístico $t = \frac{(18.2308 - 12.1429)}{5.1378 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{7}}}$, por lo tanto $t = 2.5275$

Decisión: Como el estadístico es $t = 2.5275$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-E y 657-E.

2. Prueba de hipótesis para los grupos 651-E y 658-E, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-E y 658-E en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-E y 658-E en el post-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 27$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.052$ o $t > 2.052$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(12)(4.5305)^2 + (15)(7.7004)^2}{13 + 16 - 2}}$, luego $Sp = 6.4857$

El estadístico $t = \frac{18.2308 - 16.6875}{6.4857 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{16}}}$, por lo tanto $t = 0.6372$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.6372$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 651-E y 658-E.

3. Prueba de hipótesis para los grupos 657-E y 658-E, para el análisis de relación del promedio del puntaje logrado (reactivos correctos) por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657-E y 658-E en el post-test.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657-E y 658-E en el post-test.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 21$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.080$ o $t > 2.080$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(6)(6.1760)^2 + (15)(7.7004)^2}{7 + 16 - 2}}$, luego $Sp = 7.2974$

El estadístico $t = \frac{(12.1429 - 16.6875)}{7.2974 \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{16}}}$, por lo tanto $t = -1.3742$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.3742$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el promedio del puntaje logrado por los estudiantes de los grupos 657-E y 658-E.

HIPÓTESIS DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS A GRUPOS POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA CON TECNOLOGÍA DE LA CALCULADORA

En la tabla 57 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las competencias matemáticas evaluadas a partir del post-test.

La figura 10 permite visualizar claramente que las competencias matemáticas referidas al modelado y al planteamiento y resolución de problemas son las que tienen el más bajo rendimiento por parte de los estudiantes, el resto de las competencias se conservan en equilibrio.

Puede notarse que hay una diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las competencias matemáticas, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar cada diferencia en particular.

1. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de modelado, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y el modelado.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y el modelado.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 8$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.306$ o $t > 2.306$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.1438)^2 + (5)(0.0693)^2}{4 + 6 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1037$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.3825 - 0.4400)}{0.1037 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}}}, \text{ por lo tanto } t = -0.8590$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.8590$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de modelado.

2. Prueba de hipótesis referida a las competencia matemática de modelado contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y utilizar el lenguaje simbólico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y utilizar el lenguaje simbólico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 22$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.074$ o $t > 2.074$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.1438)^2 + (19)(0.1656)^2}{4 + 20 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1628$$

El estadístico $t = \frac{(0.3825 - 0.5195)}{0.1628 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{20}}}$, por lo tanto $t = -1.5364$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.5364$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática modelar contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico.

3. Prueba de hipótesis referida a las competencia matemática de modelado contra la competencia matemática de representación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y representación.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas de modelado y representación.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 6$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.447$ o $t > 2.447$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.1438)^2 + (3)(0.1411)^2}{4 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1424$

El estadístico $t = \frac{(0.3825 - 0.5100)}{0.1424 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = -1.2662$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.2662$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática modelar contra la competencia matemática de representación.

4. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de utilización del lenguaje simbólico, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y utilización del lenguaje simbólico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y la utilización del lenguaje simbólico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 24$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.064$ o $t > 2.064$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(5)(0.0693)^2 + (19)(0.1656)^2}{6 + 20 - 2}}$, luego $Sp = 0.1507$

El estadístico $t = \frac{(0.4400 - 0.5195)}{0.1507 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{20}}}$, por lo tanto $t = -1.1333$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.1333$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática plantear y resolver problemas contra la competencia utilización del lenguaje simbólico.

5. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas plantear y resolver problemas contra la competencia matemática de representación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y representación.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, y representación.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 8$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.306$ o $t > 2.306$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(5)(0.0693)^2 + (3)(0.1411)^2}{6 + 4 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1023$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.4400 - 0.5100)}{0.1023 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}}}, \text{ por lo tanto } t = -0.8905$$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.1.0600$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática plantear y resolver problemas contra la competencia de representación.

6. Prueba de hipótesis referida a las competencias matemáticas utilizar el lenguaje simbólico contra la competencia matemática de representación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas utilizar el lenguaje simbólico y representar.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para las competencias matemáticas utilizar el lenguaje simbólico y representar.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 22$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.074$ o $t > 2.074$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(19)(0.1656)^2 + (3)(0.1411)^2}{20 + 4 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1624$$

El estadístico $t = \frac{(0.5195 - 0.5100)}{0.1624 \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = 0.1068$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.1068$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la competencia matemática utilizar el lenguaje simbólico y representar.

HIPOTESIS DE ACTIVIDAD COGNITIVA A GRUPOS POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA CON TECNOLOGÍA DE LA CALCULADORA

En la tabla 59 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para cada una de las actividades cognitivas (representación, tratamiento y conversión) evaluadas en a partir del post-test.

Puede notarse diferencia importante en lo que respecta a la eficiencia de conocimientos tratada a partir del índice promedio de las actividades cognitivas de conversión contra las actividades de tratamiento y sobre todo de representación, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar si tal diferencia es significativa.

1. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de representación contra la de tratamiento, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de representación y la de tratamiento.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de representación y la de tratamiento.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 19$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.093$ o $t > 2.093$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1718)^2 + (11)(0.1416)^2}{9 + 12 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1550$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.5656 - 0.5017)}{0.1550 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{12}}}, \text{ por lo tanto } t = 0.9349$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.9349$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de representación y la de tratamiento.

2. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de representación contra la de conversión, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de representación y la de conversión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de representación y la de conversión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 20$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.086$ o $t > 2.086$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1718)^2 + (12)(0.1161)^2}{9 + 13 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1410$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.5656 - 0.4046)}{0.1410 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{13}}}, \text{ por lo tanto } t = 2.6332$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 2.6332$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de representación y la de conversión.

3. Prueba de hipótesis referida a la actividad cognitiva de tratamiento contra la de conversión, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de tratamiento y la de conversión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el diagnóstico para la actividad cognitiva de tratamiento y la de conversión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 23$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.069$ o $t > 2.069$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(11)(0.1416)^2 + (12)(0.1161)^2}{12 + 13 - 2}}$, luego $Sp = 0.1289$

El estadístico $t = \frac{(0.5017 - 0.4046)}{0.1289\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{13}}}$, por lo tanto $t = 1.8817$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.8817$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la actividad cognitiva de tratamiento y la de conversión.

HIPOTESIS DE COMPLEJIDAD CONCEPTUAL A GRUPOS POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA CON TECNOLOGÍA DE LA CALCULADORA

En la tabla 61 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad para la complejidad de la comprensión (estructural y operacional) evaluadas con el post-test.

Con el propósito de establecer si la diferencia existente es significativa se presenta a continuación la prueba de hipótesis.

1. Prueba de hipótesis referida a la complejidad de la comprensión en cuanto a su estructura en contra de la operación, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes en el post-test.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el post-test para la complejidad estructural y operacional.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en el post-test para la complejidad estructural y operacional.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 32$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.037$ o $t > 2.037$

Cálculos: $S_p = \sqrt{\frac{(26)(0.1524)^2 + (6)(0.1128)^2}{27 + 7 - 2}}$, luego $S_p = 0.1458$

El estadístico $t = \frac{(0.5067 - 0.3843)}{0.1458 \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{1}{7}}}$, por lo tanto $t = 1.9793$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.9793$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio de dificultad por los estudiantes en cuanto a la complejidad estructural y operacional.

HIPOTESIS DE NIVEL DE DIFICULTAD A GRUPOS POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA CON TECNOLOGÍA DE LA CALCULADORA

En la tabla 63 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices para el nivel de dificultad de los reactivos del post-test.

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al nivel de dificultad de los reactivos presentes calificados como de reflexión contra aquellos etiquetados como de reproducción y conexión, se estima que es natural, sin embargo se definieron pruebas de hipótesis estadísticas para verificar si en cada caso la diferencia es significativa.

1. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad reproducción y conexión de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de reproducción y conexión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de reproducción y conexión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 24$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.064$ o $t > 2.064$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(11)(0.1702)^2 + (13)(0.1596)^2}{12 + 14 - 2}}$, luego $Sp = 0.1645$

El estadístico $t = \frac{(0.4925 - 0.5164)}{0.1645 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{14}}}$, por lo tanto $t = -0.3693$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.3693$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al nivel de dificultad de reproducción y de reflexión de los reactivos del post-test.

2. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad reproducción y reflexión de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de reproducción y reflexión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de reproducción y reflexión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 18$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.101$ o $t > 2.101$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(11)(0.1702)^2 + (7)(0.0818)^2}{12 + 8 - 2}}$, luego $Sp = 0.1425$

El estadístico $t = \frac{(0.4925 - 0.4038)}{0.1425 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{8}}}$, por lo tanto $t = 1.3637$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.3637$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al nivel de dificultad de reproducción y de reflexión de los reactivos del post-test.

3. Prueba de hipótesis referida al nivel de dificultad conexión y reflexión de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de conexión y reflexión.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio obtenido por los estudiantes en el post-test para los niveles de dificultad de conexión y reflexión.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 20$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.086$ o $t > 2.086$

$$\text{Cálculos: } Sp = \sqrt{\frac{(13)(0.1596)^2 + (7)(0.0818)^2}{14 + 8 - 2}}, \text{ luego } Sp = 0.1374$$

$$\text{El estadístico } t = \frac{(0.5164 - 0.4038)}{0.1374 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{8}}}, \text{ por lo tanto } t = 1.8490$$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.8490$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al nivel de dificultad de conexión y de reflexión de los reactivos del post-test.

HIPÓTESIS DE REGISTRO INICIAL A GRUPOS POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA CON TECNOLOGÍA DE LA CALCULADORA

En la tabla 65 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro inicial para el instrumento post-test.

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al contexto del lenguaje natural, como registro inicial del reactivo, comparado con el numérico, pero sobre todo respecto del registro gráfico, tal diferencia es analizada a partir del índice promedio de dificultad y para probar si tales diferencias son significativas se definieron pruebas de hipótesis estadísticas.

1. Prueba de hipótesis referida al registro inicial algebraico y gráfico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 17$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.110$ o $t > 2.110$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(7)(0.1703)^2 + (10)(0.1421)^2}{8 + 11 - 2}}$, luego $Sp = 0.1543$

El estadístico $t = \frac{(0.4488 - 0.5455)}{0.1543 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{11}}}$, por lo tanto $t = -1.3487$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.3487$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro algebraico y gráfico de los reactivos del post-test.

2. Prueba de hipótesis referida al registro inicial algebraico y lenguaje natural de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $v = 17$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.110$ o $t > 2.110$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(7)(0.1703)^2 + (10)(0.1372)^2}{8 + 11 - 2}}$, luego $Sp = 0.1517$

El estadístico $t = \frac{(0.4488 - 0.4318)}{0.1517 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{11}}}$, por lo tanto $t = 0.2411$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.2411$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro algebraico y lenguaje natural de los reactivos del post-test.

3. Prueba de hipótesis referida al registro inicial algebraico y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales algebraico y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 10$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.228$ o $t > 2.228$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(7)(0.1703)^2 + (3)(0.1704)^2}{8 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1703$

El estadístico $t = \frac{(0.4488 - 0.5075)}{0.1703 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = -0.5628$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.5628$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro algebraico y numérico de los reactivos del post-test.

4. Prueba de hipótesis referida al registro inicial gráfico y lenguaje natural de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales gráfico y lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales gráfico y lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 20$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.086$ o $t > 2.086$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(10)(0.1421)^2 + (10)(0.1372)^2}{11 + 11 - 2}}$, luego $Sp = 0.1396$

El estadístico $t = \frac{(0.5455 - 0.4318)}{0.1396 \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{11}}}$, por lo tanto $t = 1.9101$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.9101$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro gráfico y lenguaje natural de los reactivos del post-test.

5. Prueba de hipótesis referida al registro inicial gráfico y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales gráfico y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales gráfico y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 13$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.160$ o $t > 2.160$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(10)(0.1421)^2 + (3)(0.1704)^2}{11 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1491$

El estadístico $t = \frac{(0.5455 - 0.5075)}{0.1491 \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = 0.4365$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.4365$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro gráfico y numérico de los reactivos del post-test.

6. Prueba de hipótesis referida al registro inicial lenguaje natural y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales lenguaje natural y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros iniciales lenguaje natural y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 13$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.160$ o $t > 2.160$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(10)(0.1372)^2 + (3)(0.1704)^2}{11 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1455$

El estadístico $t = \frac{(0.4318 - 0.5075)}{0.1455 \sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = -0.8910$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.8910$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro inicial del lenguaje natural y el registro numérico de los reactivos del post-test.

HIPÓTESIS DE REGISTRO FINAL A GRUPOS POST-TEST CON ENFOQUE DE ENSEÑANZA CON TECNOLOGÍA DE LA CALCULADORA

En la tabla 67 se exhiben los valores promedio que obtuvieron los estudiantes respecto de los índices de dificultad de los reactivos a partir del registro final para el instrumento de medición post-test.

Puede notarse que hay diferencia importante en lo que respecta al índice promedio de dificultad de los distintos registros finales de representación, en particular el registro numérico y algebraico se encuentran por debajo del resto de los registros de representación,

de cualquier forma se definen pruebas de hipótesis estadísticas para verificar si tales diferencias son significativas.

1. Prueba de hipótesis referida al registro final algebraico y gráfico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y gráfico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y gráfico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 11$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.201$ o $t > 2.201$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1309)^2 + (3)(0.1256)^2}{9 + 4 - 2}}$, luego $Sp = 0.1294$

El estadístico $t = \frac{(0.4144 - 0.5350)}{0.1294 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{4}}}$, por lo tanto $t = -1.5509$

Decisión: Como el estadístico es $t = -1.5509$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final algebraico y gráfico de los reactivos del post-test.

2. Prueba de hipótesis referida al registro final algebraico y el lenguaje natural de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y el lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y el lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 19$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.093$ o $t > 2.093$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1309)^2 + (11)(0.1499)^2}{9 + 12 - 2}}$, luego $Sp = 0.1422$

El estadístico $t = \frac{(0.4144 - 0.5675)}{0.1422 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{12}}}$, por lo tanto $t = -2.4416$

Decisión: Como el estadístico es $t = -2.4416$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final algebraico y el lenguaje natural de los reactivos del post-test.

3. Prueba de hipótesis referida al registro final algebraico y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales algebraico y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 16$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.120$ o $t > 2.120$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(8)(0.1309)^2 + (8)(0.1349)^2}{9 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 0.1329$

El estadístico $t = \frac{(0.4144 - 0.4100)}{0.1329 \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = 0.0702$

Decisión: Como el estadístico es $t = 0.0702$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio

por los estudiantes en cuanto al registro final algebraico y numérico de los reactivos del post-test.

4. Prueba de hipótesis referida al registro final gráfico y lenguaje natural de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales gráfico y lenguaje natural.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales gráfico y lenguaje natural.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 14$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.145$ o $t > 2.145$

Cálculos: $S_p = \sqrt{\frac{(3)(0.1256)^2 + (11)(0.1499)^2}{4 + 12 - 2}}$, luego $S_p = 0.1450$

El estadístico $t = \frac{(0.5350 - 0.5675)}{0.1450 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}}}$, por lo tanto $t = -0.3882$

Decisión: Como el estadístico es $t = -0.3882$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final gráfico y lenguaje natural de los reactivos del post-test.

5. Prueba de hipótesis referida al registro final gráfico y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales gráfico y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales gráfico y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 11$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.201$ o $t > 2.201$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(3)(0.1256)^2 + (8)(0.1349)^2}{4 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 0.1324$

El estadístico $t = \frac{(0.5350 - 0.4100)}{0.1324 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = 1.5711$

Decisión: Como el estadístico es $t = 1.5711$, no hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que no hay diferencias significativas en el índice promedio por los estudiantes en cuanto al registro final gráfico y numérico de los reactivos del post-test.

6. Prueba de hipótesis referida al registro final lenguaje natural y numérico de los reactivos del post-test, para el análisis de la relación del índice promedio de dificultad obtenido por los estudiantes.

Hipótesis nula. H_0 : No existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales lenguaje natural y numérico.

Hipótesis alterna. H_1 : Existe diferencia en el índice promedio por los estudiantes en el post-test para los registros finales lenguaje natural y numérico.

El nivel de significación es $\alpha = 0.05$ con grados de libertad $\nu = 19$

Región crítica: H_0 se rechaza cuando $t < -2.093$ o $t > 2.093$

Cálculos: $Sp = \sqrt{\frac{(11)(0.1499)^2 + (8)(0.1349)^2}{12 + 9 - 2}}$, luego $Sp = 0.1437$

El estadístico $t = \frac{(0.5675 - 0.4100)}{0.1437 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{9}}}$, por lo tanto $t = 2.4855$

Decisión: Como el estadístico es $t = 2.4855$, hay elementos para rechazar la hipótesis nula, los resultados demuestran que hay diferencias significativas en el índice promedio por los

estudiantes en cuanto al registro final lenguaje natural y numérico de los reactivos del post-test.

Apéndice H.

Artículo publicado: Impacto en las competencias matemáticas de los estudiantes de ecuaciones diferenciales a partir de una estrategia didáctica que incorpora calculadora.