

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA



FACULTAD DE CIENCIAS



**DESCRIPCIÓN TEÓRICA Y DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL DE
VÓRTICES TOROIDALES**

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA

HÉCTOR OMAR ROMERO ÁLVAREZ

Ensenada, B.C.

Abril, 2015.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

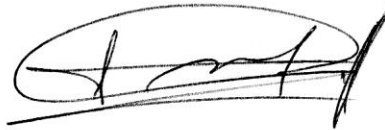
**DESCRIPCIÓN TEÓRICA Y DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL DE
VÓRTICES TOROIDALES**

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

HÉCTOR OMAR ROMERO ÁLVAREZ

APROBADO POR:



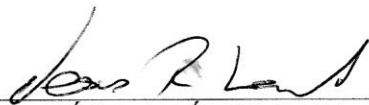
DR. JUAN CRISÓSTOMO TAPIA MERCADO

PRESIDENTE



DR. ARMANDO REYES SERRATO

SECRETARIO



DR. JESÚS RAMÓN LERMA ARAGÓN

1ER. VOCAL

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, familia y amigos que están conmigo por brindarme el apoyo para lograr este pasó en mi vida con éxito.

A la Facultad de Ciencias de la UABC por el apoyo brindado en estos años.

Al Dr. Armando Reyes Serrato y al M.C. Arturo Gamietea y Domínguez, quienes me impulsaron a desarrollar esta tesis y que me brindaron nuevas experiencias.

El apoyo económico brindado mediante el Convenio CoNaCyT - Matematiké – I010/295/2014 C-477/2014.

RESUMEN

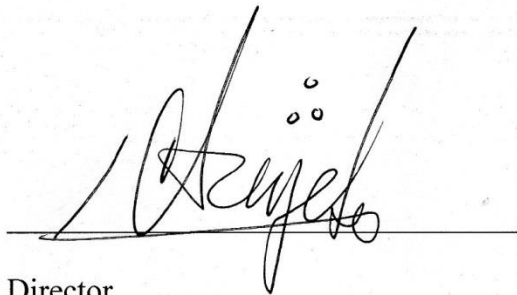
Resumen de la tesis de Héctor Omar Romero Álvarez presentada como requisito parcial la obtención de la Licenciatura en Física. Ensenada, Baja California, México.

Ensenada, Baja California, México. Marzo del 2015

DESCRIPCIÓN TEÓRICA Y DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL DE VÓRTICES TOROIDALES.

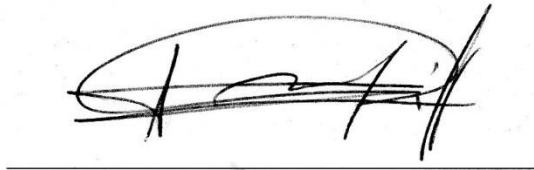
En esta Tesis se presenta la descripción matemática de la dinámica de un vórtice toroidal en condiciones ideales y un experimento para generar vórtices, observarlos y utilizarlo como prototipo didáctico para un público de escuelas primarias. Se pretende determinar lo que los alumnos entienden del fenómeno que se les muestra. Se utiliza una caja de cartón sellada y con un agujero en uno de sus lados, llenándola de humo como indicador para visualizar el fenómeno turbulento al someterla a pulsos discretos. El análisis teórico se basa en el artículo de *Borsov-Kilin-Mamaev [1]* en donde se muestran los efectos del vórtice, su estabilidad, el vórtice sin rotación y el caso en donde rota.

Resumen aprobado:



Director

Dr. Armando Reyes Serrato



Coodirector

Dr. Juan Crisóstomo Tapia Mercado

ABSTRACT

THEORETICAL DESCRIPTION AND EXPERIMENTAL DEMONSTRATION OF TOROIDAL VORTEX.

In this senior thesis is presented a mathematical description of the dynamics of a toroidal vortex in ideal conditions; and an experiment to generate and observe vortices, and use it as a didactic prototype for elementary schools. It is intended to determine what the students understand about the phenomenon exposed. A sealed cardboard box with a hole in one side is used and filled in with smoke as an indicator to display the turbulent phenomenon when it is subjected to discrete pulses. The theoretical analysis is based on *Borsov - Kilin - Mamaev [1]* article, which demonstrated the effects of the vortex and its stability, non-rotating vortex and rotation case.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	1
ANTECEDENTES.....	3
OBJETIVOS	6
MÉTODOLOGIA	7
Analizar el modelo matemático para encontrar el sentido físico de las ecuaciones que describen el vórtice toroidal.....	7
Elaborar el “Cañón de Humo”	7
Forma en la que se realiza el experimento y se aplica la encuesta	7
ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES	10
Ecuaciones de movimiento de un vórtice toroidal tipo anillo	10
Dinámica de un vórtice toroidal tipo anillo	15
Interpretación de la dinámica del vórtice tipo anillo	17
DEMOSTRACIÓN DEL EXPERIMENTO Y CAPTURA DE DATOS.....	18
Fabricación del “Cañón de Humo”	19
Elementos de la encuesta	20
Captura de datos de las encuestas	22
Tablas de la población de cuarto grado	25
Tablas de la población de quinto grado	28
Tablas de la población de sexto grado	31
DISCUSIÓN	34
Análisis	36
CONCLUSIONES	39
LITERATURA CITADA.....	41
ANEXOS	43
Anexo I: Coordenadas Cilíndricas.....	43
Anexo II: Función de Corriente	45
Anexo III: Funciones de Green.....	46
Anexo IV: Integrales Elípticas.....	50
Anexo V: Galería Fotográfica.....	54

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Muestra el diagrama de la interacción de los aires interno y externo.....	8
Figura 2. Vórtice toroidal de radio R que muestra la sección transversal de radio a	17

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla I. ¿Te gusto el experimento? población total.	22
Tabla II. ¿Podrías explicarlo brevemente? población total.	22
Tabla III. “Explícalo con tus palabras” población total.	22
Tabla IV. Resultados de las preguntas uno y dos de la población total en tabla de contingencia.	23
Tabla V. Resultados de la primera petición “Explícalo brevemente” clasificados en la población total.	23
Tabla VI. Individuos que no contestaron en la primera petición “Explícalo brevemente” en la población total.	23
Tabla VII. ¿Qué sugieres para mejorar el experimento? población total.	24
Tabla VIII. ¿Te gusto el experimento? población de cuarto grado.	25
Tabla IX. ¿Podrías explicarlo brevemente? población de cuarto grado.	25
Tabla X. “Explícalo con tus palabras” población de cuarto grado.	25
Tabla XI. Resultados de las preguntas uno y dos en la población de cuarto grado en tabla de contingencia.	26
Tabla XII. Resultados de la primera petición “Explícalo brevemente” clasificados en la población de cuarto grado.	26
Tabla XIII. Individuos que no contestaron la primera petición “Explícalo brevemente” en la población de cuarto grado.	26
Tabla XIV. ¿Qué sugieres para mejorar el experimento? población de cuarto grado.	27
Tabla XV. ¿Te gusto el experimento? población de quinto grado.	28
Tabla XVI. ¿Podrías explicarlo brevemente? población de quinto grado.	28
Tabla XVII. “Explícalo con tus palabras” población de quinto grado.	28
Tabla XVIII. Resultados de las preguntas uno y dos en la población de quinto año en tabla de contingencia.	29
Tabla XIX. Resultados de la primera petición “Explícalo brevemente” clasificados en la población de quinto grado.	29
Tabla XX. Individuos que no contestaron la primera petición “Explícalo brevemente” en la población de quinto grado.	29
Tabla XXI. ¿Qué sugieres para mejorar el experimento? Población de quinto grado.	30
Tabla XXII. ¿Te gusto el experimento? población de sexto grado.	31
Tabla XXIII. ¿Podrías explicarlo brevemente? población de sexto grado.	31
Tabla XXIV. “Explícalo con tus palabras” población de sexto grado.	31
Tabla XXV. Resultados de las preguntas uno y dos de la población de sexto año en tabla de contingencia.	32
Tabla XXVI. Resultados de la primera petición “Explícalo brevemente” clasificados en la población de sexto grado.	32

Tabla XXVII. Individuos que no contestaron la primera petición “Explícalo brevemente” en la población de sexto grado.	32
Tabla XXVIII. ¿Qué sugieres para mejorar el experimento? Población de sexto grado. .	33

ÍNDICE FOTOGRAFÍAS

Fotografía 1. Alumna de la Escuela Primaria “J. M. Cuillingford López” realizando la encuesta.	54
Fotografía 2. Alumnas de la Escuela Primaria “J. M. Cuillingford López” con el arreglo experimental del “Cañón de Humo”.	54
Fotografía 3. Alumnos de la Escuela Primaria “J. M. Cuillingford López” observando el experimento “Cañón de Humo”.	54
Fotografía 4. Alumnos de quinto grado realizando la encuesta del “Cañón de Humo”.	54
Fotografía 5. Niños de Guardería en “XXIX Semana de Ciencias” con el experimento “Cañón de Humo”.	54
Fotografía 6. Niña de Primaria en “XXIX Semana de Ciencias” con el experimento “Cañón de Humo”.	55
Fotografía 7. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo t .	55
Fotografía 8. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+1$.	55
Fotografía 9. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+2$.	55
Fotografía 10. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+3$.	55
Fotografía 11. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+4$.	56
Fotografía 12. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+5$.	56
Fotografía 13. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+6$.	56
Fotografía 14. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+7$.	56
Fotografía 15. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+8$.	56
Fotografía 16. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+9$.	56
Fotografía 17. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+10$.	57
Fotografía 18. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+11$.	57
Fotografía 19. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+12$.	57
Fotografía 20. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+13$.	57
Fotografía 21. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+14$.	57
Fotografía 22. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+15$.	57
Fotografía 23. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+16$.	58
Fotografía 24. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+17$.	58
Fotografía 25. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+18$.	58

INTRODUCCIÓN

En este trabajo utilizan los conceptos de hidrodinámica e hidrostática, que son las ciencias dedicadas a estudiar el comportamiento de los fluidos en movimiento y en reposo respectivamente.

Un fluido se entiende como una sustancia que presenta ciertas características como gran movilidad y desplazamiento libre, debido al estado de la materia en que se encuentra, dado que sus moléculas tienen poca interacción. Entonces, al hablar de un fluido ideal, intrínsecamente se puede encontrar propiedades tales como: no viscoso, estacionario e incompresible.

La no viscosidad significa que es carente de fricción con el medio e interacción con él mismo. Por estacionario, se interpreta que la velocidad del fluido se mantiene estable en un punto en el tiempo. Por incompresible, significa que la densidad no es variable en el tiempo por lo tanto, es homogéneo.

En cierto tipo de casos el fluido puede presentar vórtices debido a condiciones que se encuentran en el medio, como un obstáculo por ejemplo. La definición de vórtice puede ser interpretada como “una región de un fluido que gira alrededor de un punto o una línea”. Al depender de la forma del obstáculo, el fluido puede presentar vórtices de forma toroidal.

Existen diferentes maneras de generar los vórtices toroidales. Una forma simple y sencilla, que utiliza materiales de fácil adquisición, es una caja sellada y con un agujero

en uno de sus lados, se introduce humo en la caja y después se somete a pulsos mecánicos discretos.

El experimento que hace referencia en esta tesis se llama “Cañón de Humo”. El fenómeno hidrodinámico vórtice toroidal emociona a los espectadores por ser pocas veces visto, muy llamativo y sobre todo por la interacción del público con el experimento.

Con el experimento “Cañón de Humo” es posible llevar el fenómeno a muchos y diferentes sectores de la población y provocar en ellos gusto e interés por la ciencia. De esta forma se puede observar el proceso de aprendizaje que tiene la persona al mostrarle el experimento y el cambio que tiene después de observarlo.

Aunque cualquier persona, sin importar su escolaridad muestra mucho interés en el experimento, el presente trabajo se dirige exclusivamente a alumnos de cuarto, quinto y sexto grado de educación básica, posteriormente se hace un análisis de la percepción que hayan tenido de la experiencia, que se recuperará mediante una encuesta para el propósito

Con el experimento “Cañón de Humo”, además de visualizar el fenómeno, también se propicia el deseo de explicarlo desde el punto de vista físico y matemático, es un modelo de vórtices toroidales que en condiciones ideales lleva a una buena aproximación del experimento.

ANTECEDENTES

Herman Von Helmholtz (1821-1894) es el pionero en la descripción de la dinámica de los vórtices toroidales [2], Helmholtz realiza la descripción matemática de los vórtices toroidales en condiciones ideales y relaciona el tema con otras áreas.

Entre la década de 1858-1868, Helmholtz publicó más artículos referentes al tema de vórtices en un sistema hidrodinámico, también aplicó sus descubrimientos a los campos de la electrodinámica y electromagnetismo. Con lo que obtuvo desarrollos trascendentes para la teoría en altas energías, hidrodinámica, electrodinámica y plasma entre otros campos.

En el artículo que publicó *Moritz Epple* [3] se muestra un análisis de la parte topológica del trabajo de Helmholtz, de la descripción matemática que tiene un toroide y sus posibles ramificaciones.

Con las ideas de Helmholtz, Moritz relacionó al problema con descubrimientos hechos por J. C. Maxwell (1831-1879) en la parte de electrodinámica asocia sus ecuaciones y conceptos de la hidrodinámica correspondientes al vórtice.

También Moritz hace referencia al primer “Cañón de Humo”, que lleva por nombre “Smoke Rings” o anillos de humo, fue construido en el año 1876. Este arreglo es similar al “Cañón de Humo” propuesto en este trabajo, sólo que el humo en su experimento lo obtuvo mediante sulfato de magnesio.

En el artículo de *S. A. Chaplygin [4]* se encuentran ecuaciones que describen el vórtice toroidal en condiciones ideales, en un sistema coordinado cartesiano y consiguen soluciones tipo Bessel, que describen el movimiento del sistema.

De forma similar, el artículo de *Borsov-Kilin-Mamaev [1]* comienza con ecuaciones hidrodinámicas, para llegar a una solución del tipo de Green, en los casos con y sin vorticidad, para poder modelar la solución del vórtice toroidal en condiciones ideales.

En los casos anteriores las ecuaciones y soluciones toman aspectos clásicos, en donde las cantidades fundamentales se conservan tales como momentum, momentum angular y energía cinética. Esto debido a que está planteado como un sistema ideal conservativo.

El “Cañón de Humo” que genera vórtices toroidales fue presentado en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Baja California, Campus Ensenada, en el marco de la “XXVIII Semana de Ciencias” del 2013; se realizaron demostraciones que provocaron reacciones de curiosidad, asombro y gusto. El experimento del Cañón de Humo, es uno de los que causa más impacto.

También se ha presentado y se han obtenido reacciones similares en: “Noche de las estrellas” (2013), “Cimarroncitos en la Ciencia y Tecnología” (2013), “1er Encuentro de jóvenes investigadores” (2013), “Cimarroncitos en la Ciencia y Tecnología” (2014), “Curso de verano en la ciencia” UABC (2014), Curso de inducción propedéutico del “Instituto Tecnológico de Ensenada” (2014), Escuela Primaria “La Corregidora” (2014),

Escuela Primaria “Juan Manuel Cuillingford Lopez” (2014) y “Semana de Ciencias XXIX”.

Se expusieron los resultados de las demostraciones llevadas a cabo en el congreso de la “Asociación Americana de Profesores de Física” AAPT-México (2014) realizada el 14 de noviembre en Guanajuato, Gto. Se encontró que tiene mayor influencia en el sector primaria entre cuarto, quinto y sexto grado.

OBJETIVOS

- Analizar el modelo del vórtice toroidal bajo las condiciones del artículo de *Borsov-Kilin-Mamaev [1]*.
- Recrear el experimento “Cañón de Humo”.
- Diseñar una encuesta para observar las preferencias y el entendimiento de los espectadores.
- Tomar en cuenta las sugerencias que viertan sobre el experimento.
- Mostrar el experimento “Cañón de Humo” a grupos de cuarto, quinto y sexto grado de primaria.
- Analizar los datos de las encuestas.
- Dar interpretación y sentido a los datos analizados para encontrar las necesidades de los niños en ese sector.

MÉTODOLOGIA

Analizar el modelo matemático para encontrar el sentido físico de las ecuaciones que describen el vórtice toroidal

Análisis detallado de las funciones que constituyen la ecuación general que modela el fenómeno físico.

Elaborar el “Cañón de Humo”

El “Cañón de Humo” es una caja de cartón sellada con cinta adhesiva y perforada en uno de sus lados con un hueco de aproximadamente 15 cm de radio. Después se llena de humo para hacer notorio el fenómeno, se aplasta con la intensidad adecuada para crear un pulso en la caja y de esa forma se obtiene un vórtice toroidal.

Forma en la que se realiza el experimento y se aplica la encuesta

Se realiza un esquema en el pintarrón en donde esté representada la caja con el agujero, se dibujan flechas que indican la fuerza al momento de aplastarla. Dibujando el aire interno expulsado por el pulso con un color, el aire externo representado con otro color. Se hace énfasis en que el aire expulsado de la caja tiene distintas velocidades, debido a que tiene fricción al pasar por la boca de la caja (al contacto con el agujero), en el centro del hueco la velocidad es mayor que la del contacto con la boca del agujero, esto hace una diferencia de velocidades.

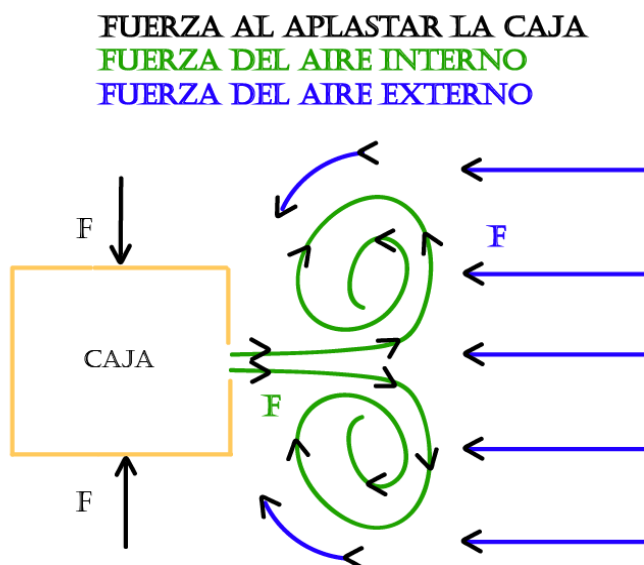


Figura 1. Muestra el diagrama de la interacción de los aires interno y externo.

Se considera que el aire externo está en reposo al suceder el pulso. Se hace el dibujo de la interacción de los aires (interno y externo). Se hace ver que ocurre en un corte trasversal, una figura de un dipolo. Explicando que una sección del dipolo se puede interpretar como un remolino. Se considera que ese remolino se forma en todo el círculo y que a su vez el círculo actúa como remolino, generando lo que se conoce como toroide, y al fenómeno como vórtice toroidal.

Al explicar que el vórtice toroidal se vuelve estable debido a la rotación que va en sentido de la mano derecha y con vorticidad constante (el remolino). En el experimento cañón de humo sus balas se representan por el vórtice toroidal y el cañón por la caja. El humo que se coloca es sólo un indicador para hacer visible el fenómeno.

Con respecto a la encuesta, ésta está constituida por cuatro elementos, con el primero se espera saber si gustó el experimento, explícitamente se pregunta: ¿Te gusto el

experimento? Sí o No, son las respuestas que se esperan obtener de los asistentes. De esta forma podremos saber si el experimento que observaron es de su interés.

El segundo elemento propuesto es la pregunta: ¿Podrías describir el experimento? Esta pregunta se aplica con la finalidad de saber si el alumno se siente capaz de responder y su respuesta esperada es de nuevo sí, o no.

Con el tercer elemento: “Explícalo con tus palabras”. Se le da la oportunidad al alumno que plasme, en la encuesta, la idea que tiene y el conocimiento que adquirió del experimento. De esa forma se podrán hacer clasificaciones de la percepción que hubo del experimento en los diferentes grados.

El cuarto y último elemento de la encuesta es de libre expresión, impulsando al alumno a poner su opinión o sugerencia del experimento. Explícitamente se pregunta: ¿Que sugieres para mejorar el experimento? De las respuestas a dicha pregunta, esperamos obtener una guía sobre cómo lograr el mejor resultado en futuras presentaciones del experimento a los alumnos.

ANÁLISIS DE LAS ECUACIONES

La descripción del movimiento de un toroide en condiciones ideales se basa en las ecuaciones fundamentales de Hidrodinámica básica que se plantean para describir el movimiento de un toroide en condiciones ideales, se plantean dos casos: el primero en el que el fluido no presenta vorticidad, **“Ecuaciones de movimiento de un vórtice toroidal tipo anillo”** y el segundo caso que muestra vorticidad en el fluido **“Dinámica de un vórtice toroidal tipo anillo”**.

Ecuaciones de movimiento de un vórtice toroidal tipo anillo

Se plantean las ecuaciones suponiendo que no existe vorticidad alguna en el fluido. Por consiguiente, se tiene un fluido ideal sin rotación.

Se analiza y observa el comportamiento de un toroide tipo anillo, por lo cual es posible elegir un tipo de coordenadas que faciliten la descripción del problema. En este caso, dada la naturaleza del problema, se utilizan coordenadas cilíndricas (anexo I), ya que es similar a un anillo y es un fenómeno que tiene un eje de simetría. Los vectores coordenados del sistema cilíndrico tienen como vectores base unitarios los elementos representados por, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$ y $\mathbf{e}_z$.

La velocidad lineal del flujo representada por el vector $\mathbf{v}$, tiene únicamente componentes a lo largo de “ $\mathbf{e}_z$ ” y “ $\mathbf{e}_r$ ”, está da por la ecuación:

$$\mathbf{v} = v_z(z,r)\mathbf{e}_z + v_r(z,r)\mathbf{e}_r, \quad (1)$$

la suma de las velocidades componentes representa la velocidad lineal del problema.

Similarmente, la vorticidad del fluido representada por $\boldsymbol{\omega}$ y (por el tipo de circulación) con componente $\mathbf{e}_\varphi$, está dada por la ecuación

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(z, r) \mathbf{e}_\varphi, \quad (2)$$

y la dependencia de $\omega(z, r)$ está definida por

$$\omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (3)$$

En el caso de un fluido ideal donde no hay vorticidad en las otras componentes se hacen las consideraciones siguientes $v_\varphi = 0$ y $\omega_z = 0$. En un fluido incompresible y con $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, la velocidad puede ser expresada en funciones de corriente $\psi(z, r)$ (anexo II) por:

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(z, r)}{\partial r}, \quad (4)$$

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi(z, r)}{\partial z}, \quad (5)$$

la forma de las ecuaciones (4) y (5) se debe al sistema de coordenadas cilíndrico, que tiene intrínsecamente tres componentes (v_r, v_φ, v_z) , de las cuales por condiciones iniciales, $v_\varphi = 0$. Por consiguiente, la velocidad del fluido sólo tiene dos componentes actuando, v_r la componente radial y v_z la componente vertical.

Donde la función de corriente $\psi(z, r)$ es tipo Green (anexo III):

$$\psi(z, r) = \int G(z, r, \tilde{z}, \tilde{r}) \omega(\tilde{z}, \tilde{r}) d\tilde{z} d\tilde{r}, \quad (6)$$

siendo $G(z, r, \tilde{z}, \tilde{r})$ la corriente de un vórtice circular infinitamente delgado unitario y $\omega(\tilde{z}, \tilde{r})$ su vorticidad, más adelante se muestra la solución de estas dos funciones.

El sistema de ecuaciones represando por (7) y (8) se utilizan para representar el modelo toroidal.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \omega, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = - \omega, \quad (8)$$

de estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\omega = \delta(z - \tilde{z}) \delta(r - \tilde{r}), \quad (9)$$

que denota la vorticidad del problema de un espira infinitamente delegada y

$$G(z, r, \tilde{z}, \tilde{r}) = \frac{\sqrt{r\tilde{r}}}{2\pi} \left(\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right), \quad (10)$$

es la función de corriente de un filamento de vórtice circular infinitamente delgado de intensidad unitaria.

La solución $G(z, r, \tilde{z}, \tilde{r})$ está compuesta por las funciones $K(k)$ y $E(k)$ dependientes de k , son integrales elípticas de primer y según orden (anexo IV)

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}}, \quad (11)$$

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (12)$$

donde k es:

$$k = \left(\frac{4r\tilde{r}}{(z-\tilde{z})^2 + (r-\tilde{r})^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Al utilizar las (7) y (8), se puede mostrar que el flujo del vórtice representado por (6) es la función de corriente y posee tres cantidades que se conservan: Γ , P y E .

Γ representa la circulación total en el fluido,

$$\Gamma = \int_s \omega(z, r) dz dr, \quad (14)$$

P es el valor absoluto del momentum del flujo,

$$P = \pi \int_s \omega(z, r) r^2 dz dr, \quad (15)$$

E es la energía cinética del flujo,

$$E = \pi \int_s \psi(z, r) \omega(z, r) dz dr, \quad (16)$$

donde s es la región transversal llena de fluido en el vórtice.

Estas cantidades son conservativas por la naturaleza del problema y porque se hace la consideración ideal. Al igual que otros sistemas hay cantidades fundamentales que hacen que el fenómeno sea conservativo si no hay fuerzas externas.

Dinámica de un vórtice toroidal tipo anillo

En el caso cuando las ecuaciones que describen al flujo aceptan soluciones singulares que rigen el movimiento de los puntos del vórtice en el plano.

El sistema de ecuaciones (7) y (8) también admite una solución del tipo de ω , la cual tiene incluidos términos de vorticidad y la descripción del anillo mediante las funciones delta que delimitan el contorno coaxial del vórtice en coordenadas cilíndricas Z_i y R_i ,

$$\omega = \sum_{i=1} \Gamma_i \delta(z - Z_i(t)) \delta(r - R_i(t)), \quad (17)$$

al aplicar el teorema de Helmholtz sobre la transferencia que hace referencia a “cualquier tipo de fluidos, significa que los tubos de vórtice (como los anillos de humo) son cerrados o terminan en alguna frontera” [5]. Entonces las funciones $Z_i(t)$ y $R_i(t)$ deben de satisfacer las ecuaciones

$$\dot{R}_i(t) = v_r(z, r)|_{\substack{r=R_i \\ z=Z_i}} = -\frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial Z_i} \sum_{j \neq i}^N \Gamma_j G(R_i, Z_i, R_j, Z_j), \quad (18)$$

$$\dot{Z}_i(t) = v_z(z, r)|_{\substack{r=R_i \\ z=Z_i}} = \frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial R_i} \sum_{j \neq i}^N \Gamma_j G(R_i, Z_i, R_j, Z_j) + V_z^{(0)}(Z_i, R_i). \quad (19)$$

que muestran la dependencia de las funciones de continuidad para todos los puntos del vórtice. Las ecuaciones presentan el término de vorticidad Γ_j y una función de Green $G(R_i, Z_i, R_j, Z_j)$ dependiente de las coordenadas cilíndricas.

El termino $V_z^{(0)}(Z_i, R_i)$ en la (19) se interpreta como el término de autopropulsión del vórtice, es decir, la velocidad del filamento de un vórtice, inducido por el filamento mismo, en la ausencia de otros vórtices. En el momento que el término $V_z^{(0)}(Z_i, R_i) = 0$, y el caso donde las componentes del eje son simétricas es $V_z^{(0)}(Z_i, R_i) = \infty$, debido a la curvatura no cero del filamento.

Interpretación de la dinámica del vórtice tipo anillo

Existen soluciones no singulares de la forma (17), como se muestra en el sistema de ecuaciones (7) y (8).

Para observar la descripción teórica de los vórtices tipo toroide en un fluido ideal, se tiene que hacer la consideración de modelos de vórtices infinitamente delgados que pueden aproximarse considerablemente al fenómeno físico.

En el modelo descrito cada vórtice es de forma toroidal con una sección de radio a_i , y de radio del centro al vórtice R_i donde se cumple $a_i \ll R_i$.

La vorticidad que presenta el vórtice en la parte interior y exterior, debido al teorema de Helmholtz de continuidad dentro del vórtice, es distinto de cero, depende de la distancia que se encuentre del centro $\omega = \omega(S)$. Todas las consideraciones fuera del vórtice son cero.

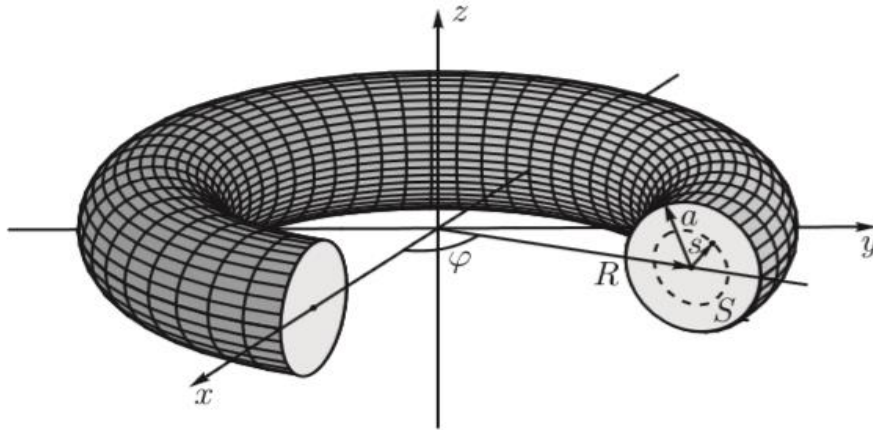


Figura 2. Vórtice toroidal de radio R que muestra la sección trasversal de radio a .

DEMOSTRACIÓN DEL EXPERIMENTO Y CAPTURA DE DATOS

Se mostró el experimento “Cañón de Humo” y levantó la encuesta el 20 de octubre del 2014, en tres grupos de cuarto grado, dos de quinto grado, y tres de sexto grado de primaria, dando un total de 195 estudiantes de la Escuela Primaria Estatal “Profesor Juan Manual Cuillingford López” de la zona 036 en Ensenada, Baja California.

Dados los elementos que presenta el experimento “Cañón de Humo”, se les pregunta a los niños si conocen el material que observan desde sus pupitres. El niño observa y hace relaciones con experiencias pasadas, así obtenemos elementos para poder plantear la idea de lo que es un vórtice y relacionarlo con sus experiencias para facilitarles la comprensión del experimento.

Se plantea una introducción al fenómeno con relación a los remolinos que observan diariamente como ejemplos: agua al irse por el desagüe, el inodoro al bajarle la palanca, también se hace referencia al aire, se hace mención que no se puede observar sin ayuda pero, podemos sentirlo, por eso usamos el detector, en este caso el humo que va ayudar a visualizar la forma que adquiere cierto volumen de aire. Se mencionan los remolinos que se forman con el aire y tierra, que esos si pueden verlos dado que tienen un detector que es la tierra y por lo tanto pueden observar su estructura interna.

Se introduce una cantidad adecuada de humo, en un tiempo de 10 a 15 segundos de espera, después se aplasta la caja con un golpe repentino con el énfasis suficiente para lograr una deformación considerable, provocando una expulsión de humo que genera el vórtice toroidal (una dona de humo).

Se le pide al niño observar el fenómeno, que hagan sus preguntas y expresen sus dudas sobre éste fenómeno.

Se aplica el mismo procedimiento en los distintos grados, la explicación que se requiere en cada exposición va ligada al interés de los alumnos, se elabora un diagrama en el pizarrón, donde se dibujan las corrientes de aire, se hace énfasis en las corrientes internas y externas, también en la fuerzas que actúa en la caja al ser aplastada y en las corrientes que generan el vórtice.

Una vez terminada la demostración y explicación, al alumno se le pide que llene una encuesta en donde plasme su gusto, si es capaz de explicarlo, explicación del experimento y sugerencias.

Fabricación del “Cañón de Humo”

El “Cañón de Humo”, una caja de forma de prisma rectangular de dimensiones considerables (fácil de aplastar), se sella con cinta adhesiva para evitar la pérdida de aire, después se hace un agujero, de aproximadamente 15 cm de radio en una de sus caras, después de construido el hueco, se llena de humo biodegradable compuesto de glicerina y alcohol (uno a dos partes por unidad), se introduce el humo por el hueco, finalmente se somete a pulsos mecánicos discretos es decir, se golpea con las manos de manera firme, para generar el vórtice toroidal.

Elementos de la encuesta

- **Primer pregunta:** ¿te gusto el experimento?

Tipo de respuesta: Si-No.

- **Segunda pregunta:** ¿Podrías describir con tus palabras el experimento?

Tipo de respuesta: Si-No.

- **Tercer elemento, la petición:** Explícalo con tus palabras.

Análisis de la respuesta: *no consistente, medianamente consistente y consistente.*

Categorización de respuestas:

No consistente: no hace referencia al experimento ni al proceso del fenómeno o lo hace erróneamente.

Medianamente consistente: hace referencia al experimento o al fenómeno observado; no usa frases o palabras concretas para describirlo; tales como:

- Vórtice.
- Sale un aro.
- Sale la forma del hoyo.
- Se golpea la caja.
- Salen donas.
- Sale aire a presión.

Los criterios de clasificación son:

- Describe el experimento.
 - Habla solamente del armado del arreglo experimental.
- Describe el fenómeno.
 - Habla solamente del fenómeno físico.
- Describe ambos procesos.
 - Describe los pasos del experimento y parte del fenómeno.

Consistente: usa frases concretas y congruentes que describen el experimento o el fenómeno que observaron; tales como:

- Descripción congruente del experimento.
 - Frases que describan el proceso detallado de la forma de hacer el experimento.
- Descripción congruente del proceso del fenómeno.
 - Frases detalladas que describen al proceso físico observado.
- Describe ambos procesos
 - Describe los pasos del experimento y parte del fenómeno de forma coherente.
- **Cuarta elemento, segunda petición:** Sugerencias para mejorar el experimento.

Tipo de respuesta: Libre expresión.

Captura de datos de las encuestas

Datos de la primera pregunta: ¿Te gusto el experimento?

Tabla I. ¿Te gusto el experimento? población total.

¿Te gusto el experimento?	
Si	No
194	1
Total 195	

Datos de la segunda respuesta: ¿Podrías explicarlo brevemente?

Tabla II. ¿Podrías explicarlo brevemente? población total.

¿Podrías explicarlo brevemente?	
Si	No
132	63
Total 195	

Datos de la primera petición: “Explícalo con tus palabras”.

Tabla III. “Explícalo con tus palabras” población total.

“Explícalo con tus palabras”	
Si contesto	No contesto
143	52
Total 195	

Relaciones:

Tabla IV. Resultados de las preguntas uno y dos de la población total en tabla de contingencia.

	¿Te gusto el experimento?	
¿Podrías describir el experimento brevemente?	Si	No
Si	131	1
No	63	0
Subtotal	194	1
Total	195	

Tabla V. Resultados de la primera petición “Explícalo brevemente” clasificados en la población total.

Clases		Medianamente consistente	Consistente
	Describe el experimento	10	3
	Describe el fenómeno	33	21
	Describe ambos	52	7
	Subtotal	95	31
	Total	126	

Tabla VI. Individuos que no contestaron en la primera petición “Explícalo brevemente” en la población total.

No consistente
69

Datos de la segunda petición ¿Que sugieres para mejorar el experimento?

Tabla VII. ¿Qué sugieres para mejorar el experimento? población total.

Tipo de sugerencia	Unidades
Nada	82
Más formas (boca y vórtice)	43
Más humo	27
Más grande (caja y vórtice)	14
Más explicación	4
Mas huecos (en la caja)	3
Más fuerte	3
Más tiempo	3
Que lanzara dulces	1
Que salgan palomas	1
Que se hiciera con globos	1
Donas solidas	1
Que salga en forma de arcoíris	1
Que salgan girasoles	1
Caja nueva	1
Caja hueca	1
Increíble	1
Muy bien todo	1
Muy interesante	1
Poner una bola de cartón en medio	1
Que se haga con cualquier objeto	1
Ponerle pelotas (en la caja)	1
Mejor lugar	1
Sentir el humo	1
Total	195

Tablas de la población de cuarto grado

Datos de la primera pregunta: ¿Te gusto el experimento?

Tabla VIII. ¿Te gusto el experimento? población de cuarto grado.

¿Te gusto el experimento?	
Si	No
66	1
Total 67	

Datos de la segunda respuesta: ¿Podrías explicarlo brevemente?

Tabla IX. ¿Podrías explicarlo brevemente? población de cuarto grado.

¿Podrías explicarlo brevemente?	
Si	No
43	24
Total 67	

Datos de la primera petición “Explicalo con tus palabras”.

Tabla X. “Explicalo con tus palabras” población de cuarto grado.

“Explicalo con tus palabras”	
Si contesto	No contesto
48	19
Total 67	

Relaciones:

Tabla XI. Resultados de las preguntas uno y dos en la población de cuarto grado en tabla de contingencia.

	¿Te gusto el experimento?	
¿Podrías describir el experimento brevemente?	Si	No
Si	42	1
No	24	0
Subtotal	66	1
Total	67	

División de respuestas:

Tabla XII. Resultados de la primera petición “Explícalo brevemente” clasificados en la población de cuarto grado.

Clases		Medianamente consistente	Consistente
	Describe el experimento	3	1
	Describe el fenómeno	9	1
	Describe ambos	21	0
	Subtotal	33	2
	Total	35	

Tabla XIII. Individuos que no contestaron la primera petición “Explícalo brevemente” en la población de cuarto grado.

No consistente
32

Datos de la segunda petición ¿Que sugieres para mejorar el experimento?

Tabla XIV. ¿Qué sugieres para mejorar el experimento? población de cuarto grado.

Tipo de sugerencia	Unidades
Nada	21
Más formas (boca y vórtice)	21
Más grande (caja y vórtice)	11
Más humo	7
Más huecos (dos círculos)	2
Que lanzara dulces	1
Que salgan palomas	1
Mas fuerte	1
Que se hiciera con globos	1
Donas solidas	1
Total	67

Tablas de la población de quinto grado

Datos de la primera pregunta: ¿Te gusto el experimento?

Tabla XV. ¿Te gusto el experimento? población de quinto grado.

¿Te gusto el experimento?	
Si	No
52	0
Total 52	

Datos de la segunda respuesta: ¿Podrías explicarlo brevemente?

Tabla XVI. ¿Podrías explicarlo brevemente? población de quinto grado.

¿Podrías explicarlo brevemente?	
Si	No
42	10
Total 52	

Datos de la petición primera “Explícalo con tus palabras”.

Tabla XVII. “Explícalo con tus palabras” población de quinto grado.

“Explícalo con tus palabras”	
Si contesto	No contesto
44	8
Total 52	

Tabla XVIII. Resultados de las preguntas uno y dos en la población de quinto año en tabla de contingencia.

	¿Te gusto el experimento?	
¿Podrías describir el experimento brevemente?	Si	No
Si	42	0
No	10	0
Subtotal	52	0
Total	52	

Tabla XIX. Resultados de la primera petición “Explicalo brevemente” clasificados en la población de quinto grado.

Clases		Medianamente consistente	Consistente
	Describe el experimento	5	2
	Describe el fenómeno	8	10
	Describe ambos	15	2
	Subtotal	28	14
	Total	42	

Tabla XX. Individuos que no contestaron la primera petición “Explicalo brevemente” en la población de quinto grado.

No consistente
10

Datos de la segunda petición ¿Que sugieres para mejorar el experimento?

Tabla XXI. ¿Qué sugieres para mejorar el experimento? Población de quinto grado.

Tipo de sugerencia	Unidades
Nada	21
Más formas (boca y vórtice)	15
Mas humo	3
Que salga en forma de arcoíris	1
Que salgan girasoles	1
Caja nueva	1
Caja hueca	1
Increíble	1
Muy bien todo	1
Muy interesante	1
Poner una bola de cartón en medio	1
Más tiempo	1
Más grande (caja y vórtice)	1
Más fuerte	2
Mas explicación	1
Total	52

Tablas de la población de sexto grado

Datos de la primera pregunta: ¿Te gusto el experimento?

Tabla XXII. ¿Te gusto el experimento? población de sexto grado.

¿Te gusto el experimento?	
Si	No
76	0
Total 76	

Datos de la segunda respuesta: ¿Podrías explicarlo brevemente?

Tabla XXIII. ¿Podrías explicarlo brevemente? población de sexto grado.

¿Podrías explicarlo brevemente?	
Si	No
47	29
Total 76	

Datos de la primera petición “Explícalo con tus palabras”.

Tabla XXIV. “Explícalo con tus palabras” población de sexto grado.

“Explícalo con tus palabras”	
Si contesto	No contesto
51	25
Total 76	

Tabla XXV. Resultados de las preguntas uno y dos de la población de sexto año en tabla de contingencia.

	¿Te gusto el experimento?	
¿Podrías describir el experimento brevemente?	Si	No
Si	47	0
No	29	0
Subtotal	76	0
Total	76	

Tabla XXVI. Resultados de la primera petición “Explícalo brevemente” clasificados en la población de sexto grado.

Clases		Medianamente consistente	Consistente
	Describe el experimento	2	0
	Describe el fenómeno	16	10
	Describe ambos	16	5
	Subtotal	34	15
	Total	49	

Tabla XXVII. Individuos que no contestaron la primera petición “Explícalo brevemente” en la población de sexto grado.

No consistente
27

Datos de la segunda petición ¿Que sugieres para mejorar el experimento?

Tabla XXVIII. ¿Qué sugieres para mejorar el experimento? Población de sexto grado.

Tipo de sugerencia	Unidades
Nada	40
Más humo	17
Más formas (boca y vórtice)	7
Más explicación	3
Más grande (caja y vórtice)	2
Más tiempo	2
Que se haga con cualquier objeto	1
Ponerle pelotas (en la caja)	1
Mejor lugar	1
Sentir el humo	1
Mas huecos (en la caja)	1
Total	76

DISCUSIÓN

Al observar la **Tabla I**, es posible notar el gusto que los niños tienen por el experimento “Cañón de Humo”. El experimento tiene una aceptación del 99.48% esto se traduce en 194 individuos y a sólo uno de la población total no le gusto, que representa el 0.51%.

Tales resultados se muestran en las **Tablas VIII, XV y XXII**, que representan la pregunta número uno de la encuesta de cuarto, quinto y sexto año respectivamente.

La importancia de saber que tan agradable es el experimento, radica en la popularidad que puede llegar a tener entre los alumnos, dados los temas de investigación extra clase, para comprender de la mejor manera el experimento observado. Por lo tanto hacer una aportación al enfoque de la ciencia en los niños.

A la observación del fenómeno y al hacer las preguntas del proceso que ocurre al hacer el experimento, se promueve la reflexión sobre el proceso físico, esperando que el individuo sea capaz de deducir el fenómeno y, que de acuerdo a su experiencia, pueda intuir lo que sucede.

De esta forma al aplicar la pregunta número dos de la encuesta es posible observar si en alguna medida pueden explicarlo (antes de aplicar la encuesta se hace el experimento y un sesión de preguntas).

De la **Tabla II** podemos saber cuántos de la población total, se sienten capaces de explicar el experimento independientemente de la calidad de la respuesta.

Se observa que un 68% de la población, más de la mitad de la población de los grados en que se realizó, se siente capaz de dar una respuesta al fenómeno visto. En contra parte el 32% restante, no tuvo la suficiente confianza o madurez para generar una respuesta propia del experimento. Recordemos que antes de la encuesta se hace el experimento, se da su explicación y se responde a preguntas y dudas.

En las **Tabla IX, XVII y XXIII**, se encuentra el número de individuos de cuarto, quinto y sexto grado respectivamente, correspondiente a la pregunta número dos de la encuesta. Se puede percatar que en los tres grados hay más del 50% de la población que tuvo alguna idea de cómo poder explicar el experimento y plasmarlo en la encuesta. Es notoria la dificultad del individuo en poder crear una idea clara del suceso observado.

Parte fundamental del trabajo es como clasificar las respuestas esa sección se discutirá más adelante en esta parte se hará el desglose de las tablas principales dando su interpretación.

De la **Tabla III** que contiene las respuestas de los individuos a la primera petición, es posible apreciar un incremento de once individuos que pudieron plasmar su idea de lo que ocurría. De forma similar las **Tabla X, XVII y XXIV**, muestran la relación de la primera petición de la encuesta aplicada a los grados cuarto, quinto y sexto respectivamente.

El cuarto elemento de la encuesta y segunda petición, tiene como objetivo obtener sugerencias para mejorar el experimento y su presentación. El resultado se muestra en la **Tabla VII**, para los tres grados en los que se presentó. Similarmente las **Tabla XIV**,

XXI y **XXVIII**, tienen la información desglosada de los grados visitados. Es notoria la recurrencia de algunas sugerencias dada la espectacularidad del experimento.

Análisis

La relación que se hace de la pregunta uno con la pregunta dos de la encuesta está en **Tabla IV**, arrojando una tabla de contingencia, donde la relación de los reactivos tiene una tendencia favorable. Se hace énfasis que la población total es 195 individuos, en donde 131 les gusto y pueden describir el experimento con distintitos niveles de acierto.

En contra parte, 63 individuos contestaron que si les gusto pero, no podían explicarlo con sus palabras. Esto posiblemente debido al temor a equivocarse en la respuesta, o a que la madurez que tienen en ese grado, no es suficiente para comprender lo que estaba pasando, pero, pudieron observar propiamente el fenómeno mostrando interés en él.

Cabe señalar que no todas las respuestas fueron acertadas dado que cada individuo mostró interés particular en ciertos momentos del experimento. Por lo cual se propone la categorización de las respuestas de tal forma que se pueda verificar la comprensión que tuvieron del experimento.

Las categorías que se proponen son tres, que engloban las distintas percepciones del experimento, la descripción del fenómeno o del proceso para ejecutarlo; de forma similar las tres clases que se manejan son: no consistentes, medianamente consistentes y consistentes.

El individuo, acorde a su capacidad, puede hacer la descripción del experimento de manera que haga énfasis en describir el experimento, fenómeno o ambos, dando pie a estas tres clases. De esta manera es posible observar, cuántos individuos pueden describirlo. La información recabada de las encuestas puede clasificarse entonces de manera congruente dentro de estas tres clases.

En la **Tabla V** se muestra la clasificación de las clases en la población total, con excepción de los que no contestaron, que se describe en la **Tabla VI**.

En esta **Tabla V** se puede observar que la población de interés decae a ciento veintiséis individuos. De los cuales, en la clasificación de “medianamente consistente” describen el experimento con éxito diez individuos; el fenómeno, treinta y tres; describen ambos procesos, cincuenta y dos individuos. Dando un total de “medianamente consistentes” una población de noventa y cinco, utilizando los criterios ya propuestos.

En la clasificación de consistentes, se observa que en la clase que describe el experimento, son tres los individuos que lo describen correctamente. En la descripción del fenómeno son veintiuno. Los individuos que describen ambos, son siete. Dando un total de ciento veintiséis de la población total. Más sesenta y nueve de no consistencia que se presentan en la **Tabla VI**.

El énfasis notorio en la clasificación de la descripción de ambos procesos, se puede deber a que plantea una serie de pasos similares a los usados en el método científico. Los niños manifestaron en su gran mayoría, poder reproducir el experimento. Otro número significativo de niños se concentraron en el resultado del experimento, que es el fenómeno en donde se aprecia una mayor incidencia en contra de la descripción del

proceso, mediante el cual se lleva a cabo el experimento. Una cantidad menor de niños fueron capaces de describir el experimento, significando esto que la gran mayoría no pudieron percatarse de todos los pasos que se realizan en el experimento.

En la población total es notorio observar que cada grado tiene tendencias diferentes ante estas clases, como se observa en las **Tabla XII, XIX y XXVI**.

CONCLUSIONES

Con base en los resultados obtenidos de las encuestas, es relativamente fácil percatarse del agrado del experimento “Cañón de Humo” en los grupos que se aplicó. Se tiene también que, los individuos que se les presento el experimento tienen cierto problema en organizar la fenomenología del experimento, dando pie a las categorías ya antes mencionadas. Con respecto a los niveles de éxito de los encuestados, se observa que pueden tener aciertos en la forma de describir el fenómeno, el experimento o ambas cosas a la vez.

La impresión que le causa el experimento al individuo se puede notar a simple vista, cuando se genera el vórtice toroidal, es extremadamente notoria la emoción del sujeto. Causándole gran interés, que manifiesta con sus preguntas y dudas sobre lo que observó. Es el momento de aprovechar dicho interés para fomentarle el pensamiento científico y crítico, mismo que le ayudará a plasmar sus ideas en la encuesta.

Es notoria la dificultad de una explicación analítica del fenómeno físico que se presenta, dado el tipo de ecuaciones que se utilizan para modelarlo, mismas que se tienen que resolver para dar una interpretación de lo que sucede aun en condiciones ideales. Encontrada la solución tenemos una aproximación bastante buena del fenómeno. La interpretación de dicha solución, es la justificación de que tenemos una descripción teórica del fenómeno físico real observado como vórtices toroidales.

La dificultad que se presenta para enseñar y justificar el experimento a niños de nivel primaria es bastante notoria, dado que las palabras técnicas del experimento son

algo rebuscadas para el lenguaje que se manejan a ese nivel. Por lo que se hace uso de palabras cotidianas con las que los niños estén familiarizados, para poder lograr un conocimiento significativo de lo que ocurre en el experimento. También se hace el uso de palabras que los mismos niños sugieren, como resultado de sus vivencias.

Es notorio también que el proceso de maduración de los individuos no es el mismo, dado que en los tres grados expuestos, se encuentran respuestas diferentes. Esto nos permite afirmar que los individuos no tienen la misma maduración y la misma condición en hacer uso del lenguaje para expresar sus ideas básicas sobre el experimento. Por otra parte, hay niños que lo pudieron hacer hasta cierto grado “bien”, expresando ideas sobre el fenómeno que observaron.

Se sugiere que es muy recomendable hacer este tipo de demostraciones a este sector de la población. Dado el interés que muestran y a la curiosidad que se genera, puede lograr en los individuos, el gusto por el conocimiento científico ya sea experimental o teórico y así, de esa forma hacer un cambio desde la formación básica, para obtener un cambio notorio en la sociedad inculcando el interés por las ciencias, la tecnología y sus métodos.

LITERATURA CITADA

- [1] Alexey V. Borisov Alexander A. Kilin and Ivan S. Mamaev, 2013, The Dynamics of Vortex Rings: Leapfrogging, Choreographies and the Stability Problem, Vol. 18, pp. 34-39.
- [2] Herman Von Helmholtz, 1885, On Integrals of the Hydrodynamic Equations That Correspond to Vortex Motions, fur die reine and angewandte Mathematik*.
- [3] Moritz Epple, 1998, Topology, Matter, and Space, I: Topological Notions in 19th-Century Natural Philosophy, Communicated by J. Lutzen. Springer-Verlag, pp. 297-392.
- [4] S. A. Chaplygin, 2007, One Case of Vortex Motion in Fluid, Moscow Imperial Technical School, Russia, Dynamics Interpretari, Vol. 12 No. 2, pp. 219-213.
- [5] MECÁNICA DE FLUIDOS, Diego Alfonso Sámano Tirado Ecología y Energía, Cuernavaca, México, Mihir Sen Universidad de Notre Dame, Indiana, EE.UU. pp. 43-44.
- [6] Alonso Sepúlveda S. 2013, Hidrodinámica -Instituto de Física Universidad de Antioquia Medellín, pp. 83.

Referencia de los Anexos

[7] **Anexo I:** Cálculo Vectorial, Jerrold E. Marden-Anthony J. Tromba; 5ª Edición. Pearson Educación S.A., Madrid 2004, pp. 62-63.

[8] **Anexo II:** “Ampliación de Fenómenos de Transporte, Área de Mecánica de Fluidos; PIV - 4”

[9] **Anexo III:** Aplicaciones de las Funciones de Green en Problemas de la Física-Matemática. Julca Quispe, Abel Rolando.

De http://sisbib.unmsm.edu.pe/bibvirtual/monografias/Basic/julca_qa/contenido.htm citada el 10 de febrero del 2015.

[10] **Anexo IV:** <http://matematica.laguia2000.com/general/integrales-elipticas> citada el 9 de febrero del 2015.

Anexo I: Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto (x, y, z) están definidas por:

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad (1)$$

Para expresar (r, θ, z) en funciones de (x, y, z) y para asegurar que θ esta entre 0 y 2π , podemos escribir

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)},$$
$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right); \text{ si } x > 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right); \text{ si } x < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right); \text{ si } x > 0 \text{ e } y < 0 \end{cases} \quad z = z$$

Donde $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ se toma entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. La condición $0 \leq \theta \leq 2\pi$ determina de manera única θ y $r \geq 0$ para cualquier x e y . Si $x = 0$, entonces $\theta = \frac{\pi}{2}$ para $y > 0$ y $\frac{3\pi}{2}$ para $y < 0$; si $x = y = 0$, θ no está definido.

En otras palabras, dado cualquier punto (x, y, z) , representamos su primera y segunda coordenada en función de las coordenadas polares y no cambiamos su tercera coordenada. La fórmula (1) demuestra que dado (r, θ, z) , la terna (x, y, z) esta

completamente determinada y viceversa, si restringimos θ al intervalo $[0, 2\pi)$ (a veces, conviene utilizar el intervalo $(-\pi, \pi]$) y además $r > 0$.

Para ver por qué usamos el termino coordenadas cilíndricas, nótese que si $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ y $r = a$ es una constante positiva, entonces el lugar geométrico de estos puntos es un cilindro de radio a (como muestra la figura 1).

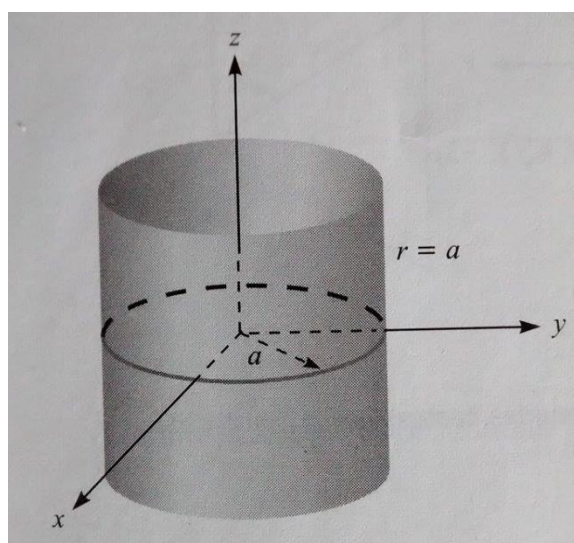


Figura 1: La grafica de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas satisfacen $r = a$ es un cilindro.

Anexo II: Función de Corriente

Dado que se deben cumplir las condiciones de irrotacional e incompresible, entonces se puede definir una función “ ψ ” tal que satisfaga la ecuación de continuidad

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

A cualquier función “ ψ ” que satisfaga estos requisitos se le llamada “función de corriente”, y dada su definición, esta función es válida para todos los flujos bidimensionales, sean irrotacionales o rotacionales. Para cumplir con la condición de irrotacional, un flujo bidimensional se puede modelar como

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

que es una condición necesaria y suficiente.

A la línea $\psi(x, y) = cte.$ se le conoce como línea de corriente y es, en todos sus puntos, tangente al vector velocidad. Las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son ortogonales, es decir, se cortan entre sí en ángulos rectos, excepto en los puntos singulares.

Anexo III: Funciones de Green

2.3 Ecuaciones mediante operadores.

Considérese una ecuación diferencial lineal expresada en la forma general

$$L(x)u(x) = f(x) \quad (1)$$

donde $L(x)$ es un operador de auto-adjunto, $u(x)$ es una función desconocida, $f(x)$ es una función conocida llamado también el termino no-homogéneo.

Operacionalmente, la solución a la ecuación (1) es:

$$u(x) = L(x)^{-1}f(x) \quad (2)$$

Donde L^{-1} representa el inverso del operador lineal L . Puesto que L es un operador diferencial, es razonable esperar que su inversa tenga la forma de un operador integral así como las propiedades usales,

$$LL^{-1} = L^{-1}L = I \quad (3)$$

donde I es el operador *identidad*. Más específicamente, definiremos el operador inverso como:

$$L^{-1}f = \int G(x; x')f(x')dx' \quad (4)$$

donde el kernel $G(x; x')$ es la función Green asociada al operador diferencial L [3]. Notese que $G(x; x')$ es una función bidimensional que depende tanto de x como x' . Para completar la idea del operador inverso L^{-1} , se introduce la función delta de Dirac como

un operador identidad I . Recordar las propiedades de la función impulso unitario o delta de Dirac $\delta(x)$ a continuación:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$



Figura 2. Función impulso unitario o “función delta”

La función de Green $G(x; x')$ luego entonces satisface

$$L(x)G(x; x') = \delta(x - x') \quad (6)$$

La solución a la ecuación (1) puede después expresarse en términos de la funciones de Green como a continuación

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x; x') f(x') dx' \quad (7)$$

2.4 Definición

Una función de Green viene a ser el kernel de integración asociado al operador de la diferencial L en ecuaciones no homogéneas con determinadas condiciones de contorno.

Dado $L(x)u(x) = f(x)$, L : operador diferencial auto-adjunto y lineal, entonces

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x; x') f(x') dx'$$

en donde G satisface:

$$L(x)G(x; x') = \delta(x - x')$$

La ventaja de esta formulación del problema, radica en la que la función Green es independiente de $f(x)$, esto es, solo depende de la forma de la ecuación diferencial y de sus condiciones iniciales o de frontera [4].

Fácilmente se prueba que la ecuación (7) representa la solución a la ecuación (1), realizando la siguiente sustitución como sigue:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= L \int_{-\infty}^{\infty} G(x; x') f(x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} LG(x; x') f(x') dx' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx' \\ &= f(x) \end{aligned} \tag{8}$$

Nótese que se han empleado las propiedades de linealidad en operadores diferenciales y sus inversos correspondientes en adición a las ecuaciones (4), (5), y (6) para obtener esta simple demostración.

2.5 Propiedades

1. Las funciones de Green satisfacen la ecuación diferencial homogénea -asociada al problema inicial –en todo el dominio excepto $x = x'$, $L(x)G(x; x') = 0$
2. La función de Green es continua en $x = x'$,

$$\lim_{x' \rightarrow x^-} G(x; x') = \lim_{x' \rightarrow x^+} G(x; x')$$
3. La derivada de la función de Green es discontinua en $x = x'$, $G'(x; x^+) - G'(x; x^-) = -1$
4. La función de Green satisface las condiciones de contorno del problema.
5. La función de Green es simétrica en los dos argumentos $G(x; x') = G(x'; x)$.

Anexo IV: Integrales Elípticas

La integración es un concepto elemental en ciencias matemáticas, principalmente en la rama del cálculo y del análisis. De forma simple podemos decir que una integral es la suma de infinitos sumandos, que son a la vez infinitamente pequeños. Entonces una integral elíptica corresponde a una integral de la forma siguiente:

$$\int \frac{A(x) + B(x)\sqrt{S(x)}}{C(x) + D(x)\sqrt{S(x)}} dx$$

o de otra forma:

$$\int \frac{A(x)}{B(x)\sqrt{S(x)}} dx$$

Aquí, A, B, C y D representan polinomios en x y S representa un polinomio de grado 3 ó 4.

La evaluación de integral elíptica tiene inicio en problemas que se relacionan con el cálculo de la longitud de segmentos elípticos. Podemos referirnos a una integral elíptica como la generalización de una función trigonométrica inversa, también pueden llegar a proporcionar la solución para problemas de cálculo como por ejemplo la medida del arco de una circunferencia.

Podemos reescribir las integrales elípticas en forma de adición de funciones elementales. Podemos nombrar tres clases “básicas” de estas integrales. La primera clase a la cual haremos referencia son las integrales elípticas de primera especie, se pueden subdividir en completas e incompletas. Las primeras completas son dependientes de una única variable y las incompletas dependen de dos variables.

• Integrales elípticas de primera especie

Se pueden definir como:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2 v^2)}}$$

Se calcula mediante la media aritmética geométrica, o también por medio de la serie de Taylor:

$$K(x) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1*3}{2*4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1*3*5}{2*4*6}\right)^2 x^6 + \dots \right]$$

La anterior serie es convergente para,

$$|x| < 1$$

Este método posee una interesante peculiaridad, ya que genera una serie que converge de manera vertiginosa. Si se quiere proceder a la aplicación de esto, basta con inicializar el algoritmo de la media aritmética geométrica con los valores que vemos a continuación:

$$a_0 = 1 \text{ y } g_0 = \sqrt{1-x^2}$$

$K(x)$ es obtenido a partir del infinito valor n , entonces:

$$K(x) \approx \frac{\pi}{2} * \frac{1}{a_n}$$

Habitualmente es suficiente si se computan los 5 ó 6 términos iniciales que corresponden a la serie para luego llegar a una gran precisión en el resultante. Lograr lo dicho anteriormente con la serie de Taylor, requiere del cálculo de un número superior, según $|x|$ se aproxima a 1.

La integral elíptica incompleta de primera especie F se define de la siguiente forma:

$$u = F(x, \varphi) = \int_0^{\sin \varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\sin \theta} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-x^2 v^2)}} = F_x(\varphi)$$

En este caso, el siguiente parámetro,

$$\varphi = am(u)$$

es denominado “amplitud” y si tomamos x como parámetro, la “amplitud” será el resultado de la inversa de la función anterior F . Las funciones elípticas de Jacobi pueden ser definidas partiendo de la amplitud.

• Integrales elípticas de segunda especie

Podemos definir a la integral elíptica completa de segunda especie E como:

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Decimos que es la función de una variable que puede llegar a expresarse en serie de Taylor:

$$E(x) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 - \left(\frac{1*3}{2*4}\right)^2 \frac{x^4}{3} - \left(\frac{1*3*5}{2*4*6}\right)^2 \frac{x^6}{5} - \dots \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{x^{2n}}{2n-1} - \dots \right]$$

La integral elíptica incompleta de segunda especie corresponde a una función de dos variables la cual puede generalizar a la integral completa:

$$E(x, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\sin \varphi} \frac{\sqrt{1 - x^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

• **Integral elíptica de tercera especie**

Sea $0 < k^2 < 1$, la **integral elíptica completa de tercera especie** se define como:

$$\Pi(n; \phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{(1 - nt^2) \sqrt{(1 - nt^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

donde n corresponde a una constante.

Estas integrales aparecen de manera natural cuando se integran las ecuaciones de movimientos de péndulos esféricos.

Anexo V: Galería Fotográfica



Fotografía 1. Alumna de la Escuela Primaria “J. M. Cuillingford López” realizando la encuesta.



Fotografía 3. Alumnos de la Escuela Primaria “J. M. Cuillingford López” observando el experimento “Cañón de Humo”.



Fotografía 2. Alumnas de la Escuela Primaria “J. M. Cuillingford López” con el arreglo experimental del “Cañón de Humo”.



Fotografía 4. Alumnos de quinto grado realizando la encuesta del “Cañón de Humo”.



Fotografía 5. Niños de Guardería en “XXIX Semana de Ciencias” con el experimento “Cañón de Humo”.



Fotografía 6. Niña de Primaria en “XXIX Semana de Ciencias” con el experimento “Cañón de Humo”.



Fotografía 7. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo t .



Fotografía 8. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+1$.



Fotografía 9. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+2$.



Fotografía 10. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+3$.



Fotografía 11. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+4$.



Fotografía 14. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+7$.



Fotografía 12. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+5$.



Fotografía 15. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+8$.



Fotografía 13. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+6$.



Fotografía 16. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+9$.



Fotografía 17. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+10$.



Fotografía 20. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+13$.



Fotografía 18. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+11$.



Fotografía 21. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+14$.



Fotografía 19. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+12$.



Fotografía 22. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+15$.



Fotografía 23. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+16$.



Fotografía 24. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+17$.



Fotografía 25. Vórtice Toroidal en formación en un tiempo $t+18$.