



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS COMPARATIVO
NUMÉRICO Y ANALÍTICO DE LAS
PROPIEDADES TERMODINÁMICAS
DE TOBERAS PARA USO EN UN
MOTOR A REACCIÓN**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
INGENIERÍA.

PRESENTA:

JOSÉ LUIS CARRASCO ALVARADO

Director de Tesis: Dr. Alejandro Sebastián Ortiz Pérez

Co-Director de Tesis: Dr. Ildebrando Pérez Reyes

Octubre de 2024.

Mexicali, Baja California, México.

Agradecimientos

A mis padres, hermanos, abuela y novia, por ser el principal motor en mi búsqueda de superación constante.

A la señora Olivia Retamoza y familia, que siempre me apoyaron en los momentos más difíciles y estuvieron siempre motivándome a seguir adelante.

A mis amigos y compañeros de posgrado que estuvieron siempre apoyándome y dieron ánimos para seguir adelante.

A los doctores Alejandro Ortiz, Ildebrando Pérez y Emmanuel Durazo por su paciencia, gran apoyo y guía cuando las cosas se pusieron difíciles.

A todas las personas que de alguna manera me ayudaron a llegar hasta donde estoy y me impulsaron a cumplir esta meta.

Resumen

Se realiza un análisis comparativo numérico-teórico de las propiedades termodinámicas (presión y temperatura), velocidad y número de Mach entre una tobera convergente y una tobera supersónica propuesta de Mach 1.8, desarrollada mediante una metodología completa para el diseño de toberas supersónicas de campana. En la sección divergente es utilizado el Método de las Características (MOC) para un flujo en dos dimensiones, irrotacional e isentrópico, mientras que para la sección convergente el Método de la Curva Paramétrica Bicúbica (MCPB) es empleado para un diseño óptimo de tobera; como resultado, un flujo uniforme sin separación y una expansión rápida de los gases es obtenido en la sección divergente, logrando obtener una tobera con el número de Mach de 1.8 deseado en la salida. Se hace uso tanto de la teoría de flujo compresible como de las simulaciones CFD para realizar las comparaciones teóricas y numéricas, respectivamente, de la presión, temperatura, velocidad y número de Mach de entrada y salida para ambas toberas. El análisis comparativo muestra un incremento en la salida en la velocidad de 185.05 %, así como un incremento en el número de Mach de hasta 251.59 %, de la tobera supersónica propuesta con respecto a la tobera convergente.

Abstract

A numerical-theoretical comparative analysis is conducted on the thermodynamic properties (pressure and temperature), velocity, and Mach number between a convergent nozzle and a proposed supersonic nozzle designed for Mach 1.8. This nozzle was developed using a comprehensive methodology for the design of supersonic bell nozzles. In the divergent section, the Method of Characteristics (MOC) is employed for two-dimensional, irrotational, and isentropic flow, while in the convergent section, the Bicubic Parametric Curve Method (BPCM) is utilized for optimal nozzle design. As a result, uniform flow without separation and rapid expansion of gases are achieved in the divergent section, thereby achieving the desired Mach number of 1.8 at the exit. Both compressible flow theory and CFD simulations are utilized to perform theoretical and numerical comparisons, respectively, of the pressure, temperature, velocity, and Mach number at the inlet and outlet for both nozzles. The comparative analysis shows an increase in exit velocity of 185.05 % and an increase in Mach number of up to 251.59 % for the proposed supersonic nozzle compared to the convergent nozzle.

Índice

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Introducción	1
1.1. Introducción	1
1.2. Definición del problema	3
1.3. Hipótesis	3
1.4. Justificación	4
1.5. Objetivos	5
1.5.1. Objetivo General	5
1.5.2. Objetivos Específicos	5
1.6. Metodología	6
2. Estado del Arte	8
3. Marco Teórico	12
3.1. Toberas	12
3.1.1. Flujo a través de toberas aceleradoras convergentes	12
3.1.2. Flujo a través de toberas aceleradoras convergentes divergentes	14
3.1.3. Variación de la velocidad de un fluido respecto al área de flujo	16
3.2. Termodinámica Elemental	18
3.3. Ecuaciones Gobernantes	25
3.3.1. Ecuación de Continuidad	27
3.3.2. Ecuación de Momentum	29
3.3.3. Ecuación de Energía	34
3.3.4. Flujo Isentrópico	36
3.3.5. Ecuación de Estado	40
3.4. Propiedades de Estancamiento	43
3.5. Ondas de Expansión de Prandtl-Meyer	46
3.6. Método de las Características	50
3.7. Método de la Curva Paramétrica Bicúbica	56
3.8. Dinámica de Fluidos Computacional	57
3.8.1. Historia	57
3.8.2. Etapas CFD	59
3.8.3. Flujos turbulentos: Enfoques de modelado	61
3.8.4. Modelos de dos ecuaciones	63
3.8.5. Modelo $k - \epsilon$	63
3.8.6. Modelo $k - \omega$	65
4. Método y estudio teórico	67
4.1. Formulación teórica	67
4.2. Tobera convergente	68

4.2.1. Modelado geométrico y simulación numérica	68
4.2.1.1. Condiciones de operación	69
4.2.1.2. Modelo de turbulencia seleccionado	70
4.2.1.3. Condiciones de frontera	70
4.2.1.4. Mallado	71
4.3. Tobera supersónica	72
4.3.1. Modelado geométrico y simulación numérica	75
4.3.1.1. Condiciones de operación	76
4.3.1.2. Condiciones de frontera	76
4.3.1.3. Mallado	78
4.4. Validación del modelo	78
5. Análisis de Resultados	82
5.1. Resultados validación del modelo	82
5.2. Resultados simulación CFD	85
5.2.0.1. Contorno de presión	86
5.2.0.2. Contorno de temperatura	87
5.2.0.3. Contorno de velocidad	89
5.2.0.4. Contorno de número de Mach	91
6. Conclusiones y Recomendaciones	94
6.1. Conclusiones generales	94
6.2. Recomendaciones para futuros trabajos	95
Referencias	97

Índice de cuadros

4.1. Parámetros utilizados para la formulación teórica.	68
4.2. Parámetros termodinámicos, velocidad y número de Mach obtenidos teóricamente en la sección de la tobera.	68
4.3. Parámetros de operación de la tobera.	69
4.4. Configuración Flow Simulation CFD.	71
4.5. Parámetros tobera supersónica de Mach 1.8	74
4.6. Parámetros de operación de la tobera supersónica.	76
4.7. Configuración Flow Simulation CFD.	77
4.8. Resultados de la comparación entre el modelo matemático desarrollado y los datos obtenidos mediante pruebas del túnel supersónico AF300 [30], en la sección divergente.	79
5.1. Comparación de los resultados analíticos y numéricos del modelo matemático con datos de Zhang et al. [38] (*). Algunos datos no fueron proporcionados por Zhang et. al. [38] pero fueron calculados en este trabajo.	83
5.2. Comparación de los resultados analíticos y numéricos del modelo matemático para el artículo de Patel et al. [25]. Estos datos fueron recalculados en este trabajo.	84
5.3. Comparación analítica entre los resultados reportados por Patel et al. [25] y los obtenidos mediante la metodología planteada en este trabajo.	84
5.4. Comparación numérica entre los resultados reportados por Patel et al. [25] y los obtenidos en el presente trabajo. El parámetro M fue estimado para el trabajo de Patel et al. [25] para cada sección de la tobera, utilizando las ecuaciones apropiadas del modelo matemático.	84
5.5. Comparación numérica entre los resultados analíticos y numéricos para la tobera convergente.	85
5.6. Comparación numérica entre los resultados analíticos y numéricos para la tobera supersónica.	85
5.7. Resultados numéricos del campo de presión para la tobera convergente y supersónica.	87
5.8. Resultados numéricos del campo de temperatura para la tobera convergente y supersónica.	89
5.9. Resultados numéricos del campo de velocidad para la tobera convergente y supersónica.	91
5.10. Resultados numéricos del campo de número de Mach para la tobera convergente y supersónica.	93

Índice de figuras

1.1.	Prototipo del motor a reacción turbojet.	3
1.2.	Metodología del proyecto.	7
3.1.	Efecto de la contrapresión en una tobera convergente.	12
3.2.	Efecto de la contrapresión en una tobera convergente-divergente. Donde P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 son diferentes valores de presión en la salida de la tobera y P_b es la contrapresión.	15
3.3.	Sistema de masa de un gas.	19
3.4.	Trabajo realizado sobre un diferencial de área del sistema por la presión.	20
3.5.	Ilustración de un proceso isocórico y un proceso isobárico.	22
3.6.	Volumen de control para un dispositivo con entrada y salida 1D.	27
3.7.	Diagrama de fuerza para la ecuación de momentum.	30
3.8.	Dos puntos en diferentes lugares alrededor de una línea de corriente.	33
3.9.	Comportamiento del flujo supersónico a lo largo de una esquina.	46
3.10.	Expansión de Prandtl-Meyer.	47
3.11.	Representación geométrica de los cambios infinitesimales a través de una onda de Mach.	48
3.12.	Esquema de las líneas características. Donde C_+ y C_- son determinadas por el ángulo $\theta \pm \mu$ respectivamente. Las líneas son tangentes con respecto a las ondas de Mach correspondientes.	53
3.13.	Intersección de las líneas características A y B. Donde el punto C recibirá las características de las líneas previas para estimar los puntos en los límites.	55
4.1.	Modelo 3D en SolidWorks de la tobera convergente.	69
4.2.	Condiciones de frontera tobera convergente.	71
4.3.	Malla cartesiana generada por Flow Simulations sobre la tobera convergente.	72
4.4.	Tobera creada mediante la teoría de flujo compresible, MOC y el MCPB. En la figura se observan los resultados teóricos para la tobera de Mach 1.8 en cada una de sus secciones: entrada, garganta y salida.	73
4.5.	Perfil de la sección convergente obtenida mediante el MCPB (puntos naranjas) y utilizando una función coseno, se obtuvieron los puntos verdes para su aproximación.	74
4.6.	Tobera supersónica de Mach 1.8 obtenida mediante el programa creado.	75
4.7.	Tobera supersónica de Mach 1.8 en 3D creada a través de SolidWorks.	75
4.8.	Condiciones de frontera tobera convergente. La zona gris de la sección superior e inferior representan un espesor de 0.01 m.	77
4.9.	Malla cartesiana generada por Flow Simulations sobre la tobera supersónica.	78
4.10.	Comparación entre diseños de tobera. En la subfigura (a) comparación del diseño para $M=1.4$ y (b) comparación del diseño para $M=1.8$. [30]. Las líneas discontinuas corresponden al túnel de viento supersónico AF300 y las continuas a las geometrías obtenidas con la metodología presentada en este trabajo.	80

4.11. Reproducción del diseño de tobera reportado por Patel et al. [25] para $M=1.66$ siguiendo el proceso utilizado en este trabajo, utilizando el MOC y el MCPB. Los puntos sobre las curvas indican las coordenadas que forman la geometría de la tobera.	81
4.12. Aproximación del diseño de Zhang et al. [38] para $M=0.01$ en la entrada, obtenido utilizando el MOC y MCPB.	81
4.13. Diseño reportado por Zhang et al. [38] para $M=0.01$ en la entrada. El gas se mueve de izquierda a derecha.	81
5.1. Resultados obtenidos con la presente metodología. En la subfigura (a) se muestra el contorno de velocidad, y en (b) el contorno de densidad. La velocidad alcanza un valor máximo de hasta 494.972 m/s , mientras que para la densidad en la entrada es de hasta 7.23 kg/m^3 (como se observa en las figuras).	82
5.2. Resultados obtenidos por Zhang et al. [38]. En la subfigura (a) se muestra el campo de velocidad, y en (b) el campo de densidad. La velocidad máxima alcanzada es de 500 m/s , mientras que la densidad en la entrada es de hasta 7 kg/m^3 (como se observa en las figuras).	83
5.3. Resultados de presión obtenidos mediante la simulación numérica. En la subfigura (a) se muestra para la tobera convergente, y en (b) para la tobera supersónica. La presión máxima alcanzada en la salida de la tobera es de 95567.11 Pa y de 20759.63 Pa , mientras que la presión en la entrada es de hasta 112103.89 Pa y 118448.10 Pa para la tobera convergente y supersónica, respectivamente (como se observa en las figuras).	86
5.4. Resultados de temperatura obtenidos mediante la simulación numérica. En la subfigura (a) se muestra para la tobera convergente, y en (b) para la tobera supersónica. La temperatura máxima alcanzada en la salida es de 809.82 K y 521.62 K para la tobera convergente y supersónica, respectivamente, mientras que la temperatura en la entrada es de hasta 828.90 K para ambas toberas (como se observa en las figuras).	88
5.5. Resultados de velocidad obtenidos mediante la simulación numérica. En la subfigura (a) se muestra para la tobera convergente, y en (b) para la tobera supersónica. La velocidad máxima alcanzada en la salida de la tobera es de 288.69 m/s y de 822.93 m/s , mientras que la velocidad en la entrada es de hasta 24.80 m/s y 24.90 m/s para la tobera convergente y supersónica, respectivamente (como se observa en las figuras).	90
5.6. Resultados del número de Mach obtenidos mediante la simulación numérica. En la subfigura (a) se muestra para la tobera convergente, y en (b) para la tobera supersónica.	92

Abreviaturas y símbolos

- A_{in} Área de entrada (m^2). 2
- A_{out} Área de salida (m^2). 2
- D_c Diámetro de la sección convergente (m). 73
- L_c Longitud de la sección convergente (m). 57
- P Presión estática (Pa). 22
- P^* Presión de garganta (Pa). 12
- P_c Contrapresión (Pa). 12
- P_e Presión de salida (Pa). 13
- P_o Presión de estancamiento (Pa). 13
- P_s Presión del fluido sobre la región de salida de la tobera (Pa). 12
- R Constante universal de los gases (J/kgK). 13
- T Temperatura estática (K). 22
- T_o Temperatura de estancamiento (K). 13
- V Velocidad del fluido (m/s). 16
- X Distancia del punto de unión (m). 57
- β Punto de unión. 74
- \dot{m} Flujo másico (m^3/s). 13
- μ Ángulo de Mach. 47
- ϕ Velocidad potencial total. 50
- ρ Densidad estática (kg/m^3). 16
- θ Desviación línea característica. 47
- char* Línea característica. 51
- e Energía interna (J). 18
- k Relación de calores específicos. 13
- q Calor del sistema (J). 19
- r_{conv} Radio de entrada de la sección convergente (m). 57
- r_{pu} Radio del punto de unión (m). 57
- r_{th} Radio de la sección de la garganta (m). 57
- v Función de Prandtl-Meyer. 50

w Trabajo del sistema (J). 19

x_m Longitud adimensional del punto de unión. 57

A Área específica (m^2). 16

CAD Diseño Asistido por Computadora. 5

CFD Dinámica de Fluidos Computacional. 5

DNS Simulación Numérica Directa. 62

EES Engineering Equation Solver. 67

LES Large Eddy Simulation. 62

M Número de Mach. 2

MCPB Método de la Curva Paramétrica Bicúbica. 2

MOC Método de las Características. 2

PCC Coeficiente de correlación de Pearson. 79

RANS Ecuación de Navier-Stokes de número de Reynolds Promedio. 62

RMSE Root Mean Square Error. 79

SFC Consumo Específico de Combustible. 2

1. Introducción

1.1. Introducción

En la actualidad, la industria aeroespacial ostenta una relevancia innegable. Los continuos avances en tecnología mantienen a las distintas empresas de este sector en una competencia directa, con el objetivo de mejorar el rendimiento y la eficiencia de sus productos aeronáuticos y espaciales mediante la optimización de componentes. Los sistemas de propulsión desempeñan un papel crucial, ya que lograr un mayor rendimiento y eficiencia implica incrementar la potencia de propulsión y reducir significativamente el consumo específico de combustible. Estos son los principales objetivos que persiguen las empresas del sector a diario.

Hoy en día, los motores de propulsión a reacción son ampliamente empleados en la industria aeroespacial con el propósito de generar el empuje necesario para impulsar cualquier tipo de aeronave. Estos motores suelen ser más livianos y compactos en comparación con las alternativas convencionales, y su funcionamiento se estudia dentro del marco del ciclo Brayton ideal. No obstante, el ciclo real de operación de estos motores, conocido formalmente como ciclo de propulsión por reacción, difiere del ciclo Brayton ideal en que los gases de la turbina no se expanden hasta alcanzar la presión ambiental, sino hasta una presión que asegure que la turbina genere suficiente potencia para accionar tanto el compresor principal como los equipos auxiliares necesarios [6].

Como se mencionó previamente, los motores a reacción están equipados con una tobera a través de la cual se dirigen los gases de escape de la turbina para generar el empuje necesario. En un turboreactor, la velocidad y la presión de estos gases de escape son los responsables de este impulso [28]. La tobera es un componente utilizado en diferentes industrias, incluyendo aeroespacial e investigación, se una en aplicaciones tanto subsónicas como supersónicas. Especialmente, los diseños de toberas supersónicas son de gran importancia para los sistemas de propulsión de aeronaves. Estas toberas juegan un papel crucial en la mecánica de fluidos, donde la

descarga de flujo compresible es esencial para determinar el rendimiento final del sistema de propulsión. Además, la eficiencia de los sistemas de propulsión depende en gran medida de la configuración de las toberas supersónicas de alta velocidad, con objetivos centrales como la reducción del consumo específico de combustible (SFC), el aumento de la eficiencia y la minimización de la longitud total de la tobera.

Las toberas utilizan la energía térmica del fluido para aumentar significativamente la velocidad de salida del flujo, reduciendo su presión hasta igualar la presión ambiental. En el caso de velocidades subsónicas, la presión disminuye en la sección convergente, mientras que para velocidades supersónicas, esta disminución ocurre en la sección divergente. Por lo tanto, el área de la sección transversal de una tobera se reduce en la dirección del flujo para velocidades subsónicas ($A_{in} > A_{out}$) y se amplía para velocidades supersónicas ($A_{in} < A_{out}$) [17]. La velocidad máxima alcanzable en la salida mediante una tobera convergente es la velocidad sónica, que se obtiene en la salida de la sección convergente. Cuando se añade una sección divergente a una tobera convergente, el flujo se acelera, resultando en un flujo supersónico y formando una tobera convergente-divergente. El flujo atraviesa la sección convergente, donde idealmente el número de Mach (M) aumenta hasta alcanzar la velocidad sónica en la garganta de la tobera, si ésta cuenta con un perfil altamente suavizado para lograr un flujo uniforme; después, el fluido continúa acelerándose a través de la sección divergente, donde la velocidad se vuelve supersónica en la salida [7].

El presente proyecto se centra en desarrollar una tobera supersónica para aumentar el número de Mach en un motor a reacción tipo turbojet, basado en un turbocargador y un diseño específico de cámara de combustión con sus conexiones para entrada de aire y salida de plasma generado por la combustión. Este incremento se logrará mediante la implementación de una tobera convergente-divergente de campana diseñada para alcanzar un número de Mach de 1.8 en la salida. El análisis considerará la ecuación de continuidad, la ecuación de energía y las relaciones de flujo isentrópico para establecer un modelo matemático con diversos parámetros de entrada. Para el diseño de las secciones convergente y divergente, se emplearán métodos como: el MCPB y MOC, respectivamente. Además, se llevará a cabo una comparación teórica y numérica de

las propiedades termodinámicas (presión y temperatura), velocidad y número de Mach entre la tobera actualmente utilizada y la tobera supersónica propuesta.

1.2. Definición del problema

Se cuenta con un motor a reacción que ha sido desarrollado utilizando como base un turbocompresor, junto con un diseño específico de cámara de combustión y una tobera convergente adaptada para generar el empuje requerido (Figura 1.1). Sin embargo, el principal desafío actual reside en alcanzar un número de Mach de salida adecuado con este motor para generar movimiento. Actualmente, para un flujo másico de aire de 0.675 kg/s, se tiene un número de Mach de salida analítico y numérico de 0.04332 y 0.04374, respectivamente, el cual es inferior al óptimo requerido.



Figura 1.1: Prototipo del motor a reacción turbojet.

1.3. Hipótesis

La investigación y el desarrollo de una tobera convergente-divergente de campana diseñada para alcanzar un número de Mach de 1.8, obtenida mediante el uso de una metodología desarrollada a partir de la predicción teórica de las ecuaciones que gobiernan el flujo compresible, e integrando el Método de las Características y el Método de la Curva Paramétrica Bicúbica, resultará en un incremento del número de Mach en la salida del motor a reacción.

1.4. Justificación

En las últimas décadas, ha habido un notable avance en el desarrollo tecnológico de dispositivos para flujo compresible. El descubrimiento y aplicación de diversos métodos matemáticos para el diseño de secciones convergentes y divergentes de toberas han facilitado la búsqueda de diseños óptimos que permiten una rápida expansión del flujo, reducción en la longitud total de la tobera y menor costo de fabricación. Además, se ha experimentado un incremento significativo en la capacidad computacional en los últimos años, lo cual ha impulsado la creación de programas y algoritmos dedicados a la optimización en este campo.

La mayoría de los estudios realizados sobre toberas convergentes-divergentes de campana se centran en la aplicación de métodos matemáticos exclusivos para lograr un diseño óptimo que reduzca las ondas de choque. No obstante, escasos de estos estudios han integrado un modelo matemático que incorpore de manera significativa los parámetros de entrada necesarios para el desarrollo de los diseños.

El presente estudio tiene como objetivo profundizar en la investigación de toberas supersónicas de campana, contribuyendo así al avance del conocimiento en el campo de dispositivos de flujo compresible. Este trabajo resultará crucial para aumentar el número de Mach de salida en un motor a reacción tipo turbojet, adaptado a partir de un turbocompresor. En consecuencia, la implementación de esta investigación será fundamental para optimizar el rendimiento de dicho prototipo y posicionarlo como una alternativa viable de sistema de propulsión para aeronaves.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo General

Maximizar el número de Mach de salida de un motor a reacción turbojet al implementar una tobera convergente divergente de campana de Mach 1.8 resultante de la predicción teórica y la implementación del Método de las Características y Curva Paramétrica Bicúbica, posteriormente diseñada a través de CAD y analizada mediante CFD. Así mismo, se realizará una comparación entre las propiedades termodinámicas, velocidad y número de Mach de la tobera supersónica propuesta y la actual. Esto para el desarrollo de un sistema de propulsión propio del programa de Aeroespacial de la Facultad de Ingeniería y con ello buscar la fabricación de una aeronave.

1.5.2. Objetivos Específicos

- Crear un modelo matemático que integre la ley de conservación de masa, ecuación de energía y las relaciones de flujo isentrópico.
- Obtener un diseño de tobera mediante el uso del Método de las Características y Curva Paramétrica Bicúbica para la creación de las secciones divergente y convergente respectivamente.
- Generar el diseño obtenido a través de CAD.
- Simular el diseño obtenido mediante la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD). Así mismo, para fines de comparación, simular la tobera convergente actual utilizada por el motor a reacción.
- Evaluar y comparar resultados.
- Divulgar resultados.

1.6. Metodología

1. Estado del Arte: Búsqueda e investigación de información y artículos referentes al tema en cuestión y alcance del proyecto.
2. Predicción teórica: Uso de la teoría de flujo compresible y los métodos de Líneas Características y Curva Paramétrica Bicúbica con el fin de desarrollar un modelo matemático que permita obtener el diseño de la tobera convergente divergente de Mach 1.8.
3. Modelado CAD: Modelado de la tobera de campana obtenida mediante la predicción teórica.
4. Simulación CFD: Simulación numérica para validar el número de Mach en la sección de entrada y salida, así como también la velocidad y propiedades termodinámicas del diseño supersónico obtenido previamente y de la tobera convergente utilizada en el motor.
5. Análisis y comparación: Evaluación de los resultados obtenidos mediante simulación CFD, seguida de una comparación de las propiedades termodinámicas, velocidad y número de Mach de ambas toberas en la sección de entrada y salida.
6. Conclusiones.

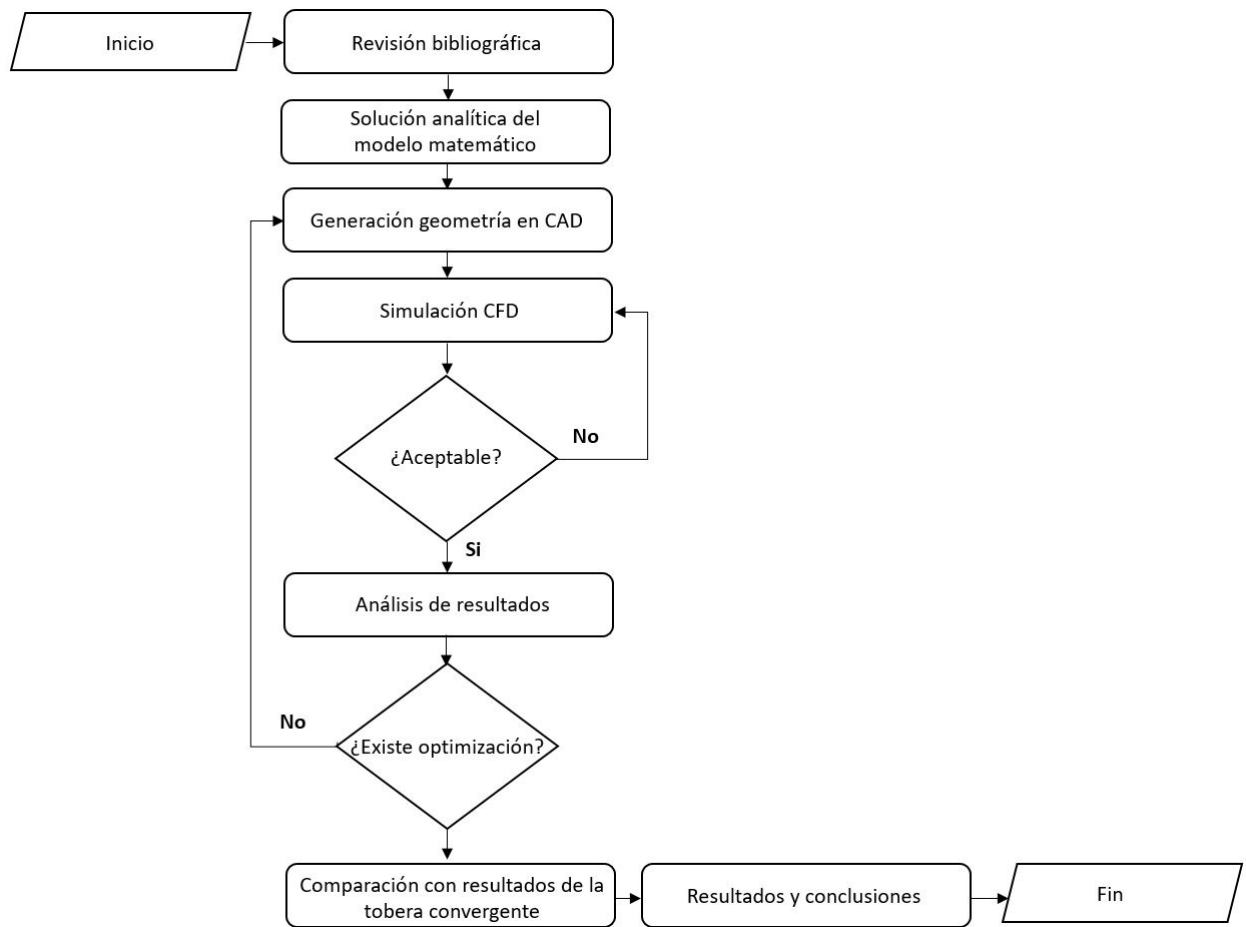


Figura 1.2: Metodología del proyecto.

2. Estado del Arte

Desde el inicio de la historia de la propulsión aeroespacial, las toberas cónicas proporcionaban el empuje necesario a las aeronaves existentes. Sin embargo, durante las últimas décadas, ha aumentado notablemente el interés en el uso del MOC y el BPCM para el diseño de toberas supersónicas de contornos en forma de campana tanto en el campo de la propulsión como en túneles de viento. Actualmente en la literatura se encuentra una gran cantidad de información referente a estos métodos, la cual se expondrá a continuación.

Entre varios de los trabajos que se encuentran disponibles, tenemos un estudio llevado a cabo por Asha S. [4] en el cual demostró que el enfoque más aceptable para diseñar la sección divergente de una tobera supersónica es el MOC, sin embargo, el autor establece que para obtener cálculos de mayor precisión, es recomendable llevar a cabo simulaciones numéricas con el objetivo de poder comparar tanto resultados analíticos como numéricos y poder concluir diferencias entre ambos. Estudios implementados por Zebbiche, T. et. al. [31] y posteriormente por Mon, K. et. al. [21] corroboran la exactitud del MOC para el diseño de toberas supersónicas, con resultados inferiores al 5 % para flujos supersónicos menores a 1,000 K para cualquier valor de Mach, o cuando el número de Mach es menor de 2 con valores de temperaturas de estancamiento aproximados a 3,000 K. Jose V. [14] desarrolló el diseño de una tobera supersónica de Mach 1.8 basado en la teoría del MOC en un régimen de dos dimensiones, así mismo creó un programa en MATLAB para poder obtener el diseño de tobera requerido de acuerdo a parámetros de entrada. Sus resultados fueron verificados a través de simulaciones numéricas utilizando ANSYS, obteniendo una variación del 5 % en el número de Mach con respecto al resultado analítico, confirmando nuevamente la fiabilidad y exactitud del MOC.

Por otra parte, Ozkan Y. [24] desarrolló un estudio 1-D para la obtención de un diseño de tobera supersónica bajo las consideraciones de flujo isentrópico, no viscoso y estable, utilizando el MOC con una cantidad de 50 líneas características. Con este número de líneas se obtuvo una gran precisión, resultando en errores para el número de

Mach, presión y temperatura estática de salida de 0.19, 1.49 y 0.29, respectivamente. Se concluye entonces, la importancia del número de líneas características utilizadas para la exactitud del MOC como un método de diseño de la sección divergente. Yoshio, D. [15] realizó una comparación en su trabajo de tesis, utilizando el MOC para crear una sección divergente y compararla con la tobera de Baloni (2017). Utilizó 4 valores del número de líneas características: 135, 250, 750 y 1000, obteniendo como conclusión, que mientras más alto es el número de líneas características, mayor precisión habrá en los resultados en la expansión inicial del contorno de la tobera. También, minimiza el error cerca de la expansión inicial (la cual se desarrolla cercano a la garganta) por lo que, las ondas de choque oblicuas tienen menor probabilidad de formarse, afectar el flujo y afectar los parámetros termodinámicos. Sin embargo, el utilizar más líneas características, como se observó anteriormente, además de ser más preciso con respecto al número de Mach requerido, también tiende a incrementar la longitud final de la tobera. Khan, MD. [16] llevó a cabo un diseño de tobera supersónica utilizando el MOC con 10 líneas características, demostró que este método definitivamente crea una sección divergente de mínima longitud y con una contracción de la sección de expansión. Sin embargo, al aumentar a 200 líneas características, la longitud final de la sección incrementó de 0.0856m a 0.0878m, concluyendo que la longitud se torna mayormente estable a mayor número de líneas características.

La optimización de las toberas supersónicas se centra principalmente en utilizar métodos para diseñar geometrías capaces de proporcionar una expansión rápida y uniformidad en el flujo de salida. Para que el MOC sea más preciso y eficaz, es fundamental que la sección convergente sea diseñada de forma que el flujo logre un número de Mach de uno en la garganta, esto debido a que el MOC hace la consideración de que se tiene un flujo con velocidad sónica en dicha sección. Hou, D., et al. [13] realizó el estudio de una tobera de Laval, en el que utilizó diferentes técnicas de diseño para la sección convergente, esto para observar el efecto de la condensación supersónica de las características de un gas en la propia tobera. Métodos como el de Witoszynski, Curva Paramétrica Bicúbica, Curva Translacional de Witoszynski y Curva Polinomial Quintica fueron utilizadas. Se demostró que la técnica de curva translacional de Witoszynski es la mejor para el diseño de la sección convergente

para el propósito de la tobera. Sin embargo, El MCPB también presenta buenos resultados en cuestión de estabilidad para los parámetros de presión y temperatura. Petkevic, R., et. al. [26] llevó a cabo un estudio comparativo entre los diseños creados mediante MCPB y Witoszynski para una tobera de polvo asistida por láser para deposición de metales. Se demostró numéricamente que el diseño convergente creado mediante MCPB alcanza una mayor velocidad de salida con respecto a la creada mediante Witoszynski, ya que presenta menores fluctuaciones en la velocidad.

El progreso de la tecnología en el campo computacional ha permitido una alta precisión en los resultados comparables con la experimentación real. Las simulaciones numéricas se utilizan para investigar el comportamiento del flujo y los valores de los parámetros termodinámicos de interés, así como para detectar las ondas de choque existentes en las diferentes regiones de la tobera. En un estudio realizado por Desphande, N., et. al. [9] se compararon los resultados teóricos con numéricos para una tobera de Laval, se demostró que la diferencia fue insignificante, así como también que el modelo de turbulencia $k - \epsilon$ utilizado consideró los efectos de capa límite y ondas de choque. Hedge, A., et. al. [12] y Meena, L., et. al. [20] utilizaron $k - \epsilon$ como modelo de referencia para sus estudios CFD, de igual manera validaron con éxito sus resultados, afirmando que dicho modelo turbulento permite obtener resultados más cercanos a lo experimental. Por otra parte, Kumar, T., et. al. [22] utilizó el modelo de turbulencia $k - \omega$ para altas velocidades y temperaturas de su estudio, en el cual llegó a la conclusión de que dicho modelo proporciona una aproximación al comportamiento real del flujo compresible en esta tobera. Kolar, J., et. al. [18] y Restrepo, J., et. al. [27] utilizaron el modelo $k - \omega$ modificado SST, concluyendo que dicho modelo permite obtener buen rendimiento para flujos supersónicos viscosos, así como una buena predicción para ondas de choque y separación de capa límite, pero el esfuerzo cortante entre dos flujos es sobre-estimado. Como se ha comentado, los investigadores han utilizado métodos numéricos para obtener resultados cercanos a los experimentales; de esta manera, la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) se utiliza para lograr resultados con precisión a bajo costo.

Establecer una metodología robusta para diseñar y analizar toberas supersónicas

con la implementación de técnicas matemáticas garantiza geometrías óptimas que maximizan el empuje al tiempo que minimizan fenómenos indeseables como la separación del flujo y las pérdidas inducidas por las ondas de choque. Como se mencionó con anterioridad, existe mucha bibliografía acerca del diseño de toberas supersónicas. Estos estudios tuvieron como objetivo establecer algoritmos completos para el diseño y la evaluación de toberas supersónicas utilizando tanto la teoría del flujo compresible como el modelado matemático. Sin embargo, estos esfuerzos se encontraron con disparidades sustanciales entre los resultados analíticos y numéricos.

3. Marco Teórico

3.1. Toberas

3.1.1. Flujo a través de toberas aceleradoras convergentes

Los dispositivos de flujo compresible como lo son las toberas, se utilizan en diversos sectores de la ingeniería, tal es el caso de su uso en turbinas de gas y vapor. Para comenzar con su estudio, se introducen dos conceptos denominados presión de garganta (P^*) el cual es la presión del fluido ejercido sobre la garganta de la tobera y contrapresión (P_c), éste último hace referencia a la presión ejercida por el fluido en la región de salida de la tobera (P_s) y tiene efectos directamente en el flujo másico y velocidad de salida del flujo en el dispositivo.

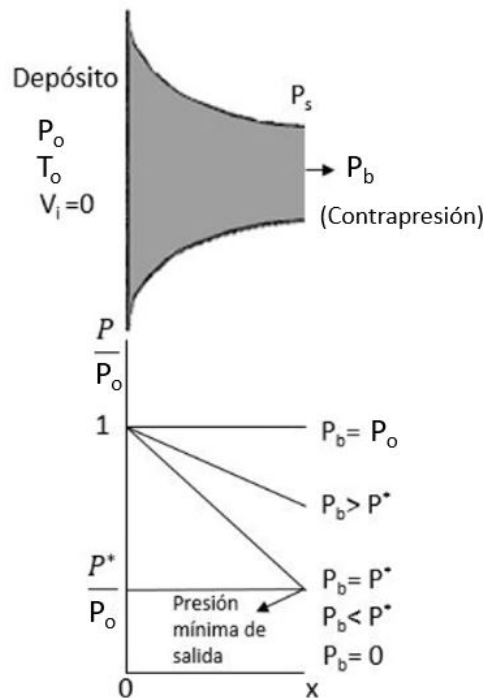


Figura 3.1: Efecto de la contrapresión en una tobera convergente.

Considérese un flujo subsónico que pasa a través de una tobera convergente, en donde

las condiciones del flujo de entrada se encuentran a una presión P_o y temperatura T_o , debido a que la velocidad del fluido es cero en el depósito, la presión y temperatura del fluido en cualquier sección de la tobera es igual a las condiciones del depósito. Después de esto se comienza a reducir la contrapresión y se observan los efectos de la presión a lo largo de las secciones de la tobera, como se muestran en la Figura 3.1:

1. Si la contrapresión P_c es igual a la presión de entrada P_o , no existirá flujo y la distribución de la presión será igual en toda sección de la tobera.
2. Si la contrapresión P_c es mayor que la presión en la garganta P^* , la presión en la salida (P_e) disminuye al mismo valor y automáticamente provoca que disminuya la presión en la tobera en la dirección de mismo flujo.
3. Cuando la contrapresión P_c disminuye al valor de la presión de la garganta P^* , el flujo másico alcanza un valor máximo y se establece que el flujo ha sido ahogado.
4. Cuando la contrapresión P_c es menor a la presión de la garganta P^* , no se tiene un efecto en la distribución de presiones a lo largo de la tobera.

Cuando se están utilizando condiciones de flujo estacionario, el flujo másico que entra en la tobera permanece constante y es igual al flujo másico que sale de la misma, por lo que se puede expresar la siguiente manera:

$$\dot{m} = \frac{MP_o \sqrt{\frac{k}{RT_o}}}{\left(1 + \frac{(k-1)M^2}{2}\right)^{(k+1)/(2k-2)}} \quad (3.1)$$

Donde \dot{m} , R y k es el flujo másico, constante universal de los gases y la constante de los calores específicos constantes, respectivamente. Ahora bien, la ecuación anteriormente propuesta describe el flujo másico que pasa en cualquier sección transversal de la tobera, sin embargo, para un área especificada A y ciertas propiedades de estancamiento T_o y P_o el flujo másico se puede determinar utilizando la siguiente fórmula:

$$\dot{m}_{max} = AP_o \sqrt{\frac{k}{RT_o} \frac{2}{(k+1)} \frac{2}{(k+1)^{2/(k-1)}}} \quad (3.2)$$

Para un gas ideal como el aire, tenemos que el flujo másico máximo alcanzado a través de la tobera con un área de garganta establecida está determinado por la presión y temperatura de estancamiento del flujo de entrada [7].

3.1.2. Flujo a través de toberas aceleradoras convergentes divergentes

La velocidad más alta que se puede obtener para un fluido que pasa a través de una tobera aceleradora convergente es la velocidad sónica. Para poder lograr velocidades de salida supersónicas es necesario conectar una sección divergente a la tobera inmediatamente después de la garganta, esta sección combinada dará como resultado una tobera convergente-divergente, la cual en sí no nos proporciona con seguridad que el fluido será acelerado, para esto la contrapresión debe encontrarse en el intervalo correcto, de lo contrario el fluido podrá desacelerarse en la sección divergente.

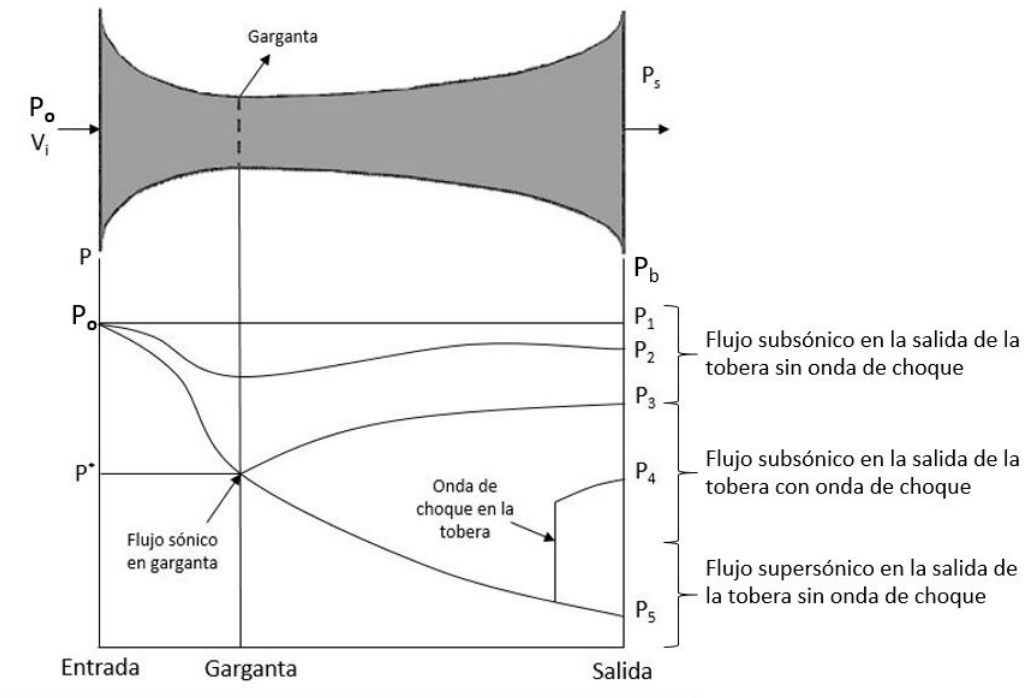


Figura 3.2: Efecto de la contrapresión en una tobera convergente-divergente. Donde P_1 , P_2 , P_3 , P_4 y P_5 son diferentes valores de presión en la salida de la tobera y P_b es la contrapresión.

Para este caso, considérese un fluido que ingresa a una tobera convergente-divergente (Fig. 3.2) con una velocidad baja a presión de estancamiento P_o , se puede deducir lo siguiente [7]:

1. Cuando $P_b = P_o$, no habrá flujo a través de la tobera.
2. Cuando $P_o > P_b > P_3$, el flujo permanece subsónico a través de la tobera. La velocidad del flujo es acelerado en la sección convergente y alcanza su valor máximo en la garganta; después es desacelerado en la sección divergente.
3. Cuando $P_b = P_3$, el flujo alcanza la velocidad sónica en la garganta, sin embargo, la sección divergente desacelera la velocidad del flujo a velocidades subsónicas.
4. Cuando $P_3 > P_b > P_s$, el fluido alcanza una velocidad sónica en la garganta y continúa acelerándose a velocidades supersónicas en la sección divergente a medida que la presión disminuye, sin embargo, esta aceleración disminuye a

medida que se producen ondas de choque normales en la sección de la garganta y la salida.

5. Cuando $P_s > P_b > 0$, el flujo que se encuentra en la sección divergente es supersónico y se expande a un valor de P_5 en la salida de la tobera sin la presencia de ondas de choque normales. En este caso el flujo que está presente en la tobera se puede modelar como un flujo isentrópico.

3.1.3. Variación de la velocidad de un fluido respecto al área de flujo

Cuando nos encontramos realizando análisis de toberas, las magnitudes que describen el flujo varían principalmente en la dirección del flujo, por lo que éste puede representarse como un flujo isentrópico unidimensional. Es necesario comenzar el estudio de las relaciones entre velocidad, densidad y áreas de flujo isentrópico debido a que son muy complejas, para esto es necesario utilizar el balance de masa de un proceso de flujo estacionario:

$$\dot{m}_{max} = \rho AV = cte \quad (3.3)$$

Donde ρ , V y A hace referencia a la densidad estática, velocidad del fluido y área específica, respectivamente. Dividiendo la Ec. 3.3 entre el flujo másico y derivando, obtenemos:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (3.4)$$

Se descarta la energía potencial, quedando la ecuación del balance de energía de un flujo isentrópico sin interacciones de trabajo en forma diferencial:

$$\frac{dP}{\rho} + VdV = 0 \quad (3.5)$$

La Ec. 3.5 es la forma diferencial de la ecuación de Bernoulli cuando los cambios en

la energía potencial no son tomados en consideración, por lo tanto es una forma del principio de conservación de la cantidad de movimiento para volúmenes de control de flujo estacionario. Combinando las ecuaciones (3.4) y (3.5) y, al utilizar términos relacionados con la velocidad del sonido, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dP}{\rho V^2}(1 - M^2) \quad (3.6)$$

La Ec. 3.6 nos describe la variación de la presión respecto al área de flujo, así mismo podemos observar que las variables A , ρ y V positivas. Para el flujo subsónico en donde $M < 1$, el término que se encuentra entre paréntesis $(1 - M^2)$ es positivo, por lo que dA y dP tienen el mismo signo. En este caso, la presión del fluido incrementará a medida que el área de flujo en la tobera incremente y caso contrario, disminuirá cuando el área disminuya. Por consiguiente, a velocidades subsónicas la presión disminuye en toberas convergentes y aumenta en toberas divergentes.

Para flujos supersónicos en donde $M > 1$, el término $(1 - M^2)$ es negativo y por lo tanto dA y dP tienen signos opuestos, la presión de la tobera aumentará a medida que el área del flujo disminuya y disminuirá cuando el área aumente; por lo tanto, a velocidades supersónicas la presión disminuye en toberas divergentes y aumenta en toberas convergentes. Nos encontramos con otra ecuación de gran relevancia para flujos isentrópicos de los fluidos, la cual queda establecida como:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V}(1 - M^2) \quad (3.7)$$

Esta ecuación gobierna la forma de una tobera para flujos isentrópicos subsónicos o supersónicos. Al ver que las variables A y V son positivas, se pueden establecer las siguientes conclusiones:

1. Para flujo subsónico ($M < 1$):

$$\frac{dA}{dV} < 0 \quad (3.8)$$

2. Para flujo supersónico ($M > 1$):

$$\frac{dA}{dV} > 0 \quad (3.9)$$

3. Para flujo sónico ($M = 1$):

$$\frac{dA}{dV} = 0 \quad (3.10)$$

Por lo tanto, la elección de la forma correcta de una tobera dependerá de la velocidad mayor que se desea alcanzar con respecto a la velocidad del sonido. Para la obtención de velocidad supersónicas entonces, se deberá utilizar una tobera convergente-divergente y para velocidad subsónicas, una tobera convergente [7].

3.2. Termodinámica Elemental

Un flujo de alta velocidad también es relacionado como un flujo con alta energía, la cual debe ser tomada en consideración debido a que su reducción suele llevar a cabo un aumento de la temperatura. Esto lleva a una relación entre los flujos de alta velocidad, la compresibilidad (cambio de densidad) y los cambios de energía cinética. Para poder llevar a cabo el análisis de estos flujos primero se deben comprender algunos conceptos de la termodinámica que entran en juego para los cambios fundamentales de la energía en un gas y la respuesta de la presión y temperatura para esos cambios.

La Primera Ley de la Termodinámica es una relación muy importante de la termodinámica. Considérese una unidad de masa fija de gas contenida dentro de límites establecidos como se muestra en la Fig. 3.3. Esta masa es llamada sistema, y todo aquello que se encuentra fuera del límite es el entorno. Ahora bien, considérese que el gas que forma el sistema se compone de moléculas que se mueven dentro de los límites de forma aleatoria. La energía de este movimiento molecular, sumada sobre todas las moléculas del sistema, es llamado energía interna del sistema. Denotaremos como e la energía interna por unidad de masa de gas.

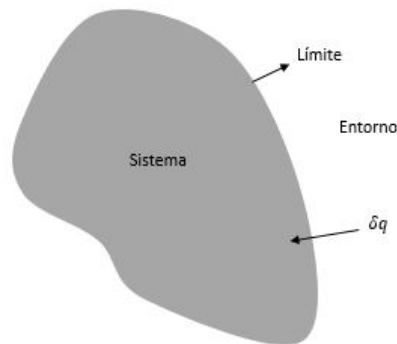


Figura 3.3: Sistema de masa de un gas.

Los únicos medios por el que e puede aumentar o decrementar, son los siguientes:

1. Calor agregado (o tomado) al sistema (q). Este calor viene del entorno y es añadido al sistema a través del límite. Denotaremos como δq a la cantidad incremental de calor añadido por unidad de masa.
2. Trabajo realizado sobre (o por) el sistema (w). Este trabajo puede ser manifestado por el límite del sistema siendo empujado hacia adentro (trabajo realizado en el sistema) o hacia afuera (trabajo realizado por el sistema). Sea δw la cantidad incremental de trabajo realizado en el sistema por unidad de masa.

Así mismo, se denotara como de al cambio en la energía interna por unidad de masa. Se puede establecer que:

$$\delta q + \delta w = de \quad (3.11)$$

La ecuación 3.11 es denominada como Primera Ley de la Termodinámica. Es una ecuación de energía que establece que el cambio en la energía interna es igual a la suma del calor agregado y el trabajo realizado en el sistema. Para obtener formas más útiles de la Ec. (3.11) primero se debe derivar una expresión para δw en términos de presión P y volumen específico v . Considérese el sistema de la Figura 3.4 donde

dA es un incremento en el área de la superficie del límite. Para este caso se asume que el trabajo ΔW está siendo realizado en el sistema mientras que dA está siendo empujado una distancia pequeña s . Dado que el trabajo es definido como fuerza por distancia, tenemos:

$$\Delta W = \text{fuerza} \times \text{distancia} \quad (3.12)$$

O bien:

$$\Delta W = (PdA)s \quad (3.13)$$

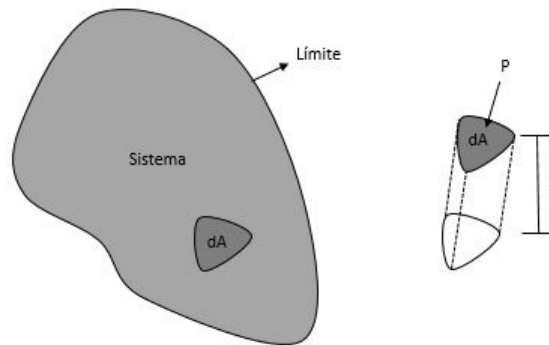


Figura 3.4: Trabajo realizado sobre un diferencial de área del sistema por la presión.

Supongamos que muchas áreas infinitesimales dA , están distribuidas sobre el área de la superficie total A dentro del límite de superficie 3.4. Se supone también que cada una de las áreas infinitesimales se desplazan una distancia en el sistema. Entonces, el trabajo total δw realizado en la unidad de masa de gas dentro del sistema, es la integral de cada superficie infinitesimal sobre todo el sistema, es decir, de la ecuación 3.13:

$$\delta w = \int_A (PdA)s = \int_A Ps dA \quad (3.14)$$

Supóngase que ρ es constante en cualquier lugar en el sistema. A partir de la ecuación 3.14, se obtiene:

$$\delta w = P \int_A s dA \quad (3.15)$$

La parte dentro de la integral hace referencia al cambio en el volumen de la unidad de masa de gas dentro del sistema, creado por la superficie circundante de los límites siendo desplazada hacia adentro. Sea dv el cambio del volumen, dado que el límite está empujando, el volumen decrementa (dv es una cantidad negativa) y el trabajo es realizado sobre el gas, por lo tanto, δw es una cantidad positiva. Entonces:

$$\int_A s dA = -dv \quad (3.16)$$

Sustituyendo la ecuación 3.16 en la ecuación 3.15, se obtiene:

$$\delta w = -Pdv \quad (3.17)$$

La ecuación 3.17 nos relaciona el trabajo realizado en términos de la presión P y volumen específico v . Cuando la ec. 3.17 es sustituida dentro de la ec. 3.11, la ec. de la primera ley se convierte en:

$$\delta q = de + Pdv \quad (3.18)$$

La ec. 3.18 es una forma alternativa de la ecuación de la primera ley de la termodinámica. Es conveniente definir una nueva cantidad llamada entalpía h como:

$$h = e + Pv = e + RT \quad (3.19)$$

Donde $Pv = RT$, asumiendo que es un gas perfecto. Entonces, diferenciando la ecuación 3.19, se obtiene:

$$dh = de + Pdv + vdP \quad (3.20)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ec. 3.18, tenemos:

$$\delta q = de + Pdv = (dh - Pdv - vdP) + Pdv \quad (3.21)$$

Entonces:

$$\delta q = dh - vdP \quad (3.22)$$

La ec. (3.22) es otra forma alternativa de la primera ley de la termodinámica. En las Figs. (3.3) y (3.4), se muestran sistemas en los que se les añade calor δq y en los cuales el trabajo δw está hecho sobre los mismos. Al mismo tiempo, estas variables pueden causar que la presión estática (P), densidad y temperatura estática (T) del sistema puedan cambiar. El camino de transformación de las variables termodinámicas (P , T , ρ , v) de un sistema se llama proceso. Un proceso de volumen constante se muestra en la Fig. 3.5a:

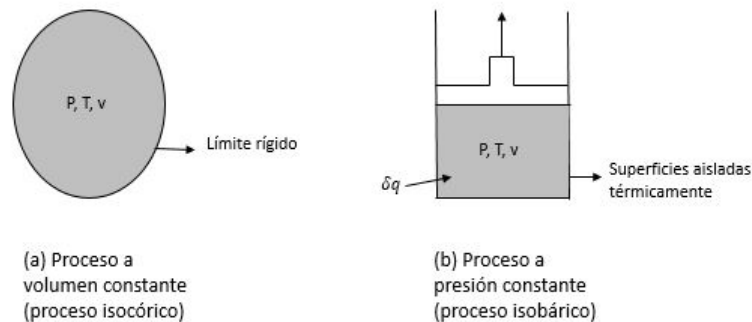


Figura 3.5: Ilustración de un proceso isocórico y un proceso isobárico.

En la Fig. 3.5a se muestra una esfera hueca compuesta con gas que se encuentra dentro de los límites, y por lo tanto el volumen del sistema siempre permanece constante. Si se añade una cantidad de calor δq al sistema, P y T cambiarán. Así

que, dichos cambios sucederán a volumen constante; este es un proceso a volumen constante. Otro ejemplo se proporciona en la Fig. 3.5b. Aquí se muestra un sistema cilindro-pistón con gas dentro. Considérese que el calor δq se agrega al sistema y al mismo tiempo el pistón se mueve exactamente en la dirección correcta para mantener una presión constante dentro del interior del sistema. Cuando se agrega δq a éste sistema, T y v (por lo tanto P) cambiarán. Entonces, se dice que tales cambios ocurren en un proceso a presión constante.

Ahora bien, se considera un sistema en el que se añade una pequeña cantidad de calor δq al sistema. La adición de éste calor provocará un pequeño cambio en la temperatura δT . Por definición, el calor específico es el calor añadido por unidad de cambio de temperatura del sistema. Denotemos como c al calor específico. Entonces:

$$c = \frac{\delta q}{\delta T} \quad (3.23)$$

Sin embargo, para la ec. (3.23), c toma diferentes valores. Es decir, para una cantidad fija de δq , el valor resultante de δT puede ser diferente, dependiendo directamente del tipo de proceso en el que δq es añadido, al mismo tiempo, el valor de c depende del tipo de proceso. Por lo tanto, podemos definir con mayor precisión un calor específico diverso para cada tipo de proceso. Se definirá el calor específico a presión y el calor específico a volumen constante.

Si se añade calor δq a volumen constante y provoca un cambio en la temperatura δT , el calor específico a volumen constante c se define:

$$C_v = \left(\frac{\delta q}{\delta T} \right) \text{ a volumen constante} \quad (3.24)$$

O bien:

$$\delta q = C_v dT \quad (3.25)$$

Por otro lado, si se añade calor δq a presión constante y provoca un cambio en la

temperatura δT (cuyo valor es diferente del δT anterior), el calor específico a presión constante se define como:

$$C_P = \left(\frac{\delta q}{\delta T} \right) \text{ a presión constante} \quad (3.26)$$

O bien:

$$\delta q = C_P dT \quad (3.27)$$

Las definiciones anteriores de C_v y C_P cuando son combinadas con la ecuación de la primera ley de la termodinámica, dan como resultado relaciones útiles para la energía interna e y la entalpía h . Primeramente considérese un proceso a volumen constante, donde por definición $\delta v = 0$. Entonces, de la ecuación 3.18:

$$\delta q = de + Pdv = de + 0 = de \quad (3.28)$$

Sustituyendo la definición de C_v (ecuación 3.25) dentro de la ecuación 3.28, obtenemos:

$$de = C_v dT \quad (3.29)$$

Suponiendo que C_v es una constante y dejando que $e = 0$ cuando $T = 0$, la ecuación 3.29 puede integrarse:

$$e = C_v T \quad (3.30)$$

Considérese un proceso a presión constante, donde por definición $dP = 0$. De la ecuación 3.22, obtenemos:

$$\delta q = dh - vdP = dh - 0 = dh \quad (3.31)$$

Sustituyendo la definición de C_P (Ecuación 3.27) dentro de la ecuación 3.31, se obtiene:

$$dh = C_P dT \quad (3.32)$$

Suponiendo nuevamente que C_P es una constante y dejando que $h = 0$ cuando $T = 0$. Se observa que la ecuación 3.32 cuando se integra, queda de la siguiente manera:

$$h = C_P T \quad (3.33)$$

Las ecuaciones 3.29 a la 3.33, son relaciones muy importantes en las que se vinculan variables termodinámicas como energía interna con temperatura y entalpía con temperatura [1].

3.3. Ecuaciones Gobernantes

Los fenómenos que ocurren dentro de toberas supersónicas son referentes a flujos compresibles, y para el estudio de éstos se deben de establecer diversas leyes y ecuaciones fundamentales que los rigen. Así mismo, la dinámica de fluidos computacional trabaja con éstas ecuaciones para la resolución de flujos turbulentos, en donde las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuación de masa, momento y energía) son resueltas para cada flujo de interés. A continuación se establecen algunas de las ecuaciones más relevantes para este estudio:

1. Ecuación de continuidad.
2. Ecuación de Momentum.
3. Conservación de energía.
4. Segunda Ley de la Termodinámica.

Para flujos de alta velocidad las características que condicionan al flujo compresible son gobernadas por relaciones de flujo isentrópicas, Rayleigh y relaciones de flujo

de Fanno junto con las relaciones de ondas de choque normales y oblicuas si se encuentran presentes [11].

Para poder reconocer el origen de las ecuaciones mencionadas con anterioridad, es necesario comprender los tres tipos de derivadas con respecto al tiempo que se utilizarán. Para una mejor comprensión, se establece como ejemplo una concentración de peces en el mar. Puesto que los peces están en movimiento, su concentración c será una función de la posición (x, y, z) y del tiempo (t) .

Derivada parcial con respecto al tiempo, $\partial c/\partial t$

Supongamos que estamos sobre un muelle y observamos cómo varía la concentración de peces exactamente debajo de nosotros a través del tiempo. Estamos observando cómo varía la concentración con el tiempo, para una posición fija en el espacio. Conforme a lo anterior, se establece que, $\partial c/\partial t$ indica la parcial de c con respecto a t , manteniendo constantes x, y, z .

Derivada total con respecto al tiempo, dc/dt

Ahora supongamos que en vez de estar sobre el muelle, vamos en un barco que se mueve en el mar en todas direcciones, unas veces en contra de la corriente, otras a través, y tal vez otras a favor de la corriente. Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números que resultan también reflejan el movimiento del barco. En este caso, la derivada total con respecto al tiempo está dada por:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.34)$$

En la que dx/dt , dy/dt y dz/dt son los componentes de la velocidad del barco.

Derivada substancial con respecto al tiempo, Dc/Dt

Para esta ocasión supongamos que vamos en un barco que se encuentra apagado, se encuentra flotando. En este caso, la velocidad del observador es exactamente la misma que la velocidad de la corriente V . Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números dependen de la velocidad local de

la corriente. Está relacionada con la derivada parcial con respecto al tiempo de la siguiente forma:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + V_x \frac{\partial c}{\partial x} + V_y \frac{\partial c}{\partial y} + V_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad (3.35)$$

En la que V_x , V_y y V_z son los componentes de la velocidad del fluido V [5].

3.3.1. Ecuación de Continuidad

Esta ecuación es deducida aplicando un balance de masa a un elemento estacionario de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, a través del que está circulando un fluido.

$$\boxed{\text{Velocidad de acumulación de masa}} = \boxed{\text{Velocidad de entrada de masa}} - \boxed{\text{Velocidad de salida de masa}}$$

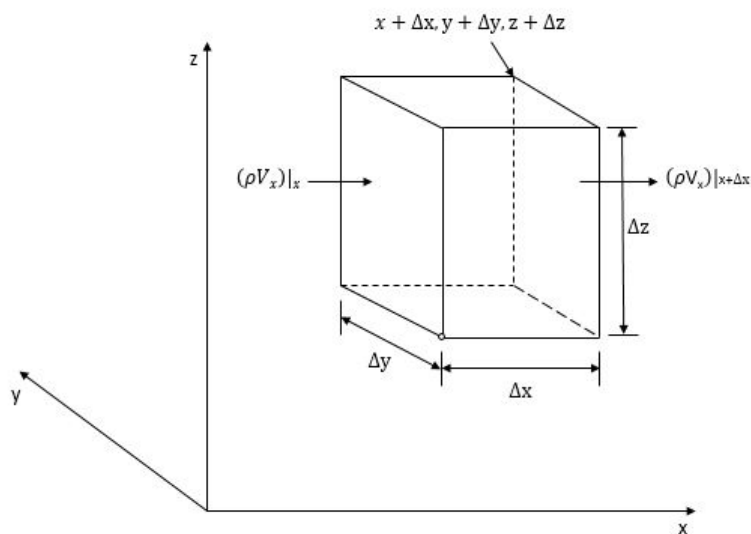


Figura 3.6: Volumen de control para un dispositivo con entrada y salida 1D.

Se empieza considerando el par de caras perpendiculares al eje x . La velocidad de entrada de masa a través de la cara x es $(\rho V_x)|_x \Delta y \Delta z$, y la velocidad de salida de masa a través de la cara $x + \Delta x$ es $(\rho V_x)|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$. Para los otros dos pares de caras

pueden escribirse expresiones análogas. La velocidad de acumulación de masa en el elemento de volumen es $(\Delta_x \Delta_y \Delta_z) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$. El balance de masa queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Delta_x \Delta_y \Delta_z \frac{\partial \rho}{\partial t} = & \Delta_y \Delta_z [(\rho V_x)|_x - (\rho V_x)|_{x+\Delta_x}] + \\ & \Delta_x \Delta_z [(\rho V_y)|_y - (\rho V_y)|_{y+\Delta_y}] + \Delta_x \Delta_y [(\rho V_z)|_z - (\rho V_z)|_{z+\Delta_z}] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Dividiendo toda la ecuación anterior entre $(\Delta_x \Delta_y \Delta_z)$ y considerando que los límites cuando estas dimensiones tienden a cero, se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho V_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho V_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho V_z \right) \quad (3.37)$$

Ésta es la ecuación de continuidad, la cual describe la variación de la densidad para un punto fijo, como consecuencia de las variaciones del vector de velocidad másico ρV . La ecuación 3.37 se puede escribir de una forma más conveniente utilizando notación vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\nabla \cdot \rho V) \quad (3.38)$$

El término $(\nabla \cdot \rho V)$ es denominado divergencia de ρV , y a veces se escribe $div \cdot \rho V$, obsérvese que el vector ρV es la densidad de flujo de materia y que su divergencia hace alusión a la velocidad neta con que disminuye la densidad de flujo de materia por unidad de volumen. Por lo tanto, la ecuación (3.38) establece que la velocidad con que aumenta la densidad en el interior de un elemento de volumen fijo en el espacio, es igual a la velocidad neta de entrada de densidad de flujo de materia en el elemento dividida por su volumen.

Es preferible modificar la ecuación 3.37, efectuando la diferenciación que está indicada y reuniendo todas las derivadas de ρ en el primer miembro:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \\ -\rho \left(\frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial y} V_y + \frac{\partial}{\partial z} V_z \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

El primer miembro de la ecuación 3.39 hace referencia a la derivada substancial de la densidad, es decir, la derivada con respecto al tiempo para un recorrido que sigue el movimiento del fluido. Debido a esto, la ecuación 3.39 puede denotarse abreviadamente de la siguiente manera:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot V) \quad (3.40)$$

En la que el término D/Dt está definido por la ecuación 3.35. La ecuación de continuidad, representada en esta forma, describe la velocidad de variación de la densidad, tal como la observa una persona que flota en el fluido. Esta ecuación es fácilmente una formulación de la conservación de la materia. Es conveniente señalar que la deducción puede efectuarse igualmente para un elemento de volumen de una forma aleatoria cualquiera. Una forma especial y fundamental de la ecuación de continuidad, es la correspondiente a un fluido incompresible (densidad constante):

$$(\nabla \cdot V) = 0 \quad (3.41)$$

Aunque en la realidad ningún fluido es incompresible, en la práctica se puede aceptar con mucha frecuencia que la densidad es constante, con lo que se obtiene una simplificación considerable, sin cometer casi error [5].

3.3.2. Ecuación de Momentum

La ecuación de conservación de masa (ecuación 3.40) no nos dice nada acerca de la presión del flujo; se reconoce que la presión es una variable fundamental del flujo, ya que una diferencia de presiones de un punto a otro hace que se desarrollen fuerzas

que actúan sobre los elementos del fluido y cause el movimiento. Por lo tanto, existe una relación entre la presión y velocidad, y esa relación se detallará a continuación.

La segunda ley de Newton se establece como:

$$F = ma \quad (3.42)$$

Donde F , m y a es la fuerza, masa y aceleración, respectivamente. Para aplicar esta ecuación a un fluido que está en movimiento, consideraremos un elemento de fluido infinitesimalmente pequeño moviéndose a lo largo de una línea de corriente con velocidad V , como se muestra en la Fig. 3.7. En cualquier momento dado, el elemento se encuentra en el punto L . El elemento se mueve en dirección x orientado paralelamente a la línea de corriente en el punto L . Así mismo, los ejes y y z son perpendiculares a x .

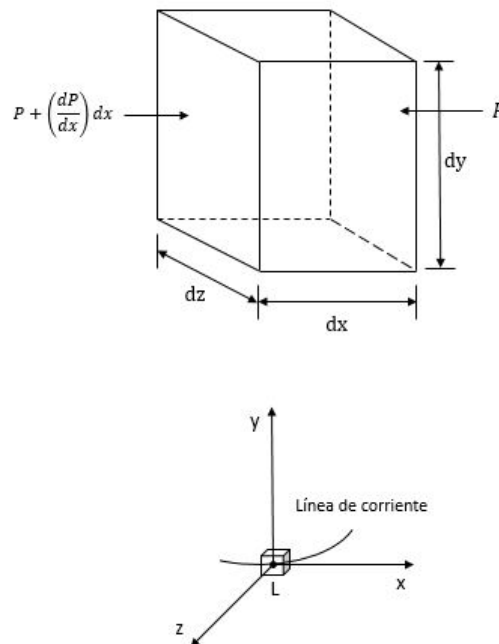


Figura 3.7: Diagrama de fuerza para la ecuación de momentum.

En la parte posterior derecha de la Fig. 3.7 se observa una fuerza $(P + \frac{dP}{dx})dx$ la cual es la combinación de tres fenómenos:

1. La presión actuando en dirección normal en todas las caras del elemento.
2. Fricción cortante actuando tangencialmente en todas las caras del elemento.
3. La fuerza de gravedad actuando sobre la masa dentro del elemento.

Debido a que se ignorarán las fuerzas de fricción y que la gravedad contribuye en pequeña cantidad sobre la fuerza total, se supondrá que la única fuente de fuerza en el fluido del elemento es la presión. Para calcular esa fuerza, supondremos las dimensiones del fluido del elemento como dx , dy y dz como se muestra en la parte posterior de la Fig. 3.7. Se considera que la cara izquierda y derecha son perpendiculares al eje x . La presión en la cara izquierda es P y su área es $dydz$, por lo tanto la fuerza total positiva sobre la cara izquierda es $P \cdot (dydz)$. Debido a que la presión varía de un punto a otro, existe un cambio en la presión por unidad de longitud, representado por la derivada dP/dx . Debido a esto, si nos alejamos de la cara izquierda por una distancia dx a lo largo del eje x , el cambio en la presión es $(dP/dx)dx$. La presión en la cara derecha se establece como $P + (dP/dx)dx$ y su área es $dydz$, mientras que la fuerza en la misma cara es $[P + (dP/dx)dx](dydz)$ actuando en dirección negativa del eje x , como se muestra en la Fig. 3.7. Por lo tanto, la fuerza neta (F) en dirección x es la suma de ambos:

$$F = Pdydz - (P + \frac{dP}{dx})dx(dydz) \quad (3.43)$$

O bien:

$$F = -(\frac{dP}{dx})(dxdydz) \quad (3.44)$$

La ecuación 3.44 nos permite conocer la fuerza en el fluido del elemento debido a la presión. Las presiones de las caras paralelas a las líneas de corriente no afectan el movimiento del elemento debido a la conveniencia de elegir el eje de las x en la dirección del flujo. La masa del fluido del elemento se establece como la densidad ρ multiplicada por el volumen $dxdydz$:

$$m = \rho(dx dy dz) \quad (3.45)$$

Además, la aceleración a del fluido del elemento es, la tasa de cambio de la velocidad ($a = dV/dt$). Observando que por definición, $V = dx/dt$, podemos establecer que:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} V \quad (3.46)$$

Las ecuaciones 3.44, 3.45 y 3.46 nos permiten obtener la fuerza, masa y aceleración respectivamente, de la ecuación 0.17 tenemos que:

$$F = ma = -\frac{dP}{dx}(dx dy dz) = \rho(dx dy dz)V \frac{dV}{dx} \quad (3.47)$$

O bien:

$$dP = -\rho V dV \quad (3.48)$$

La ecuación 3.48 es llamada Ecuación de Euler o ecuación de momentum, la cual relaciona la tasa de cambio de momento con la fuerza. Es importante tener en consideración las suposiciones utilizadas para obtener esta ecuación: se despreció la fricción y la gravedad, además, el campo de flujo se supone como estacionario. Por lo tanto, la ecuación 3.48 es la ecuación de momento para flujo no viscoso.

La ecuación de momentum relaciona el cambio de presión dP con un cambio de velocidad dV , por lo tanto es una ecuación diferencial que describe los fenómenos de manera infinitesimal alrededor del punto L en la Fig. 3.7. Consideraremos dos puntos: 1 y 2, dentro de la misma línea de corriente pero alejados entre sí. Para relacionar P_1 y V_1 en el punto 1, con P_2 y V_2 del punto 2, la ecuación de momentum se debe integrar entre los puntos. Tanto para flujo compresible e incompresible la ecuación de momentum es similar, sin embargo para flujos compresibles ρ actúa como una variable mientras que para flujos incompresibles es constante.

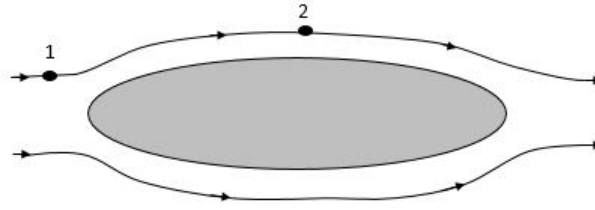


Figura 3.8: Dos puntos en diferentes lugares alrededor de una línea de corriente.

Para el caso de flujo incompresible, establecemos el punto 1 y punto 2 en cualquier lugar a lo largo de una línea de corriente dada (como se muestra en la Fig. 3.8). De la ecuación 3.48, obtenemos:

$$dP + \rho V dV = 0 \quad (3.49)$$

Donde ρ es una constante. Integrando entre los puntos 1 y 2, tenemos que:

$$\int_{P_1}^{P_2} dP + \int_{V_1}^{V_2} V dV = 0 \quad (3.50)$$

Por lo tanto:

$$(P_2 - P_1) + \rho \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) = 0 \quad (3.51)$$

Por lo tanto:

$$P_2 + \rho \frac{V_2^2}{2} = P_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} \quad (3.52)$$

Donde:

$$P + \rho \frac{V^2}{2} = \text{Constante a lo largo de una línea de corriente} \quad (3.53)$$

La ecuación 3.52 o 3.53 es llamada ecuación de Bernoulli. Las siguientes consideraciones deber ser tomadas en cuenta:

1. Se utilizan para flujo incompresible no viscoso.
2. Se relacionan propiedades entre diferentes puntos a lo largo de una línea de corriente.
3. Para un flujo compresible la ecuación 3.48 debe ser utilizada, con la densidad ρ tratada como variable.
4. Recordar que las ecuaciones 3.48, 3.52 y 3.53 mencionan que $F = ma$ para un flujo de fluido. Son la segunda ley de Newton aplicada a la mecánica de fluidos.

Retornando a la Figura 3.8, si todas las líneas de corriente tienen el mismo valor de P y V muy elevado, entonces la constante en la ecuación 3.52 o 3.52 será la misma para todas las líneas de corriente. Para el caso de flujo compresible, la ecuación 3.48 puede ser integrada entre los puntos 1 y 2; sin embargo, debido a que ρ es una variable, se debe reconocer como la densidad varía con respecto a la velocidad antes de llevar a cabo la integración [1].

3.3.3. Ecuación de Energía

Un flujo que va en movimiento a altas velocidades, va de la mano junto con los cambios en la energía que conlleva. Para la obtención de las ecuaciones, nuevamente consideramos un fluido moviéndose a lo largo de una línea de corriente, como se muestra en la Figura 3.7. Se aplica la primera ley de la termodinámica como se muestra a continuación:

$$dq + dw = de \quad (3.54)$$

Recordamos la forma alternativa de la primera ley de la termodinámica (ec. 3.22):

$$\delta q = dh - vdP \quad (3.55)$$

Consideramos el flujo como adiabático ($\delta q = 0$). Por lo tanto, de la ecuación anterior, tenemos que:

$$dh - v dP = 0 \quad (3.56)$$

Utilizando la ecuación de momentum (ec. 3.48):

$$dP = -\rho V dV \quad (3.57)$$

Combinando las ecuaciones 3.56 y 3.57:

$$dh + v \rho V dV = 0 \quad (3.58)$$

Sin embargo, como $v = 1/\rho$, de la ecuación anterior se obtiene:

$$dh + V dV = 0 \quad (3.59)$$

Integrando la ecuación 3.59 entre dos puntos a lo largo de la línea de corriente, obtenemos:

$$\int_{h_1}^{h_2} dh + \int_{v_1}^{v_2} V dV = 0 \quad (3.60)$$

Entonces:

$$(h_2 - h_1) + \left(\frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} \right) = 0 \quad (3.61)$$

Despejando los términos pertenecientes al punto 1 del lado opuesto:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (3.62)$$

O bien, se deduce que:

$$h + \frac{V^2}{2} = \text{Constante} \quad (3.63)$$

La ecuación 3.62 y 3.63 es la ecuación de energía para un flujo adiabático no viscoso. Pueden ser reescritas en términos de T utilizando la Ec. 3.33:

$$C_p T_1 + \frac{V_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (3.64)$$

O bien:

$$C_p T + \frac{V^2}{2} = \text{Constante} \quad (3.65)$$

Las ecuaciones 3.64 y 3.65 relacionan la temperatura y velocidad en dos puntos diferentes a lo largo de una línea de corriente. Estas ecuaciones son de igual forma, poderosas para el análisis de un flujo compresible [1].

3.3.4. Flujo Isentrópico

Cuando nos encontramos realizando un análisis de flujo compresible en toberas supersónicas, diversas suposiciones se toman en consideración para permitir un análisis más sencillo, descartando aquellas variables que no influyen en gran manera en los resultados del análisis. Para un flujo isentrópico, se consideran las siguientes suposiciones:

1. Proceso adiabático: proceso en el cual no hay calor añadido o tomado, es decir, $\delta q = 0$.
2. Proceso reversible: proceso en el que no ocurren efectos de fricción (fluido no viscoso).
3. Proceso isentrópico: proceso que es adiabático y reversible.

Por lo tanto, un proceso isentrópico es aquel en el que no se toma en cuenta el

intercambio de calor ni los efectos debido a la fricción (la entropía es una constante para un proceso isentrópico).

Los procesos isentrópicos son muy importantes en el estudio del flujo compresible. Supongamos un fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente, en el cual no se agrega o retira calor; mecanismos de intercambio de calor no se consideran. Por lo tanto, el flujo del fluido a lo largo de la línea de corriente es adiabático. Al mismo tiempo, la tensión cortante ejercida sobre la superficie del fluido debido a la fricción es generalmente pequeña y puede descartarse, por lo tanto el flujo también se considera no viscoso. Se establece entonces, que el flujo del fluido es adiabático y reversible, es decir, el flujo es isentrópico.

Aunque el flujo es adiabático y reversible, la temperatura no es constante. La temperatura del fluido varía de un punto a otro en un flujo compresible adiabático. Esto sucede debido a que el volumen del fluido cambia mientras se mueve en diversas direcciones con diversas densidades a lo largo de la línea de corriente. Se establece que cuando el volumen varía, el trabajo está hecho (Ec. 3.17), por lo tanto la energía interna cambia (Ec. 3.11), y por consiguiente la temperatura cambia (Ec. 3.29). Este argumento se mantiene para flujos compresibles, donde la densidad es variable.

Por otro lado, para flujos incompresibles, donde la densidad es constante, el volumen del fluido no cambia mientras se mueve a lo largo de una línea de corriente, por lo que no existe trabajo realizado ni ocurre cambio en la temperatura. Ahora bien, en el ejemplo propuesto anteriormente, supóngase que si el flujo es incompresible, el campo de flujo total estaría a una temperatura constante. Debido a esto, la temperatura no es importante para el flujo incompresible no viscoso.

Un proceso isentrópico nos provee de importantes relaciones entre las variables termodinámicas P , T y ρ en dos puntos diferentes a lo largo de una línea de corriente establecida. Dado que el flujo es isentrópico, entonces $\delta q = 0$. De la Ec. 3.18 tenemos que:

$$\delta q = de + Pdv = 0 \quad (3.66)$$

Por lo tanto:

$$-Pdv = de \quad (3.67)$$

Sustituyendo la ecuación 3.29 en la ecuación anterior:

$$-Pdv = C_v dT \quad (3.68)$$

Nuevamente, utilizando el supuesto de que $\delta q = 0$ en la Ec. 3.22, obtenemos:

$$\delta q = dh - vdP = 0 \quad (3.69)$$

Por lo tanto:

$$dh = vdP \quad (3.70)$$

Sustituyendo la ecuación 3.32 en la ecuación 3.70:

$$C_P dT = vdP \quad (3.71)$$

Dividiendo la ecuación 3.68 entre la ecuación anterior:

$$\frac{-Pdv}{vdP} = \frac{C_v}{C_P} \quad (3.72)$$

O bien:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{C_P}{C_v} \frac{dv}{v} \quad (3.73)$$

La relación de calores específicos C_P/C_v , es utilizada con frecuencia en las ecuaciones de flujo compresible, por lo que generalmente se representa como $\gamma = C_p/C_v$. Para

el aire en condiciones normales, tanto C_P como C_v son constantes, y por lo tanto $\gamma = C_P/C_v = cte = 1,4$. Por lo tanto la Ec. 3.73 se puede reescribir como:

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dv}{v} \quad (3.74)$$

Con referencia a la Fig. 3.8, integrando la ecuación 3.74 entre los puntos 1 y 2:

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = -\gamma \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} \quad (3.75)$$

Entonces:

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = -\gamma \ln \frac{v_2}{v_1} \quad (3.76)$$

Entonces:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{-\gamma} \quad (3.77)$$

Puesto que $v_1 = 1/\rho_1$ y $v_2 = 1/\rho_2$, la ecuación 3.77 se convierte en:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma} \quad (3.78)$$

De la ecuación de estado sabemos que $\rho = P/RT$. Entonces la Ec. 3.78 se convierte en:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{RT_1}{RT_2} \right)^{\gamma} \quad (3.79)$$

Entonces:

$$\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1-\gamma} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\gamma} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{-\gamma} \quad (3.80)$$

O bien:

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.81)$$

Combinando la Ec. 3.78 y Ec. 3.81, obtenemos:

$$\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.82)$$

Las relaciones dadas en la ec. 3.82 nos proporcionan información importante para P , T y ρ en dos puntos diferentes a lo largo de una línea de corriente en un flujo isentrópico.

Las relaciones establecidas en la ec. 3.82, son fundamentales solo para flujos compresibles. Para analizar flujos incompresibles, solamente necesitamos la ecuación de continuidad ($A_1V_1 = A_2V_2$) y la ecuación de momentum ec. 3.52 y ec. 3.53). Para analizar flujos compresibles, necesitamos la ecuación de continuidad ($\rho_1A_1V_1 = \rho_2A_2V_2$), la ecuación de momentum (ec. 3.48) y la ecuación de energía. Si el flujo compresible es isentrópico, entonces la ec. 3.82 puede ser utilizada para reemplazar la ecuación de momentum o de energía, ya que la ec. 3.82 es más simple y útil que la ecuación de momentum (ec. 3.48) [1].

3.3.5. Ecuación de Estado

En flujos compresibles es necesario definir el estado termodinámico del gas con variables de estado, por ejemplo, presión P , densidad estática ρ , y temperatura estática T . Su relación es descrita por la ecuación de estado. De las ecuaciones propuestas por Boyle, Mariotte y Gay-Lussac, obtenemos:

$$P = \rho RT \quad (3.83)$$

Si el gas cumple con la relación anterior, entonces es llamado térmicamente perfecto.

Para gases térmicamente no perfectos, se deben utilizar otras relaciones. La constante R del gas específico depende del peso molecular del mismo. Para aire el valor de R es de 287 J/kgK . La constante del gas (R_g) está relacionada con la constante del gas universal (R) y el peso del mismo (M_g) por la siguiente relación:

$$R_g = \frac{R}{M_g} \quad (3.84)$$

El valor de la constante del gas universal es $R_u=8.31434 \text{ kJ/(kmolK)}$. La energía interna es un estado variable, el cual es definido por la temperatura T y volumen específico $v = 1/\rho$:

$$e = e(v, T) \quad (3.85)$$

La ecuación 3.85 es conocida como la ecuación calórica de estado. La derivada total es:

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T dv + \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v dT \quad (3.86)$$

La energía interna de los gases térmicamente perfectos depende de la temperatura únicamente. Por lo que se obtiene:

$$de = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT \quad (3.87)$$

Realizando los despejes pertinentes de la Ec. 3.29, tenemos:

$$\frac{de}{dT} = C_v \quad (3.88)$$

Entonces:

$$C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \quad (3.89)$$

El término $(\partial u / \partial T)_v$ es denominado calor específico a volumen constante (C_v). Si éste último término es una constante, el gas es llamado calóricamente perfecto, y la energía interna está dada por:

$$e = C_v T + e_r \quad (3.90)$$

Donde el término e_r es un valor de referencia. La entalpía h es definida como:

$$h = e + Pv \quad (3.91)$$

De igual manera que la energía interna, la entalpía de un gas térmicamente perfecto depende de la temperatura únicamente, o bien de la ec. 3.32:

$$C_P = \left(\frac{dh}{dT} \right)_P \quad (3.92)$$

Se deduce de la relación de calores específicos C_P y C_v :

$$C_P = C_v + R \quad (3.93)$$

Para gases calóricamente perfectos, C_P es constante. Por lo tanto:

$$h = C_p T + h_r \quad (3.94)$$

De la ec. 3.18, sabemos que q y w es el calor y el trabajo, respectivamente. Si el sistema experimenta un proceso reversible para el cual el incremento de trabajo $dw = Pdv$ entonces la ec. 3.18 queda de la siguiente manera:

$$Tds = de + Pdv \quad (3.95)$$

De la ec. 3.94 se establece que h_r es nuevamente un valor de referencia. De la ec.

3.95 y ec. 3.90, además sabemos que $P/T = R/v$, entonces:

$$ds = C_v \left(\frac{dT}{T} \right) + R \frac{dv}{v} \quad (3.96)$$

Similarmente, de las ecs. 3.95 y 3.91, tenemos:

$$Tds = dh - vdP \quad (3.97)$$

De la ec. 3.91 y de la relación del gas ideal $v/T = R/P$, entonces:

$$ds = C_P \left(\frac{dT}{T} \right) - R \frac{dP}{P} \quad (3.98)$$

Las ecs. 3.96 y 3.98 son ecuaciones muy importantes que nos relacionan directamente el cambio de entropía en el sistema con las variables termodinámicas T , P y v , junto con los calores específicos C_P y C_v [11].

3.4. Propiedades de Estancamiento

Utilizar un motor turbojet implica manejar velocidades supersónicas en donde la energía cinética se toma en consideración para los cálculos termodinámicos, caso contrario ocurre para motores en donde se manejan velocidades subsónicas, en donde la energía cinética es insignificante y la entalpía representa la energía total de un fluido ($h = u$).

Para velocidades supersónicas es recomendable combinar esta energía junto con la entalpía en un solo término, resultando la ecuación de entalpía de estancamiento representada por:

$$h_o = h + \frac{V^2}{2} \quad (3.99)$$

Se establece además, que cuando la energía potencial es insignificante, la entalpía de estancamiento representa la energía total de un flujo ($h_o = u$), esto simplifica en

gran manera el análisis de flujos a altas velocidades. Ahora bien, se puede utilizar la entalpía de estancamiento considerando un flujo de gas que pasa por una tobera aceleradora y además, no experimenta variaciones, por lo tanto, de la ecuación de balance de energía a lo largo de la línea de corriente queda similar a la ec. 3.62:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (3.100)$$

Los flujos que pasan a través de toberas satisfacen la ec. 3.100, es decir, son flujos que no sufren interacción de calor ni de trabajo. Es necesario establecer que a mayor velocidad de flujo, mayor disminución habrá en la entalpía estática del fluido. Cuando estamos llevando a cabo análisis termodinámicos de toberas en un sistema ideal (específicamente en las propiedades de estancamiento del dispositivo), se considera que la velocidad del flujo de gas de entrada en la tobera es cero, esto debido a que se considera una reducción total de aceleración del fluido debido al difusor en la entrada del motor (sistema ideal), por lo tanto, la velocidad en el estado 1 es cero y la ec. 3.100 quedaría de la siguiente manera:

$$h_1 = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (3.101)$$

Cuando el fluido de trabajo es aproximado a un gas ideal con calores específicos constantes, su entalpía puede ser reemplazada por $C_P T$, resultando la ec. 3.99 de la siguiente manera:

$$T_o = T + \frac{V^2}{2C_P} \quad (3.102)$$

Aquí, T_o hace referencia a la temperatura de estancamiento (temperatura en el depósito), y representa la temperatura que adquiere un gas ideal cuando se lleva al reposo adiabáticamente. El término $V^2/2C_P$ corresponde al incremento de temperatura durante dicho proceso y se le llama temperatura dinámica. Por lo tanto, la ecuación para el balance de energía cuando el fluido es aproximado a un gas ideal con calores específicos constantes y existe una reducción de la aceleración del gas

(sistema ideal), la ec. 3.102 queda de la siguiente manera:

$$T_1 = T_2 + \frac{V_2^2}{2C_P} \quad (3.103)$$

La presión que un fluido alcanza cuando éste es llevado al reposo isentrópicamente se denomina presión de estancamiento P_o . Para gases ideales con calores específicos constantes, P_o está relacionada con la presión estática del fluido a través de:

$$\frac{P_o}{P} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (3.104)$$

Sabemos que $\rho = 1/v$ y utilizando la relación isentrópica $Pv^k = P_o v_o^k$, la relación entre la densidad de estancamiento y la densidad estática puede expresarse como:

$$\frac{P_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (3.105)$$

Cuando se utilizan las entalpías de estancamiento, no es necesario referirse explícitamente a la energía cinética. Entonces, el balance de energía $\dot{E}_{ent} = \dot{E}_{sal}$ de un dispositivo de flujo estacionario de entrada y salida, puede expresarse como:

$$q_{ent} + w_{ent} + (h_{01} + gz_1) = q_{sal} + w_{sal} + (h_{02} + gz_2) \quad (3.106)$$

Donde h_{01} y h_{02} son las entalpías de estancamiento en los estados 1 y 2, respectivamente. Cuando el fluido es un gas ideal con calores específicos constantes, la ec. 3.106 se representa como:

$$(q_{ent} - q_{sal}) + (w_{ent} - w_{sal}) = C_P(T_{02} - T_{01}) + g(z_2 - z_1) \quad (3.107)$$

Donde de igual manera, T_{01} y T_{02} son las temperaturas de estancamiento en los estados 1 y 2. Los términos de energía cinética no están representados explícitamente

en las ecs. 3.106 y 3.107; sin embargo, los términos de entalpía de estancamiento se encuentran incluyendo su contribución [7].

3.5. Ondas de Expansión de Prandtl-Meyer

Cuando un flujo supersónico fluye a través de una esquina convexa y se encuentra girando alrededor de él, se forma una onda de expansión como se muestra en la Fig. 3.9b. Sin embargo, cuando tenemos un flujo que fluye sobre una esquina cóncava y gira en sí mismo, se genera una onda de choque oblicua como se muestra en la Fig. 3.9a. Por lo tanto se puede establecer que las ondas de expansión son lo opuesto a las ondas de choque oblicuas.

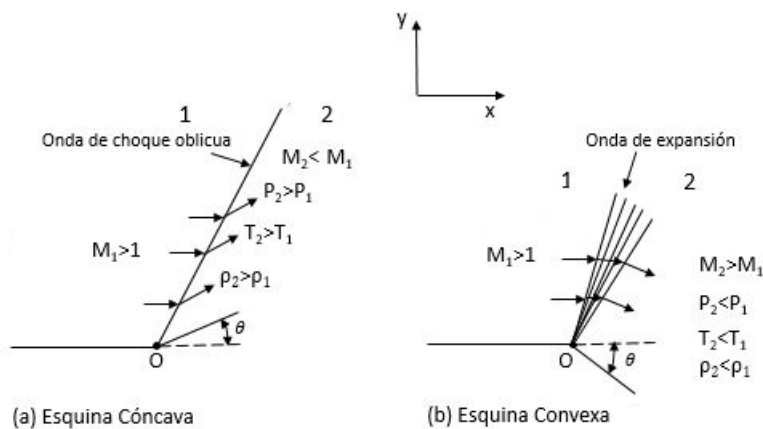


Figura 3.9: Comportamiento del flujo supersónico a lo largo de una esquina.

Analizando las Figs. 3.9a y 3.9b, se puede deducir lo siguiente:

1. Un flujo que atraviesa una esquina convexa sufrirá alteraciones infinitesimalmente pequeñas positivas, incrementando el número de Mach ($M_2 > M_1$).
2. El mismo flujo que atraviesa la esquina convexa, decrementará sus propiedades estáticas de presión, temperatura y densidad debido a una onda de expansión generada.

3. Caso contrario, un flujo que atraviesa una esquina cóncava sufrirá alteraciones infinitesimalmente pequeñas negativas, reflejándose en un decremento en el número de Mach ($M_2 < M_1$).
4. Ese mismo flujo que atraviesa la esquina cóncava, aumentará sus propiedades estáticas de presión, temperatura y densidad debido a una onda de choque oblicua generada.
5. La onda de expansión es una región de expansión continua compuesta de un número infinito de ondas de Mach limitado aguas arriba por μ_1 y aguas abajo por μ_2 (véase Fig. 3.10), donde $\mu_1 = \arcsin(1/M_1)$ y $\mu_2 = \arcsin(1/M_2)$, donde el término μ hace referencia al ángulo de Mach.
6. Las líneas de corriente a través de una onda de expansión son líneas curvas suaves. Así mismo, la onda de expansión ocurre a través de una sucesión continua de ondas de Mach, por lo que la expansión se considera isentrópica.

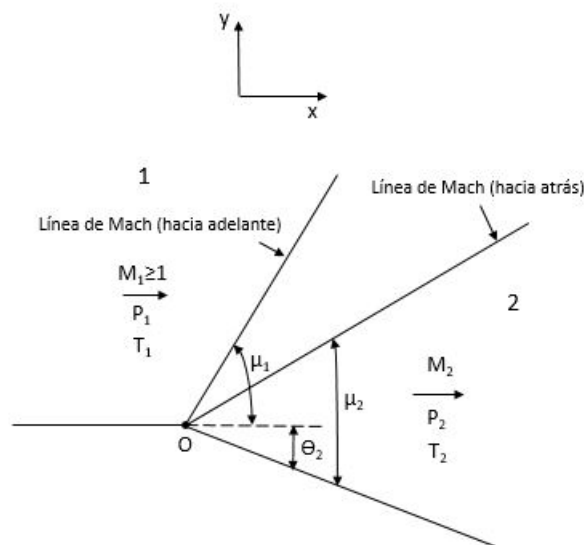


Figura 3.10: Expansión de Prandtl-Meyer.

Las ondas de expansión también son conocidas como ondas de expansión de Prandtl-Meyer. Para determinar las propiedades de éstas, el problema puede comenzar con propiedades establecidas M_1 , P_1 , T_1 y θ_2 (donde θ es la desviación de la

línea característica), entonces se pide calcular M_2 , P_2 y T_2 . Así mismo, cambios infinitesimalmente pequeños son considerados alrededor de una onda débil producida por una deflexión pequeña ($d\theta$), como se muestra en la Fig. 3.11.

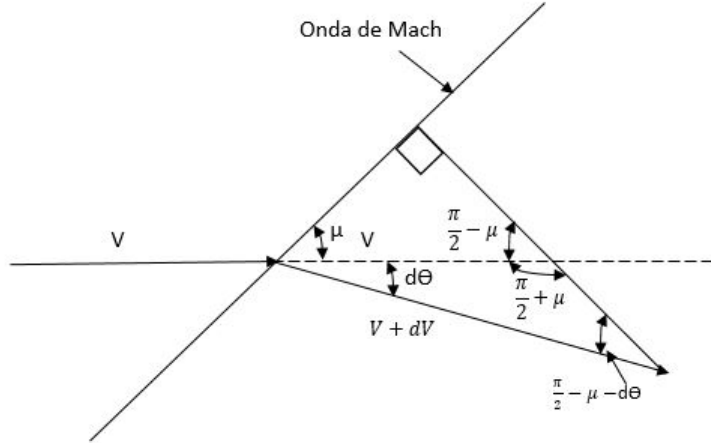


Figura 3.11: Representación geométrica de los cambios infinitesimales a través de una onda de Mach.

Mediante la Ley de Senos:

$$\frac{V + dV}{V} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\theta\right)} \quad (3.108)$$

Utilizando identidades trigonométricas:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = \cos \mu \quad (3.109)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu - d\theta\right) = \cos(\mu + d\theta) = \cos \mu \cos \theta - \sin \mu \sin d\theta \quad (3.110)$$

Sustituyendo las ecs. 3.109 y 3.110 en Ec. 3.108:

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu \cos \theta - \sin \mu \sin d\theta} \quad (3.111)$$

Para deflexiones pequeñas ($d\theta$) se asume que $\sin d\theta \approx d\theta$ y $\cos d\theta \approx 1$, entonces ec. 3.111 queda de la siguiente manera:

$$1 + \frac{dV}{V} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu - d\theta \sin \mu} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \mu} \quad (3.112)$$

Utilizando series de expansión:

$$1 + \frac{dV}{V} = 1 + d\theta \tan \mu + \dots \quad (3.113)$$

De la ec. 3.113 se obtiene:

$$d\theta = \frac{\frac{dV}{V}}{\tan \mu} \quad (3.114)$$

Utilizando la ecuación de onda de Mach:

$$\mu = \arcsin \frac{1}{M} \quad (3.115)$$

Puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (3.116)$$

Sustituyendo Ec. 3.116 en Ec. 3.114 se obtiene:

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad (3.117)$$

La Ec. 3.117 es la ecuación diferencial para el flujo de Prandtl-Meyer. Esta ecuación debe ser integrada sobre el ángulo completo θ_2 desde la región 1 a 2, quedando como resultado:

$$v(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}(M^2-1) - \arctan \sqrt{M^2-1} \quad (3.118)$$

La ec. 3.118 es denominada función de Prandtl-Meyer [2] y se representa con la letra v , la cual es derivada de la conservación de masa, ecuación de momentum y energía para deflexiones pequeñas [23].

3.6. Método de las Características

Actualmente el MOC nos permite diseñar la sección divergente de una tobera supersónica con las ventajas de una longitud reducida y rápida expansión de flujo para alcanzar el número de Mach deseado en la salida, sin embargo, es importante destacar que para que estas condiciones se lleven a cabo, la velocidad del flujo en la garganta debe de ser sónica.

Para comenzar se considera la ecuación gobernante de un flujo estable, adiabático, irrotacional y supersónico en dos dimensiones:

$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{\alpha^2}\right)\phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{\alpha^2}\right)\phi_{yy} - \frac{2\phi_x\phi_y}{\alpha^2}\phi_{xy} = 0 \quad (3.119)$$

En donde el símbolo ϕ representa la velocidad potencial total y α^2 viene de la velocidad del sonido y se encuentra establecida como: $\alpha^2 = (\partial P / \partial \rho)$, de igual manera no se tomarán en consideración las perturbaciones, por lo tanto las variables se renombran:

$$\phi_x = u \quad (3.120)$$

$$\phi_y = v \quad (3.121)$$

$$V = ui + vj \quad (3.122)$$

Sin embargo $\phi_x = f(x, y)$, entonces:

$$d\phi_x = \frac{d\phi_x}{\partial x}dx + \frac{d\phi_x}{\partial y}dy = \phi_{xx}dx + \phi_{xy}dy \quad (3.123)$$

$$d\phi_y = \frac{d\phi_y}{\partial x}dx + \frac{d\phi_y}{\partial y}dy = \phi_{xy}dx + \phi_{yy}dy \quad (3.124)$$

Las ecs. 3.119, 3.123 y 3.124 pueden ser tomadas como un sistema algebraico lineal y, utilizando la regla de Cramer, la solución para ϕ_{xy} queda de la siguiente manera:

$$\phi_{xy} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{\alpha^2} & 0 & 1 - \frac{v^2}{\alpha^2} \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{\alpha^2} & -\frac{2uv}{\alpha^2} & 1 - \frac{v^2}{\alpha^2} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} = \frac{N}{D} \quad (3.125)$$

Se establece que ϕ_{xy} es indeterminado a lo largo de las líneas características cuando el numerador y denominador se iguala a cero. Sin embargo, igualando únicamente a cero el denominador, nos permite calcular las ecuaciones de las líneas características:

$$\left(1 - \frac{u^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char}^2 + \left(\frac{2uv}{\alpha^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} + \left(1 - \frac{v^2}{\alpha^2}\right) = 0 \quad (3.126)$$

En la ec. 3.126 el término $(dy/dx)_{char}$ es la pendiente de la línea característica (el subíndice *char* hace referencia a línea característica). Utilizando la fórmula cuadrática, la ecuación anterior queda:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \frac{-\frac{uv}{\alpha^2} \pm \sqrt{\left[\frac{u^2 + v^2}{\alpha^2}\right] - 1}}{\left[1 - \frac{u^2}{\alpha^2}\right]} \quad (3.127)$$

La ecuación 3.127 puede ser más simplificada reescribiendo los términos:

$$u = V \cos \theta \quad (3.128)$$

$$v = V \sin \theta \quad (3.129)$$

Haciendo uso de la ecuación de onda de Mach (ec. 3.115) y realizando manipulaciones trigonométricas, tenemos:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \tan(\theta \pm \mu) \quad (3.130)$$

La ec. 3.130 establece que existen dos líneas características que pasan un punto C, como se muestra en la Fig. 3.12, por encima y debajo de la línea de corriente de acuerdo al signo de μ . Así mismo, la característica dada por el ángulo $\theta + \mu$ es llamada característica C_+ , mientras que la característica dada por el ángulo $\theta - \mu$ es llamada característica C_- .

variación de las propiedades del flujo a lo largo de las líneas características. Podemos observar que la ec. 3.132 es igual a la ec. 3.117, ecuación gobernante para el flujo de Prandtl-Meyer. La ec. 3.132 puede ser integrada para obtener la función de Prandtl-Meyer y por consiguiente encontrar las ecuaciones de compatibilidad de forma algebraica:

$$\theta + v(M) = K_- \quad (3.133)$$

$$\theta - v(M) = K_+ \quad (3.134)$$

Donde K_- y K_+ son constantes a lo largo de una línea característica y nos proporcionan la velocidad y dirección [3]. Las líneas características están en función de ambos ángulos. Para encontrar las pendientes y coordenadas de las líneas características, considérese un punto C en el espacio, el cual está determinado por la intersección de la línea característica positiva K_+ del punto B y la línea característica negativa K_- del punto A. Las líneas características, por exactitud, son asumidas líneas rectas entre puntos con pendientes de valores promedio. Como se muestra en la Fig. 3.13, las líneas características K_+ y K_- son trazadas como líneas rectas con un ángulo promedio S dado por:

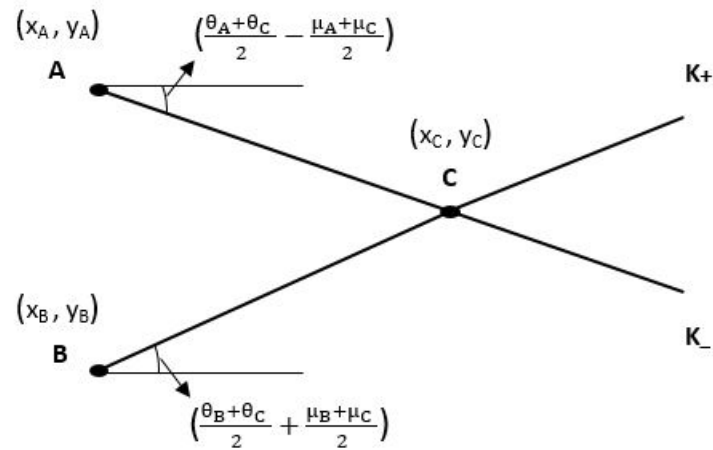


Figura 3.13: Intersección de las líneas características A y B. Donde el punto C recibirá las características de las líneas previas para estimar los puntos en los límites.

$$S_{K(-)} = \frac{(\theta_A - \mu_A) + (\theta_C - \mu_C)}{2} \quad (3.135)$$

$$S_{K(+)} = \frac{(\theta_B + \mu_B) + (\theta_C + \mu_C)}{2} \quad (3.136)$$

El establecer las líneas características como líneas rectas nos permite hacer uso de la teoría de la obtención de un punto a través de la intersección de dos rectas:

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \tan(S_{K(-)}) \quad (3.137)$$

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \tan(S_{K(+)}) \quad (3.138)$$

Despejando y_3 en cada ecuación:

$$y_3 = (x_3 - x_1) \tan(S_{K(-)}) + y_1 \quad (3.139)$$

$$y_3 = (x_3 - x_2) \tan(S_{K(+)} + y_2) \quad (3.140)$$

Por lo tanto, utilizando las ecuaciones (3.139) y (3.140), la ubicación del punto C donde sus coordenadas (x, y) , pueden ser calculadas a través de las siguientes ecuaciones:

$$x_C = -\frac{x_A \tan(S_{K(-)}) - x_B \tan(S_{K(+)} + (y_B - y_A)}{\tan(S_{K(-)}) - \tan(S_{K(+)})} \quad (3.141)$$

$$y_C = -\frac{(x_A - x_B) \tan(S_{K(-)}) \tan(S_{K(+)} + y_B \tan(S_{K(-)}) - y_A \tan(S_{K(+)}))}{\tan(S_{K(-)}) - \tan(S_{K(+)})} \quad (3.142)$$

3.7. Método de la Curva Paramétrica Bicúbica

El Método de la Curva Paramétrica Bicúbica (MCPB), es un método que nos permite obtener un diseño en la sección de entrada no para acelerar el flujo, sino para obtener una uniformidad y estabilidad para poder alcanzar un número de Mach igual a uno en la garganta de la tobera. Así mismo, obtener estas condiciones mencionadas anteriormente en la sección convergente, permitirá una eficiente expansión del flujo en la sección divergente por lo cual el flujo alcanzará a salir de la tobera con el número de Mach deseado.

Estudios han sido realizados para poder determinar el mejor método de diseño de la sección convergente que permita obtener todas las condiciones para un flujo uniforme, por ejemplo, con el Método de la Curva de Witoszynski (MCW). Sin embargo, se ha demostrado que el MCPB en comparación con el MCW, el primero permite alcanzar una velocidad mayor en la salida de la tobera, por lo que la geometría creada con este método contiene una cantidad menor de fluctuaciones respecto a la creada mediante MCW [26].

Para comenzar con el diseño de la sección convergente utilizando el MCPB, es

necesario establecer que este método es un conjunto de curvas con parámetro x_m , una variedad de curvas de contracción se pueden conseguir alterando la posición de este valor. Lo que permite básicamente es encontrar un punto de unión óptimo que permita la convergencia del flujo, esto entre la sección de entrada convergente y sección de garganta [13]. A continuación se establecen las ecuaciones para determinar el diseño de la sección convergente según diferentes condiciones establecidas:

Cuando $\frac{X}{L_c} \geq x_m$:

$$r_{pu} = \left(1 - \left(\frac{X}{L_c}\right)^3\right) \left[\frac{r_{conv} - r_{th}}{(1 - x_m)^2}\right] + r_{th} \quad (3.143)$$

Cuando $\frac{X}{L_c} \leq x_m$:

$$r_{pu} = \left(1 - \left(\frac{1}{x_m}\right)^2\right) \left(\frac{X}{L_c}\right)^3 (r_{conv} - r_{th}) + r_{th} \quad (3.144)$$

Aquí, las relaciones establecidas nos demuestran la posición vertical del punto de unión (r_{pu}). Así mismo, las definiciones de X , L_c , x_m , r_{conv} , r_{th} y r_{pu} se pueden encontrar en el glosario de este trabajo.

Con el objetivo de poder determinar el valor óptimo de x_m que permita un diseño de contracción el cual dé lugar a un flujo uniforme en la sección de salida convergente, se han realizado investigaciones, encontrándose en el trabajo de H. Watmuff [36] que éste valor se puede establecer entre 0.5 y 0.6 para poder obtener diseños con gran beneficios.

3.8. Dinámica de Fluidos Computacional

3.8.1. Historia

La Dinámica de Fluidos Computacional (CFD) es una rama de la dinámica de fluidos que permite llevar a cabo simulación de flujos reales mediante la solución numérica de las ecuaciones gobernantes de Navier-Stokes [29]. Por lo tanto, la Dinámica de

Fluidos computacional tiene como objetivo la búsqueda de soluciones numéricas de las diferentes ecuaciones diferenciales que rigen la teoría de flujo compresible, como lo son la ecuación de balance de energía, ecuación de momento y energía de fluidos en movimiento [8].

Los métodos experimentales han sido fundamentales para la validación y búsqueda de aproximaciones a las ecuaciones gobernantes, esto debido a su grado de complejidad, que para la mayoría de las aplicaciones no se puede obtener una solución analítica. Es por eso que las técnicas computacionales tienen como objetivo reemplazar las ecuaciones diferenciales gobernantes con sistemas de ecuaciones algebraicas mucho más fáciles de resolver [29].

Con la introducción de las computadoras en los años de 1960's, las CFD emergieron como un software que permitieron su uso las áreas de investigación y diseño de equipos de ingeniería. No obstante, hasta los años de 1970's se tuvieron disponibles comercialmente, lo que ha permitido convertirse en una herramienta potente para diversas áreas:

1. En el estudio de la hidrodinámica de barcos.
2. En plantas generadoras de energía, en las cuales permite el estudio de motores de combustión interna y turbinas de gas.
3. En equipos de enfriamiento que incluyen microcircuitos.
4. En flujos presentes dentro de dispositivos de flujo compresible como difusores y toberas.
5. En el estudio de la aerodinámica, especialmente enfocado en la sustentación y arrastre de aeronaves.
6. En el estudio de la hidrología y oceanografía, como flujo en ríos y océanos.
7. En cuestiones ambientales internas y externas de edificaciones, tales como la calefacción y ventilación.
8. En la ingeniería biomédica, como el flujo de sangre en venas y arterias [8].

Desde la década de 1960's hasta el día de hoy, la industria aeroespacial ha utilizado en sus procesos de diseño y manufactura la tecnología y ventajas que permite la utilización de softwares CFD, aplicándose directamente tanto en el diseño de motores de combustión y turbinas de gas, como en diversos componentes aeroespaciales e inclusive en el análisis de aeronaves [34].

Existen muchas ventajas sobre el uso de CFD los cuales llevadas a cabo a través del aumento de la potencia de rendimiento en el hardware de la computadora y sus decrecientes costos. En primer lugar el uso de la Dinámica de Fluidos Computacional permite estudiar aquellas variables críticas que afectan en gran medida a las ecuaciones gobernantes, esto permite obtener información de gran relevancia sobre aquéllos parámetros que tienen una gran influencia sobre las ecuaciones diferenciales y que no hubieran podido analizarse sin la introducción de ésta rama computacional. En segundo lugar permite complementar enfoques analíticos y experimentales al ofrecer un medio alternativo rentable para simular flujos de fluidos reales. Particularmente reduce los tiempos de entrega y costos en diseños y producción; así mismo, permite resolver problemas de flujo con rangos complicados. Por último, permite analizar simulaciones de condiciones de flujo con alto grado de peligro que no son posibles llevar a cabo experimentalmente, tal es el caso de escenarios de accidentes tanto químicos, biológicos como nucleares [32].

3.8.2. Etapas CFD

Cada software de CFD contiene códigos generados a partir de algoritmos numéricos que pueden resolver problemas relacionados con fluidos. Estos códigos son presentados mediante interfaces para poder ser más amigables con los usuarios que los manejan, en donde se puede realizar la introducción de los parámetros iniciales para poder obtener los resultados correspondientes. Los códigos CFD existentes hoy en día contienen tres etapas principales:

1. Pre-procesamiento: Consiste en la introducción de los parámetros correspondientes a un problema de fluidos, con el objetivo de poder resolver mediante algoritmos numéricos y obtener las respuestas pertinentes al problema

a través de la interface del programa [34]. Durante esta etapa, se realizan los siguientes pasos:

- a) Establecer el dominio computacional definiendo la geometría de la región a analizar, es decir, diseñar mediante CAD el modelo de interés.
 - b) Generación de la malla sobre el elemento diseñado en CAD. El objetivo del mallado es dividir el dominio general en pequeños subdominios, en los cuales se analizarán las ecuaciones de Navier-Stokes mediante algoritmos numéricos. Como resultado se obtendrán parámetros termodinámicos fundamentales en cada una de las celdas como: temperatura, presión, velocidad, entre otros. Este es uno de los pasos más importantes y en el cual se debe de invertir un poco más de tiempo durante el pre-procesamiento debido a que la calidad, forma y número de las celdas generadas determinarán la exactitud de los resultados finales.
 - c) Para realizar los cálculos numéricos y obtener respuestas pertinentes al problema del flujo de interés, es necesario declarar y asumir en la misma interface del software CFD, algunas características fundamentales del fluido como: viscoso/no viscoso, estado estacionario/estado transitorio, compresible/incompresible, entre otros. Así mismo, se establecen condiciones de frontera que puedan representar en gran medida el problema de fluido de una manera real para la obtención de su solución [33].
2. Procesamiento: Esta fase consiste en la solución numérica del problema a resolver. Existen tres técnicas de solución numérica: método de diferencia finita, método de elemento finito y método espectral. En relación al método de elemento finito, el cual es mayormente utilizado, se siguen los siguientes pasos:
- a) Se integran las ecuaciones fundamentales del flujo sobre todos los volúmenes de control del dominio, es decir, se integran las ecuaciones para todas aquellas celdas generadas en la etapa del mallado.
 - b) Se aplica una discretización sobre las integrales de las ecuaciones de Navier-Stokes, y se transforman en sistemas de ecuaciones algebraicas

para un mejor manejo y resolución.

- c) Se utilizan métodos iterativos para solucionar los sistemas de ecuaciones algebraicas y poder determinar los resultados óptimos. Algunos métodos con mayor frecuencia de uso son: TDMA (tri-diagonal matrix algorithm), SIMPLE algorithm y las técnicas iterativas de puntos de Gauss-Seidel.
3. Post-procesamiento: Los principales softwares existentes hoy en día poseen herramientas de visualización que nos permiten observar los resultados obtenidos con gran sencillez. Cada una de estas herramientas nos permiten visualizar de mejor manera las características físicas predominantes del problema de fluido establecido. Códigos CFD comerciales como ANSYS CFX, ANSYS FLUENT y STAR-CD incorporan herramientas visuales dentro de la interfaz de trabajo. Algunas de estas herramientas son:
- a) Gráficas X-Y: Gráfica bidimensional que representa la variación de una variable de transporte dependiente contra otra variable independiente. Este tipo de gráficas son utilizadas directamente para comparar datos numéricos con los valores experimentales obtenidos.
 - b) Gráficas Vectoriales: Gráfica que proporciona los medios en los cuales una cantidad vectorial se muestra en puntos discretos (velocidad) con flechas cuya orientación indica la dirección y tamaño la magnitud.
 - c) Gráficas de Contorno: Las gráficas de contorno son otra técnica efectiva que comúnmente se utiliza en los resultados de CFD. Una línea de contorno se puede describir como una línea que indica alguna propiedad que es constante en el espacio. A diferencia de las gráficas X-Y, las gráficas de contorno proporcionan una descripción del flujo encerrado en una vista [33].

3.8.3. Flujos turbulentos: Enfoques de modelado

Las simulaciones CFD para flujos turbulentos son más complejos y difíciles que los flujos laminares, incluso para los casos en donde el flujo se encuentra en estado

estacionario, esto debido a que las características más finas del campo de un flujo turbulento siempre son no estacionarias y, además, a lo largo de todas las direcciones del flujo turbulento, surgen estructuras aleatorias en forma de vórtice llamadas remolinos turbulentos. En algunas simulaciones numéricas CFD se suele utilizar una técnica llamada Simulación Numérica Directa (DNS por sus siglas en inglés), la cual consiste en resolver el movimiento no estacionario en todas las escalas del flujo turbulento. Sin embargo, debido a que la diferencia de tamaño y tiempo pueden ser de gran magnitud entre los remolinos turbulentos más pequeños y grandes y, conociendo que estas diferencias incrementan con el número de Reynolds, los cálculos mediante DNS se pueden volver más complicados. Es por esa razón que las simulaciones mediante DNS requieren una malla totalmente refinada así como enormes cantidades de tiempo y recursos computacionales.

La Simulación de Remolinos Grandes (LES por sus siglas en inglés) es otra de las técnicas utilizada para simulación de flujos turbulentos, la cual resuelve las características inestables más grandes de los remolinos turbulentos mientras que se modelan los remolinos turbulentos disipativos a pequeña escala. Se considera que los remolinos turbulentos más pequeños son isentrópicos, así como también independientes de la orientación del sistema de coordenadas y se comportan de una manera estadísticamente similar y predecible independientemente del campo de flujo turbulento. A diferencia de la técnica DNS, requiere de menor recursos computacionales debido a que se elimina la necesidad de resolver los remolinos más pequeños en el campo de flujo.

Otra de las técnicas de simulación es el modelo RANS, durante ésta no se intentan resolver las características inestables de los remolinos de turbulencia, incluso los más grandes. Se utilizan modelos matemáticos que consideran la mezcla y difusión causadas por los remolinos turbulentos. Para mayor simplicidad, se considera un flujo estable y flujo incompresible. Cuando se utiliza esta técnica, la ecuación de Navier-Stokes es reemplazada por la llamada ecuación de Navier-Stokes de número de Reynolds Promedio (RANS por sus siglas en inglés), la cual es establecida para un flujo estacionario, incompresible y turbulento:

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P' + \nu\nabla^2\vec{V} + \nabla \cdot (\tau_{ij}) \quad (3.145)$$

Donde el término $\vec{\nabla} \cdot \tau_{ij}$ hace referencia a las fluctuaciones turbulentas. El término τ_{ij} es conocido como Tensor de Esfuerzo Específico de Reynolds, llamado así debido a que actúa similar a la tensión viscosa. En coordenadas cartesianas, τ_{ij} se establece como:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (3.146)$$

Donde la línea arriba de los términos indica el tiempo promedio del producto de dos componentes de velocidad fluctuantes y los apóstrofes denotan los componentes fluctuantes de la velocidad. Debido a que el esfuerzo de Reynolds es simétrico, se agregan seis términos desconocidos adicionales, los cuales son modelados de diversas maneras utilizando los modelos de turbulencia [37].

3.8.4. Modelos de dos ecuaciones

Este tipo de ecuaciones necesitan al menos de dos variables para poder caracterizar de manera completa los flujos turbulentos (velocidad, escalas de longitud, entre otros). Los modelos de dos ecuaciones son los modelos completos más simples debido a que se utilizan dos modelos de transporte para caracterizar de manera independiente las dos variables del flujo turbulento [10].

3.8.5. Modelo $k - \epsilon$

El modelo estándar $k - \epsilon$ es el modelo utilizado ampliamente en el sector industrial, específicamente de flujo turbulento y transferencia de calor debido a su robustez, bajos recursos computacionales y exactitud de los resultados para diferentes tipos de flujos turbulentos. Se trata de un modelo semi-empírico ya que la ecuación de transporte para la disipación utilizada en el modelo se basa en consideraciones

fenomenológicas y empíricas. Contiene dos modelos de ecuaciones, uno para la energía cinética de turbulencia k y otro para la tasa de disipación viscosa ϵ . Para este modelo, la viscosidad turbulenta (eddy viscosity) se establece como:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.147)$$

Donde C_μ es una constante adimensional. El modelo $k - \epsilon$ utiliza las siguientes ecuaciones de transporte:

Para la energía cinética de turbulencia (k):

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k U) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \epsilon \quad (3.148)$$

Para la tasa de disipación viscosa (ϵ):

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \epsilon U) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.149)$$

En donde U hace referencia a la componente x de la ecuación de Reynolds y S_{ij} al componente de la velocidad de deformación. Así mismo, contienen cinco constantes ajustables (C_μ , σ_k , σ_ϵ , $C_{1\epsilon}$ y $C_{2\epsilon}$). Para el modelo $k - \epsilon$ los valores más utilizados para dichas constantes y, que más se adaptan a diferentes rangos de flujos turbulentos, son los siguientes:

$$C_\mu = 0,09 \quad \sigma_k = 1,00 \quad \sigma_\epsilon = 1,30 \quad C_{1\epsilon} = 1,44 \quad C_{2\epsilon} = 1,92 \quad (3.150)$$

Así mismo, las ecuaciones (3.148) y (3.149) se pueden interpretar como: la tasa de cambio de k o ϵ más el transporte de k o ϵ por convección es igual al transporte de k o ϵ por difusión más la tasa de producción de k o ϵ menos la tasa de destrucción de k o ϵ [35].

3.8.6. Modelo $k - \omega$

El modelo $k - \omega$ está basado en las ecuaciones de transporte para la energía cinética de turbulencia k y la tasa específica de disipación ω , la cual también se puede pensar como la relación de ϵ con k . Este modelo incorpora modificaciones para los efectos de bajos número de Reynolds y es aplicable para flujos cerca de la pared sin modificaciones adicionales. La viscosidad turbulenta (viscosidad de Eddy) está dada por:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (3.151)$$

La ecuación de transporte utilizada para la energía cinética de turbulencia k se establece como:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k U) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - \beta^* \rho k \omega \quad (3.152)$$

En donde $P_k = (2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij})$.

La ecuación de transporte para la tasa específica de disipación (ω):

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \omega U) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \nabla \omega \right] + \gamma_1 (2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3}\rho \omega \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij}) - \beta_1 \rho \omega^2 \quad (3.153)$$

En donde U es la componente x de la ecuación de Reynolds, σ_k , σ_ω , γ_1 , β_1 y β^* son constantes del modelo. Estas constantes se establecen como:

$$\sigma_k = 2,0 \quad \sigma_\omega = 2,00 \quad \gamma_1 = 0,553 \quad \beta_1 = 0,075 \quad \beta^* = 0,09 \quad (3.154)$$

las ecuaciones (3.153) y (3.154) se pueden interpretar como: la tasa de cambio de k o ω más el transporte de k o ω por convección es igual al transporte de k o ω por difusión turbulenta más la tasa de producción de k o ω menos la tasa de destrucción

de k o ω [35].

4. Método y estudio teórico

4.1. Formulación teórica

Para llevar a cabo el análisis teórico de la toberas, previamente se deben de conocer algunas de las propiedades en la sección de entrada y salida de los diferentes dispositivos que componen el motor. Para esto, se llevó a cabo el análisis del motor a reacción en su totalidad utilizando las ecuaciones presentadas en el capítulo anterior, específicamente de la sección 3.4. Así mismo, para fines de simplificación y de tomar en consideración aquellas variables de interés que tienen un impacto significativo, se establecieron las siguientes suposiciones:

1. Calores específicos variables (fueron utilizadas las entalpías para realizar los cálculos).
2. Constante de calores específicos para un gas ideal $k = 1.4$.
3. Compresión isentrópica en el compresor.
4. Difusor isentrópico.
5. Expansión isentrópica en turbina.
6. Tobera isentrópica.
7. Flujo másico no variable, es decir, no se considera la adición de combustible.

Como se observa, se consideró un motor en condiciones isentrópicas, es decir, un motor en condición ideal. Los cálculos fueron realizados utilizando software EES, así como los parámetros que se presentan en el cuadro 4.1.

Cuadro 4.1: Parámetros utilizados para la formulación teórica.

Parámetro	Valor
Área de entrada al compresor (m)	$2.206 \times 10^{-3} m^2$
Constante calores específicos k	1.4
Densidad del fluido (kg/m^3)	1.225
Flujo másico calculado (kg/s)	0.06756
Constante de los gases universales R (J/kgK)	287
Velocidad de entrada (m/s)	25
Presión de entrada al motor (Pa)	94430
Temperatura de entrada al motor (K)	298.2

Se obtuvieron las condiciones de entrada y salida para cada uno de los dispositivos del motor. Sin embargo, en el cuadro 4.2 se muestran los resultados obtenidos únicamente para la sección de la tobera.

Cuadro 4.2: Parámetros termodinámicos, velocidad y número de Mach obtenidos teóricamente en la sección de la tobera.

	Entrada	Salida
Parámetro	Resultado	Resultado
V (m/s)	25	284.62
T (K)	828.9	792.7
P (Pa)	118473	94430
M	0.04332	0.5043

4.2. Tobera convergente

4.2.1. Modelado geométrico y simulación numérica

El modelo geométrico inicial está basado en la tobera convergente que actualmente se utiliza en el motor. El modelo 3D fue realizado con ayuda de SolidWorks como se observa en la Figura 4.1, y el análisis numérico se llevó a cabo con el mismo software utilizando la herramienta de Flow Simulation.

La tobera consta de una longitud total de 0.121 metros con un diámetro exterior de entrada de 0.05 metros. Así mismo, cuenta con un espesor de 0.002 metros y un diámetro de salida de 0.032 metros. La sección de salida tiene un ángulo de inclinación de aproximadamente 30 grados con respecto a la sección de entrada. Como se observa en la imagen, se trata de una tobera convergente ya que la sección de salida se reduce y no existe una sección divergente adicional.

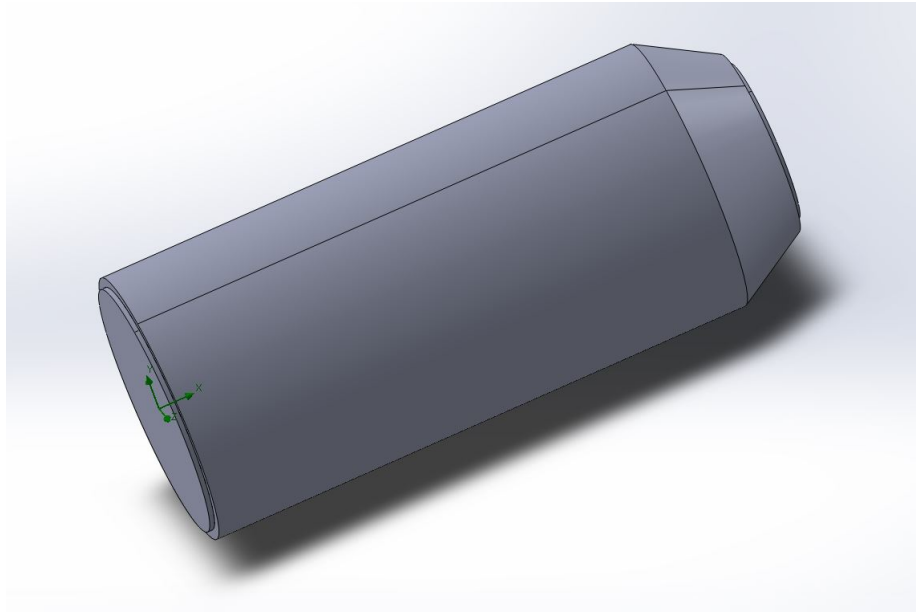


Figura 4.1: Modelo 3D en SolidWorks de la tobera convergente.

4.2.1.1 Condiciones de operación

La tobera convergente fue simulada utilizando los parámetros establecidos en el Cuadro 4.3. Se utilizó la presión y temperatura obtenidos en el análisis del motor en la sección de salida de la turbina (entrada de la tobera) así como también una velocidad de 25 m/s similar a la de entrada debido a las suposiciones ideales. Así mismo, se consideró una velocidad de salida de 284.62 m/s igual a la obtenida en la formulación teórica para esta tobera.

Cuadro 4.3: Parámetros de operación de la tobera.

Parámetro	Valor
Velocidad de entrada en la tobera (m/s)	25
Velocidad de salida de la tobera (m/s)	284.62
Presión de entrada en la tobera (Pa)	118473
Temperatura de entrada en la tobera (K)	828.9

4.2.1.2 Modelo de turbulencia seleccionado

Se consideró el modelo de turbulencia $k - \epsilon$ propuesto por Lam y Bremhorst [19], el cual describe flujos de transición de fluidos homogéneos, tanto laminar como turbulentos. También, se utilizó un algoritmo para flujos con $M < 3$. En dicho algoritmo se utilizan las aproximaciones temporales implícitas de la ecuación de continuidad junto con una técnica de división de operadores, la cual es utilizada para resolver eficazmente el problema de desacoplamiento velocidad-presión. Además, utilizando un procedimiento numérico para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes similar al SIMPLE, se deriva una ecuación de presión discreta de tipo elíptico mediante transformaciones algebraicas de las ecuaciones discretas derivadas originalmente para masa y momentum, considerando las condiciones de frontera de no deslizamiento para la velocidad.

4.2.1.3 Condiciones de frontera

Para las condiciones de frontera declaradas, se consideró en la entrada de la tobera la presión de estancamiento y la temperatura que se mencionan en el Cuadro 4.3. El fluido utilizado por defecto fue aire como gas ideal con un flujo tanto laminar como turbulento. Se declaró que las paredes son lisas y sin deslizamiento, adiabática y sin rugosidad. En la sección de salida se estableció una velocidad de 284.62 m/s como se observa nuevamente en el Cuadro 4.3. En la Figura 4.2 se muestra la localización de las diferentes condiciones de frontera declaradas.

Para la configuración del análisis numérico se declaró aire como gas ideal, así como un flujo laminar y turbulento y un análisis de tipo interno. Se puede encontrar más información sobre la configuración de la simulación del flujo CFD en el Cuadro 4.4.

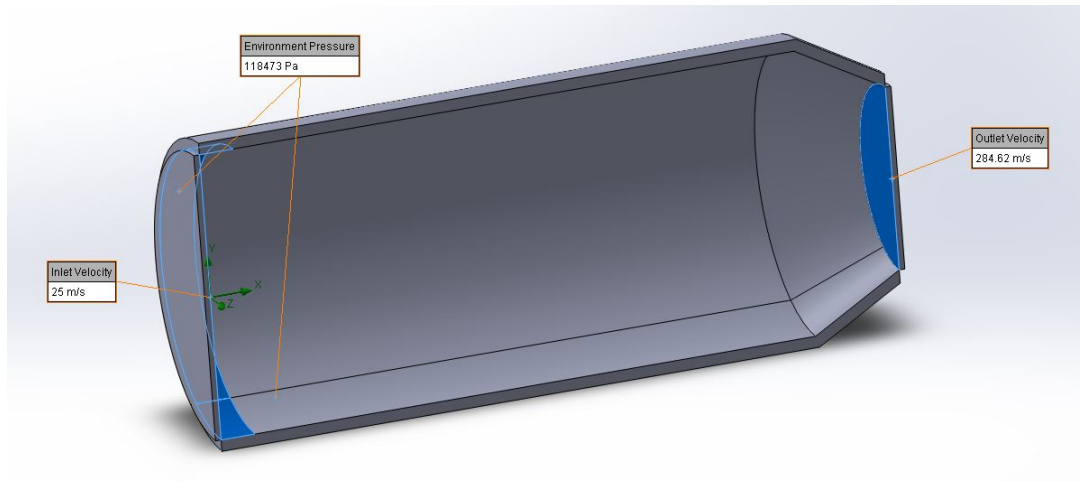


Figura 4.2: Condiciones de frontera tobera convergente.

Cuadro 4.4: Configuración Flow Simulation CFD.

Tipo de análisis	Interno	CAD Booleano
Fluido predeterminado	Gas ideal: aire	Tipo de flujo laminar y turbulento
Condiciones de pared	Pared adiabática	0 μm de rugosidad
Condiciones iniciales y ambientales	Presión de 118 473 Pa	Temperatura de 828.9 K
Condiciones de frontera	Velocidad de entrada 25 m/s	Velocidad de salida 284.62 m/s
Inicio del cálculo	Configuración predeterminada	

4.2.1.4 Mallado

El mallado utilizado fue predeterminado por Flow Simulations, el cual genera celdas basadas en coordenadas cartesianas, las cuales poseen diversas ventajas como:

1. Velocidad y solidez del algoritmo de generación de mallado.
2. Minimización de errores de truncado local.
3. Sólides en el esquema diferencial.

Para este trabajo se empleó un mallado automático predeterminado por Flow Simulations, con un nivel inicial de malla de valor 7 (refinado) con un tamaño mínimo de espacio entre los parámetros de la malla global de $24.49 \times 10^{-3} \text{m}$; cabe resaltar que éste parámetro se utiliza para especificar dónde se detectan los espacios entre el sólido y el fluido. Éste parámetro es determinado por el mismo software y, para su cálculo, se utiliza información del modelo en general como: sus dimensiones, dominio computacional y las caras en donde se establecieron las condiciones de frontera. Esta malla fue probada con fluidez y no surgieron reportes de errores

críticos sobre la misma. La simulación con configuración predeterminada convergió correctamente en la iteración 97 después de 1 minuto con 19 segundos con un número de celdas totales de 52556. El mallado cartesiano utilizado sobre la tobera convergente se muestra en la Figura 4.3.

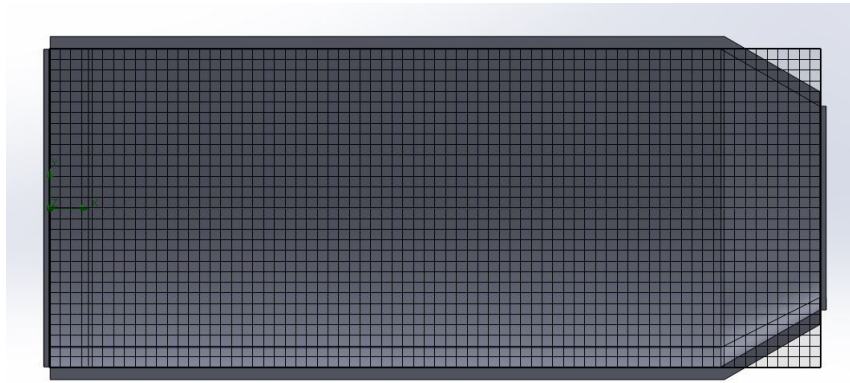


Figura 4.3: Malla cartesiana generada por Flow Simulations sobre la tobera convergente.

4.3. Tobera supersónica

Haciendo uso de las ecuaciones mencionadas en el capítulo anterior, específicamente de las secciones 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7, se llevó a cabo la creación de un programa en excel para la solución de la teoría de flujo compresible, mediante las diferentes ecuaciones establecidas en dichos capítulos. El programa funciona introduciendo diversos parámetros de entrada, iterando en cada uno de ellos y dando como resultado final el contorno de tobera óptimo para alcanzar el número de Mach de salida deseado, tal como se muestra en la Figura 4.4.

DATOS DE ENTRADA					
RADIO DE ENTRADA SECCIÓN CONVERGENTE	0.024125	METROS (m)			
NÚMERO DE MACH SECCIÓN CONVERGENTE	0.043319554	ADIMENSIONAL			
NÚMERO DE MACH SECCIÓN GARGANTA	1	ADIMENSIONAL	CONSTANTE DE LOS GASES IDEALES	287	J/KgK
NÚMERO DE MACH SECCIÓN DIVERGENTE	1.8	ADIMENSIONAL	TEMPERATURA DE ESTANCAMIENTO	828.9	KELVIN (K)
PRESIÓN DE ESTANCAMIENTO	118473	PASCAL (Pa)	RELACIÓN DE CALORES ESPECÍFICOS DEL FLUIDO	1.4	ADIMENSIONAL

RESULTADOS				
	SECCIÓN CONVERGENTE	SECCIÓN GARGANTA	SECCIÓN DIVERGENTE	
AREA	0.0018	0.0001	0.0002	(m ²)
RELACIÓN DE ÁREAS	13.3740	-	1.4390	ADIMENSIONAL
PRESIÓN	118317.5042	62587.1282	20619.07414	(Pa)
TEMPERATURA	828.5890	690.7500	502.9733	(K)
VELOCIDAD	24.9953	526.8238	809.1889	(m/s)
DENSIDAD	0.4975	0.3157	0.1428	(kg/m ³)
RADIO DE LA SECCIÓN	0.0241	0.0066	0.0079	(m)
DIÁMETRO DE LA SECCIÓN	0.04825	0.013	0.0158	(m)
FLUJO MÁSIICO	0.0227	0.0227	0.0227	(kg/s)
LONGITUD	0.042460	-	0.0126	(m)
		LONGITUD TOTAL DE LA TOBERA	0.055105	(m)

Figura 4.4: Tobera creada mediante la teoría de flujo compresible, MOC y el MCPB. En la figura se observan los resultados teóricos para la tobera de Mach 1.8 en cada una de sus secciones: entrada, garganta y salida.

El programa fue creado incluyendo un modelo matemático perteneciente a la teoría de flujo compresible y fusionando tanto el método de las Características como el método de la Curva Paramétrica Bicúbica. Para el MOC se utilizan diez líneas características con el objetivo de deducir la geometría de la sección divergente de la tobera supersónica haciendo uso de los parámetros del Cuadro 4.5 y empleando las ecuaciones pertinentes de la sección 3.6. En cuestión de la sección convergente, el método de la Curva Paramétrica Bicúbica es utilizada obteniendo previamente del trabajo realizado por H. Watmuff [36] diferentes parámetros importantes como L_c/D_c (donde D_c es el diámetro de la sección convergente) y x_m para la solución de las ecuaciones descritas en la sección 3.7. Estos parámetros establecidos nos permitirán obtener un diseño con gradientes de presión favorables en las paredes de la sección convergente, tal que, será posible alcanzar un número de Mach de 1 en la garganta y un flujo uniforme en la salida de la sección divergente. Una vez obtenida la longitud

de la sección convergente, se calculó la posición del punto de unión β con coordenadas (X, r_{pu}) , que representa el punto recomendado donde se deben unir dos arcos para generar el perfil del contorno. Se utilizó la función coseno $\cos(\pi Q/Lc)$, donde Q es una variable que varía desde la entrada de la sección convergente hasta el inicio de la sección de garganta. Esta función permite obtener un perfil de contorno suavizado en la parte superior del área convergente acercándose el punto de unión β para alcanzar una velocidad sónica en la sección de garganta (Véase Fig.4.5).

Cuadro 4.5: Parámetros tobera supersónica de Mach 1.8

Parámetro	Valor
Radio de entrada sección convergente (m)	0.024125
Número de Mach sección convergente	0.043319554
Número de Mach sección garganta	1
Número de Mach sección divergente	1.8
Presión de Estancamiento (Pa)	118473
Temperatura de Estancamiento (K)	828.9
Constante de los Gases Ideales ($\frac{J}{kgK}$)	287
Razón de Calores Específicos	1.4

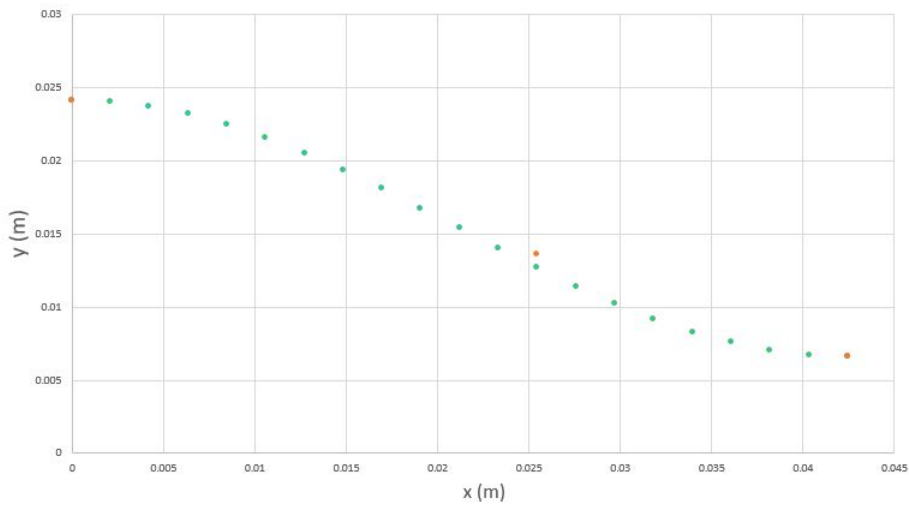


Figura 4.5: Perfil de la sección convergente obtenida mediante el MCPB (puntos naranjas) y utilizando una función coseno, se obtuvieron los puntos verdes para su aproximación.

Para el presente trabajo se propuso crear una tobera supersónica de Mach 1.8, con el objetivo de poder cumplir positivamente con la hipótesis. El diseño final obtenido por el programa, haciendo uso tanto del modelo matemático como el MOC y el MCPB es mostrado en la Figura 4.6.

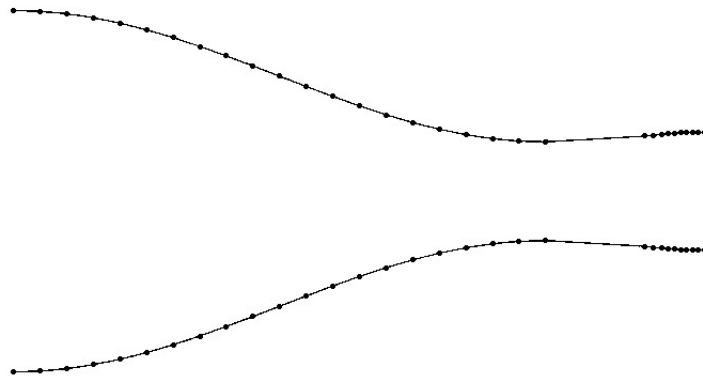


Figura 4.6: Tobera supersónica de Mach 1.8 obtenida mediante el programa creado.

4.3.1. Modelado geométrico y simulación numérica

El contorno que genera el programa está compuesto de diferentes puntos que contienen coordenadas (x, y) , los cuales fueron llevados a SolidWorks para generar la geometría 3D como se muestra en la Figura 4.7.

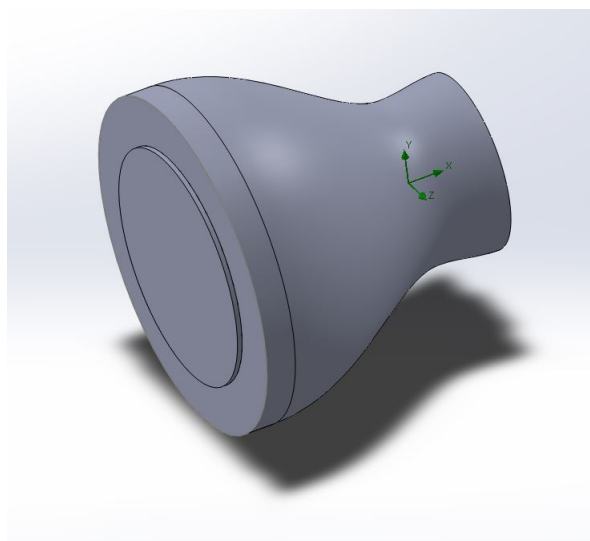


Figura 4.7: Tobera supersónica de Mach 1.8 en 3D creada a través de SolidWorks.

La tobera generada consta de una longitud total de 0.061 con un diámetro exterior de entrada de 0.05. Así mismo, cuenta con un espesor de 0.01 y un diámetro de salida de 0.02. Como se observa en la Figura 4.7, se trata de una tobera supersónica ya que posee una sección convergente y adicionalmente una sección divergente para la aceleración del fluido.

4.3.1.1 Condiciones de operación

La tobera fue simulada utilizando los parámetros establecidos en el Cuadro 4.6. Nuevamente se utilizó la presión y temperatura obtenidos en la formulación teórica, específicamente en la sección de salida de la turbina (entrada de la tobera). Así mismo se consideró una velocidad de entrada de 25 m/s y un número de Mach de salida de 1.8.

Cuadro 4.6: Parámetros de operación de la tobera supersónica.

Parámetro	Valor
Velocidad de entrada en la tobera (m/s)	25
Número de Mach de salida de la tobera (M)	1.8
Presión de entrada en la tobera (Pa)	118473
Temperatura de entrada en la tobera (K)	828.9

Como modelo de turbulencia, nuevamente se consideró el modelo de turbulencia $k - \epsilon$ propuesto por Lam y Bremhorst [19], para flujos de transición de fluidos homogéneos, tanto laminar como turbulentos.

4.3.1.2 Condiciones de frontera

En cuestión de condiciones de frontera, se consideró en la entrada de la tobera la presión de estancamiento y la temperatura que se mencionan en el Cuadro 4.3, así como también una velocidad de entrada de 25 m/s . El fluido de trabajo se estableció el aire como gas ideal con un flujo tanto laminar como turbulento. Se declaró que las paredes son adiabáticas y sin rugosidad. En la sección de salida se estableció un número de Mach de 1.8 como se muestra en el Cuadro 4.3. En la Figura 4.8 se muestra la localización de las diferentes condiciones de frontera declaradas.

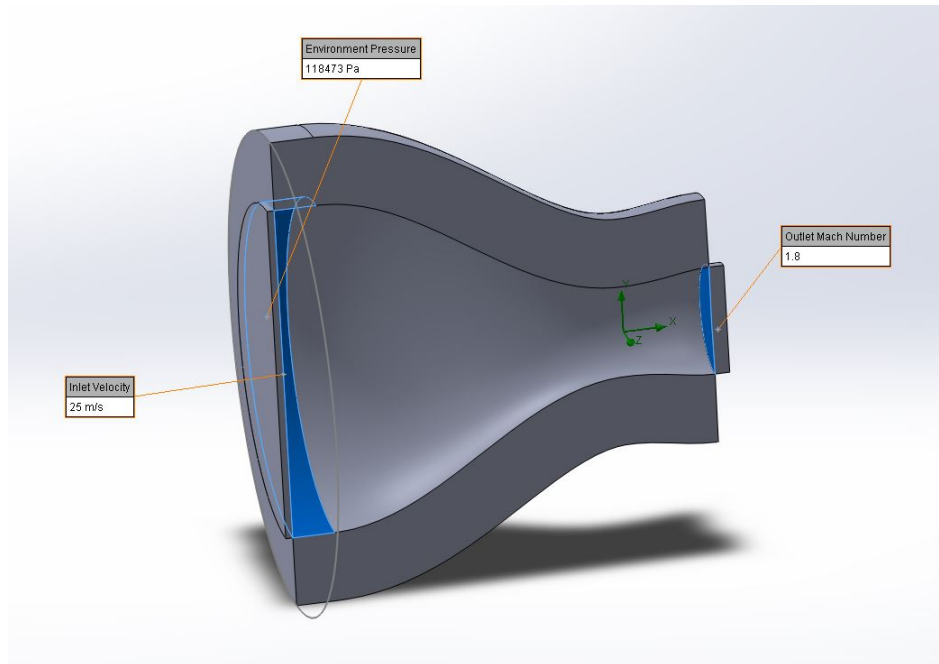


Figura 4.8: Condiciones de frontera tobera convergente. La zona gris de la sección superior e inferior representan un espesor de 0.01 m .

Para la configuración del análisis numérico se declaró aire como gas ideal, así como un flujo laminar y turbulento y un análisis de tipo interno. Se puede encontrar más información sobre la configuración de la simulación del flujo CFD en el Cuadro 4.7.

Cuadro 4.7: Configuración Flow Simulation CFD.

Tipo de análisis	Interno	CAD Booleano
Fluido predeterminado	Gas ideal: aire	Tipo de flujo laminar y turbulento
Condiciones de pared	Pared adiabática	$0\ \mu\text{m}$ de rugosidad
Condiciones iniciales y ambientales	Presión de $118\ 473\ \text{Pa}$	Temperatura de $828.9\ \text{K}$
Condiciones de frontera	Velocidad de entrada $25\ \text{m/s}$	Número de Mach de salida de 1.8
Inicio del cálculo	Configuración predeterminada	

4.3.1.3 Mallado

De la misma manera que en la tobera convergente, el mallado utilizado fue predeterminado por Flow Simulations, el cual genera celdas basadas en coordenadas cartesianas. De igual forma, para este trabajo se empleó una malla global predeterminada por el mismo software, con nivel inicial de malla de valor 7 y un tamaño mínimo de espacio entre los parámetros de la malla global de $15.78 \times 10^{-3} \text{m}$. Esta malla fue probada con fluidez y no surgieron reportes de errores críticos sobre la misma. La simulación con configuración predeterminada convergió correctamente en la iteración 163 después de 2 minutos con 5 segundos con un número de celdas totales de 78902. El mallado cartesiano utilizado en esta ocasión se muestra en la Figura 4.9.

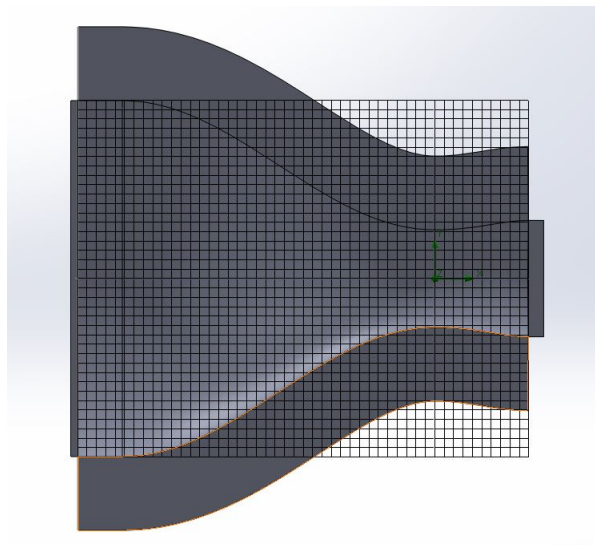


Figura 4.9: Malla cartesiana generada por Flow Simulations sobre la tobera supersónica.

4.4. Validación del modelo

Para validar el modelo matemático, se realizó una comparación entre los resultados del modelo matemático presentado en este estudio y los datos técnicos (Cuadro 4.8) del túnel de viento supersónico, AF300 [30]. El túnel de viento cuenta con instrumentación confiable para la medición adecuada de la distribución de presión a lo largo de una tobera convergente-divergente. Permite la comparación entre las

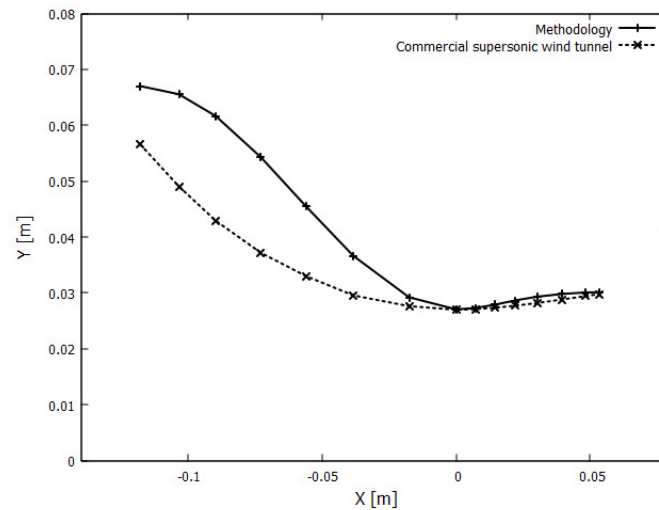
proporciones reales de la tobera y el área teórica a velocidades supersónicas con una forma geométrica similar.

La comparación entre los resultados de las relaciones de área y M obtenidos del modelo matemático y los datos de las pruebas en el túnel supersónico AF300 [30] en la sección divergente se muestran en el Cuadro 4.8. Se puede observar que los errores porcentuales entre los números de Mach medidos en las secciones del túnel de viento AF300 y los obtenidos numéricamente a través del MOC y MCPB son bajos. A medida que aumenta la relación de áreas de la sección divergente, el número de Mach también aumenta, de acuerdo con la teoría de que la presión disminuirá en secciones divergentes con un área mayor.

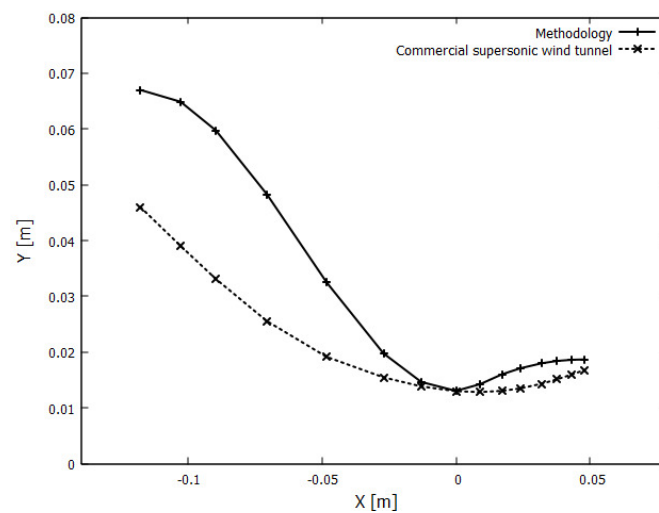
Cuadro 4.8: Resultados de la comparación entre el modelo matemático desarrollado y los datos obtenidos mediante pruebas del túnel supersónico AF300 [30], en la sección divergente.

Túnel Supersónico AF300		Modelo matemático		Error
A/A^*	M	A/A^*	M	Error número de Mach (%)
1.03044	1.2	1.03044	1.2001	0.008
1.11493	1.4	1.11493	1.4007	0.05
1.25024	1.6	1.25024	1.6023	0.143
1.43898	1.8	1.43898	1.8059	0.327
1.6875	2	1.68750	2.0106	0.53

La comparación del diseño experimental del AF300 con los métodos desarrollados en este trabajo mediante el modelo matemático se muestra esquemáticamente en la Fig. 4.10a para $M=1.4$, mientras que en la Fig. 4.10b corresponde a $M=1.8$. Se realizó un estudio de correlación de Pearson PCC y se obtuvo el error cuadrático medio RMSE con quince puntos, se obtuvo un PCC=0.9494 y 0.9728 para $M=1.4$ y 1.8, respectivamente. Además, el error cuadrático medio es RMSE=0.009 m y 0.013 m, respectivamente, para $M=1.4$ y $M=1.8$.



(a)



(b)

Figura 4.10: Comparación entre diseños de tobera. En la subfigura (a) comparación del diseño para $M=1.4$ y (b) comparación del diseño para $M=1.8$. [30]. Las líneas discontinuas corresponden al túnel de viento supersónico AF300 y las continuas a las geometrías obtenidas con la metodología presentada en este trabajo.

Se realizó una validación adicional entre el modelo actual y los resultados de CFD informados por Patel et al. [25] y Zhang et al. [38]. Los diseños generados por nuestra metodología respecto a estos trabajos se muestran en las Fig. 4.11 y 4.12, respectivamente. Además, la Fig. 4.13 muestra el diseño de la tobera de $M=0.01$ en la entrada obtenido por Zhang et al. [38], que es similar en la garganta a la Fig. 4.12.

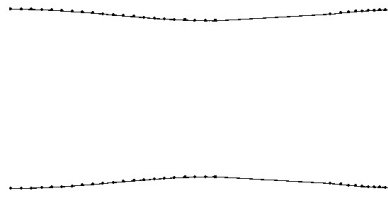


Figura 4.11: Reproducción del diseño de tobera reportado por Patel et al. [25] para $M=1.66$ siguiendo el proceso utilizado en este trabajo, utilizando el MOC y el MCPB. Los puntos sobre las curvas indican las coordenadas que forman la geometría de la tobera.

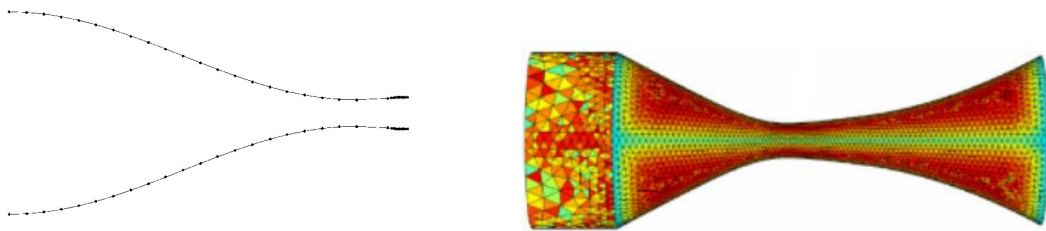


Figura 4.12: Aproximación del diseño de Zhang et al. [38] para $M=0.01$ en la entrada, obtenido utilizando el MOC y MCPB. **Figura 4.13:** Diseño reportado por Zhang et al. [38] para $M=0.01$ en la entrada. El gas se mueve de izquierda a derecha.

La comparación entre los resultados analíticos y numéricos del modelo matemático del trabajo de Patel et al. [25] se muestra en el Cuadro 5.2. Por otro lado, en los Cuadros 5.3 y 5.4, la comparación entre los resultados analíticos y numéricos reportados por Patel et al. [25] y los obtenidos con el presente modelo son mostrados. Además, se utilizó el error más estricto para obtener el error porcentual de los resultados, obteniendo la diferencia de los valores y dividiendo el resultado por el menor.

5. Análisis de Resultados

5.1. Resultados validación del modelo

Las Figuras 5.1a y 5.1b muestran los contornos obtenidos mediante la simulación numérica de velocidad y densidad realizada con nuestra metodología, respectivamente; donde se puede observar que la velocidad de la tobera alcanza un valor de 494.972 m/s en la salida, mientras que la densidad un valor de 7.23 kg/m^3 en la entrada. Por otra parte, las Figs. 5.2a,5.2b muestran los campos de velocidad y densidad para la tobera producida por Zhang et al. [38]. La velocidad máxima en la salida que alcanza su tobera es de aproximadamente 500 m/s . A su vez, la densidad en la entrada es de 7 kg/m^3 , lo que representa un error entre los valores de las simulaciones numéricas de 1.015% para velocidades y 3.285% para densidades, cuando se compara con los resultados presentados en este trabajo.

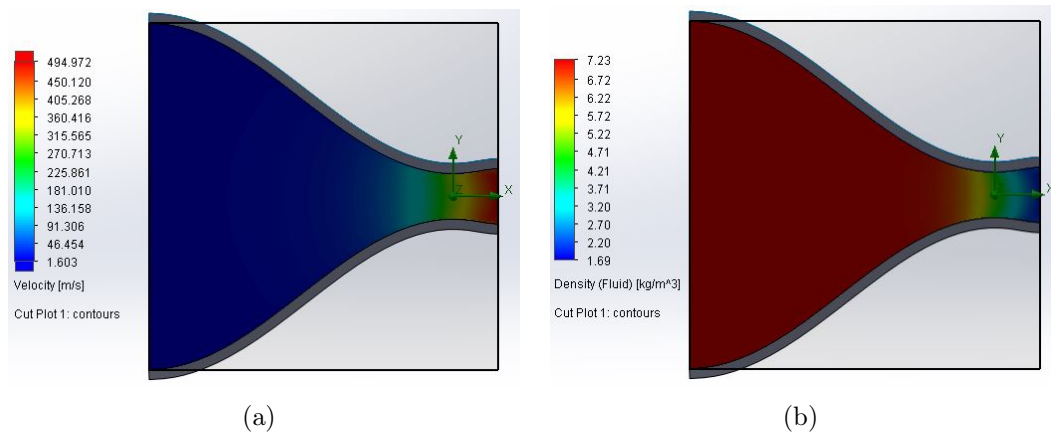


Figura 5.1: Resultados obtenidos con la presente metodología. En la subfigura (a) se muestra el contorno de velocidad, y en (b) el contorno de densidad. La velocidad alcanza un valor máximo de hasta 494.972 m/s , mientras que para la densidad en la entrada es de hasta 7.23 kg/m^3 (como se observa en las figuras).

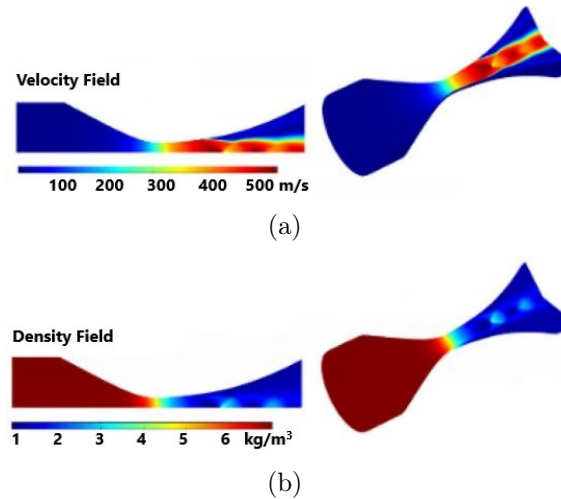


Figura 5.2: Resultados obtenidos por Zhang et al. [38]. En la subfigura (a) se muestra el campo de velocidad, y en (b) el campo de densidad. La velocidad máxima alcanzada es de 500 m/s , mientras que la densidad en la entrada es de hasta 7 kg/m^3 (como se observa en las figuras).

En el cuadro 5.1 se comparan los resultados analíticos y numéricos del trabajo de Zhang et al. [38] con los resultados obtenidos en este trabajo. Se recalcularon los datos y se encontraron parámetros como T , P y M para cada sección de la tobera utilizando el modelo matemático. Se puede observar que los resultados analíticos y numéricos del trabajo de Zhang et al. [38] no difieren significativamente entre sí, presentando un error máximo para el M de hasta 1.17% en la sección de la garganta.

Cuadro 5.1: Comparación de los resultados analíticos y numéricos del modelo matemático con datos de Zhang et al. [38] (*). Algunos datos no fueron proporcionados por Zhang et al. [38] pero fueron calculados en este trabajo.

Parámetro	Entrada			Garganta			Salida		
	Analítico	Numérico	Error (%)	Analítico	Numérico	Error (%)	Analítico	Numérico	Error (%)
$V \text{ (m/s)}$	3.4311	3.3932	1.116	313.219	310.203	0.972	485.638	489.92	0.881
$T \text{ (K)}$	292.994*	293	0.002	244.166	245.184	0.416	175.606	177.56	1.112
$P \text{ (kPa)}$	607.9*	607.9	0	321.1	324.1	0.934	101.3	101.6	0.296
M	0.01*	0.0098	1.112	1	0.9885	1.163	1.828	1.835	0.382

Como se ve en el Cuadro 5.2, los errores de los resultados obtenidos numérica y analíticamente a través del modelo matemático difieren ligeramente, encontrándose que el parámetro con mayor diferencia es la temperatura (6.1%) y se presenta en la sección de la garganta.

Cuadro 5.2: Comparación de los resultados analíticos y numéricos del modelo matemático para el artículo de Patel et al. [25]. Estos datos fueron recalculados en este trabajo.

Parámetro	Entrada			Garganta			Salida		
	Analítico	Numérico	Error (%)	Analítico	Numérico	Error (%)	Analítico	Numérico	Error (%)
V (m/s)	172.633	174.653	1.170	316.938	318.251	0.414	462.754	477.229	3.128
T (K)	285.165	299.987	5.197	250.0	265.270	6.108	193.408	204.925	5.954
P (kPa)	1674	1682	0.477	1056	1084	2.651	430.2	425.6	1.080
M	0.51	0.5031	1.371	1	0.9749	2.574	1.66	1.663	0.18

En el cuadro 5.3 se muestra la comparación entre los resultados analíticos de Patel et al. [25] con los resultados analíticos del presente trabajo. El error máximo fue del 2.53% presentado en la temperatura, en la sección de la garganta. Una comparación entre los resultados numéricos de Patel et al. [25] con los datos numéricos obtenidos en el presente trabajo se presenta en el cuadro 5.4. Aquí se observa una desviación mayor; sin embargo, los resultados numéricos de la metodología propuesta concuerdan mejor con los resultados analíticos que los numéricos de Patel et al. [25].

Cuadro 5.3: Comparación analítica entre los resultados reportados por Patel et al. [25] y los obtenidos mediante la metodología planteada en este trabajo.

Parámetro	Entrada			Garganta			Salida		
	Patel et al. [25]	Modelo	Error (%)	Patel et al. [25]	Modelo	Error (%)	Patel et al. [25]	Modelo	Error (%)
V (m/s)	172.754	172.633	0.07	320.717	316.938	1.192	462.774	462.754	0.004
T (K)	285.567	285.165	0.14	256.326	250.0	2.53	193.425	193.408	0.008
P (kPa)	1680	1674	0.358	1050	1056	0.571	430	430.2	0.046
M	0.51	0.51	0	1	1	0	1.66	1.66	0

Cuadro 5.4: Comparación numérica entre los resultados reportados por Patel et al. [25] y los obtenidos en el presente trabajo. El parámetro M fue estimado para el trabajo de Patel et al. [25] para cada sección de la tobera, utilizando las ecuaciones apropiadas del modelo matemático.

Parámetro	Entrada			Garganta			Salida		
	Patel et al. [25]	Modelo	Error (%)	Patel et al. [25]	Modelo	Error (%)	Patel et al. [25]	Modelo	Error (%)
V (m/s)	161.57	174.653	8.097	302.25	318.251	5.293	433.46	477.229	10.097
T (K)	287.082	299.987	4.495	255.232	265.270	3.932	208.223	204.925	1.609
P (kPa)	1710	1682	1.664	1150	1084	6.088	570	425.6	33.928
M	0.4757	0.5031	5.759	0.9438	0.9749	3.295	1.4985	1.663	10.977

5.2. Resultados simulación CFD

Se realizó una corrida para la tobera convergente así como también para la tobera supersónica obtenida a través de la metodología desarrollada en este trabajo. Los resultados para cada uno de los parámetros termodinámicos, velocidad y número de Mach para cada caso son mostrados y explicados a continuación.

En el cuadro 5.5 se muestra la comparación entre los resultados analíticos y numéricos obtenidos en este trabajo para la tobera convergente. El error máximo fue del 5.68 % presentado en la presión, en la sección de la entrada a la tobera. Se puede observar que los resultados de cada parámetro, tanto analítico como numérico se ajustan bien entre sí, siendo menores al 10 % permisible en el ámbito científico. Por otro lado, el cuadro 5.6 presenta los resultados obtenidos de las comparaciones analíticas y numéricas para la tobera supersónica, encontrándose un error máximo de 3.70 % en la temperatura de la sección de salida de la tobera, sin embargo se obtuvo un error de 0 en el número de Mach en la misma sección.

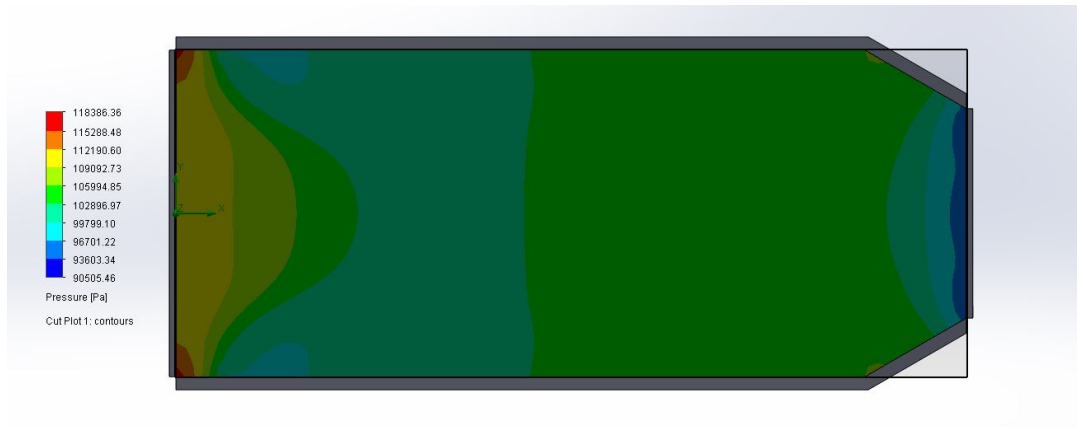
Cuadro 5.5: Comparación numérica entre los resultados analíticos y numéricos para la tobera convergente.

Parámetro	Entrada			Salida		
	Analítico	Numérico	Error (%)	Analítico	Numérico	Error (%)
V (m/s)	25	24.80	0.806	284.62	288.69	1.42
T (K)	828.90	828.90	0	792.7	809.82	2.15
P (kPa)	118473	112103.89	5.68	94430	95567.11	1.20
M	0.04332	0.04374	0.96	0.5043	0.5148	2.08

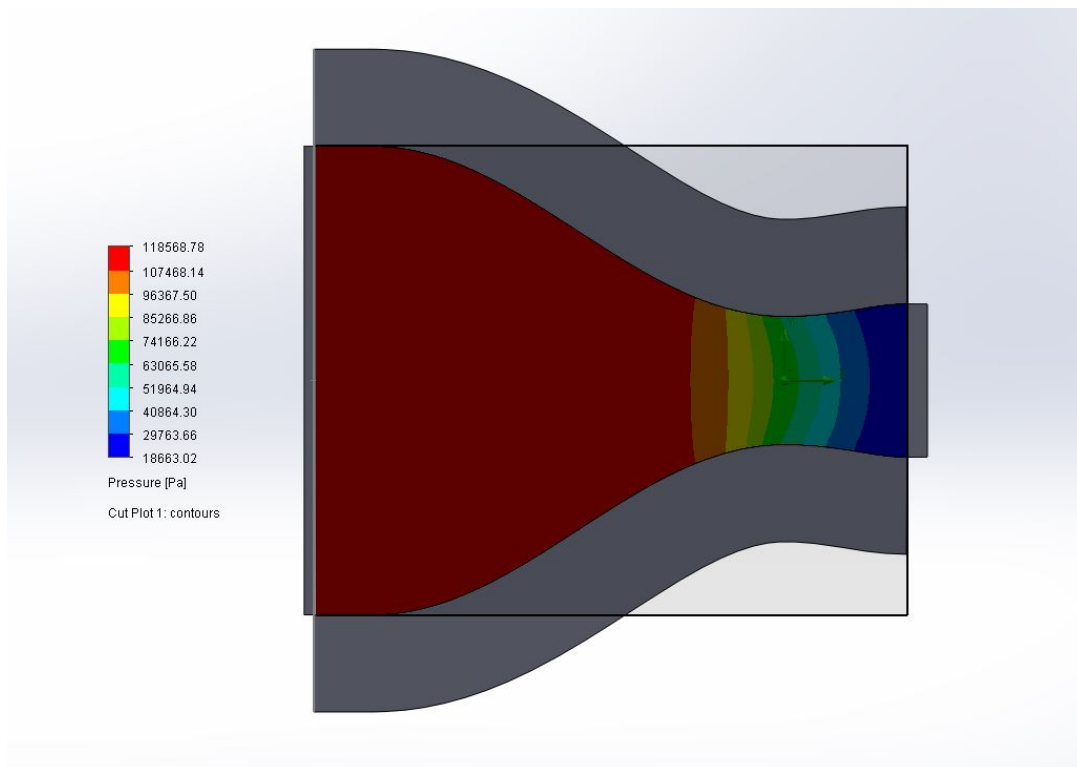
Cuadro 5.6: Comparación numérica entre los resultados analíticos y numéricos para la tobera supersónica.

Parámetro	Entrada			Salida		
	Analítico	Numérico	Error (%)	Analítico	Numérico	Error (%)
V (m/s)	24.99	24.90	0.36	809.18	822.93	1.69
T (K)	828.58	828.90	0.03	502.97	521.62	3.70
P (kPa)	118317.50	118448.10	0.11	20619.07	20759.63	0.68
M	0.04331	0.04392	1.40	1.80	1.80	0

5.2.0.1 Contorno de presión



(a)



(b)

Figura 5.3: Resultados de presión obtenidos mediante la simulación numérica. En la subfigura (a) se muestra para la tobera convergente, y en (b) para la tobera supersónica. La presión máxima alcanzada en la salida de la tobera es de 95567.11 Pa y de 20759.63 Pa, mientras que la presión en la entrada es de hasta 112103.89 Pa y 118448.10 Pa para la tobera convergente y supersónica, respectivamente (como se observa en las figuras).

En la Figura 5.3a se muestra el contorno de presión para la tobera convergente, en donde se puede observar que existe una disminución no uniforme de la presión a través de la tobera. Además, se presentan ondas de choque en la sección de entrada en la parte posterior y superior, en donde existen regiones de baja presión para después incrementar. Por otro lado, el contorno de presión de la tobera supersónica se muestra en la Figura 5.3b, en donde se observa una uniforme disminución en la presión, desde la sección convergente a la divergente. Esta adecuada expansión del flujo sin presencia de ondas de choque permite obtener la presión estimada analíticamente de 118 kPa en la entrada y 20 kPa en la salida.

El cuadro 5.7 nos presenta los valores numéricos obtenidos en la sección de entrada y salida para la presión, para ambas toberas. A partir del cuadro 5.6 se puede establecer que la tobera supersónica se ajusta más a los valores analíticos obtenidos.

Cuadro 5.7: Resultados numéricos del campo de presión para la tobera convergente y supersónica.

Parámetro	Tobera convergente		Tobera supersónica	
	Entrada	Salida	Entrada	Salida
	Valor	Valor	Valor	Valor
$P \text{ (Pa)}$	112103.89	95567.11	118448.10	20759.63

5.2.0.2 Contorno de temperatura

En la Figura 5.4a se muestra el contorno de temperatura para la tobera convergente, en donde se puede observar que no existe uniformidad en la disminución de la temperatura a lo largo de la tobera. Se presentan ondas de choque en la parte posterior y superior de la sección de entrada de la tobera, en donde existen regiones de baja temperatura para después incrementar. Por otro lado, el contorno de temperatura de la tobera supersónica se muestra en la Figura 5.4b, en donde se observa una uniforme disminución en la temperatura, desde la sección convergente a la sección media divergente. Sin embargo, en la sección final divergente hay presencia de regiones de alta temperatura en la parte superior e inferior de la tobera. Aún así, esta adecuada expansión del flujo permite aproximarse la temperatura estimada analíticamente de 828.90 K en la entrada y 502.97 K en la salida.

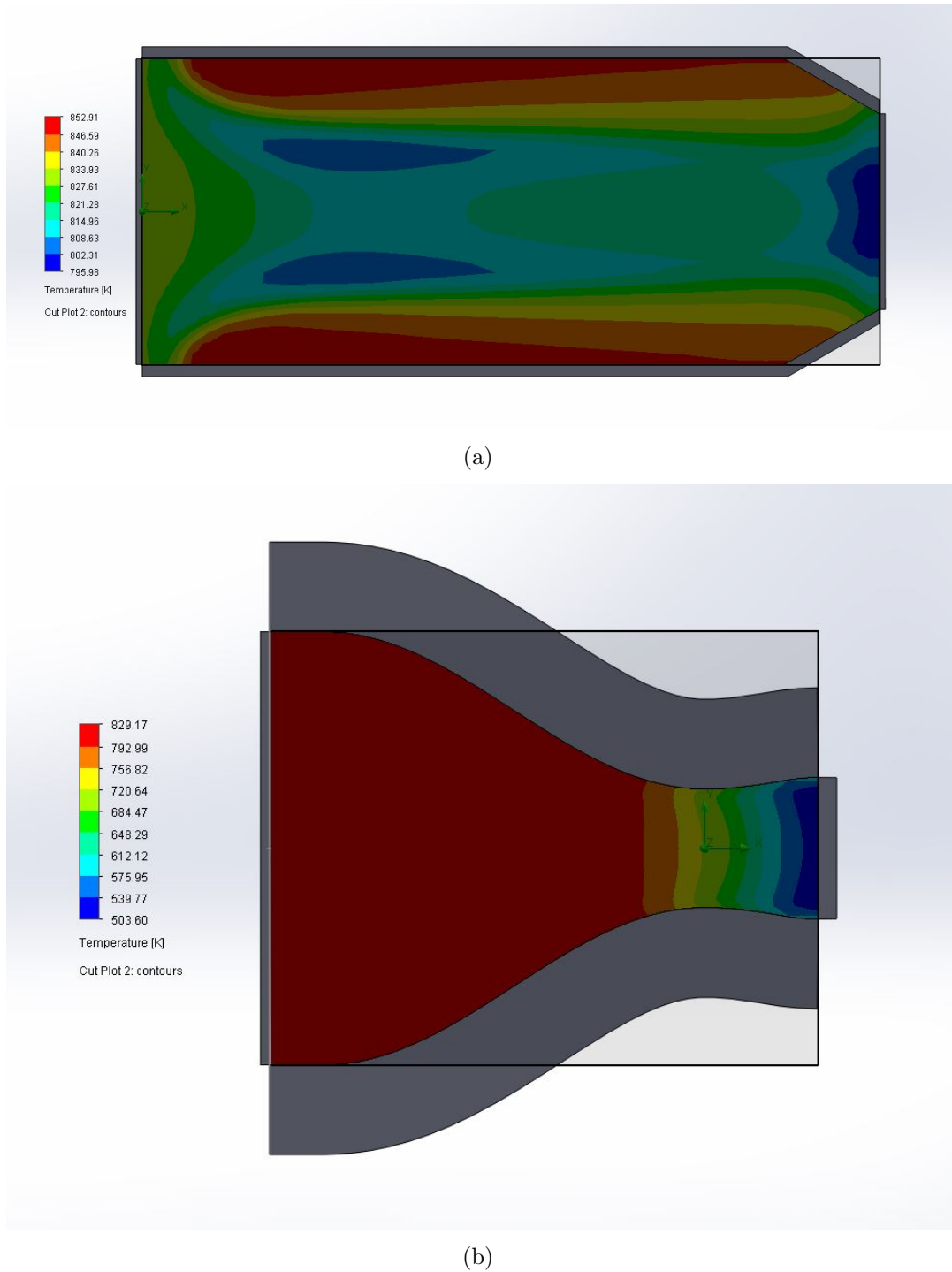


Figura 5.4: Resultados de temperatura obtenidos mediante la simulación numérica. En la subfigura (a) se muestra para la tobera convergente, y en (b) para la tobera supersónica. La temperatura máxima alcanzada en la salida es de 809.82 K y 521.62 K para la tobera convergente y supersónica, respectivamente, mientras que la temperatura en la entrada es de hasta 828.90 K para ambas toberas (como se observa en las figuras).

En el cuadro 5.8 se observan los valores numéricos obtenidos en la sección de entrada y salida para la temperatura, en ambas toberas. A partir del cuadro 5.5 se puede establecer que la tobera convergente es la que más se ajusta más a los valores analíticos obtenidos.

Cuadro 5.8: Resultados numéricos del campo de temperatura para la tobera convergente y supersónica.

Parámetro	Tobera convergente		Tobera supersónica	
	Entrada	Salida	Entrada	Salida
$T (K)$	828.90	809.82	828.90	521.62

5.2.0.3 Contorno de velocidad

En la Figura 5.5a se muestra el contorno de velocidad para la tobera convergente, en donde se puede observar que de igual manera no existe una distribución uniforme de velocidad. Las ondas de choque que presenta la tobera convergente se encuentran afectando la velocidad, disminuyéndola, específicamente en la parte posterior y superior de la tobera. Igualmente en la parte media de la tobera existen regiones de alta velocidad y después decrecen para nuevamente incrementar en la sección de salida. Por otro lado, el contorno de velocidad de la tobera supersónica es presentada en la Figura 5.5b, en donde se puede notar que existe una correcta expansión del flujo, obteniendo una uniformidad en la velocidad desde la sección convergente a la sección media divergente. De igual manera se observa que en la sección final divergente hay presencia de regiones de baja velocidad en la parte superior e inferior de la tobera. Aún así, hay una adecuada expansión del flujo la cual permite aproximarse la velocidad estimada analíticamente de 25 m/s en la entrada y 809.18 m/s en la salida.

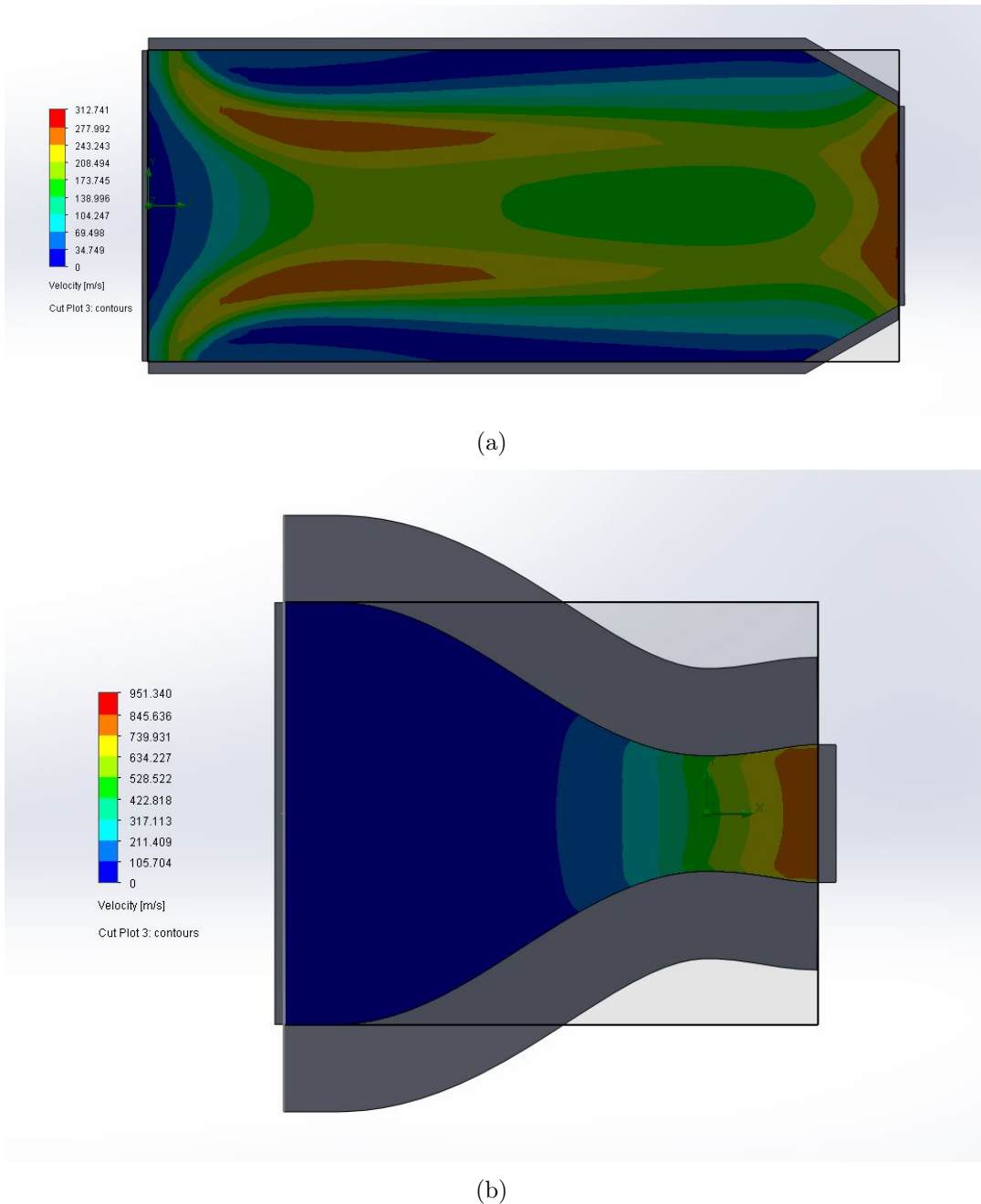


Figura 5.5: Resultados de velocidad obtenidos mediante la simulación numérica. En la subfigura (a) se muestra para la tobera convergente, y en (b) para la tobera supersónica. La velocidad máxima alcanzada en la salida de la tobera es de 288.69 m/s y de 822.93 m/s , mientras que la velocidad en la entrada es de hasta 24.80 m/s y 24.90 m/s para la tobera convergente y supersónica, respectivamente (como se observa en las figuras).

En el cuadro 5.9 se observan los valores numéricos obtenidos en la sección de entrada y salida para la velocidad, en ambas toberas. A partir de los cuadros 5.5 y 5.6 se puede establecer que la tobera convergente es la que más se ajusta a los valores

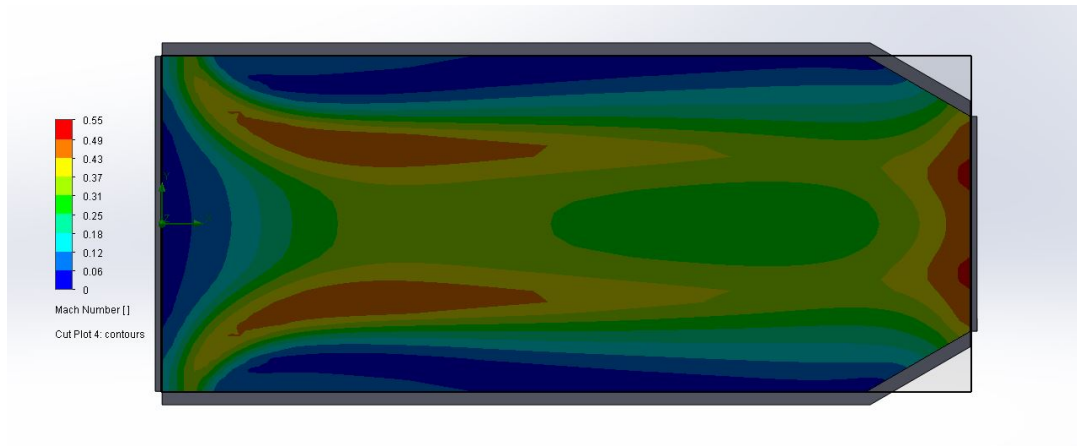
analíticos obtenidos en la sección de la salida. Por otro lado, la tobera supersónica se ajusta más a lo valores analíticos de la sección de entrada.

Cuadro 5.9: Resultados numéricos del campo de velocidad para la tobera convergente y supersónica.

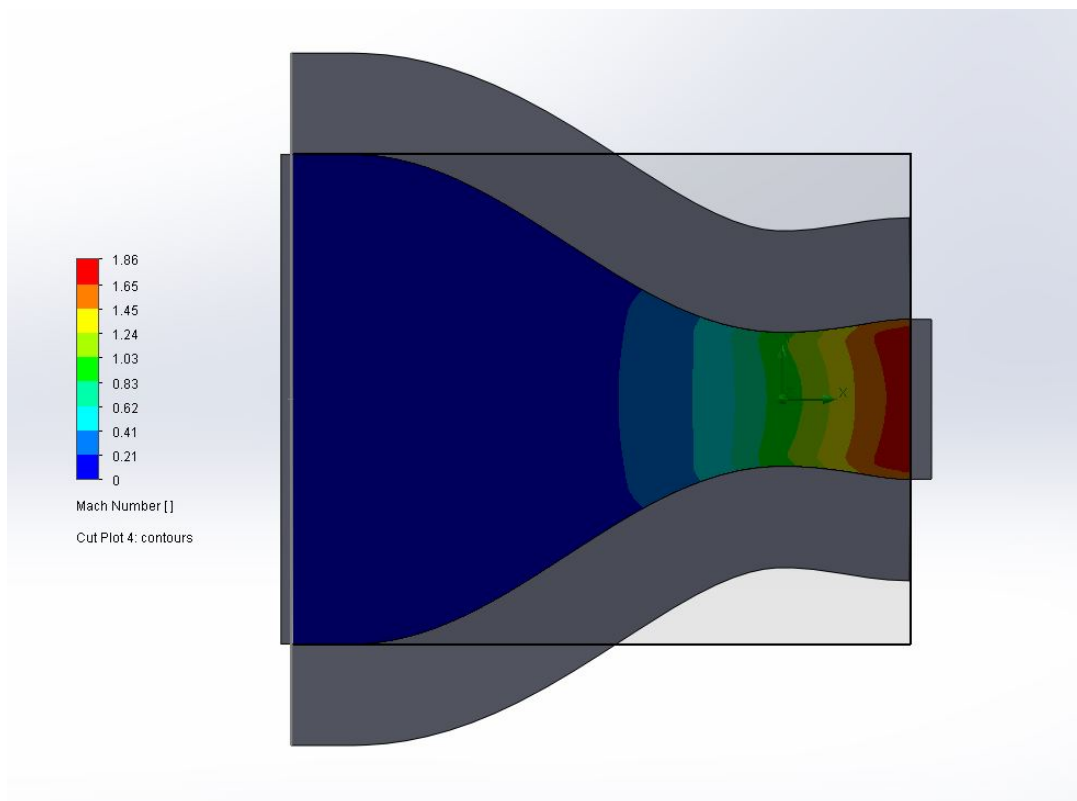
Parámetro	Tobera convergente		Tobera supersónica	
	Entrada	Salida	Entrada	Salida
	Valor	Valor	Valor	Valor
$V (m/s)$	24.80	288.69	24.90	822.93

5.2.0.4 Contorno de número de Mach

En la Figura 5.6a se muestra el contorno del número de Mach para la tobera convergente, se observa que se alcanza un valor máximo de 0.5148 en la salida de la tobera, mientras que el número de Mach en la entrada es de hasta 0.04374. Debido a la presencia de ondas de choque no existe una distribución uniforme en el número de Mach. Las ondas de choque que presenta la tobera convergente se encuentran afectándolo, disminuyéndolo su valor en la parte posterior y superior de la tobera. Igualmente en la parte media de la tobera existen regiones de alto número de Mach y después decrece, para nuevamente incrementar en la sección de salida. Por otro lado, el contorno de número de Mach de la tobera supersónica es presentado en la Figura 5.6b, en el cual se puede observar que se alcanza un valor máximo de 1.81 en la salida de la tobera, mientras que el número de Mach en la entrada es de hasta 0.04392. Se puede notar que existe una correcta uniformidad en el número de Mach desde la sección convergente a la sección media divergente. De igual manera se observa que en la sección final divergente hay una clara presencia de regiones en donde el flujo no se expande, específicamente en la parte superior e inferior de la tobera. Aún así, debido a la uniformidad, hay una adecuada expansión del flujo la cual permite aproximarse al número de Mach estimado analíticamente de 0.04331 en la entrada y 1.80 en la salida.



(a)



(b)

Figura 5.6: Resultados del número de Mach obtenidos mediante la simulación numérica. En la subfigura (a) se muestra para la tobera convergente, y en (b) para la tobera supersónica.

En el cuadro 5.10 se observan los valores numéricos obtenidos en la sección de entrada y salida para el número de Mach, en ambas toberas. A partir de los cuadros 5.5 y 5.6 se puede establecer que la tobera convergente es la que más se ajusta más a los valores analíticos obtenidos en la sección de la entrada. Por otro lado, la tobera

supersónica se ajusta más a lo valores analíticos de la sección de salida.

Cuadro 5.10: Resultados numéricos del campo de número de Mach para la tobera convergente y supersónica.

Parámetro	Tobera convergente		Tobera supersónica	
	Entrada	Salida	Entrada	Salida
	Valor	Valor	Valor	Valor
M	0.04374	0.5148	0.04392	1.81

6. Conclusiones y Recomendaciones

6.1. Conclusiones generales

Este proyecto presentó una tobera supersónica convergente-divergente de campana de Mach 1.8, la cual fue obtenida mediante una metodología desarrollada a través de la integración de la teoría de flujo compresible, el Método de las Características y el Método de la Curva Paramétrica Bicúbica.

El propósito de esta investigación fue mejorar el diseño final de la tobera de un motor a reacción turbojet el cual fue exitoso logrando un incremento en el número de Mach de hasta el 251.59 % y un incremento en la velocidad del 185.05 % con respecto a la tobera convergente. La creación de la tobera supersónica como se mencionó anteriormente, fue llevada a cabo con el desarrollo de una metodología, la cual se apoyó tanto de la teoría de flujo compresible, MCPB y MOC como con la simulación numérica.

El uso de la simulación numérica, resultó una herramienta muy potente y de gran apoyo para el cálculo de las propiedades termodinámicas, velocidad y número de Mach de las toberas. Permitió comparar los resultados obtenidos a partir de ésta, observando el comportamiento del flujo y sus propiedades termodinámicas, velocidad y número de Mach con los resultados analíticos obtenidos a través de la teoría propuesta. Se observó que los resultados de la tobera convergente tienen mayor discrepancia de sus resultados analíticos, en cambio, la tobera supersónica se ajusta más en velocidad, presión y número de Mach en contraparte de sus resultados analíticos. También, se encontró que la tobera convergente utilizada actualmente, genera ondas de choque al interior, lo que permite una disminución en la velocidad y por consiguiente del número de Mach, aumentando al mismo tiempo la presión y temperatura del flujo de trabajo. Por otro lado, en la tobera supersónica propuesta no se muestran indicios de ondas de choque, lo que permite un aumento en la velocidad y número de Mach, lo que a su vez reduce la presión y temperatura de una manera uniforme. La simulación numérica nos proporciona, entonces, una aproximación a los

resultados reales, permitiendo realizar modificaciones y establecer consideraciones antes de la experimentación.

Por otra parte, la metodología propuesta permitió con éxito diseñar y validar toberas supersónicas de hasta $M=1.8$ utilizando MCPB y MOC con solo diez líneas, obteniendo un error máximo en simulación CFD de la tobera supersónica propuesta de hasta 3.70 %. Se determinó a través de este estudio que mediante la implementación del MCPB y MOC se puede obtener el diseño de una tobera de campana supersónica con el desempeño requerido, luego validado con la teoría del flujo compresible.

El diseño en la sección convergente con pendiente cero en la entrada y en la garganta fue crucial para diseñar la sección divergente a través del uso del MOC, obteniendo suficiente precisión en los resultados. Se utilizó el MCPB para encontrar el punto de unión β para el diseño en la sección convergente. Luego, se suavizó el perfil del contorno mediante una función coseno, lo que permitió calcular un contorno de tobera adecuado en la sección convergente capaz de aproximarse a un valor de $M=1$ en la garganta.

La confiabilidad del algoritmo utilizado está validada ya que permite predecir con suficiente aproximación la geometría del túnel supersónico AF300 [30], obteniendo un PCC=0.9494 y RMSE=0.009 m para $M=1.4$, mientras que para $M=1.8$ un PCC=0.9728 y RMSE=0.013 m. Además, los resultados obtenidos en este estudio para la tobera de atomización axisimétrica obtenida por Zhang et al. [38], y la tobera supersónica de Patel et al. [25] difieren ligeramente; confirmando la validez de la metodología desarrollada en este estudio.

6.2. Recomendaciones para futuros trabajos

Con base en éste proyecto, aunque fue concluido con éxito, se proponen las siguientes recomendaciones para mejorar el diseño de futuras toberas y trabajos respecto al tema:

- Implementar metodologías utilizando diferentes técnicas matemáticas para el

desarrollo de las secciones convergente y divergente (por ejemplo, el método de la Curva Polinomial Quintica y el método de Rao, para la sección convergente y divergente, respectivamente).

- Hacer uso del Diseño de Experimentos o Diseños Robustos de Taguchi, para obtener un parámetro x_m óptimo que permita la obtención de un contorno convergente más suavizado, con el fin de obtener un valor más cercano a $M=1$ en la garganta, lo que permitirá potenciar el MOC.
- Utilizar diferentes modelos de turbulencia, con el fin de estudiar y comparar los efectos viscosos y fenómenos de capa límite que afectan al flujo de trabajo.
- Optimizar el MOC incluyendo una mayor cantidad de líneas características, lo que permitirá el estudio de toberas supersónicas de mayor número de Mach con más precisión, incluyendo toberas hipersónicas.

Referencias

- [1] J. D. Anderson. Introduction to Flight, chapter 4. McGraw-Hill Series in Aeronautical and Aerospace Engineering, New York, 1989.
- [2] J. D. Anderson. Modern Compressible Flow With Historical Perspective, chapter 4. McGraw-Hill New York, New York, 2003.
- [3] J. D. Anderson. Modern Compressible Flow With Historical Perspective, chapter 11. McGraw-Hill New York, New York, 3 edition, 2003.
- [4] G. Asha, D. Mohana, K. S. Priyanka, and D. Govardhan. Design of minimum length nozzle using method of characteristics. International Journal of Engineering Research & Technology, 10(05):490–495, 2021.
- [5] R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot. Fenómenos de Transporte, chapter 3. Reverté, Barcelona, 1992.
- [6] Y. A. Cengel and M. Boles. Termodinámica, chapter 9. McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V., Distrito Federal, 2012.
- [7] Y. A. Cengel and M. Boles. Termodinámica, chapter 17. McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V., Distrito Federal, 2012.
- [8] A. W. Date. Introduction to Computational Fluid Dynamics, chapter 1. Cambridge university Press, Cambridge, 1 edition, 2005.
- [9] N. Deshpande, S. Vidwans, P. Mahale, R. Joshi, and K. Jagtap. Theoretical & cfd analysis of de laval nozzle. International Journal of Mechanical and Production Engineering, 2:33–36, 2014.
- [10] A. Dewan. Tackling Turbulent Flows in Engineering, chapter 5. Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [11] A. F. El-Sayed. Fundamentals of Aircraft and Rocket Propulsion, chapter 2. Springer-Verlag, London, 2016.
- [12] A. Hedhe, A. Mohan, A. R., and M. B.P. Numerical analysis of supersonic nozzle using method of characteristic. International Journal of Scientific Engineering Research, 11:10–14, 2020.
- [13] D. Hou, W. Jiang, W. Zhao, J. Bian, Y. Liu, and X. Lai. Effect of linetype of convergent section on supersonic condensation characteristics of CH₄-CO₂ mixture gas in laval nozzle. Chemical Engineering and Processing, 133:128–136, 2018.
- [14] V. Jose, V. Y. Baby, and A. K. Johny. 2d contour design and analysis of the divergent portion of a satellite thruster nozzle using moc. Journal for Engineering, 2(5):162–168, 2017.
- [15] D. Y. Kapukawai Uyeki. A design method for a supersonic axisymmetric nozzle for use in wind tunnel facilities. MSc in Aerospace Engg, Dept of Aerospace Engg, San José University, 201, 2018.

- [16] M. A. Khan, S. K. Sardiwal, M. S. Sharath, and D. H. Chowdary. Design of a supersonic nozzle using Method of Characteristics. International Journal of Engineering and Technology, 2:19–24, 2013.
- [17] S. A. Khan, O. M. Ibrahim, and A. Aabid. CFD analysis of compressible flows in a convergent-divergent nozzle. Materials Today: Proceedings, 46:2835–2842, 2021.
- [18] J. Kolář and V. Dvořák. Verification of $k-\omega$ sst turbulence model for supersonic internal flows. International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering, 5(9):1715–1719, 2011.
- [19] C. K. G. Lam and K. Bremhorst. A modified form of the $k-\epsilon$ model for predicting wall turbulence. Journal of Fluids Engineering, 103(3):456–460, 1981.
- [20] L. Meena, M. Niranjana, G. Kumar, M. Zunaid, et al. Numerical study of convergent-divergent nozzle at different throat diameters and divergence angles. Materials Today: Proceedings, 46:10676–10680, 2021.
- [21] K. O. Mon and C. Lee. Aerodynamic optimal design of nozzle contour for supersonic exit mach number. Proceedings of the Korean Society of Propulsion Engineering Conference., pages 335–338, 2010.
- [22] T. K. Nandi and P. Roy. Compressible flow through a supersonic nozzle—a computational approach. African Journal of Science and Research, 5(4):61–66, 2016.
- [23] NASA. Prandtl-meyer angle. <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/pranmyer.html>, 2021.
- [24] Y. E. Özkan. Design of a supersonic nozzle using method of characteristics. Department of Astronautical Engineering, Istanbul Technical University, 2021.
- [25] M. S. Patel, S. D. Mane, and M. Raman. Concepts and CFD analysis of de-laval nozzle. International Journal of Mechanical Engineering and Technology, 7(5):221–240, 2016.
- [26] R. Petkevicius, G. Jocbalis, A. Steponaviciute, K. Stravinskas, A. Romanov, R. Kacianauskas, S. Borodinas, and G. Mordas. Numerical study of powder flow nozzle for laser-assisted metal deposition. Mathematics, 9(22):2913, 2021.
- [27] J. C. Restrepo, A. F. Bolaños-Acosta, and J. R. Simões-Moreira. Short nozzles design for real gas supersonic flow using the method of characteristics. Applied Thermal Engineering, 207:118063, 2022.
- [28] R. Royce. The Jet Engine. Renault Printing Co Ltd, Derby, 1986.
- [29] A. Sayma. Computational Fluid Dynamics, chapter 1. Bookboon, 1 edition, 2009.
- [30] L. TecQuipment. AF300 intermittent supersonic wind tunnel. User’s Guide, England, 2016.

-
- [31] Z. Toufik and Y. ZineEddine. Supersonic two-dimensional minimum length nozzle design at high temperature. application for air. Chinese Journal of Aeronautics, 20(1):29–39, 2007.
- [32] J. Tu, G. H. Yeoh, C. Liu, and Y. Tao. Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach, chapter 1. Elsevier Ltd., Oxford, 3 edition, 2018.
- [33] J. Tu, G. H. Yeoh, C. Liu, and Y. Tao. Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach, chapter 2. Elsevier Ltd., Oxford, 3 edition, 2018.
- [34] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, chapter 1. Pearson Education Limited, London, 2 edition, 2007.
- [35] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, chapter 3. Pearson Education Limited, London, 2 edition, 2007.
- [36] J. H. Watmuff. Wind tunnel contraction design. In 9th Australasian Fluid Mechanics Conference, pages 472–475, 1987.
- [37] A. C. Yunus and M. C. John. Fluid Mechanics: Fundamentals And Applications, chapter 15. McGraw Hill Companies, Inc., New York, 1 edition, 2006.
- [38] T. Zhang, D. Jing, S. Ge, J. Wang, X. Meng, and S. Ren. Numerical simulation of the dimensional transformation of atomization in a supersonic aerodynamic atomization dust-removing nozzle based on transonic speed compressible flow. International Journal of Coal Science & Technology, 7:597–610, 2020.