

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS MARINAS

••ESTABILIDAD DE REMOLINOS DE AGUA CALIDA••

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
O C E A N O L O G O
PRESENTA
SERGIO BERNARDO JIMENEZ HERNANDEZ

ENSENADA, BAJA CALIFORNIA, SEPTIEMBRE DE 1987.

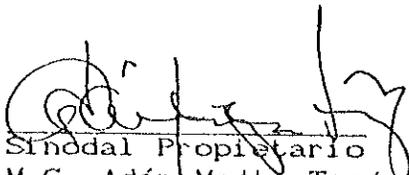
''ESTABILIDAD DE REMOLINOS DE AGUA CALIDA''

TESIS
QUE PRESENTA
SERGIO BERNARDO JIMENEZ HERNANDEZ

Aprobada por



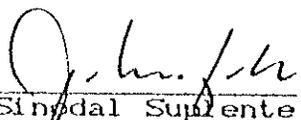
Presidente del Jurado
Pedro Ripa



Sinodal Propietario
M.C. Adán Mejía Trejo



Sinodal Propietario
M.C. René Pinet P.



Sinodal Suplente
M.C. Manuel Figueroa



Sinodal Suplente
Oc. Javier Sandoval

Agradecimientos

A Pedro Ripa por su confianza y paciente dirección de este trabajo.

Con respeto y admiración al Dr. José L. Ochoa.

Al los integrantes del comité de tesis, M.C. René Pinet, M.C. Manuel Figueroa, M.C. Adán Mejía y Oc. Javier Sandoval por su asequible actitud.

A mis amigos Angélica, Toño, Luis y Carlos.

LISTA DE FIGURAS

Figura	Leyenda	Pág.
1	Esquematzación gráfica de un r6don en el modelo. La capa activa con densidad ρ , flota sobre la capa estática de densidad $\rho + \Delta\rho$	10
2	Comparación de los sistemas de referencia usados por el modelo. (a) Trayectoria de partículas de un remolino en el plano- f , y (b) en el plano- f_*	11
3	Evoluci6n temporal de un remolino estable sin perturbaci6n, relativo al plano- f . [$a/b = 0.3$, $\Omega/f = 0.4$ y $n = 2$].....	22
4	Mismo caso que en Fig. 3, solo que visto bajo el plano- f_*	22
5	Coordenadas X y Y del Centro de Gravedad de un remolino estable, pero con perturbaci6n, relativas al tiempo; para el plano- f (a) y (b) plano- f_* . [$a/b = 0.4$, $\Omega/f = 0.2$ y $n = 2$].....	23
6	Trayectorias del Centro de Gravedad (X vs Y) para el mismo remolino de la Fig. 5. (a) plano- f y (b) plano- f_*	24
7	Regiones de estabilidad (zona sombreada) para rodones en el espacio a/b vs Ω/f como funci6n del grado polinomial n de una perturbaci6n infinitesimal. (a) $n = 3$ y (b) $n = 4$. [Ripa, 1987].....	25
8	Id6ntica que la Fig. 7, para $n = 5$ (a) y $n = 6$ (b). [Ripa, 1987].....	26
9	Contorno de presi6n al tiempo $t = 0$ para un rod6n con $a/b = 0.4$ y $\Omega/f = 0.05$, relativo al plano- f_* , sin perturbaci6n.....	29
10	Secuencia temporal de contornos de presi6n en el plano- f_* , de un remolino inestable con excentricidad $a/b = 0.4$ y velocidad angular $\Omega/f = 0.05$; en la parte superior estan ensamblados para cada tiempo, los casos $n = 3, 4$ y 5 , y en la parte inferior est6n ensamblados los casos $n = 6, 7$ y 8	30-2
11	Contornos de presi6n ensamblados en tiempo y n fijo, para el caso mostrado por la figura 10.....	33
12	Contornos de presi6n ensamblados en el tiempo para el mismo caso que Fig. 11, s6lo que la perturbacion es menor (plano- f_*).....	34
13	Mismo caso que en la figura (12), s6lo que, referido al plano- f	35

INDICE

	Pág.
Agradecimientos.....	ii
Lista de Figuras.....	iii
Indice.....	iv
Resumen.....	1
1.- Introducción.....	2
2.- Metodología.....	7
2.1.- Modelo, esquema general.....	7
2.2.- Invariantes y Centro de Gravedad.....	12
2.3.- Solución al modelo.....	15
2.4.- Evolución de un rodón perturbado.....	18
3.- Resultados.....	20
3.1.- Resultados generales.....	20
3.2.- Análisis gráfico de contornos.....	27
4.- Discusiones y Conclusiones.....	36
Literatura Citada.....	39

RESUMEN

Se presenta un modelo numérico para la resolución de las Ecuaciones de Aguas Someras en casos donde el dominio horizontal es finito y dependiente del tiempo (su borde, donde el espesor de la capa es nulo, es un frente). Con este modelo se describe, en forma aproximada, la evolución de un remolino de agua cálida. La condición inicial está constituida por una solución analítica exacta a estas ecuaciones, la cual representa a un remolino elíptico, más una perturbación pequeña. Se analiza la deformación que sufre un remolino inestable al crecer la perturbación inicial, alcanzando una amplitud finita. Los remolinos pierden su carácter elíptico, generándose un acúñamiento en uno de sus extremos que podría formar una especie de filamento. También se observa que pulsan en forma y tamaño, particularmente en los casos en que el remolino es estable.

1.- INTRODUCCION

Los Remolinos de Agua Cálida (RAC) representan las componentes más energéticas a nivel de mesoescala en los océanos (Olson et al., 1985). Su velocidad azimutal de giro, grande comparada con la de translación, les permite acarrear volúmenes de agua considerables durante largos periodos de tiempo (Flierl, 1984). Los RAC juegan un papel significativo en la física, química y biología de las regiones del océano donde se presentan. La influencia que éstos tienen sobre el medio ambiente está determinada por su intensidad, la cual puede ser considerable (ver, por ejemplo, Houghton et al., 1986).

Una de las formas más espectaculares de formación de los RAC es el desprendimiento de meandros asociados a sistemas de corrientes como la del Golfo o la de Kuroshio. Muchos de ellos terminan reintegrándose a las mismas corrientes (Olson et al., 1985). Los remolinos que no lo hacen, disipan su energía y mezclan las aguas que acarrearán con las costeras, lo cual implica un transporte neto de organismos, que afecta notoriamente a las poblaciones de las aguas mezcladas (Yenstsch y Phinney, 1985).

Los RAC giran de manera anticiclónica, es decir, en el sentido de las manecillas del reloj en el hemisferio norte, y contrahoraria en el hemisferio sur. Estos remolinos están constituidos por un centro de alta presión subsuperficial, con un núcleo de agua cálida rodeado de agua más fría, lo

cual hace que por debajo del remolino el gradiente de presión sea mucho más débil o, incluso, inexistente. El núcleo y su entorno están típicamente separados por una termoclina aguda, localizada por lo general, a unos 500 m de profundidad en el centro del remolino, y más hacia la superficie conforme se aleja del centro, llegando incluso a emerger en forma de frentes. Tienen escalas espaciales de cientos de kilómetros, y vidas medias que van de semanas hasta un año. El período de circulación es, típicamente, igual a unos ocho períodos inerciales, o sea, del orden de una semana.

Uno de los estudios más completos sobre los RAC es el que llevó a cabo el Comité Ejecutivo de Remolinos de Agua Cálida (Warm Core Rings Executive Committee, 1982), el cual presenta el primer análisis de estudios físicos, químicos y biológicos en la evolución de un RAC, para un lapso de 6 meses de su vida. En dicho estudio se hace mención al contraste de temperaturas superficiales que caracterizan a los RAC, el cual es aprovechado para detectarlos mediante imágenes termales tomadas por satélite. Estas imágenes se utilizan para tener una comprensión sinóptica sobre la formación, evolución y dimensiones de estos remolinos (Evans et al., 1985). Csanady (1979) da una descripción general del nacimiento y decaimiento de los RAC.

Dentro de la gama de fenómenos físicos que intervienen en la dinámica de los RAC están: 1).- el forzamiento debido

al viento; ii).- la rotación de la tierra; iii).- la disipación de energía cinética y de calor; iv).- la estructura vertical del campo de velocidades circundante, y v).- su velocidad de rotación y excentricidad (Joyce, 1984). Los remolinos observados son generalmente circulares, a pesar de que podrían fácilmente ser generados con excentricidades elevadas. La forma elíptica de algunos remolinos es probablemente un resultado del esfuerzo cortante de las corrientes (Nof, 1981).

Las ecuaciones más sencillas usadas para analizar la dinámica de los RAC, son las llamadas de Aguas Someras. Dichas ecuaciones son de aplicabilidad general, dado que describen la dinámica de una capa activa de agua, ya sea flotando sobre otra más densa, supuestamente estática, o entre dos masas de agua inertes, o sobre el fondo rígido del océano. Ball (1963) realizó uno de los primeros estudios analíticos de estas ecuaciones, para el caso en que la capa activa tiene una extensión horizontal finita, con el propósito de estudiar las propiedades dinámicas de un remolino. Este autor encontró distintas integrales de movimiento que restringen la naturaleza de las soluciones. Thacker (1981) complementa este trabajo encontrando varias soluciones analíticas de las ecuaciones alineales. Cushman-Roisin (1984) encuentra otra solución analítica exacta de estas ecuaciones, la cual representa un remolino elíptico en rotación rígida anticiclónica, al que da el

nombre genérico de *Rodón*; los rodones se clasifican en base a dos parámetros: su excentricidad y la velocidad de rotación. Ripa (1987) encuentra las condiciones de inestabilidad de los rodones en base a las integrales de movimiento asociadas a las ecuaciones de aguas someras. En particular ve que los rodones circulares son estables a perturbaciones de amplitud finita; las condiciones no pueden ser utilizadas en el caso, más general, de remolinos elípticos. Para éstos últimos, Ripa (1987) sólo pudo estudiar su estabilidad ante perturbaciones infinitesimales, para las que propone una dependencia espacial del tipo polinomial (de grado n y $n-1$ para los campos de presión y velocidad respectivamente). Analizó la estabilidad en función del valor de n y para cualquier valor de la excentricidad y velocidad de rotación de los remolinos, y encontró que para $n \leq 2$ la solución es estable bajo cualquier perturbación infinitesimal; para $n > 2$ muestra distintas regiones de inestabilidad en el plano de excentricidad y velocidad de rotación de los remolinos. Cushman-Roisin (1987) muestra un análisis gráfico y analítico para las pulsaciones del contorno de un remolino elíptico, el cual representa una solución analítica exacta para las ecuaciones de Aguas Someras; propone que sus resultados pueden ser usados como una herramienta para probar la exactitud de los modelos numéricos (que trabajen las ecuaciones de Aguas Someras) y como un estado base para

la investigación de estabilidad del sistema ante perturbaciones de amplitud infinitesimal. Dritschel (1986) muestra un análisis sobre las configuraciones de vortices elípticos perturbados, aplicando el método de 'dinámica de contornos', el cual concidera un fluido inviscoso, no divergente y con vorticidad constante . Flierl (1984) analiza los efectos secundarios que tiene la radiación de energía de los remolinos, en forma de ondas de Rossby en aguas profundas, respecto a su evolución. Young (1987) discute la pérdida de energía de los remolinos debida a la generación de ondas inerciales.

El objetivo de este trabajo es elaborar un modelo numérico, en base a las ecuaciones de Aguas Someras, que permita analizar las deformaciones del campo de presión que sufre un rodón inestable, por efecto de una perturbación finita de amplitud pequeña.

En la sección II se describe el método seguido en la elaboración del modelo y su fundamento físico-matemático. En la sección III se muestra el análisis gráfico de los resultados obtenidos, y finalmente, en la sección IV se presentan las discusiones y conclusiones del trabajo.

2.- METODOLOGIA

2.1.- Modelo, esquema general.

Las ecuaciones de momentum del modelo de Aguas Someras son (Pedlosky, 1982)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

y son complementadas por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(u p)}{\partial x} + \frac{\partial(v p)}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

donde, u y v representan las componentes del vector velocidad en las direcciones ortogonales (x,y) respectivamente, f denota el parámetro de Coriolis, el cual se toma como constante, y finalmente p es la presión. Esta última es también expresada como

$$p = g h, \quad (3)$$

aquí h representa el ancho de la capa activa y g la gravedad reducida. Este conjunto de ecuaciones alineales describe la dinámica de una capa de agua activa de profundidad h , flotando sobre una capa más densa y fría de profundidad infinita y estática, en el plano- f , para un

fluido no viscoso, divergente, sin fricción, y sin velocidad vertical, tal que la aproximación hidrostática sea válida. La esquematización gráfica del modelo puede verse en la figura 1.

Con el objeto de simplificar el tratamiento analítico y numérico de este problema, es conveniente trabajar con un sistema de referencia auxiliar al plano- f , que rote respecto a éste con una velocidad angular Ω y al cual llamaremos plano- f_* , y elegido de forma tal que el rodón sin perturbar se vea estacionario bajo este sistema [ver figura 2]. Las nuevas coordenadas espaciales (x_*, y_*) en el plano- f_* , están relacionadas con las del plano- f de la siguiente forma

$$(x_* + iy_*) = e^{i\Omega t} (x + iy), \quad (4)$$

y las componentes del vector velocidad (u_*, v_*) en el plano- f_* son

$$(u_* + iv_*) = e^{i\Omega t} [(u - \Omega y) + i(v + \Omega x)]. \quad (5)$$

La expresión (5) es la derivada temporal de la relación (4). Usando (4) y (5), el sistema de ecuaciones (1) y (2) queda expresado, en su nueva forma, propia del sistema en rotación del plano- f_* , como

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_*}{\partial t} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial u_*}{\partial y_*} - f_* v_* + \frac{\partial p}{\partial x_*} &= -\Omega_*^2 x_* \\ \frac{\partial v_*}{\partial t} + u_* \frac{\partial v_*}{\partial x_*} + v_* \frac{\partial v_*}{\partial y_*} + f_* u_* + \frac{\partial p}{\partial y_*} &= -\Omega_*^2 y_* \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

y

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(u_* p)}{\partial x_*} + \frac{\partial(v_* p)}{\partial y_*} = 0. \quad (7)$$

De este cambio de variables surgen dos nuevas relaciones

$$\Omega_*^2 \equiv \Omega (f - \Omega), \quad (8)$$

y

$$f_* \equiv f - 2\Omega. \quad (9)$$

Aquí, Ω_*^2 representa la diferencia de la aceleración centrífuga existente entre el plano- f y el plano- f_* , y f_* es el nuevo parámetro de Coriolis. (La esquematización hecha hasta aquí, es la descrita por Ripa, 1987.)

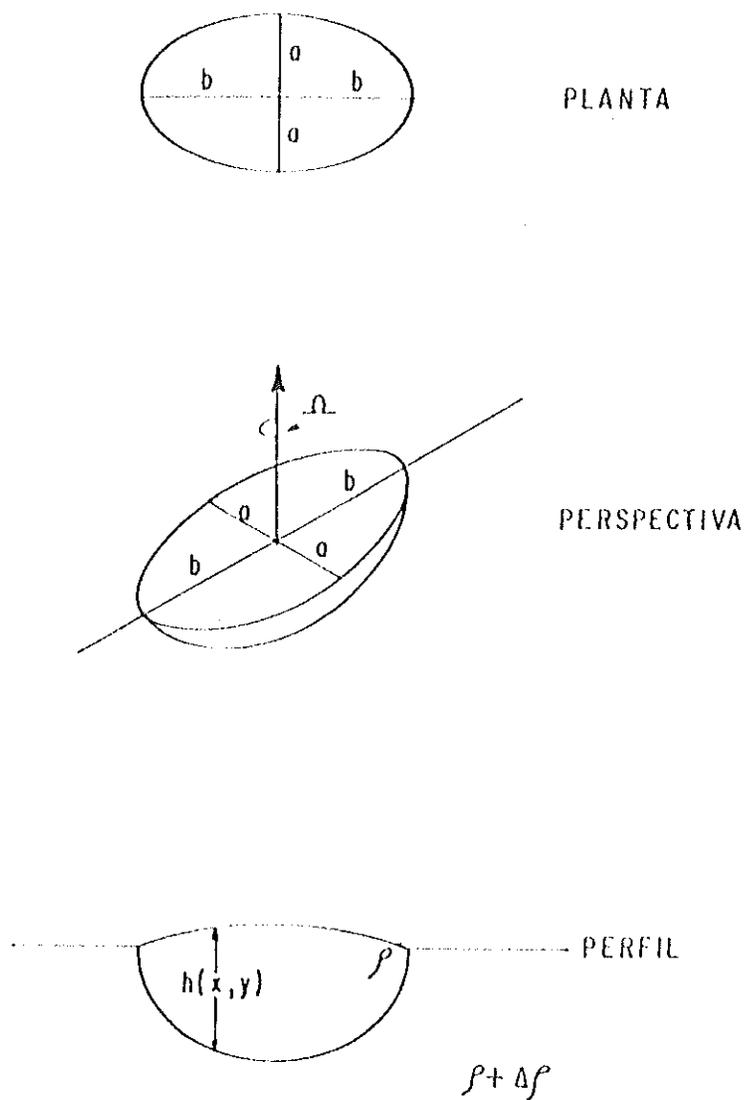


Figura 1.- Esquematización gráfica de un ródón en el modelo. La capa activa con densidad ρ , flota sobre la capa estática de densidad $\rho + \Delta\rho$.

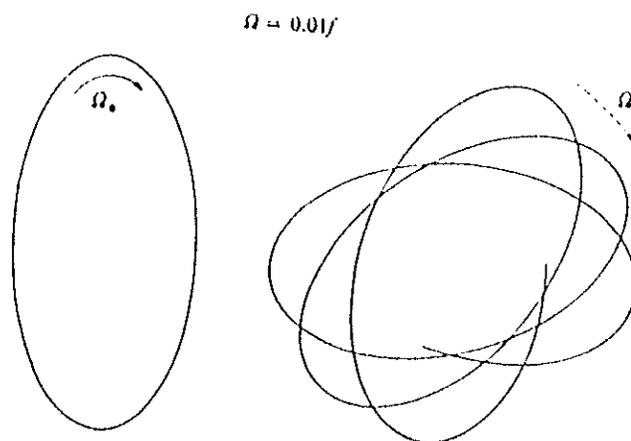
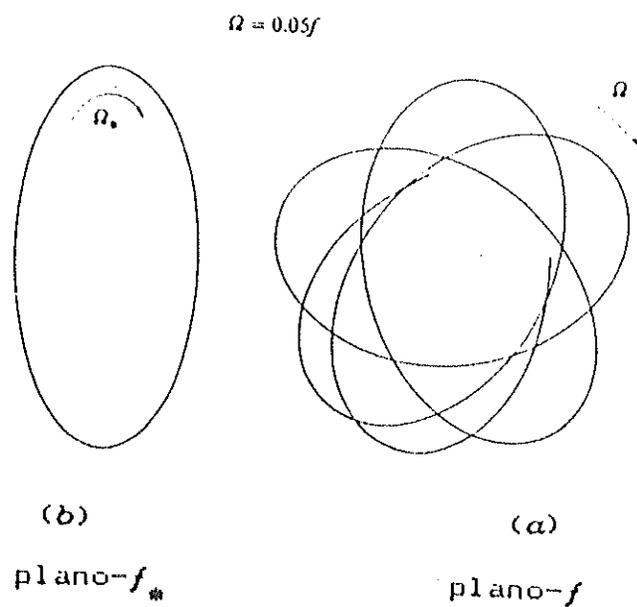


Figura 2.- Comparación de los sistemas de referencia usados por el modelo. (a) Trayectoria de partículas de un remolino en el plano- f , y (b) en el plano- f_* .

2.2. - Invariantes y Centro de Gravedad

Para el sistema de ecuaciones del modelo (1) y (2) hay un conjunto de cantidades invariantes que son de gran ayuda en el análisis de estabilidad. La cantidad más obvia que se conserva es el volúmen [V], el cual se define como

$$V \equiv \int \int h \, dx dy. \quad (10)$$

Otras cantidades invariantes son la energía

$$E \equiv \int \int \frac{1}{2} h (u^2 + v^2 + h) \, dx dy, \quad (11)$$

y el momento angular

$$A \equiv \int \int h [xv - yu + \frac{1}{2} f(x^2 + y^2)] \, dx dy. \quad (12)$$

Estas integrales de movimiento son válidas para cualquier condición inicial, restringidas sólo a que la capa activa tenga una extensión finita.

Una característica igualmente general, para las ecuaciones de Aguas Someras, es que el centro de gravedad de la capa activa describe oscilaciones inerciales (Ball, 1963; ver también Young, 1987).

Las coordenadas (X, Y) del centro de gravedad son

$$X(t) \equiv \frac{\iint h_x \, dx dy}{V}, \quad (13)$$

$$Y(t) \equiv \frac{\iint h_y \, dx dy}{V}, \quad (14)$$

Del sistema de ecuaciones (1) resulta

$$\frac{d^2 X}{dt^2} - f \frac{dY}{dt} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + f \frac{dX}{dt} = 0. \quad (16)$$

Si definimos a $Z = X + iY$, éstas ecuaciones pueden expresarse como

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + if \frac{dZ}{dt} = 0, \quad (17)$$

Cuya solución general es

$$Z(t) = A e^{-ift} + B,$$

donde A y B son constantes. De aquí podemos concluir que si graficamos las coordenadas del centro de gravedad (X, Y), calculadas con las relaciones (13) y (14), como función del

tiempo, debemos ver que estas oscilan con frecuencias inerciales. Y si graficamos X vs Y , veremos un círculo (en el plano- f), llamado círculo inercial.

2.3.- Solución al modelo.

Las ecuaciones para Aguas Someras tienen soluciones analíticas (Ball, 1963; Thacker, 1981; Cushman-Rosin, 1984 y 1987; Young, 1987; y Ripa, 1987), en la forma de funciones cuadráticas en las coordenadas espaciales para el campo de presión y lineales para el campo de velocidad.

En este trabajo se propone una solución aproximada a las ecuaciones, en la forma de una función polinomial espacial de grado n y $n-1$ para los campos de presión y velocidad respectivamente, tal que sus coeficientes sean función del tiempo. Una expresión general de este tipo constituye una solución exacta de las ecuaciones de Aguas Someras, sólo para el caso $n \leq 2$, el que constituye un sistema cerrado.

La solución propuesta para los campos de presión y velocidad es

$$p = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i p_{ij}(t) x^{i-j} y^j, \quad (18)$$

y

$$(u, v) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i [u_{ij}(t), v_{ij}(t)] x^{i-j} y^j. \quad (19)$$

Dado que la relación entre (x, y, u, v) y (x_*, y_*, u_*, v_*) es lineal, ecs. (4) y (5), una solución de orden n en el plano- f lo es también en el plano- f_* ; las ecuaciones (18) y

(19) son también utilizadas en este marco (lógicamente, (x, y, u, v) deben llevar el subíndice $*$, y los coeficientes son diferentes).

Las soluciones analíticas a las que se ha hecho mención son, para el sistema de ecuaciones de Aguas Someras, casos particulares con $n = 2$, que como se dijo, es cerrado.

Para encontrar las ecuaciones que determinan la evolución de los coeficientes, se sustituyen las expresiones (18) y (19) en el sistema de ecuaciones (6) y (7), obteniéndose (se omite el subíndice $*$ correspondiente a las variables en el plano- f_* , con el objeto de simplificar su expresión)

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \dot{u}_{ij} x^{i-j} y^j &= - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k (1-j) u_{ij} u_{kl} x^{i-j-1+k-l} y^{j+l} \\
 &- \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^k j v_{ij} u_{kl} x^{i-j+k-l} y^{j+l-1} + f_* \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i v_{ij} x^{i-j} y^j \\
 &- \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (1-j) \rho_{ij} x^{i-j-1} y^j - \Omega_*^2 x_*, \quad (20)
 \end{aligned}$$

donde \dot{u} denota la derivada temporal de u , (para la componente v se tiene una expresión semejante) y

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \dot{\rho}_{ij} x^{i-j} y^j = - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k (i-j+k-l) u_{ij} \rho_{kl} x^{i-j-1+k-l} y^{j+l} \\ - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k (j+1) v_{ij} \rho_{kl} x^{i-j+k-l} y^{j+l-1}. \quad (21)$$

Al igualar los coeficientes netos de potencias del mismo grado de (x,y) resultan $[\frac{1}{2}(n+1)(3n+2)]$ ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes u_{ij} , v_{ij} y ρ_{ij} , las cuales son integradas numéricamente respecto al tiempo, a partir de una condición inicial arbitraria. El proceso de integración que se siguió en este trabajo, es una combinación del método de Euler y del de "salto de rana" (Boyce, 1981).

Dados los coeficientes en cualquier tiempo, se pueden reconstruir los campos dinámicos y calcular los invariantes y las coordenadas del centro de gravedad utilizando las expresiones (18) y (19).

2.4. - Evolución de un rodón perturbado

Como ya se mencionó, el objetivo de este trabajo es analizar las deformaciones que sufra el campo de presiones de un RAC inestable, por efecto de una perturbación creciente. El RAC inicial es modelado en la forma de un rodón (Cushman-Roisin, et al., 1985; ver también Ripa, 1987)

$$u_* = u_0 \equiv (a/b) \Omega_* y_*, \quad (22)$$

$$v_* = v_0 \equiv -(b/a) \Omega_* x_*, \quad (23)$$

$$\rho = \rho_0 \equiv ab \Omega_* f_* \frac{1}{2} [1 - (x_*/a)^2 - (y_*/b)^2]. \quad (24)$$

el cual es caracterizado por su velocidad de rotación normalizada por el parámetro de Coriolis, Ω/f , y su excentricidad, a/b ; ver figura 1. A ésta solución se le suma una perturbación polinomial de orden n_p , ecs. (18) y (19), con coeficientes, en $t = 0$, elegidos al azar definiendo así la condición inicial.

Para asegurar la validez de los resultados se eligieron valores crecientes para el grado máximo del modelo n , pero empezando siempre desde la misma condición inicial (caracterizada por Ω/f , a/b y los coeficientes de la perturbación inicial, de orden n_p). Claramente debe ser $n \geq n_p$. Para que exista una perturbación creciente, debe

ser $n_p \geq 3$, ya que para $n > 2$, el modelo no es exacto: sólo se creará la solución por un tiempo tal que el incrementar el valor de n tenga un efecto insignificante.

El RAC solo está definido en el interior del contorno $p = 0$, que es el borde del remolino.

3.- RESULTADOS

3.1.- Resultados generales.

Un rodón elíptico sin perturbar, como ya se mencionó, rota con una velocidad angular Ω , visto bajo un sistema de referencia a la tierra, plano- f ; (ver figura 3). El uso del sistema coordenado auxiliar, el plano- f_* , que rota junto con el remolino, hace que veamos a un RAC estable y sin perturbar, fijo en el espacio en cualquier momento, como lo muestra la figura 4. El plano- f_* es, por lo tanto, el marco en el que se observa más claramente la perturbación al rodón.

A continuación, se presentan los resultados bajo los cuales se estableció la validez del modelo. Para esto se aprovecharon las características de las ecuaciones de Aguas Someras referentes a las oscilaciones del Centro de Gravedad (en adelante CG), y la conservación de las cantidades invariantes.

En la figura 5 se ven las oscilaciones de las coordenadas X y Y , del CG en los planos- f y f_* , como función del tiempo. Estas oscilaciones corresponden a un rodón con $\Omega/f = 0.2$ y $a/b = 0.4$, el cual fue perturbado para poder observar dichas oscilaciones. La coordenada temporal usada en ambos gráficos es $f_*t/2\pi$; en el plano- f se observa una oscilación inercial pura, mientras que en el plano- f_* se puede distinguir otra frecuencia de oscilación (Ω) debida a la transformación de coordenadas (en este caso

el período $2\pi/\Omega$ es igual a 5 períodos inerciales). En la figura 6, se muestran las trayectorias del CG del remolino, X vs Y , para los planos f y f_* . En el plano- f (Fig. 6a) se observa los círculos descritos por el CG, llamados círculos inerciales (Ball, 1963); para el plano- f_* (Fig. 6b), se ve la curiosa combinación de las frecuencias de oscilación, tanto del CG como la del sistema de referencia. Nótese que luego de 5 períodos inerciales se regresa exáctamente al mismo lugar. Respecto a las cantidades invariantes [V, E y A], se encontró que, para remolinos sin perturbación ($n_p = 0$) y con $n = 2$, siempre permanecieron constantes; cuando el remolino fue perturbado (con $n_p = n = 2$), se registró un incremento máximo de $\pm 1\%$ respecto a su valor inicial.

En las figuras (7) y (8) se muestran las regiones de estabilidad obtenidas por Ripa (1987), para perturbaciones infinitesimales de grado n . En estas gráficas están marcados con un asterisco los casos analizados en este trabajo.

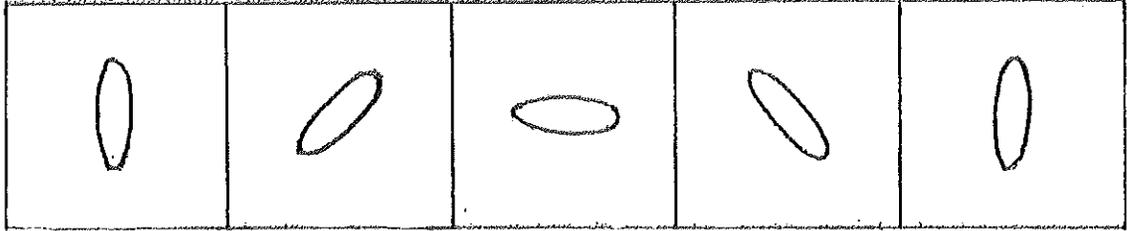


Figura 3.- Evolución temporal de un remolino estable sin perturbación, relativo al plano- f . [$a/b = 0.3$, $\Omega/f = 0.4$ y $n = 2$].

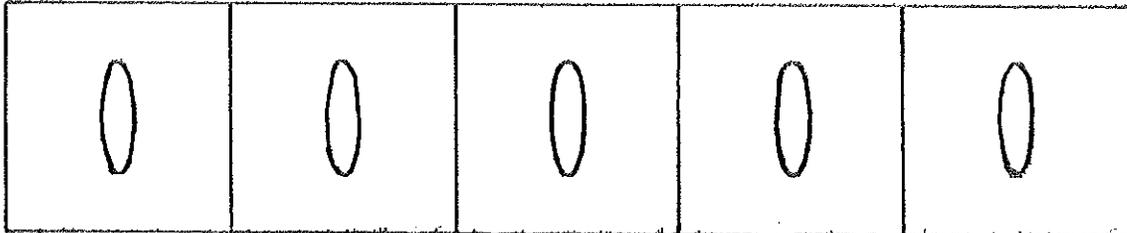


Figura 4.- Mismo caso que en Fig. 3, solo que visto bajo el plano- f_* .

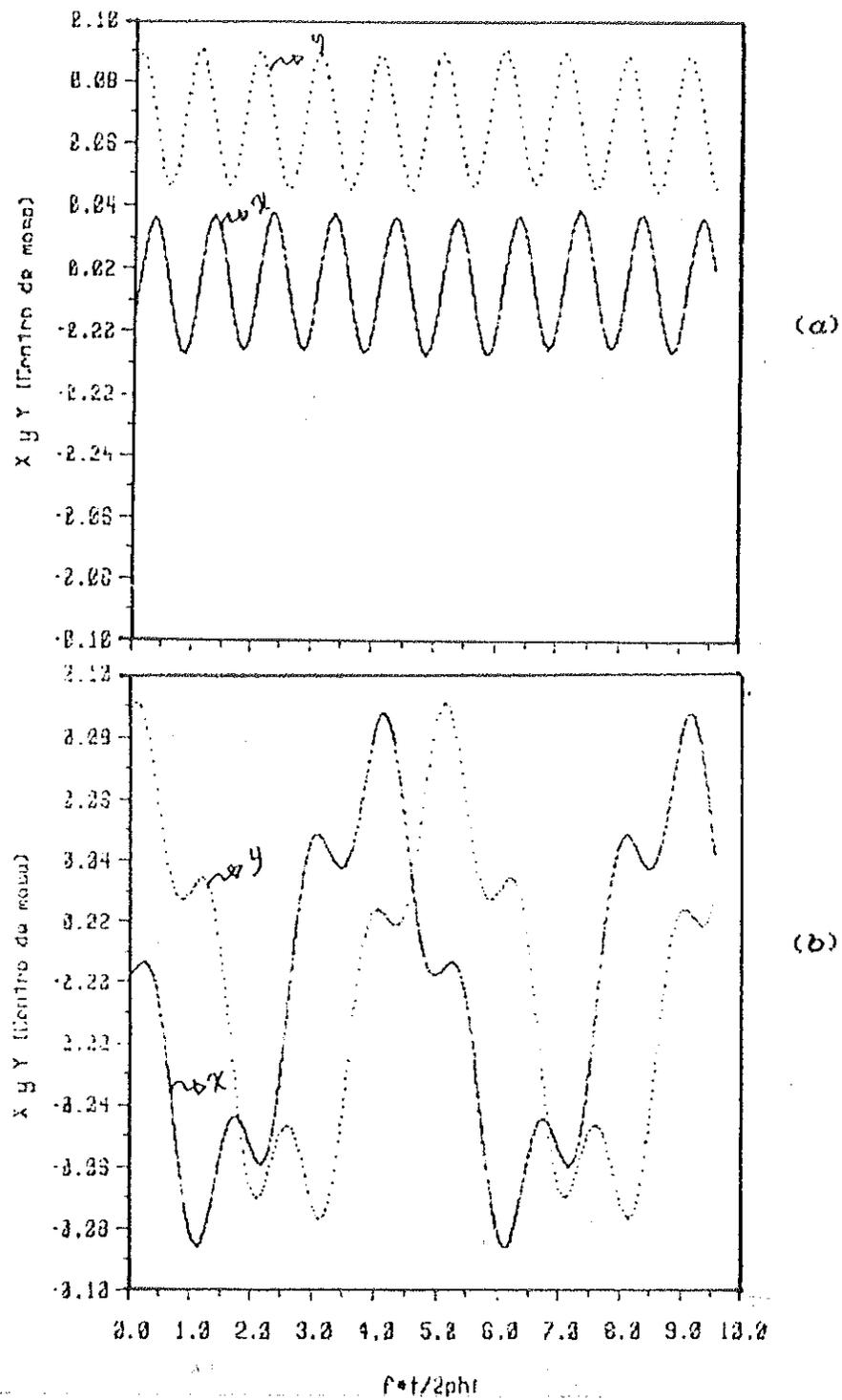
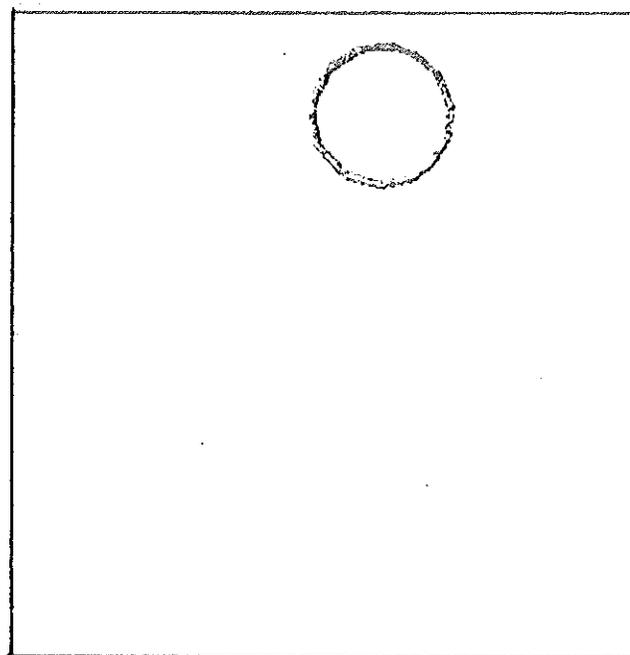
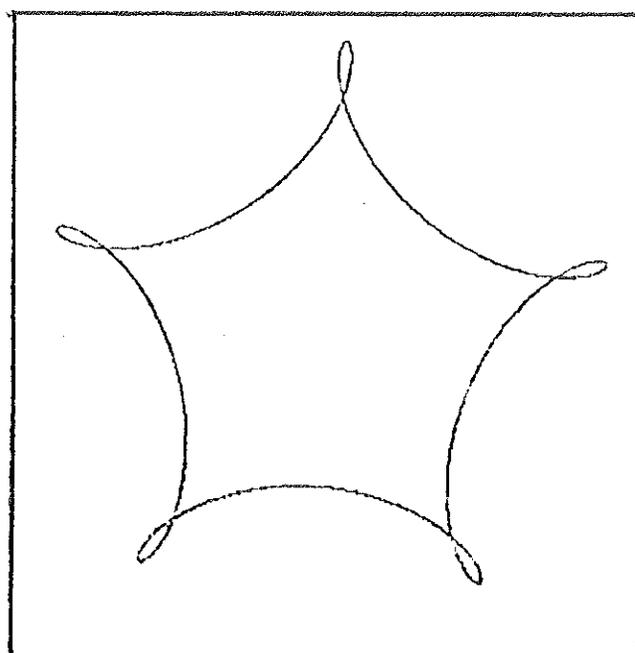


Figura 5. - Coordenadas X y Y del Centro de Gravedad de un remolino estable, pero con perturbación, relativas al tiempo; para el plano- f (a) y (b) plano- f_* . [$a/b = 0.4, \Omega/f = 0.2$ y $n = 21$].



(a)



(b)

Figura 6. - Trayectorias del Centro de Gravedad (X vs Y) para el mismo remolino de la Fig. 5. (a) $\text{plano-}f$ y (b) $\text{plano-}f_*$.

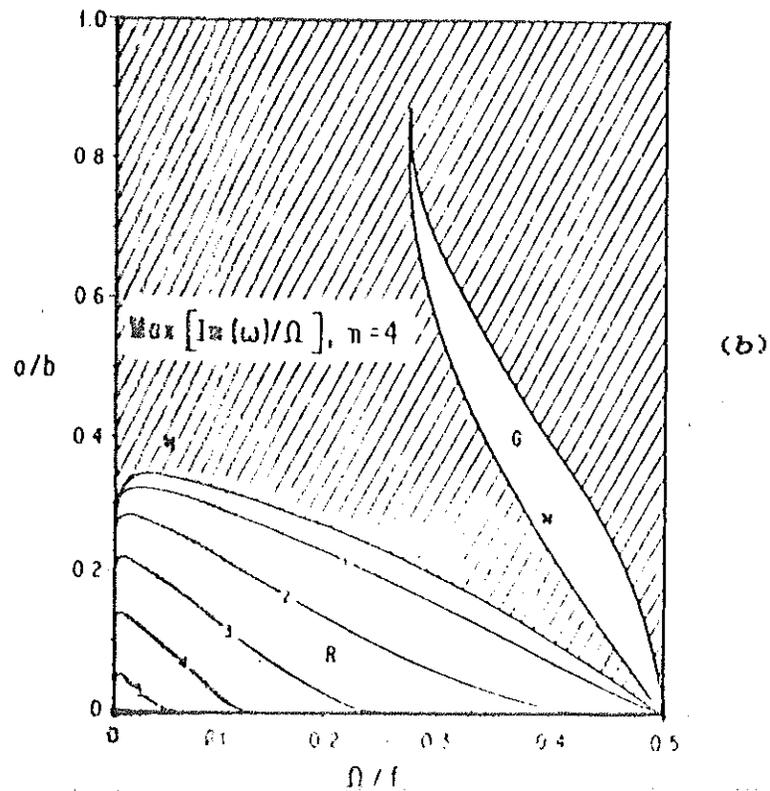
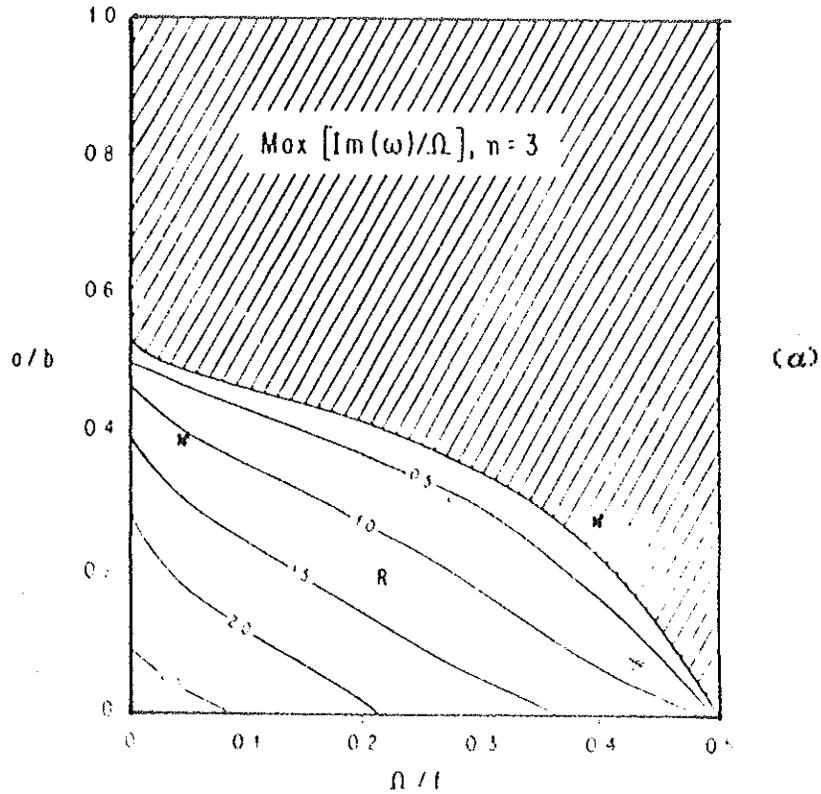


Figura 7.- Regiones de estabilidad (zona sombreada) para rodones en el espacio a/b vs Ω/f como función del grado polinomial n de una perturbación infinitesimal. (a) $n = 3$ y (b) $n = 4$. (Los asteriscos representan las casos mostrados en éste trabajo). [Rina, 1987]

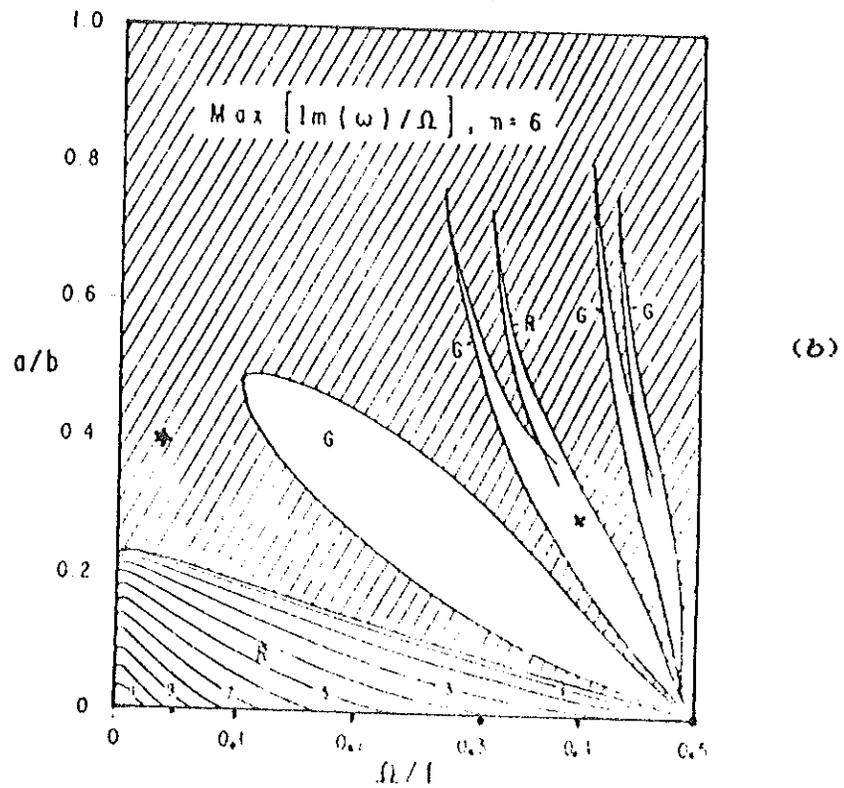
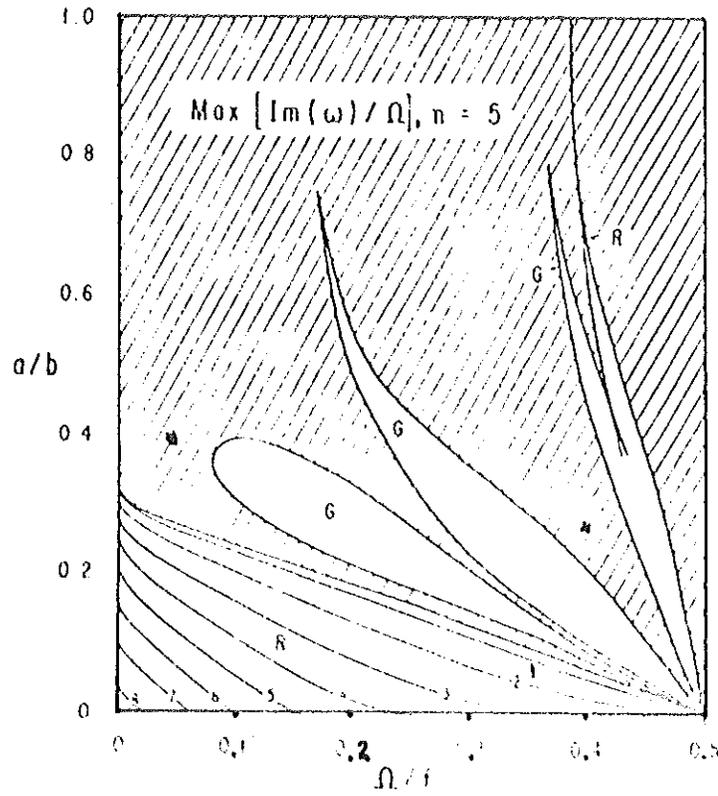


Figura 8.- Idéntica que la Fig. 7, para $n = 5$ (a) y $n = 6$ (b). [Ripa, 1987].

3.2. - Análisis gráfico de contornos.

Para perturbaciones infinitesimales de grado $n_p = 2$, un rodón es estable en todo el espacio a/b vs Ω/f (Ripa 1987); cuando $n_p \geq 3$, el rodón se torna inestable para ciertas regiones del mismo espacio [ver figuras 7 y 8].

En la figura 9 se muestra el contorno de presión al tiempo $t = 0$, para un rodón sin perturbar con $a/b = 0.4$ y $\Omega/f = 0.05$ (bajo estos parámetros el rodón es inestable ante perturbaciones infinitesimales con $n_p = 3$; ver fig. 7). La evolución del rodón de la fig. 9, perturbado, es mostrada en la figura 10, para diferentes órdenes de la solución total ($n = 3, 4$ y 5 superpuestos en la parte superior y $n = 6, 7$ y 8 en la inferior) y para idénticas condiciones iniciales con $n_p = 3$. El intervalo de tiempo entre un conjunto de figuras y las inmediatamente a su derecha es de $f\Delta t = \pi/12$. Estas figuras están graficadas en el plano- f_* , donde un rodón sin perturbar es estacionario, por lo que las diferencias con la elipse de la fig. 9 representan la perturbación. La solución exacta, numericamente inalcanzable, corresponde a $n \rightarrow \infty$; las diferencias entre los contornos superpuestos y entre los superiores e inferiores, ilustran las limitaciones del modelo para valores finitos de n . La solución ya no es válida cuando el dominio de $p \geq 0$ se vuelve repentinamente infinito (lo que se muestra por un contorno de $p = 0$ abierto) situación que como era de esperarse, ocurre más y

más tarde a medida que aumenta n .

Los mismos resultados se presentan en la figura 11, agrupando los diferentes tiempos en forma separada para cada valor de n . La figura 12 es similar a la anterior pero para una amplitud menor de la perturbación. Finalmente en la figura 13 se muestra el mismo caso de la figura 12, sólo que referido al plano- f .

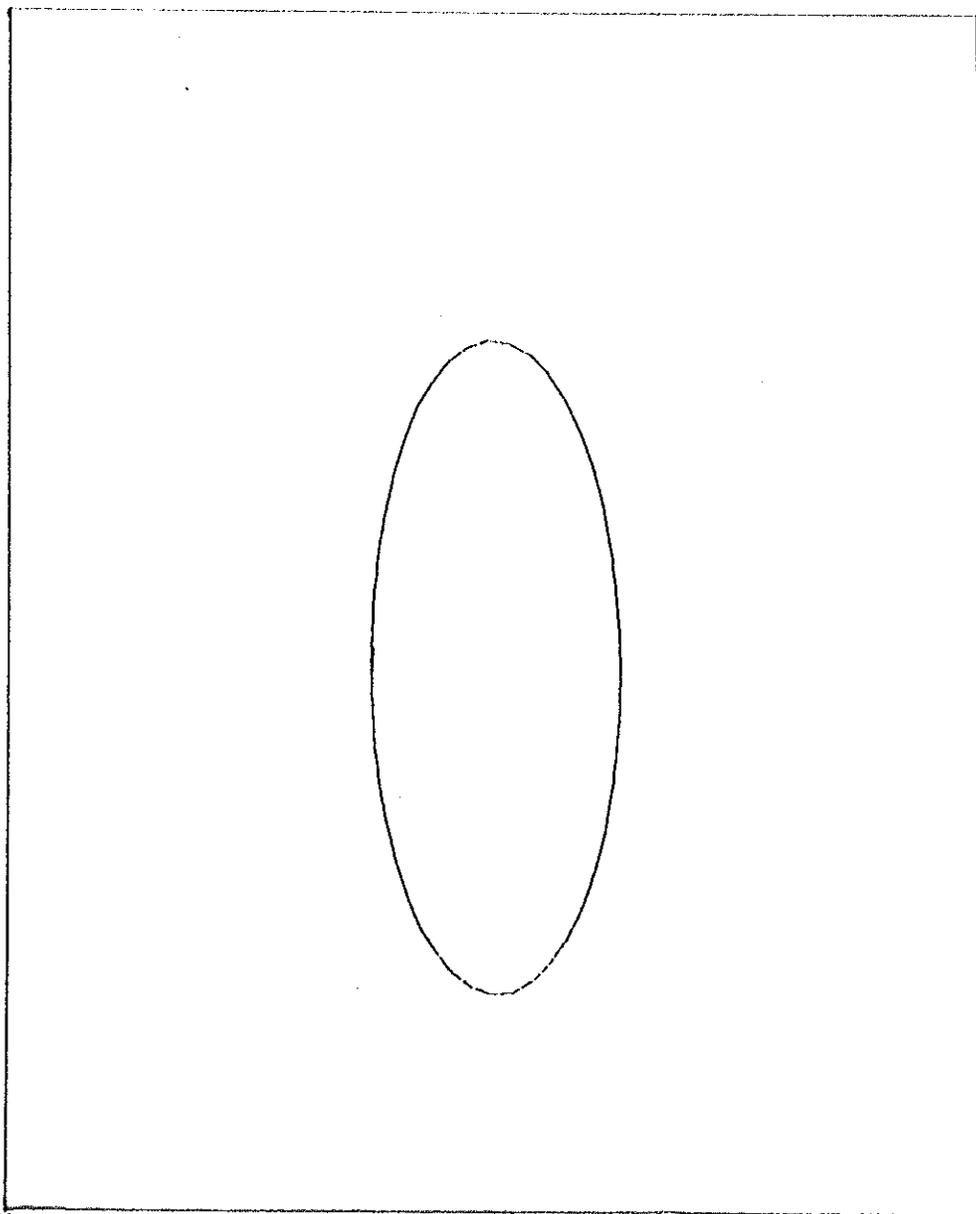


Figura 9.- Contorno de presión al tiempo $t = 0$ para un rodón con $a/b = 0.4$ y $\Omega/f = 0.05$, relativo al plano- $f_{\#}$, sin perturbación.

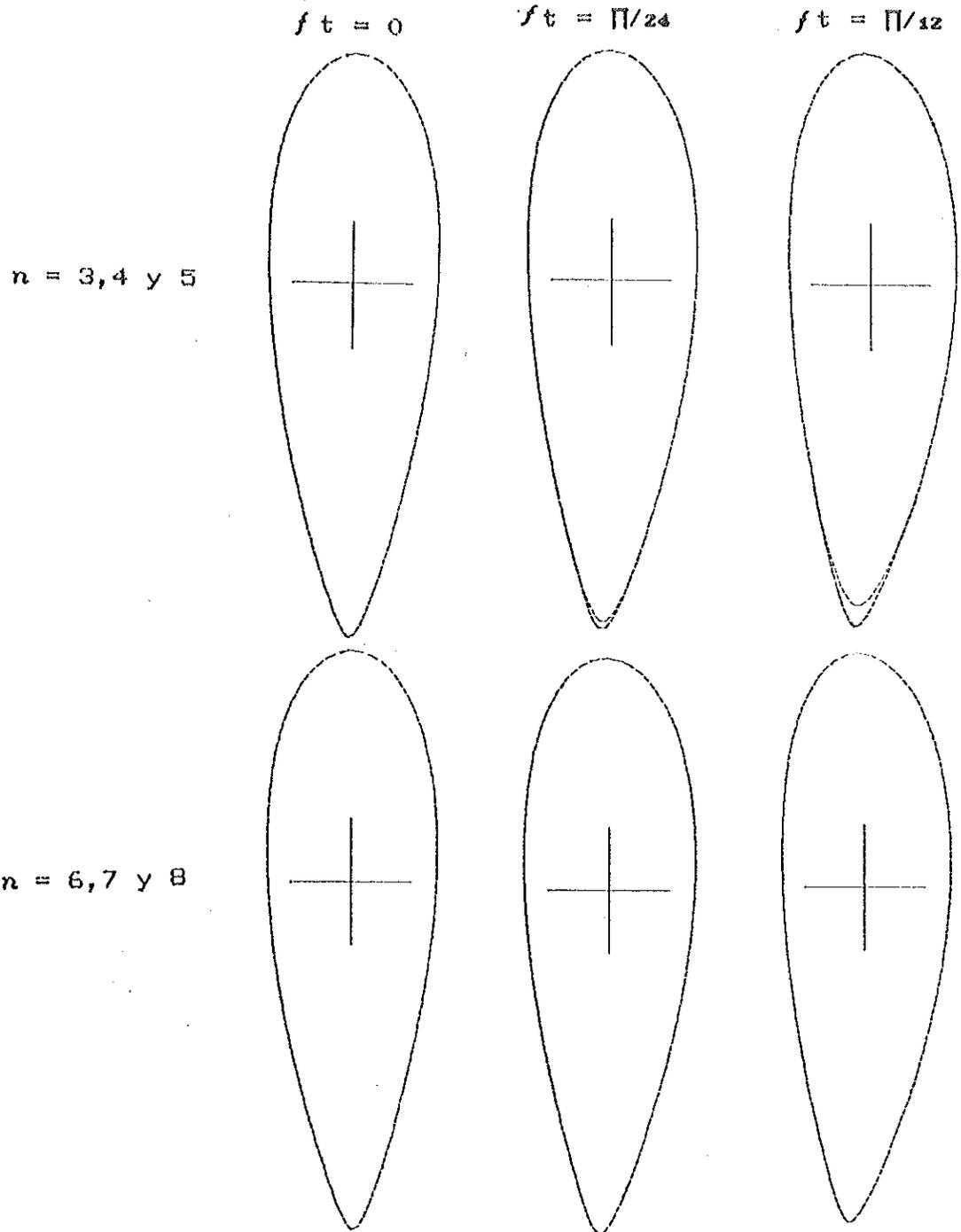
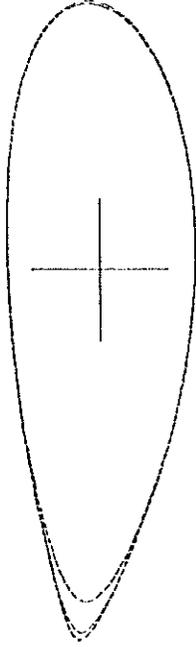
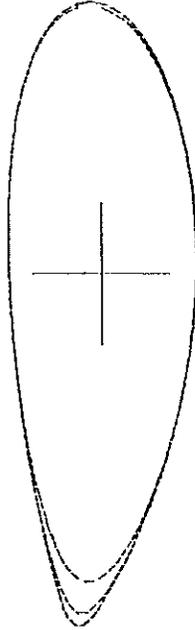


Figura 10.- Secuencia temporal de contornos de presión en el plano- f_* , de un remolino inestable con excentricidad $a/b = 0.4$ y velocidad angular $\Omega/f = 0.05$; en la parte superior están ensamblados para cada tiempo, los casos $n = 3, 4$ y 5 , y en la parte inferior están ensamblados los casos $n = 6, 7$ y 8 .

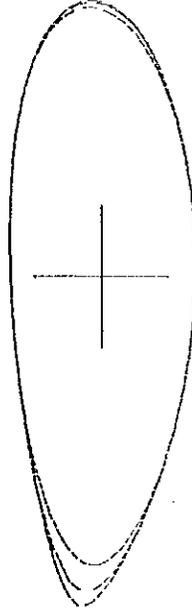
$$f t = \pi/8$$



$$f t = \pi/6$$



$$f t = 5\pi/24$$



$$f t = \pi/4$$

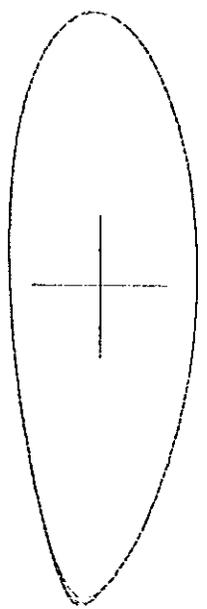
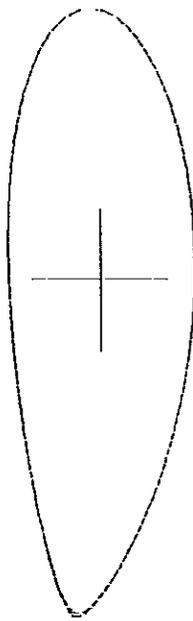
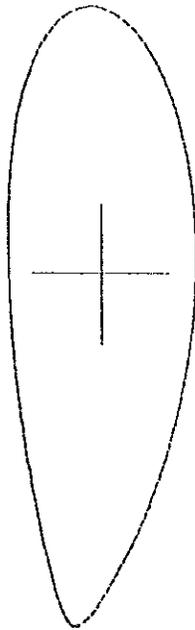
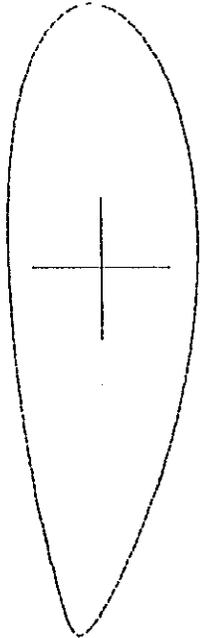
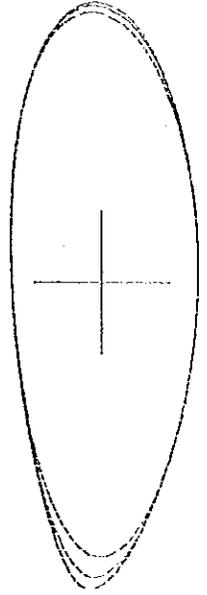
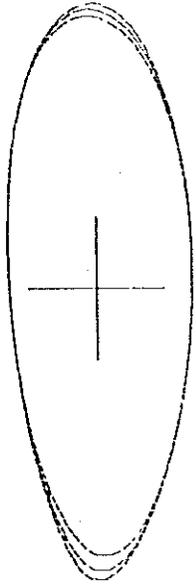
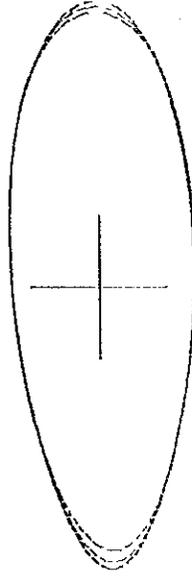


Figura 10. - Continuación.

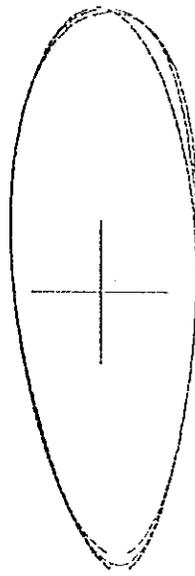
$$f t = 7\pi/24$$



$$f t = \pi/8$$



$$f t = 5\pi/24$$



$$f t = 10\pi/24$$

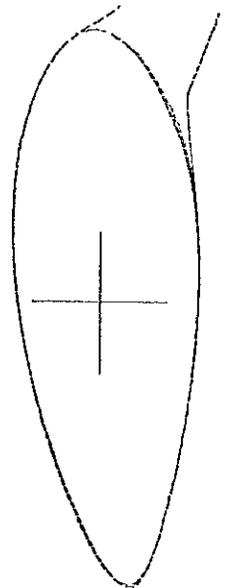
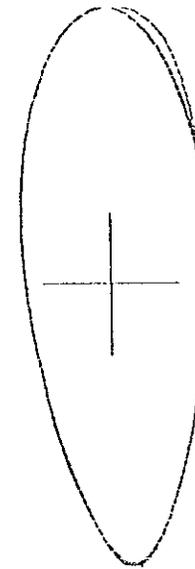
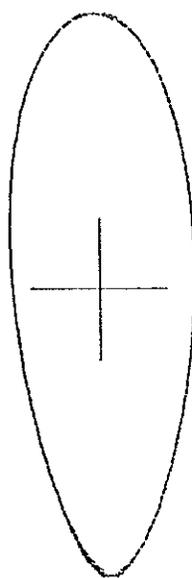
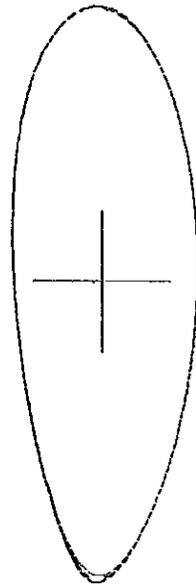
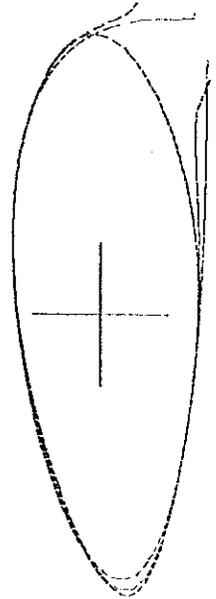


Figura 10. - Continuación.

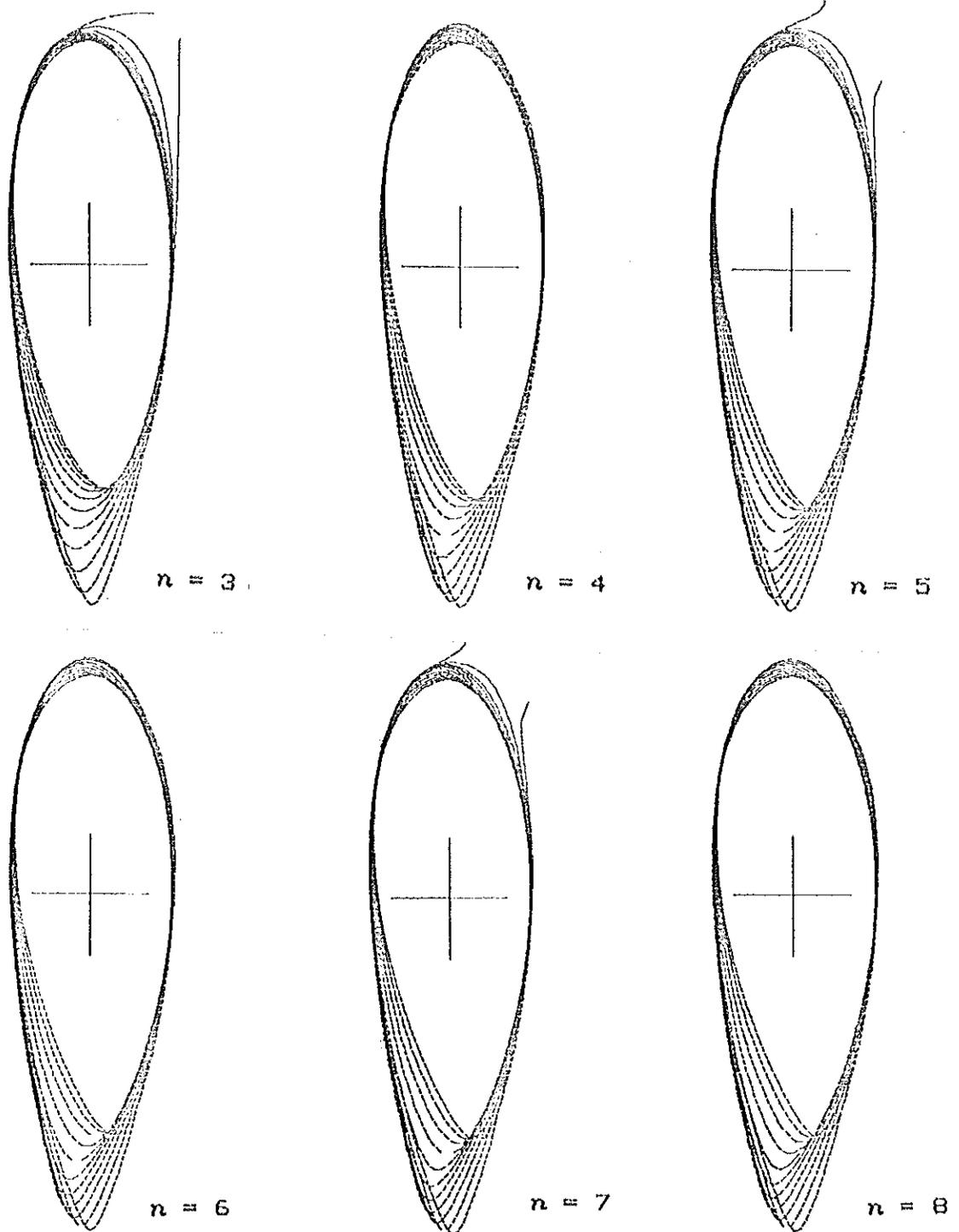


Figura 11.- Contornos de presión ensamblados en tiempo y n fijo, para el caso mostrado por la figura 10.

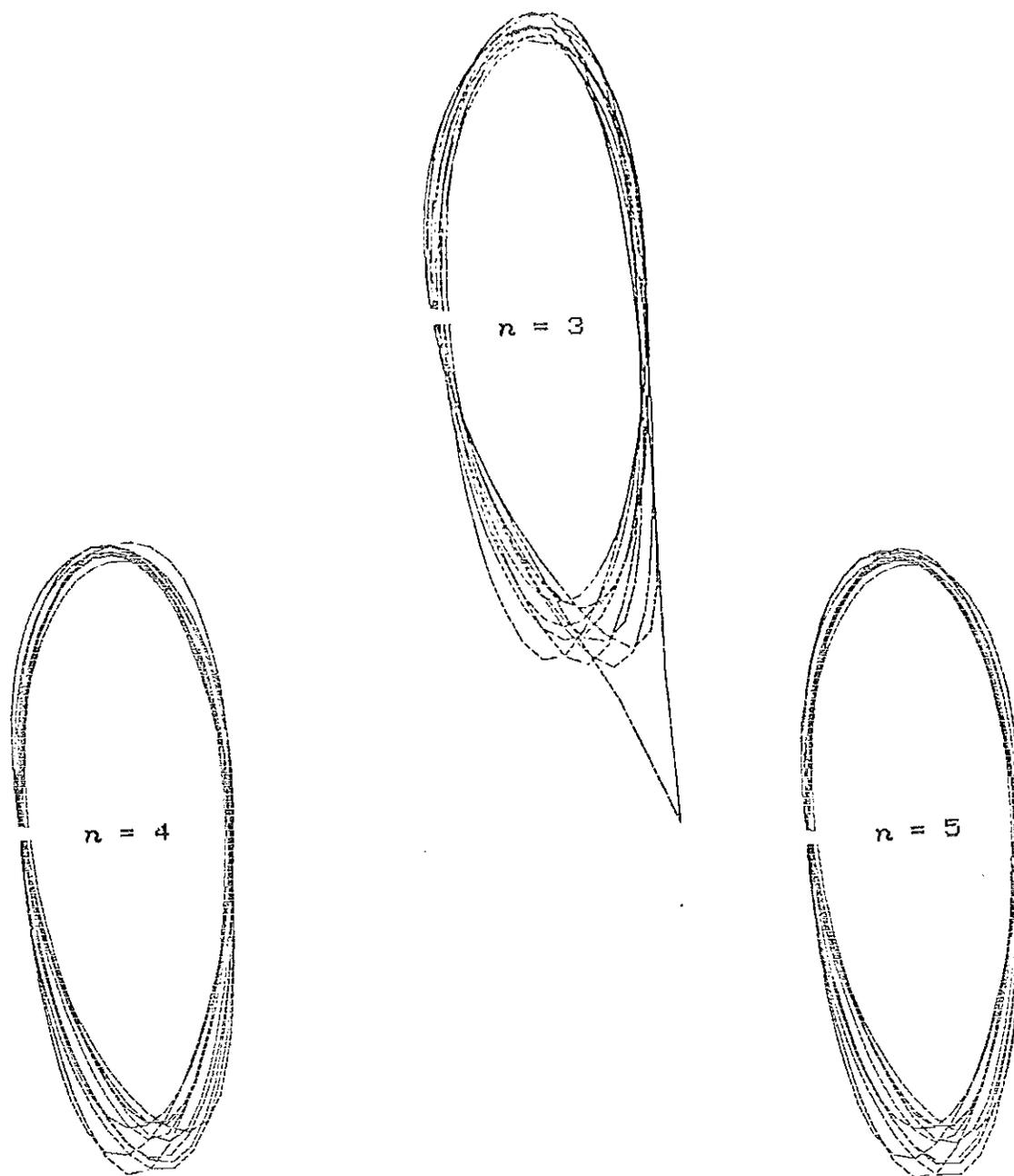


Figura 12.- Contornos de presión ensamblados en el tiempo para el mismo caso que Fig. 11, sólo que la perturbación es menor (plano- f_*).

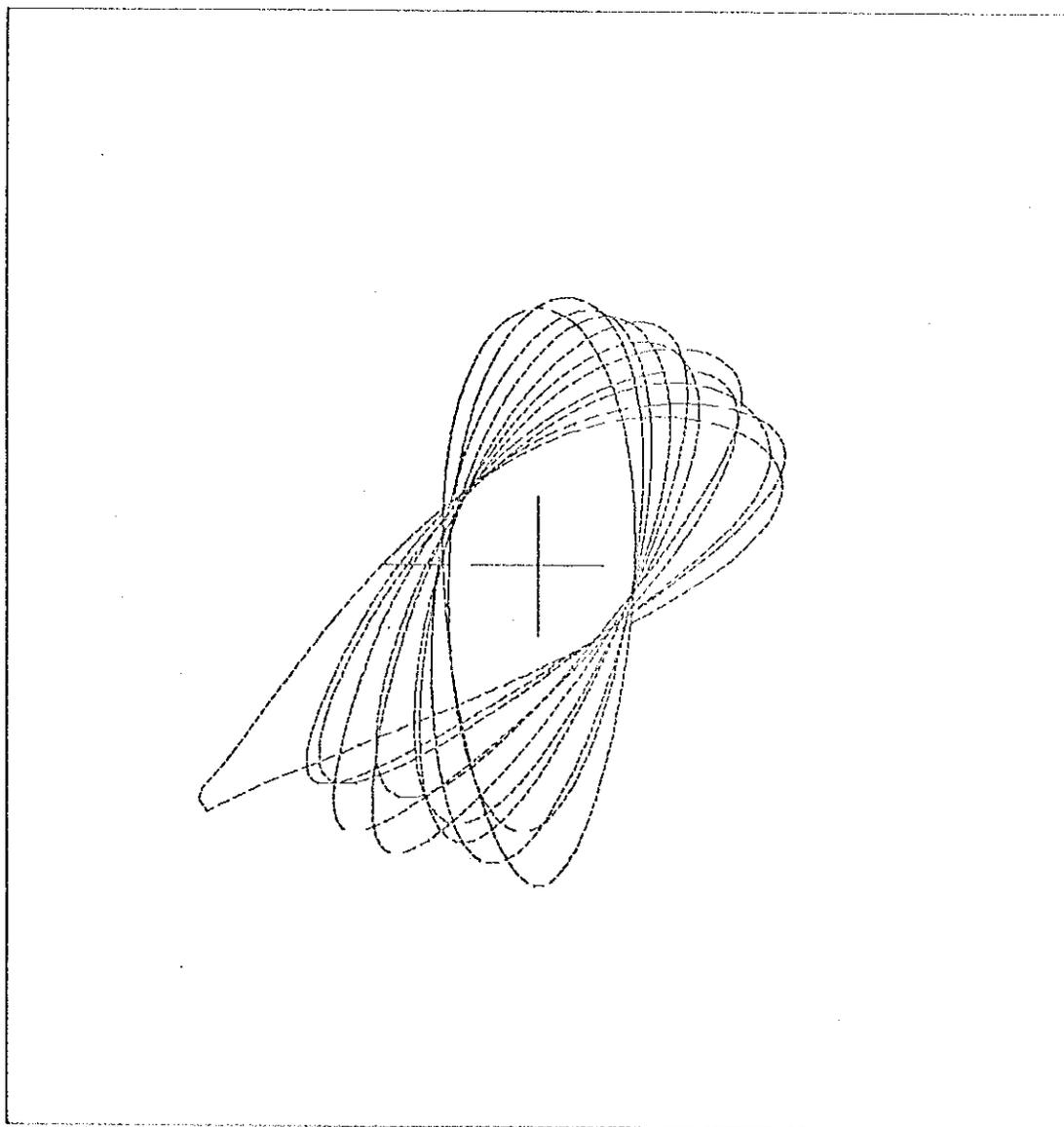


Figura 13.- Mismo caso que en la figura (12), sólo que, referido al plano- f .

4.- DISCUSIONES Y CONCLUSIONES

Con el objetivo de estudiar la evolución de un remolino elíptico inestable sujeto a una perturbación inicial pequeña se utilizan las Ecuaciones de Aguas Someras (EAS), las que tienen la estructura vertical más sencilla. Por otra parte la frontera horizontal del dominio de integración varía con el tiempo, lo que implica un problema matemáticamente muy difícil de resolver, particularmente por haber divergencia del flujo horizontal. Para atacarlo, se desarrolla un modelo numérico, utilizando una representación polinomial de los campos de presión y velocidad, con grados n y $n-1$ respectivamente; el modelo exacto correspondería al límite $n \rightarrow \infty$. Los coeficientes de los polinomios son función del tiempo, y su evolución se obtiene integrando numericamente las ecuaciones alineales; el tiempo de integración crece aproximadamente como el cuadrado de n . Si el remolino es inestable, la perturbación crece rápidamente durante un cierto intervalo luego del cual la solución pierde sentido físico; por lo menos para $n \leq 8$. Durante el intervalo de validez del modelo, obtenemos resultados prácticamente indistinguibles para valores de $n > 5$. Además, se logran reproducir las características básicas asociadas a las EAS: oscilaciones inerciales del centro de gravedad y conservación de cantidades invariantes. Estos resultados dan la pauta para confiar en la validez y correcto funcionamiento del modelo.

La condición inicial tiene la forma de un "rodón" (Cushman- Roisin et al., 1985) más una perturbación pequeña. El primero es una solución exacta de las EAS, y representa un remolino elíptico, tal que la presión es una función cuadrática de las coordenadas espaciales, mientras que las velocidades son lineales. Para la perturbación, estos campos son también polinomios con grados n_p y n_p-1 respectivamente. Claramente debe ser $n \geq n_p$; para $n > n_p > 2$, los coeficientes correspondientes a potencias mayores a n_p son inicialmente nulos, pero luego son activados por efecto de la alinealidad.

Si $n_p = 2$, se observa que el rodón pulsa sin perder su forma elíptica, manteniéndose estable ante esta perturbación; resultado que ya habían sido predicho analíticamente por Ball (1963), Cushman-Roisin et al. (1985), Young (1987) y Ripa (1987). Para $n_p > 2$, además de pulsar, los remolinos inestables pierden su forma elíptica, generándose un acuñaamiento en uno de sus extremos, que podría convertirse en un filamento, aunque éste no llega a definirse claramente debido a que el modelo utilizado deja de tener validez. Dritschel (1986) estudiando el problema de un vortice sin divergencia horizontal, para el que se puede aplicar el método de 'dinámica de contornos', también observa la formación de filamentos; esto de alguna manera refuerza nuestros resultados.

Si efectivamente los remolinos inestables modelados

por las EAS generan filamentos, tal y como es insinuado por nuestros resultados, su estudio constituye un problema numérico extremadamente complicado, ya que el dominio de la solución tiene un ancho cada vez más pequeño. En particular creemos que es muy difícil que pueda ser atacado por los "métodos de diferencias" finitas o de "partículas en celda"; este problema constituye un desafío a la imaginación de los modelistas numéricos.

LITERATURA CITADA

- Ball, F.K., 1963. Some general theorems concerning the finite motion of a shallow rotating liquid lying on a paraboloid. J. Fluid Mech., (17): 240-256.
- Boyce, W.E. y R.C. DiPrima., 1981. Ecuaciones Diferenciales Y Problemas con Valores en la Frontera. Ed. Limusa, 744 pp.
- Csanady, G.T., 1979. The birth and death of a warm core ring. J. Geophys. Res., (84): 777-780.
- Cushman-Roisin, B., 1984. An exact analytical solution for a time-dependent, elliptical warm-core ring with outcropping interface. Ocean. Modelling., (59): 5-6.
- ., Heil, W. H. and Nof, D., 1985. Oscillations and rotations of elliptical warm-core rings. J. Geophys. Res., (90): 11756-11764.
- ., 1987. Exact analytical solutions for elliptical vortices of the shallow-water equations. Tellus, (39A): 235-244.
- Dritschel, D. G., 1986. The nonlinear evolution of rotating configurations of uniform vorticity. J. Fluid Mech. (172): 157-182.
- Evan, R. H., Baker, K. S., Brown, O.B. and R.C. Smith., 1985. Chronology of warm-core Ring 82b. J. Geophys. Res., (90): 8803-8811.
- Flierl, G. R., 1984. Rossby wave radiation from a strongly nonlinear warm eddy. J. Phys. Ocean., (14): 47-58.
- Houghton, R.W., D.B. Olson, and P.J. Celone, 1986. Observation of an anticyclonic eddy near the continental shelf break of New England. J. Phys. Ocean., (16): 60-71.
- Joyce, T.M., 1984. Velocity and hydrographic structure of a Gulf Stream warm-core ring. J. Phys. Ocean., (14): 936-947.
- Nof, D., 1981. On the beta-induced movement of isolated baroclinic eddies. J. Phys. Ocean., (11): 1662-1672.
- Olson, D.B., Schmitt, R.W., Kennelly, M. and T.M. Joyce., 1985. A Two-Layer Diagnostic Model of the Long-Term Physical Evolution of Warm-Core. J. Geophys. Res. (90), C5: 8813-8822.
- Pedlosky, J., 1982. Geophysical Fluid Dynamics. Ed. Springer-Verlag. 624 pp.

- Ripa, P., 1987. On the stability of elliptical vortex solution of the shallow-water equations. J. Fluid Mech., (183): 343-363.
- Thacker, W.C., 1981. Some exact solution to the nonlinear shallow-water wave equations. J. Fluid Mech., (107): 499-508.
- Warm Core Rings Executive Committee., 1982. Multidisciplinary program to study warm core ring. EOS. Trans., (63), 834.
- Yentsch, C.S. and Phinney, D.A., 1985. Rotary motions and convection as a means of regulating primary production in warm core ring. J. Geophys. Res. (90): 3237-3248.
- Young, W.R., 1987. Elliptical vortices in shallow water. J. Fluid Mech. (171): 101-119.