

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

**FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO
ENSENADA**



Ingeniería en Electrónica

Diseño de Trayectorias para Robots Móviles Tipo Diferencial

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Ingeniero en Electrónica

presenta:

YORK ALFREDO VARA HERRERA

Ensenada, Baja California, México. Marzo 2018.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

UNIDAD ENSENADA

Diseño de Trayectorias para Robots Móviles Tipo Diferencial

TESIS

que para obtener el grado de ingeniero en electrónica presenta:

YORK ALFREDO VARA HERRERA

Y aprobada por el siguiente comité:



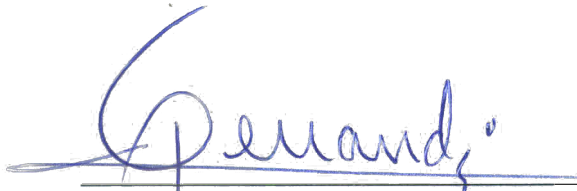
Dr. Adrián Arellano Delgado - -

Codirector de Tesis



Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Codirector de Tesis



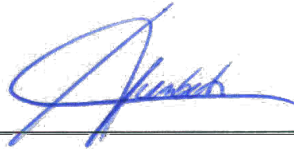
Dr. Cesar Cruz Hernández

Miembro del Comité



Dra. Liliana Cardoza Avendaño

Miembro del Comité



Dr. Humberto Cervantes de Ávila

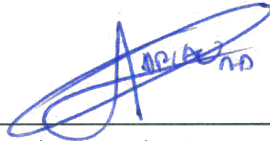
Miembro del Comité

Marzo 2018.

RESUMEN de la tesis de **York Alfredo Vara Herrera**, presentada como requisito parcial para obtener el grado de INGENIERO EN ELECTRÓNICA. Ensenada, B.C. México, Marzo 2018.

Diseño de Trayectorias para Robots Móviles Tipo Diferencial

Resumen aprobado por:



Dr. Adrián Arellano Delgado

Codirector de Tesis



Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Codirector de Tesis

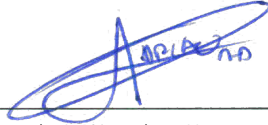
En este trabajo de tesis se aborda el problema de diseño de trayectorias y seguimiento de las mismas por parte de un robot móvil diferencial. Para lograr el objetivo de la tesis, se enfatiza la teoría de sistemas dinámicos y en particular se utiliza como base el diseño de una ley de control linealizada, que permite al robot móvil realizar el seguimiento de trayectorias previamente generadas mediante ecuaciones paramétricas, utilizando el modelo cinamático más simple de un robot móvil diferencial Khepera III. Se presentan los resultados numéricos obtenidos en simulación y los resultados de la implementación experimental, demostrando el seguimiento satisfactorio de una trayectoria deseada. Las posibles aplicaciones son: de transporte de objetos, vigilancia, exploración, etc.

Palabras clave: Robot móvil diferencial, Trayectoria deseada, Sistema dinámico, Robot Khepera III, Seguimiento de trayectoria, Ecuación paramétrica.

ABSTRACT of the thesis presented by **York Alfredo Vara Herrera**, as a partial requirement to obtain the ELECTRONIC ENGINEER degree. Ensenada, B.C. México, March 2018.

Differential-Drive Mobile Robot Trajectory Design

Abstract approved by:



Dr. Adrián Arellano Delgado

Thesis codirector



Dra. Rosa Martha López Gutiérrez

Thesis codirector

This thesis addresses the problematic that represents the design and tracking of a desired path with a differential drive robot. To achieve the main goal, we must emphasize the dynamic systems and especially the design of a control law using the basic kinematic model of the Khepera III mobile robot, that allows the robot a succesful path tracking, which are previusly generated with parametric equations. We present the numerical results of the simulation and the experimental results, that shows a succesful trajectory tracking. With the potential applications of transport service, surveillance, exploration, etc.

Keywords: Differential drive robot, Desired path, Dynamic system, Robot Khepera III, Path tracking, Parametric equation.

Dedicatoria

A
Catarino Vara Ramírez
y
Laureano Herrera Bonilla

“Pilares de la familia en la que fui formado”.

Agradecimientos

A **Dios** por la bendición de permitirme llegar y finalizar esta etapa tan importante.

A **Estela Herrera Sandoval**, por ser una mujer excepcional que ha sabido afrontar cada una de las adversidades que se han presentado en su vida y que a pesar de ello se esfuerza en dar lo mejor de sí para con los demás, especialmente con su familia. Por darme la vida y guiarme hacia el camino correcto con lecciones que terminaban en “Un día me lo agradecerás”. Ese día es hoy, te amo mamá.

A **Pablo A. Vara Aragón**, por mostrarme a su manera los caminos que deben ser recorridos por el hombre y en los que se debe andar con cuidado. Por compartir las experiencias vividas, los consejos, palabras de aliento y cariño que solo un padre puede dar. Gracias, totales!

A mis hermanas **Alexa** y **Katia**, por el apoyo y el cariño que me han brindado desde el primer día en que abrieron sus ojos.

A **Erick González de la Cruz** y **Rigoberto Reyes Curiel**, por demostrarme el significado de una verdadera amistad y camaradería. Así como los amigos que han creído en mí, brindándome su apoyo y palabras de aliento durante la secundaria, preparatoria y universidad.

A la familia **Monroy López**, por aceptarme como un miembro más durante el último año de preparatoria. Especialmente a la **Sra. María de Jesús López Herrera**, por todo el sustento y consejos que me brindó.

Al **Dr. Adrián Arellano Delgado**, por el tiempo y dedicación que ha puesto como codirector de esta tesis. En especial, muchas gracias por la ayuda y su valioso aprecio, dentro y fuera del ámbito académico.

A la **Dra. Rosa Martha López Gutiérrez**, por toda la atención y amabilidad mostrada durante mi desarrollo como estudiante de licenciatura y tesista, especialmente por su apreciable amistad.

Al **Dr. Cesar Cruz Hernández**, por toda la atención, confianza y compromiso que mostró durante la elaboración de este trabajo, así como por su estimable amistad.

A cada uno de los miembros del grupo **Sincronización y Sistemas Complejos**, por su ayuda y sobre todo amistad hacia mí.

A la **Universidad Autónoma de Baja California U.A.B.C.**, por fungir como mi casa de estudios durante mi formación profesional, permitiéndome culminar la Licenciatura como Ingeniero en Electrónica.

Al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)** por el apoyo económico brindado.

Ensenada, B. C. México.
XX de XXX de XX.

YORK ALFREDO VARA HERRERA

Tabla de Contenido

	Página
Resumen	iii
Abstract	iv
Agradecimientos	vii
Lista de Figuras	xi
1 Introducción	1
1.1 Estado del arte	2
1.2 Motivación	5
1.3 Planteamiento del problema de estudio	5
1.3.1 Hipótesis	5
1.3.2 Propuesta de solución	6
1.4 Objetivos	6
1.4.1 Objetivos generales	6
1.4.2 Objetivos específicos	6
1.5 Organización de la tesis	7
2 Sistemas dinámicos	9
2.1 Sistema	9
2.2 Modelo del sistema	10
2.3 Sistema lineal y no lineal	11
2.4 Conclusiones del capítulo	12
3 Robot móvil diferencial	13
3.1 Modelo cinemático del robot móvil diferencial	13
3.2 Movimientos básicos de un robot móvil diferencial	15
3.3 Tareas básicas de un robot móvil diferencial	17
3.4 Conclusiones del capítulo	18
4 Ley de control para la asignación de trayectorias	19
4.1 Linealización por retroalimentación dinámica	19
4.2 Cálculo de las velocidades angulares ω_R y ω_L para el robot diferencial	22
4.3 Ley de control	23
4.4 Trayectorias deseadas	23
4.4.1 Punto deseado (regulación)	24
4.4.2 Trayectoria circular	25
4.4.3 Trayectoria de forma infinito/ocho (Lemniscata)	26
4.4.4 Trayectorias con la forma de rosa polar	27
4.4.5 Trayectoria con la forma de espiral	29
4.4.6 Trayectorias con la forma de epicicloides	30
4.4.7 Trayectorias con forma de hipocicloides	31
4.4.8 Trayectoria con la forma de órbitas	33
4.4.9 Trayectorias especiales	34
4.4.9.1 Trayectoria con la forma de pescado	34

		Página
	4.4.9.2 Trayectoria con la forma de elefante	35
	4.4.9.3 Trayectoria con la forma de zorro	36
	4.5 Conclusiones del capítulo	37
5	Simulación en Matlab	38
5.1	Metodología para la simulación de los movimientos básicos del robot móvil diferencial	38
5.1.1	Simulación de los movimientos básicos del modelo del robot móvil diferencial	39
5.2	Metodología para la simulación de trayectoria asignada al robot móvil diferencial	45
5.2.1	Parámetros de la simulación de trayectorias	46
5.3	Dinámicas de las velocidades angulares (ω)	47
5.4	Punto deseado	48
5.5	Trayectoria circular	52
5.6	Trayectoria con la forma de infinito	56
5.7	Trayectoria con la forma de ocho	59
5.8	Trayectorias con la forma de rosa polar	62
5.8.1	Rosa polar con 3 pétalos ($n=3$)	62
5.8.2	Rosa polar de 4 pétalos ($n=2$)	65
5.8.3	Rosa polar de 5 pétalos ($n=5$)	69
5.8.4	Rosa polar de 7 pétalos ($n=7$)	72
5.9	Trayectoria con la forma de espiral	75
5.10	Trayectorias con la forma de epicicloides	78
5.10.1	Cardioide ($k=1$)	78
5.10.2	Nefroide ($k=2$)	82
5.10.3	Epicicloide de 3 arcos ($k=3$)	85
5.10.4	Epicicloide de 4 arcos ($k=4$)	88
5.10.5	Epicicloide de 6 arcos ($k=6$)	91
5.10.6	Evoluta de cardioide ($k=0.5$)	94
5.10.7	Epicicloide con 3 cúspides ($k=0.6$)	97
5.10.8	Epicicloide con 4 cúspides ($k=0.8$)	100
5.11	Trayectorias con la forma de hipocicloides	103
5.11.1	Deltoide ($k=1$)	103
5.11.2	Astroide ($k=2$)	106
5.11.3	Hipocicloide con 5 puntas ($k=3$)	109
5.11.4	Hipocicloide con 10 puntas ($k=1.3333$)	112
5.12	Trayectoria con forma de órbitas	115
5.13	Trayectorias especiales	118
5.13.1	Pescado	118
5.13.2	Elefante	121
5.13.3	Zorro	124
5.14	Conclusiones del capítulo	127
6	Khepera III y OptiTrack	128
6.1	Equipo de laboratorio	128
6.2	Khepera	128

	Página
6.3 Motive y cámaras OptiTrack	130
6.4 TCP/IP	130
6.5 Conclusiones del capítulo	131
7 Implementación Experimental	132
7.1 Metodología para la implementación experimental	132
7.2 Punto deseado	134
7.3 Trayectoria Circular	137
7.4 Trayectoria con la forma de infinito	140
7.5 Trayectoria con la forma de ocho	143
7.6 Trayectorias con la forma de rosa polar	146
7.6.1 Rosa polar con 3 Pétalos	146
7.6.2 Rosa polar con 4 Pétalos	149
7.6.3 Rosa polar con 5 Pétalos	152
7.6.4 Rosa polar con 7 Pétalos	155
7.7 Trayectoria con la forma de espiral	158
7.8 Trayectorias con la forma de epicicloides	161
7.8.1 Cardioide ($k=1$)	161
7.8.2 Nefroide ($k=2$)	164
7.8.3 Epicicloide de 3 arcos ($k=3$)	167
7.8.4 Epicicloide de 4 arcos ($k=4$)	170
7.8.5 Epicicloide de 6 arcos ($k=6$)	173
7.8.6 Evoluta de cardioide ($k=0.5$)	176
7.8.7 Epicicloide con 3 cúspides ($k=0.6$)	179
7.8.8 Epicicloide con 4 cúspides ($k=0.8$)	182
7.9 Trayectorias con la forma de hipocicloides	185
7.9.1 Deltoide ($k=1$)	185
7.9.2 Astroide ($k=2$)	188
7.9.3 Hipocicloide con 5 puntas ($k=3$)	191
7.9.4 Hipocicloide con 10 puntas ($k=1.3333$)	194
7.10 Trayectoria con forma de órbitas	197
7.11 Trayectorias especiales	200
7.11.0.1 Pescado	200
7.11.0.2 Elefante	203
7.11.0.3 Zorro	206
7.12 Conclusiones del capítulo	209
8 Conclusión	210
8.1 Trabajo a futuro	211

Lista de Figuras

Figura		Página
1	a) Robot móvil, b) Robot industrial, c) Robot zoomórfico, d) Robot médico, e) Robot poli-articulado y f) Robot tele-operado.	2
2	Vista superior esquemática de un robot móvil diferencial.	13
3	Movimientos básicos de un robot móvil diferencial: a) Línea recta, b) Giro y c) Forma circular.	16
4	Tareas básicas de un robot móvil diferencial: a) Movimiento de punto a punto, b) Seguidor de trayectoria.	17
5	Punto deseado.	24
6	Trayectoria circular.	25
7	Trayectoria con forma infinito.	26
8	Trayectoria con forma ocho.	27
9	Trayectoria con la forma de rosa polar - 3 pétalos ($n = 3$).	28
10	Trayectoria con la forma de rosa polar - 4 pétalos ($n = 2$).	28
11	Trayectoria con forma espiral.	29
12	Trayectoria con la forma de cardioide.	30
13	Trayectoria con la forma de nefroide.	31
14	Trayectoria con la forma deltoide.	32
15	Trayectoria con la forma de astroide.	32
16	Trayectoria con la forma de orbitas.	33
17	Trayectoria con la forma de pescado.	34
18	Trayectoria con la forma de elefante.	35
19	Trayectoria con la forma de zorro.	36
20	Diagrama a bloques empleado para la simulación de los movimientos básicos del robot móvil diferencial en Matlab.	39
21	Movimiento en línea recta: a) Plano de fase (x, y) , b) x , c) y y d) θ	41
22	Movimiento con giro a la derecha: a) Plano de fase (x, y) , b) x , c) y y d) θ	42
23	Movimiento con giro a la izquierda: a) Plano de fase (x, y) , b) x , c) y y d) θ	43
24	Movimiento circular: a) Plano de fase (x, y) , b) x , c) y y d) θ	44
25	Diagrama a bloques empleado para la simulación de la asignación de trayectorias.	45
26	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	50
27	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	50
28	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	51
29	Punto deseado.	51
30	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	54
31	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	54

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
32	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	55
33	Trayectoria circular.	55
34	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	57
35	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	57
36	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	58
37	Trayectoria con la forma de infinito.	58
38	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	60
39	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	60
40	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	61
41	Trayectoria con la forma de Ocho.	61
42	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	63
43	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	63
44	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	64
45	Trayectoria con la forma de rosa polar - 3 pétalos ($n=3$).	64
46	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	67
47	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	67
48	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	68
49	Trayectoria con la forma de rosa polar - 4 pétalos ($n=2$).	68
50	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	70
51	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	70
52	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	71
53	Trayectoria con la forma de rosa polar - 5 pétalos ($n=5$).	71
54	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	73
55	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	73
56	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	74
57	Trayectoria con la forma de rosa polar - 7 pétalos ($n=7$).	74
58	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	76

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
59	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	76
60	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	77
61	Trayectoria con la forma de Espiral.	77
62	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	80
63	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	80
64	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	81
65	Trayectoria con la forma de cardioide ($k=1$).	81
66	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	83
67	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	83
68	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	84
69	Trayectoria con la forma de nefroide ($k=2$).	84
70	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	86
71	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	86
72	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	87
73	Trayectoria con la forma de epicloide - 3 arcos ($k=3$).	87
74	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	89
75	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	89
76	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	90
77	Trayectoria con la forma de epicloide - 4 arcos ($k=4$).	90
78	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	92
79	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	92
80	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	93
81	Trayectoria con la forma de epicloide - 6 arcos ($k=6$).	93
82	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	95
83	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	95
84	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	96

Lista de Figuras (Continuación)

Figura		Página
85	Trayectoria con la forma de la evoluta de cardioide ($k=0.5$).	96
86	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	98
87	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	98
88	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	99
89	Trayectoria con la forma de epicicloide - 3 cúspides ($k=0.6$).	99
90	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	101
91	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	101
92	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	102
93	Trayectoria con la forma de epicicloide - 4 cúspides ($k=0.8$).	102
94	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	104
95	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	104
96	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	105
97	Trayectoria con la forma deltoide.	105
98	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	107
99	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	107
100	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	108
101	Trayectoria con la forma de astroide.	108
102	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	110
103	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	110
104	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	111
105	Trayectoria con la forma de hipocicloide - 5 puntas ($k=3$).	111
106	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	113
107	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	113
108	Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	114
109	Trayectoria con la forma de hipocicloide - 10 puntas ($k=1.3333$).	114
110	Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	116
111	Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	116

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
112 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	117
113 Trayectoria con la forma de órbitas.	117
114 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	119
115 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	119
116 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	120
117 Trayectoria con la forma de pescado.	120
118 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	122
119 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	122
120 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	123
121 Trayectoria con la forma de elefante.	123
122 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	125
123 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	125
124 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	126
125 Trayectoria con la forma de zorro.	126
126 Vista general del robot Khepera III. 1)Sensores infrarrojos, 2)Sensores ultrasónicos, 3)Puerto serial, 4)Puerto USB miniAB, 5)Conector para cargador, 6)Reset, 7)On/Off, 8)Puerto para cable desenrollable (serial/cargador).	129
127 Vista física del robot Khepera III.	129
128 Diagrama a bloques empleado para la implementación experimental con cámaras optitrack y Matlab.	133
129 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	135
130 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	135
131 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	136
132 Punto deseado.	136
133 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	138
134 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	138
135 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	139
136 Trayectoria circular.	139
137 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	141

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
138 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	141
139 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	142
140 Trayectoria con la forma de infinito.	142
141 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	144
142 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	144
143 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	145
144 Trayectoria con la forma de Ocho.	145
145 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	147
146 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	147
147 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	148
148 Trayectoria con la forma de rosa polar - 3 pétalos ($n=3$).	148
149 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	150
150 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	150
151 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	151
152 Trayectoria con la forma de rosa polar - 4 pétalos ($n=2$).	151
153 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	153
154 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	153
155 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	154
156 Trayectoria con la forma de rosa polar - 5 pétalos ($n=5$).	154
157 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	156
158 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	156
159 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	157
160 Trayectoria con la forma de rosa polar - 7 pétalos ($n=7$).	157
161 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	159
162 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	159
163 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	160

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
164 Trayectoria con la forma de espiral.	160
165 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	162
166 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	162
167 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	163
168 Trayectoria con la forma de cardioide.	163
169 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	165
170 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	165
171 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	166
172 Trayectoria con la forma de nefroide.	166
173 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	168
174 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	168
175 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	169
176 Trayectoria con la forma de epicicloide de 3 arcos ($k=3$).	169
177 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	171
178 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	171
179 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	172
180 Trayectoria con la forma de epicicloide de 4 arcos ($k=4$).	172
181 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	174
182 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	174
183 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	175
184 Trayectoria con la forma de epicicloide de 6 arcos ($k=6$).	175
185 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	177
186 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	177
187 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	178
188 Trayectoria con la forma de la evoluta de cardioide.	178
189 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	180
190 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	180

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
191 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	181
192 Trayectoria con la forma epicicloide - 3 cúspides ($k=0.6$).	181
193 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	183
194 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	183
195 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	184
196 Trayectoria con la forma de epicicloide - 4 cúspides ($k=0.8$).	184
197 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	186
198 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	186
199 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	187
200 Trayectoria con la forma deltoide ($k=1$).	187
201 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	189
202 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	189
203 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	190
204 Trayectoria con la forma de astroide ($k=2$).	190
205 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	192
206 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	192
207 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	193
208 Trayectoria con la forma hipocicloide - 5 puntas ($k=3$).	193
209 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	195
210 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	195
211 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	196
212 Trayectoria con la forma de hipocicloide - 10 puntas ($k=1.3333$).	196
213 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	198
214 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	198
215 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	199
216 Trayectoria con la forma de órbitas.	199
217 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	201

Lista de Figuras (Continuación)

Figura	Página
218 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	201
219 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	202
220 Trayectoria con la forma de pescado.	202
221 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	204
222 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	204
223 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	205
224 Trayectoria con la forma de elefante.	205
225 Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ	207
226 Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y	207
227 Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.	208
228 Trayectoria con la forma de zorro.	208

Capítulo 1

Introducción

En este primer capítulo de la presente tesis, se proporciona una breve introducción a la robótica móvil, así como los objetivos generales y específicos, alcances y la forma en que está organizado el contenido de este trabajo de tesis. Se pretende que el lector entre en el contexto de trabajo colectivo en robots móviles, de manera que asimile y comprenda el alcance de esta tesis.

En 1920, antes de que la automatización como la conocemos actualmente fuera siquiera concebida, el artista Josef Capek invento el término *robot*. La palabra deriva del término slavo antiguo *rob* “esclavo” y del checo *Robbota* “trabajo forzado” o “servidumbre”.

Actualmente el término robot es utilizado para referirse a una entidad artificial, ya sea mecánica o virtual, controlada mediante un código y/o circuito. Existen diferentes tipos de robots clasificados por su generación (G1-Manipuladores, G2-Robots de aprendizaje, G3-con control sensorizado, G4-Inteligentes, G5-con inteligencia artificial), según su aplicación (médicos, exoesqueletos robóticos, industriales, etc.), según su arquitectura (poli-articulados, móviles, androides, zoomórficos, híbridos, entre otros).

Con el transcurso del tiempo, la robótica ha ido tomando un papel fundamental para el desarrollo y evolución de la humanidad (ver figura 1). Desde un punto de vista tecnológico, ésta ha ido siempre de la mano con el desarrollo de nuevas técnicas, maquinaria y/o mecanismos que faciliten el trabajo del ser humano. En antiguas civilizaciones se hablaba de seres mecánicos con vida que eran movidos por mecanismos contruidos por poleas y bombas hidráulicas [1].

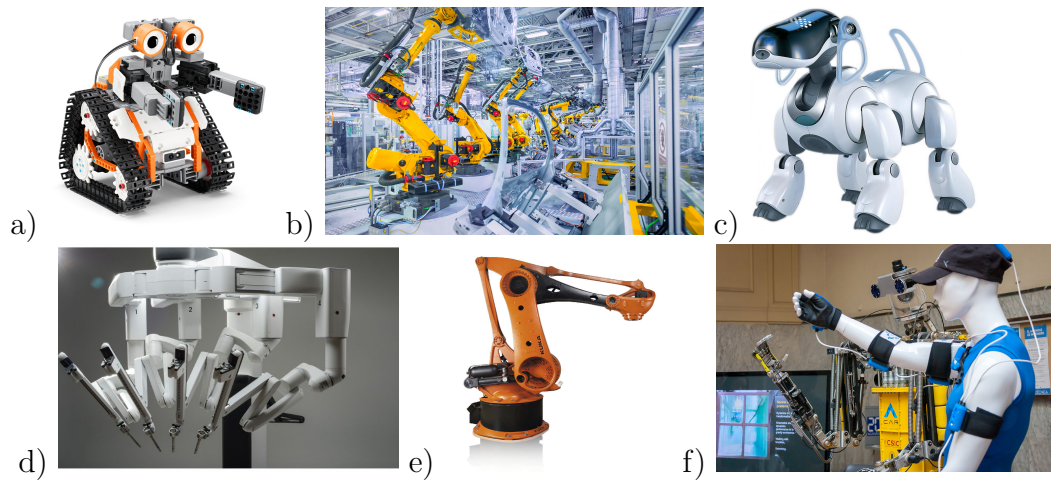


Figura 1: a) Robot móvil, b) Robot industrial, c) Robot zoomórfico, d) Robot médico, e) Robot poli-articulado y f) Robot tele-operado.

El trabajo realizado dentro de la presente tesis se centra en la robótica móvil, por lo que definiremos a un robot móvil diferencial como aquel robot cuyo desplazamiento se encuentra basado en ruedas de tracción independiente, donde su movimiento se consigue al aplicar una velocidad a cada una de las ruedas [2].

1.1 Estado del arte

Los robots móviles han brindado al ser humano la capacidad de navegar en distintos terrenos, además de adjudicarse innumerables aplicaciones como: exploración, misiones de búsqueda y rescate, limpieza de desechos peligrosos, automatización de procesos, vigilancia, reconocimiento de terreno, diversos procesos industriales, agricultura, transporte urbano, servicios (inspección y mantenimiento, limpieza, seguridad y defensa, etc.) y actividades domésticas (principalmente de limpieza). Es por ello que los robots móviles son un tópico importante de investigación desde hace varias décadas.

La comunidad científica ha realizado diversos trabajos con el fin de lograr ciertos comportamientos con los robots, particularmente con los robots móviles, aplicaciones en

que se requiere trasladar algún objeto de un lugar a otro, operar en ambientes desconocidos y especialmente servir de cierta forma al ser humano [3].

Como ejemplo, [4] presenta una aplicación de patrullaje empleando una formación de agentes, en [5] se hace uso de la sincronización en un grupo de robots móviles para el seguimiento de una trayectoria y [6] emplea la teoría del caos para el diseño de trayectorias de vigilancia o patrullaje.

En [7] se presenta un controlador para un robot móvil diferencial, con el objetivo de trasladarse a una posición deseada, dentro de un ambiente libre de obstáculos, [8] muestra la implementación de un controlador en cascada que contempla el modelo cinemático y dinámico de un robot móvil diferencial con la finalidad de reducir el error que se presenta en el seguimiento de trayectorias previamente planeadas y en [9] se presenta el diseño y construcción de un sistema multi-robot para el transporte de objetos.

De forma ingeniosa, [10] presenta un modelo de control servo-visual para el control de la navegación de un robot móvil mediante una cámara colocada sobre el robot, utilizando el sistema embebido Beaglebone Black, [11] expone un algoritmo que planea trayectorias para perseguir un objetivo en movimiento y [12] utiliza lógica difusa en conjunto con una red de inteligencia artificial para mejorar la evasión de obstáculos por parte de un robot móvil en un ambiente estático. Por otra parte [13], emplea una ley de control que utiliza una lógica difusa simple input - simple output (SISO), para la evasión de obstáculos ya sea estáticos o en movimiento, por parte de un robot móvil.

Actualmente, casi cada universidad importante tiene uno o más laboratorios que se centran en la investigación de robots móviles. Uno de los robots más utilizados por la comunidad científica para el desarrollo de nuevas técnicas de control, controladores y aplicaciones, es el robot diferencial Khepera.

Khepera es un robot móvil fabricado por la empresa K-Team, posee un cuerpo circular de 130 mm de diámetro que cuenta con dos ruedas impulsadas por motores paso a paso y ocho sensores infrarrojos que pueden ser utilizados como sensores de proximidad o de luminosidad.

Tanto desde el punto de vista de la programación como de la construcción, el robot móvil con diseño diferencial es uno de los sistemas de locomoción menos complicados. El robot puede ir recto, girar sobre sí mismo y trazar curvas.

En [14] se propone un método de control para el seguimiento de trayectoria muy estable debido al uso de la función de Liapunov. Se muestra que linealizando el sistema de ecuaciones se encuentran los parámetros apropiados para un control específico.

Los controladores no lineales basados en la teoría de Liapunov son muy simples y a su vez son los más eficaces para la estabilización cinemática. En [15] se propone un controlador para un robot móvil con ruedas paralelas. Conforme se avance en la lectura de esta tesis, se podrá ahondar más a detalle diferentes técnicas de control aplicadas a robots móviles.

De acuerdo con la literatura asociada a la generación de trayectorias, algunos métodos reportados son: curvas paramétricas, técnicas de interpolación, polinomios cúbicos, funciones spline, polinomios de Bézier, polinomios polares y concatenación de rectas con arcos y círculos. Para la generación de trayectorias empleadas en este trabajo de tesis, se ha optado por utilizar las ecuaciones de curvas parametrizadas.

1.2 Motivación

Desde el principio de los tiempos una de las finalidades más deseadas por el ser humano ha sido la de crear vida artificial, seres a imagen y semejanza que lo acompañen, y que realicen ciertas tareas que sean difíciles de realizar por el mismo hombre.

Con el inicio de la automatización industrial el uso de los robots estaba concentrado en operaciones simples, tareas repetitivas que no requerían demasiada precisión. A diferencia de aquel entonces, hoy en día los avances tecnológicos han permitido que cada vez el campo de aplicación para los robots sea aún mayor. Especialmente, han surgido nuevas tecnologías con respecto a los sensores, las cuales permiten que se puedan realizar tareas más sofisticadas, como por ejemplo, ensamblaje de materiales.

Además, el progreso debido a las investigaciones en el campo de la robótica, ha propiciado el nacimiento de nuevas formas de trabajo para los robots, especialmente el trabajo colectivo. Grupos de robots móviles que tienen la capacidad de resolver tareas objetiva y eficazmente al trabajar en conjunto .

1.3 Planteamiento del problema de estudio

1.3.1 Hipótesis

Es posible diseñar trayectorias en modelos de robots móviles diferenciales e implementarlas experimentalmente en robots móviles tipo Khepera III, lo anterior, aplicando una linealización por retroalimentación dinámica y utilizando la teoría de sistemas dinámicos.

1.3.2 Propuesta de solución

Para alcanzar el seguimiento de las trayectorias por parte de los robots móviles diferenciales, se recurrirá al uso de linealización por retroalimentación dinámica en un modelo cinemático de robot tipo diferencial.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivos generales

Aplicar linealización por retroalimentación dinámica a un modelo de robot móvil diferencial con el fin de simular e implementar seguimiento de trayectorias intrincadas.

1.4.2 Objetivos específicos

- Estudiar el método de control por retroalimentación dinámica y aplicarlo a un modelo cinemático de robot móvil diferencial.
- Definir las trayectorias deseadas para el seguimiento por parte del robot móvil diferencial.
- Realizar simulaciones aplicando la linealización por retroalimentación dinámica en el seguimiento de las trayectorias deseadas.
- Analizar los resultados obtenidos de las simulaciones e implementarlos experimentalmente en el robot móvil diferencial tipo Khepera III y cámaras Optitrack

1.5 Organización de la tesis

El trabajo contenido en esta memoria de tesis, se encuentra organizado de la siguiente manera:

- En el capítulo 2, se le brinda al lector una breve introducción de lo que es un sistema y la forma en que éstos son representados, con la finalidad de comprenderlos mejor y así poder diseñar estrategias de control sobre ellos con el fin de usarlos a nuestro favor.
- En el capítulo 3, se presenta lo que es un robot móvil diferencial, las partes que lo conforman y la manera en que su modelo cinemático es usado para que pueda realizar movimientos y tareas básicas.
- En el capítulo 4, se expone el desarrollo de la ley de control que permite al robot móvil realizar una tarea más compleja, como lo es el seguimiento de una trayectoria previamente planeada. Además se define lo que es una trayectoria deseada y se presentan las trayectorias deseadas utilizadas en este trabajo de tesis.
- El capítulo 5, corresponde a la parte de simulación de seguimiento de trayectoria empleando la ley de control previamente definida. Se explica la metodología utilizada, así como cada uno de los resultados obtenidos de la simulación.
- En el capítulo 6, se presenta el equipo de laboratorio y las herramientas necesarias para realizar la implementación experimental de este trabajo.
- El capítulo 7, expone la metodología empleada para realizar la implementación experimental correspondiente a la parte de simulación, se explica cada uno de los resultados obtenidos haciendo énfasis en las principales diferencias que existen entre

lo ideal (simulación) y lo que sucede en el mundo real (experimental), concluyendo con la realización del objetivo general de este trabajo de tesis y la manera en que éste puede ser mejorado.

- Finalmente en el capítulo 8, se presentan las conclusiones más importantes sobre el trabajo realizado durante el desarrollo de la tesis, así como el trabajo que se pretende realizar a futuro.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos

En este segundo capítulo de la presente tesis, se aborda una breve introducción a los sistemas y su clasificación. Lo cual es la base para comprender el trabajo realizado.

2.1 Sistema

Primero empezaremos definiendo a un *sistema* como la combinación de componentes que actúan en conjunto y realizan un objetivo determinado [16], éste concepto no se limita solamente a sistemas físicos, sino que puede ser ampliado a fenómenos abstractos, como los observados en la economía y el crecimiento de la población.

Los sistemas se clasifican en *sistemas dinámicos* y *sistemas estáticos*. Un sistema dinámico es aquel sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo y se encuentra en constante cambio, además su salida en el presente depende de entradas del pasado y actuales [17]. Un ejemplo lo encontramos en una población, donde el número presente (salida) es el resultado de los nacimientos y las muertes anteriores (entradas).

Mientras que, un sistema estático es aquél en el que las salidas en el presente dependen de solo de causas en el presente, es decir, mantiene su salida constante si la entrada no cambia y si la entrada es modificada entonces la salida se modificara también. El tipo de sistema que es abordado en este trabajo de tesis, pertenece a los sistemas dinámicos.

El estudio de los sistemas dinámicos se remonta al trabajo de Isaac Newton sobre la mecánica celeste y a Henri Poincaré, quien inicio el estudio cualitativo de las ecuaciones

diferenciales. Pero fue gracias al trabajo destacado de matemáticos e ingenieros como S. Smale, V. Arnold y Aleksandr Liapunov, lo que propicio que los sistemas dinámicos se establecieran formalmente como un área de estudio.

2.2 Modelo del sistema

Para entender un sistema se debe hacer una representación abstracta de el, ya sea mentalmente, explicado con palabras, con ecuaciones, gráficas, programas en computadora, etc., a éstas representaciones se les conoce como el *modelo del sistema* [18]. Se podría referir al modelado de sistemas dinámicos como el estudio de sistemas deterministas, es decir, poder describir el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos de un espacio dado. Esto debido a que se consideran situaciones que dependen de un parámetro dado, que generalmente se supone es el tiempo, de manera que la información en un momento específico nos permitiría describir el pasado y así poder predecir el futuro. Así pues, los sistemas dinámicos nos sirven para comprender cómo evolucionan ciertos procesos de la naturaleza al paso del tiempo.

Los sistemas dinámicos son modelados por ecuaciones diferenciales. Si $\mathbf{x}$ es el vector de estado del sistema dinámico, su evolución temporal queda descrita por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Donde $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. De acuerdo a estos modelos, $\mathbf{x}$ representa el vector de estados del sistema, que representan la evolución temporal del sistema a lo largo tiempo, dentro de un espacio.

En cuanto a la elaboración de los modelos, los elementos y sus relaciones, se debe tener en cuenta:

1. Un sistema está formado por un conjunto de elementos en interacción.
2. El comportamiento del sistema se puede mostrar a través de diagramas causales.
3. Hay varios tipos de variables: variables exógenas (son aquellas que afectan al sistema sin que este las provoque) y las variables endógenas (afectan al sistema, pero este sí las provoca).

2.3 Sistema lineal y no lineal

A su vez, los sistemas presentan dos comportamientos diferentes: lineales y no lineales. Un sistema *lineal* es aquel que posee la importante propiedad de superposición: si una entrada consiste en la suma ponderada de varias funciones de excitación diferentes, entonces la salida es simplemente la suma ponderada de las respuestas del sistema a estas entradas [19]. Entonces el sistema es lineal si:

- La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$.
- La respuesta a $ax_1(t)$ es $ay_1(t)$, donde a es una constante compleja cualquiera.

Estas son las propiedades de aditividad y escalamiento u homogeneidad respectivamente, por lo que un sistema *no lineal*, es aquel que no obedece al menos una de estas propiedades [20]. Debido a la dificultad matemática que representan los sistemas no lineales, con frecuencia es necesario linealizarlos alrededor de una condición de operación.

2.4 Conclusiones del capítulo

En este segundo capítulo de la presente tesis, se ha realizado una breve explicación a lo que es un sistema y su clasificación. Se menciona a los pioneros de su estudio y la manera en que los sistemas son modelados, así como las propiedades que presenta un sistema dinámico lineal y no lineal.

Capítulo 3

Robot móvil diferencial

En este capítulo de la tesis, se presentan de manera general las características y modelo matemático de un robot móvil diferencial, el cual describe su comportamiento cinemático. También son descritos los movimientos básicos que puede presentar un robot móvil diferencial, así como las tareas principales que es capaz de cumplir.

3.1 Modelo cinemático del robot móvil diferencial

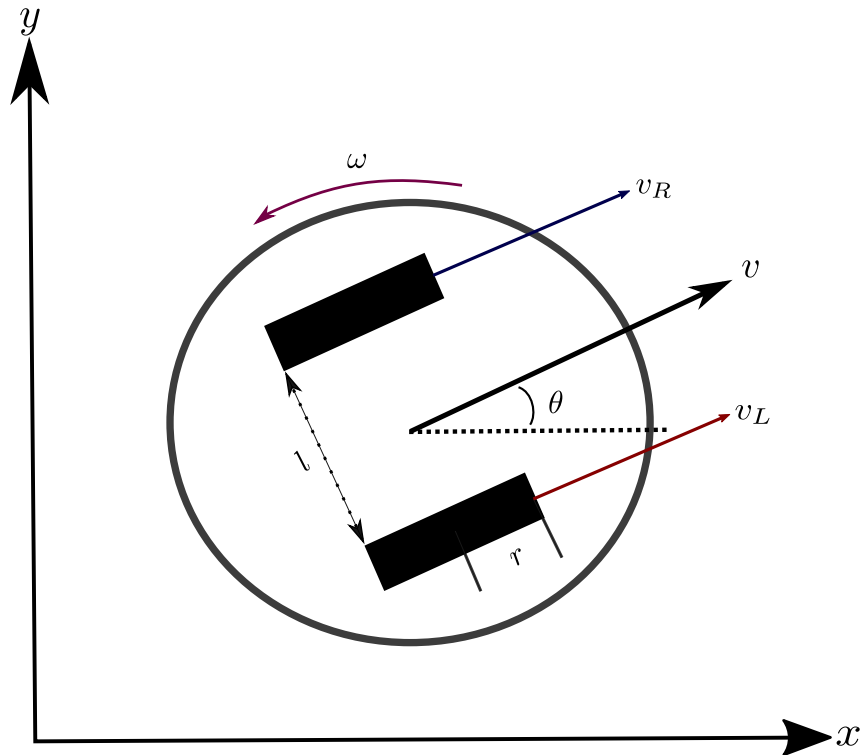


Figura 2: Vista superior esquemática de un robot móvil diferencial.

De acuerdo a la figura 2, se tiene como ejes de referencia a (x, y) , r es el radio de las

ruedas, l es la distancia entre las ruedas, v es la velocidad lineal, v_R y v_L son las velocidades lineales de la rueda derecha e izquierda respectivamente, ω es la velocidad angular y θ es el ángulo de orientación del robot.

En [21] se expone el modelo cinemático de un robot diferencial, tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- El robot se mueve en una superficie perfectamente plana sin deslizamiento, además no considera la resistencia de las llantas.
- La posición del robot está determinada por las coordenadas (x,y) y un ángulo θ , el cual representa la rotación del robot en relación al sistema de coordenadas.
- El robot se controla por las velocidades angulares ω_L y ω_R . La relación entre las velocidades angulares y las velocidades lineales v_R y v_L es la siguiente:

$$v_L = r\omega_L, \quad (2)$$

$$v_R = r\omega_R. \quad (3)$$

La posición (x,y) y la rotación θ del robot en el plano están basadas en las siguientes ecuaciones, que comprende el modelo cinemático del robot diferencial [22]:

$$\dot{x} = v \cos(\theta), \quad (4)$$

$$\dot{y} = v \sin(\theta), \quad (5)$$

$$\dot{\theta} = \omega. \quad (6)$$

Con v (velocidad lineal) y ω (velocidad angular) definidas como:

$$v = \frac{v_L + v_R}{2}, \quad (7)$$

$$\omega = \frac{v_L - v_R}{l}. \quad (8)$$

Del conjunto de ecuaciones (4)-(8) se observa que se trata de un sistema no lineal de la forma.

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{f}(\mathbf{P})\mathbf{u}, \quad (9)$$

donde $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados del robot diferencial, $\mathbf{u} = (v, \omega)^T$ representa al vector de entradas del robot diferencial (4)-(6), mientras tanto $\mathbf{f}$ está definido como:

$$\mathbf{f} = [f_1(\cdot)f_2(\cdot)], \quad (10)$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

por lo tanto:

$$\dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (13)$$

3.2 Movimientos básicos de un robot móvil diferencial

El desplazamiento de un robot móvil diferencial depende de la velocidad que existe en cada una sus ruedas (en este caso: rueda izquierda y derecha). Teniendo control sobre éstas, se tiene control sobre el comportamiento del robot.

Los movimientos básicos para un robot móvil diferencial con dos ruedas son: línea recta, giro y trayectoria circular (ver figura 3). Para que el desplazamiento del robot sea en línea recta, ambas ruedas deben de tener la misma velocidad. Al no predominar la velocidad de una rueda sobre la otra, el robot tenderá a desplazarse en una línea recta con orientación de 0° o 180° (hacia adelante, o atrás) según sea el caso. En el comportamiento de los giros,

es necesario que la rueda opuesta a la dirección en la que se desea el giro tenga movimiento angular positivo, mientras que en la otra el movimiento angular sea nulo, es decir, un giro a la derecha será efectuado cuando la rueda izquierda tenga velocidad positiva y la derecha no tenga velocidad. Por último, la trayectoria circular es obtenida cuando ambas ruedas tienen velocidad, la dirección del giro es gobernada por la diferencia que existe entre la velocidad de las ruedas, y el grado de éste es directamente proporcional a dicha diferencia (Radio de curvatura).

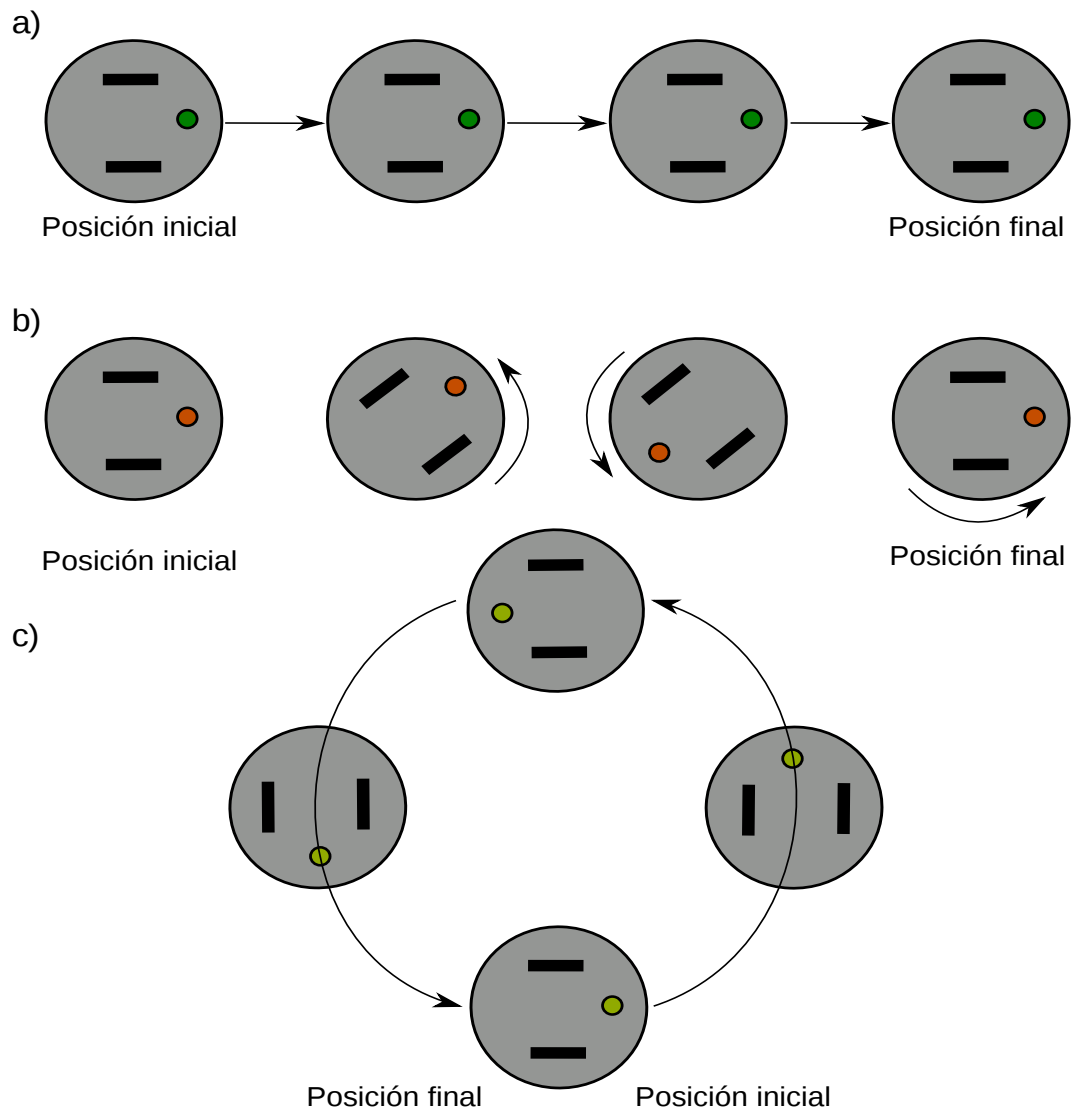


Figura 3: Movimientos básicos de un robot móvil diferencial: a) Línea recta, b) Giro y c) Forma circular.

3.3 Tareas básicas de un robot móvil diferencial

Existen dos tareas básicas que los robots móviles son capaces de realizar (figura 4), teniendo en cuenta las aplicaciones a las que puedan dirigirse :

- *Movimiento punto a punto*: El robot móvil es destinado a alcanzar una posición u objetivo a partir de una posición inicial dada.
- *Seguidor de trayectorias*: El robot móvil es destinado a seguir una trayectoria “deseada”, en el espacio cartesiano a partir de una posición inicial dada.

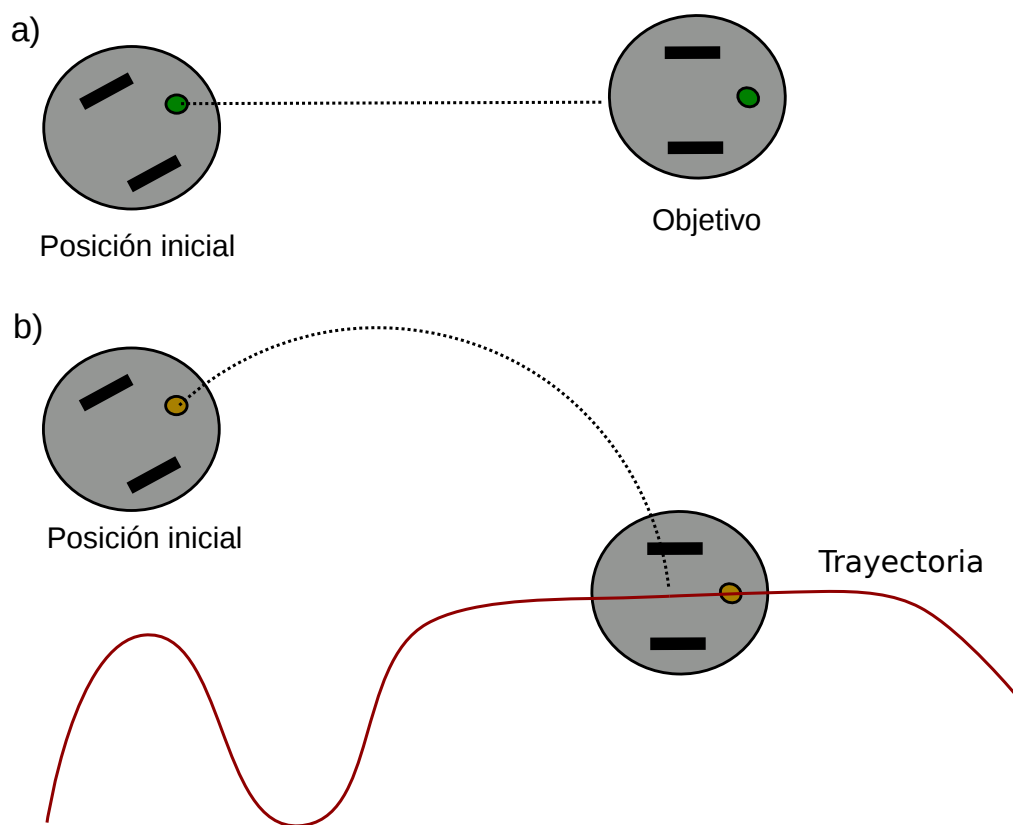


Figura 4: Tareas básicas de un robot móvil diferencial: a) Movimiento de punto a punto, b) Seguidor de trayectoria.

3.4 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó de una manera general el modelo cinemático de un robot móvil diferencial. Teniendo en cuenta ciertas consideraciones, se mostraron sus ecuaciones de estado, sus variables de entrada y la forma que estas afectan el comportamiento del robot. Debido a que el modelo expuesto es no lineal y con entradas acopladas, es necesario llevarlo a una forma lineal donde sea posible lograr un mayor control sobre el robot, que nos permita realizar las tareas de movimiento punto a punto y seguimiento de trayectorias.

Capítulo 4

Ley de control para la asignación de trayectorias

En este cuarto capítulo de la presente tesis, la técnica de linealización por retroalimentación dinámica es seleccionada para linealizar las ecuaciones del robot diferencial. Se explica el modelo inverso para el cálculo de las velocidades angulares ω_L y ω_R . Como punto principal del capítulo, la ley de control para la asignación de trayectorias es definida. Ésta será empleada para que el robot móvil realice las tareas de movimiento de punto a punto y seguimiento de trayectorias. Por último, la generación de *trayectorias deseadas* a utilizar en este trabajo son presentadas.

4.1 Linealización por retroalimentación dinámica

Debido a que las entradas v y ω (4)-(6), se encuentran acopladas, antes de todo es necesario emplear una técnica que nos permita desacoplarlas para posteriormente diseñar los controladores que nos otorguen el control sobre el robot para alcanzar los comportamientos deseados, como se mostrará en los siguientes capítulos. La técnica seleccionada para llevar a cabo la tarea es la *Linealización por retroalimentación dinámica*, presentada en [23]. La base de ésta radica en encontrar un compensador dinámico, de ser posible, de la forma:

$$\dot{\xi} = a(\mathbf{P}, \xi) + b(\mathbf{P}, \xi)u^*, \quad (14)$$

$$\omega = c(\mathbf{P}, \xi) + d(\mathbf{P}, \xi)u^*. \quad (15)$$

Con vector de estado $\xi \in \mathbb{R}^k$ y vector de entradas externas $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$, para que el sistema (9), (14) y (15) en lazo cerrado resulte equivalente por medio de una transformación de estado:

$$z = T(\mathbf{P}, \xi), \quad (16)$$

a un sistema lineal controlable. Con el objetivo de lograr ésto, se define apropiadamente un sistema de m -salidas con la forma:

$$\eta = (h(\mathbf{P})). \quad (17)$$

Para el cual el comportamiento deseado (seguimiento de trayectoria), será asignado y ejecutado por el robot móvil diferencial.

A continuación, se diferencia la salida hasta obtener explícitamente las entradas. Con este procedimiento se forma el estado ξ del compensador dinámico (14). El proceso termina con un número finito de diferenciaciones. Si la suma de las diferenciaciones de la salida es igual a la dimensión $(n + k)$ en el espacio de estados extendidos, entonces se obtiene la linealización de entrada-salida del sistema equivalente. El sistema de lazo cerrado será equivalente a un conjunto de integradores desacoplados.

Definiendo el vector de salidas como $\eta = (x, y), v = \xi, \dot{\xi} = a_c$, al diferenciar respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (18)$$

ya que $\dot{\eta}$ es afectado solamente por la velocidad lineal del robot v , se puede definir como:

$$\dot{\eta} = \xi \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\ddot{\eta} = \dot{\xi} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} + \xi \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

sustituyendo $\dot{\xi} = a_c$ y $\dot{\theta}$ en (20) y expresando de manera matricial, se obtiene:

$$\ddot{\eta} = \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\xi \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \xi \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_c \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}, \quad (21)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\xi \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \xi \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_c \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (22)$$

La matriz que multiplica al vector formado por a_c y ω en (22), es no singular siempre y cuando $\xi \neq 0$. Tomando en cuenta esto se tiene:

$$\begin{bmatrix} a_c \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\xi} & \frac{\cos(\theta)}{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}, \quad (23)$$

de (23) se obtiene finalmente:

$$\dot{\xi} = a_c = u_1^* \cos(\theta) + u_2^* \sin(\theta), \quad (24)$$

$$\omega = \frac{u_2^* \cos(\theta) - u_1^* \sin(\theta)}{\xi}. \quad (25)$$

Debido a la dimensión uno que tiene el compensador, se tiene que $n + k = 3 + 1 = 4$, lo cual es igual al número total de diferenciaciones de la salida en la ecuación (20). Ahora, en las nuevas coordenadas (16), se tiene el modelo del robot diferencial:

$$z_1 = x, \quad (26)$$

$$z_2 = y, \quad (27)$$

$$\dot{z}_1 = \dot{x} = v \cos(\theta) = \xi \cos(\theta), \quad (28)$$

$$\dot{z}_2 = \dot{y} = v \sin(\theta) = \xi \sin(\theta). \quad (29)$$

Las siguientes ecuaciones de segundo orden describen el sistema extendido completamente lineal y controlable:

$$\ddot{z}_1 = \ddot{x} = u_1^*, \quad (30)$$

$$\ddot{z}_2 = \ddot{y} = u_2^*. \quad (31)$$

Donde $\mathbf{P}$ es el vector de salidas $\mathbf{P} = (z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2)$ y $\mathbf{u}^*$ el vector de entradas $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$

4.2 Cálculo de las velocidades angulares ω_R y ω_L para el robot diferencial

Partiendo del modelo original no lineal (4)-(6) es posible calcular las entradas (ω_L, ω_R) que le son dadas al sistema a partir de la velocidad lineal v y la velocidad angular ω , utilizando el sistema equivalente en las nuevas coordenadas (26)-(29).

De la ecuación (7) se tiene:

$$v = \frac{v_R}{2} + \frac{v_L}{2}, \quad (32)$$

$$v_R = 2v - v_L, \quad (33)$$

sustituyendo (32) en (8) se tiene:

$$\omega = \frac{v_R}{l} - \frac{v_L}{l} = \frac{2v - v_L}{l} - \frac{v_L}{l}, \quad (34)$$

$$v_L = v - \frac{l\omega}{2}, \quad (35)$$

$$\omega_L = \frac{v - \frac{l\omega}{2}}{r}, \quad (36)$$

finalmente sustituyendo (35) en (7) se obtiene:

$$v = \frac{v_R}{2} + \frac{v_L}{2} = \frac{v - \frac{l\omega}{2}}{2} + \frac{v_R}{2}, \quad (37)$$

$$v_R = v + \frac{l\omega}{2}, \quad (38)$$

$$\omega_R = \frac{v + \frac{l\omega}{2}}{r}. \quad (39)$$

Este modelo extendido lineal y controlable del robot diferencial (26)-(29) y las entradas (7)-(8), serán empleadas con el propósito de alcanzar los comportamientos de seguimiento de trayectorias de robot móviles diferenciales.

4.3 Ley de control

Para el robot diferencial descrito por las ecuaciones (4)-(8), el cual cuenta con tres estados, $\mathbf{P} = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^3$ y dos entradas de control, $u = (v, \omega)$, el sistema adquiere la forma de la ecuación (9). Debido a que el nuevo sistema es lineal (26)-(29) y con sus entradas desacopladas (30)-(31) es posible realizar una ley de control que cumpla con el objetivo de seguimiento de trayectoria y punto deseado.

Permítase definir la trayectoria deseada que el robot móvil debe seguir como $(X_d(t), Y_d(t))$. La ley de control para el seguimiento de la trayectoria, en coordenadas cartesianas, queda como:

$$u_1^* = c_{11}(\dot{X}_d(t) - \dot{x}) + c_{12}(X_d(t) - x), \quad (40)$$

$$u_2^* = c_{21}(\dot{Y}_d(t) - \dot{y}) + c_{22}(Y_d(t) - y). \quad (41)$$

Con $c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{22} > 0$, y apropiadamente seleccionadas.

4.4 Trayectorias deseadas

Una trayectoria deseada es un conjunto de puntos ubicados en el plano, los cuales se pretende que el robot móvil diferencial siga. Estas trayectorias se encuentran definidas por un sistema de ecuaciones paramétricas, una vez son graficadas es posible observar y comprobar la forma que tiene dicha trayectoria. Con la finalidad de que el robot móvil tenga la capacidad de seguir la trayectoria deseada, un controlador sobre la velocidad de las ruedas (como el definido en éste capítulo), debe ser implementado. Con ésto se logra que para cada punto dentro de la trayectoria deseada, se obtiene un valor de velocidad para cada rueda del robot.

4.4.1 Punto deseado (regulación)

El punto deseado (ver figura 5), como se presentó en el capítulo 3, es la tarea más básica que puede realizar un robot móvil diferencial. En ella el robot móvil se da a la tarea de alcanzar cierto punto definido previamente, a partir de la posición inicial en la que éste se encuentra. La ubicación del punto en el plano está dada por un valor en el eje x y otro en el eje y (por ejemplo: $x = 5$, $y = 5$).

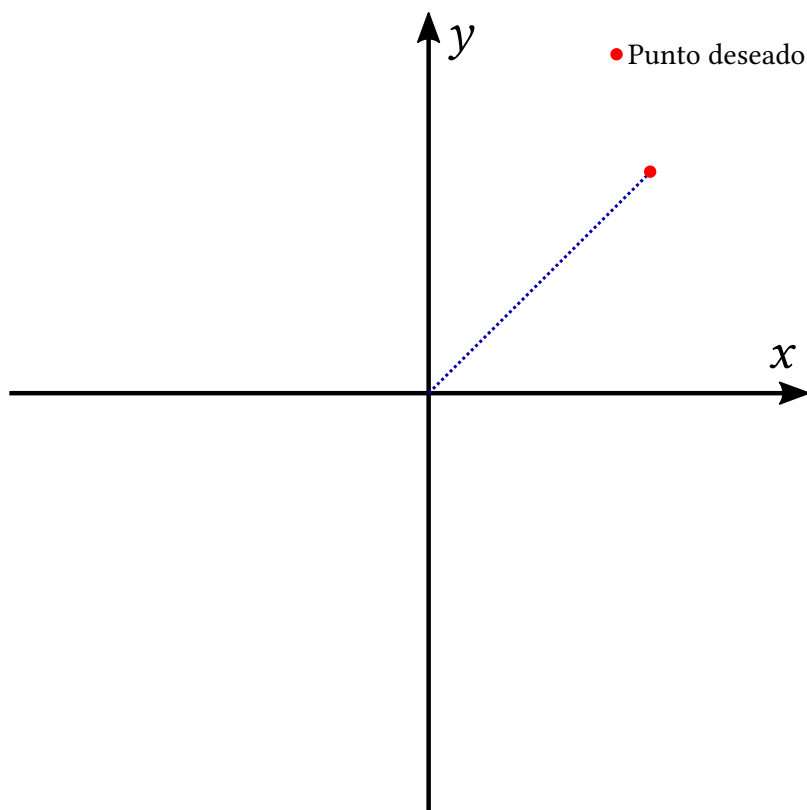


Figura 5: Punto deseado.

La trayectoria que el robot móvil recorre para alcanzar el punto deseado (en este trabajo), no es una trayectoria deseada en sí, ya que lo que se busca es ubicar al robot en cierto punto del plano sin importar la trayectoria que éste haya recorrido, o bien, que está tenga una forma deseada.

4.4.2 Trayectoria circular

La trayectoria circular (ver figura 6), está definida por las ecuaciones paramétricas de la circunferencia expresadas mediante las funciones trigonométricas seno y coseno, como se explica en [24].

$$x = r \cos(t), \quad y = r \sin(t). \quad (42)$$

Donde r controla el radio que tendrá la circunferencia.

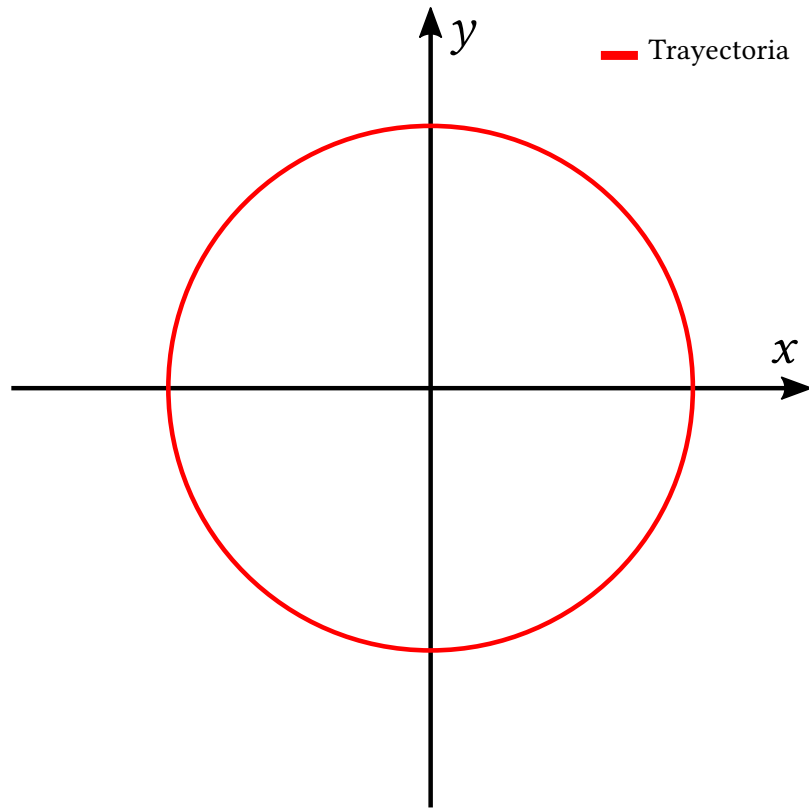


Figura 6: Trayectoria circular.

Cabe mencionar que ésta no es la única forma de obtener la trayectoria circular, otra manera es definir la trayectoria mediante el caso especial del círculo de las figuras de Lissajous.

4.4.3 Trayectoria de forma infinito/ocho (Lemniscata)

La trayectoria con forma infinito/ocho (ver figuras 7-8) está definida por las ecuaciones paramétricas mostradas en [25]:

$$x = A \sin(\omega_x t + \alpha), \quad (43)$$

$$y = B \sin(\omega_y t + \beta). \quad (44)$$

Para obtener la forma de la lemniscata, es necesario que el valor del argumento de una de las funciones seno sea el doble del otro, de esta manera se produce el caso especial de las figuras de Lissajous para la forma de infinito/ocho, según sea el caso.

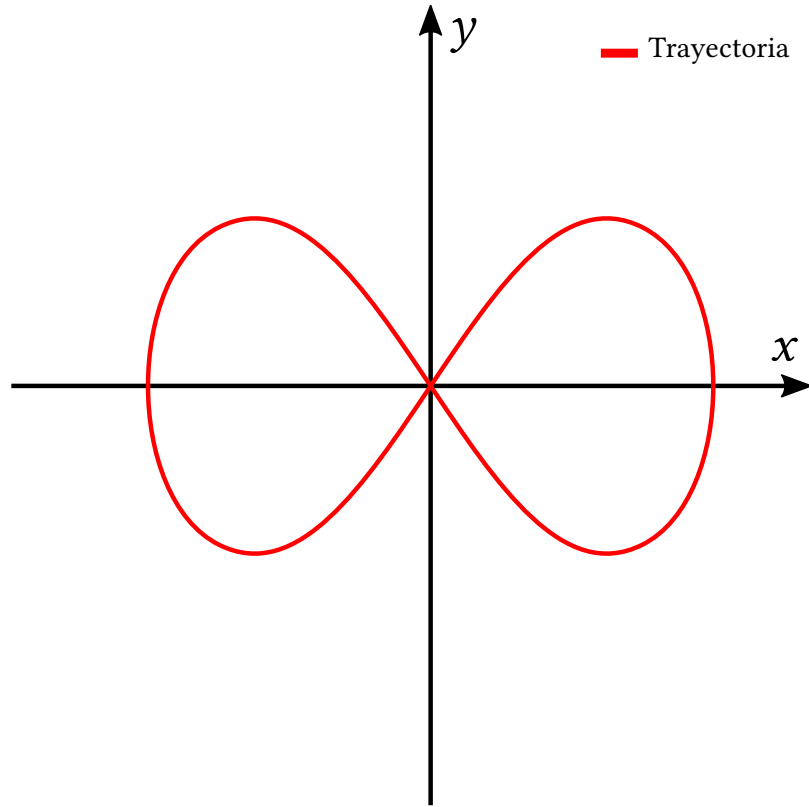


Figura 7: Trayectoria con forma infinito.

La orientación de la figura depende de cuál de los argumentos es el doble del otro, para el caso horizontal (ver figura 7) el argumento de la función seno en (43), deberá ser el doble que el de la función seno en (44).

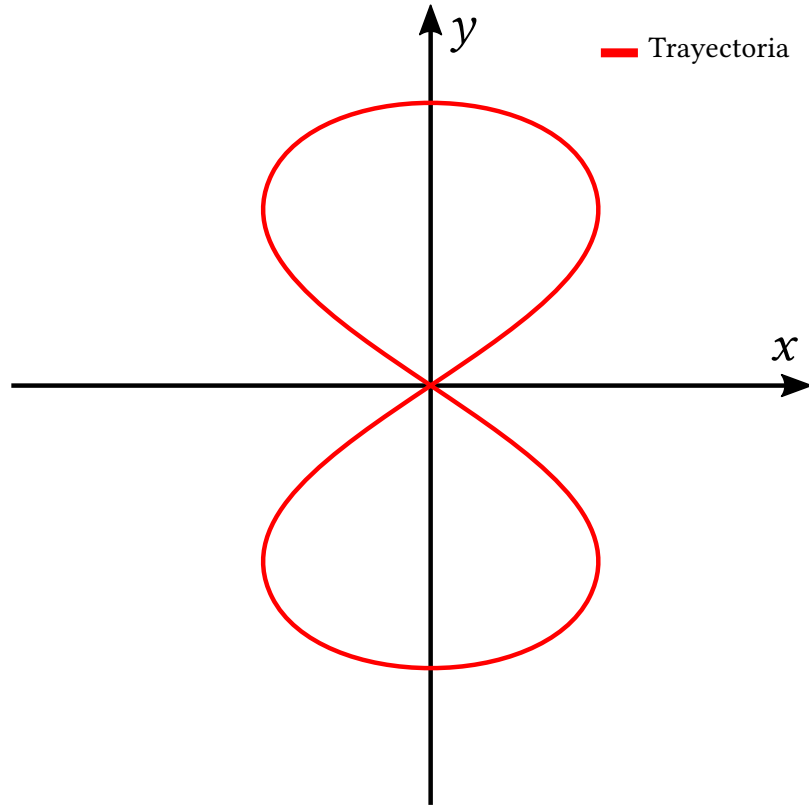


Figura 8: Trayectoria con forma ocho.

Para obtener la orientación vertical (ver figura 8) el argumento en la función seno de (44), debe ser el doble que el de la función seno en (43).

4.4.4 Trayectorias con la forma de rosa polar

La trayectoria con la forma rosa polar, está definida por las ecuaciones paramétricas obtenidas al convertir su forma polar mostrada en [26]:

$$x = r(a + b) \cos(nt) \cos(t), \quad (45)$$

$$y = r(a + b) \cos(nt) \sin(t). \quad (46)$$

Donde n corresponde al número de pétalos. Si n es impar se producirán n pétalos (ver figura 9), para el caso en que n es par se obtendrán $2n$ pétalos (ver figura 10). La longitud de los pétalos es controlada mediante a y b .

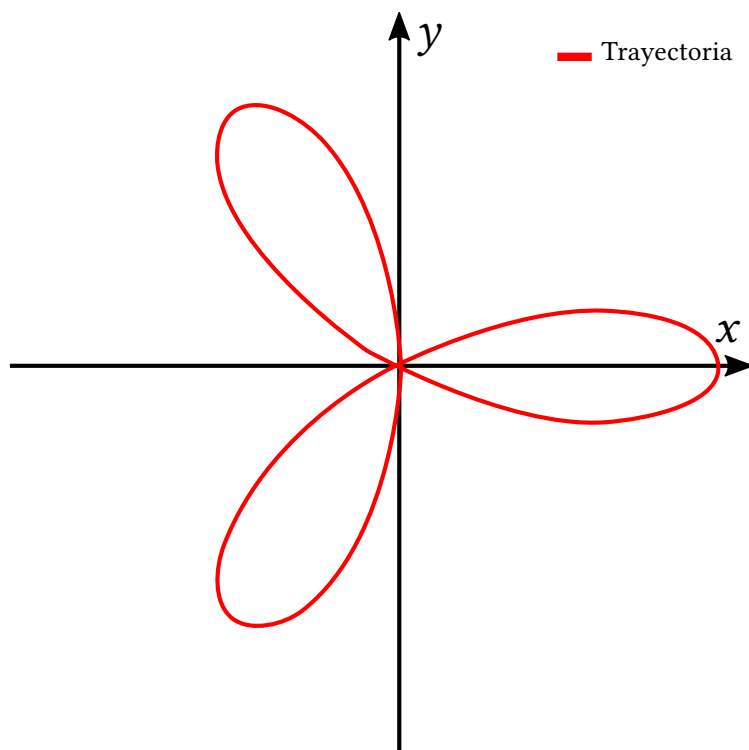


Figura 9: Trayectoria con la forma de rosa polar - 3 pétalos ($n = 3$).

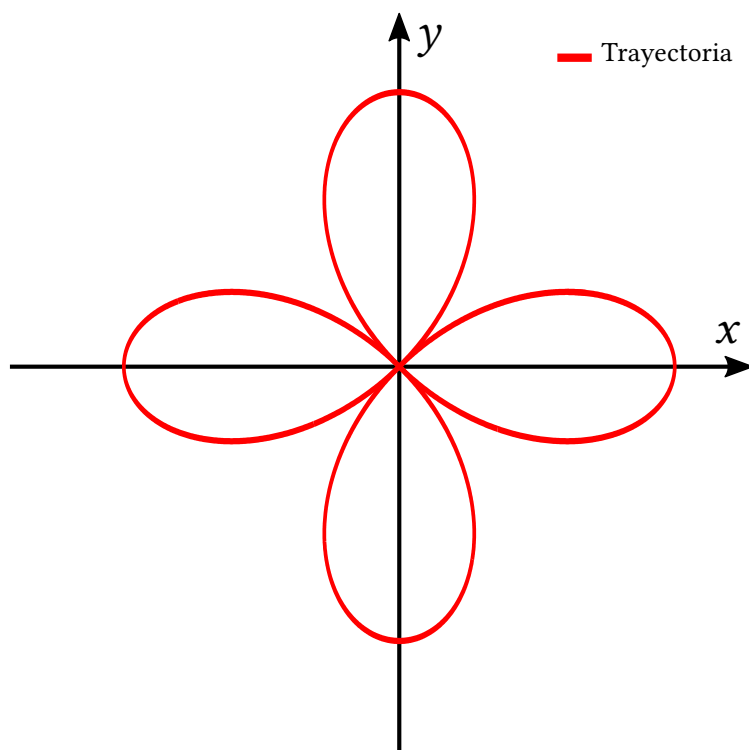


Figura 10: Trayectoria con la forma de rosa polar - 4 pétalos ($n = 2$).

4.4.5 Trayectoria con la forma de espiral

La trayectoria con la forma de espiral logarítmica (ver figura 11), está definida por la ecuación: $\theta = \log_b(\frac{r}{a})$, por conveniencia se utilizan sus ecuaciones paramétricas:

$$x = (ab)^{(\theta t)} \cos(\theta t), \quad (47)$$

$$y = (ab)^{(\theta t)} \sin(\theta t). \quad (48)$$

Donde la espiral se expande con un incremento θ , a controla el tamaño de la espiral y b determina en que dirección está enrollada.

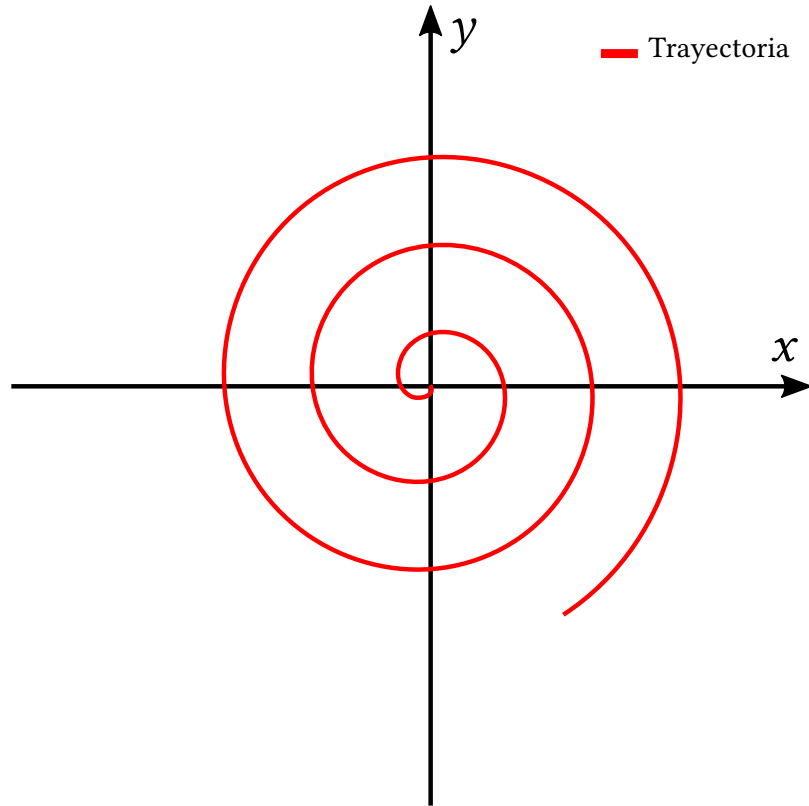


Figura 11: Trayectoria con forma espiral.

Cabe mencionar que existen otros tipos de espirales como la espiral de Arquímedes, de Clotoide, de Fermat y la espiral hiperbólica. Similares, pero con un comportamiento especial que las diferencia entre sí.

4.4.6 Trayectorias con la forma de epicicloides

Las trayectorias con forma de epicicloides están definidas por las ecuaciones paramétricas:

$$x = (r_1 + r_2) \cos(t) + r_2 \cos\left(\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)t\right), \quad (49)$$

$$y = (r_1 + r_2) \sin(t) + r_2 \sin\left(\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)t\right). \quad (50)$$

Donde la epicicloide obtenida depende de la relación que existe entre r_1 y r_2 . Permítase definir $k = \frac{r_1}{r_2}$, siendo r_1 y r_2 números enteros, para diferentes valores de k se obtendrá una epicicloide diferente como se expone en [27]. Para controlar el tamaño de la epicicloide se debe aumentar o disminuir los valores de r_1 y r_2 (según sea el caso), manteniendo siempre el valor de k .

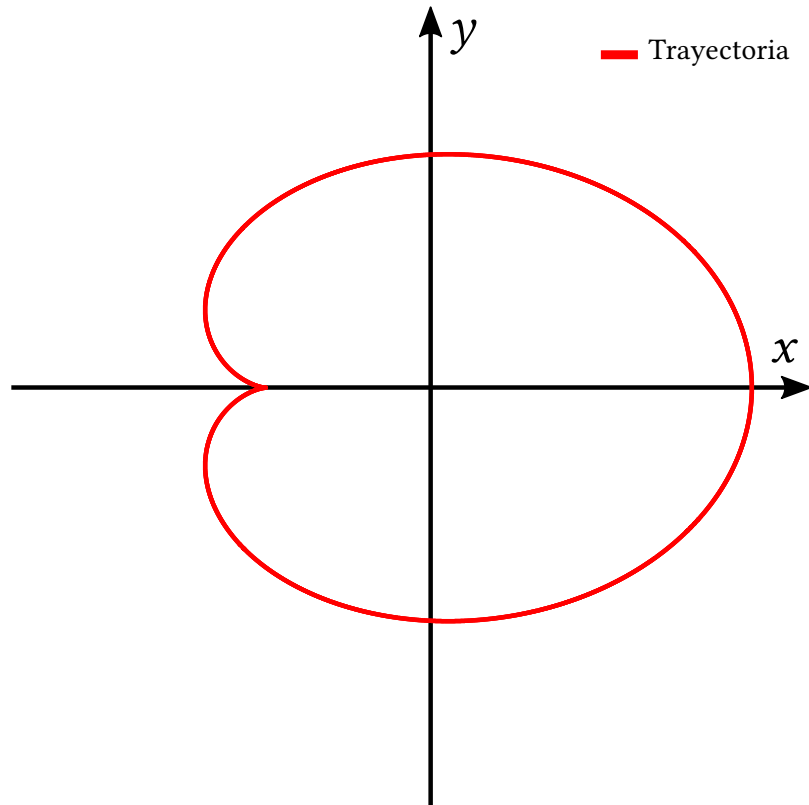


Figura 12: Trayectoria con la forma de cardioide.

La epicicloide que se muestra en la figura 12, se obtiene con una $k = 1$ y es conocida

como cardioide. La nefroide (ver la figura 13) es una epicicloide a la que le corresponde una $k = 2$.

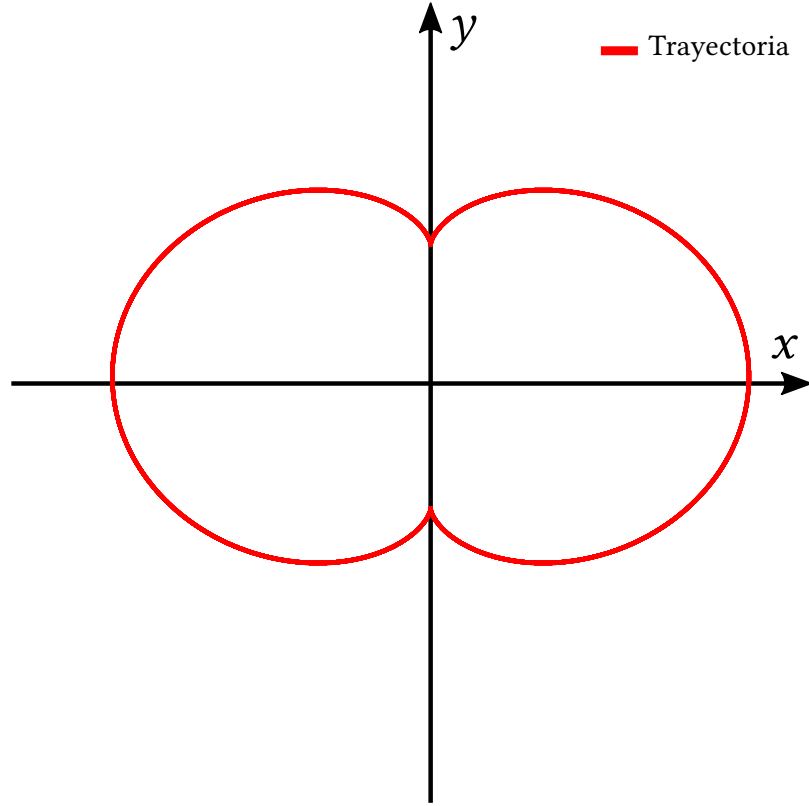


Figura 13: Trayectoria con la forma de nefroide.

4.4.7 Trayectorias con forma de hipocicloides

Las trayectorias con forma de hipocicloides están definidas por las ecuaciones paramétricas:

$$x = (r_1 + r_2) \cos(t) + r_2 \cos\left(\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)t\right), \quad (51)$$

$$y = (r_1 + r_2) \sin(t) - r_2 \sin\left(\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)t\right). \quad (52)$$

Donde la hipocicloide, al igual que ocurre con las epicicloides, depende de la relación $k = \frac{r_1}{r_2}$ como lo muestra [28]. Para una $k = 1$ se obtiene una hipocicloide con 3 vértices, mejor conocida como deltoide (ver figura 14). El astroide (ver figura 15) es una hipocicloide con 4 vértices, la cual también pertenece al grupo de las superelipses.

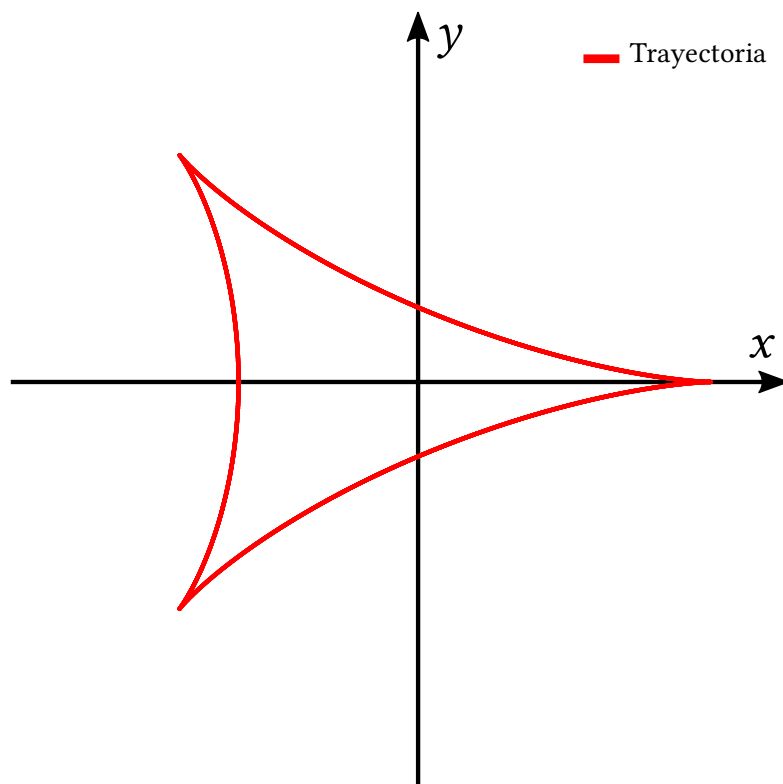


Figura 14: Trayectoria con la forma deltoide.

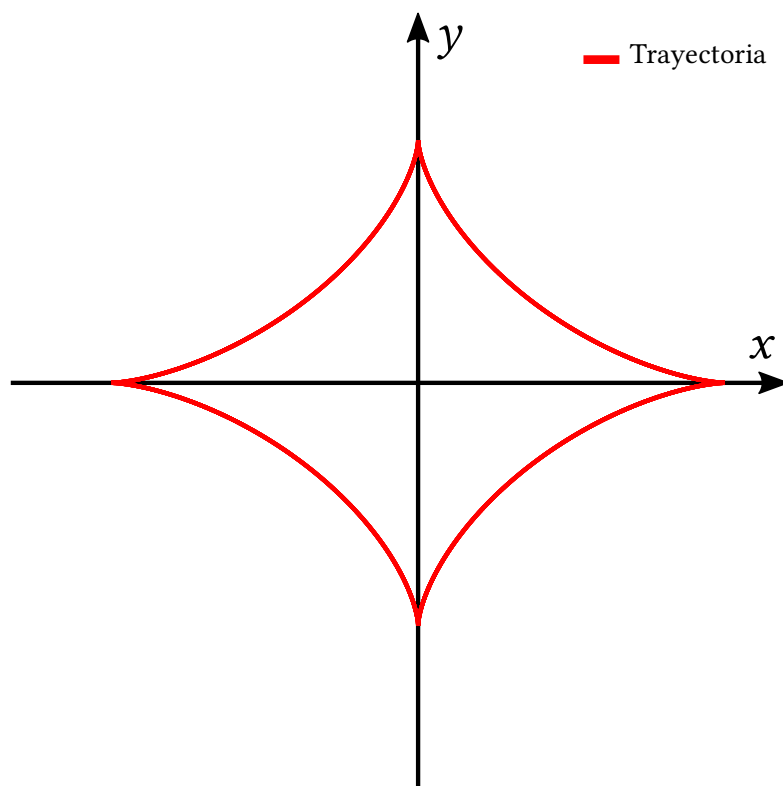


Figura 15: Trayectoria con la forma de astroide.

4.4.8 Trayectoria con la forma de órbitas

La trayectoria con forma de orbitas (ver figura 16) se encuentra definida por las ecuaciones paramétricas, obtenidas al realizar un cambio de signo en $(r_1 + r_2)$ a las ecuaciones de las hipocicloides (51) y (52), con una relación $K = 0.4$:

$$x = (r_1 - r_2) \cos(t) + r_2 \cos\left(\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)t\right), \quad (53)$$

$$y = (r_1 - r_2) \sin(t) - r_2 \sin\left(\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)t\right). \quad (54)$$

Se le refiere como órbitas, debido a que la figura pareciera estar formada por un conjunto de elipses que rodean un punto en el centro de la figura. Similar de cierta manera a nuestro sistema solar.

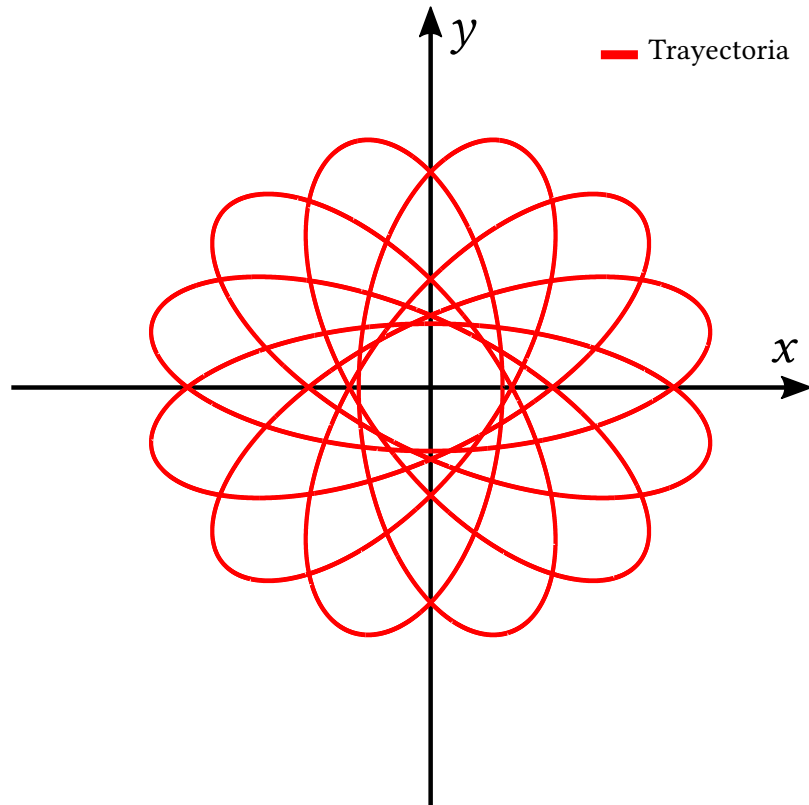


Figura 16: Trayectoria con la forma de orbitas.

4.4.9 Trayectorias especiales

A estas últimas trayectorias se les ha nombrado especiales, debido a que su forma resulta ser muy peculiar a nuestros ojos. Sus ecuaciones paramétricas son muy similares, pero lo que produce las figuras tan singulares y diferentes, es la variación de algunos o todos sus parámetros $(a, b, c, d, j \text{ y } k)$.

4.4.9.1 Trayectoria con la forma de pescado

La trayectoria con la forma de pescado (ver figura 17) está definida por las ecuaciones:

$$x = \cos(at) + \cos(bt)^j, \quad (55)$$

$$y = \sin(ct) - \sin(dt)^k. \quad (56)$$

Con $a = b = c = d = 1, j = 2, k = 2$.

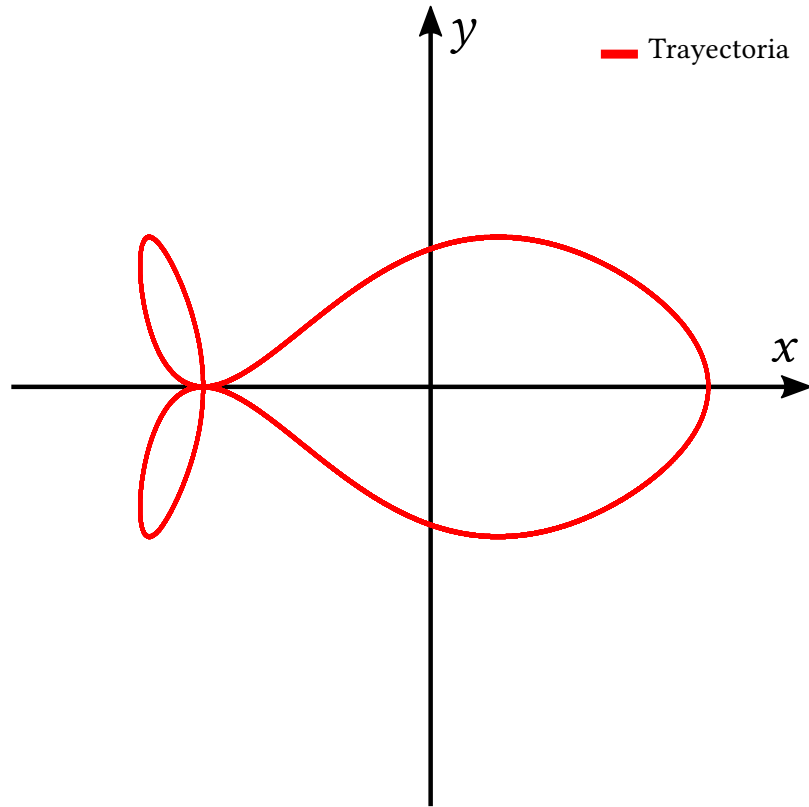


Figura 17: Trayectoria con la forma de pescado.

Para tener control sobre el tamaño de las trayectorias, es necesario añadir una variable que multiplique ambas ecuaciones por el valor de la escala deseada.

4.4.9.2 Trayectoria con la forma de elefante

La trayectoria con la forma de elefante está definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \cos(at) + \cos(bt)^j, \quad (57)$$

$$y = \sin(ct) - \sin(dt)^k. \quad (58)$$

Con $a = d = 1, b = c = j = 3, k = 2$.

La figura 18, muestra como la trayectoria adquiere forma de la cabeza y orejas de un elefante.

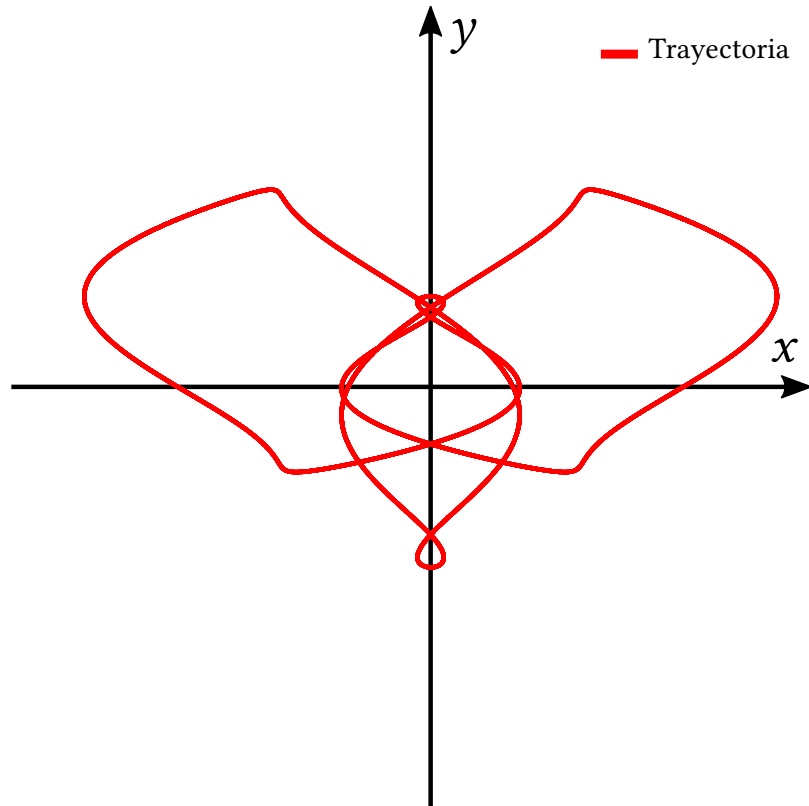


Figura 18: Trayectoria con la forma de elefante.

4.4.9.3 Trayectoria con la forma de zorro

La trayectoria con la forma de zorro está definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \cos(at) - \cos(bt)^j, \quad (59)$$

$$y = \sin(ct) - \sin(dt)^k. \quad (60)$$

Con $a = d = 1, b = c = j = 3, k = 2$.

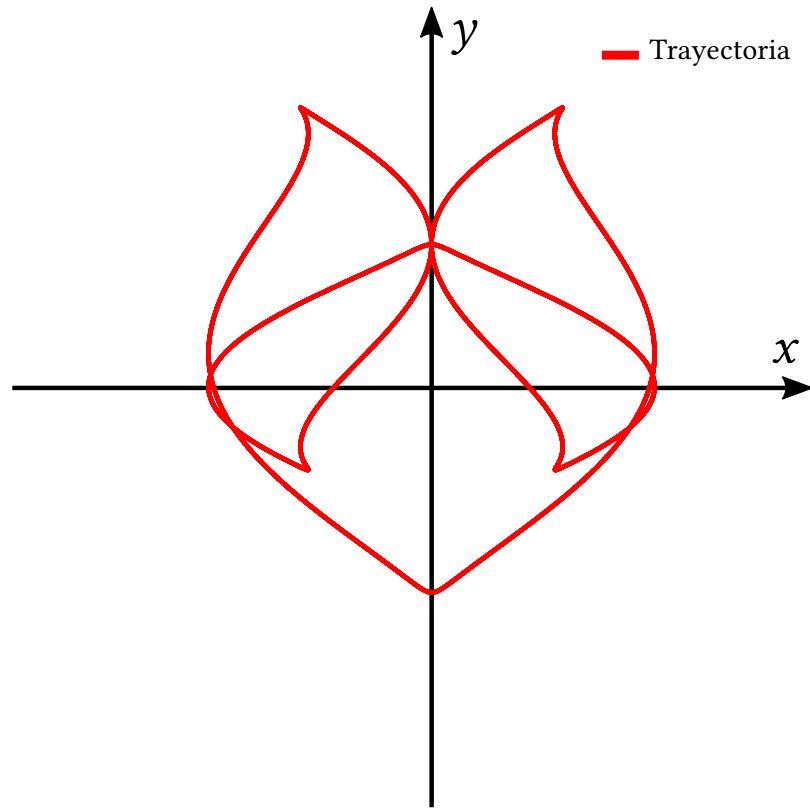


Figura 19: Trayectoria con la forma de zorro.

En la figura 19, se observa como la trayectoria toma la forma de la cabeza y orejas de un zorro.

4.5 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha presentado la técnica de linealización por retroalimentación dinámica como solución para linealizar las ecuaciones del robot móvil diferencial, de esta manera se definió la ley de control que regirá al robot. Se han presentado las trayectorias deseadas en las que se ha basado este trabajo de tesis, las cuales serán asignadas al robot móvil para cumplir el comportamiento de seguimiento de trayectorias mostrado en el capítulo 3.

Capítulo 5

Simulación en Matlab

En este capítulo, se presentan la metodología empleada para la realización de cada una de las simulaciones tanto para los movimientos básicos de un robot móvil diferencial, como para el control y asignación de trayectorias al mismo, así como los resultados obtenidos en cada una de éstas. Para ello se ha recurrido al software de Matlab y se ha tomado como referencia las especificaciones físicas del robot móvil diferencial: *Khepera III*.

Es importante aclarar que dentro de esta parte de simulación, el término *robot móvil diferencial*, será empleado para referirse al robot móvil simulado, es decir, el conjunto de datos arrojados por la simulación, los cuales pueden ser interpretados como un comportamiento dentro del mundo real con un cierto grado de precisión.

5.1 Metodología para la simulación de los movimientos básicos del robot móvil diferencial

Empleando el software Matlab se realizó el código necesario para la simulación de cada movimiento básico que puede realizar un robot móvil diferencial. En la figura 20, se muestra el diagrama de bloques que sintetiza el proceso de la simulación. Como primer paso, las condiciones iniciales que tendrá el robot deberán ser introducidas, tales como el radio de las ruedas, distancia entre ellas y la velocidad inicial tanto para la rueda derecha como para la izquierda. Una vez que estos datos se encuentran definidos, la simulación es iniciada. Las condiciones iniciales se introducen al modelo cinemático del robot para así calcular la

posición que deberá tener el robot en ese instante. Para el propósito demostrativo de estas simulaciones se ha definido un número de 100 iteraciones en la ejecución del programa, graficando la posición del robot en cada una de ellas (100 unidades de tiempo).

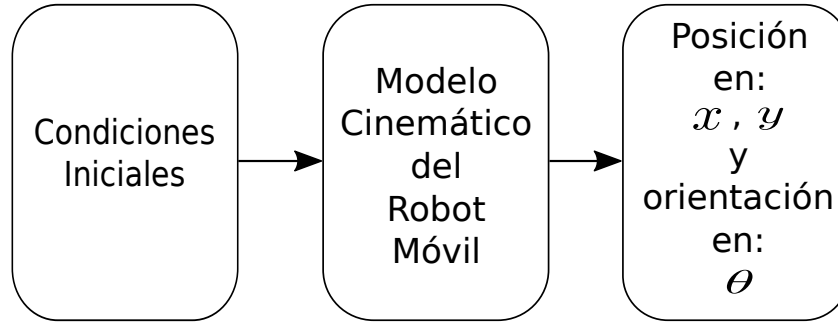


Figura 20: Diagrama a bloques empleado para la simulación de los movimientos básicos del robot móvil diferencial en Matlab.

5.1.1 Simulación de los movimientos básicos del modelo del robot móvil diferencial

A continuación se muestran las simulaciones correspondientes a cada uno de los movimientos básicos que puede realizar el robot (línea recta, giros y círculo). Para ello, dentro del código se ingresó el radio de las ruedas y la distancia entre ellas ($l = 88.41mm$ y $r = 20.5mm$), las condiciones iniciales $[x(0), y(0), \theta(0)] = [0, 0, 0]$ y las siguientes velocidades lineales:

a) $v_L = 15mm/seg, v_R = 15mm/seg.$

b) $v_L = 15mm/seg, v_R = 0mm/seg.$

c) $v_L = 0mm/seg, v_R = 15mm/seg.$

d) $v_L = 15mm/seg, v_R = 30mm/seg.$

Como se explica en el capítulo 3, el comportamiento del robot móvil depende de la velocidad de sus ruedas. Haciendo énfasis en que las condiciones iniciales son las mismas para los 4 casos, se procede a explicar los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

En el caso **a)** se tiene una velocidad de 15mm/seg tanto para la rueda izquierda como para la derecha, y es debido a que ambas velocidades son iguales, que el robot se desplaza en una línea recta (ver figura 21). Para los casos b) y c) existe velocidad en solo una de las ruedas (ver las velocidades iniciales correspondientes), con ésto se consigue que el robot gire en la dirección de la rueda que no tiene velocidad. En la figura 22, correspondiente al caso **b)** giro a la derecha, ésto es comprobado al observar en la gráfica que la trayectoria adquiere valores negativos en el eje y , justamente por que la posición inicial (ver condiciones iniciales) del robot es $(x, y) = (0, 0)$, con 0° de orientación (θ). Para el caso **c)**, la posición inicial es la misma, y se corrobora un giro a la izquierda debido a que la trayectoria adquiere valores positivos en el eje y (ver figura 23). Por último, en el caso **d)** existe velocidad en ambas ruedas, por lo tanto el robot tenderá a girar en la dirección de la rueda con menor velocidad trazando así la forma de un círculo, de esta manera se consigue que el robot recorra una mayor distancia (ver figura 24). El tamaño de la circunferencia formada por la trayectoria es inversamente proporcional a la diferencia de las velocidades de las ruedas. Mientras más pequeña sea esta diferencia, el grado del giro será más pequeño y suave, por lo que la circunferencia formada (distancia recorrida) será mucho más grande. En cambio, una diferencia mayor entre las velocidades, provocará un giro muy cerrado y como consecuencia se tendrá que la circunferencia recorrida será pequeña.

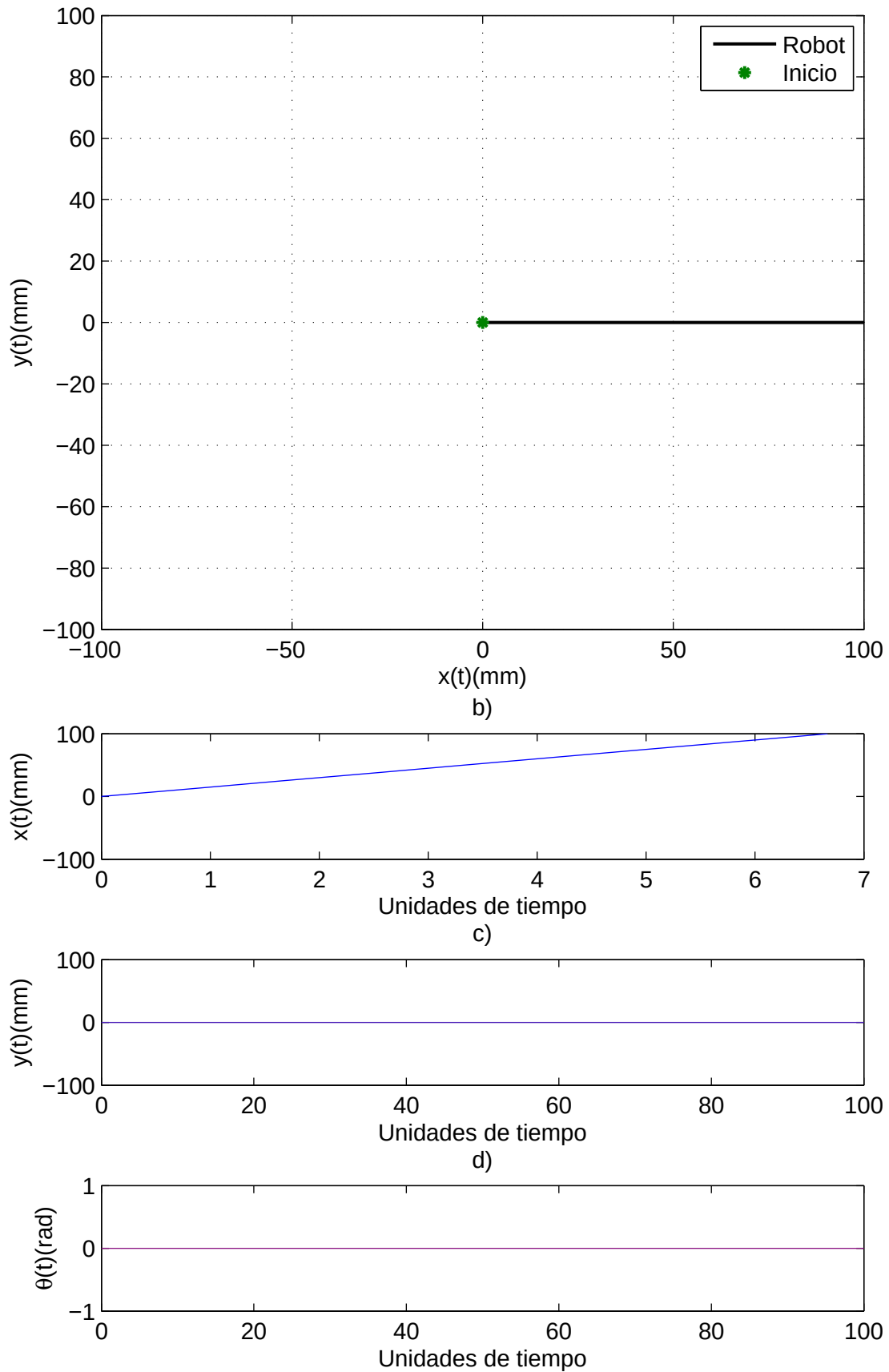


Figura 21: Movimiento en línea recta: a) Plano de fase (x, y) , b) x , c) y y d) θ .

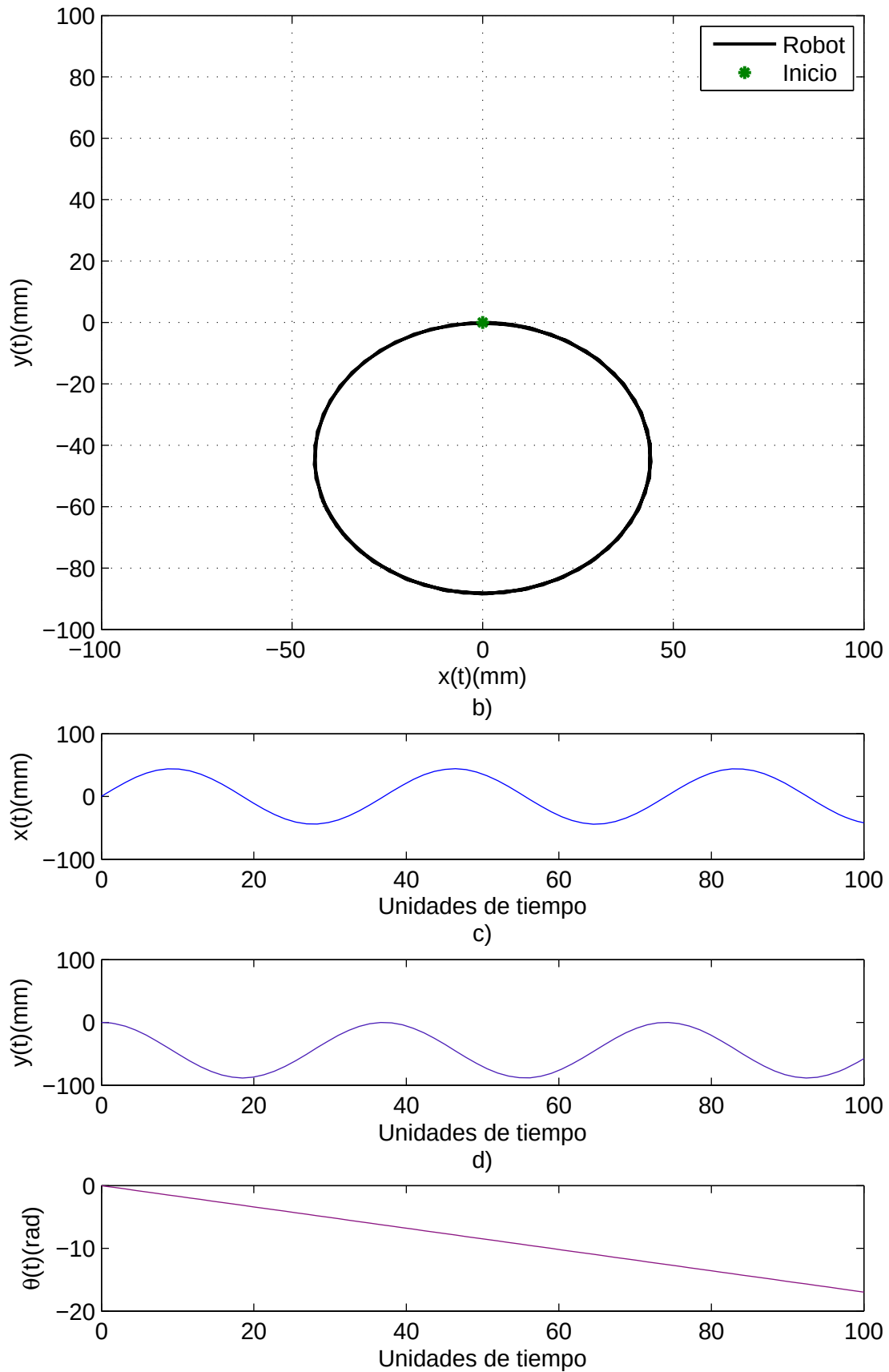


Figura 22: Movimiento con giro a la derecha: a) Plano de fase (x, y) , b) x , c) y y d) θ .

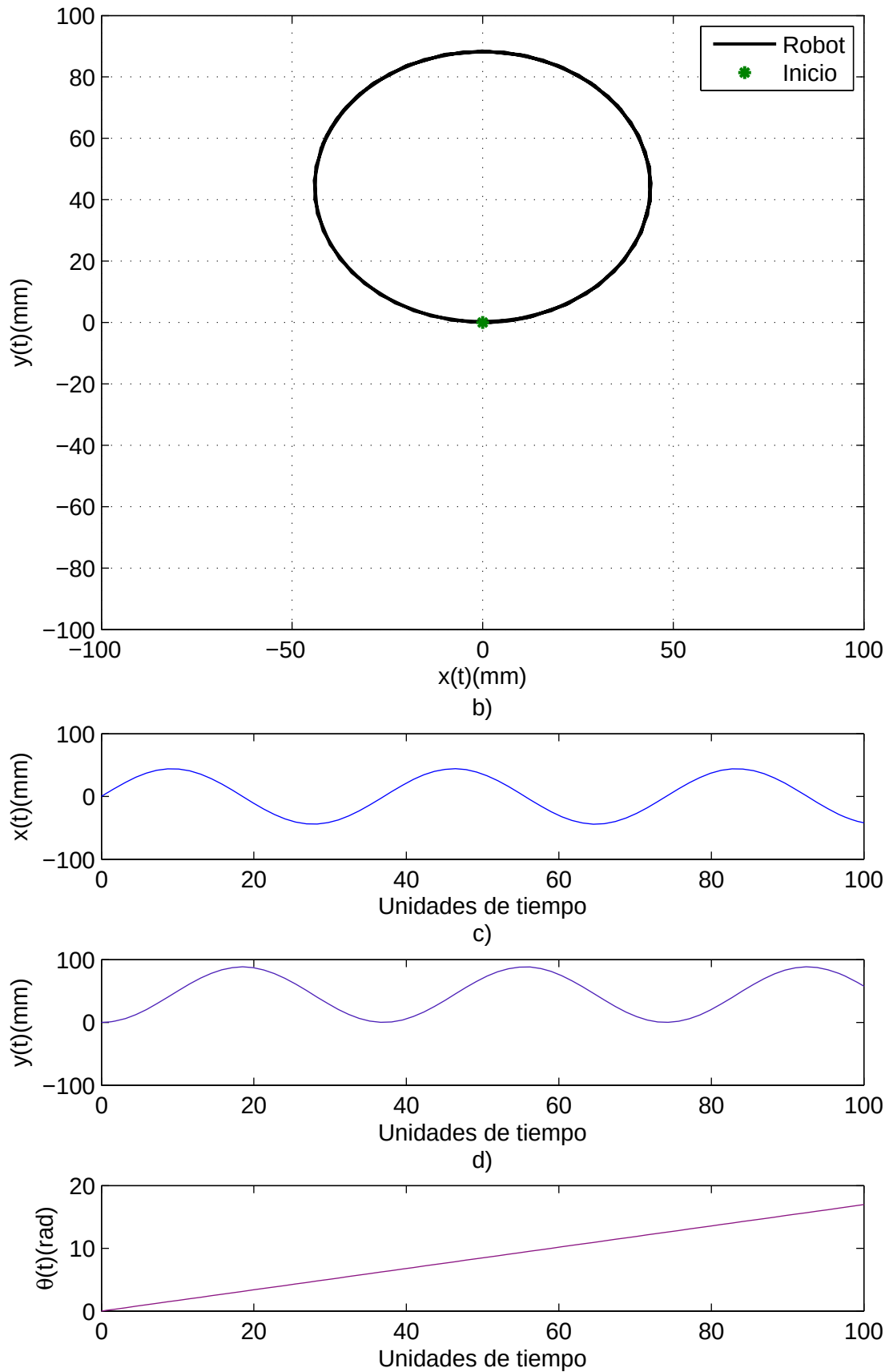
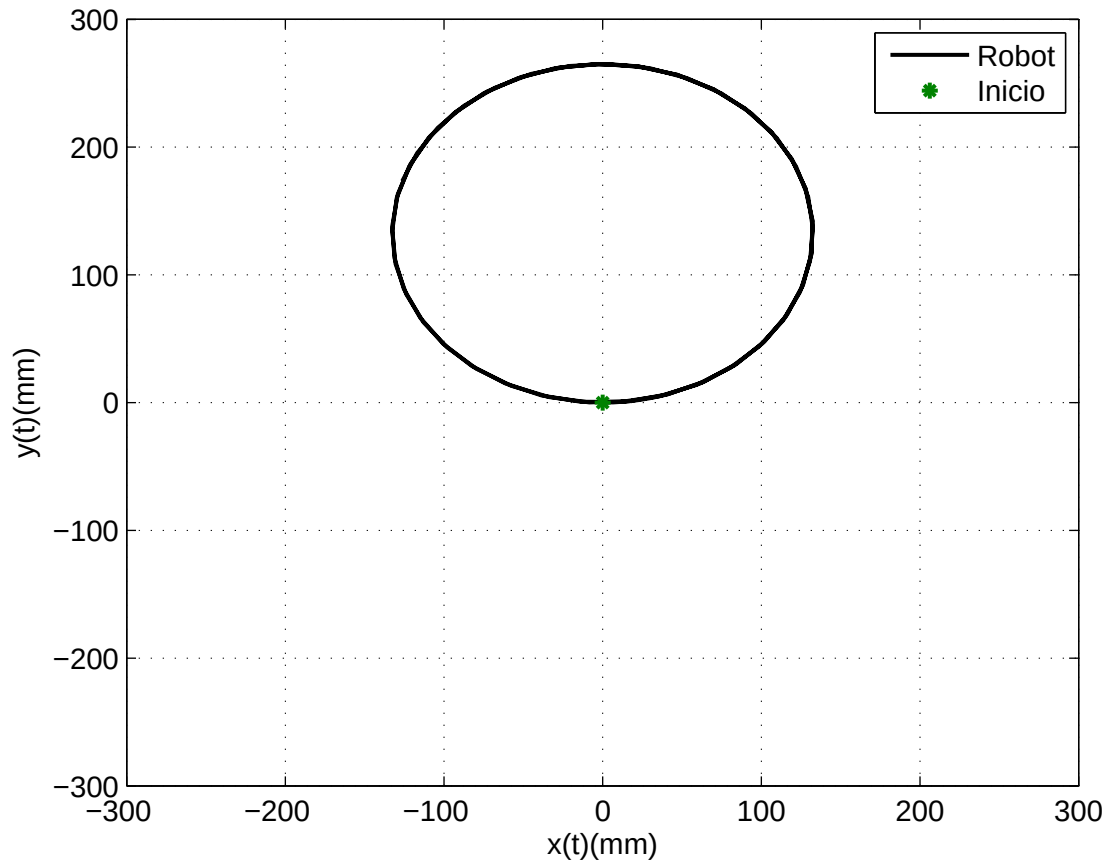
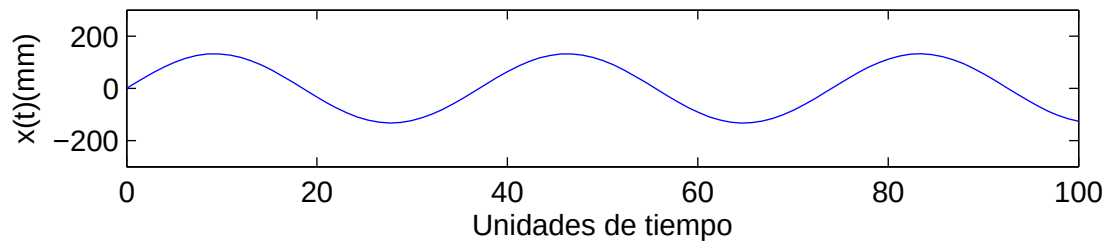


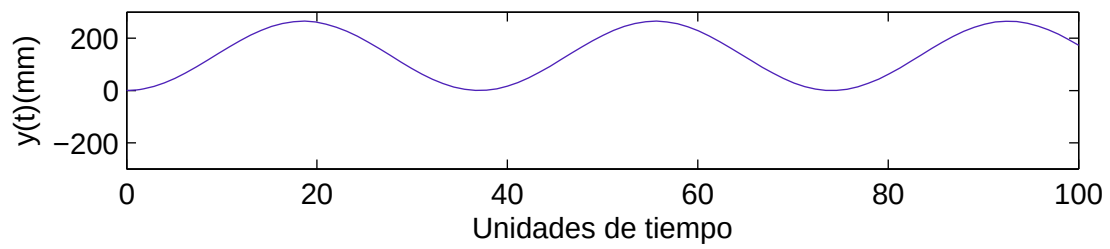
Figura 23: Movimiento con giro a la izquierda: a) Plano de fase (x, y) , b) x , c) y y d) θ .



b)



c)



d)

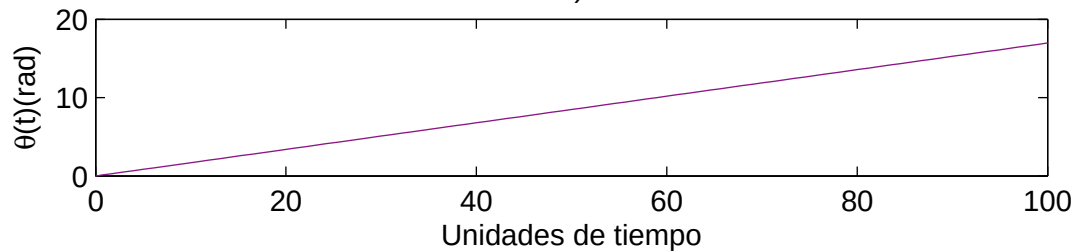


Figura 24: Movimiento circular: a) Plano de fase (x, y) , b) x , c) y y d) θ .

5.2 Metodología para la simulación de trayectoria asignada al robot móvil diferencial

Empleando el diagrama presentado en la figura 25 como guía, se ha modificado el código agregandó el compensador dinámico (25) y la ley de control (40)-(41), ésta hace uso de la posición o trayectoria deseada para calcular velocidades, tanto angulares (ω_R y ω_L) como lineales (v_R y v_L). Éstas últimas son las variables de entrada del robot móvil (2)-(3), es decir, la velocidad de sus ruedas. Obteniendo como resultado una nueva posición en “ x y y ”, la ley de control utiliza esta posición para calcular las nuevas velocidades que guiarán al robot hacia el siguiente punto o posición de la trayectoria deseada.

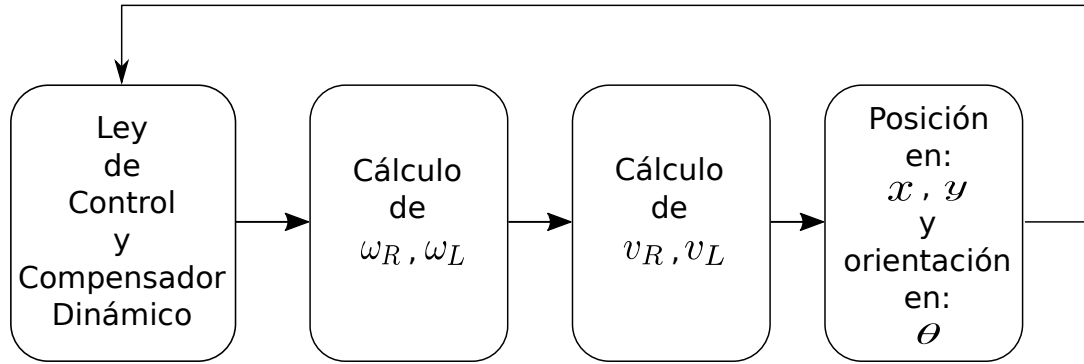


Figura 25: Diagrama a bloques empleado para la simulación de la asignación de trayectorias.

Debido a que la velocidad lineal máxima y mínima que el robot Khepera III puede presentar: $v_{\max} = 0.196 \frac{m}{s}$ y $v_{\min} = 0.009 \frac{m}{s}$, es necesario implementar un algoritmo dentro del cálculo de velocidades angulares ω_R y ω_L , que contenga una función de saturación y permita acotar las velocidades obtenidas en los resultados de la simulación como se realiza en [29]. Con la finalidad de que los resultados arrojados por las simulaciones sean lo más cercano posible a la realidad y por ende implementables en la parte experimental de este trabajo de tesis.

De las ecuaciones (2) y (3), se obtiene la relación entre velocidad lineal (v) y velocidad angular (ω):

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad (61)$$

Sustituyendo el valor de la velocidad máxima lineal, obtendremos la velocidad máxima angular:

$$\omega_{m\acute{a}x} = \frac{0.196 \frac{m}{s}}{0.0205m} = 9.56 \frac{rad}{s}, \quad (62)$$

de la misma forma con la velocidad mínima lineal,

$$\omega_{min} = \frac{0.009 \frac{m}{s}}{0.0205m} = 0.43 \frac{rad}{s}. \quad (63)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad angular máxima es $\omega = \pm 9.56 \frac{rad}{s}$, y que no se pretende saturar al robot móvil, las velocidades serán acotadas a conveniencia para valores entre $\pm 7.68 \frac{rad}{s}$.

5.2.1 Parámetros de la simulación de trayectorias

Al emplear el compensador dinámico en la parte de simulación e implementación experimental, es preciso definir las ganancias de la ley de control (40) y (41), c_{11} , c_{21} , c_{12} , c_{22} . Ya que la frecuencia y las ganancias tienen gran influencia en el comportamiento del robot móvil al seguir las trayectorias. Por lo que, la ley de control es modificada como sigue:

$$K_p = c_{11} = c_{21}, \quad (64)$$

$$K_d = c_{12} = c_{22}, \quad (65)$$

sustituyendo (64) y (65) en (40) y (41), se tiene:

$$u_1^* = K_p(\dot{X}_d(t) - \dot{x}) + K_d(X_d(t) - x), \quad (66)$$

$$u_2^* = K_p(\dot{Y}_d(t) - \dot{y}) + K_d(Y_d(t) - y). \quad (67)$$

K_p y K_d deben ser definidas adecuadamente. Para lograrlo se han realizado varias pruebas correspondientes a las simulaciones de cada trayectoria, utilizando diferentes valores para las ganancias, hasta obtener un correcto seguimiento de trayectoria y valores de velocidades angulares que no sobrepasen el límite propuesto.

Tanto las condiciones iniciales, como los datos físicos del Khepera III (r y l) permanecen igual que en la simulación de los movimientos básicos.

5.3 Dinámicas de las velocidades angulares (ω)

Algunos puntos clave para comprender las dinámicas de las velocidades angulares son:

- **Velocidades angulares iguales ($\omega_R = \omega_L$):** El que ambas velocidades angulares tengan los mismos valores, significa que el robot está trazando una línea recta. Si los valores se mantienen constantes, el robot tendrá una velocidad constante. Cuando se presenta un incremento o decremento, indicará que el robot aumenta (aceleración) o disminuye (frenado) su velocidad al trazar dicha línea recta.
- **Velocidades angulares diferentes ($\omega_R \neq \omega_L$):** Cuando las velocidades angulares tienen valores diferentes, significa que el robot está trazando una curva. Aquí la velocidad angular que sea menor indicará la dirección de la curva, es decir, si $\omega_R < \omega_L$ el giro es hacia la derecha. Además la diferencia entre los valores de las velocidades nos dirá si se trata de una curva muy cerrada, cuando la diferencia sea grande o una curva muy abierta, cuando la diferencia sea pequeña. Si los valores de las velocidades se mantienen constantes, el robot mantendrá su velocidad y cuando se presenta un incremento o decremento, el robot realizará la curva con mayor velocidad (acelerando) o menor velocidad (frenado).

5.4 Punto deseado

El punto deseado que se ha seleccionado para esta simulación es: $X_d(t) = 0.5$ y $Y_d(t) = 0.5$, utilizando las ganancias $K_p = 1$ y $K_d = 4$.

En la figura 29, se observa la posición inicial del robot (marcada con un asterisco color verde), la trayectoria que ha trazado (línea recta color negro) y la posición deseada (punto color azul cielo). El trayecto recorrido por el robot para alcanzar la posición deseada no es propiamente una trayectoria deseada, ya que lo que se busca es que el robot móvil se posicione en el punto deseado. En este caso, el robot ha realizado un movimiento de línea recta con una orientación de aproximadamente 42° hasta alcanzar la posición $(0.5, 0.5)$.

Dentro de la figura 26, es posible observar el desplazamiento realizado por el robot correspondiente a cada eje coordenado (x, y) en las gráficas a) y b) respectivamente, así como el ángulo de orientación (θ) . Ambas gráficas (figura 26 a) y b)) tienen su inicio en cero, pues la posición del robot en el eje coordenado (x, y) pertenece al punto $(0, 0)$. Posteriormente los valores para la posición en el plano (x, y) empiezan a incrementar de manera uniforme, debido a que se está trazando una línea recta, hasta tomar el valor de $x = 0.5$ y $y = 0.5$. En la gráfica c) de la figura 26, se comprueba que (θ) toma un valor de aproximadamente 0.75 rad, correspondiente a los 42° ya mencionados.

El error que existe entre el punto deseado y la posición del robot para cada instante del tiempo (error absoluto), es mostrado en la figura 27. Es fácil apreciar que las gráficas correspondientes a los errores en los ejes (x, y) tienen un valor inicial de -0.5 , debido a que precisamente esa es la diferencia que existe entre el punto deseado $(0.5, 0.5)$ y la posición inicial $(0, 0)$. Conforme el robot realiza su desplazamiento hacia el punto deseado, observamos en la gráfica de error como este va disminuyendo hasta tomar un valor 0 cuando el robot alcanza la posición $(0.5, 0.5)$, aproximadamente en 13 unidades de tiempo.

La figura 28, muestra las velocidades angulares a lo largo del tiempo, las cuales son utilizadas para calcular las velocidades lineales (variables de entrada del robot). Puesto que las velocidades angulares han sido acotadas para valores entre $\pm 7.68 \frac{rad}{s}$, para no forzar al robot móvil, las velocidades angulares iniciales son $\omega_R = 7.68 \frac{rad}{s}$ y $\omega_L = -7.68 \frac{rad}{s}$, las cuales permiten que el robot obtenga una orientación de aproximadamente 42° para dirigirse al punto deseado. Una vez se obtiene la dirección correcta se observa que ω_L incrementa hasta igualar a ω_R . Al tener que $\omega_R = \omega_L$ se obtiene un desplazamiento en línea recta, como se ha explicado en la simulación de movimientos básicos. Posteriormente ambas velocidades angulares disminuyen en la misma proporción, lo que permite continuar trazando la línea recta pero disminuyendo la velocidad del robot hasta llegar al punto deseado y obtener velocidades angulares de $0 \frac{rad}{s}$.

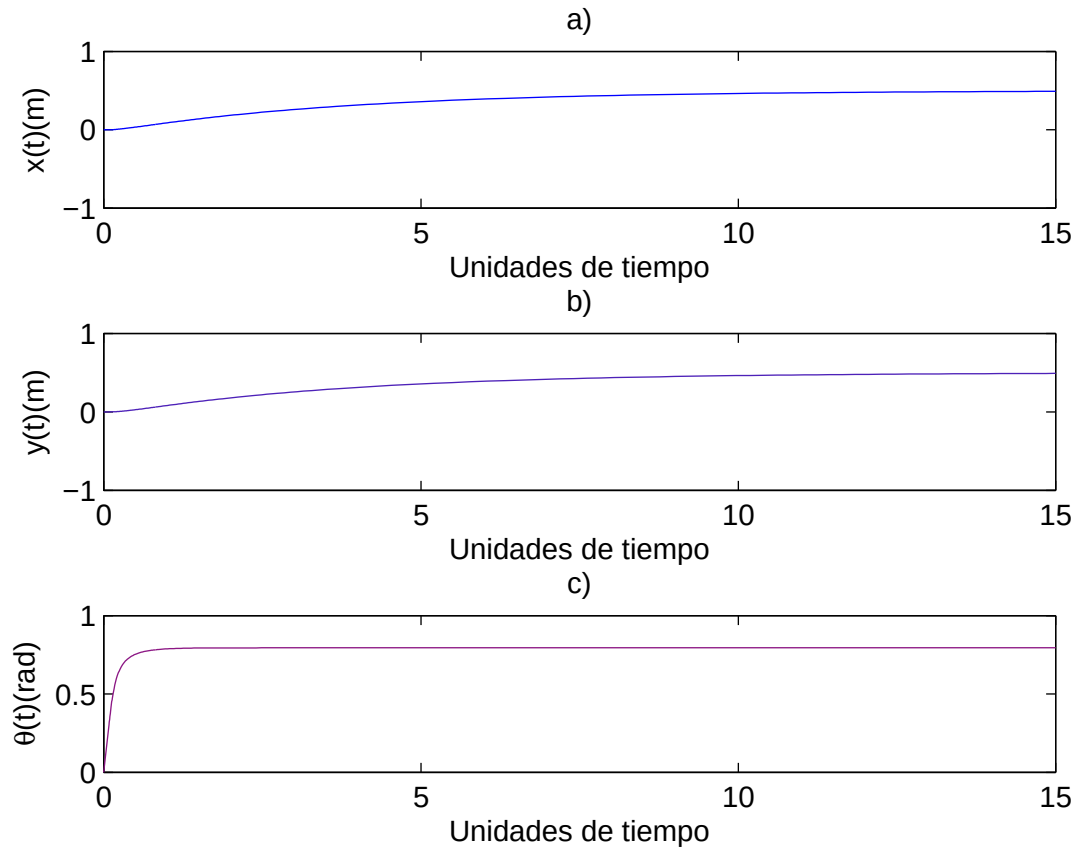


Figura 26: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

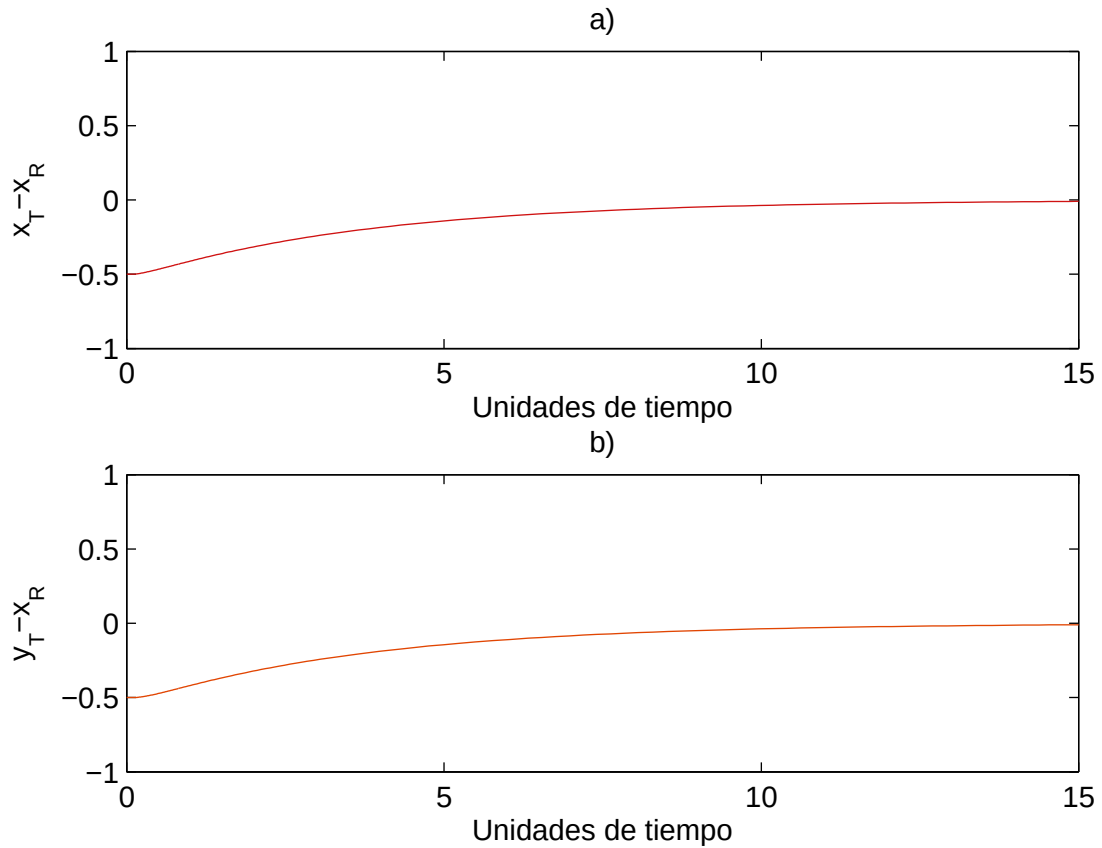


Figura 27: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

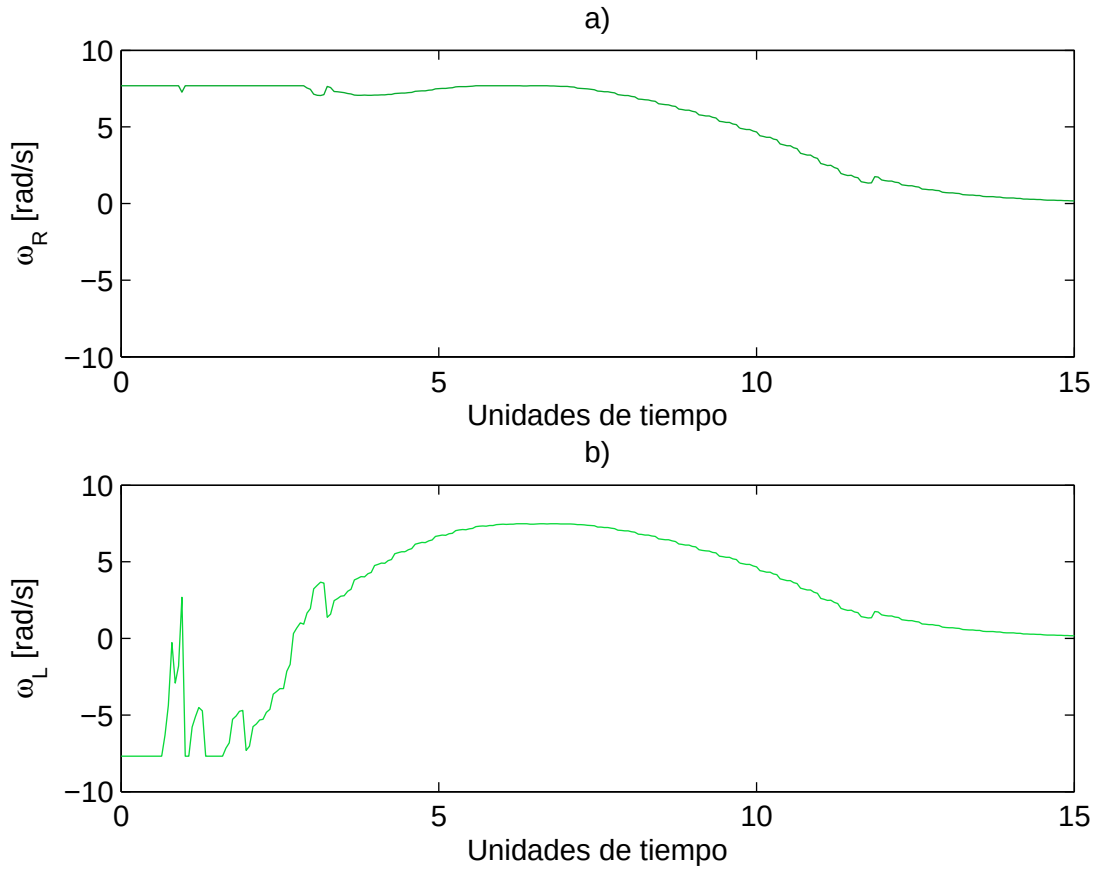


Figura 28: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

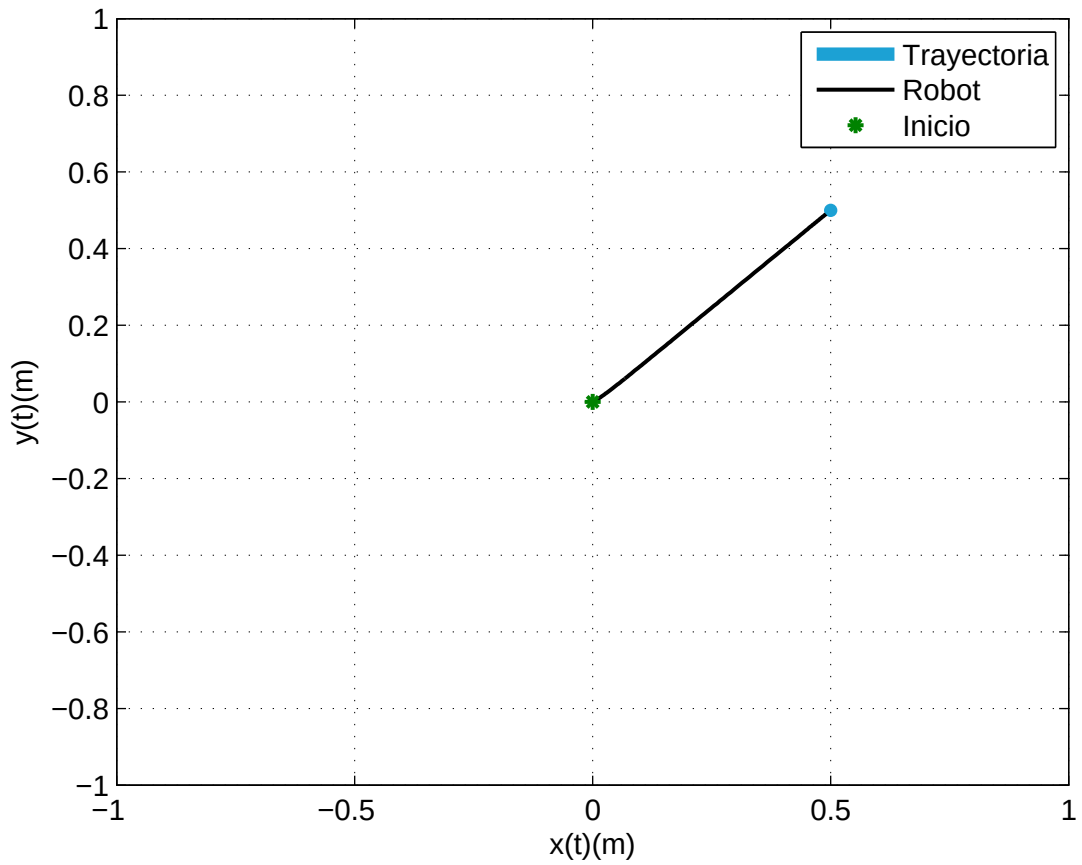


Figura 29: Punto deseado.

5.5 Trayectoria circular

La trayectoria circular para la simulación se encuentra definida por: $X_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{50t})}{2}$ y $Y_d(t) = \frac{\cos(\frac{2\pi}{50t})}{2}$, utilizando las ganancias $K_p = 1$ y $K_d = 3$.

En la figura 33, se muestra la posición inicial del robot móvil (asterisco color verde), la trayectoria deseada (línea color azul cielo) y la trayectoria que ha trazado el robot (línea color negro). Se observa que a partir de su punto inicial, el robot realiza un movimiento parecido a una línea recta con una curva al final que le permite incorporarse a la trayectoria deseada.

Los desplazamientos realizados por el robot correspondientes a los ejes (x,y) se presentan en la figura 30, así como el ángulo de orientación (θ) . Es notable que dentro de las primeras 5 unidades de tiempo, la gráfica para el eje (x) muestra un incremento sutil, mientras que el eje (y) tiene un incremento más pronunciado, esto se debe a la primera parte del movimiento realizado por el robot para incorporarse a la trayectoria circular (línea recta). Posteriormente entre las 5-12 unidades de tiempo, los valores en el eje (y) decrecientan, mientras que en (x) incrementan un poco más, lo que representa la segunda parte del movimiento para entrar a la trayectoria circular (la curva). Observando la figura 33, se identifica que el robot entra a la trayectoria deseada aproximadamente en el punto $(0.48,0.17)$, ubicando estos valores en las gráficas a) y b) de la figura 33, se encuentra que el robot está dentro la trayectoria deseada en las 12 unidades de tiempo. A partir de este punto los movimientos en ambos ejes son suaves, ya que el robot se encuentra dentro de la trayectoria deseada. Si dividimos la circunferencia en dos partes (ver figura 33), siendo el eje x el propio eje de simetría, se observa que los valores en (x) disminuyen desde 0.5 hasta -0.5, mientras que los valores en (y) disminuyen de 0 a -0.5, para luego incrementar a 0 nuevamente. Éste comportamiento se observa en las gráficas a) y b) de la figura 33,

entre las 12-38 unidades de tiempo. Para la otra mitad, los valores en (x) van de -0.5 a 0.5, mientras que los de (y) incrementan hasta 0.5, para luego disminuir a 0. Concluyendo así una vuelta a la trayectoria, al llegar al punto (0.5,0). Este comportamiento se puede identificar dentro de las 38-60 unidades de tiempo.

En la figura 31, se exponen los errores absolutos para los movimientos en los ejes coordenados (x,y) . Como valores iniciales de las gráficas se tiene $X_T - X_R = 0$ y $Y_T - Y_R = -0.5$, ésto se debe a la diferencia del primer punto de la trayectoria deseada (0,0.5) y la posición inicial del robot (0,0). Una vez el robot avanza hacia la trayectoria circular, es notable la reducción del error para el eje (y) .

Las velocidades angulares del robot móvil se pueden analizar en la figura 32. Como se mencionó, las primeras 12 unidades de tiempo muestran la transición del punto inicial a la trayectoria deseada. Se observa un comportamiento muy similar a lo observado en el punto deseado, pues la primer parte del movimiento a la incorporación a la trayectoria circular es una línea recta. Aproximadamente a partir de las 8 unidades de tiempo, ambas velocidades angulares empiezan a disminuir, donde ω_L tiene valores ligeramente mayores que ω_R . Al ser $\omega_L > \omega_R$ el robot dará un giro hacia la izquierda, éstas velocidades permiten que el robot trace la curva que se observa antes de incorporarse a la trayectoria deseada. Una vez que el robot se encuentra dentro de la trayectoria, se observa que las velocidades angulares se mantienen constantes, con $\omega_L > \omega_R$, pues como se explicó en el capítulo 3 y como se observa en la simulación de movimientos básicos, es precisamente ésto lo que permite que el robot realice la trayectoria circular.

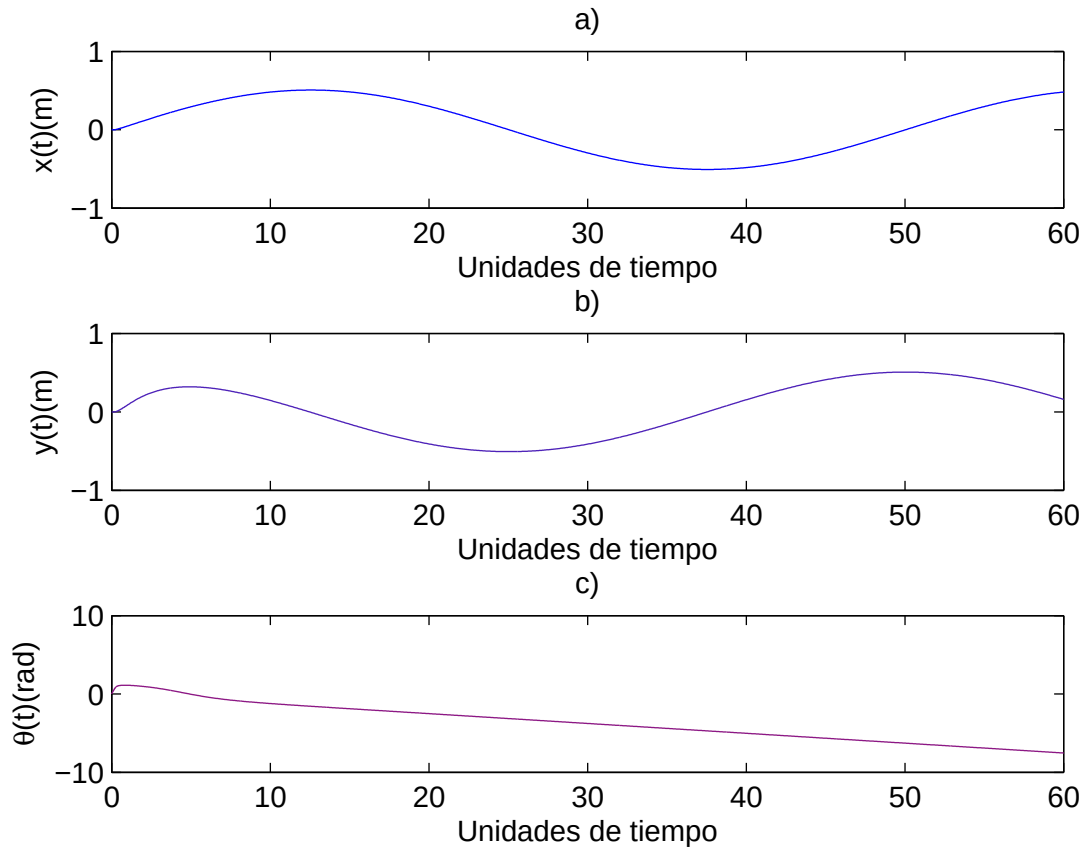


Figura 30: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

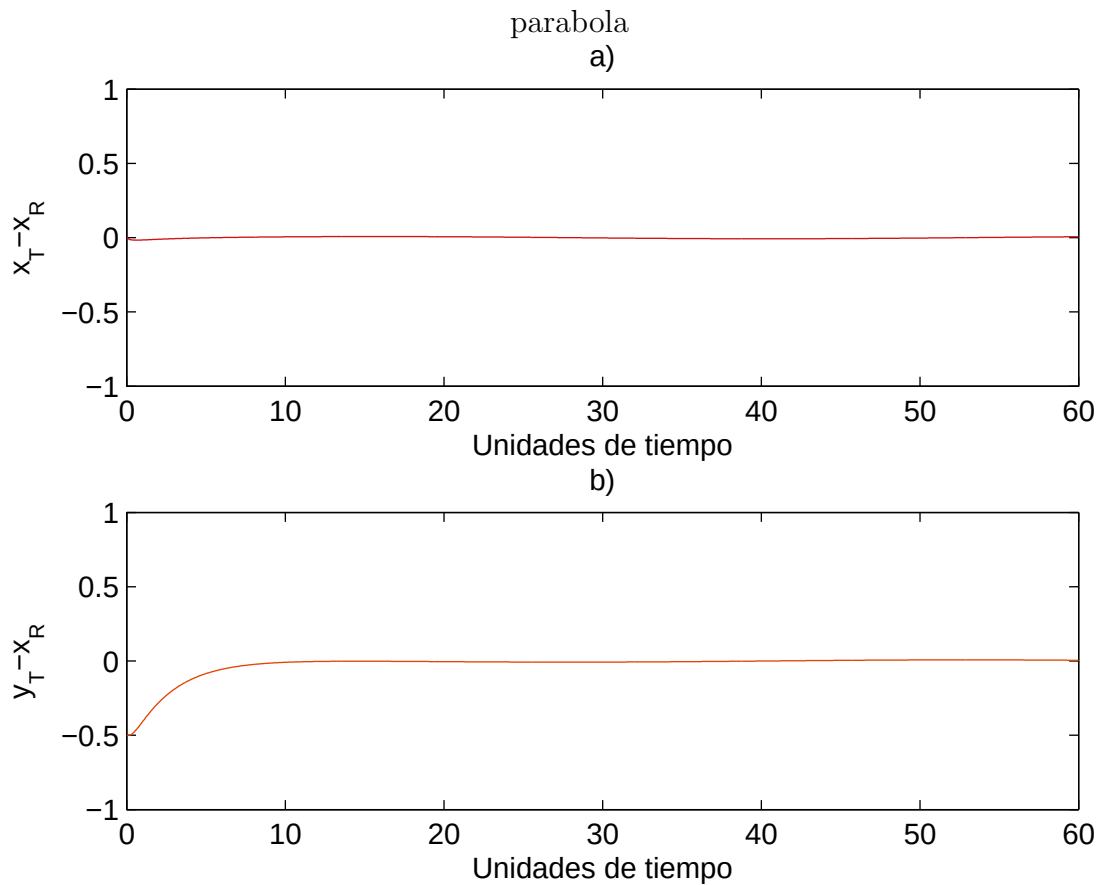


Figura 31: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

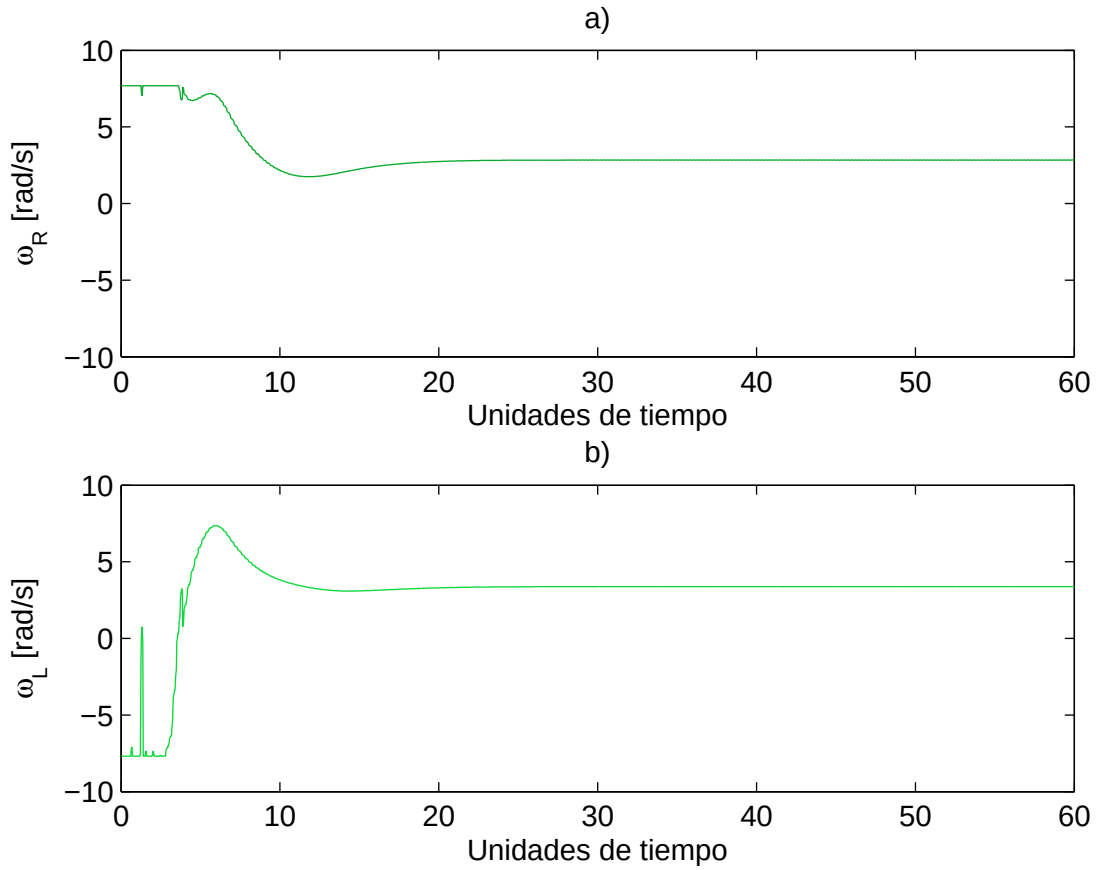


Figura 32: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

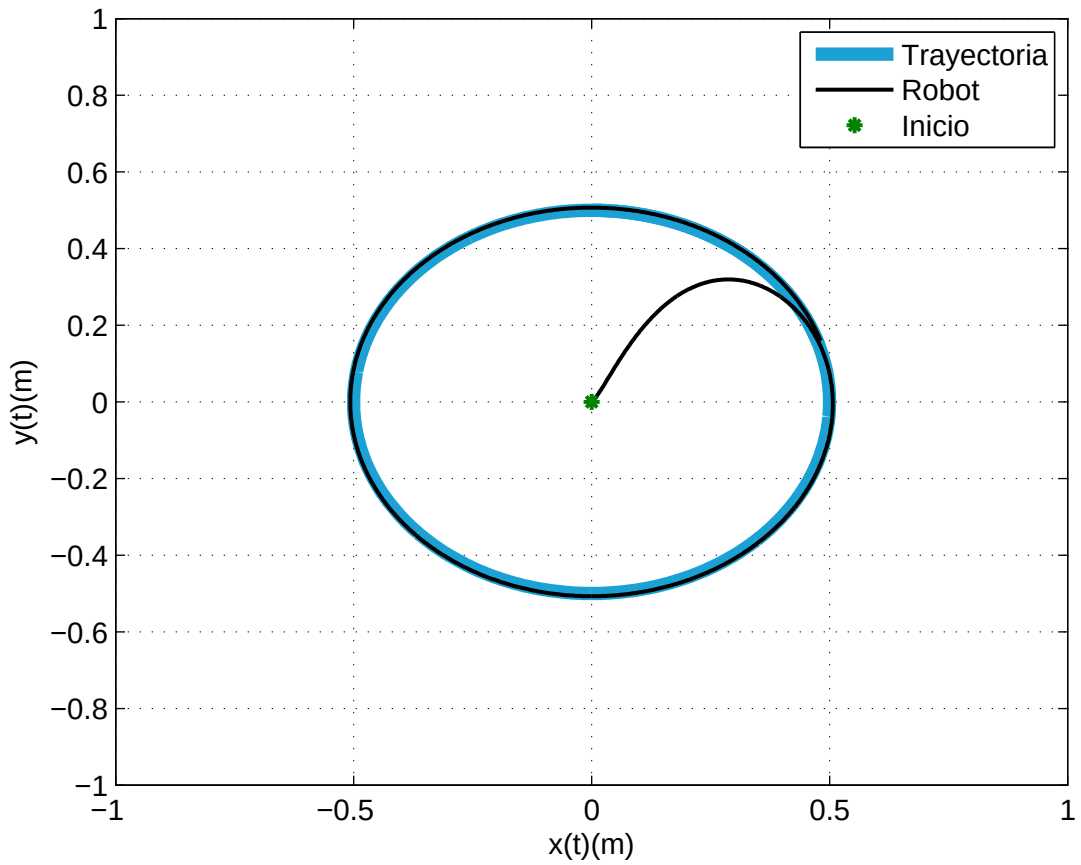


Figura 33: Trayectoria circular.

5.6 Trayectoria con la forma de infinito

La trayectoria con la forma de infinito definida para la parte de simulación es: $X_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{100t})}{2}$ y $Y_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{50t})}{2}$, utilizando las ganancias $K_p = 2$ y $K_d = 4$.

En la figura 37, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial del robot y la trayectoria trazada por el robot. Las gráficas de la figura 34, presentan los movimientos realizados por el robot en cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ). Donde se identifica que al robot le toma 100 unidades de tiempo completar una vuelta a la trayectoria infinito, si dividimos la figura 37 por la mitad usando el eje (y) como eje de simetría, comprenderemos fácilmente los desplazamientos realizados en cada eje. En las primeras 50 unidades de tiempo, los valores del eje (x) incrementan hasta $x = 0.5$ y luego disminuyen para llegar a $x = 0$. Para el eje (y), se tiene un incremento hasta $y = 0.5$, luego un decremento para llegar a $y = -0.5$ y finalmente un incremento hasta $y = 0$. Obteniendo así la posición inicial (0,0) en las 50 unidades tiempo, para continuar trazando la mitad faltante, en donde se observa que los valores en el eje (y) continúan aumentando hasta $y = 0.5$, mientras que en el eje (x) se identifica un decremento para obtener un valor de $x = -0.5$. Finalmente los valores en (x) vuelven a incrementar para alcanzar de nuevo la posición inicial, completando así una vuelta a la trayectoria deseada.

El error mostrado en las gráficas de la figura 35, es prácticamente nulo desde el inicio, debido a que el punto inicial tanto para la trayectoria deseada como para el robot es el mismo (0,0).

La dinámica de las velocidades angulares a lo largo del tiempo, se presentan en la figura 36. Debido a que una explicación detallada de estas dinámicas sería exhaustiva, se recomienda releer el apartado 5.2.2, así como la explicación de las dos simulaciones anteriores para una mejor comprensión de las gráficas de la figura 36.

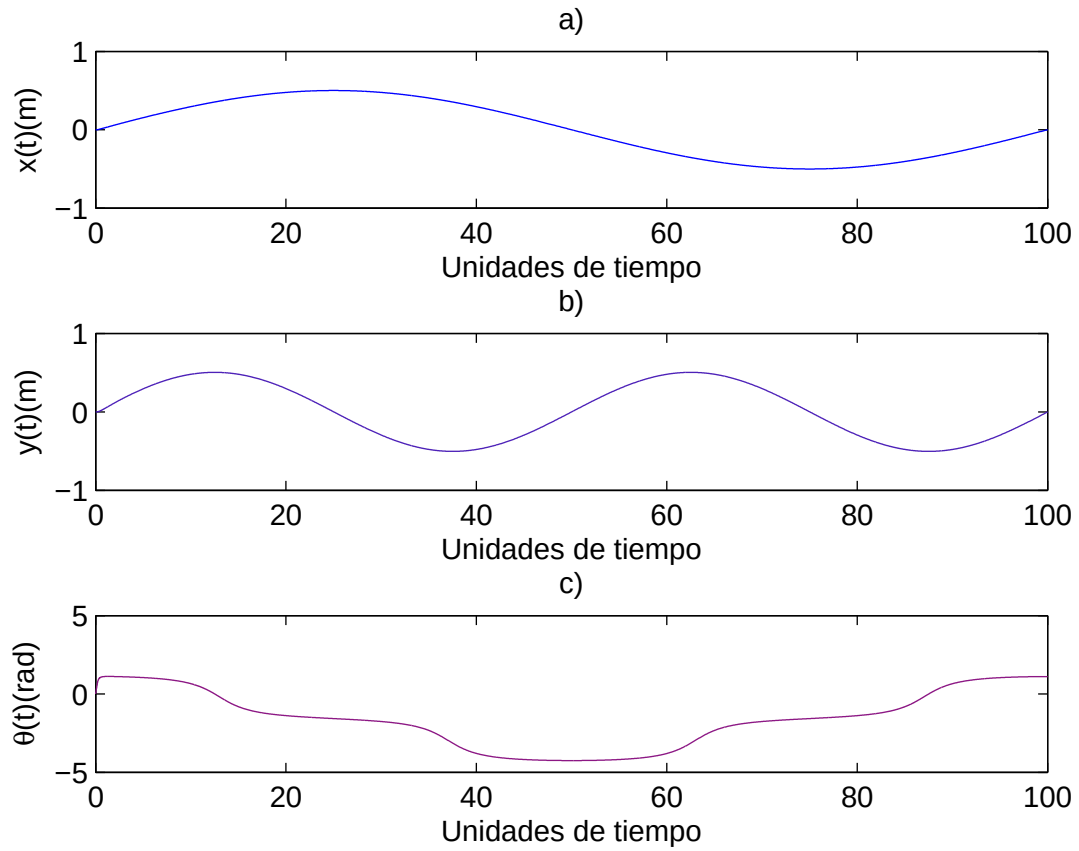


Figura 34: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

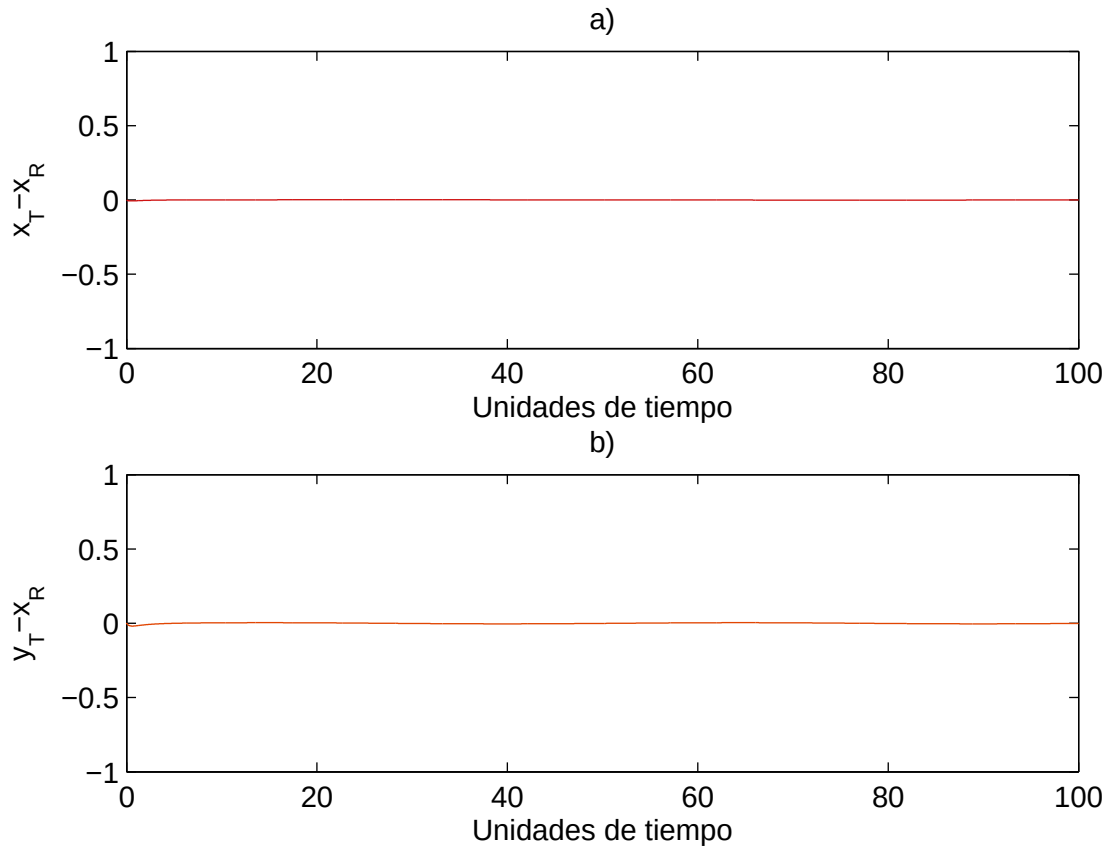


Figura 35: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

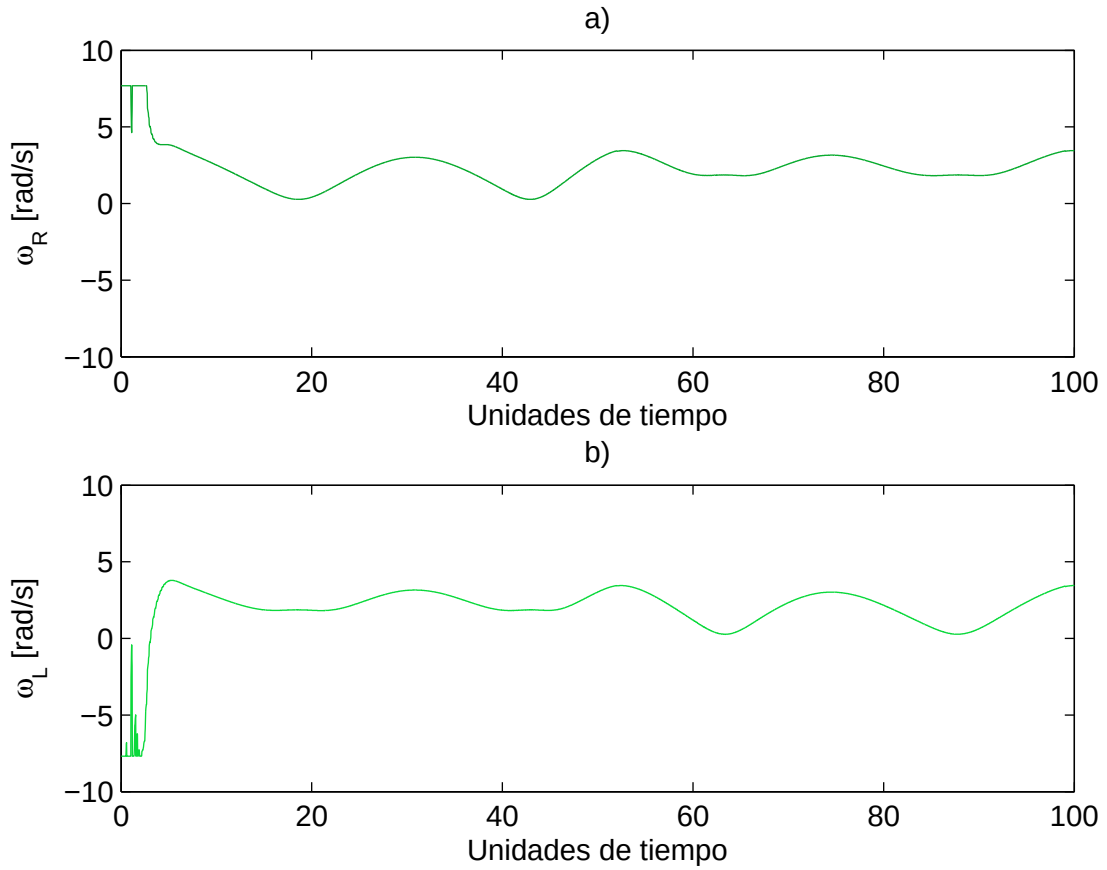


Figura 36: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

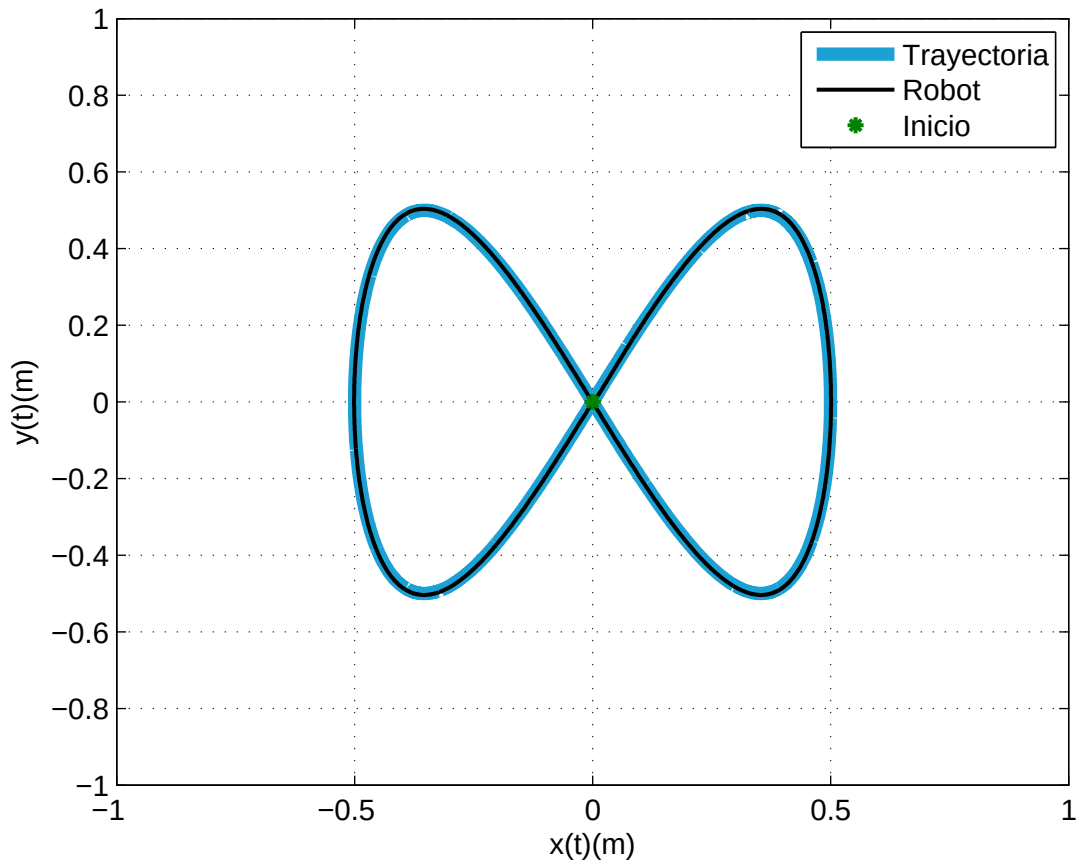


Figura 37: Trayectoria con la forma de infinito.

5.7 Trayectoria con la forma de ocho

La trayectoria con la forma de ocho empleada para simulación se encuentra definida por: $X_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{50t})}{2}$ y $Y_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{100t})}{2}$, utilizando las ganancias $K_p = 2$ y $K_d = 4$.

En la figura 41, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y el trayecto trazado por el robot móvil. En ella se observa que al igual que en la trayectoria con la forma de infinito, el robot se encuentra dentro de la trayectoria deseada desde el inicio. Las gráficas a) y b) de la figura 38, muestran los desplazamientos realizados por el robot correspondientes a cada eje coordenado, donde fácilmente se observa el mismo comportamiento que en la trayectoria con forma de infinito pero con los ejes intercambiados, es decir, la dinámica del eje (y) de la trayectoria anterior es igual a la del eje (x) correspondiente a esta trayectoria. Y el desplazamiento del eje (x) de la trayectoria infinito es igual al eje (y) correspondiente a la presente trayectoria deseada. Si se observa detenidamente la gráfica de la figura 38 c), pertenecientes al ángulo de orientación (θ) de ambas trayectorias, se identifica que éstas se encuentran invertidas una respecto a la otra, producto del desfase de 90° que existe entre estas dos figuras.

El error mostrado en la figura 39, es cero. Ésto se debe a que ambos puntos, el inicial de la trayectoria deseada y del robot es el mismo (0,0). Se observa también que este error se mantiene constante, pues el robot se encuentra dentro de la trayectoria deseada a lo largo de las 100 unidades de tiempo.

La figura 40, muestra el comportamiento de las velocidades angulares ω_R y ω_L a lo largo del tiempo. Debido al desfase ya mencionado, las velocidades angulares se encuentran invertidas con respecto a las velocidades angulares presentadas por la trayectoria infinito, es decir, la dinámica de ω_R (infinito) es igual a la que se observa en ω_L (ocho). De la misma forma con ω_L (infinito) y ω_R (ocho).

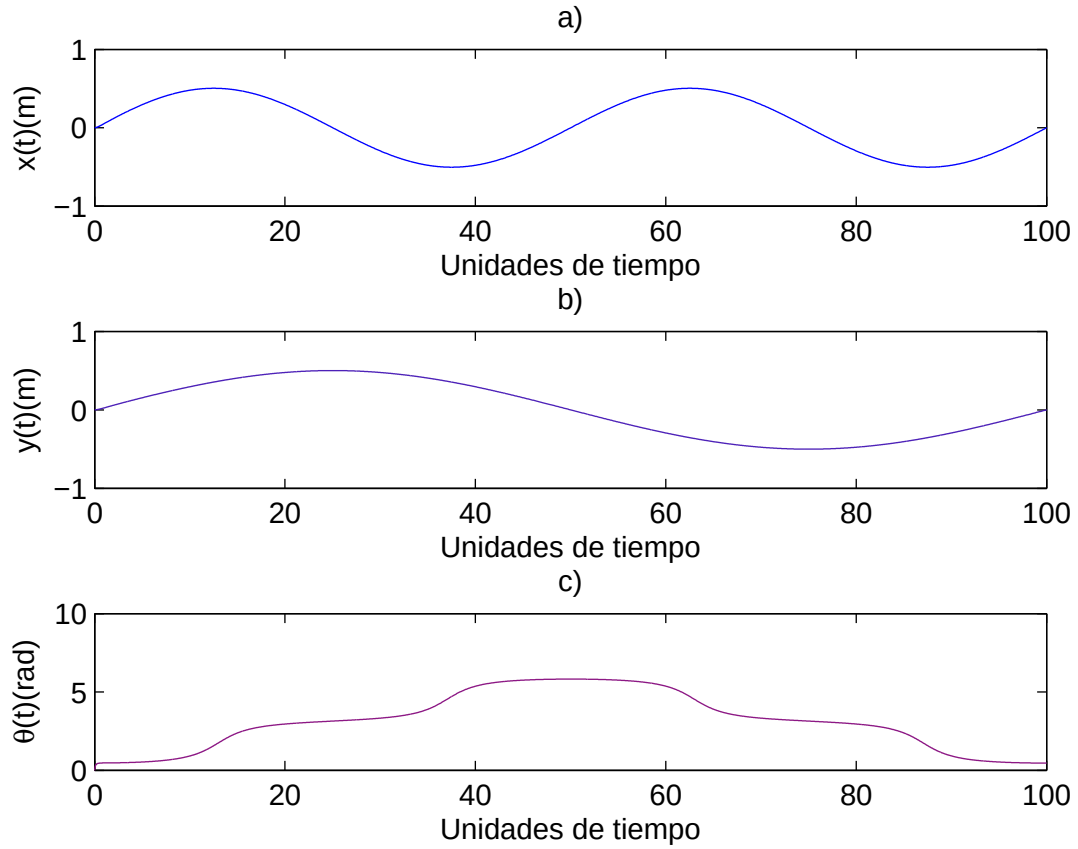


Figura 38: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

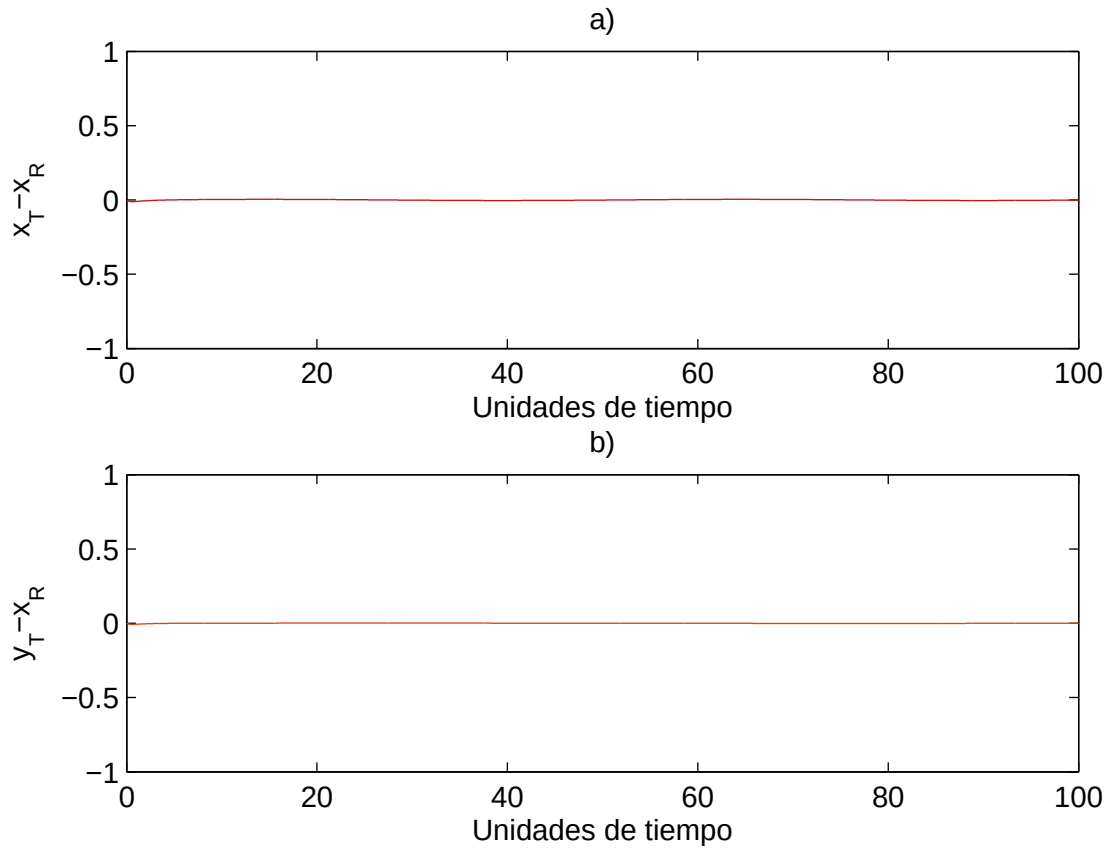


Figura 39: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

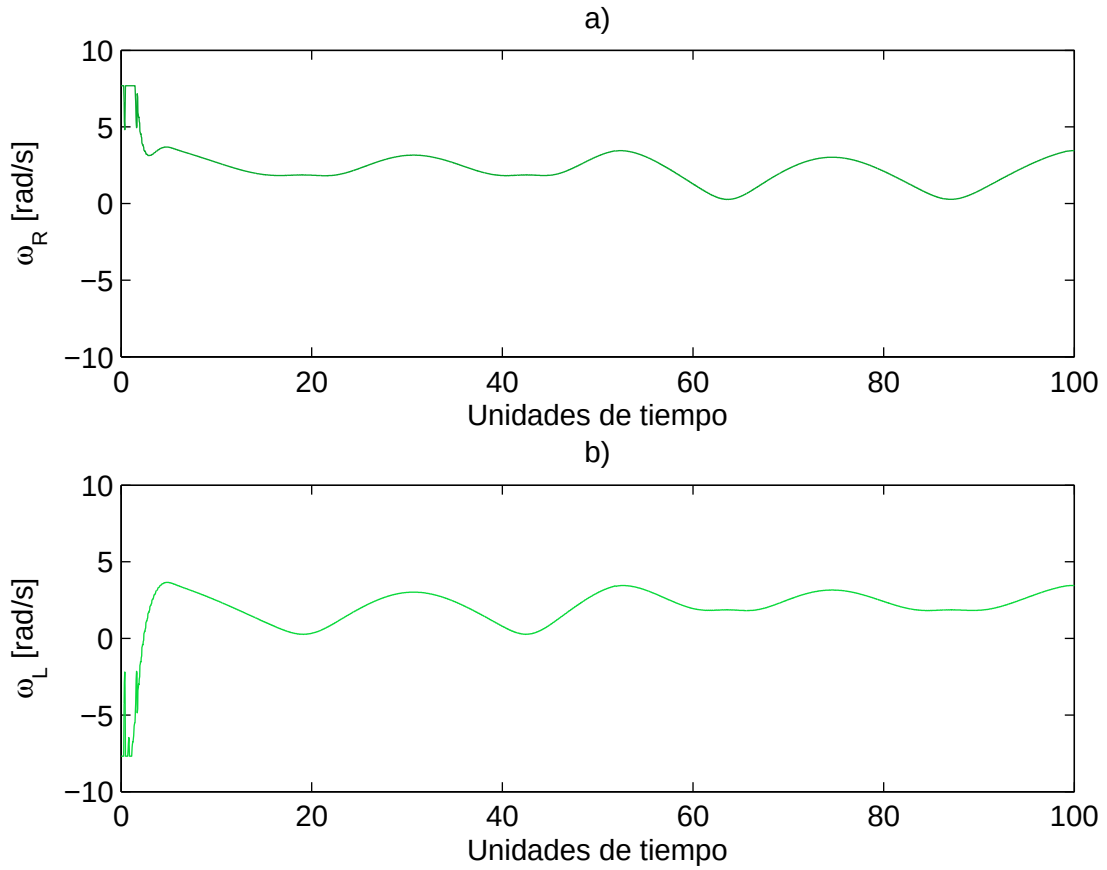


Figura 40: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

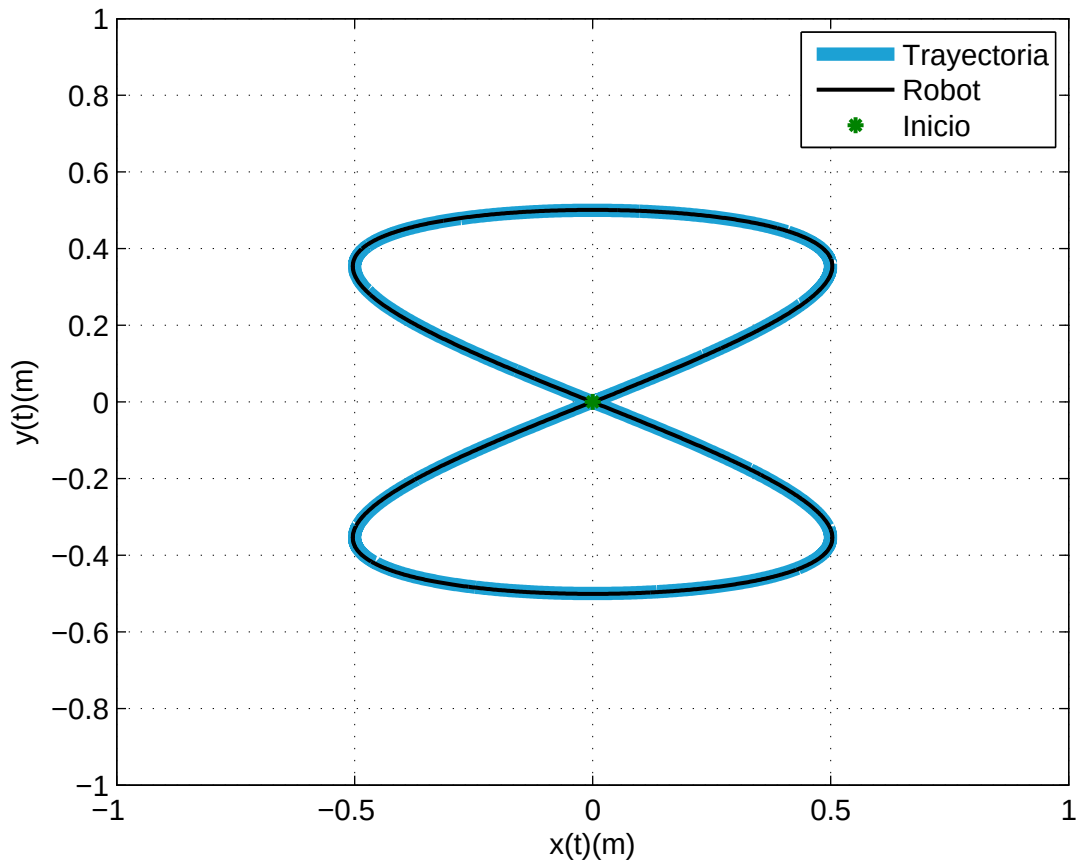


Figura 41: Trayectoria con la forma de Ocho.

5.8 Trayectorias con la forma de rosa polar

Las trayectorias de la rosa polar utilizadas para la simulación, se encuentran definidas por: $X_d(t) = \frac{(a+b)\cos(nft)\cos(ft)}{10}$, $Y_d(t) = \frac{(a+b)\cos(nft)\sin(ft)}{10}$ y los parámetros $a = 5$, $b = 3$, $f = \frac{2\pi}{150}$.

Como se ha explicado en el capítulo 4, al modificar el parámetro n obtendremos una cierta cantidad de pétalos.

5.8.1 Rosa polar con 3 pétalos (n=3)

Para la trayectoria deseada de rosa polar con 3 pétalos se define $n = 3$, ya que es un valor impar se obtiene una rosa de n pétalos. Utilizando las ganancias $K_p = 2$ y $K_d = 4$.

En la figura 44, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. Se observa que a partir de la posición inicial, el robot realiza un movimiento parecido a una línea recta con una curva final hacia la izquierda que le permite incorporarse a la trayectoria deseada. Ya que este movimiento conlleva un desplazamiento mayor en (x) respecto al eje (y) , se puede identificar en la gráfica a) de la figura 42, un incremento pronunciado dentro de las primeras 4 unidades de tiempo. Mientras que la gráfica de la figura 42 b), muestra movimientos muy sutiles dentro del eje (y) , pues es hasta que el robot realiza la curva que aumenta los valores en (y) . Posteriormente, la gráfica a) empieza a disminuir de manera suave debido a que el robot entra a la trayectoria deseada, la cual disminuye sus valores en el eje (x) .

El error inicial $X_T - X_R$ de la figura 43, disminuye conforme el robot se acerca a la trayectoria de 3 pétalos, hasta llegar a cero en aproximadamente 7 unidades de tiempo.

Las gráficas a) y b) de la figura 44, muestran cambios abruptos durante las primeras 8 unidades de tiempo, consecuencia de la proceso de incorporación a la trayectoria deseada.

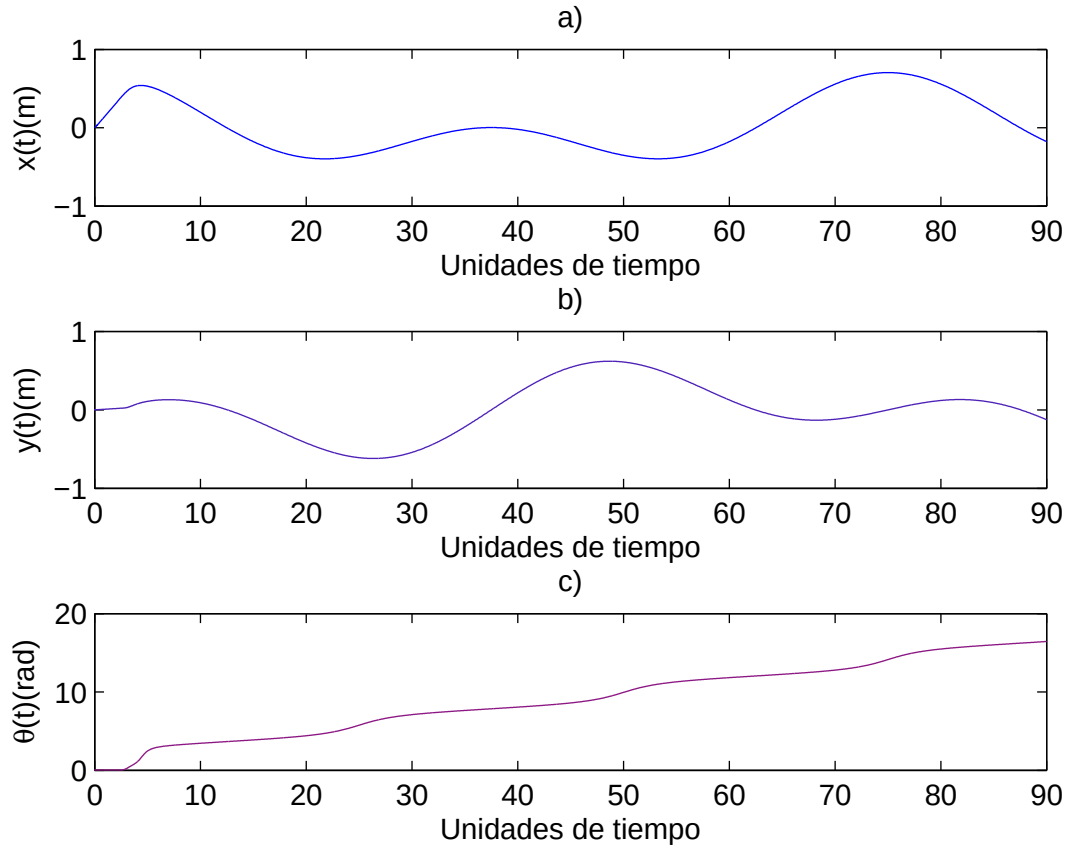


Figura 42: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

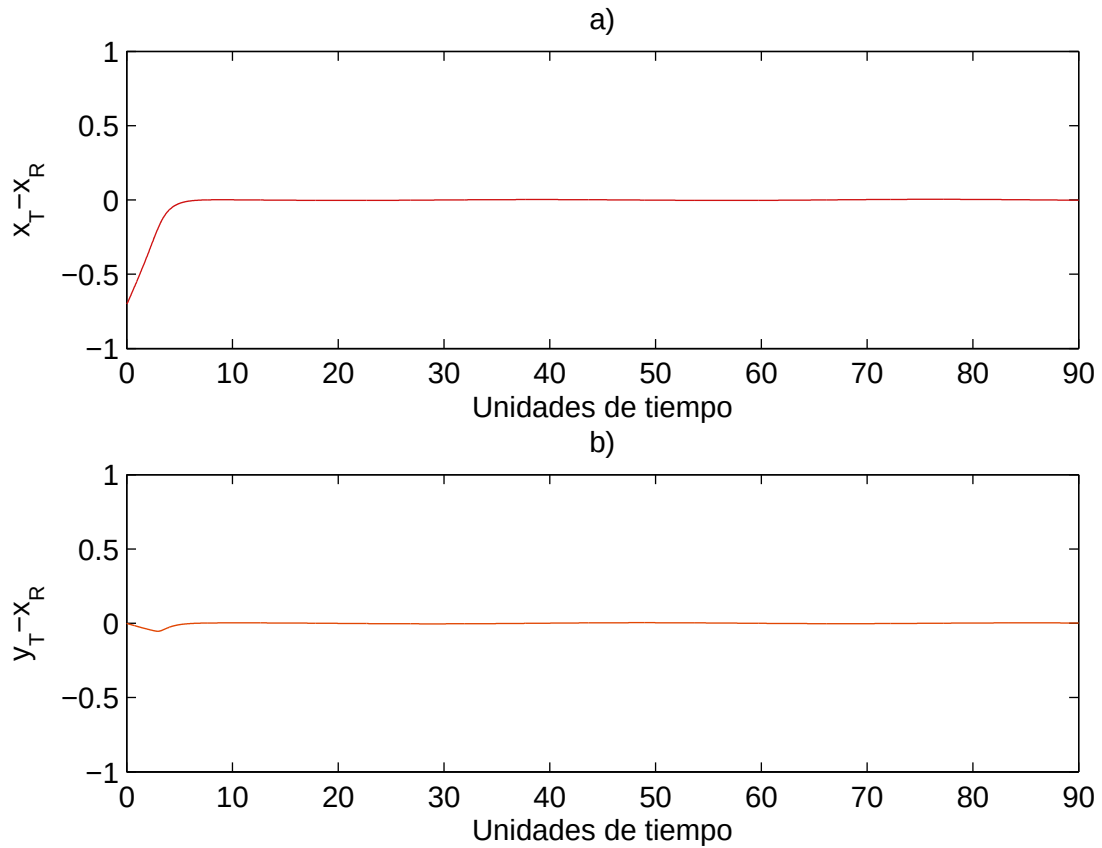


Figura 43: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

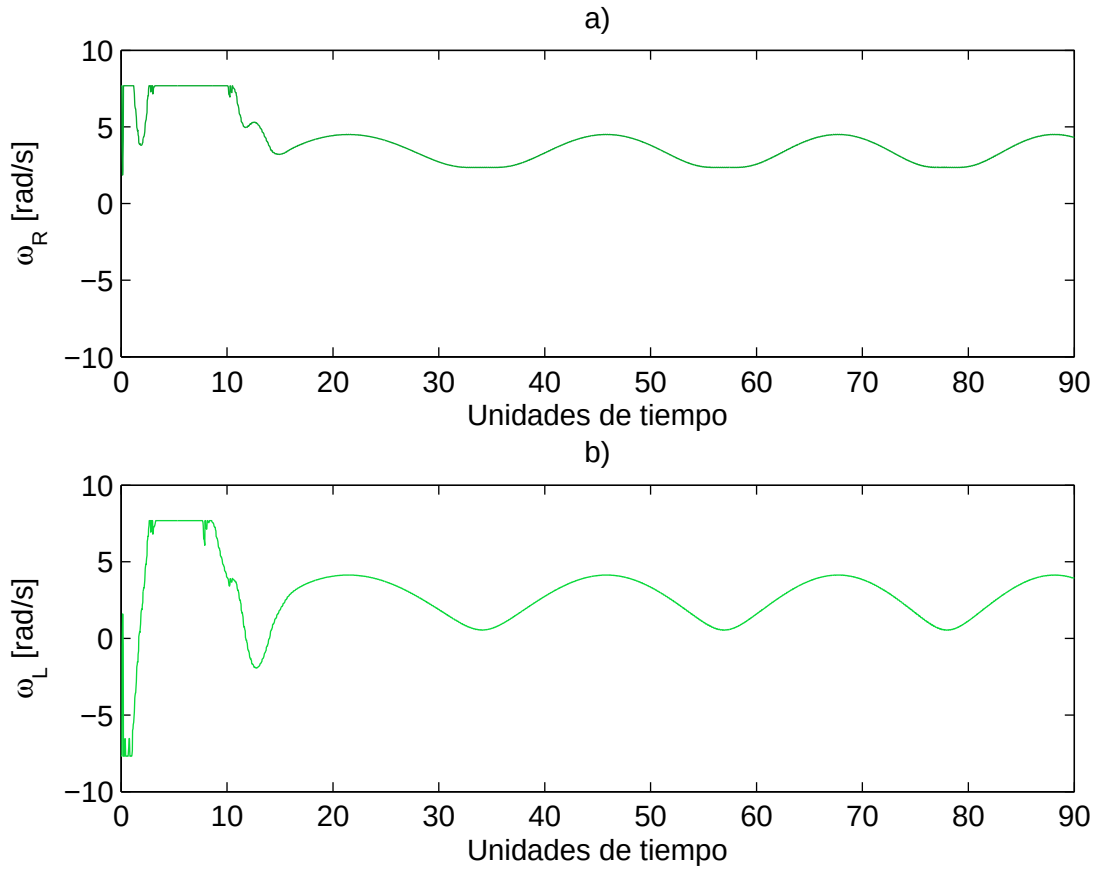


Figura 44: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

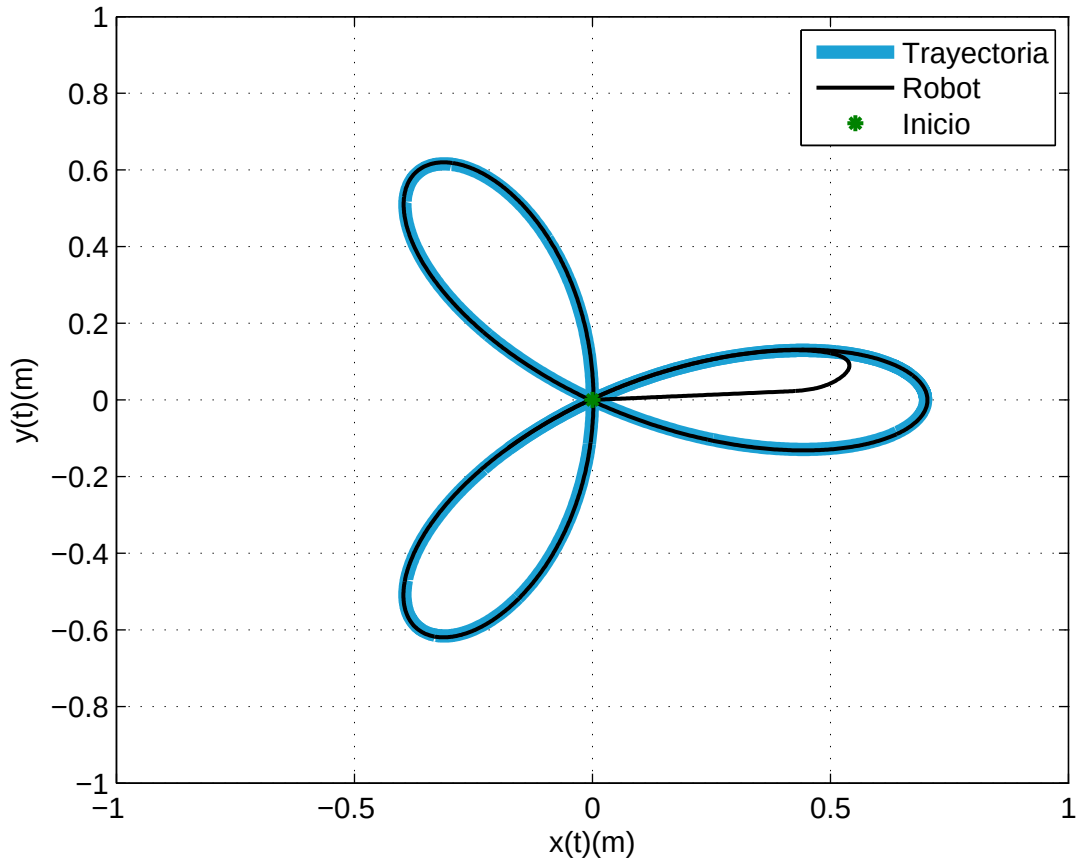


Figura 45: Trayectoria con la forma de rosa polar - 3 pétalos ($n=3$).

5.8.2 Rosa polar de 4 pétalos ($n=2$)

Para la trayectoria con forma de rosa polar de 4 pétalos, se define $n = 2$ y se utilizan las ganancias $K_p = 2$ y $K_d = 4$. Al tener n un valor par, se obtienen $2n$ pétalos, formando así la trayectoria deseada.

La figura 49, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y el recorrido realizado por el robot móvil. Se observa que el robot realiza un movimiento similar al de la trayectoria anterior, al momento de partir de la posición inicial y llegar a la trayectoria deseada por lo que se espera un desplazamiento mayor en el eje (x), respecto a (y).

Las gráficas a) y b) de la figura 46, muestran los movimientos realizados por el robot en los ejes (x) y (y), donde se comprueba lo ya mencionado. En las primeras 5 unidades de tiempo se observa un incremento pronunciado en la gráfica a), mientras que la gráfica b) aumenta sutilmente. Para continuar analizando las dinámicas de las gráficas de la figura 46 a) y b), se procede de la siguiente manera: En la figura 49, se identifica que el robot entra a la trayectoria de 4 pétalos en el punto (0.66,0.1), ubicando estos valores en las gráficas a) y b) de la figura 46, se encuentra que el robot alcanza la trayectoria deseada en 5 unidades de tiempo. A continuación se localizan los puntos principales de la trayectoria deseada, en la figura 49, los cuales son: (0.7,0),(0,-0.7),(-0.7,0) y (0,0.7).

Partiendo de (0.66,0.1) hacia el punto (0,-0.7), los valores en (x) disminuyen a -0.2 y luego aumentan a 0, mientras que los valores en (y) solo disminuyen a -0.7. Este comportamiento se observa entre las 4-38 unidades de tiempo en a) y b) de la figura 49.

Para ir del punto (0,-0.7) al (-0.7,0), los valores de (x) aumentan a 0.2 y luego disminuyen a -0.7. Para el eje (y), la dinámica aumenta a 0.2 y luego disminuye a 0. Esto se observa dentro de las 38-75 unidades de tiempo.

Para el desplazamiento de (-0.7,0) a (0,0.7), los movimientos en (x) van de -0.7 a 0.2

y luego disminuyen a 0. Mientras que los valores de (y) solo incrementan a 0.7. Este comportamiento se encuentra dentro de las 75-112 unidades de tiempo.

Finalmente para ir del punto $(0,0.7)$ a $(0.7,0)$, la dinámica en (x) disminuye a -0.2, para luego aumentar a 0.7. Los valores en el eje (y) disminuyen hasta -0.2 para finalmente aumentar a 0. Estos movimientos se encuentran entre 112-150 unidades del tiempo. Las unidades de tiempo restantes pertenecen al movimiento realizado del punto $(0.7,0)$ - $(0.66,0.1)$. Por último la gráfica de la figura 46 c), muestra el ángulo de orientación (θ) en el tiempo.

El error inicial presentado en la figura 47, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.7$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.7,0)$. Conforme el robot se acerca a la trayectoria deseada, el error en (x) disminuye hasta llegar a cero.

Las gráficas de la figura 48, muestran las dinámicas de las velocidades angulares ω_R y ω_L . Se observa en las primeras 5 unidades de tiempo una etapa de transición, con un incremento pronunciado en ω_L con la finalidad de igualar a ω_R , para que el robot trace la línea hacia la trayectoria deseada. Una vez dentro de la trayectoria de 4 pétalos, las velocidades adquieren aproximadamente el valor de $2 \frac{rad}{s}$, siendo ω_R levemente mayor para trazar la curva de la segunda mitad del primer pétalo. Las dinámicas que se encuentran entre 35-42, 71-79, 107-114 y 145-152 unidades de tiempo, corresponden a las velocidades angulares que permiten al robot trazar las curvas de los pétalos, ubicadas en cada uno de los 4 puntos principales ya mencionados. El resto de la gráfica pertenece a las velocidades que el robot utiliza para realizar las curvas restantes de la trayectoria, las cuales son mucho más abiertas (ver figura 49).

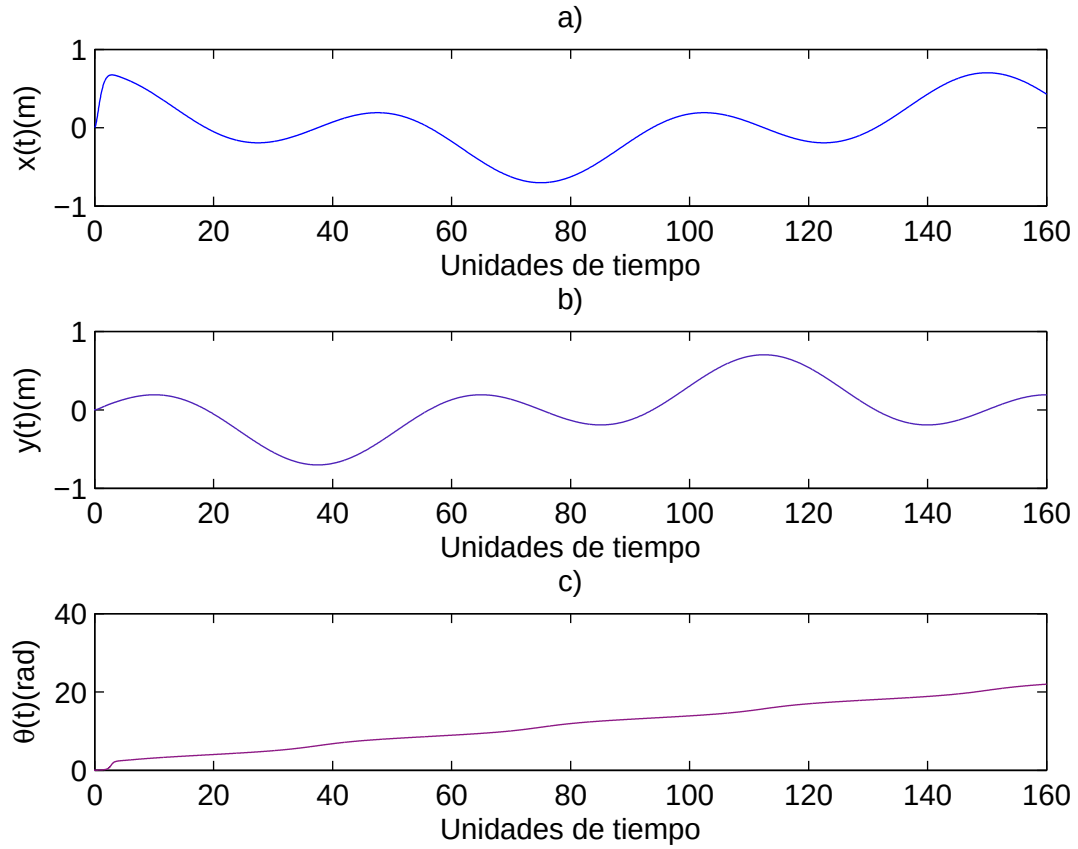


Figura 46: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

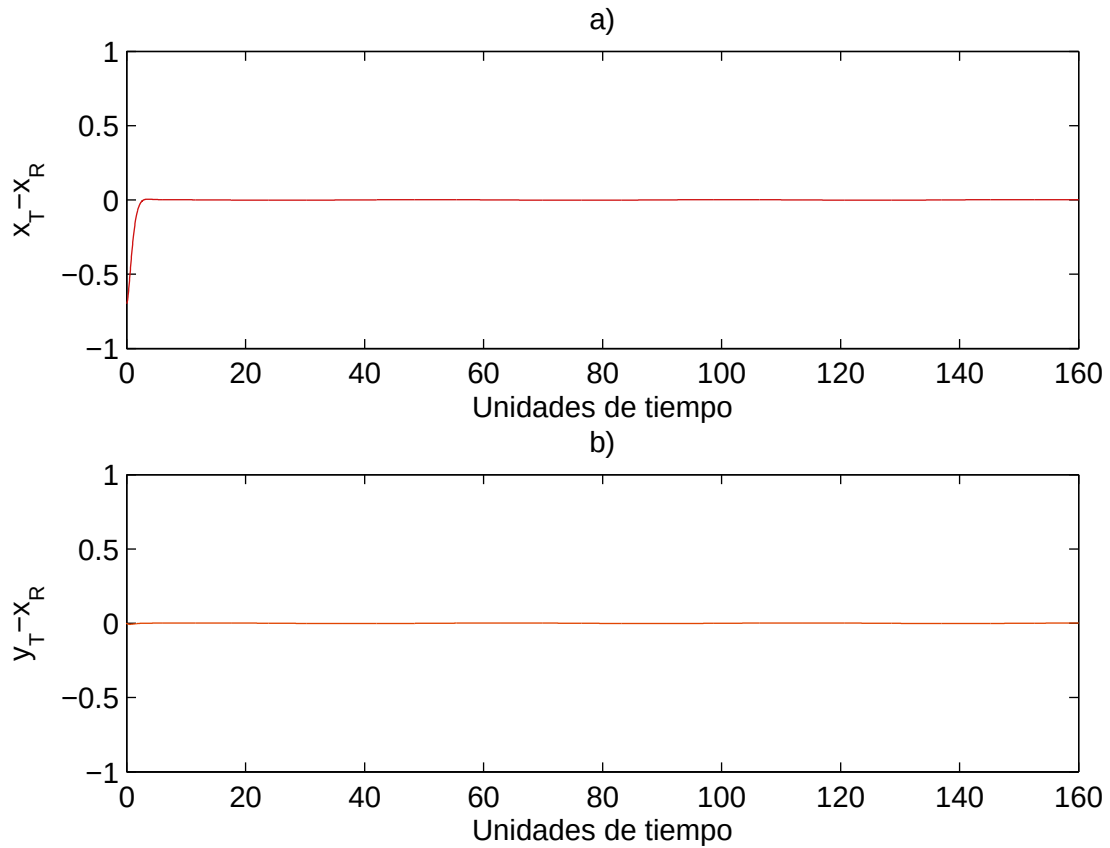


Figura 47: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

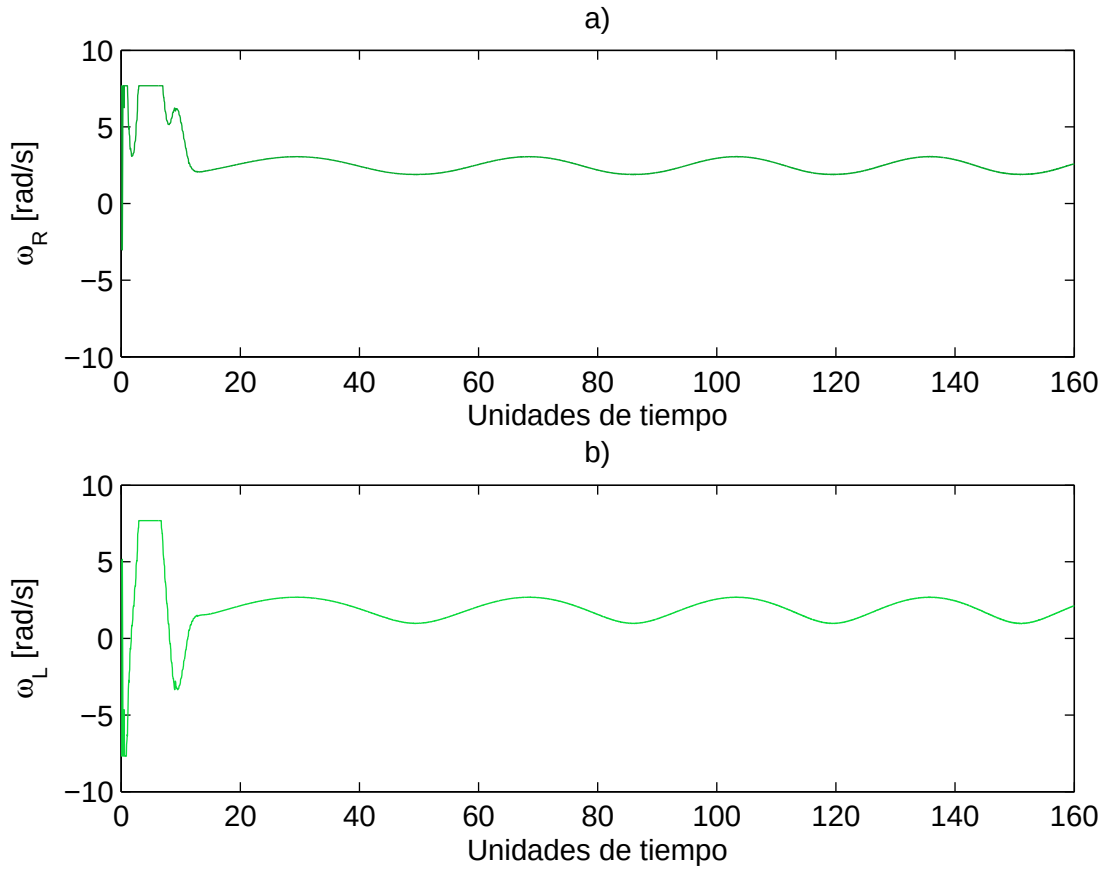


Figura 48: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

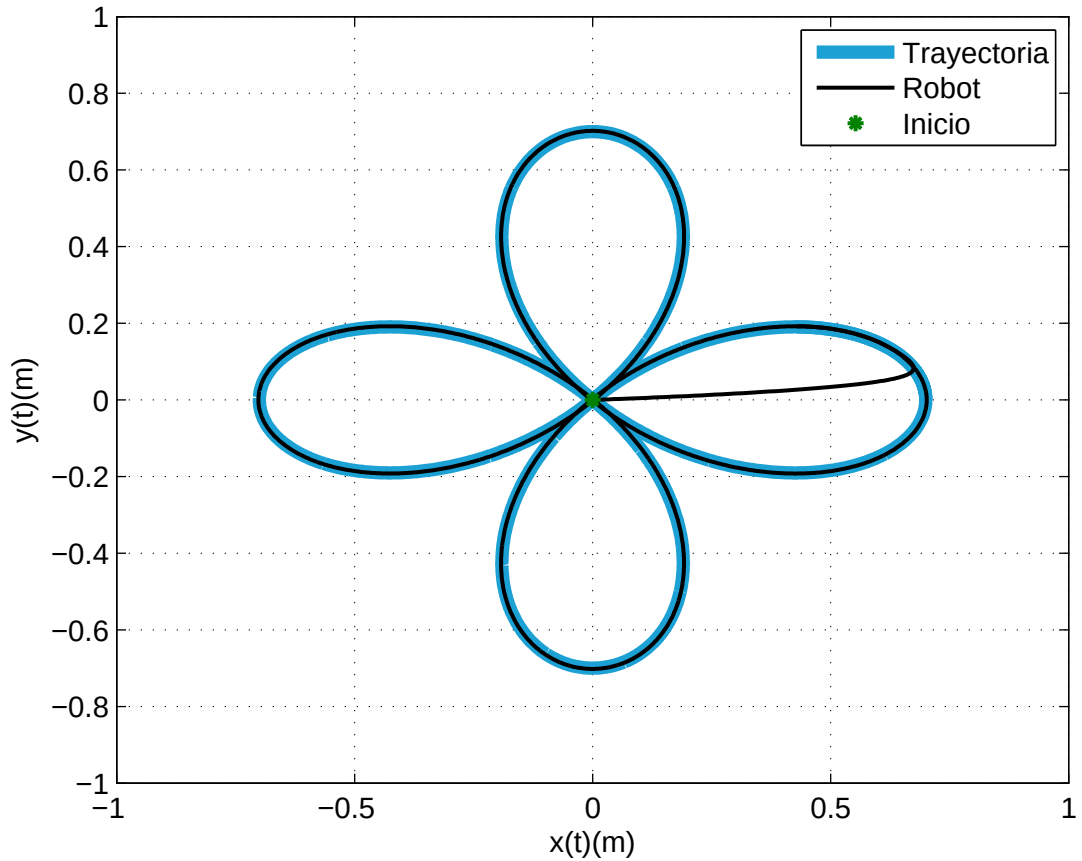


Figura 49: Trayectoria con la forma de rosa polar - 4 pétalos ($n=2$).

5.8.3 Rosa polar de 5 pétalos (n=5)

En el caso de la trayectoria de rosa polar con 5 pétalos, se define el valor de $n = 5$ y se emplean las ganancias $K_p = 3$ y $K_d = 3$.

La figura 53, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil diferencial. El movimiento para alcanzar los puntos pertenecientes a la trayectoria deseada, sigue la tendencia del comportamiento observado en las dos trayectorias anteriores. Analizando detenidamente la gráfica, se puede identificar como la trayectoria trazada por el robot móvil pareciera ser el contorno de la trayectoria deseada, esto indica que existe ligeramente un mayor error que en las trayectorias anteriores, las cuales se encuentran en el centro de la trayectoria deseada.

Las gráficas de la figura 50, muestran los desplazamientos del robot móvil realizados en los ejes coordenados (x) y (y), así como el ángulo de orientación (θ). En las primeras 5 unidades de tiempo, se observan los desplazamientos correspondientes al movimiento de incorporación a la trayectoria deseada. A partir de este punto, el robot se encuentra dentro de la trayectoria de 5 pétalos.

En la figura 51, el error inicial es aproximadamente $X_T - X_R = -0.7$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.7, 0)$. Conforme el robot se acerca a la trayectoria deseada, el error en el eje (x) disminuye considerablemente. Sin embargo, se pueden observar ligeras oscilaciones (apenas perceptibles) tanto en el eje (x) como en el eje (y), corroborando el error observado en la figura 53.

La dinámica de las velocidades angulares se presentan en la figura 52, excluyendo la etapa de transición, se observan oscilaciones pronunciadas para ambas velocidades angulares, lo que indica que el robot ha trazado la trayectoria a mayor velocidad que en los casos anteriores.

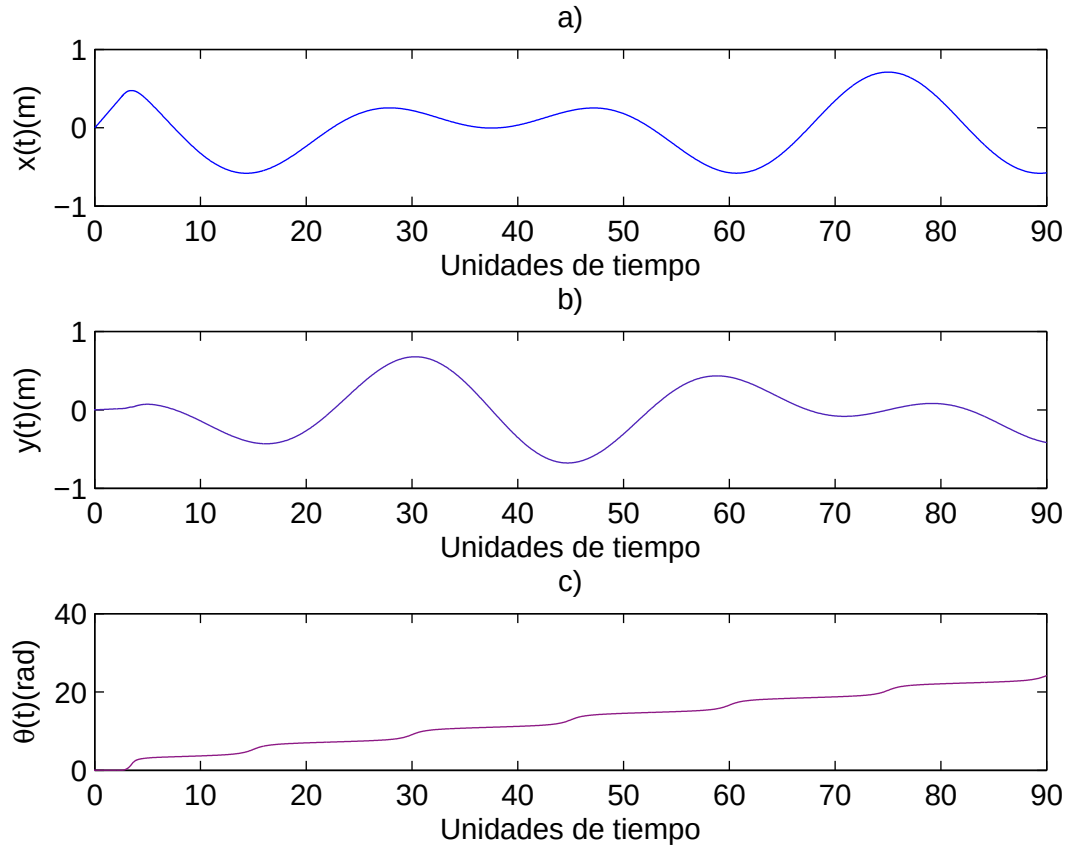


Figura 50: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

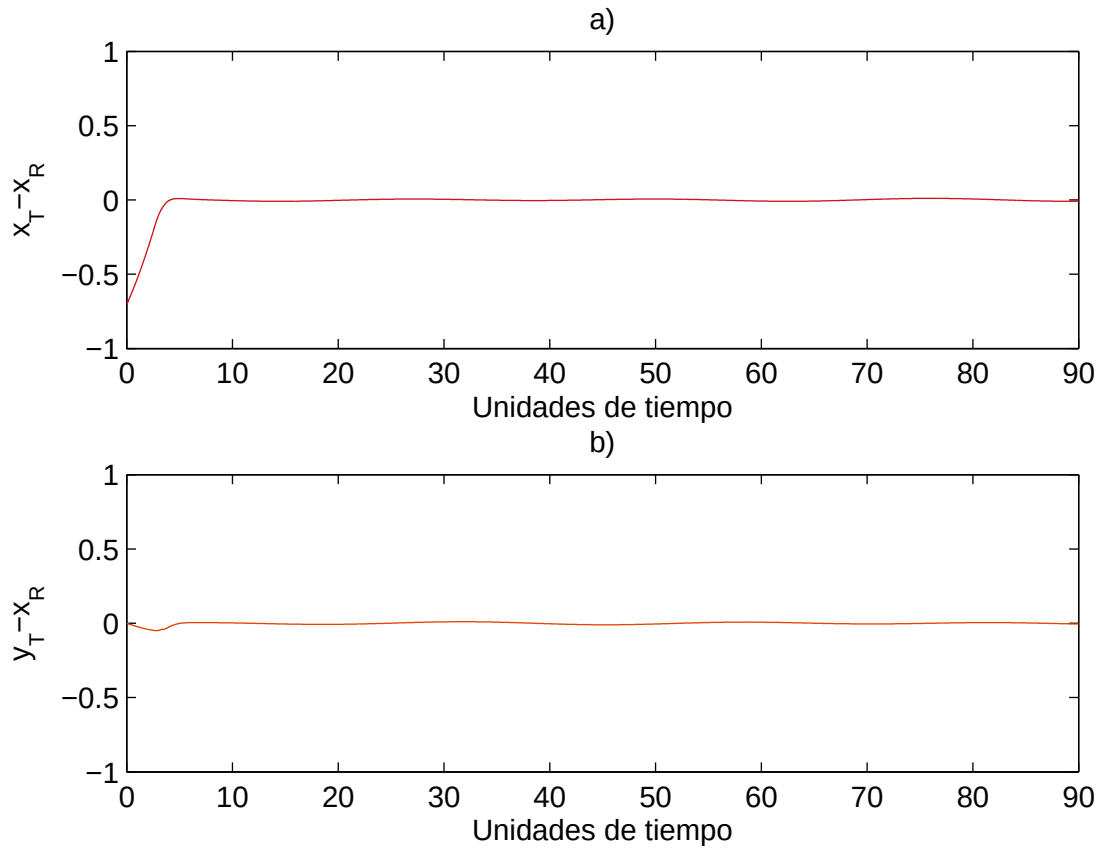


Figura 51: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

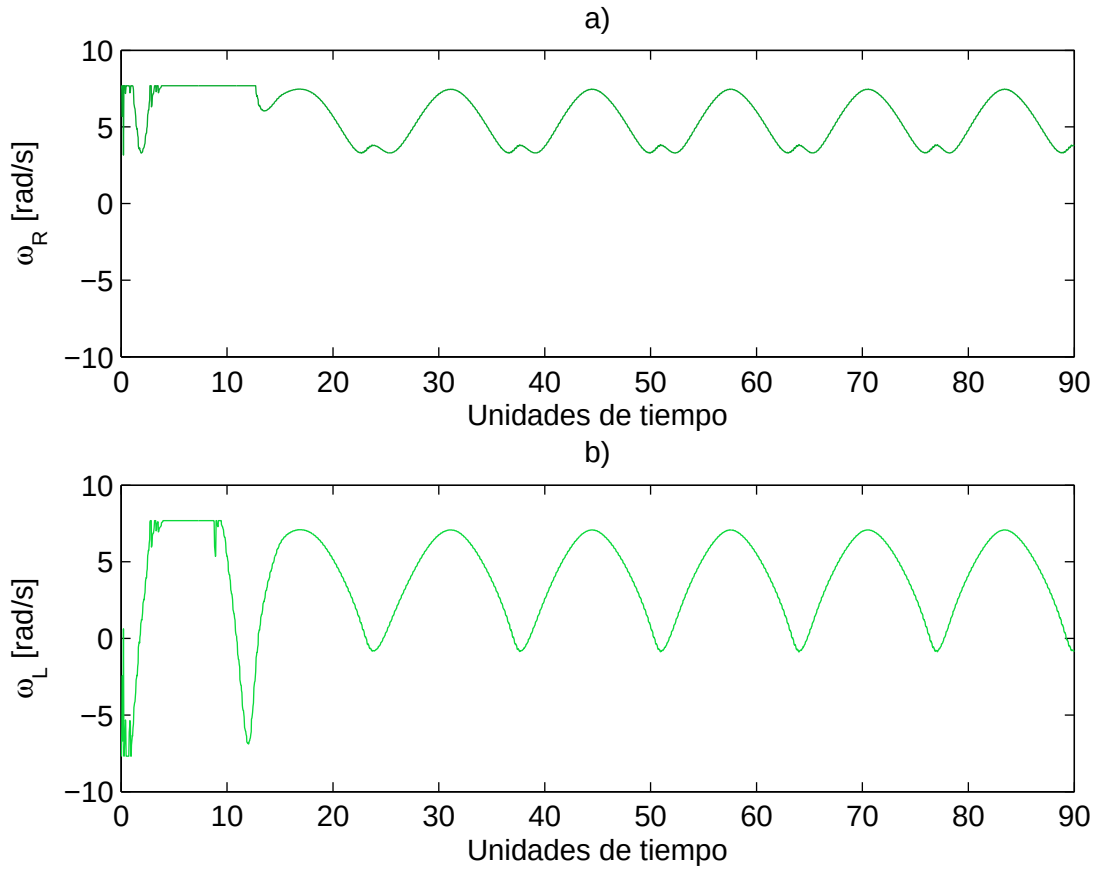


Figura 52: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

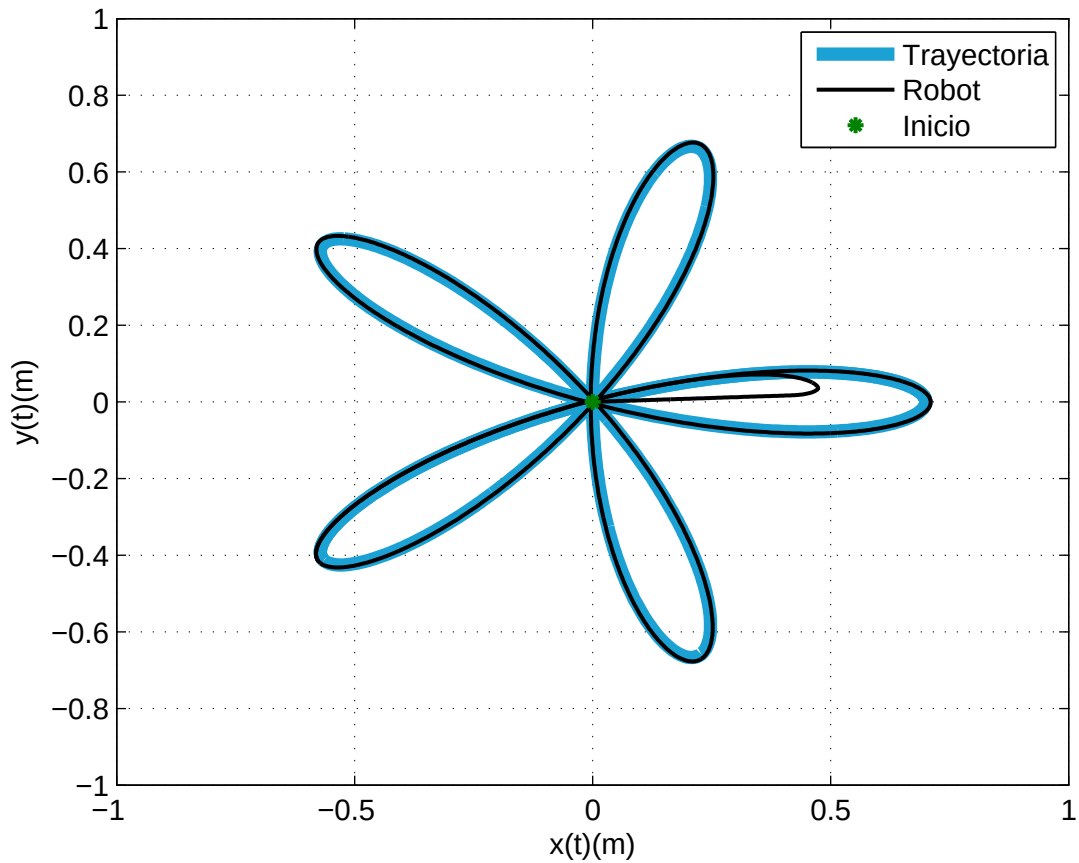


Figura 53: Trayectoria con la forma de rosa polar - 5 pétalos ($n=5$).

5.8.4 Rosa polar de 7 pétalos ($n=7$)

Para el caso en que la trayectoria deseada es la rosa polar de 7 pétalos, se define $n = 7$, $f = \frac{2\pi}{300}$ y se utilizan las ganancias $K_p = 3$ $K_d = 3$.

La figura 57, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil. Se observa que al igual que en la trayectoria anterior, el recorrido realizado por el robot, parece ser el contorno de la trayectoria deseada. Esto es mucho más notable que en la trayectoria de 5 pétalos, por lo que supone un error ligeramente mayor.

Las gráficas de la figura 54, muestran los movimientos realizados en cada eje coordenado y el ángulo de orientación (θ). En las primeras 5 unidades de tiempo, se observa el comportamiento de incorporación a la trayectoria deseada. Posteriormente las dinámicas corresponden al trazado de la trayectoria de 5 pétalos. Si se desea analizar detalladamente las gráficas a) y b) de la figura 54, se procede de la manera explicada en la trayectoria de 4 pétalos.

La figura 55, muestra el error que existe entre la trayectoria deseada y la trayectoria realizada por el robot, para cada eje coordenado. El error inicial es aproximadamente $X_T - X_R = -0.7$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.7, 0)$. Es notable que conforme el robot se acerca la trayectoria deseada, el error $X_T - X_R$ disminuye considerablemente. Sin embargo, como sucede en la trayectoria de 5 pétalos, es posible identificar ciertas oscilaciones.

En la figura 56, se muestra la dinámica de las velocidades angulares ω_R y ω_L a lo largo del tiempo. Las oscilaciones después de la etapa de transición son pronunciadas, pero de menor magnitud que en la trayectoria anterior. Esto indica que el robot realiza la trayectoria deseada a menor velocidad que en la trayectoria de 5 pétalos, pero más rápido que en la de 3 y 4 pétalos.

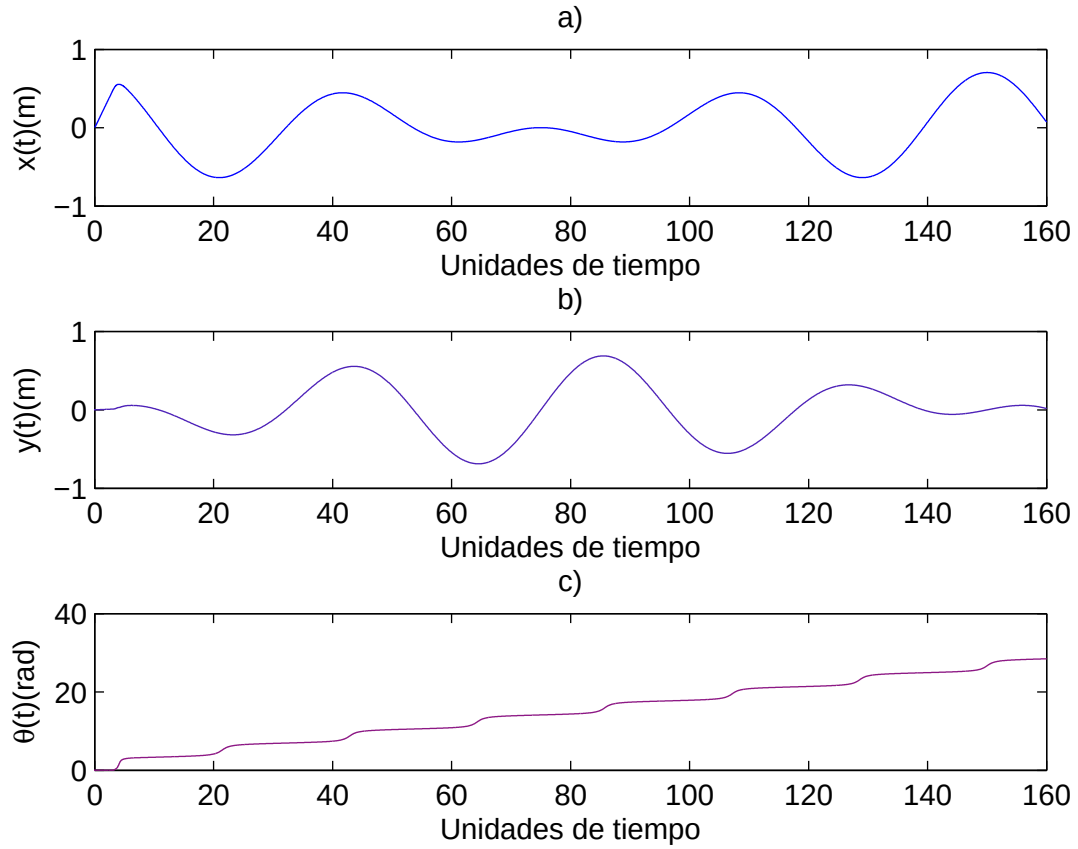


Figura 54: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

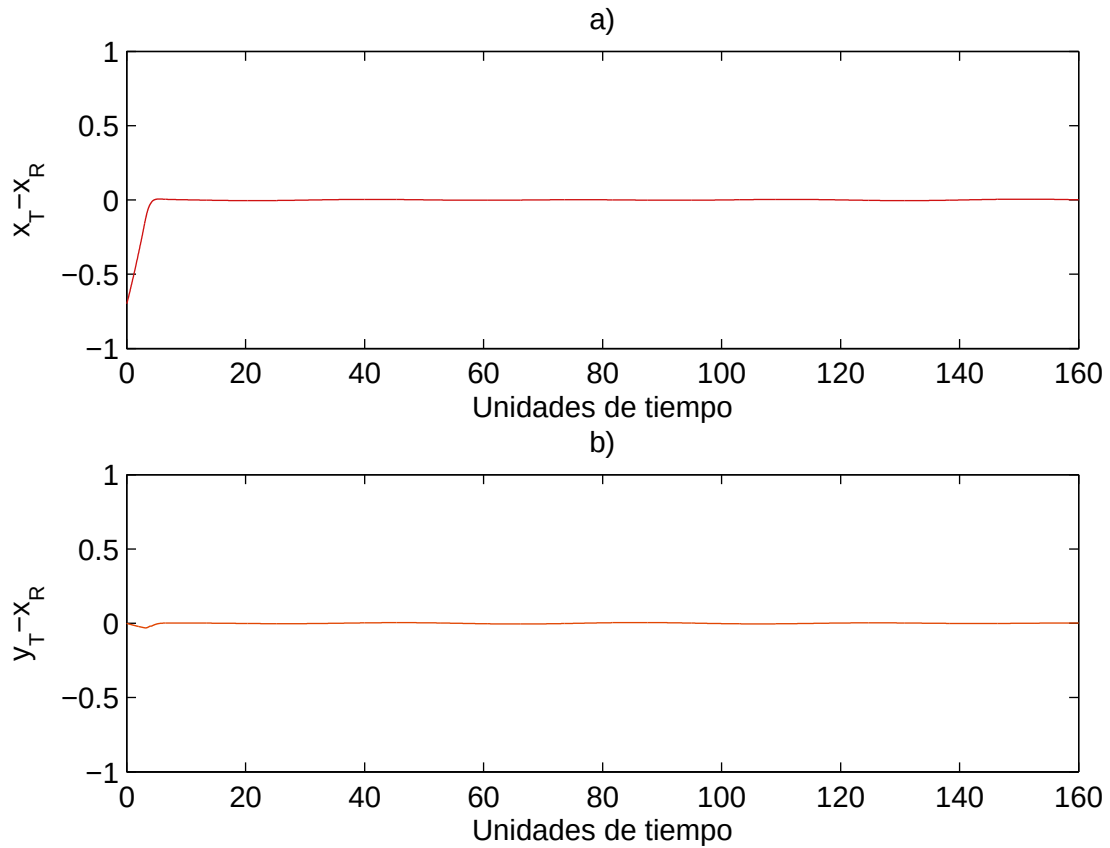


Figura 55: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

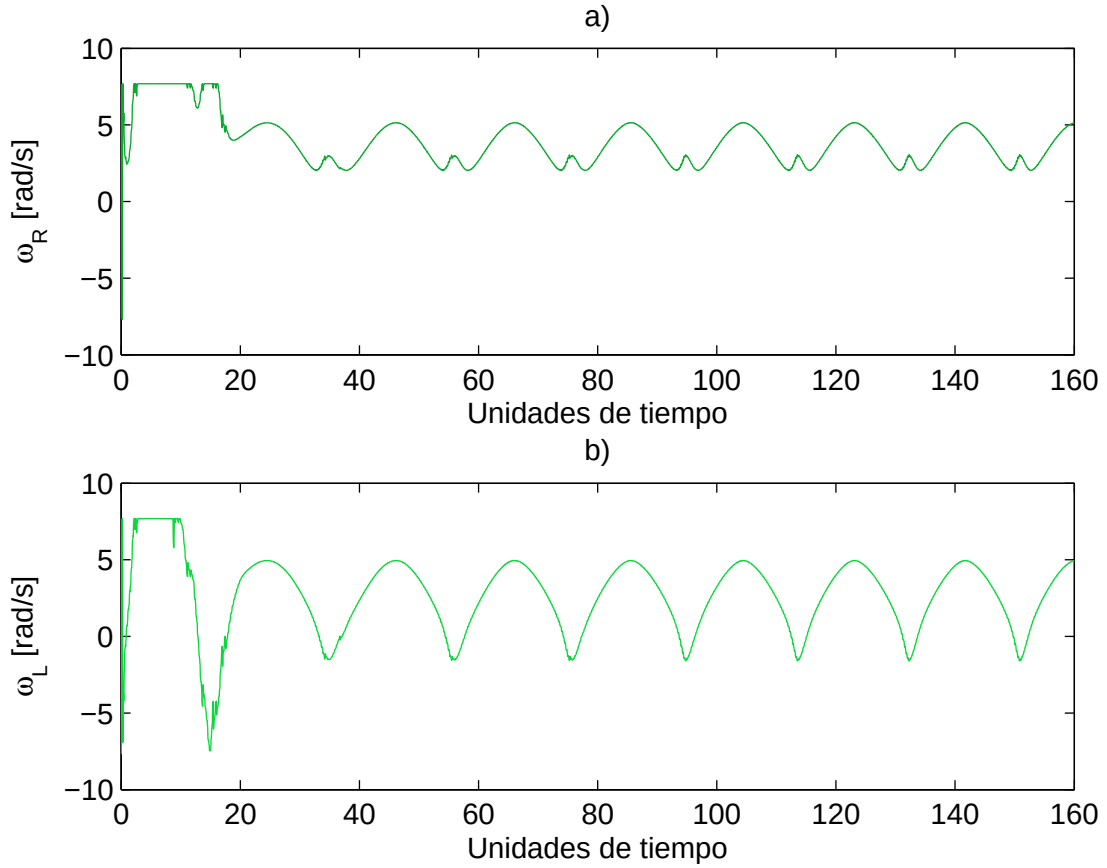


Figura 56: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

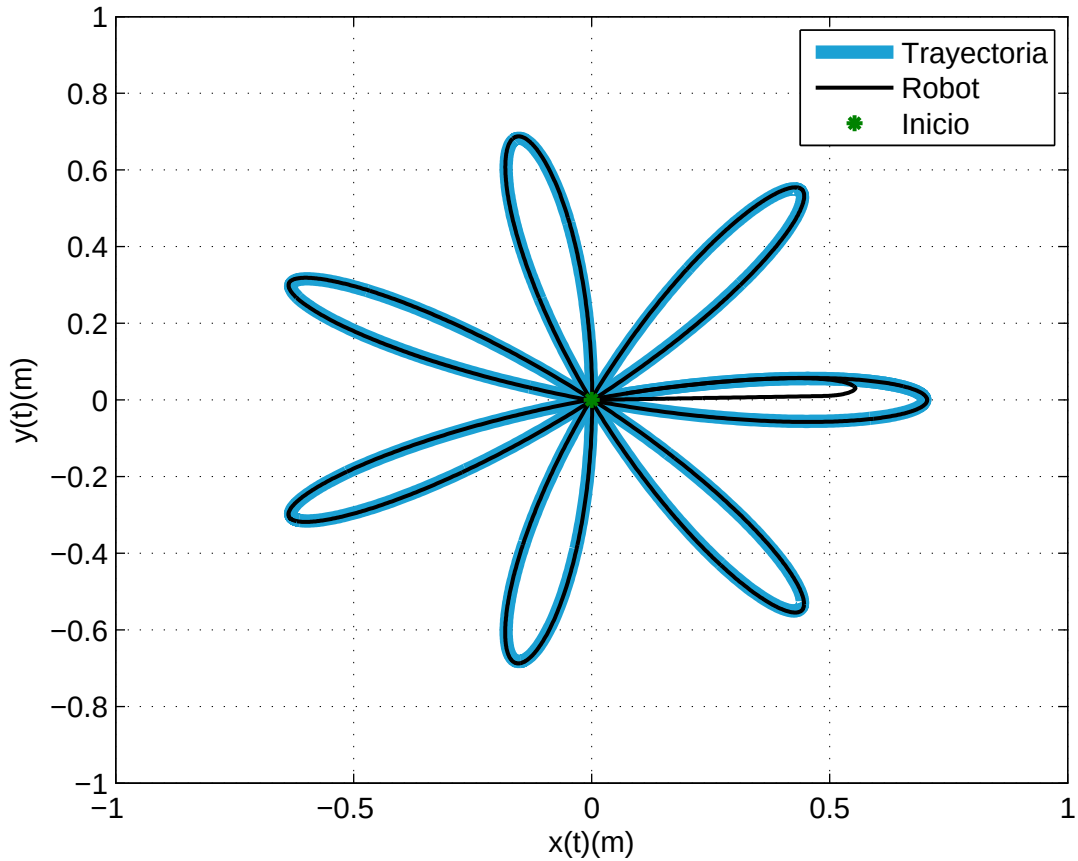


Figura 57: Trayectoria con la forma de rosa polar - 7 pétalos ($n=7$).

5.9 Trayectoria con la forma de espiral

La trayectoria con forma de espiral empleada en la simulación, se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d(t) = (ab)^{(\theta t)} \cos(\theta t)$ y $Y_d(t) = (ab)^{(\theta t)} \sin(\theta t)$, con los siguientes parámetros $a = 0.4$, $b = 2$ y $\theta = \frac{2\pi}{50}$ y empleando las ganancias $K_p = 1$ y $K_d = 2$.

En la figura 61, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. Donde se observa que el robot parte del punto (0,0), trazando una línea recta y luego una curva abierta para incorporarse a la trayectoria de la espiral.

Las gráficas de la figura 58, muestran los movimientos realizados en cada eje coordenado y el ángulo de orientación (θ). El movimiento realizado por el robot para entrar a la trayectoria deseada, se observa dentro de las primeras 7 unidades de tiempo y debido a que el recorrido en el eje (x) es mayor que en el eje (y), se puede identificar un incremento más pronunciado en la gráfica de la figura 54 a). Una vez dentro de la trayectoria deseada, los valores de los movimientos en ambos ejes coordenados tienden a una intermitencia entre disminuir-aumentar con un ligero desfase entre los movimientos en los ejes de aproximadamente de 90° . Además, es notable que los desplazamientos realizados en ambos ejes cada vez son más pequeños, pues la dinámica de la trayectoria provoca que los valores tiendan hacia el punto (0,0), al enrollarse los movimientos son cada vez más cortos.

El error inicial en la figura 59, es $X_T - X_R = -1$ y $Y_T - Y_R = 0$, ya que el primer punto de la trayectoria deseada es (1,0). Conforme el robot avanza, el error disminuye hasta 0.

La figura 60, muestra que ambas velocidades disminuyen siendo ω_R ligeramente mayor a ω_L , lo que provoca que el robot empiece a trazar una especie de circunferencia con dirección hacia la derecha. No obstante, la diferencia entre ω_R y ω_L va aumentando sutilmente y es precisamente ésto lo que provoca que el robot trace la característica forma de la espiral y no un círculo, donde la diferencia se mantiene constante.

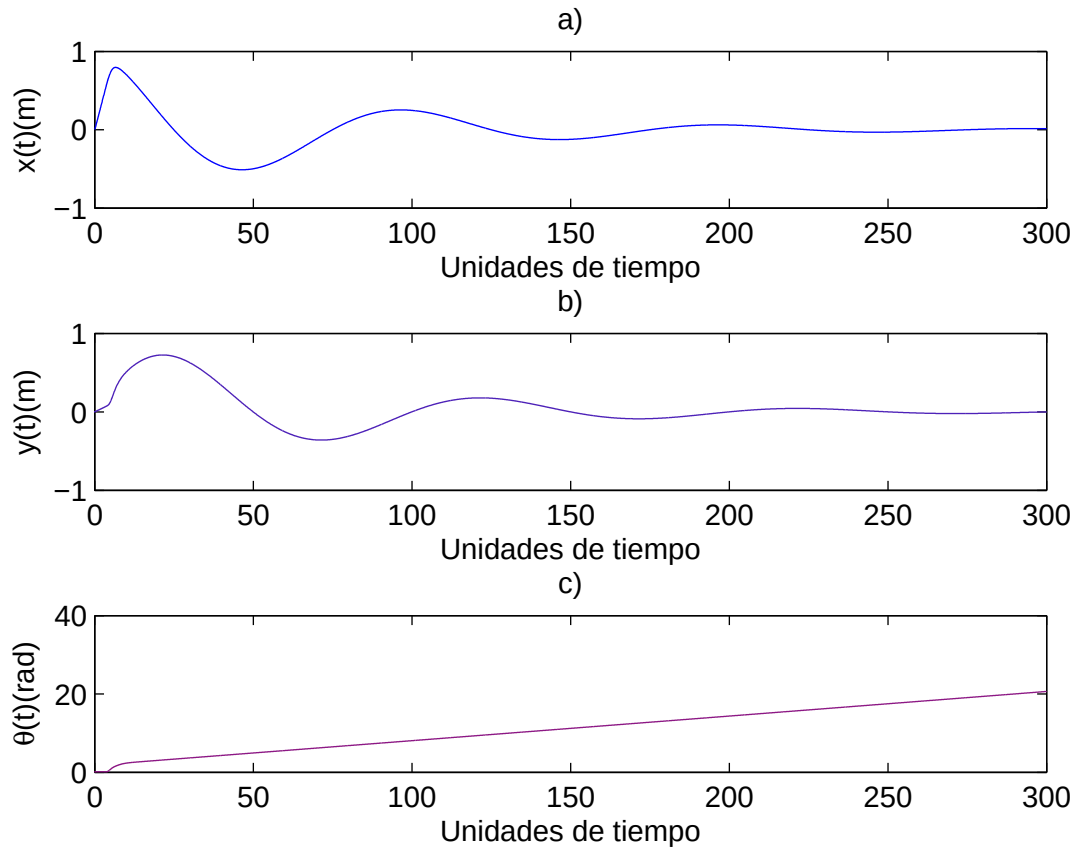


Figura 58: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

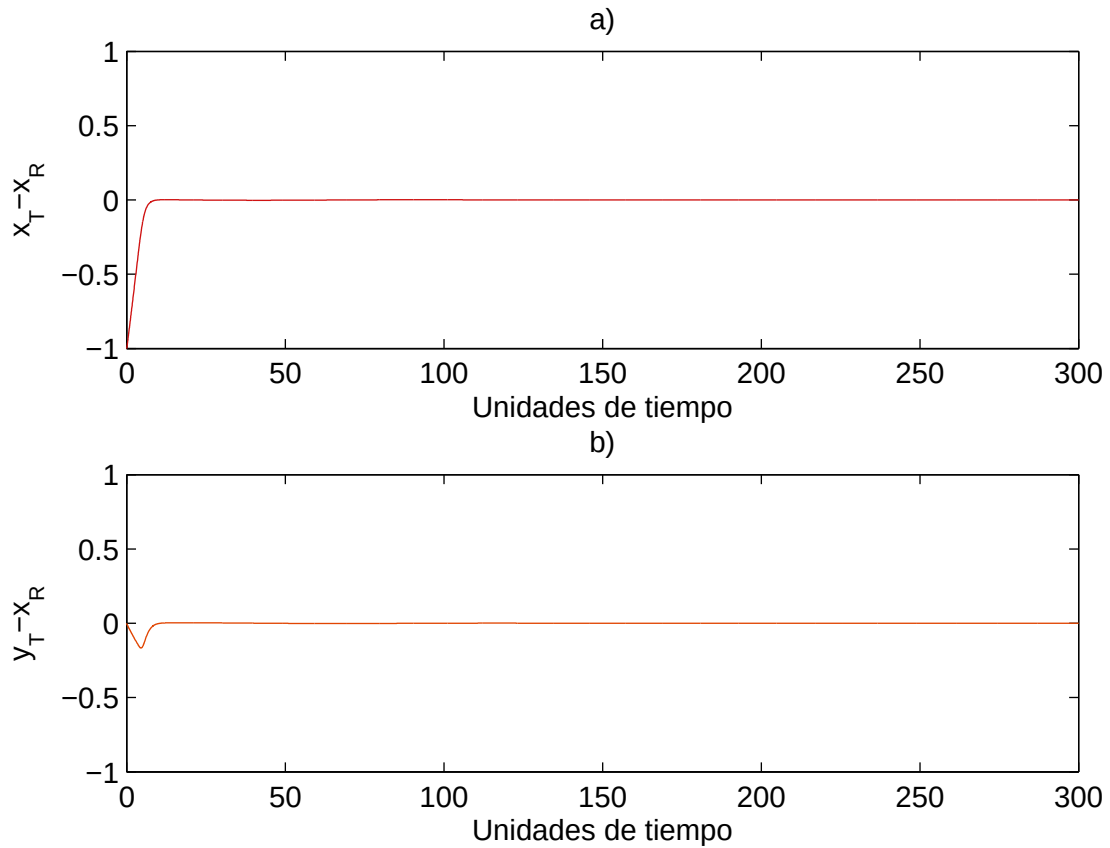


Figura 59: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

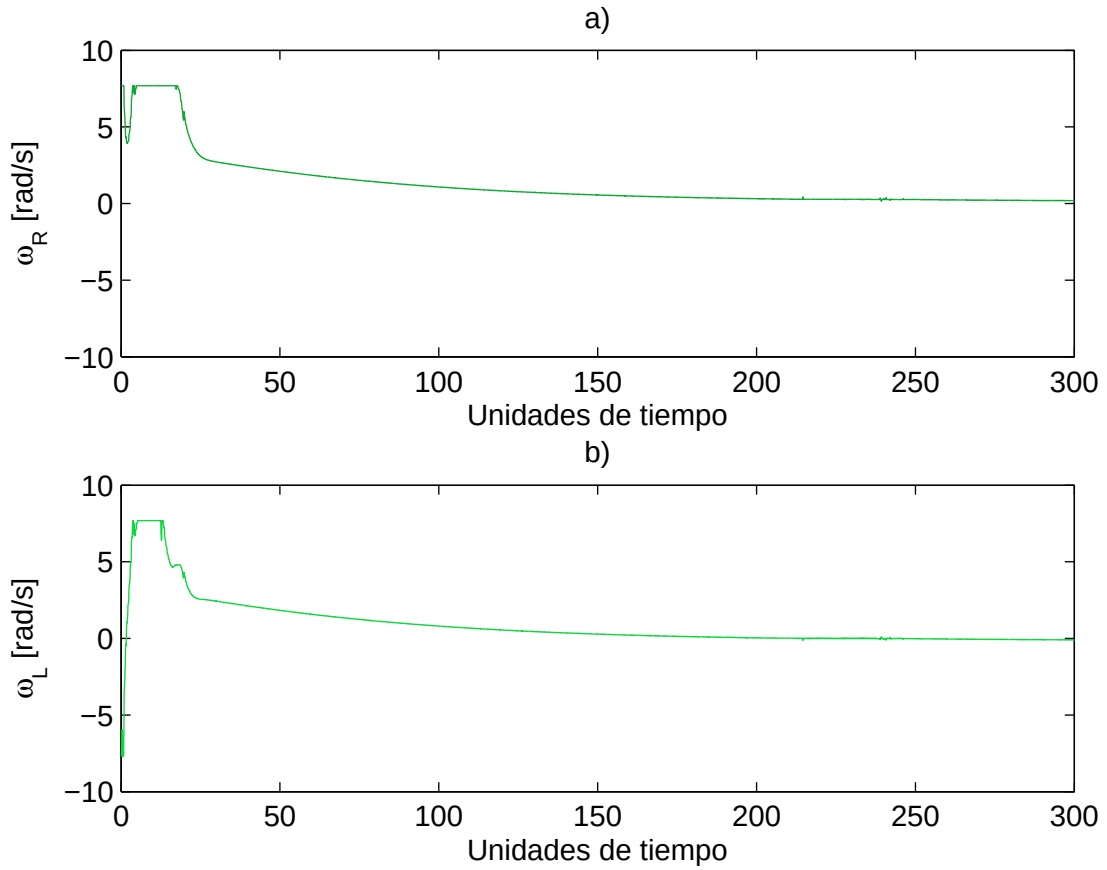


Figura 60: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

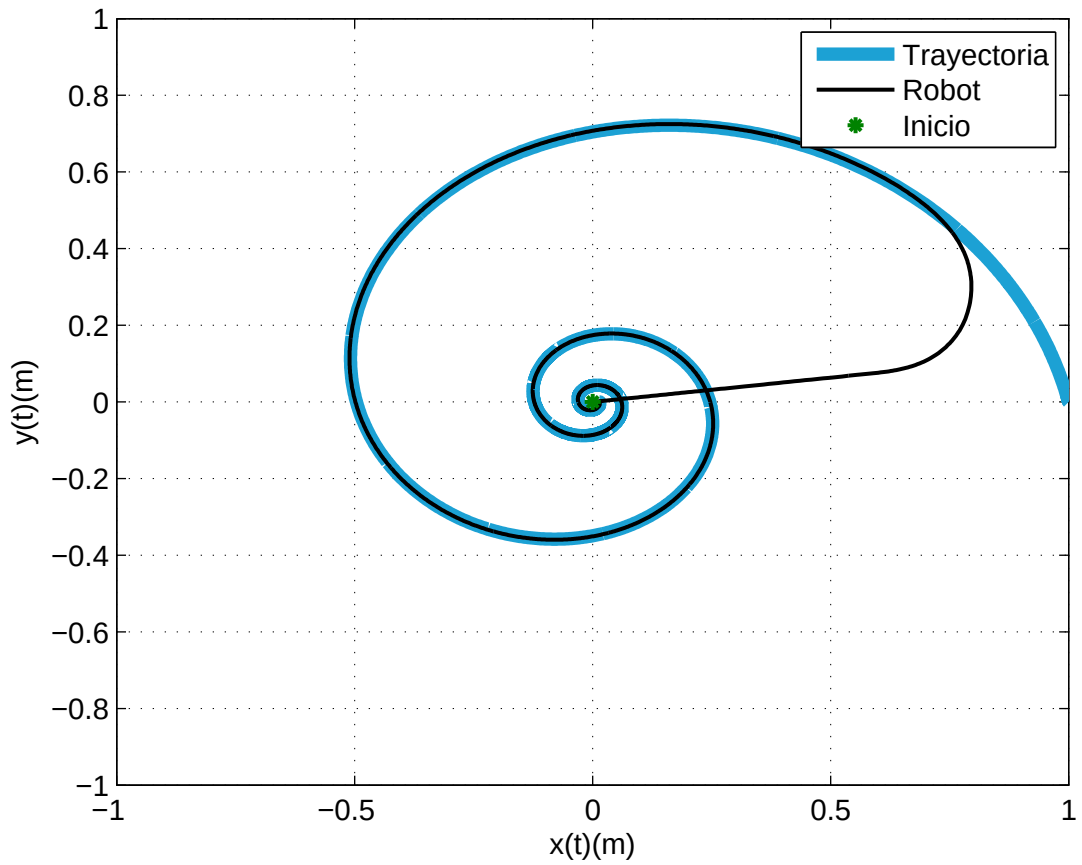


Figura 61: Trayectoria con la forma de Espiral.

5.10 Trayectorias con la forma de epicicloides

Las trayectorias deseadas con la forma de epicicloides se encuentran definidas por las ecuaciones: $X_d(t) = (r_1 + r_2) \cos(ft) + r_2 \cos((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$, $Y_d(t) = (r_1 + r_2) \sin(ft) + r_2 \sin((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$, donde al variar la relación $k = \frac{r_1}{r_2}$ se obtienen epicicloides diferentes.

5.10.1 Cardioide (k=1)

En la trayectoria epicicloide mejor conocida como cardioide, se debe tener una relación $k = 1$, por lo que los valores de los parámetros r , se han definido con $r_1 = 0.3$ y $r_2 = 0.3$. Para este caso se han empleado una $f = \frac{2\pi}{150}$, con las ganancias $K_p = 1$ y $K_d = 5$.

En la figura 65, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. Donde se observa una trayectoria con una forma parecida a la de un durazno colocado horizontalmente, con su particular vértice.

Las gráficas de la figura 62, muestran los desplazamientos en cada eje coordenado y el ángulo de orientación (θ). En ellas se identifica que dentro de las primeras unidades de tiempo se encuentran los movimientos correspondientes al desplazamiento realizado por robot móvil para encontrar la trayectoria deseada. Ya que este desplazamiento sugiere un mayor movimiento en el eje (x), la gráfica a) presenta un incremento más pronunciado que la gráfica b). En la figura 65, se observa que el robot entra a la trayectoria deseada en el punto (0.4,0.75), ubicando este punto en las gráficas a) y b) de la figura 62, se encuentra que el robot está en la trayectoria de la cardioide en 20 unidades de tiempo.

En la figura 65, una vez el robot sigue los puntos de la trayectoria deseada, la gráfica a) disminuye, pues la dinámica de la cardioide decrementa sus valores en el eje (x), mientras que la gráfica b) incrementa hasta llegar a $y = 0.8$ en 25 unidades de tiempo, para luego disminuir. El característico vértice observado en la figura 65, toma lugar entre las 70 y

85 unidades de tiempo. Dónde la gráfica a) de la figura 65, presenta un incremento entre las 70-78 unidades de tiempo y luego disminuye. Los valores en el eje (y), presentan un decremento hasta 0 entre las 75-80 unidades de tiempo, donde se observa una línea recta en la gráfica b). Ésto se debe precisamente al vértice de la figura, pues sus valores en el eje (y) no presentan cambio alguno, como se aprecia en la figura 62. En la gráfica c), se identifica fácilmente el cambio abrupto en el ángulo de orientación entre las 75-78 unidades de tiempo, producto del trazado del vértice. Una vez el robot sale del vértice, los valores en el eje (x) disminuyen hasta llegar a $x = -0.48$ y luego finalmente incrementan. Los valores del eje (y), presentan un decremento hasta $y = -0.8$, para luego aumentar junto con los valores en (x). Permitiéndole al robot llegar al primer punto de la trayectoria deseada (0.8) y completar una vuelta a la cardioide.

En las gráficas de la figura 63, se observa un error inicial de $X_T - X_R = -0.9$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.9,0). Es notable que conforme el robot avanza hacia la cardioide, el error $X_T - X_R$ disminuye hasta cero.

La figura 64, muestra la dinámica correspondiente a las velocidades angulares en el transcurso del tiempo. Las primeras 5 unidades de tiempo muestran las velocidades que el robot emplea para adquirir el ángulo de orientación correcto. Luego ω_L incrementa para igualar a ω_R y posteriormente ambas disminuyen (siendo ω_R ligeramente mayor), con lo que el robot traza la curva para incorporarse a la cardioide. El pico observado tanto en ω_R como ω_L , es una singularidad que se presenta en (25) al ser $\xi = 0$, es decir, cuando la velocidad es muy cercana o igual a cero, se presentan este tipo de comportamientos inusuales en las dinámicas de velocidad. Estas velocidades con valor cero, corresponden al centro del vértice, pues el robot frena completamente para hacer un cambio en su orientación y así continuar trazando la trayectoria deseada.

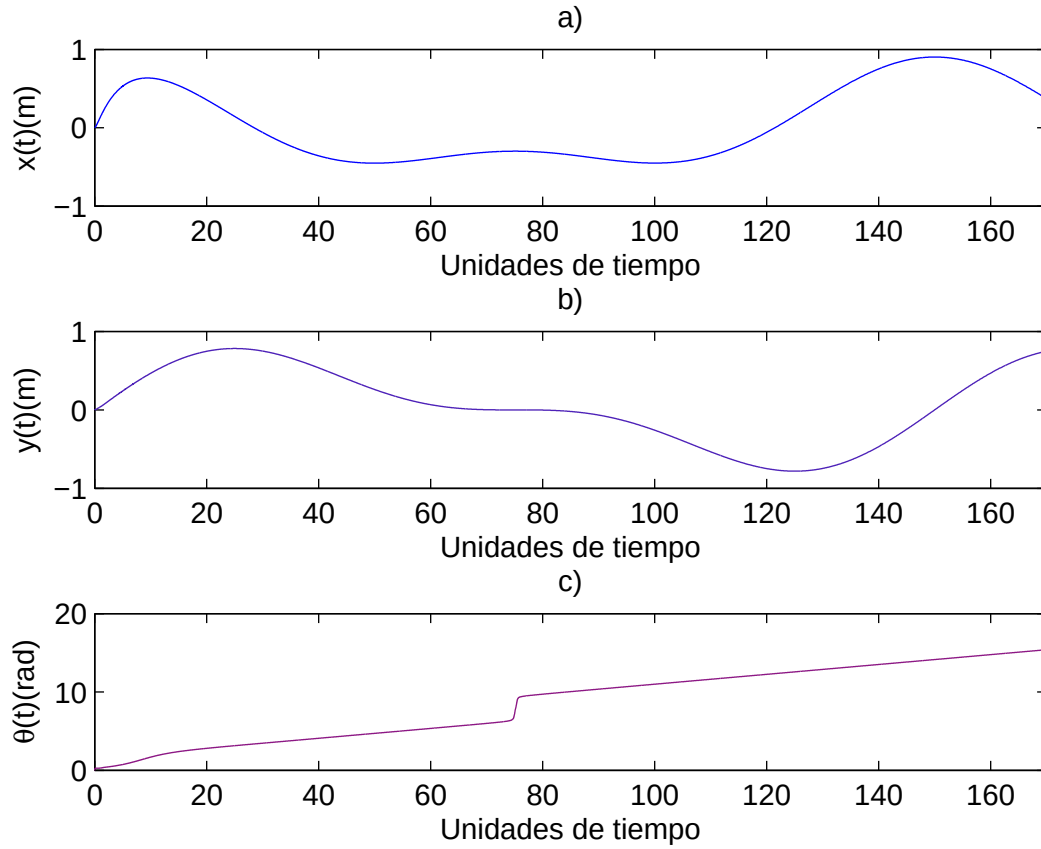


Figura 62: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

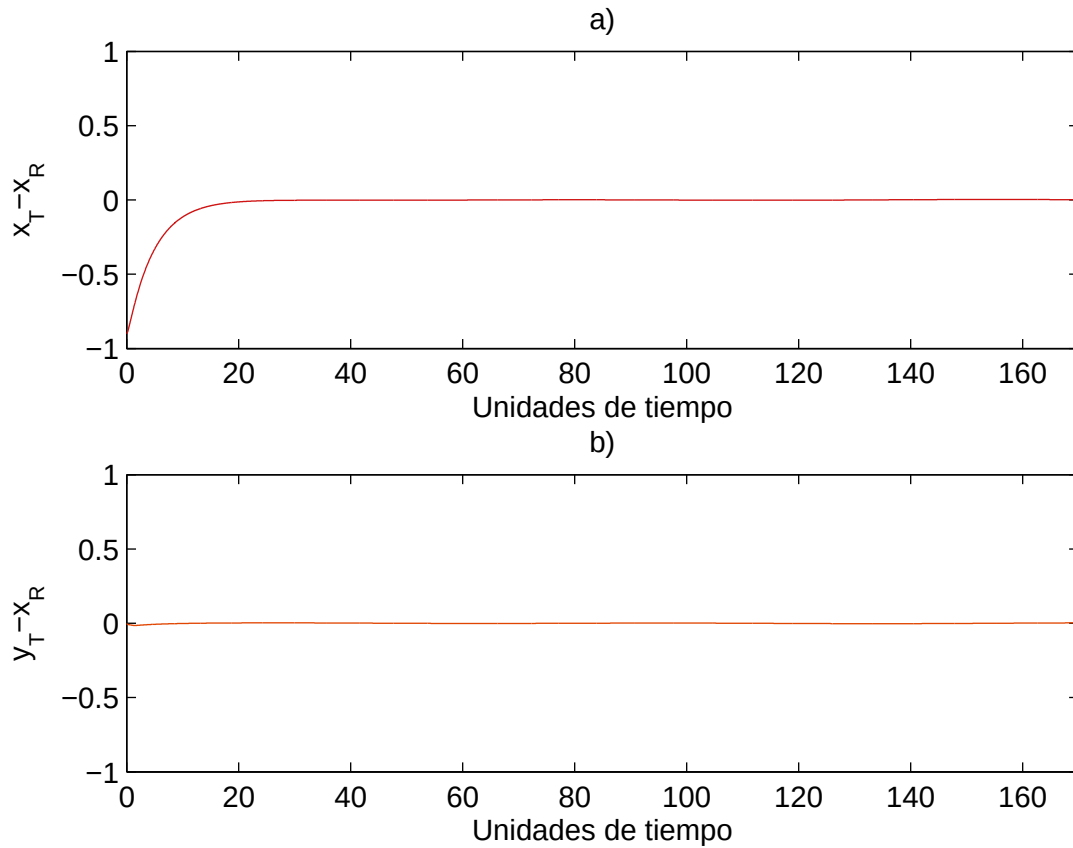


Figura 63: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

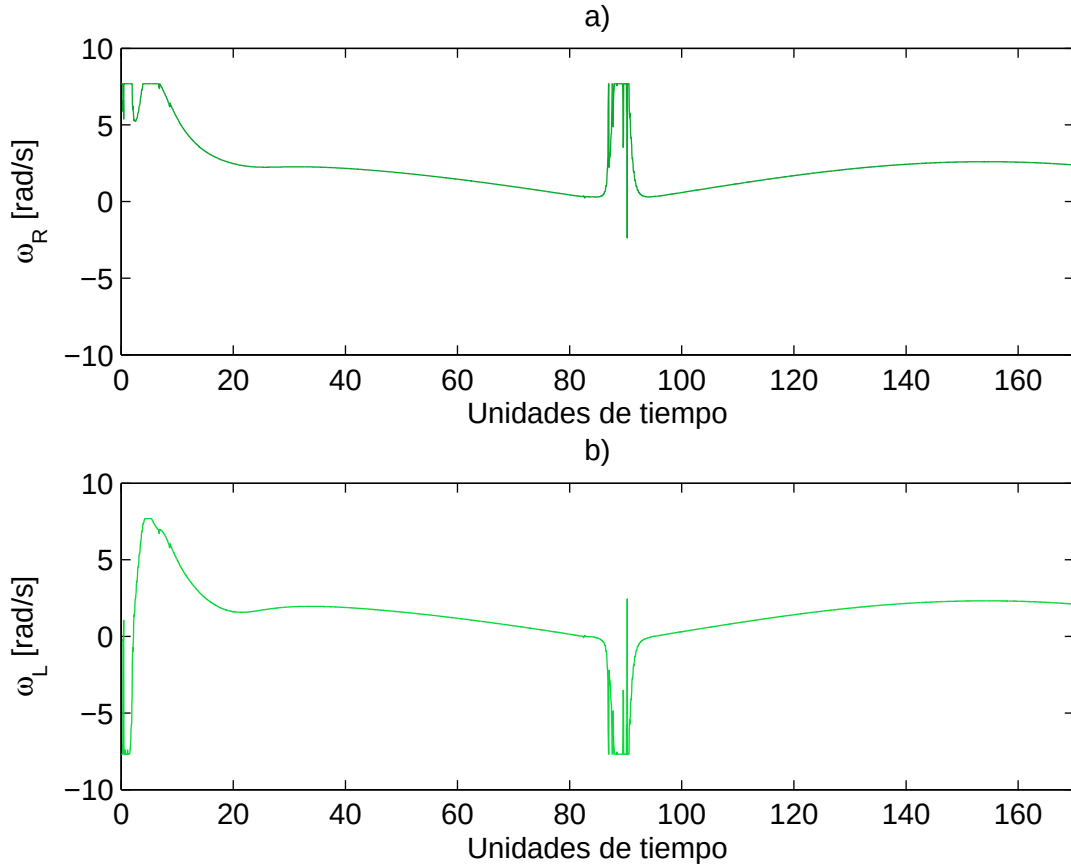


Figura 64: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

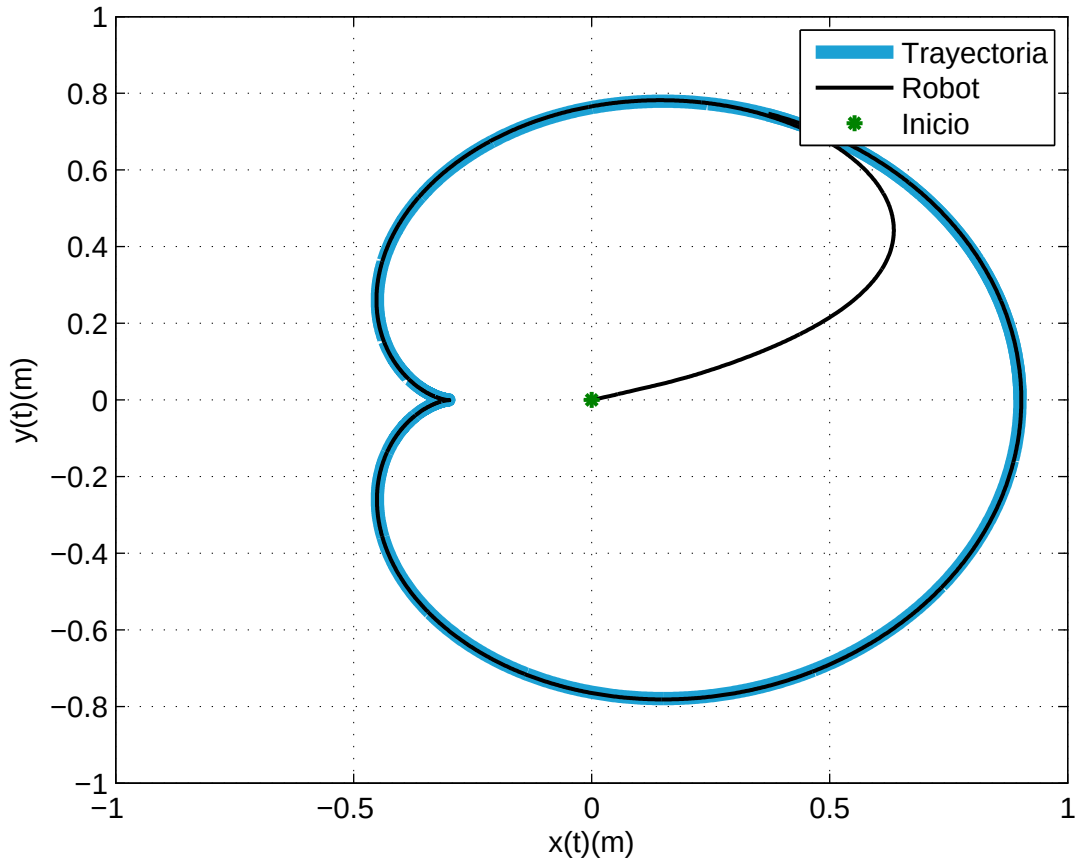


Figura 65: Trayectoria con la forma de cardioide ($k=1$).

5.10.2 Nefroide (k=2)

A la trayectoria nefroide le corresponde una $k = 2$, por lo que se han definido los parámetros $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.2$. Se ha seleccionado una $f = \frac{2\pi}{150}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 5$.

La figura 69 muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. Donde se observa una trayectoria parecida a la cardioide, pero con un vértice más, así como el movimiento del robot para encontrar la trayectoria deseada.

Las gráficas de la figura 66, muestran los desplazamientos realizados por el robot en cada eje coordenado, así como su ángulo de orientación a lo largo del tiempo. Las dinámicas en los ejes (x,y) dentro de las primeras 20 unidades de tiempo, corresponden a ese primer movimiento hecho por el robot para entrar a la nefroide. Para identificar los movimientos correspondientes a los vértices de la trayectoria, basta con observar la gráfica c) de la figura 66, en donde los dos cambios abruptos en el ángulo de orientación (θ), corresponden precisamente a los dos vértices. Por lo tanto en la figura 66, dentro de las gráficas a) y b) observaremos dichos movimientos dentro de los intervalos 35-42 y 110-118 de las unidades de tiempo. Las dinámicas que se encuentran en las unidades de tiempo restantes, pertenecen al trazado de las curvas abiertas de la trayectoria deseada.

El error inicial mostrado en la figura 67, es aproximadamente de $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria nefroide es $(0.8,0)$. El error en el eje (x) , disminuye a cero cuando el robot alcanza la trayectoria deseada en las 20 unidades de tiempo. La gráfica b) de la figura 67, presenta unas oscilaciones apenas perceptibles para el error en el eje (y) , pero que no sugiere mayor problema.

Nuevamente en las gráficas de la figura (68), se observan picos en ambas dinámicas de velocidad, producto de los vértices de la trayectoria deseada.

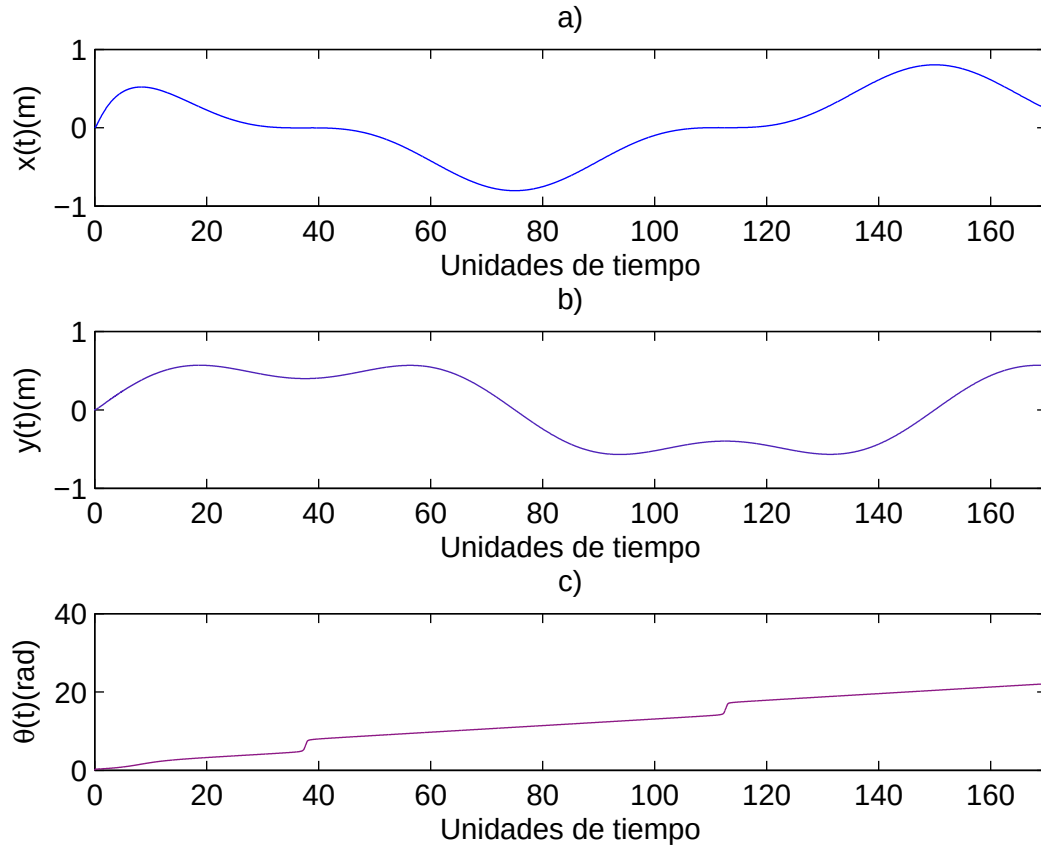


Figura 66: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

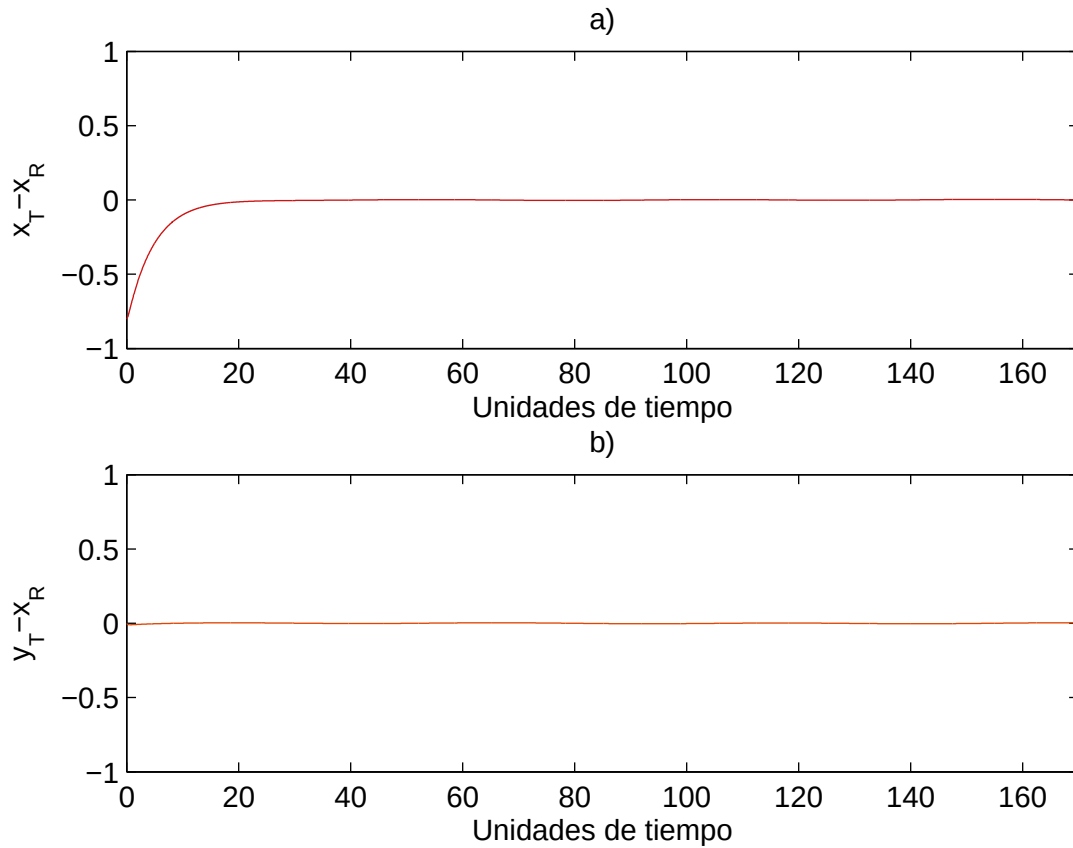


Figura 67: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

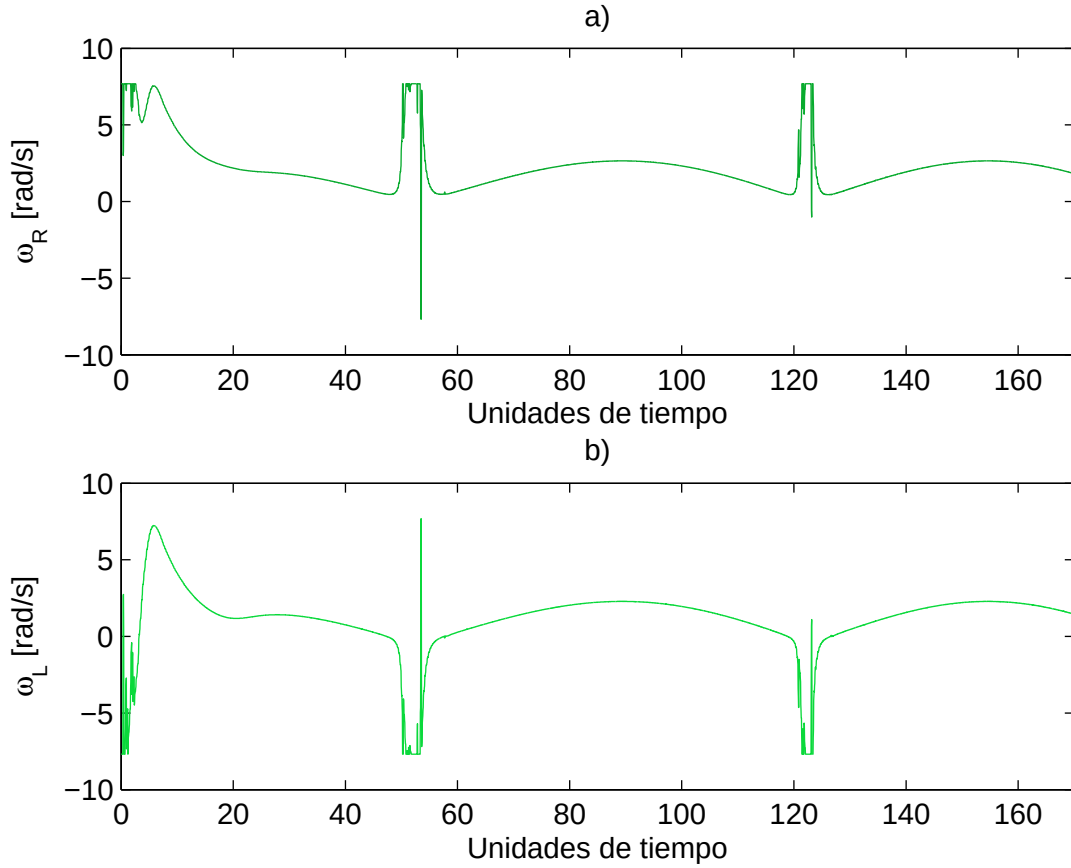


Figura 68: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

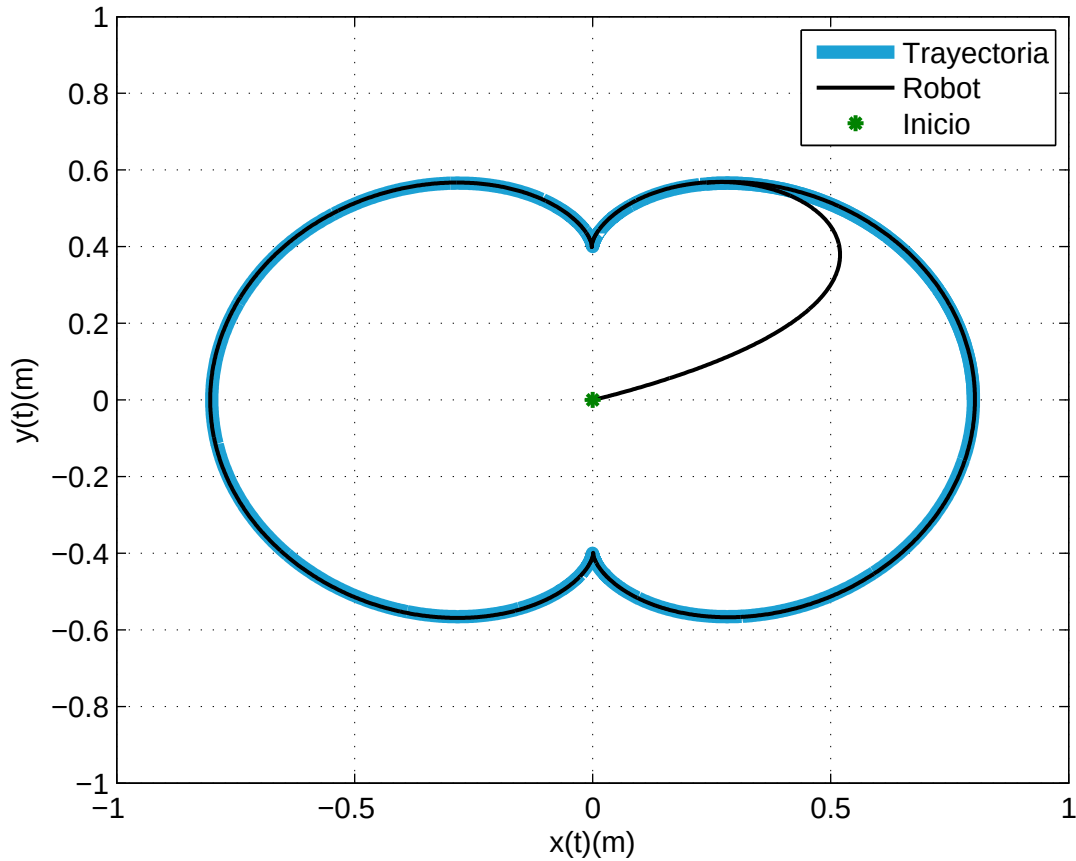


Figura 69: Trayectoria con la forma de nefroide ($k=2$).

5.10.3 Epicicloide de 3 arcos (k=3)

La trayectoria de la epicicloide con 3 arcos requiere una $k = 3$, por lo tanto, se han definido los parámetros $r_1 = 0.45$, $r_2 = 0.15$. Se utiliza una $f = \frac{2\pi}{150}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 5$.

En la figura 73, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil. Donde se observa una trayectoria trilóbulo y un movimiento inicial del robot móvil, para incorporarse a dicha trayectoria.

La figura 70, muestra las gráficas correspondientes a los movimientos realizados por el robot en cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. Debido a que el movimiento inicial del robot presenta un mayor desplazamiento en el eje (x), la gráfica a) de la figura 70 presenta un incremento pronunciado dentro de las primeras 10 unidades de tiempo. En la figura 73, se identifica que el robot móvil alcanza la trayectoria deseada en uno de sus vértices, por lo que ubicando el primer cambio abrupto en la gráfica de (θ), se encuentra que el robot se incorpora a la trayectoria de 3 arcos en 24 unidades de tiempo.

Las gráficas de la figura 71, muestran un error inicial de aproximadamente $X_T - X_R = -0.75$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.75,0). Conforme el robot avanza, el error en el eje (x) disminuye considerablemente hasta llegar a cero, una vez el robot móvil se encuentra dentro de la trayectoria de 3 arcos.

En la figura 76, se presentan las dinámicas de las velocidades angulares a lo largo del tiempo. Donde las primeras 20 unidades de tiempo corresponden al movimiento inicial del robot, los picos en ambas gráficas pertenecen a cada uno de los vértices y las medias ondas son las velocidades que permiten al robot móvil trazar los arcos de la trayectoria deseada.

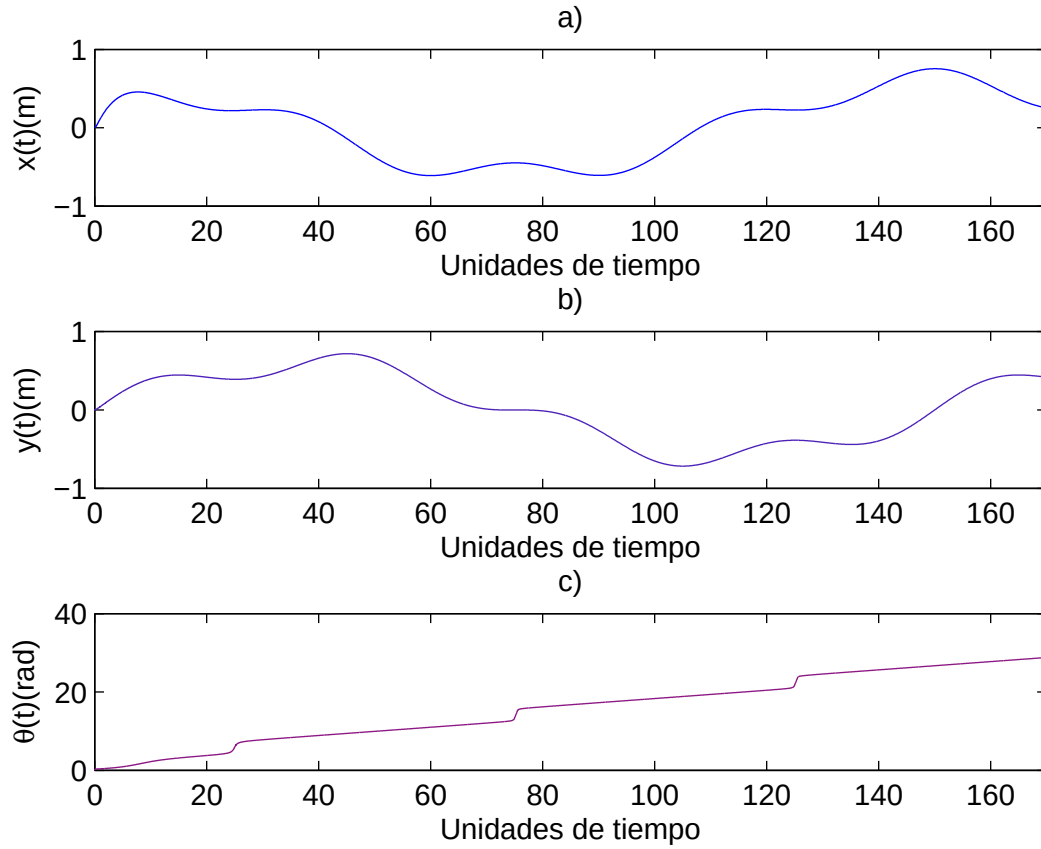


Figura 70: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

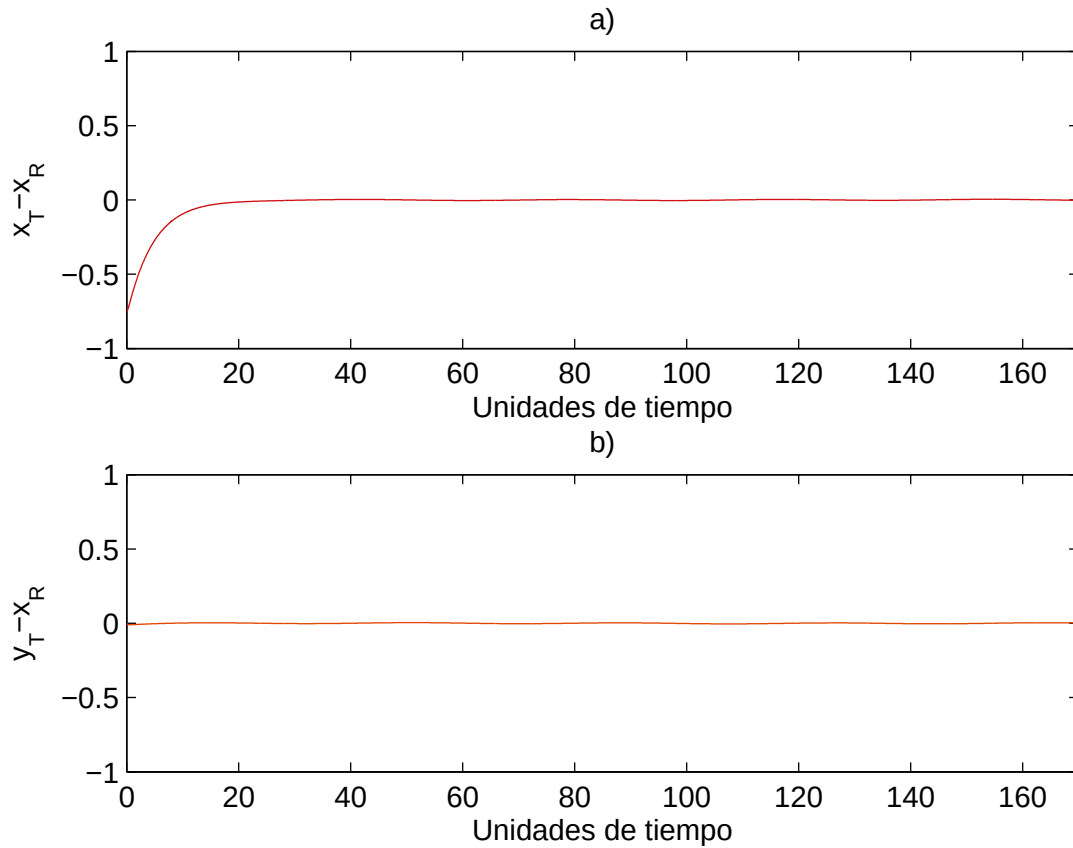


Figura 71: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

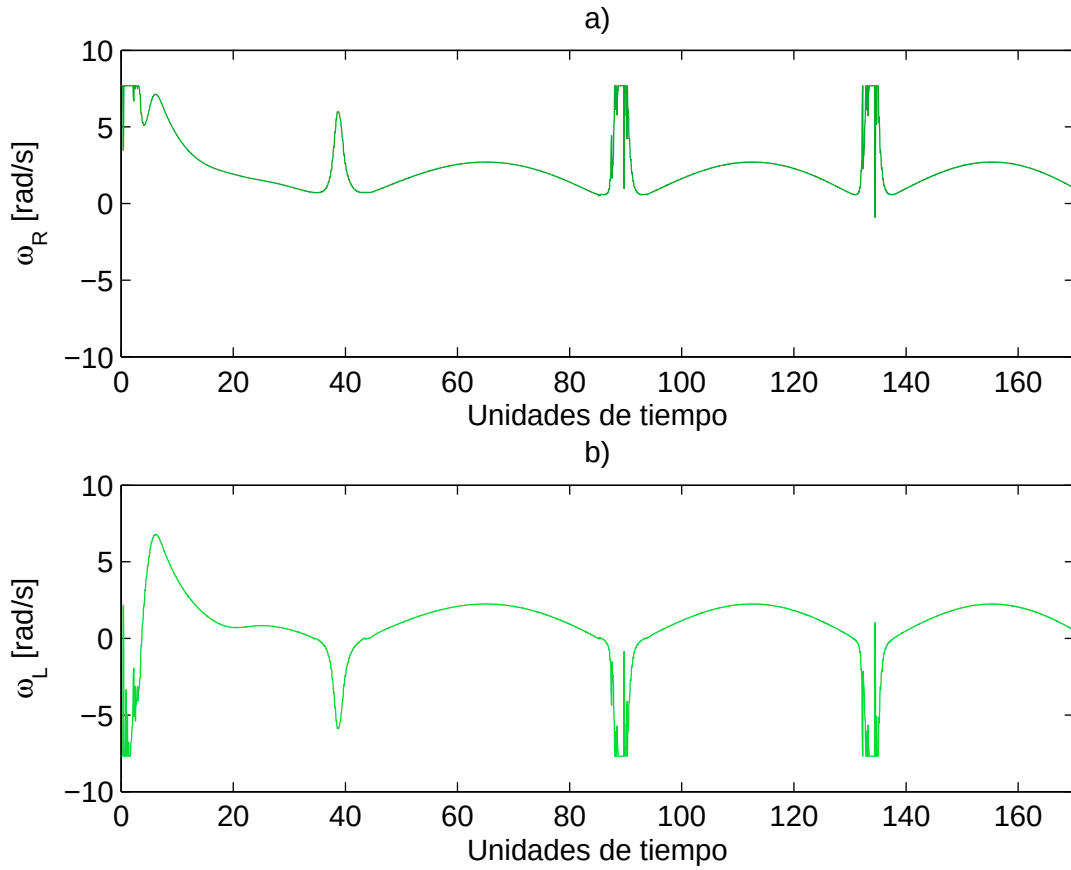


Figura 72: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

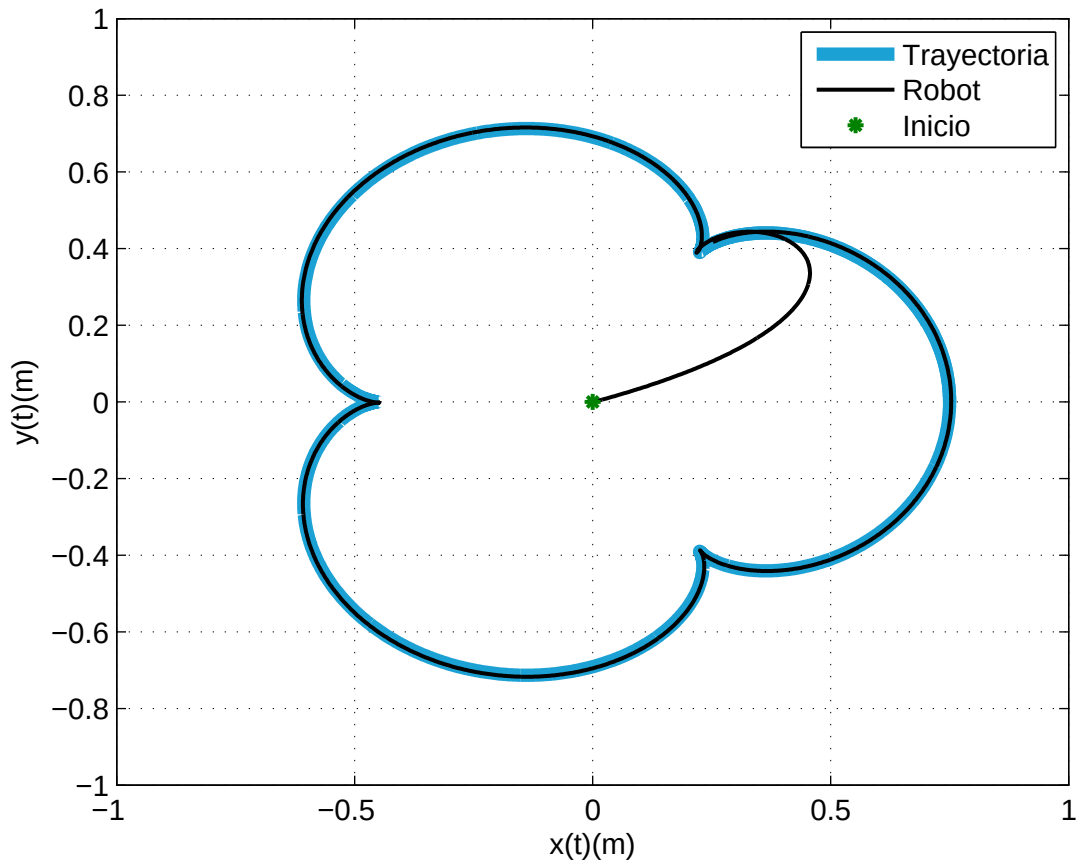


Figura 73: Trayectoria con la forma de epicicloide - 3 arcos ($k=3$).

5.10.4 Epicicloide de 4 arcos (k=4)

Para la trayectoria epicicloide de 4 arcos, es necesaria una relación $k = 4$, por lo que se han definido los parámetros $r_1 = 0.6$, $r_2 = 0.15$. Se ha empleado una $f = \frac{2\pi}{175}$ y las ganancias $K_p = 2$, $K_d = 4$.

La figura 77, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. En ella se observa una trayectoria tetralóbulo, parecida a una flor con 4 pétalos. Y el movimiento que el robot móvil realiza para incorporarse a la trayectoria deseada, donde es notable la distancia recorrida en el eje (x).

Las gráficas de la figura 74, muestran los movimientos realizados por el robot móvil para cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. En la gráfica a) de la figura 74, se observa que en las primeras 6 unidades de tiempo, los valores del eje (x) presentan un incremento pronunciado, mientras que la gráfica b) de la figura 74 muestra un pequeño incremento entre 2-10 unidades de tiempo. Estos desplazamientos corresponden al movimiento para la incorporación en la trayectoria deseada. En la gráfica c) de la figura 74, se observan los 4 cambios repentinos en el ángulo de orientación, correspondientes a cada uno de los vértices.

En la figura 75, se muestra un error inicial de aproximadamente de $X_T - X_R = -0.9$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.9,0). Una vez el robot entra en movimiento hacia la trayectoria de 4 arcos, el error $X_T - X_R$ va disminuyendo hasta ser nulo en 10 unidades de tiempo, ya que se encuentra dentro de la trayectoria deseada.

Las gráficas de la figura 76, muestran la dinámica de las velocidades angulares ω_R y ω_L a lo largo del tiempo. Donde se observan 4 picos en cada gráfica, producto de las velocidades para realizar los 4 vértices de la trayectoria de 4 arcos.

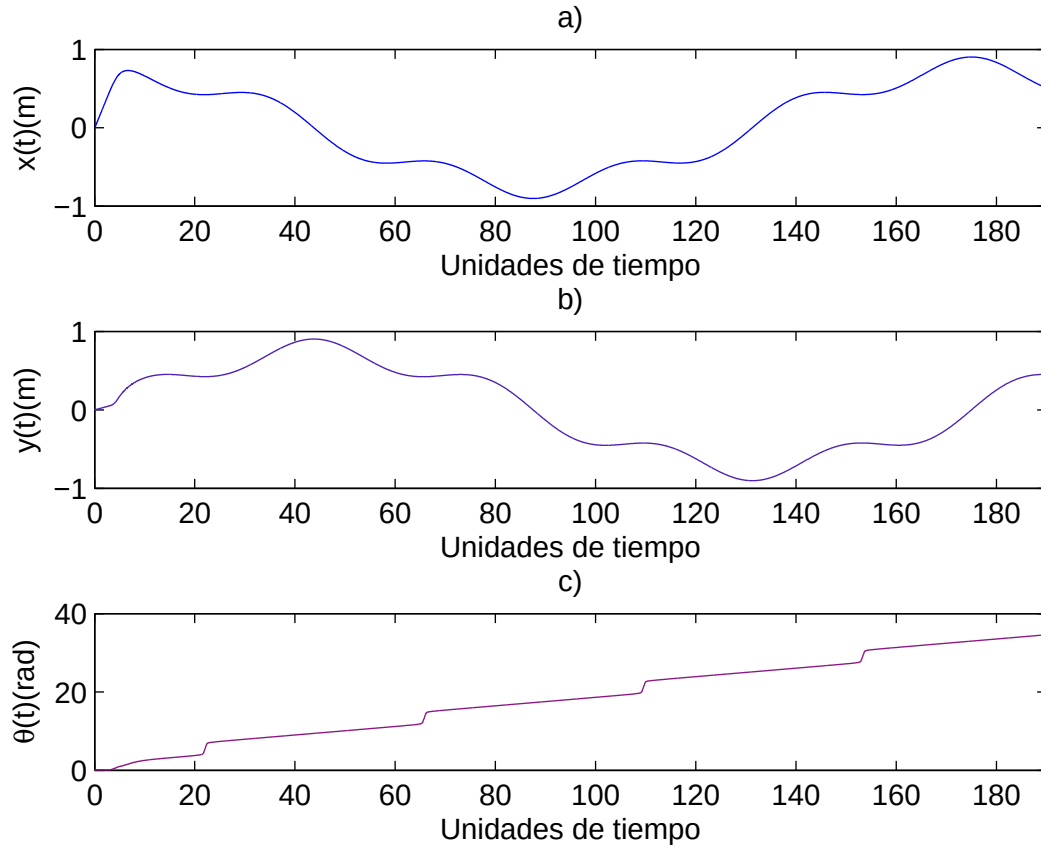


Figura 74: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

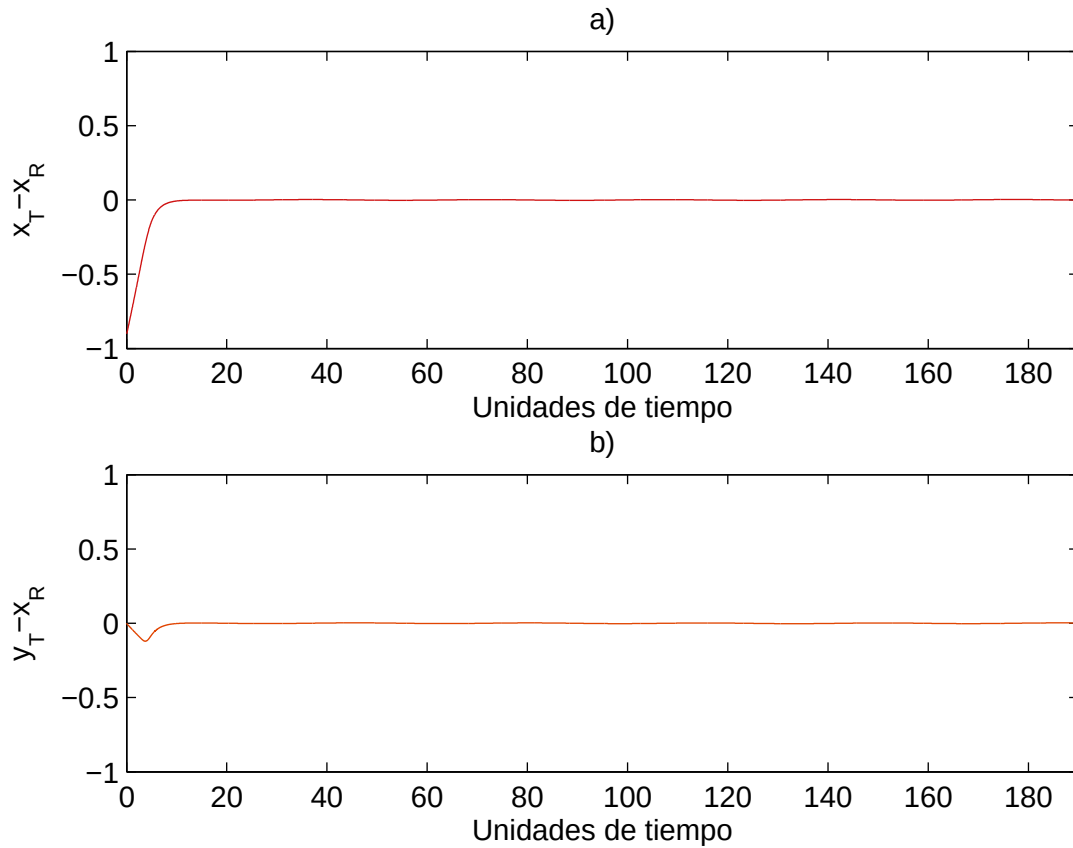


Figura 75: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

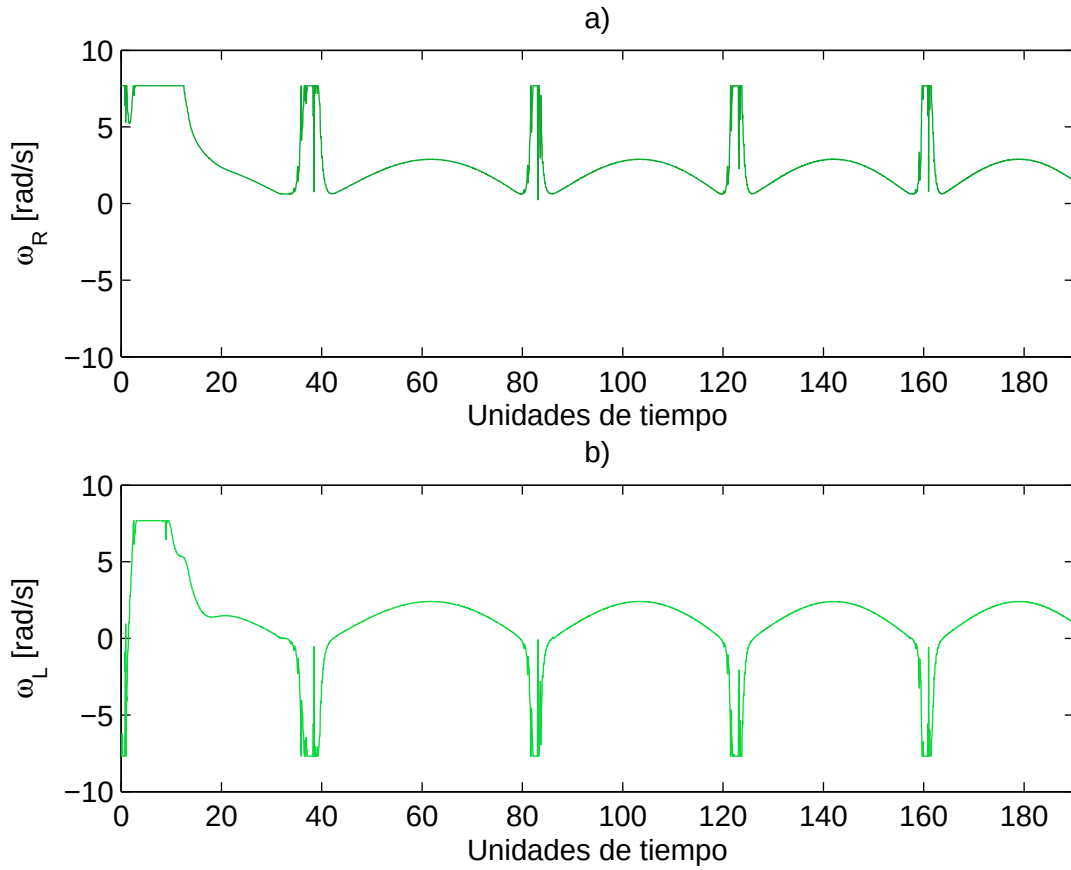


Figura 76: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

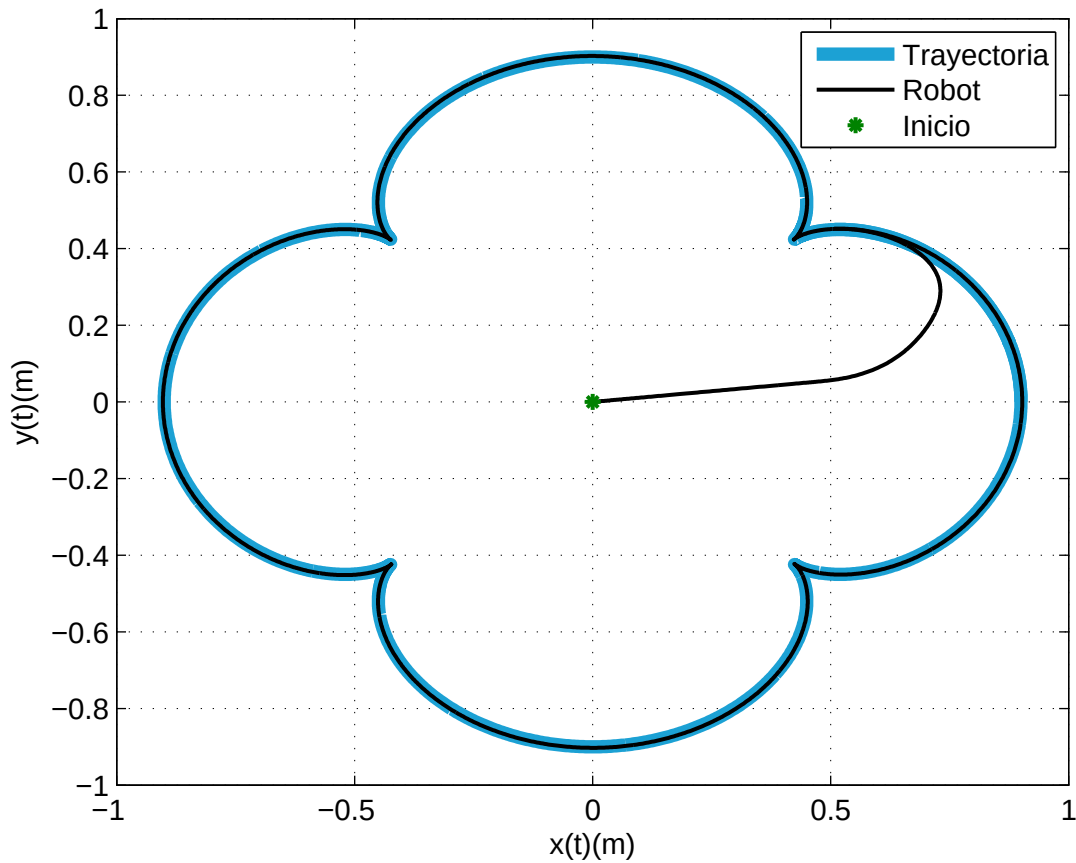


Figura 77: Trayectoria con la forma de epicicloide - 4 arcos ($k=4$).

5.10.5 Epicicloide de 6 arcos (k=6)

La trayectoria deseada epicicloide con 6 arcos, requiere de una relación $k = 6$, para ello los valores de los parámetros r definidos son $r_1 = 0.6$, $r_2 = 0.1$, así como $f = \frac{2\pi}{200}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 5$.

La figura 81, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. En ella se observa una trayectoria hexalobular, similar a una flor con 6 pétalos. Además identificamos el movimiento realizado por el robot móvil para incorporarse a la trayectoria deseada, lo cual logra en un punto de uno de los vértices.

Las gráficas de la figura 78, muestran los desplazamientos realizados por el robot correspondientes a cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. Para localizar la unidad de tiempo en la que el robot entra a la trayectoria de 6 arcos, basta con ubicar el primer cambio repentino en la gráfica c) de la figura 78, el cual se encuentra en 25 unidades de tiempo. Por lo que en la figura 78, las dinámicas de las gráficas a) y b) que se encuentran en el intervalo 0-25 corresponden al movimiento de incorporación a la trayectoria deseada. Si se desea encontrar las dinámicas correspondientes al trazado de cada uno de los arcos, se debe identificar el intervalo de tiempo que existe entre un cambio de ángulo y otro, y observar las gráficas a) y b) de la figura 78 en dicho intervalo.

El error inicial mostrado en la figura 79, es de aproximadamente $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.8,0). El error en el eje (x), disminuye a cero conforme el robot avanza hasta alcanzar la trayectoria deseada.

Las dinámicas de las velocidades ω_R y ω_L en la figura 80, muestran los picos correspondientes al trazado de cada uno de los vértices de la trayectoria de 6 arcos. Las medias ondas que se encuentran entre cada pico, pertenecen a las velocidades angulares para trazar cada uno de los arcos de la trayectoria deseada.

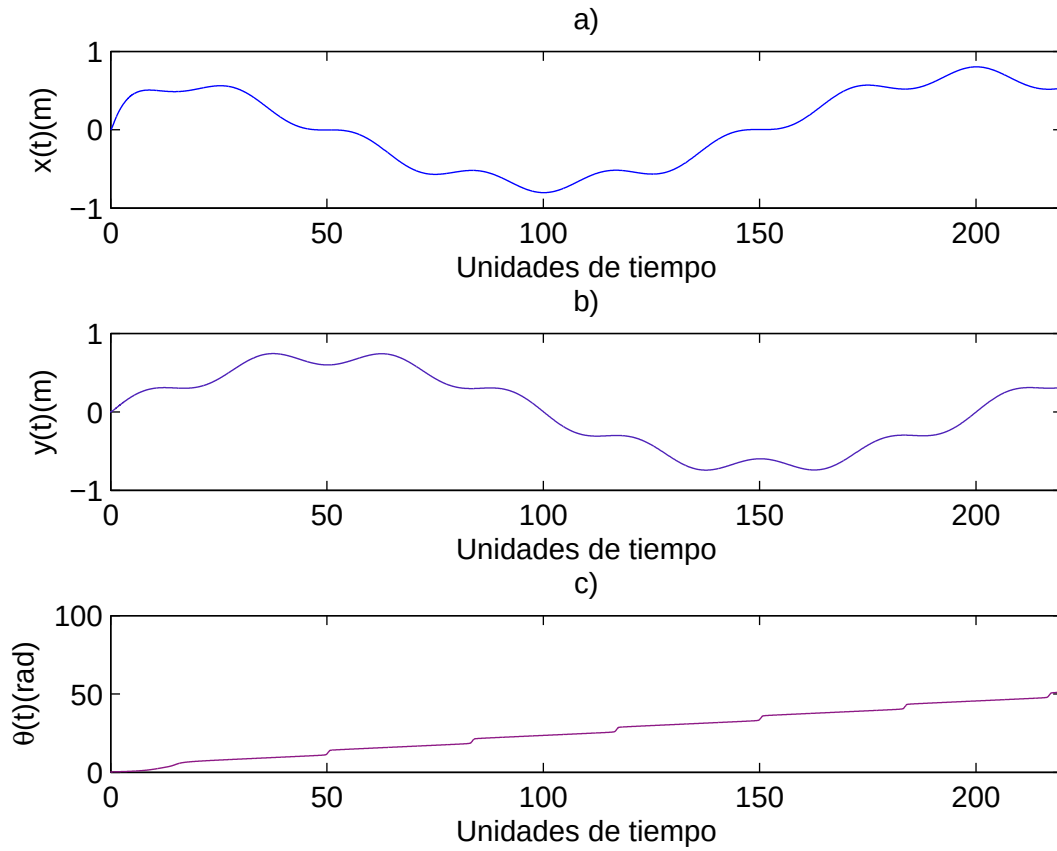


Figura 78: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

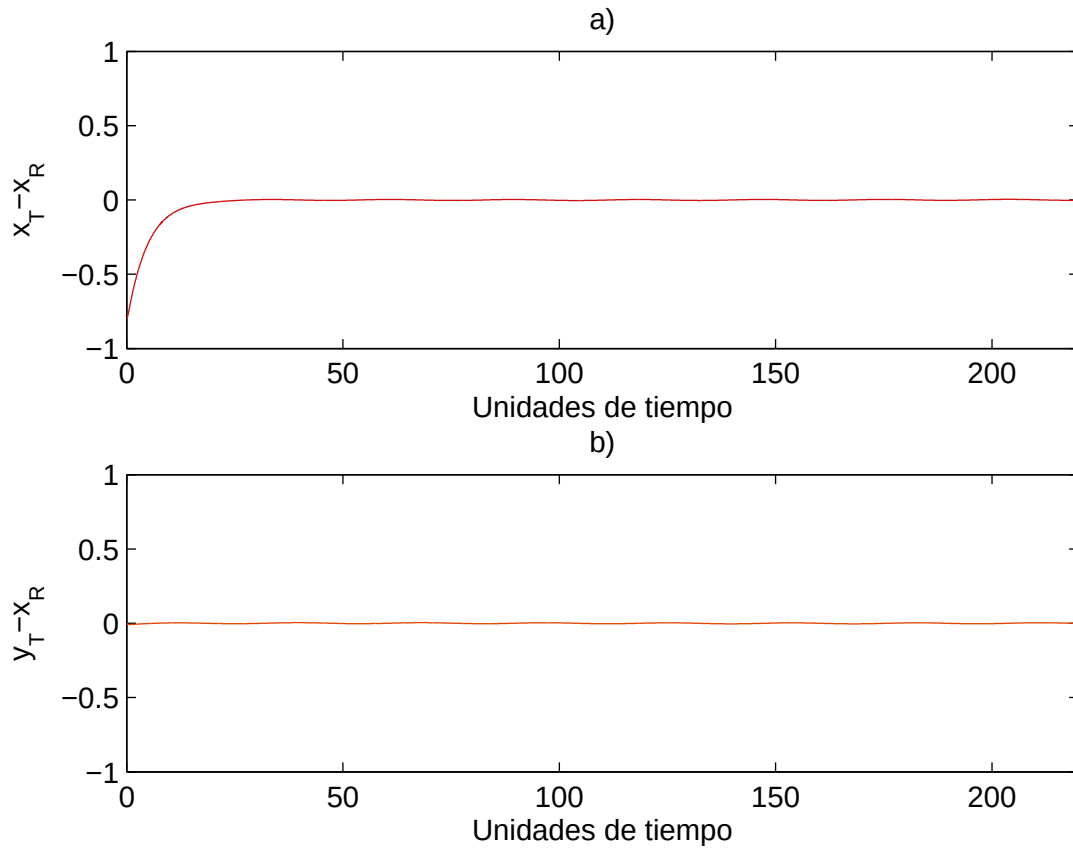


Figura 79: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

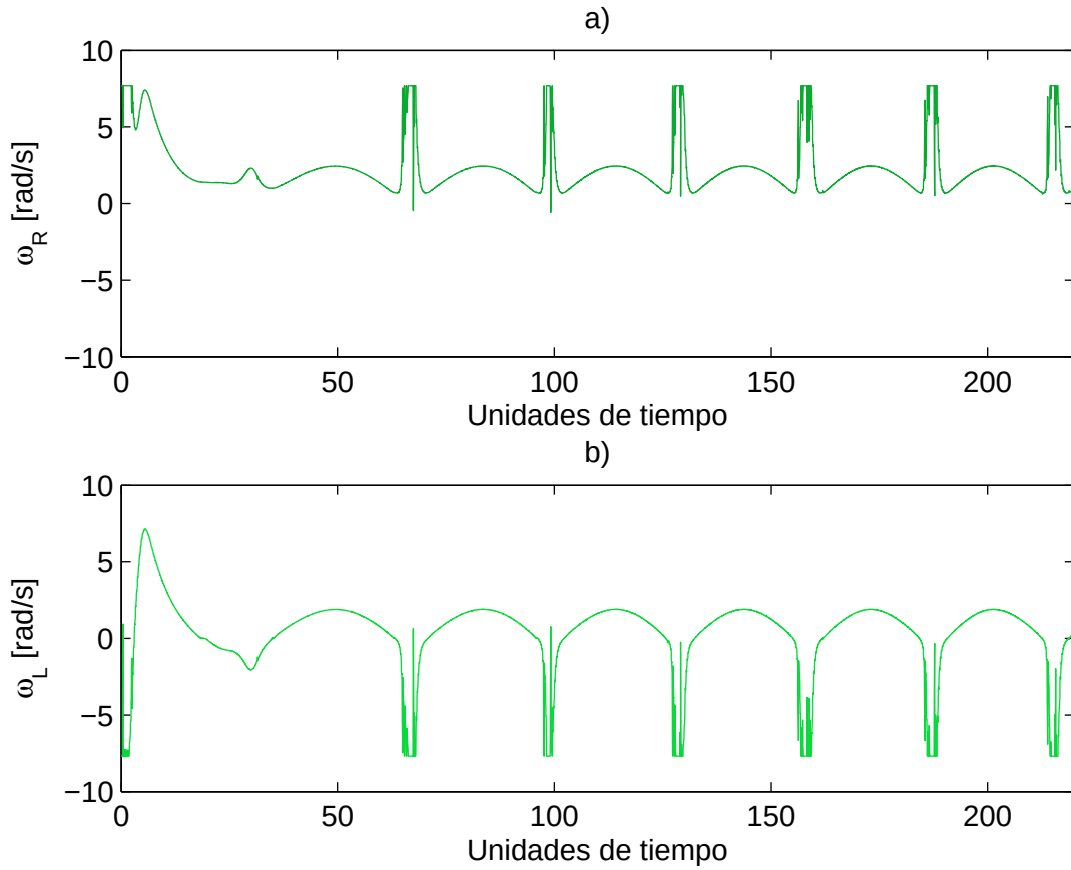


Figura 80: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

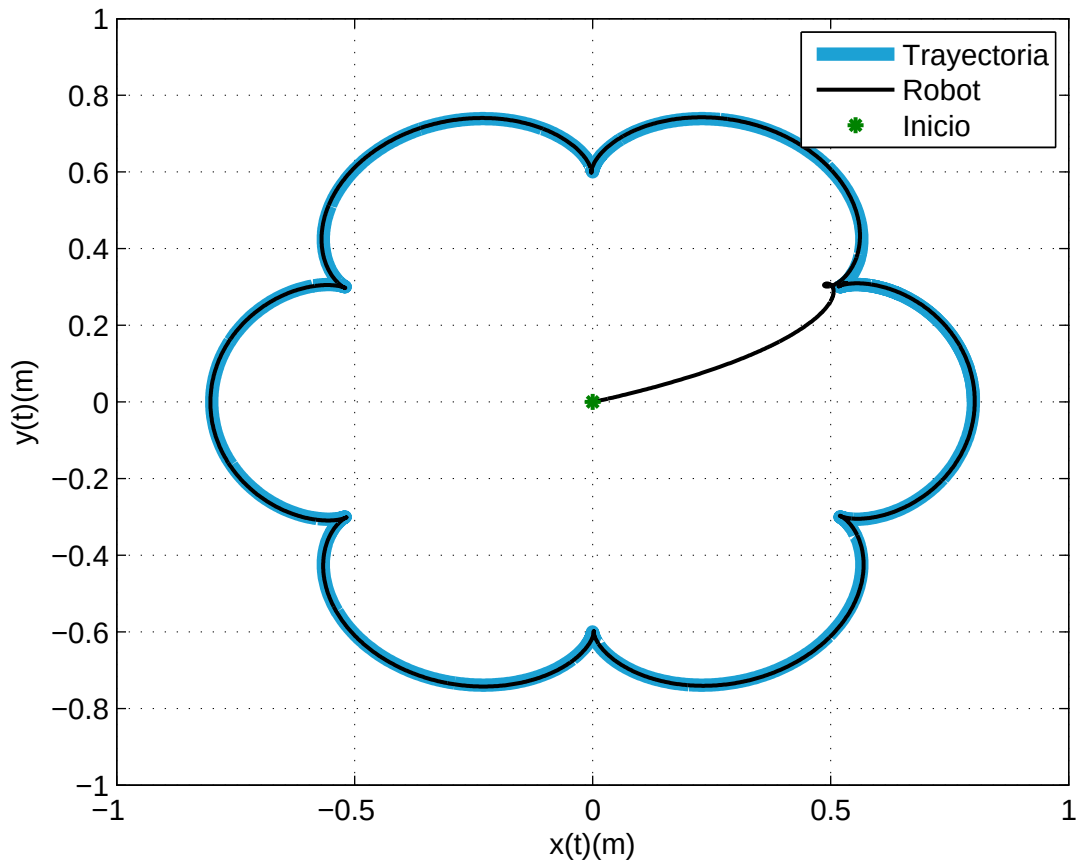


Figura 81: Trayectoria con la forma de epicicloide - 6 arcos ($k=6$).

5.10.6 Evoluta de cardioide ($k=0.5$)

La trayectoria de la evoluta de cardioide, requiere una relación $k = 0.5$, por lo que se han definidos los parámetros $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.4$, $f = \frac{2\pi}{100}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 5$.

La figura 85, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil. En ella observamos una cardioide rodeada por una especie de circunferencia, conocida como *evoluta*. El robot parte de su posición inicial para incorporarse a la trayectoria deseada, justamente en un punto de la evoluta.

Las gráficas de la figura 82, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. La gráfica a) de la figura 82, presenta un incremento más pronunciado que la gráfica b) dentro de las primeras 7 unidades de tiempo, correspondientes al movimiento del robot para entrar a la evoluta. En la gráfica c) la figura 82, se ubica el cambio de ángulo repentino en 50 unidades de tiempo, el cual corresponde al trazado del vértice de la cardioide.

El error inicial que muestra la figura 83, es aproximadamente de $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.8, 0)$. Analizando la gráfica a) de la figura 83, se encuentra que el robot alcanza la evoluta de la cardioide en 5 unidades de tiempo, pues el error en este punto es cero.

La figura 84, muestra las dinámicas de las velocidades angulares en el tiempo. Después de la etapa de transición se observa un decremento en ambas velocidades, siendo $\omega_R > \omega_L$, lo que permite al robot trazar la primera mitad de la evoluta y cardioide. Luego en a) y b) de la figura 84, se presenta el pico provocado por el trazado del vértice y finalmente un incremento en ambas velocidades, para trazar la segunda mitad de la cardioide y su evoluta.

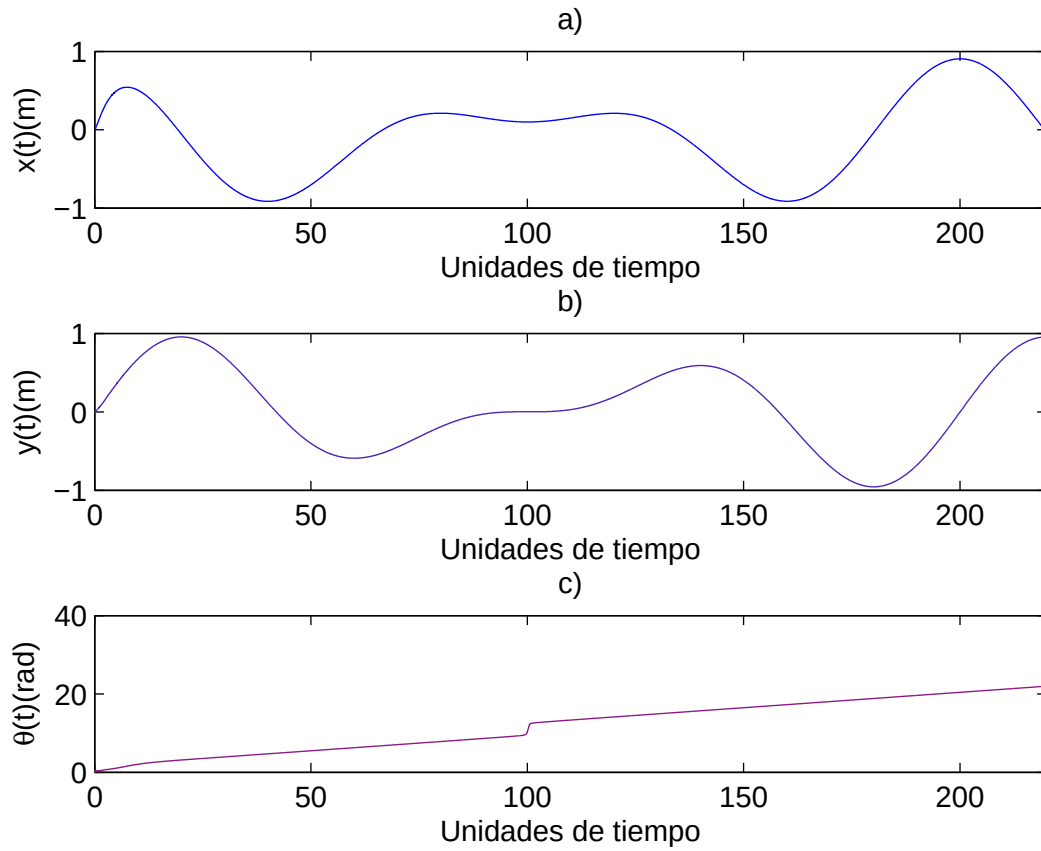


Figura 82: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

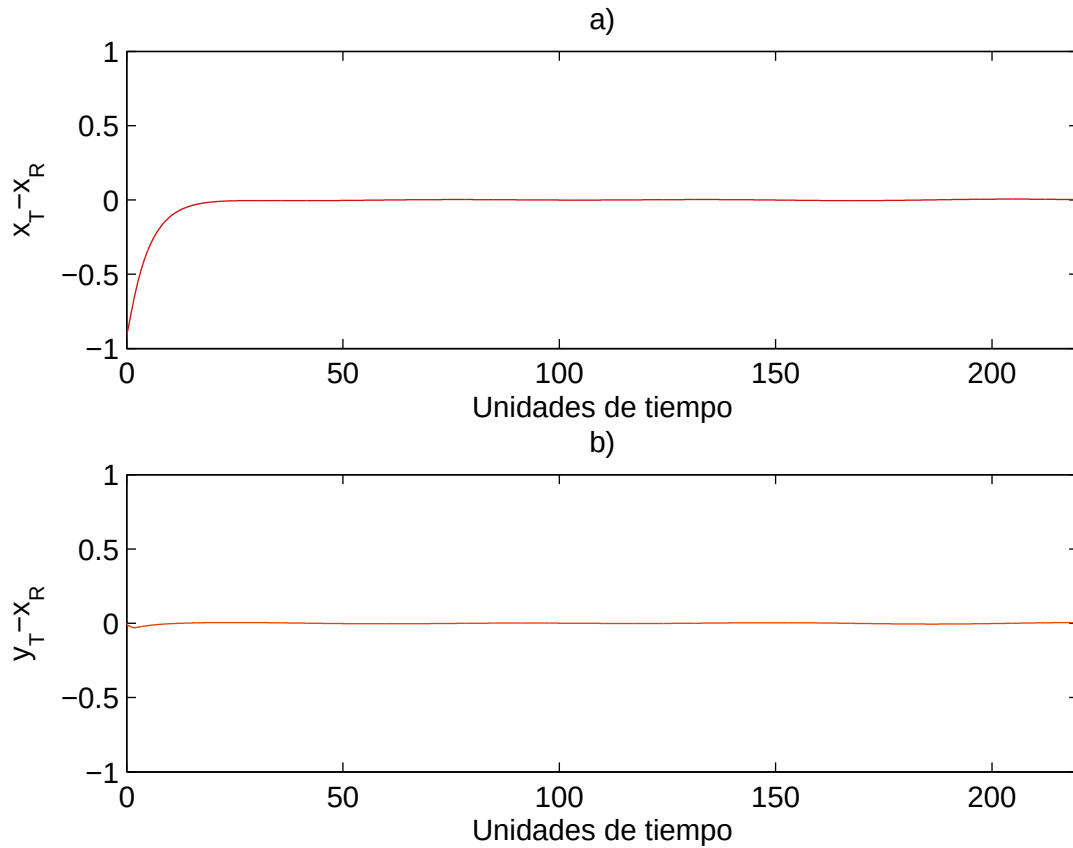


Figura 83: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

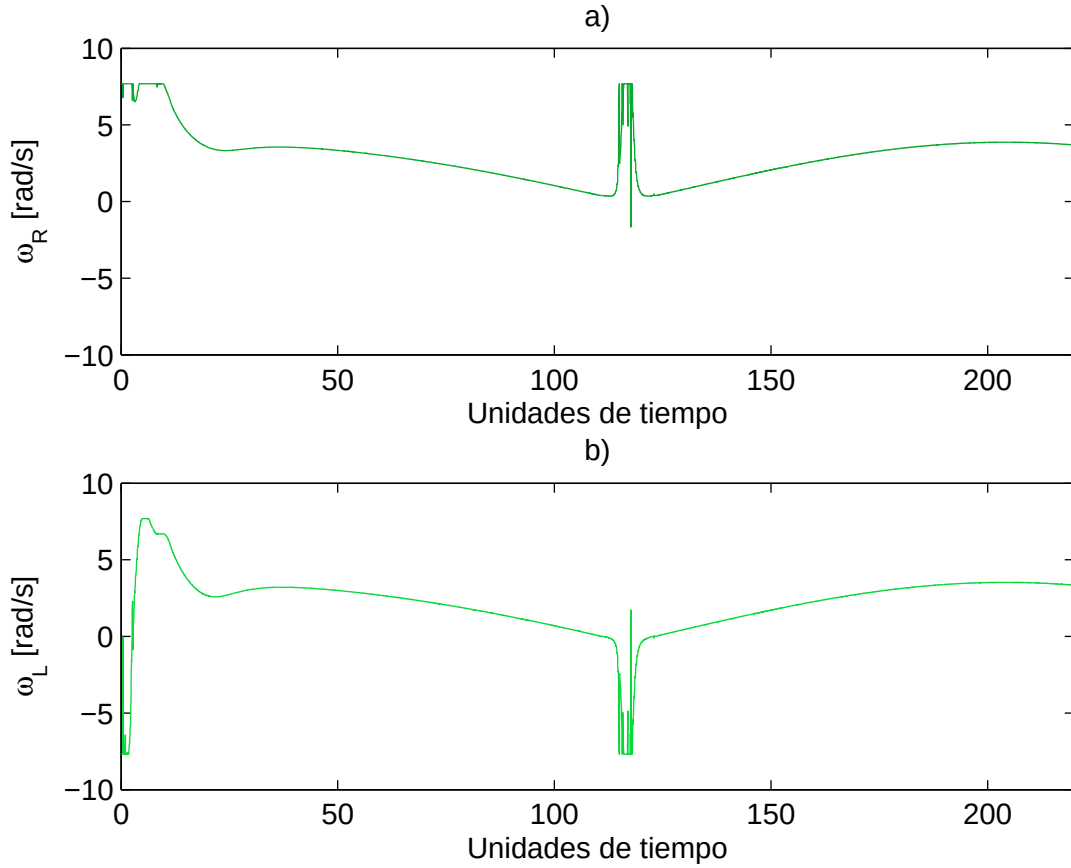


Figura 84: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

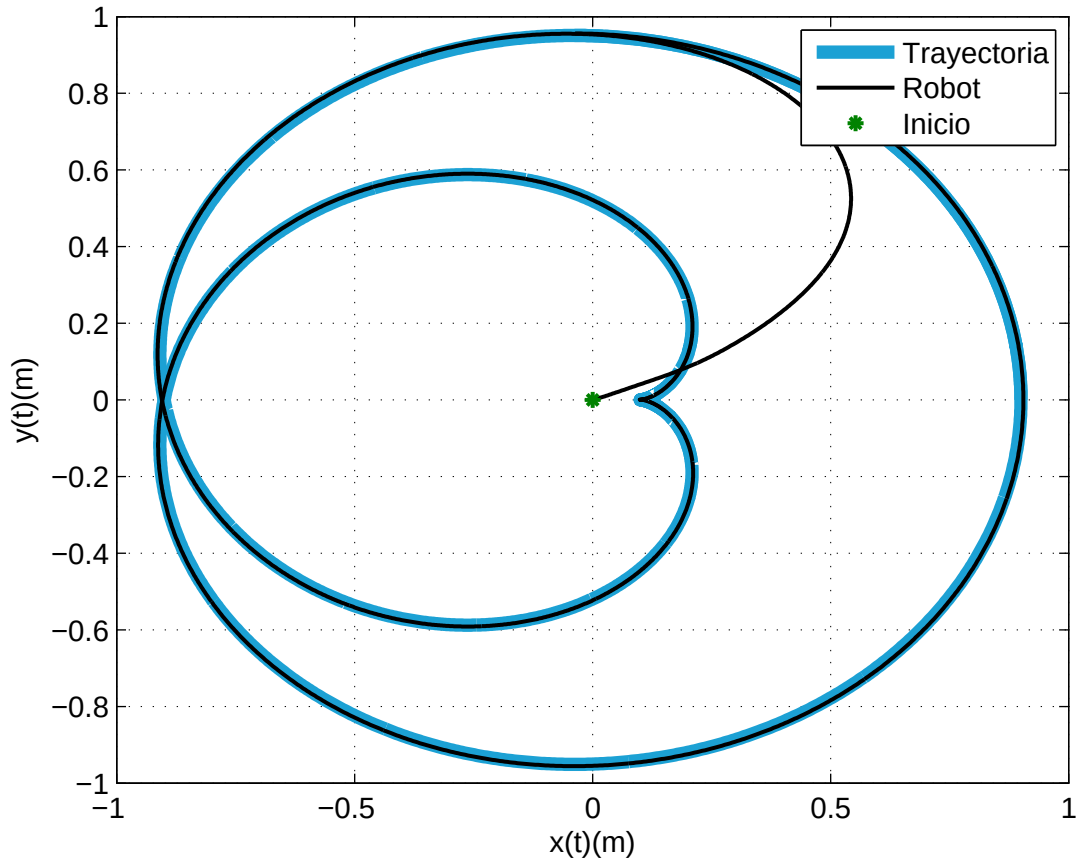


Figura 85: Trayectoria con la forma de la evoluta de cardioide ($k=0.5$).

5.10.7 Epicicloide con 3 cúspides ($k=0.6$)

Para la epicicloide de 3 cúspides, se necesita de una relación $k = 0.6$, por ello se definen los parámetros $r_1 = 0.18$, $r_2 = 0.3$, $f = \frac{2\pi}{150}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 5$.

La figura 89, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. Donde se observa una epicicloide de 3 cúspides, rodeada por una serie de evolutas. Si se analiza detalladamente la trayectoria, se identifica que esta formada por 3 evolutas de cardioide en diferente posición y orientación. El movimiento que el robot realiza hacia la trayectoria deseada, sugiere un recorrido similar en ambos ejes, por lo que se espera un incremento similar en las gráficas de desplazamiento.

Las gráficas de la figura 86, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. El incremento inicial en las gráficas a) y b) de la figura 86, en las primeras unidades de tiempo es muy parecido, siendo la gráfica a) más pronunciada. En la gráfica c) de la figura 86, se identifican los tres cambios de ángulo correspondientes a los tres vértices de la trayectoria deseada.

El error inicial mostrado en las gráficas de la figura 87, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.7$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.7, 0)$. El error en (x) , disminuye conforme el robot avanza hacia la trayectoria de 3 cúspides.

La figura 88, muestra la dinámica de las velocidades angulares (ω_R, ω_L) a lo largo del tiempo. En las gráficas a) y b) de la figura 88, se observan los 3 picos correspondientes al trazado de los vértices. Las medias ondas, entre los picos, pertenecen a las velocidades que permiten al robot trazar las evolutas de la trayectoria deseada.

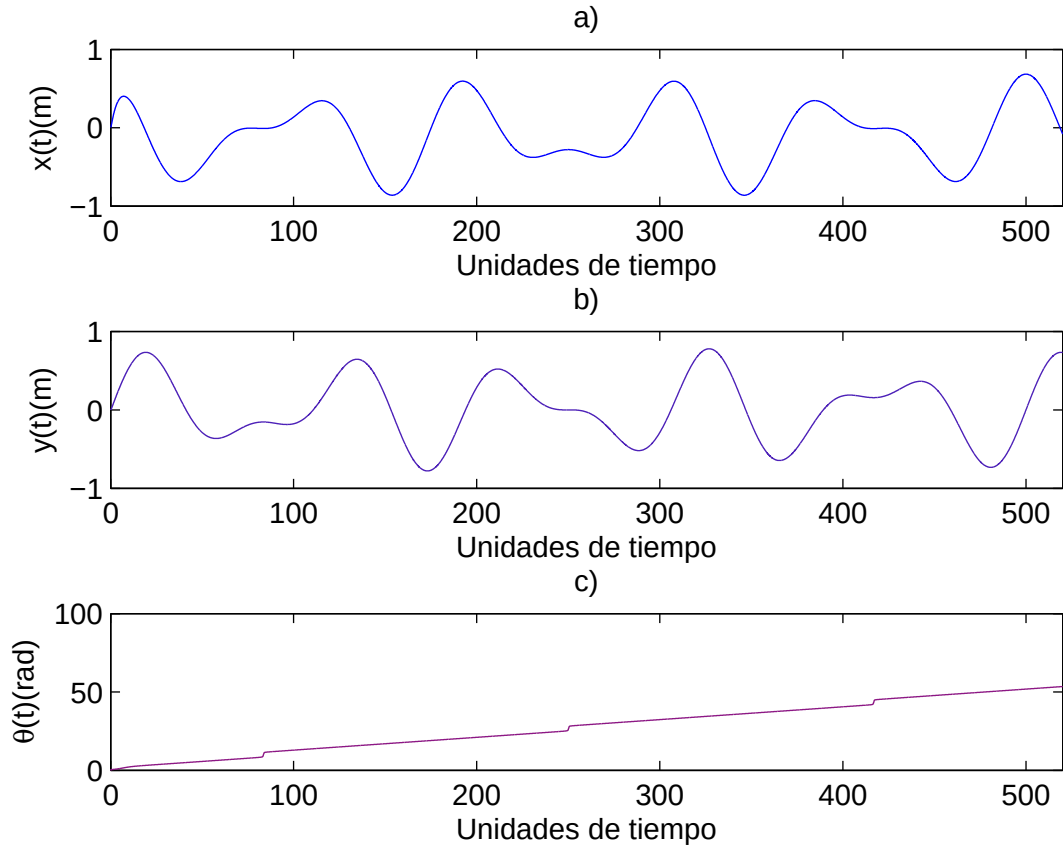


Figura 86: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

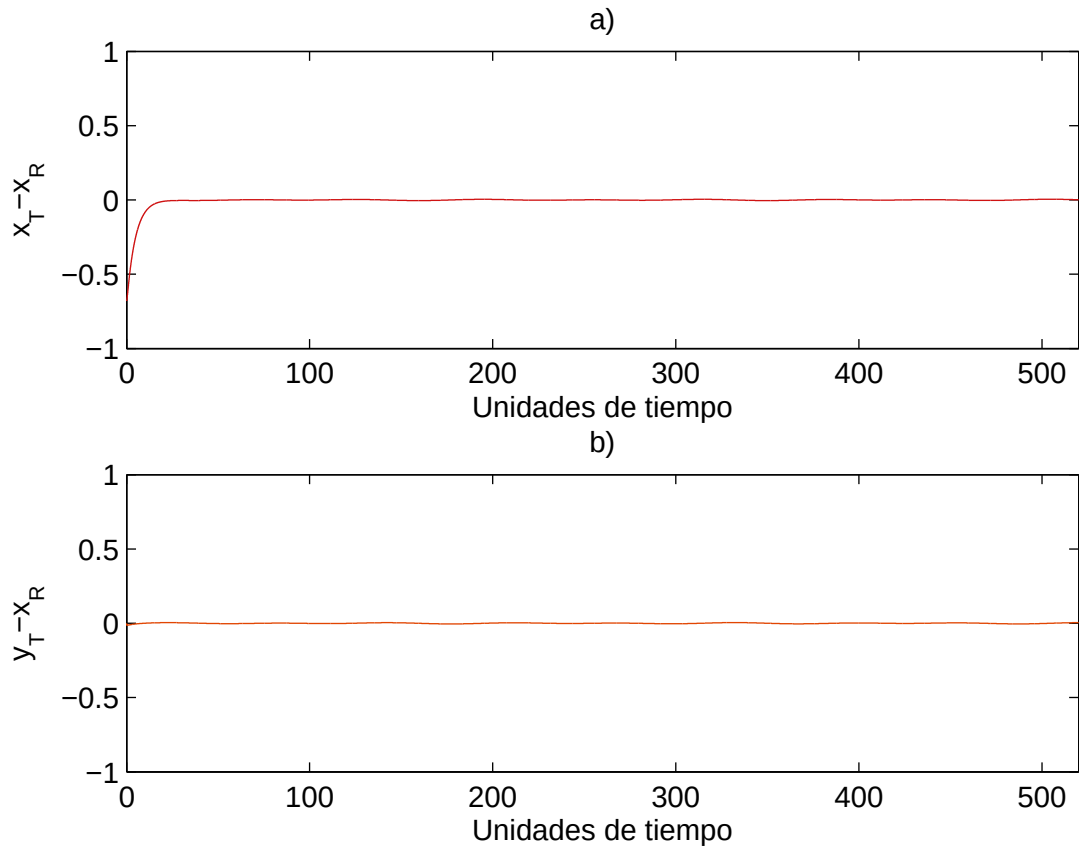


Figura 87: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

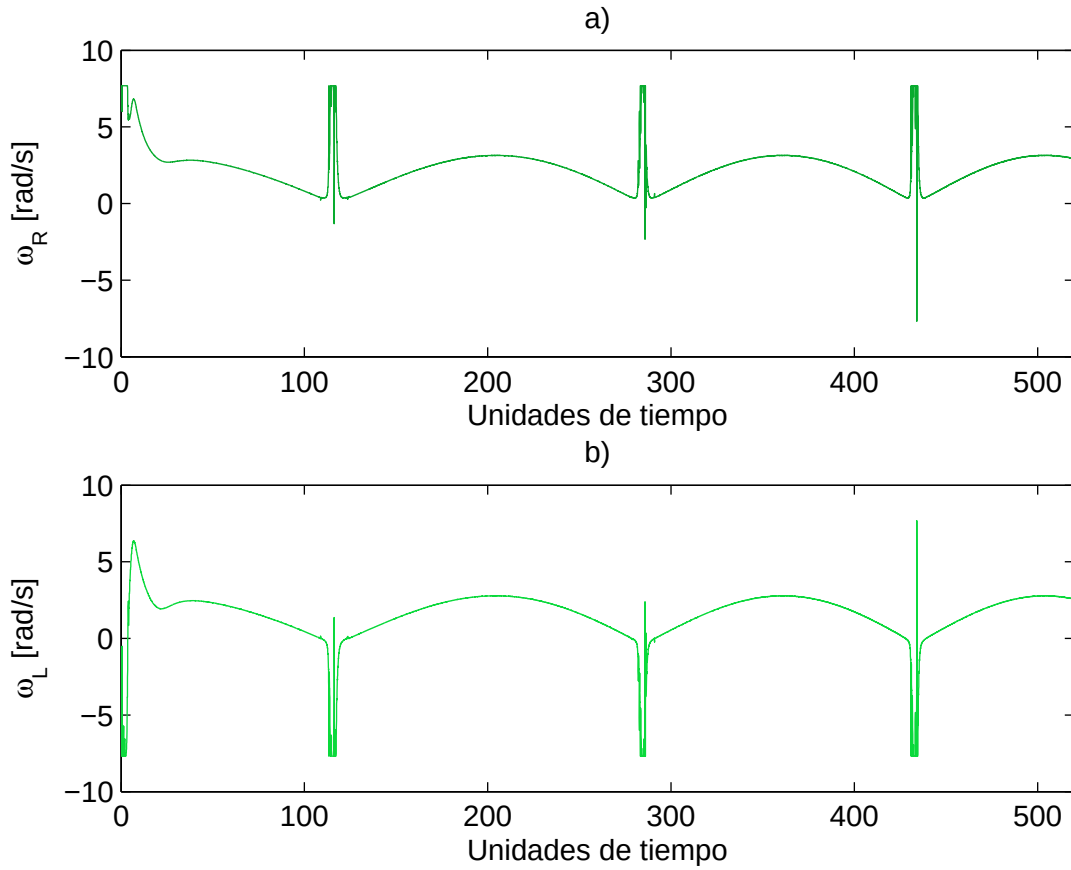


Figura 88: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

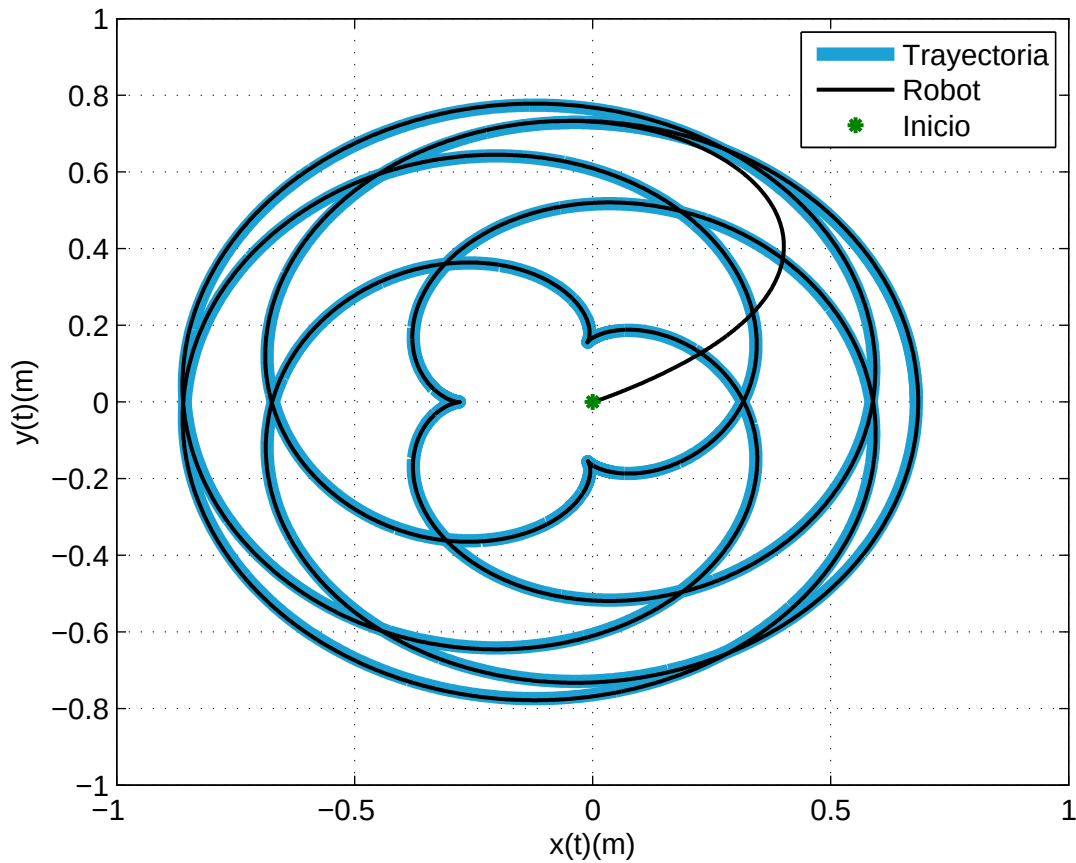


Figura 89: Trayectoria con la forma de epicicloide - 3 cúspides ($k=0.6$).

5.10.8 Epicicloide con 4 cúspides ($k=0.8$)

La trayectoria epicicloide con 4 cúspides, requiere de una relación ($k = 0.8$), por lo que se han definido los parámetros $r_1 = 0.24$, $r_2 = 0.3$, $f = \frac{2\pi}{100}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 5$.

La figura 93, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. En ella se observa una epicicloide de 4 cúspides, rodeada por sus evolutas. Al igual que la trayectoria anterior, los desplazamientos en los ejes coordenados son muy parecidos.

Las gráficas de la figura 90, muestran los desplazamientos realizados por el robot en cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. Se observa en las primeras 10 unidades de tiempos, que el desplazamiento tanto en (x) como en (y) son similares, mostrando un incremento pronunciado en ambas gráficas. En la gráfica c) de la figura 90, se identifican 4 cambios de ángulo repentinos, correspondientes a los vértices de la trayectoria deseada.

En la figura 91, se muestra un error inicial de aproximadamente $X_T - X_R = -0.75$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.75,0). El error en (x), disminuye conforme el robot avanza hacia la trayectoria de 4 cúspides.

Las dinámicas de las velocidades angulares mostradas en la figura 92, presentan la etapa de transición en las primeras 10 unidades de tiempo, correspondiente al movimiento de incorporación del robot a la trayectoria deseada. Se observan 4 picos en ambas gráficas, producto de la velocidad necesaria para trazar cada uno de los vértices. Y las medias ondas entre cada pico, son los valores de las velocidades que permiten al robot trazar las evolutas, de la trayectoria de 4 cúspides.

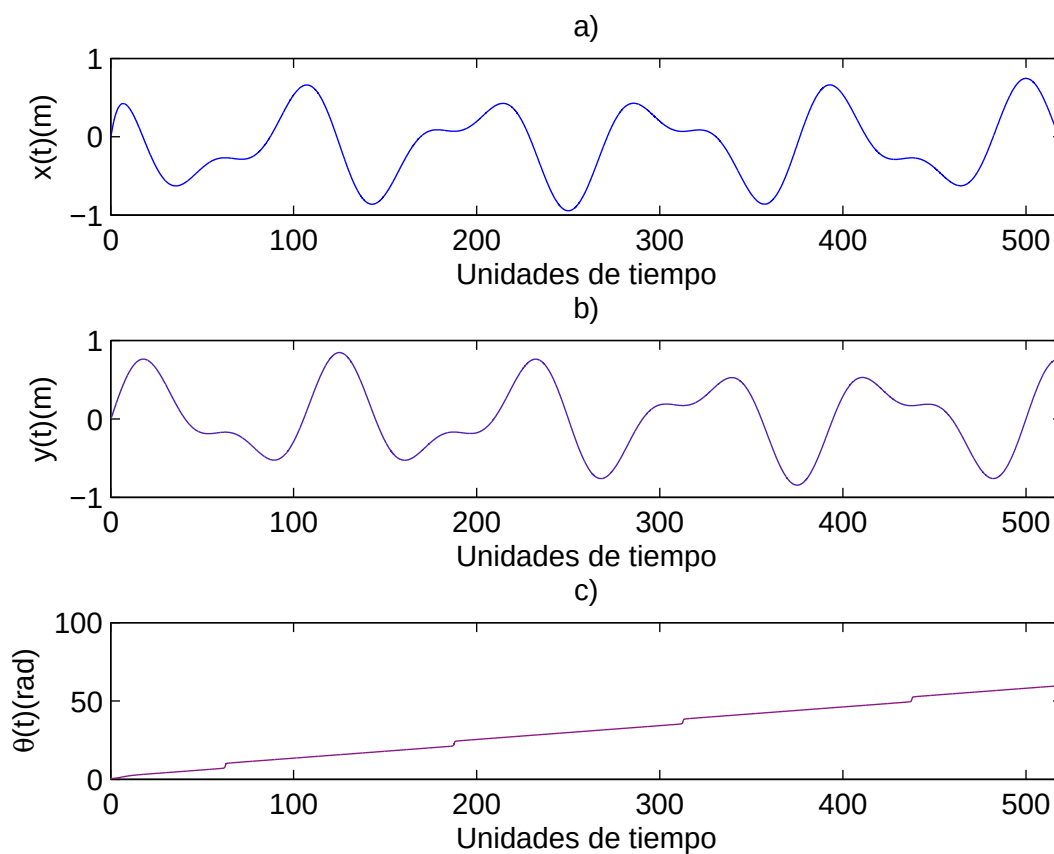


Figura 90: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

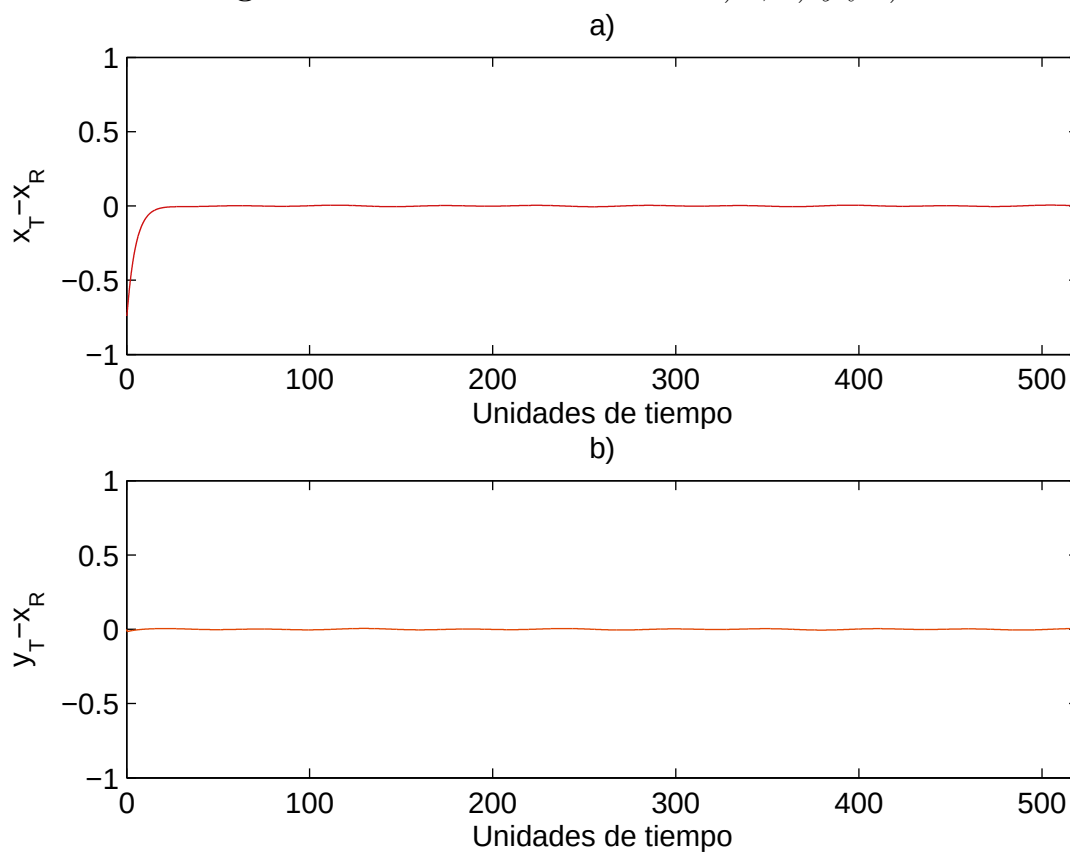


Figura 91: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

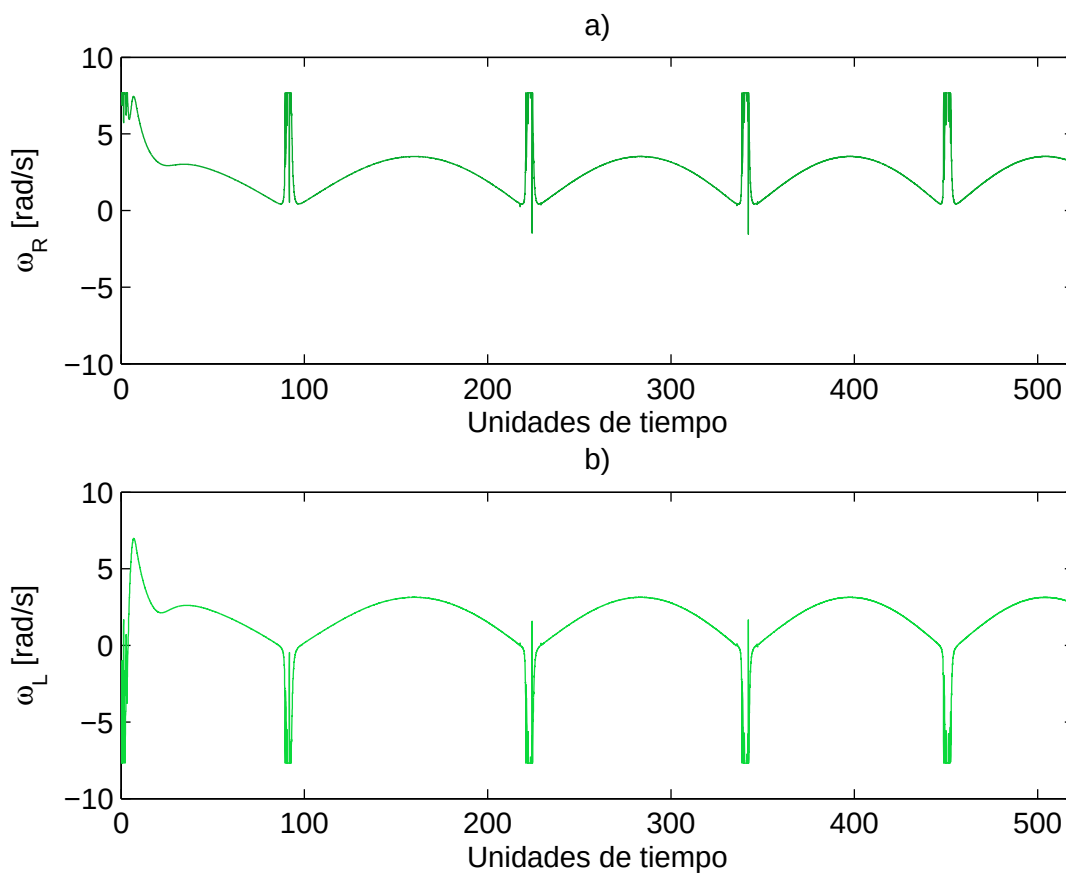


Figura 92: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

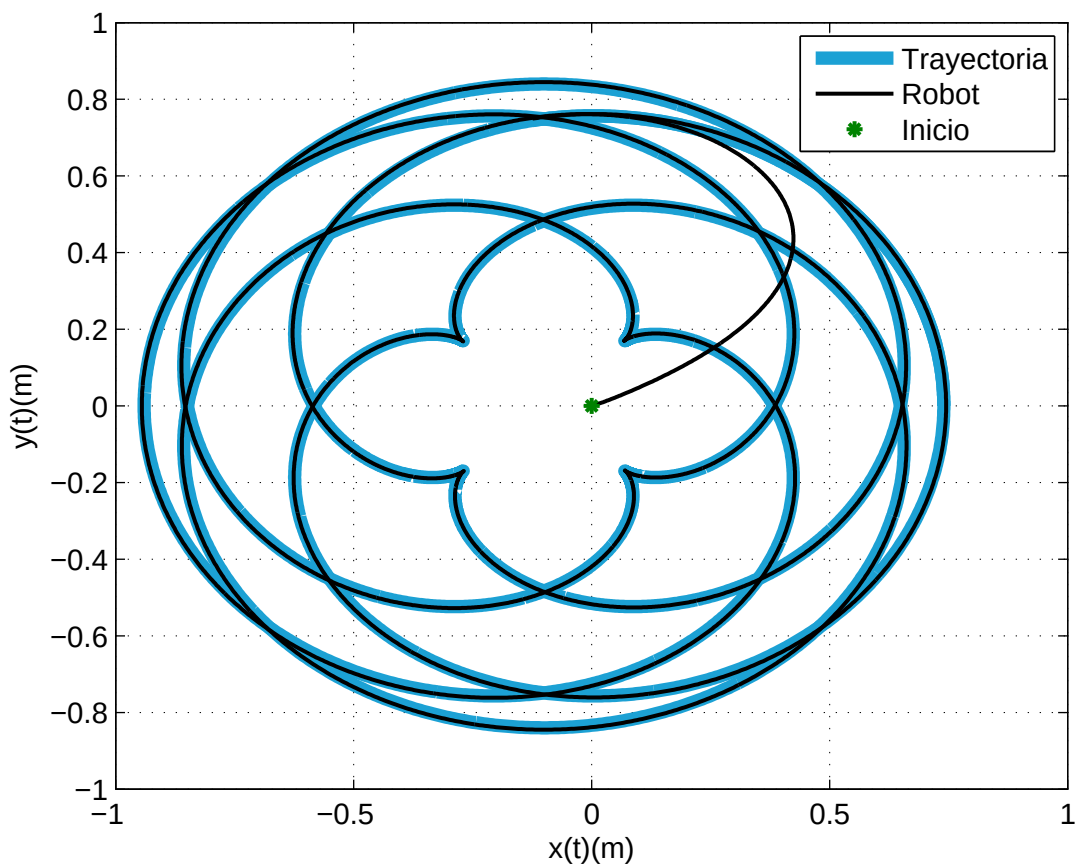


Figura 93: Trayectoria con la forma de epicicloide - 4 cúspides ($k=0.8$).

5.11 Trayectorias con la forma de hipocicloides

Las trayectorias deseadas con la forma de hipocicloides se encuentran definidas por las ecuaciones: $X_d(t) = (r_1 + r_2) \cos(ft) + r_2 \cos((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$ y $Y_d(t) = (r_1 + r_2) \sin(ft) - r_2 \sin((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$, donde al variar la relación $k = \frac{r_1}{r_2}$ se obtienen hipocicloides diferentes. Las trayectorias hipocicloides presentadas utilizan las ganancias $K_p = 2$ y $K_d = 1$.

5.11.1 Deltoide (k=1)

En la trayectoria hipocicloide mejor conocida como deltoide, se debe tener una relación $k = 1$, por lo que los valores de los parámetros r , se han definido con $r_1 = 0.3$ y $r_2 = 0.3$, con una $f = \frac{2\pi}{175}$.

La figura 97, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. En ella se observa una trayectoria similar a un triángulo y al robot móvil partiendo en línea recta desde su posición inicial hacia dicha trayectoria.

Las gráficas de la figura 94, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. En las primeras 10 unidades de tiempo se observa que la gráfica a) muestra un incremento hasta 1 muy pronunciado, mientras que el desplazamiento en el eje (y) es casi nulo. En la gráfica c) de la figura 94, se identifican tres cambios en el valor del ángulo de orientación, producto de los vértices de la trayectoria deltoide.

La figura 95, presenta un error inicial de aproximadamente $X_T - X_R = -0.9$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.9,0). Conforme el robot avanza hacia la deltoide, el error para el eje (x) disminuye a cero.

Las dinámicas de las velocidades angulares a lo largo del tiempo, se muestran en la figura 96 donde se observan las singularidades producidas por el trazado de los vértices.

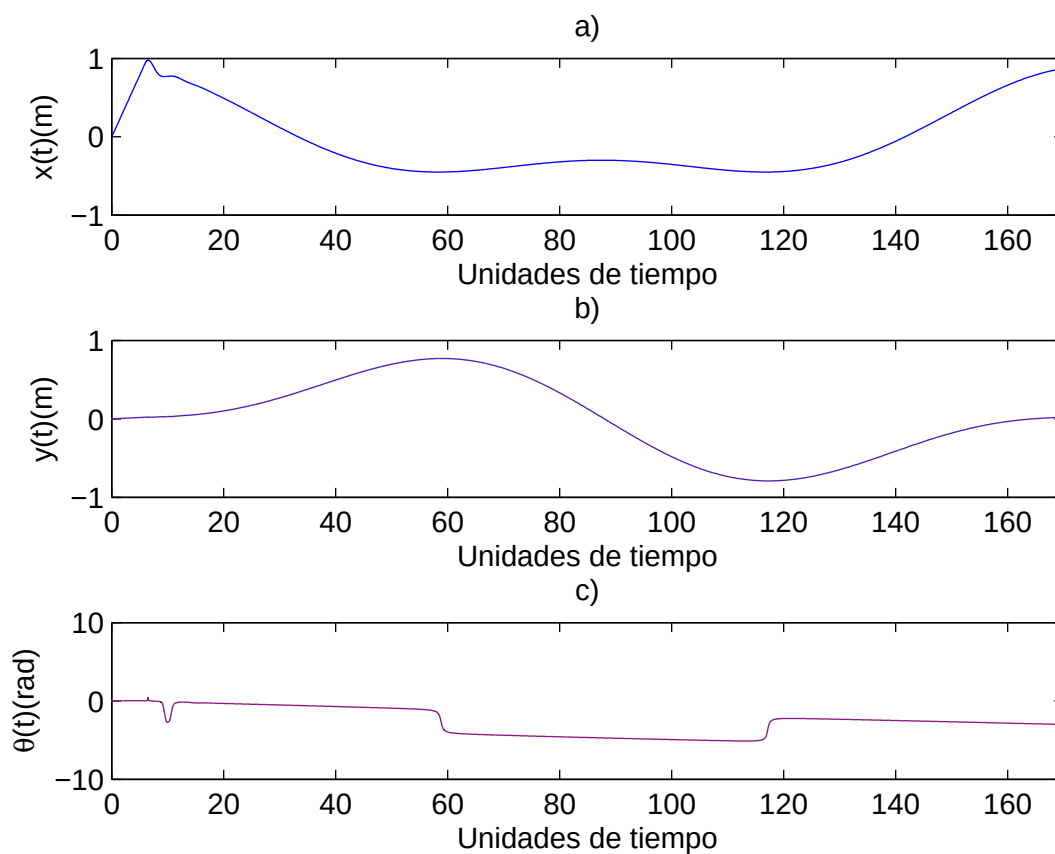


Figura 94: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

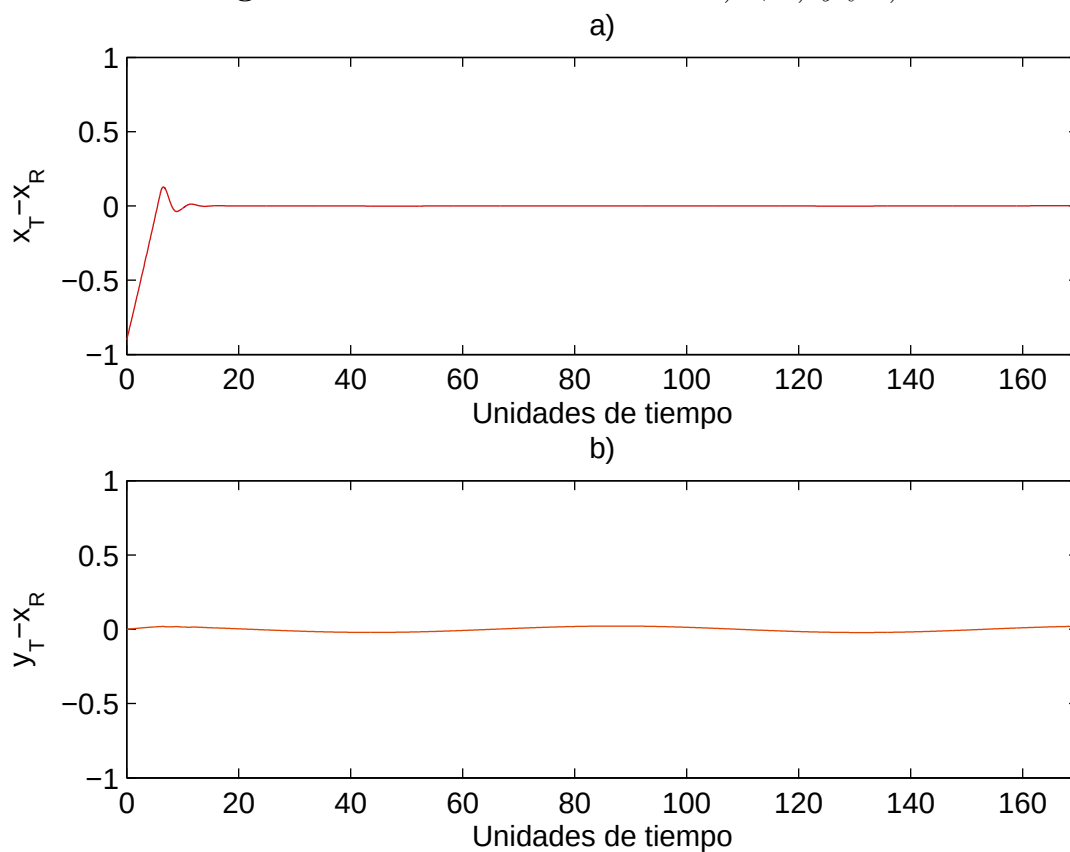


Figura 95: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

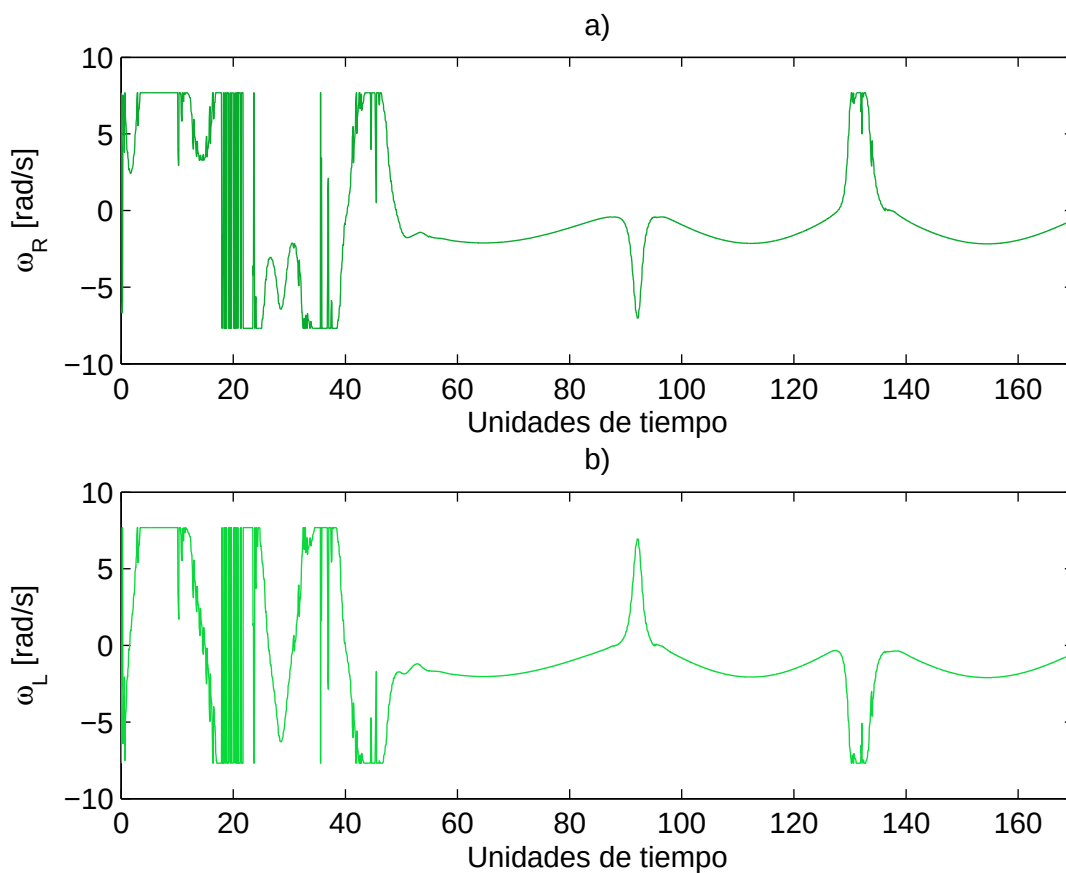


Figura 96: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

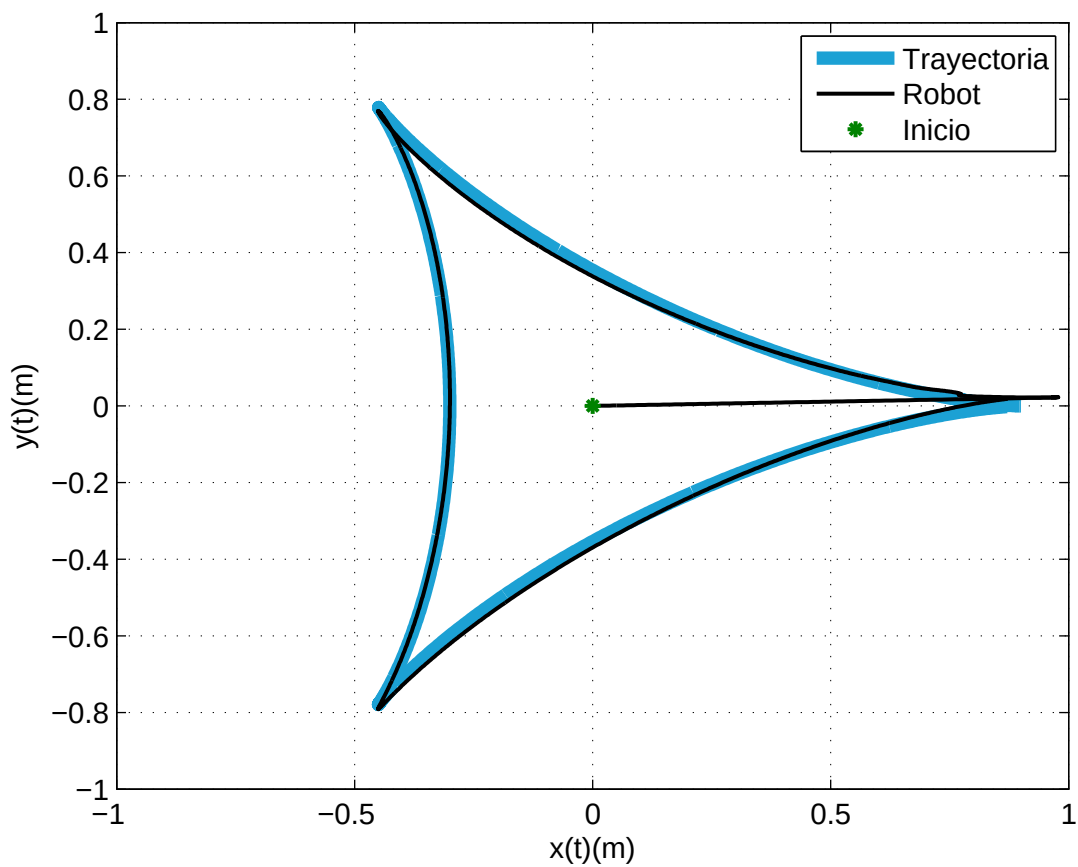


Figura 97: Trayectoria con la forma deltoide.

5.11.2 Astroide (k=2)

Para la trayectoria hipocicloide mejor conocida como astroide, se requiere una relación $k = 2$, por ello se han definido los parámetros $r_1 = 0.6$, $r_2 = 0.2$ y $f = \frac{2\pi}{150}$.

La figura 101, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. Donde se observa una curva con 4 vértices, similar a un rombo. Nuevamente el robot realiza un desplazamiento en línea recta para incorporarse a la trayectoria de la astroide.

Las gráficas de la figura 98, muestran los desplazamientos realizados por el robot en cada eje coordenado, así como su ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. La gráfica a) de la figura 98, muestra un incremento muy pronunciado dentro de las primeras 10 unidades de tiempo, el cual corresponde al movimiento de incorporación a la trayectoria deseada. Mientras que el movimiento en el eje (y), es apenas perceptible. En la gráfica c) de la figura 73efxyastroide, se observan los cambios de ángulo (θ) producidos por el trazado de los vértices.

El error inicial mostrado en la figura 99, es de aproximadamente $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.8,0). Conforme el robot avanza hacia el vértice del astroide, el error para el eje (x) disminuye hasta ser cero, en 17 unidades de tiempo, lo que indica que el robot se encuentra dentro de la trayectoria deseada.

La figura 100, muestra la dinámica de las velocidades angulares en el tiempo. En las gráficas a) y b) de la figura 100, se identifican fácilmente las singularidades producidas por una $v = 0$, que permite al robot realizar cada vértice de la trayectoria deltoide. Las dinámicas que se encuentran entre estas singularidades, pertenecen a las velocidades que el robot utiliza para trazar cada lado de la trayectoria deseada.

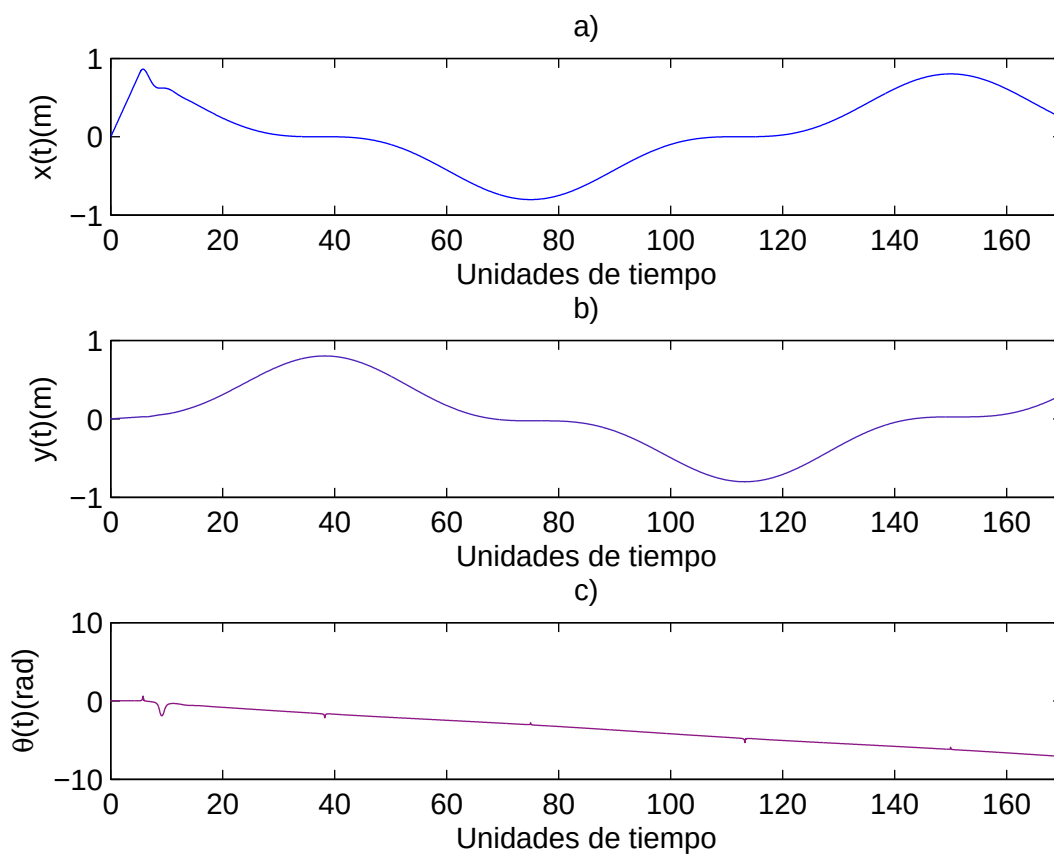


Figura 98: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

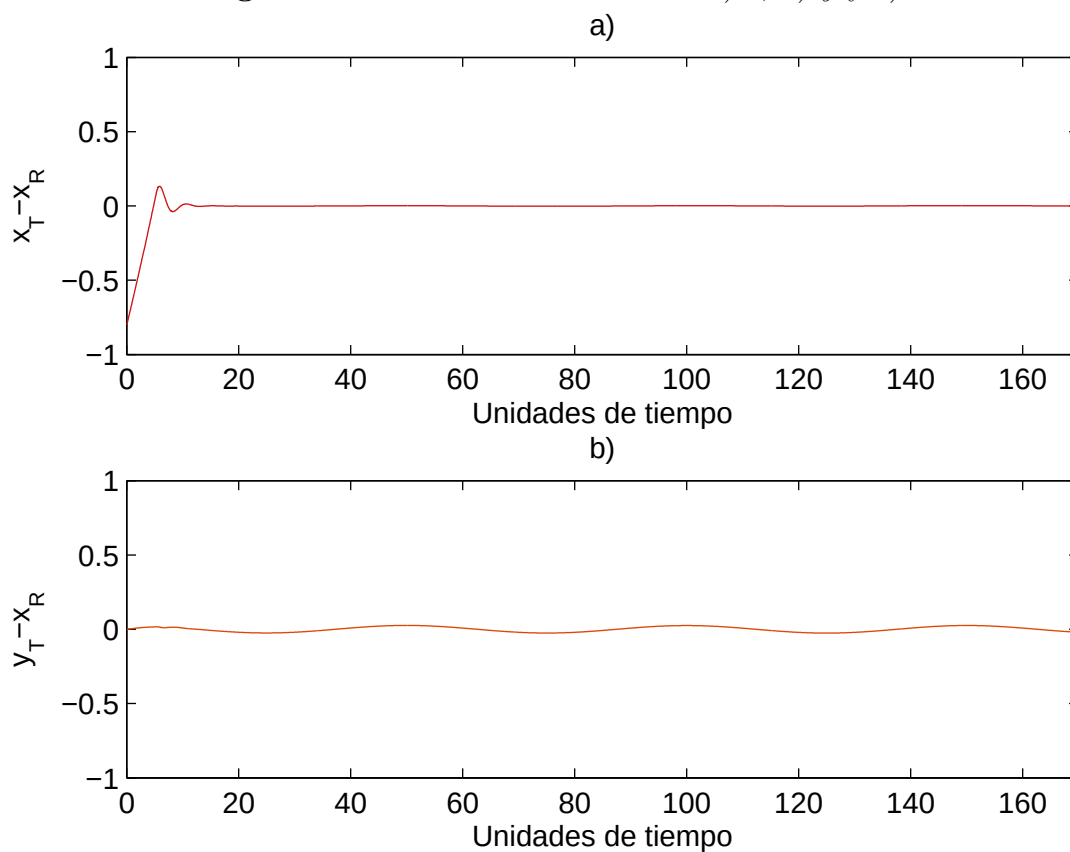


Figura 99: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

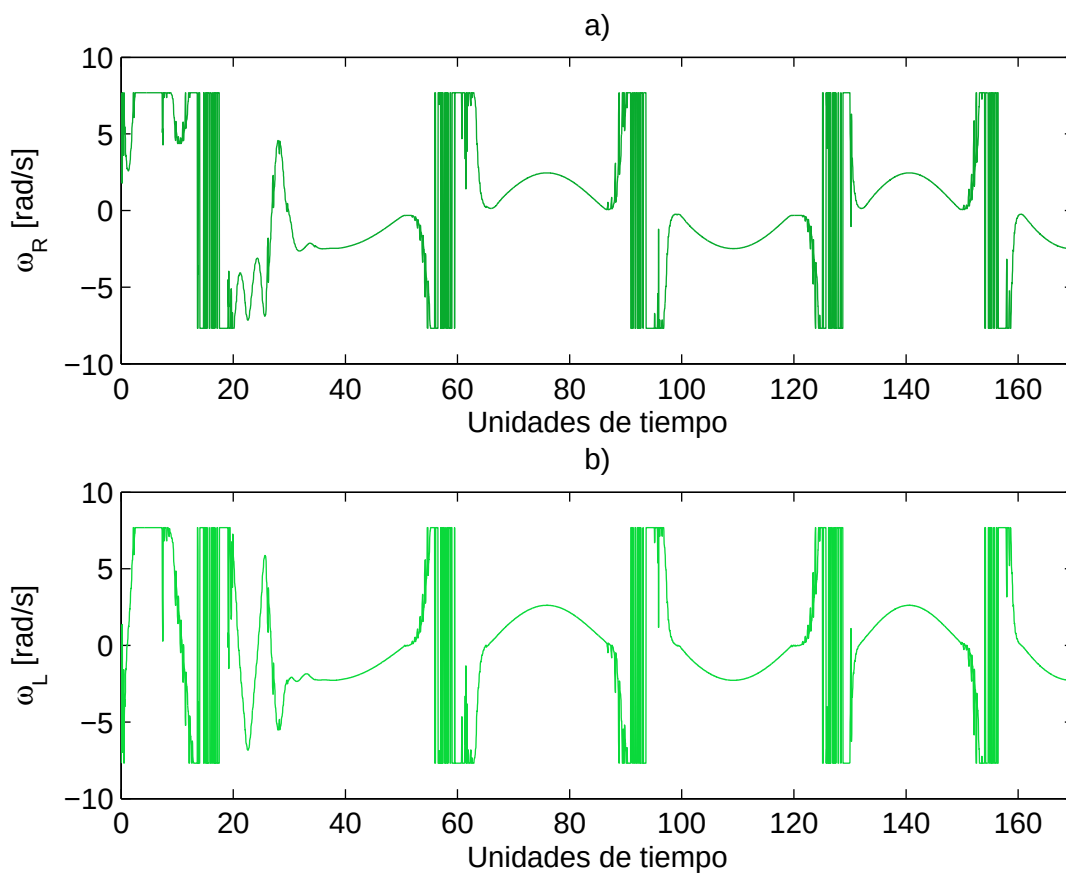


Figura 100: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

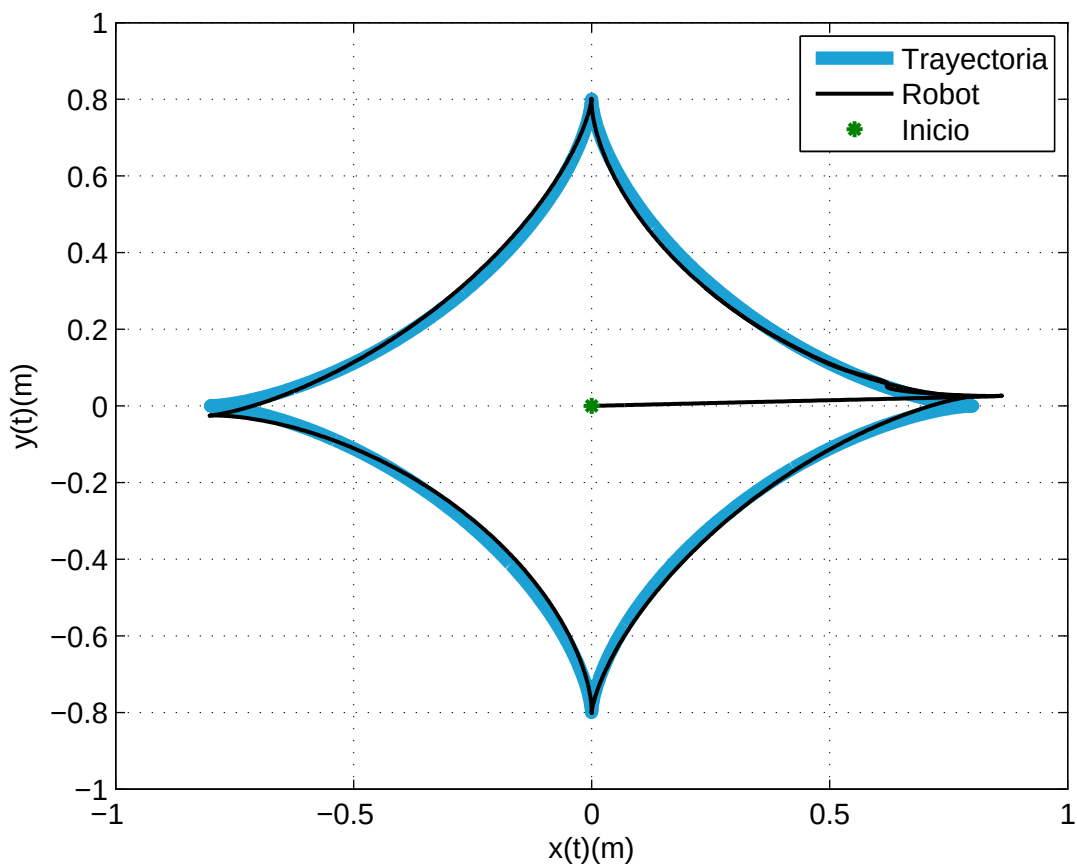


Figura 101: Trayectoria con la forma de astroide.

5.11.3 Hipocicloide con 5 puntas (k=3)

La trayectoria hipocicloide con 5 puntas, necesita de una relación $k = 3$, por lo tanto se han definido los parámetros $r_1 = 0.48$, $r_2 = 0.16$ y $f = \frac{2\pi}{250}$.

La figura 105, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. Donde se observa una curva de 5 vértices, similar a un pentágono con lados curvos. También es notable que el robot se desplaza en línea recta hacia uno de los vértices de la trayectoria hipocicloide, para incorporarse a ella.

Las gráficas de la figura 102, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. En la gráfica a) de la figura 102, se observa un incremento pronunciado hasta 0.9, dentro de las primeras 8 unidades de tiempo. Mientras que los desplazamientos realizados en el eje (y), son muy pequeños. La gráfica c) de la figura 102, muestra los cambios repentinos en el ángulo (θ) producidos por el trazado de cada uno de los vértices de la hipocicloide.

El error inicial mostrado en la figura 103, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.9$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.9,0). Conforme el robot avanza hacia el vértice, el error para el eje (x) disminuye hasta ser cero, en 13 unidades de tiempo, lo que indica que el robot se encuentra dentro de la trayectoria deseada.

La figura 104, muestra la dinámica de las velocidades angulares en el tiempo. Donde se observan los picos producidos tanto en ω_R como ω_L , por la velocidad necesaria para realizar cada vértice de la trayectoria deseada. Las dinámicas que se encuentran entre estos picos, pertenecen a las velocidades angulares que permiten al robot trazar los lados de la hipocicloide de 5 picos.

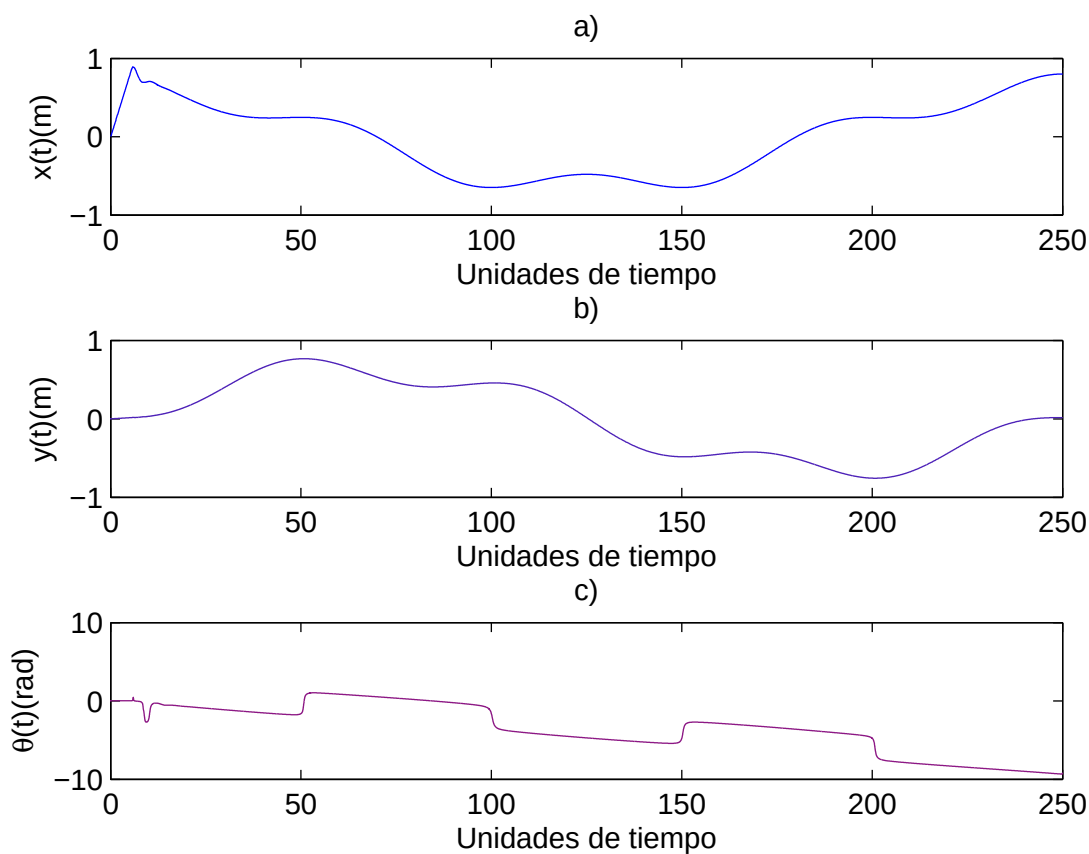


Figura 102: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

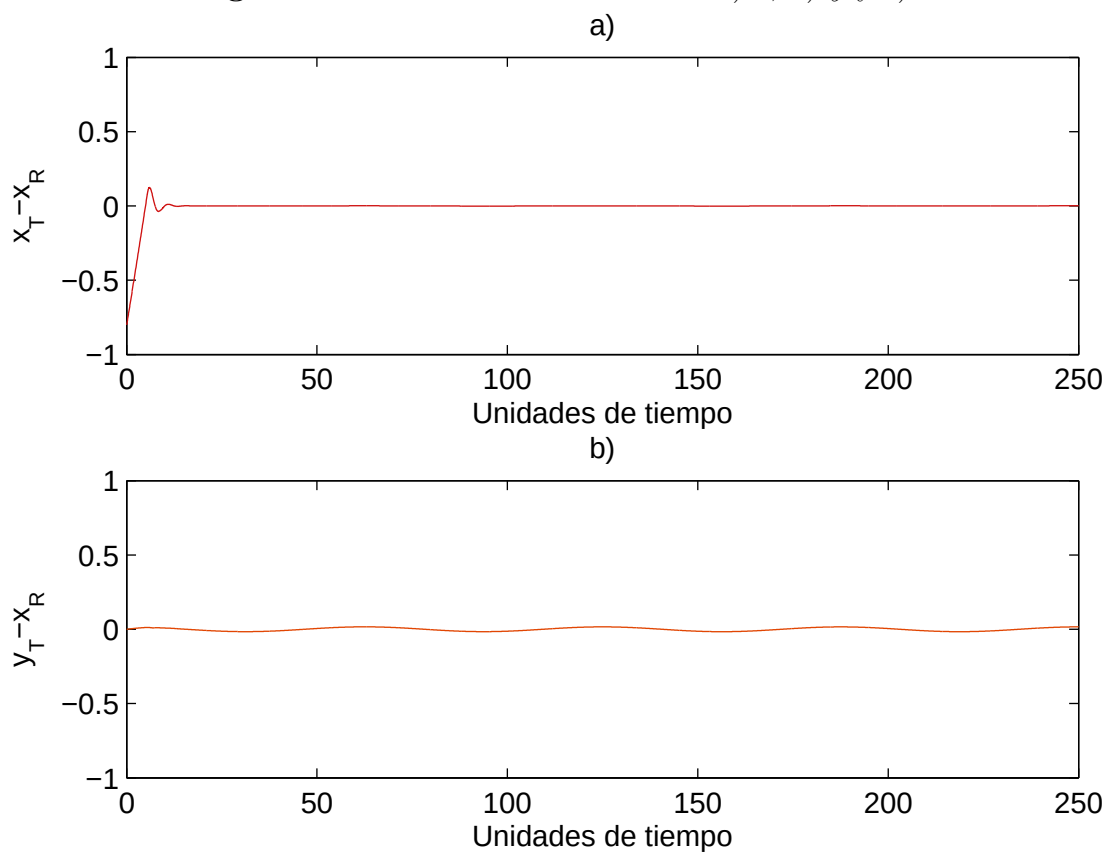


Figura 103: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

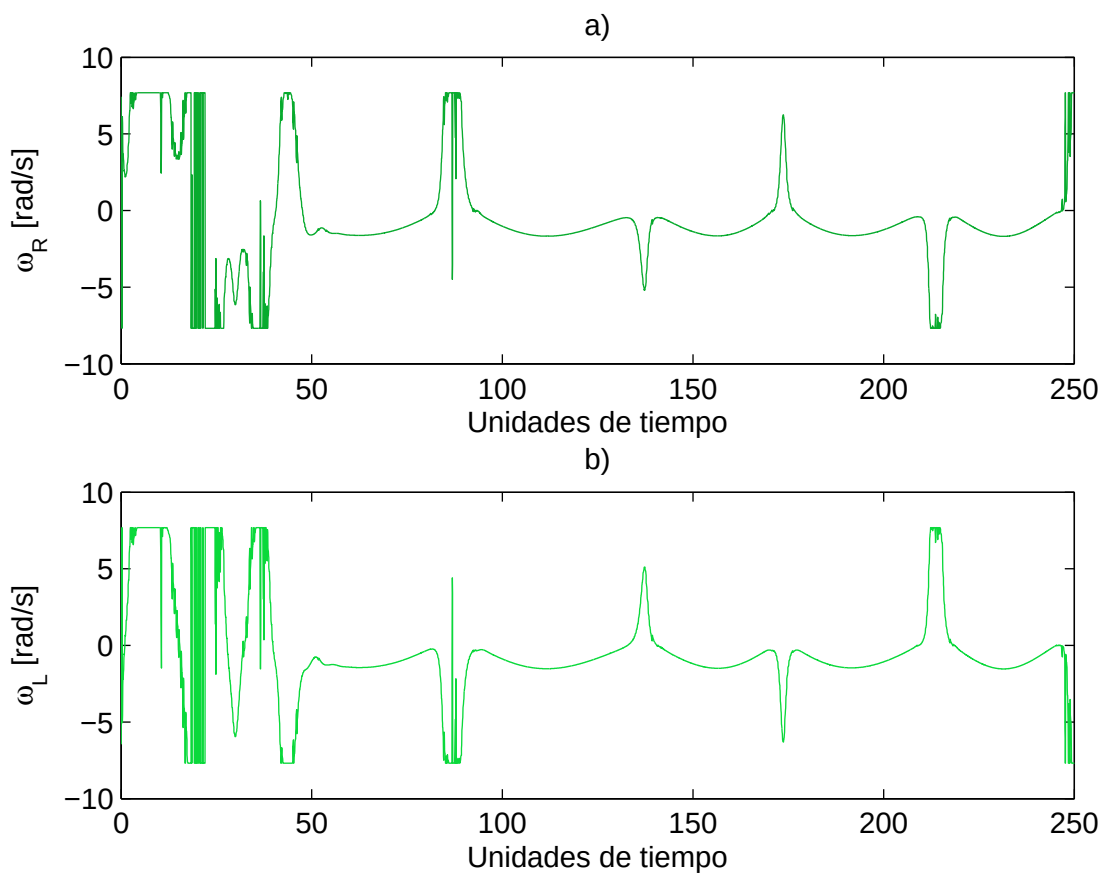


Figura 104: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

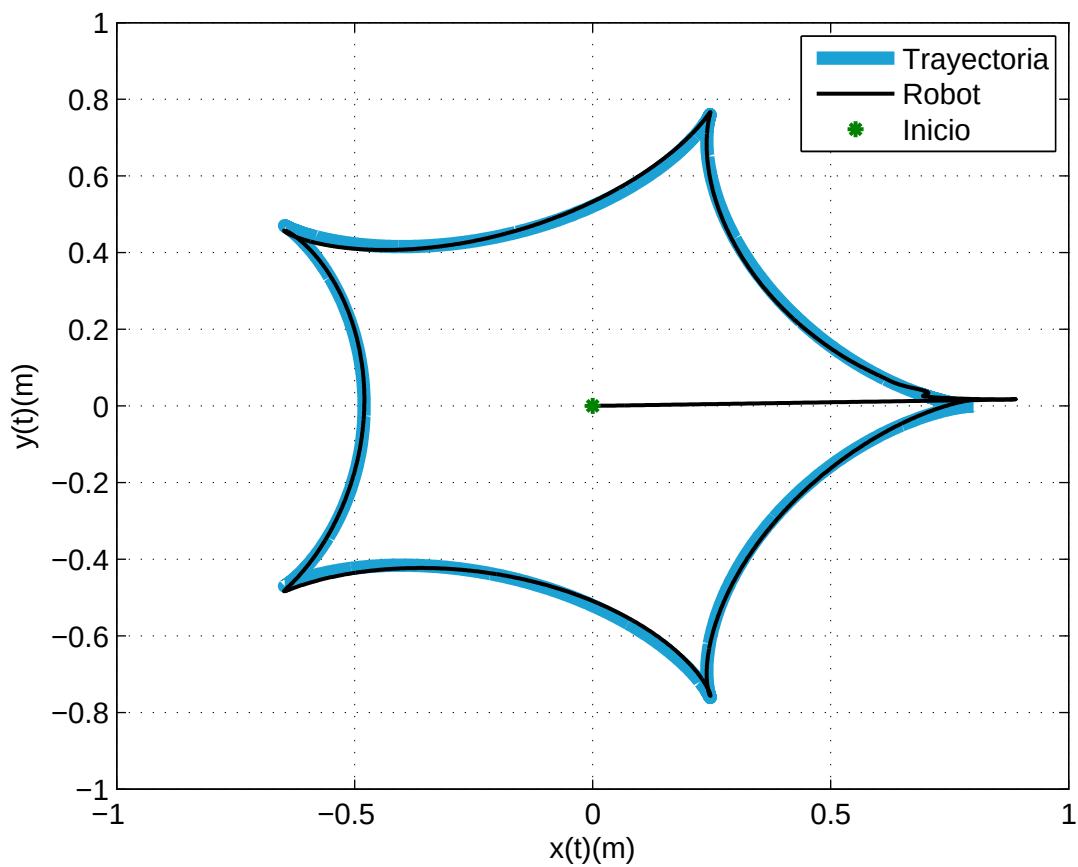


Figura 105: Trayectoria con la forma de hipocicloide - 5 puntas ($k=3$).

5.11.4 Hipocicloide con 10 puntas ($k=1.3333$)

Para la trayectoria hipocicloide con 10 puntas, se requiere una relación $k = 1.3333$, por lo que se han definido los parámetros $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.3$ y $f = \frac{2\pi}{150}$.

La figura 109, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. En ella se observa una trayectoria hipocicloide con 10 picos, con una forma parecida al sol. Se observa que el robot realiza un movimiento en línea recta para incorporarse a la trayectoria deseada en uno de sus vértices.

Las gráficas de la figura 106, muestran los desplazamientos realizadas por el robot móvil en cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. La gráfica a) de la figura 106, presenta un incremento muy pronunciado dentro de las primeras 10 unidades de tiempo, mientras que los desplazamientos en eje (y) son muy pequeños. En la gráfica c) de la figura 106, se identifican los cambios abruptos en el ángulo de orientación, producidos por el trazado de cada pico de la trayectoria hipocicloide.

Los errores iniciales mostrados en la figura 107, son aproximadamente $X_T - X_R = -1$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (1,0). El error disminuye a cero en 12 unidades de tiempo, cuando el robot se encuentra dentro de la trayectoria de 10 picos. El error en el eje (y), presenta ciertas oscilaciones, pero que no sugieren mayor problema para el correcto seguimiento de la trayectoria.

En la figura 108, se muestran las dinámicas de las velocidades angulares en el tiempo. Las gráficas de ω_R y ω_L , presentan picos que son consecuencia de la singularidad de $v = 0$, producto del trazado de cada uno de las puntas de la trayectoria deseada.

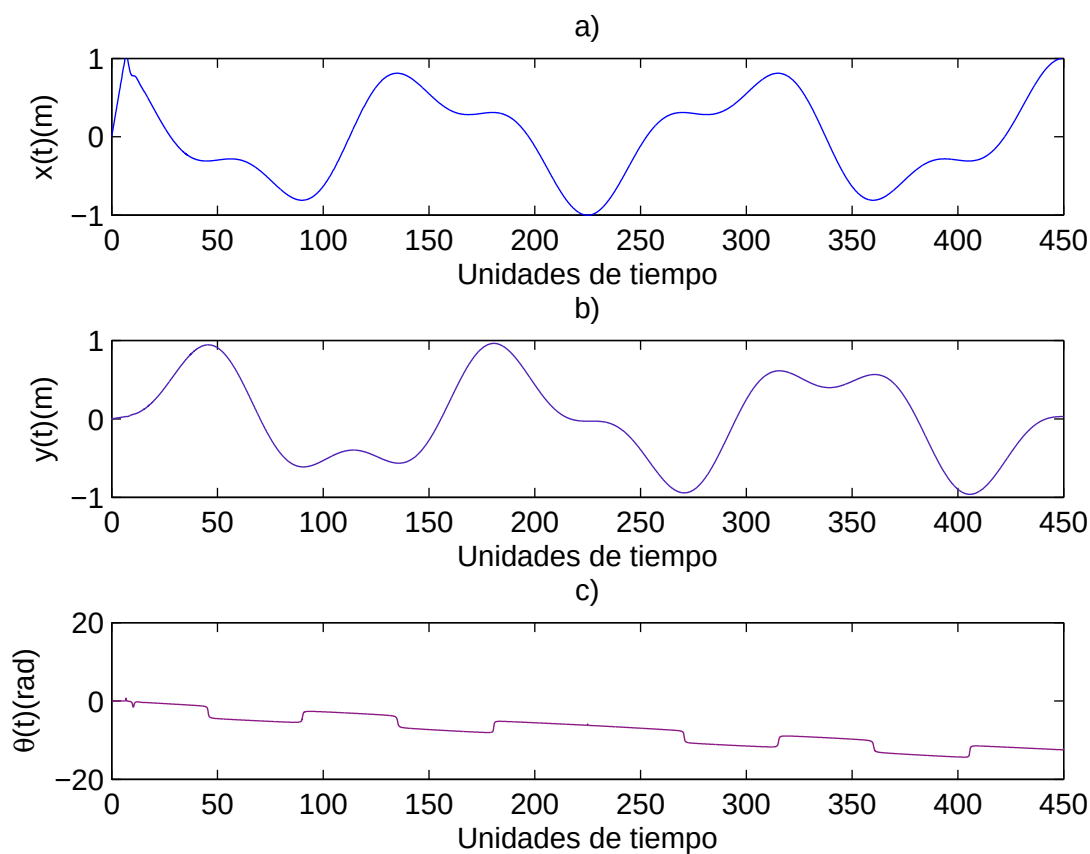


Figura 106: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

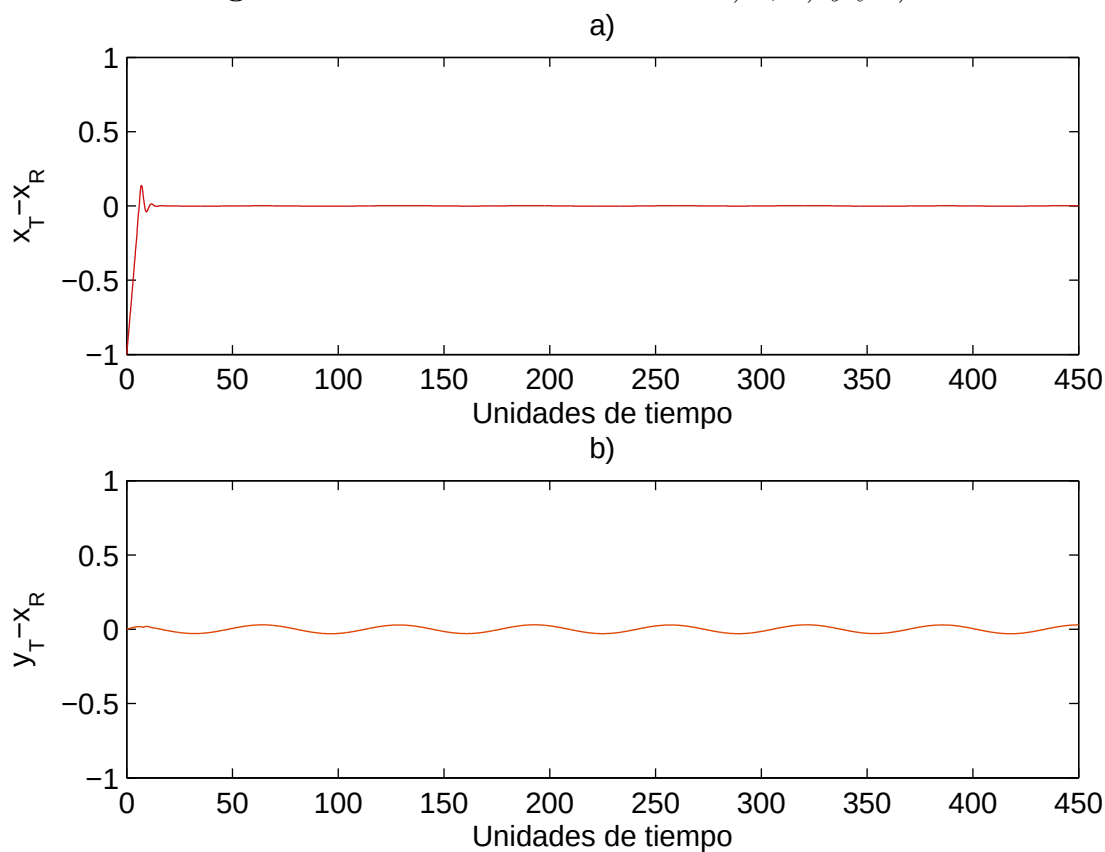


Figura 107: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

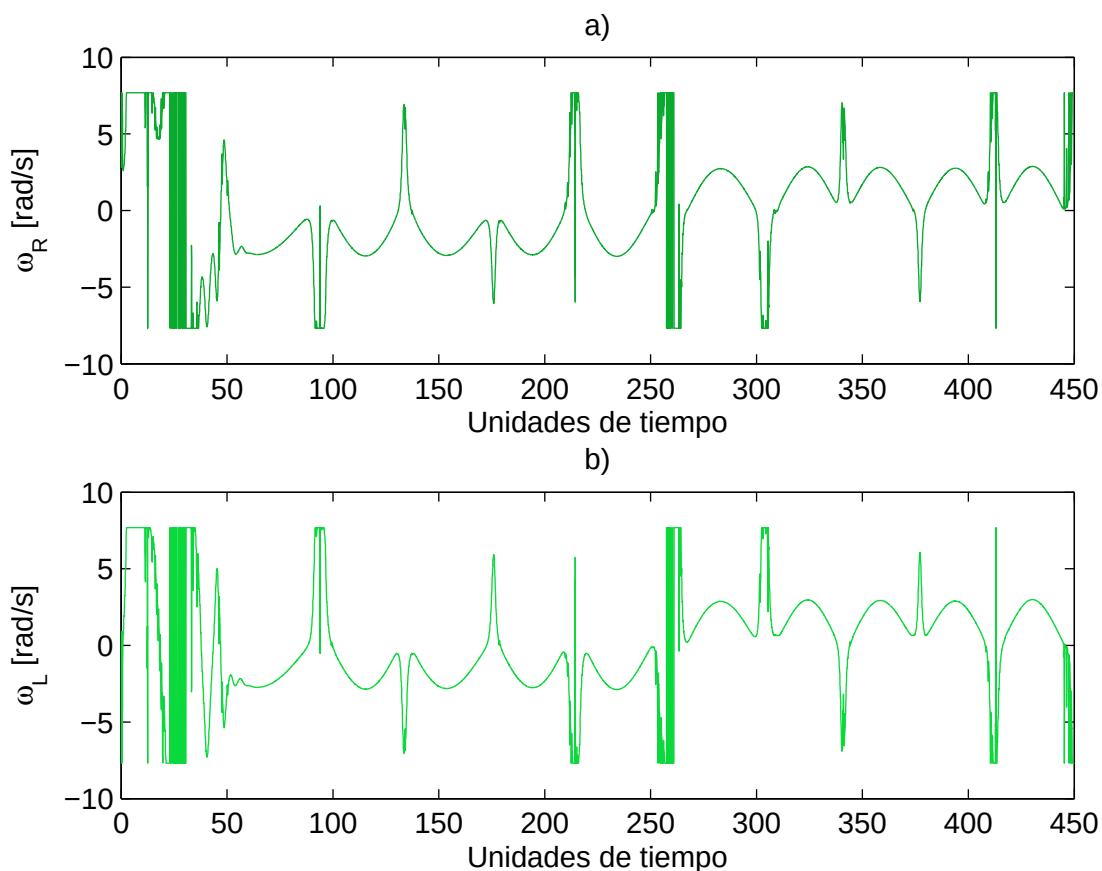


Figura 108: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

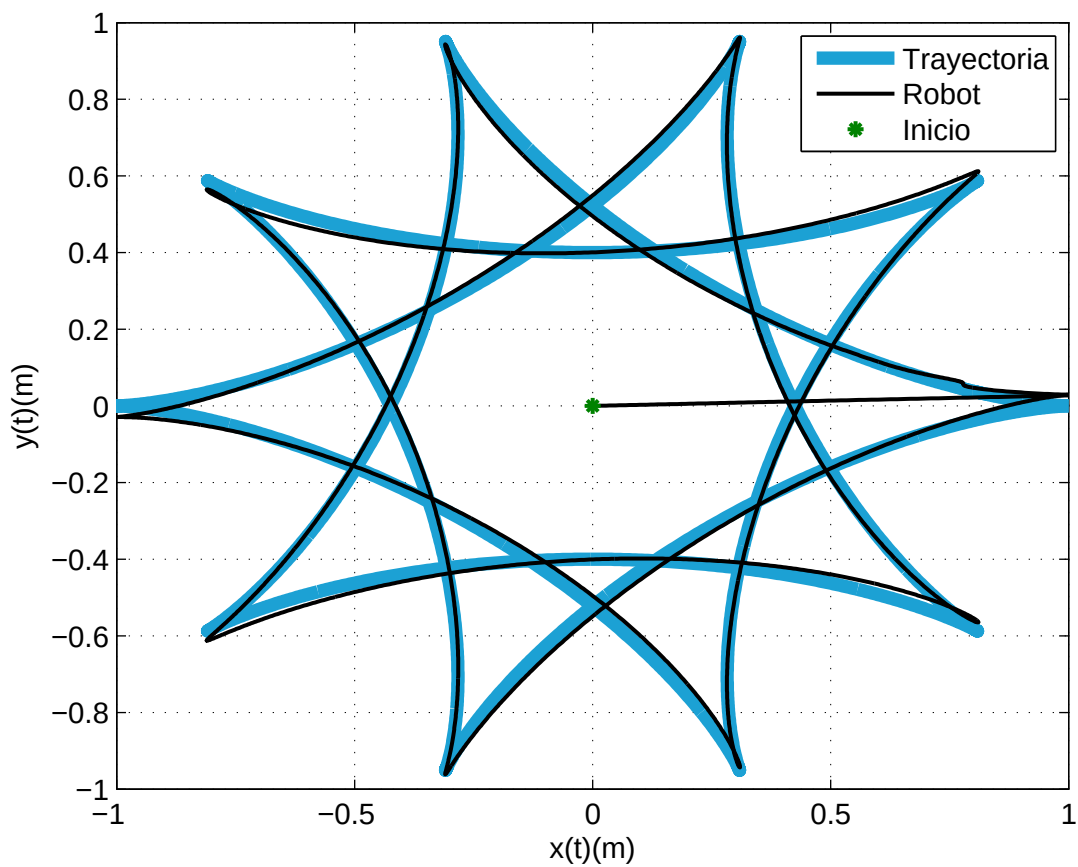


Figura 109: Trayectoria con la forma de hipocicloide - 10 puntas ($k=1.3333$).

5.12 Trayectoria con forma de órbitas

La trayectoria deseada con forma de órbitas se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d(t) = (r_1 - r_2) \cos(ft) + r_2 \cos((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$ y $Y_d(t) = (r_1 - r_2) \sin(ft) - r_2 \sin((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$, con los parámetros $r_1 = 0.16$, $r_2 = 0.4$, $f = \frac{2\pi}{100}$ y las ganancias $K_p = 3$ y $K_d = 3$

La figura 113, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil. En ella se observa una trayectoria formada por una serie de órbitas que rodean el punto central (0,0). Se identifica que el robot realiza un pequeño movimiento en línea recta para incorporarse a la trayectoria deseada.

Las gráficas de la figura 110, muestran los desplazamientos realizados por el robot en cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. Analizando detenidamente las gráficas a) y b) de la figura 110, se encuentra que las primeras 4 unidades de tiempo muestran el movimiento en línea recta hecho por el robot, para entrar a la trayectoria de las órbitas. En la gráfica c) de la figura 110, se observan cambios muy sutiles en el ángulo (θ), los cuales corresponden a las curvas exteriores de la trayectoria deseada.

El error inicial mostrado en la figura 111, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.15$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.15,0). Puesto que el robot se encuentra muy cerca de la trayectoria de las órbitas, le toma muy pocas unidades de tiempo entrar a ella. La gráfica b) de la figura 111, muestra una oscilación en el error para el eje (y), el cual a pesar de ser notable, no presenta un mayor problema en el seguimiento de la trayectoria.

La figura 112, muestra la dinámica de las velocidades angulares en el tiempo. Los valles de las dinámicas de ω_R y ω_L , corresponden a las velocidades que el robot utiliza para trazar las curvas más cerradas de las órbitas. Mientras que los incrementos y crestas pertenecen a las curvas abiertas de la trayectoria deseada.

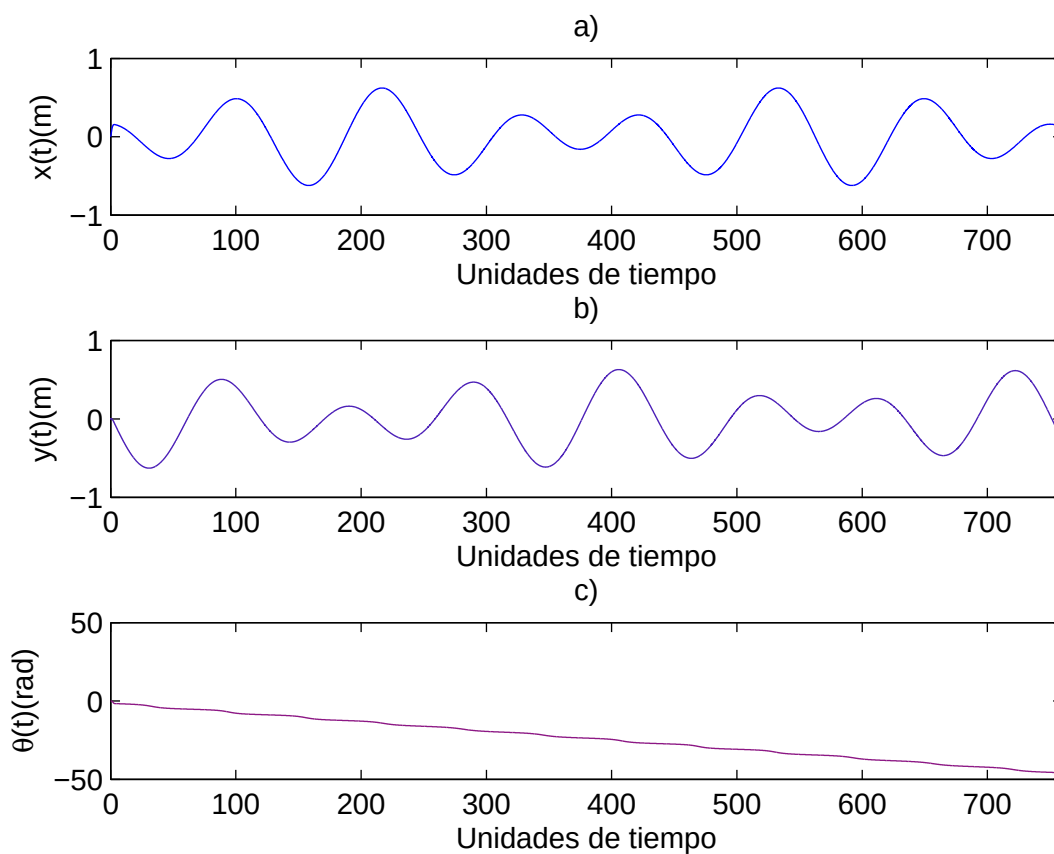


Figura 110: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

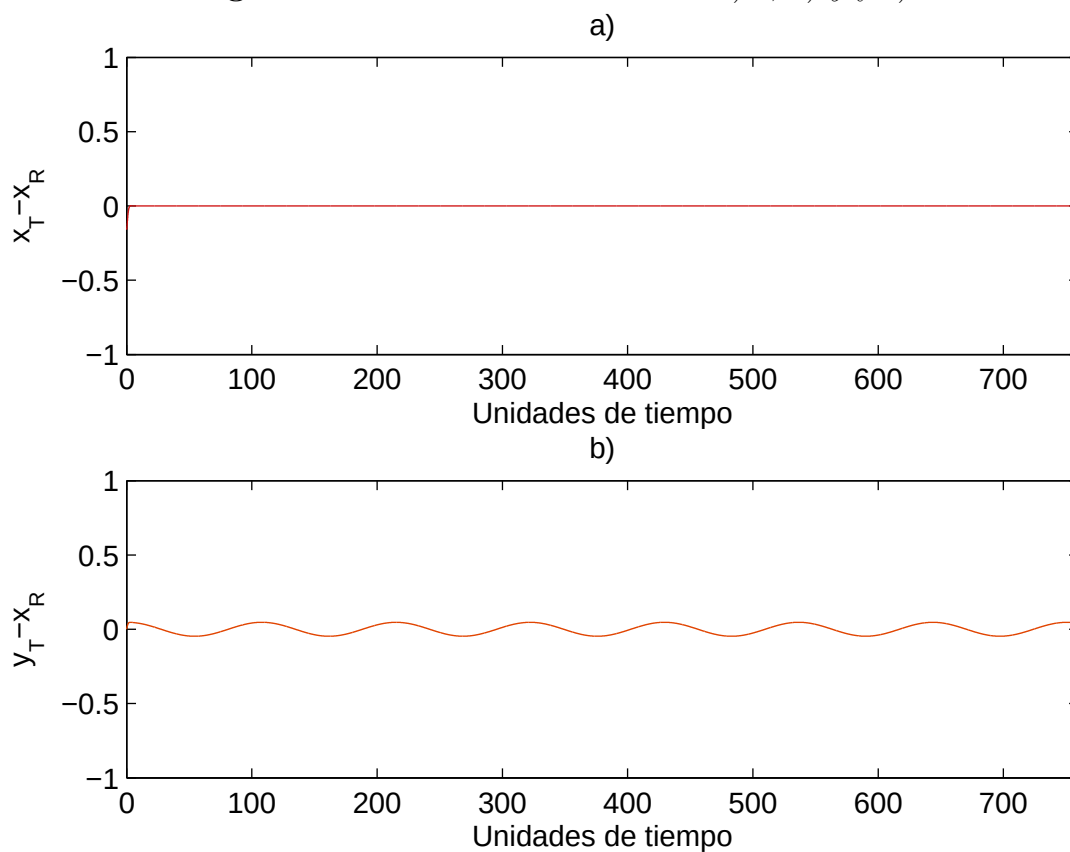


Figura 111: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

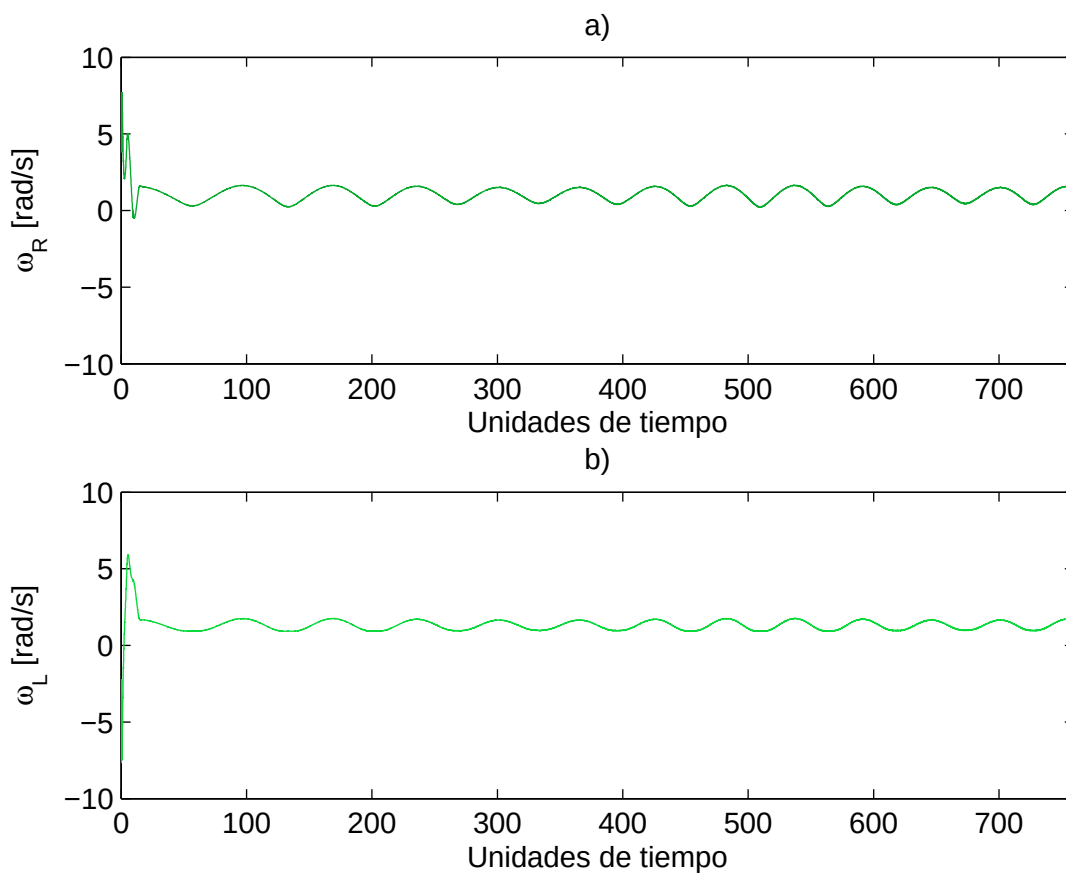


Figura 112: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

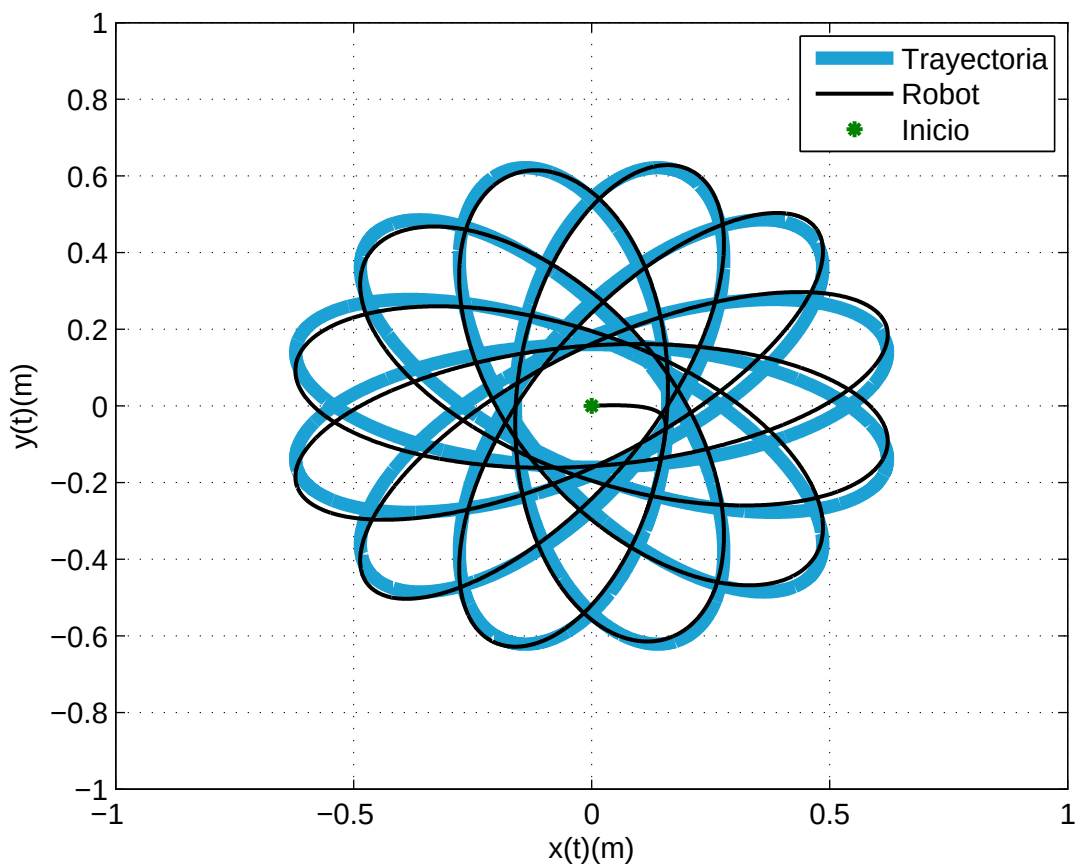


Figura 113: Trayectoria con la forma de órbitas.

5.13 Trayectorias especiales

5.13.1 Pescado

La trayectoria deseada con forma de pescado, se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d = s(\cos(af t) + \cos(bft)^j) - 0.5$ y $Y_d = s(\sin(cft) - \sin(dft)^k)$, con los parámetros $a = b = c = d = 1$, $j = 2$, $k = 7$, $s = 0.5$, $f = \frac{2\pi}{120}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 3$.

La figura 117, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. En ella se puede observar una trayectoria justamente con la forma de un pescado, donde el robot parte de su posición inicial para incorporarse a dicha trayectoria con un movimiento en línea curva.

Las gráficas de la figura 114, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado, así como su ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. Dentro de las primeras 10 unidades de tiempo en las gráficas a) y b) de la figura 114, se observan los desplazamientos en los ejes (x, y) del movimiento de incorporación a la trayectoria deseada. En la gráfica c) de la figura 114, se presentan cambios sutiles y abruptos en el ángulo (θ), los cuales corresponden a las curvas abiertas y cerradas trazadas, respectivamente.

Las gráficas de error de la figura 115, muestran un error inicial de aproximadamente $X_T - X_R = -0.5$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.5,0). Una vez el robot alcanza la trayectoria del pescado, el error en el eje (x) disminuye a cero.

Las dinámicas de las velocidades angulares se muestran en la figura 116. Donde después de la etapa de transición se observan pequeños picos en ambas gráficas, 2 de ellos entre 50-60 y 85-90 unidades de tiempo, los cuales corresponden a las curvas cerradas que se encuentran en la parte de la cola de la trayectoria deseada.

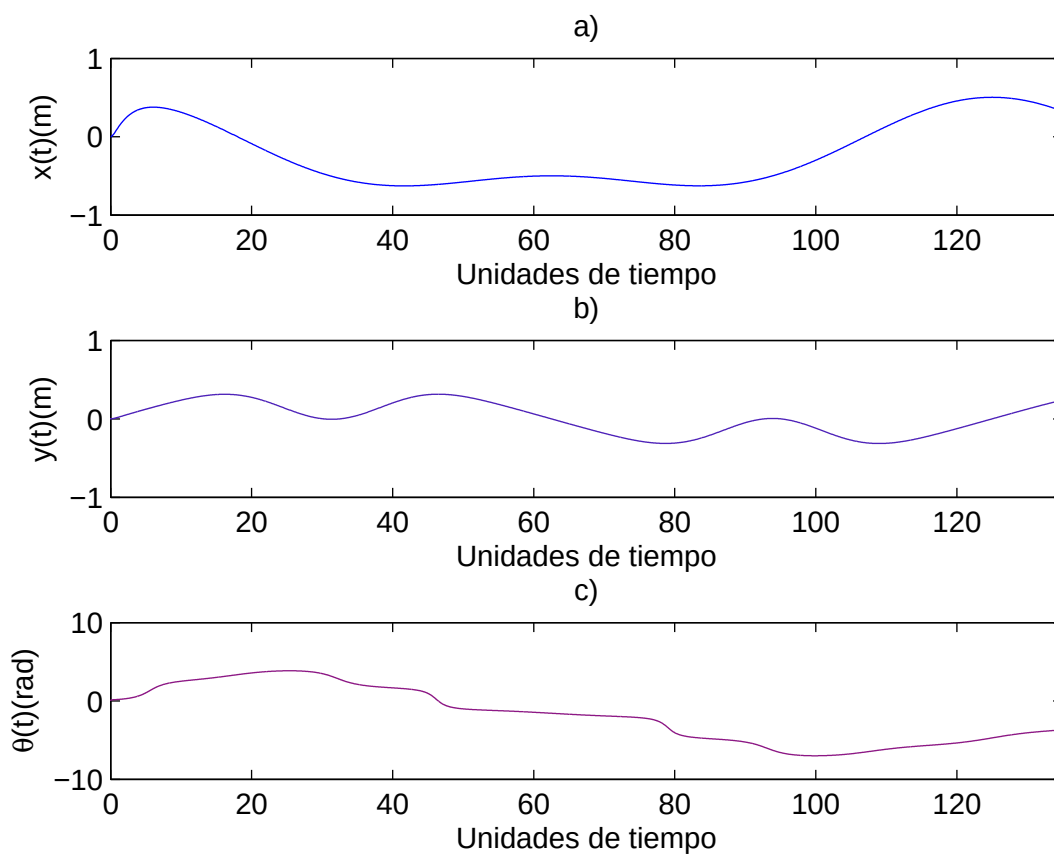


Figura 114: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

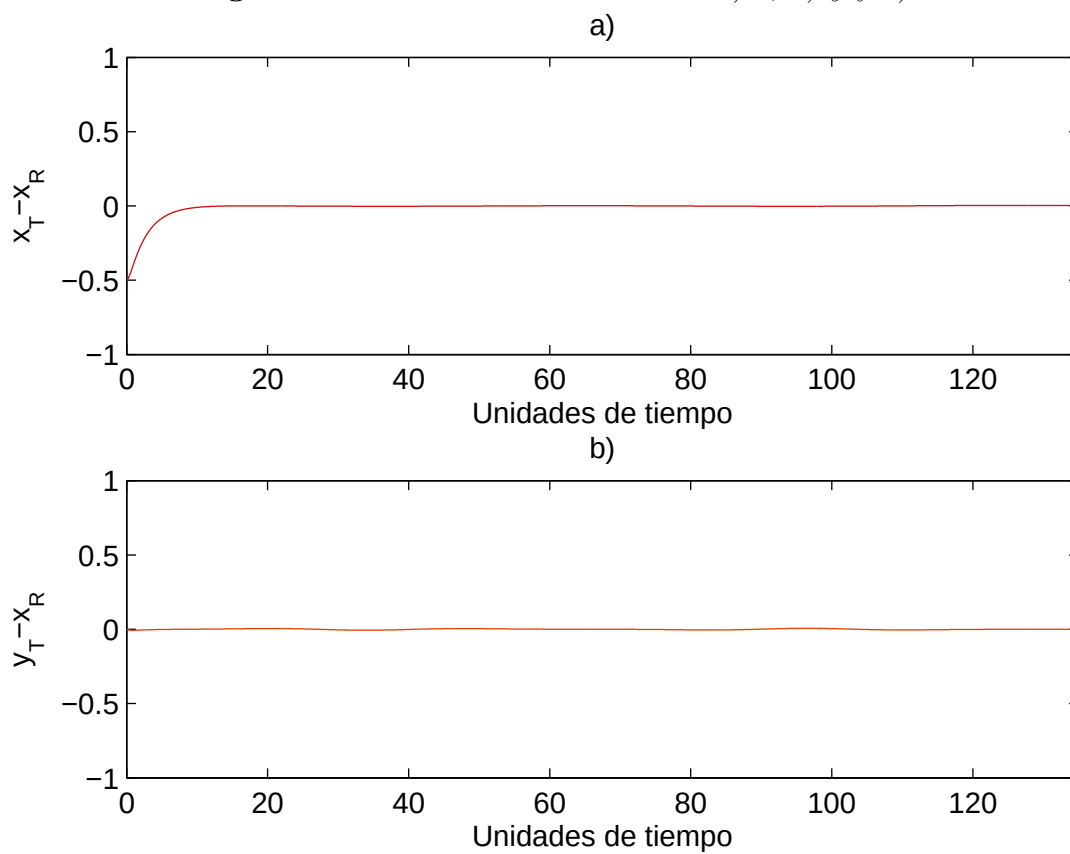


Figura 115: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

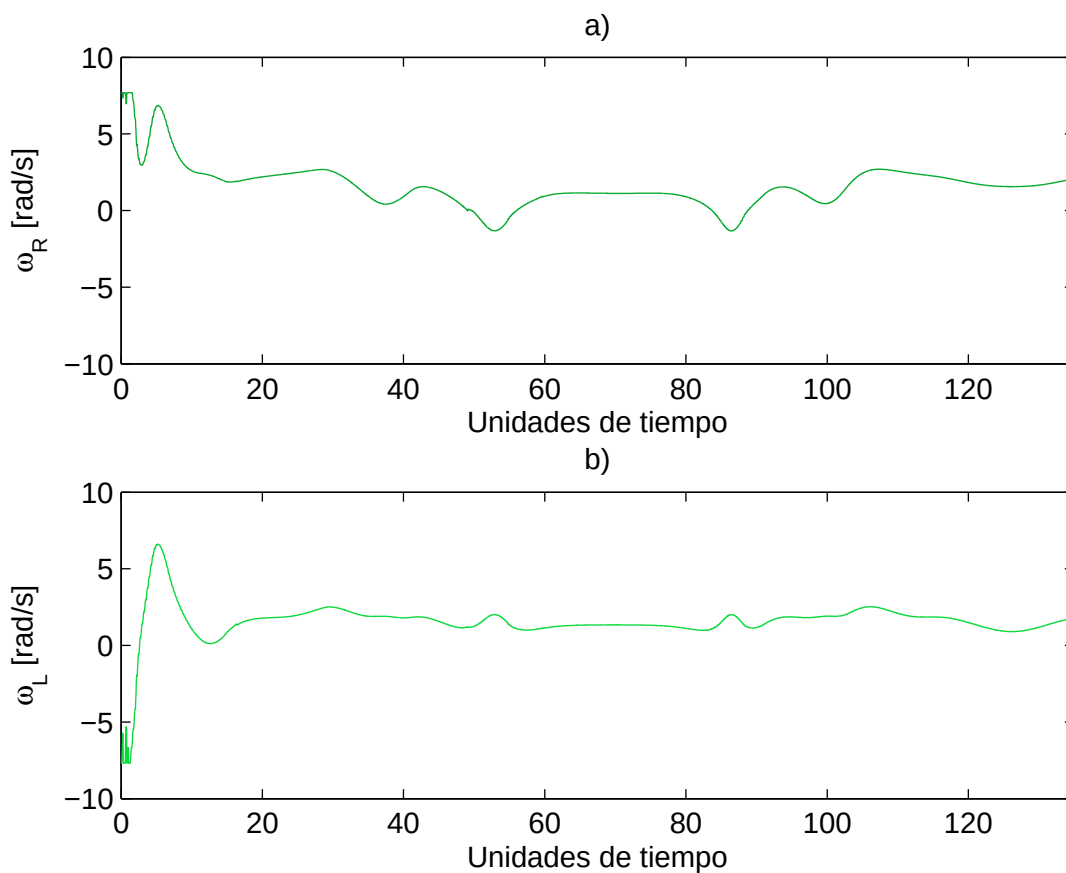


Figura 116: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

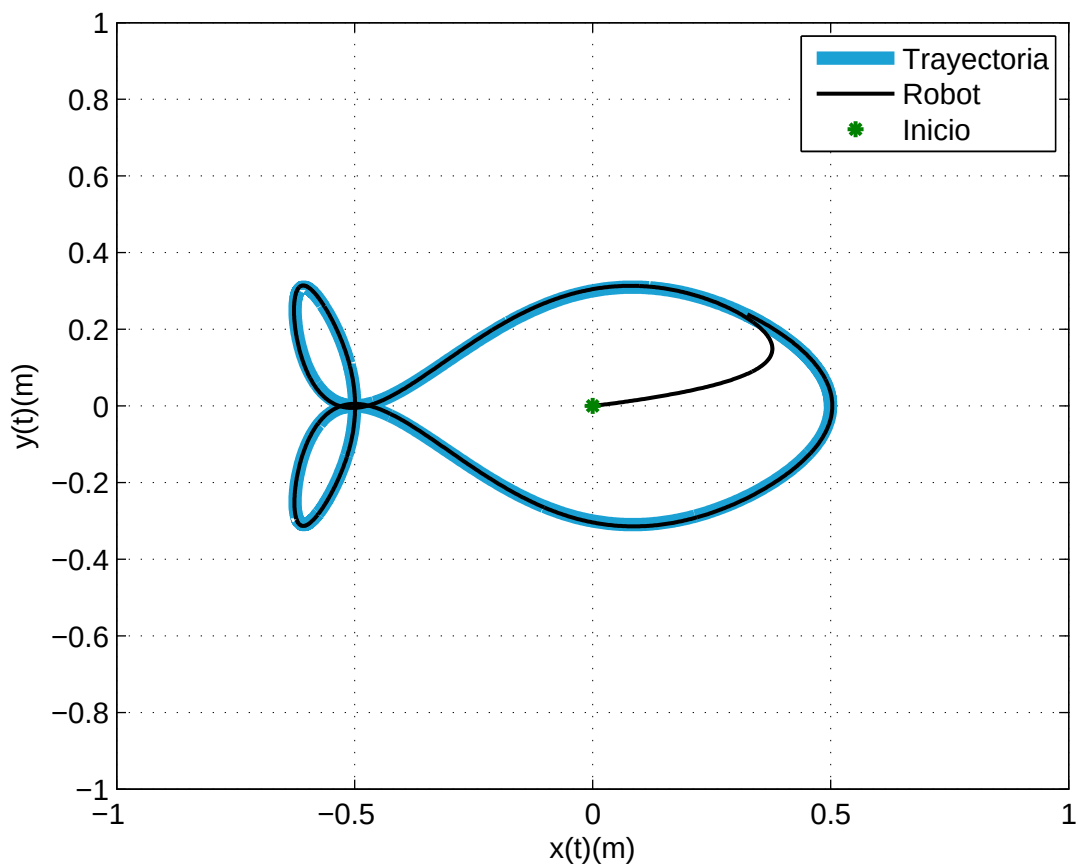


Figura 117: Trayectoria con la forma de pescado.

5.13.2 Elefante

La trayectoria deseada con forma de elefante, está definida por las ecuaciones: $X_d = s(\cos(aft) + \cos(bft)^j)$ y $Y_d = s(\sin(cft) - \sin(dft)^k) + 0.2$, con los parámetros $a = d = 1$, $b = c = j = 3$, $k = 2$, $s = 0.4$, $f = \frac{2\pi}{300}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 4$.

La figura 121, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil. Donde se observa una trayectoria con la forma de la cabeza de un elefante y como el robot traza una curva, partiendo del punto (0,0) hacia la oreja derecha para incorporarse a la trayectoria elefante.

Las gráficas de la figura 118, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil para cada eje coordenado, así como el ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. Dentro de las primeras 20 unidades de tiempo, se observa en las gráficas a) y b) de la figura 118, los desplazamientos realizados en el movimiento de incorporación por parte del robot. Analizando detalladamente la gráfica c) de la figura 118, se encuentra que el primer cambio abrupto en el ángulo (θ), se presenta en 20 unidades de tiempo, el cual corresponde al trazado del vértice en el que el robot entra a la trayectoria deseada.

El error inicial mostrado en la figura 119, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = -0.2$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.5,0.2). El error en ambos ejes se ve reducido a cero, en 20 unidades de tiempo, cuando el robot se encuentra dentro de la trayectoria con forma de elefante.

La dinámica de las velocidades angulares se muestra en la figura 120, donde se observa una dinámica un tanto compleja para ω_R y ω_L . Si se desea un análisis detallado de las dinámicas, basta con identificar en las gráficas a) y b) de la figura 118 el intervalo de tiempo del desplazamiento de interés y luego ubicar su dinámica de velocidad en los mismos intervalos.

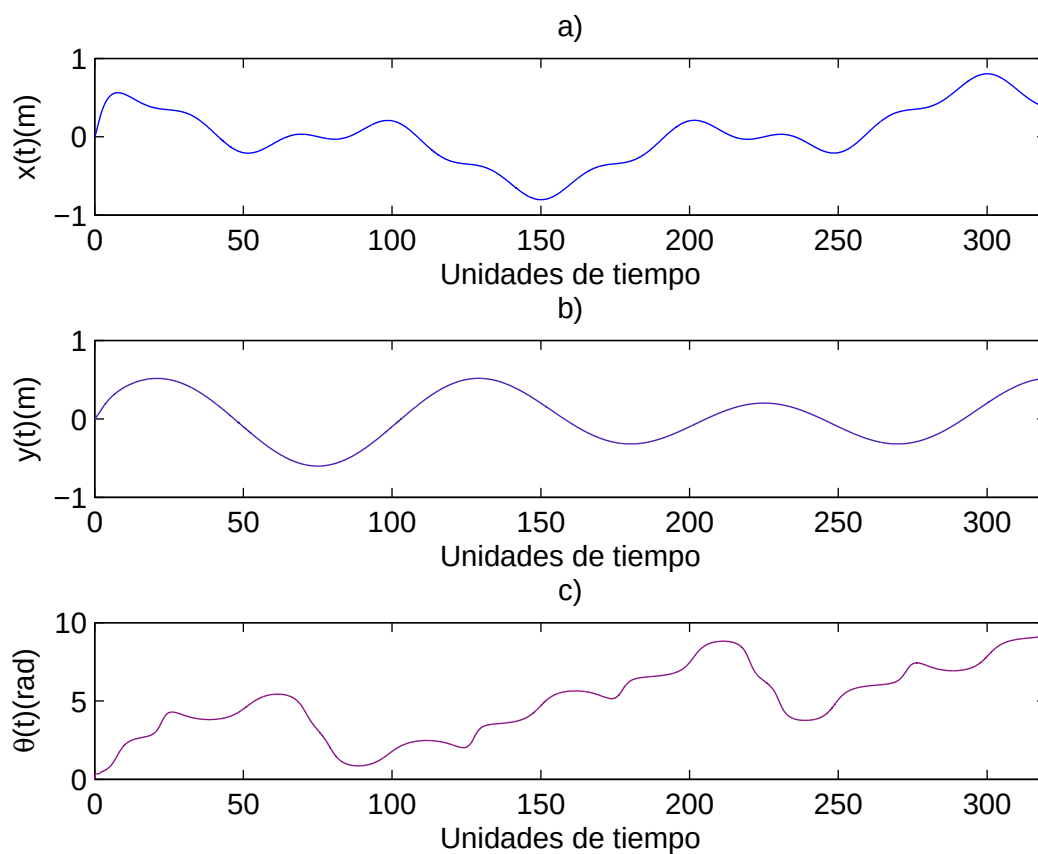


Figura 118: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

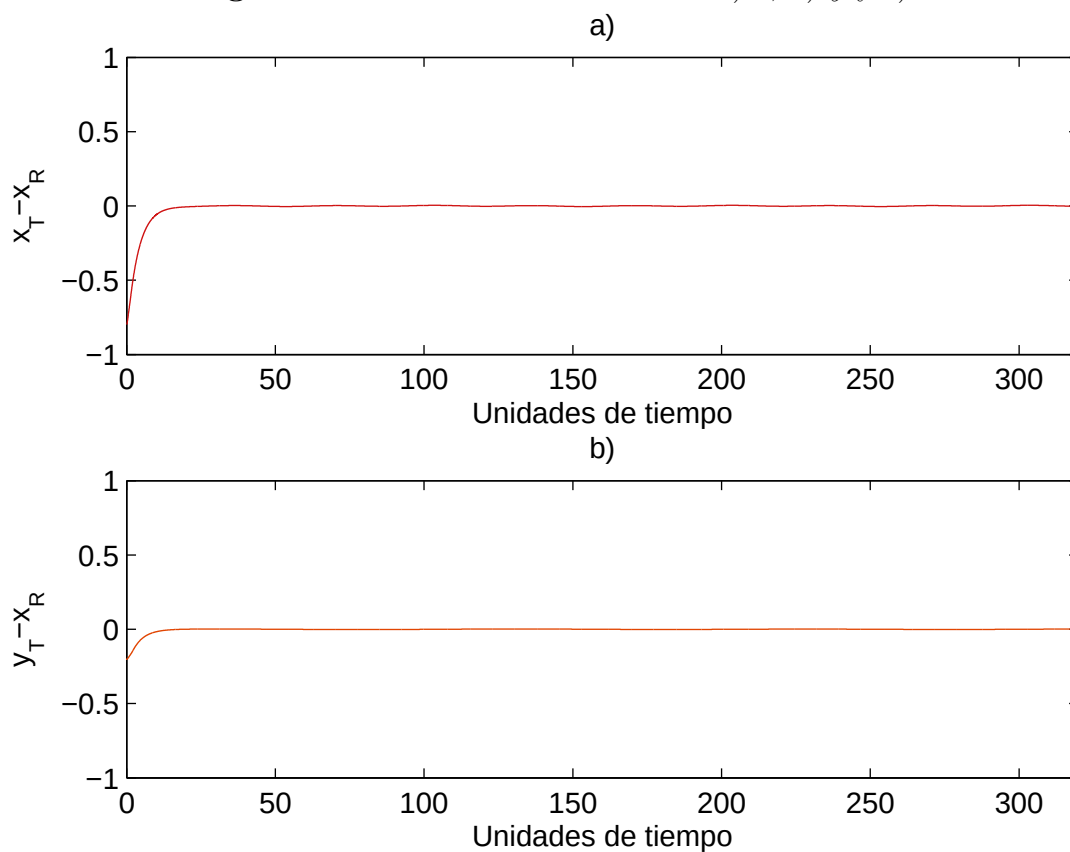


Figura 119: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

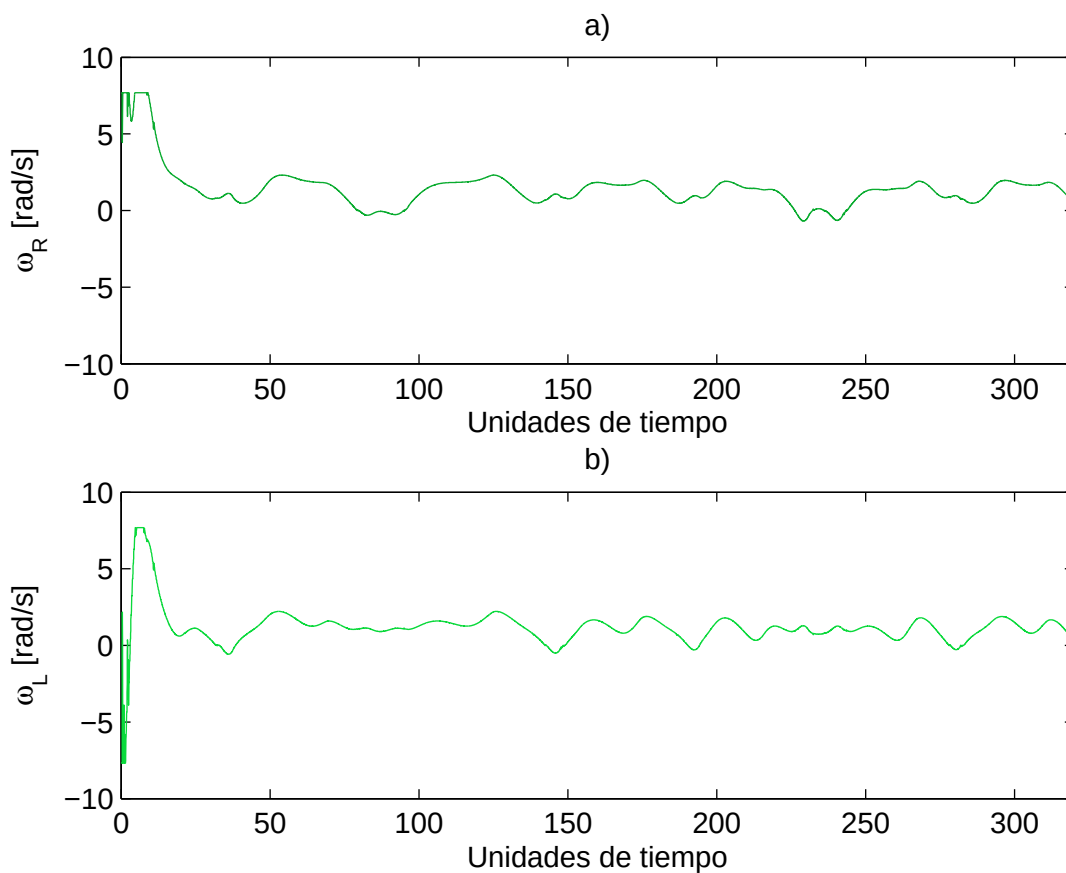


Figura 120: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

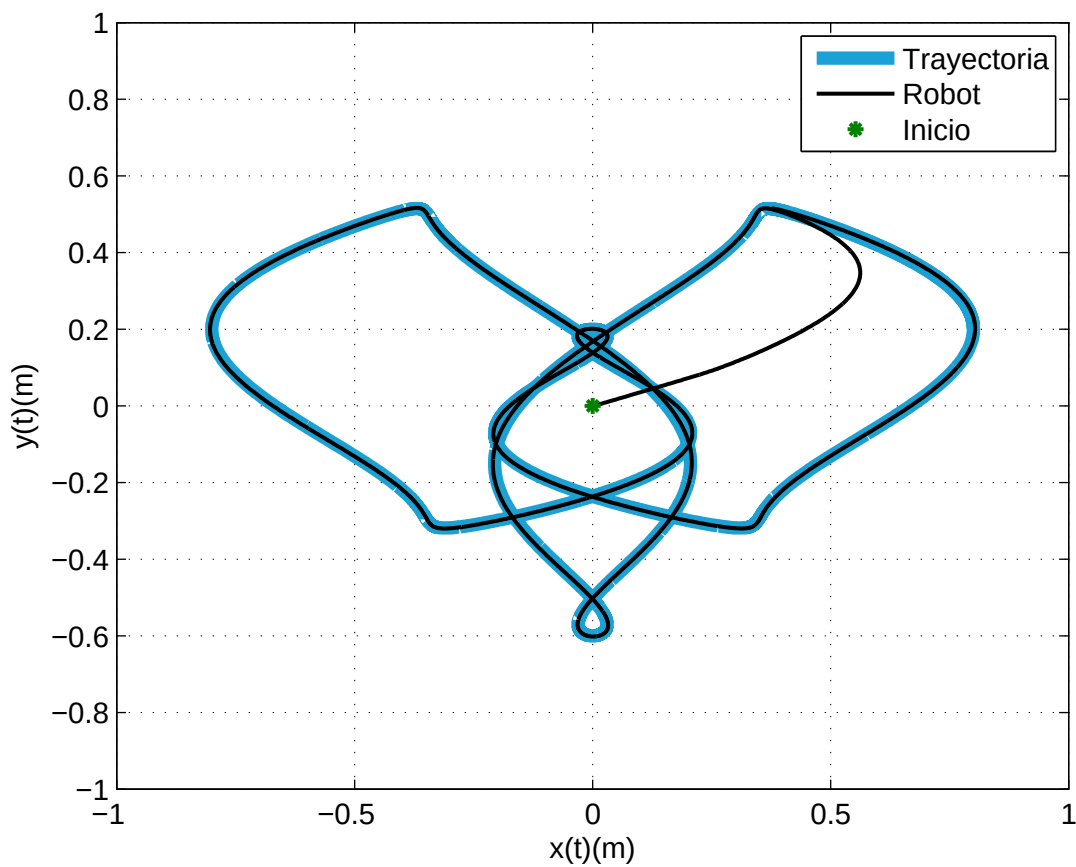


Figura 121: Trayectoria con la forma de elefante.

5.13.3 Zorro

La trayectoria deseada con forma de zorro se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d = s(\cos(aft) - \cos(bft)^j)$ y $Y_d = s(\sin(cft) - \sin(dft)^k) + 0.4$, los parámetros $a = d = 1$, $b = c = j = 3$, $k = 2$, $s = 0.4$, $f = \frac{2\pi}{400}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 3$.

La figura 125, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot. En ella se observa una trayectoria similar a la forma de una cabeza de zorro con sus dos características orejas. A diferencia de las trayectorias anteriores, el movimiento de incorporación, es un desplazamiento en línea recta en el eje (y).

Las gráficas de la figura 122, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado, así como su ángulo de orientación (θ) a lo largo del tiempo. La gráfica b) de la figura 122, muestra un incremento pronunciado dentro de las primeras 10 unidades de tiempo. Mientras que la gráfica a) de la figura 122, comienza su incremento hasta las 8 unidades. En la gráfica c) de la figura 122, se observan cambios repentinos en el ángulo (θ) producidos por el trazado de los picos de las orejas y las curvas que forman la cabeza de la trayectoria con forma de zorro.

El error inicial en la figura 123, es aproximadamente $X_T - X_R = 0$ y $Y_T - Y_R = -0.4$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0,0.4). Una vez el robot empieza su desplazamiento, el error para el eje (y) disminuye hasta 0 en 10 unidades de tiempo.

La figura 124, muestra la dinámica de las velocidades angulares en el tiempo. En ella se observa que después de la etapa de transición, se presenta el primer pico correspondiente al trazado de la punta superior de la oreja derecha. Los 3 picos restantes, pertenecen al recorrido de la segunda punta en la oreja derecha y las dos puntas de la oreja izquierda. Los valles observados en 110 y 320 unidades de tiempo, corresponden a las velocidades angulares que permiten al robot trazar las curvas inferior y superior de la trayectoria zorro.

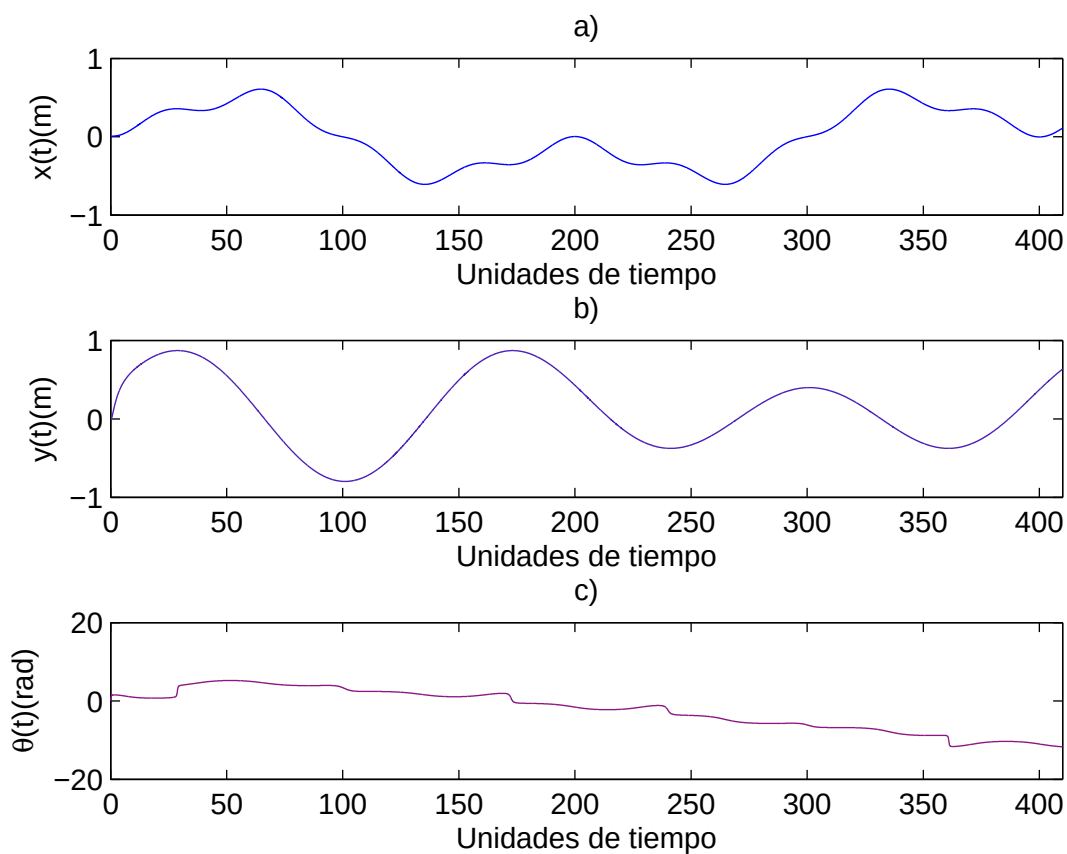


Figura 122: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

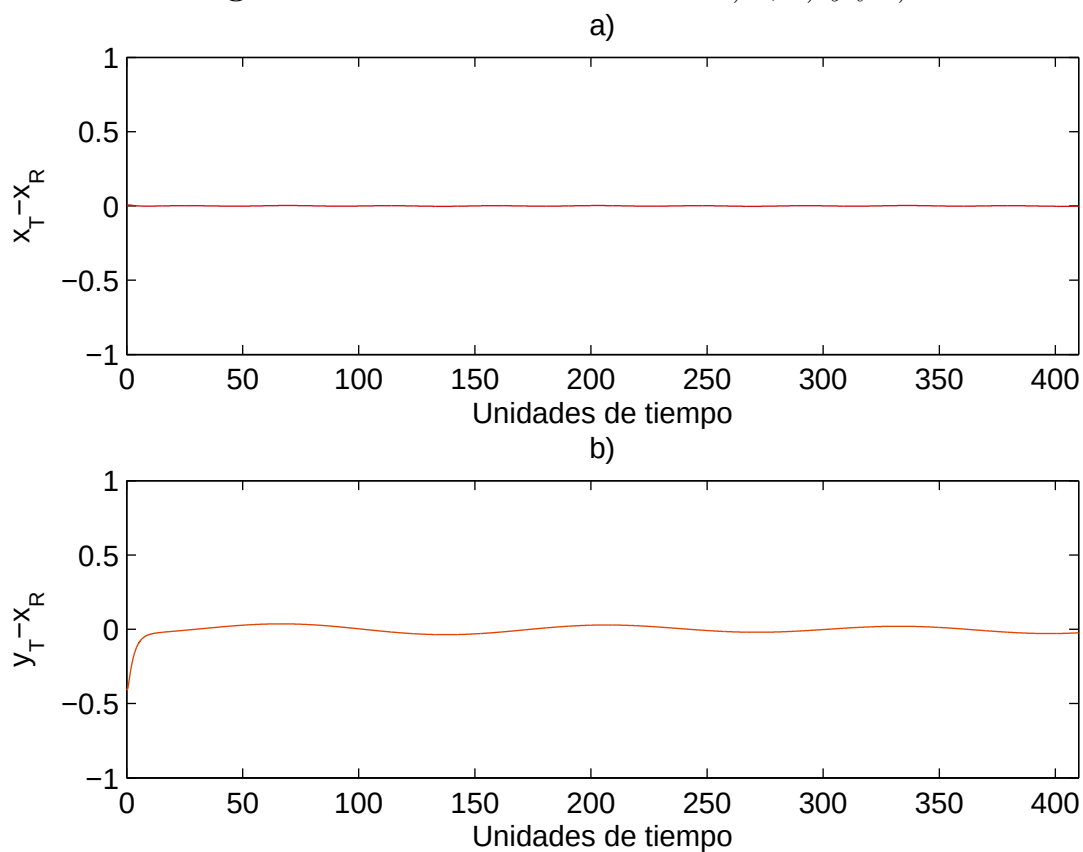


Figura 123: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

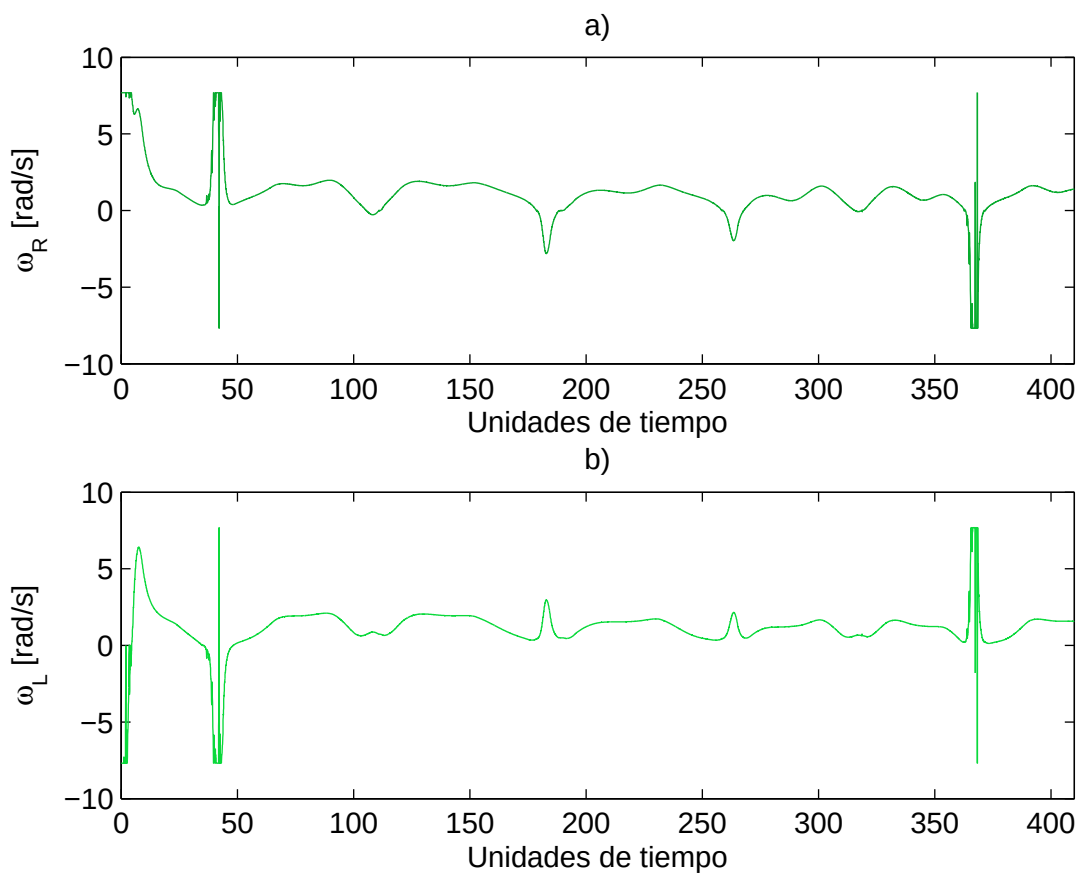


Figura 124: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

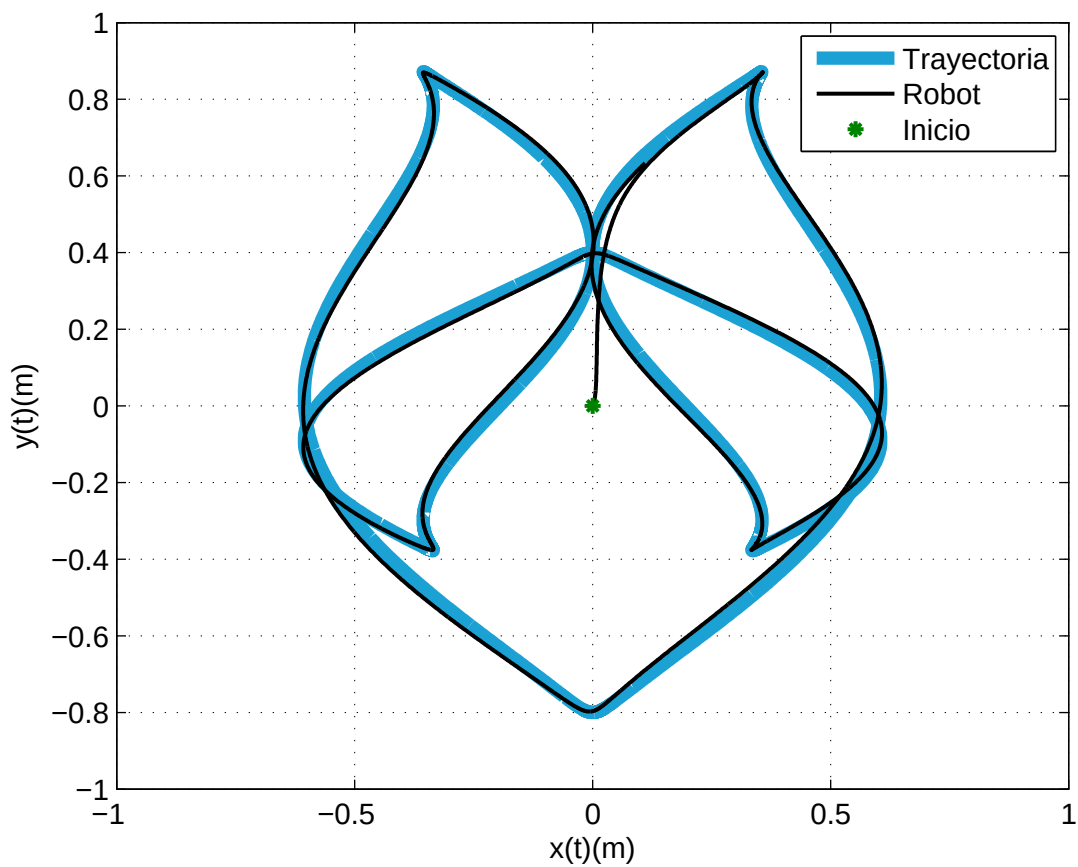


Figura 125: Trayectoria con la forma de zorro.

5.14 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se han presentado las herramientas y la metodología empleada para la simulación tanto de los movimientos básicos como de la asignación de trayectorias al robot móvil diferencial, de la misma manera se ha dado explicación de la información necesaria para comprender el principal objetivo de este trabajo de tesis que es la asignación de trayectorias a un robot móvil diferencial. Se ha demostrado a manera de simulación que el comportamiento del robot móvil depende de la velocidad en sus ruedas, y que aplicando una ley de control a éstas, se ha de lograr la tarea de seguimiento de trayectorias, como se presenta en este capítulo y en los posteriores. Además se ha encontrado que las ganancias de la ley de control dependen de la frecuencia utilizada para formar la trayectoria y que una correcta definición de ellas, producirá un seguimiento de trayectoria exitoso.

Capítulo 6

Khepera III y OptiTrack

En este capítulo, se presenta y describen las herramientas y equipo de laboratorio necesarios para la realización de la implementación experimental, así como la información necesaria acerca del protocolo TCP/IP, el cual se usa para la comunicación de Matlab con el robot Khepera III.

6.1 Equipo de laboratorio

El equipo de laboratorio utilizado para la implementación experimental de este trabajo es una computadora con software: Matlab, optitrack-motive y puTTY, 1 router, 1 robot Khepera III (con tarjeta wifi), 8 cámaras optitrack flex 3 y la infraestructura ubicada en el laboratorio de sincronización y sistemas complejos del departamento de Electrónica y Telecomunicaciones de CICESE.

6.2 Khepera

El Khepera es un robot móvil compacto que pertenece a línea de robots diseñados y fabricados por la compañía suiza K-Team, la cual desarrolla robots móviles de alta calidad que se han convertido en estándares en el ámbito de la investigación. En la figura 126, se observa la vista general de este robot móvil diferencial [30]. En ella se puede identificar cada una de las partes principales de comunicación que lo conforman, como lo son sus sensores y puertos.

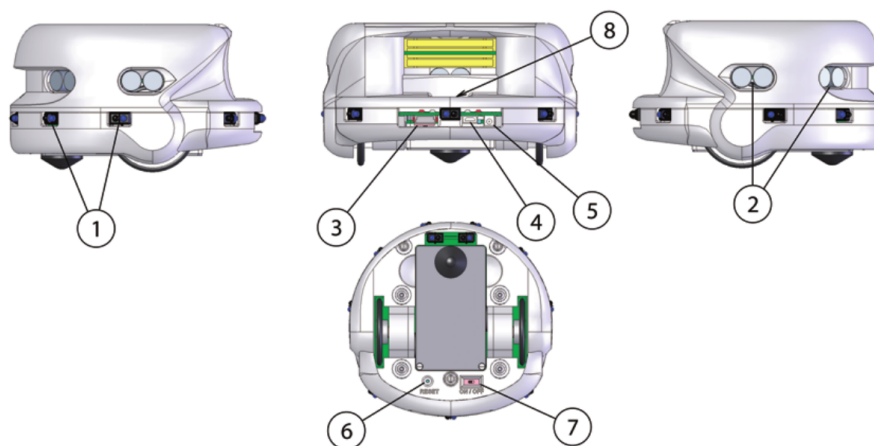


Figura 126: Vista general del robot Khepera III. 1)Sensores infrarrojos, 2)Sensores ultrasónicos, 3)Puerto serial, 4)Puerto USB miniAB, 5)Conector para cargador, 6)Reset, 7)On/Off, 8)Puerto para cable desenrollable (serial/cargador).



Figura 127: Vista física del robot Khepera III.

En la figura 127, se presenta el robot Khepera III utilizado en este trabajo de tesis, el cual pertenece al laboratorio de sincronización y sistemas complejos. A este robot Khepera III le corresponde la dirección IP 192.168.0.104, empleada para la comunicación con él mediante el protocolo TCP/IP, es por ello que ha sido marcado para identificarlo entre el grupo de Kheperas del laboratorio. Sobre él se observan 4 bolitas plateadas, los cuales son los marcadores captados por las cámaras Optitrack para el seguimiento de los movimientos del robot.

6.3 Motive y cámaras OptiTrack

Motive es un software diseñado para controlar los sistemas de captura de movimiento en diversas aplicaciones de seguimiento, permite que los datos capturados por las cámaras Optitrack puedan ser guardados y/o transmitidos en tiempo real a otros dispositivos. Mediante las cámaras, Motive obtiene la posición y orientación de marcadores o cuerpos rígidos (formados por marcadores), realizando una reconstrucción al compilar múltiples imágenes 2D obtenidas de los marcadores, lo que permite el seguimiento de movimientos complejos en el espacio 3D.

6.4 TCP/IP

TCP/IP: “Protocolo de control de transmisión/Protocolo de Internet”, es un conjunto de protocolos usados para interconectar los dispositivos de una red en internet, también puede ser utilizado en una red privada. Representa todas las reglas de comunicación para Internet; la manera en que la información es intercambiada, como es dividida en paquetes, dirigida, transmitida, enrutada y recibida. Los principales protocolos sirven a funciones específicas, TCP determina como las aplicaciones pueden crear canales de comunicación a través de una red. IP define como dirigir y enrutar cada paquete, para asegurar que llegue al destino correcto asigna a cada equipo conectado a la red una dirección IP diferente y determina donde debe ser entregada la información.

6.5 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se han presentado y descrito las herramientas necesarias para realizar la implementación experimental de este trabajo de tesis. Se describió el equipo de laboratorio, el robot móvil diferencial a utilizar, así como el software y conjunto de protocolos a emplear para la correcta comunicación entre Matlab-Optitrack-Khepera.

Capítulo 7

Implementación Experimental

En este capítulo, se aborda la implementación experimental realizada para verificar los resultados obtenidos en cada una de las simulaciones presentadas en el capítulo 5. De la misma forma se describen la metodología empleada y algunas resoluciones a los inconvenientes provocados por las diferencias que existen entre una simulación y su implementación. Finalmente, los datos obtenidos en cada uno de los casos son presentados de manera gráfica con su correspondiente explicación.

7.1 Metodología para la implementación experimental

En la figura 128, se observa el diagrama a bloques que resume y presenta de manera visual el procedimiento realizado en la implementación experimental de este trabajo de tesis. Para ello, el equipo de laboratorio presentado en el capítulo 6, así como el software Matlab, cámaras optitrack y robot Khepera III entran en un lazo de comunicación que permite la realización de la tarea de seguimiento de trayectoria.

El sensado de la posición del robot Khepera se realiza por medio de las 8 cámaras optitrack instaladas en el laboratorio de sincronización y sistemas complejos (CICESE). Con ésto se obtiene la información correspondiente a la posición inicial del robot móvil en los ejes coordenados x y y . Estos datos son introducidos en el código utilizado para las simulaciones, con las modificaciones pertinentes para la correcta comunicación entre Optitrack-Matlab-Khepera, basada en el protocolo TCP/IP mostrado en el capítulo 6.

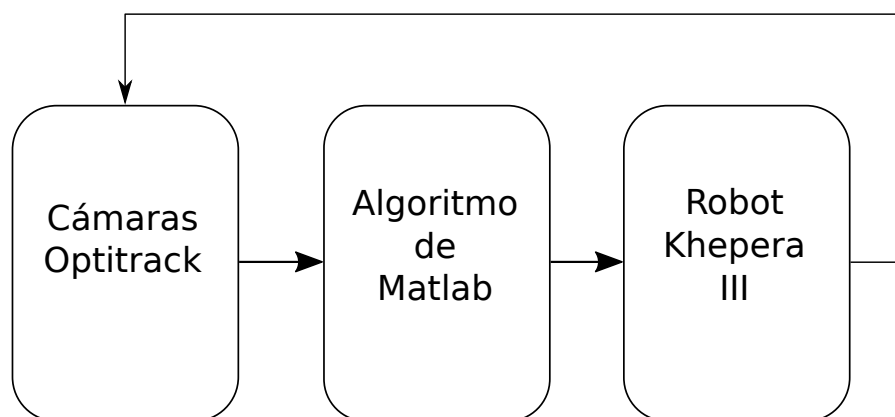


Figura 128: Diagrama a bloques empleado para la implementación experimental con cámaras optitrack y Matlab.

Las aceleraciones y velocidades son calculadas a partir de la posición inicial del robot introducida en el controlador, las velocidades lineales (v_R, v_L) son convertidas en pulsos y luego enviadas de manera inalámbrica al robot Khepera III, una vez recibidas, éste se encarga de implementarlas en sus ruedas para desplazarse. Posteriormente la nueva posición del robot es sensada por las cámaras optitrack y los datos nuevamente son introducidos en el código de Matlab para continuar con el cálculo de las nuevas velocidades correspondientes al nuevo punto/posición de la trayectoria deseada. El proceso se realiza durante las iteraciones definidas dentro del algoritmo, número que se ha definido con el fin de completar 1 vuelta a la trayectoria deseada.

Las condiciones iniciales $[x(0), y(0), \theta(0)] = [0, 0, 0.01]$ y los datos físicos robot Khepera, $r=20.5\text{mm}$, $l=88.41\text{mm}$, permanecen igual para todos los casos. Tanto la frecuencia (f), como las ganancias de la ley de control (Kd y Kp), varían su valor dependiendo de la trayectoria deseada en cuestión, ya que cada trayectoria es diferente y estas variables juegan un papel importante para el correcto seguimiento de la trayectoria.

7.2 Punto deseado

El punto deseado seleccionado para la implementación experimental es: $X_d(t) = 0.5$ y $Y_d(t) = 0.5$, utilizando las ganancias $K_p = 0.1$ y $K_d = 0.4$.

La figura 132, muestra la posición inicial del robot, la trayectoria que ha trazado y la posición deseada. Donde se observa que el robot realiza un primer movimiento en línea recta con una dirección de 45° , y repentinamente cambia su dirección para trazar una curva que lo lleva al punto deseado. A diferencia de la simulación, en la que se traza una línea recta hasta el punto $(0.5, 0.5)$.

Dentro de la figura 129, se observa el desplazamiento realizado por el robot en cada eje coordenado (x, y) . Las gráficas a) y b) de la figura 129, tienen el valor inicial de la posición del robot $(0, 0)$. Posteriormente empiezan a incrementar, siendo los desplazamientos en (y) ligeramente mayores, como se identifica en la figura 132. Aproximadamente en 300 unidades de tiempo se encuentra que ambas gráficas adquieren el valor de 0.5, lo que indica que el robot ha llegado al punto deseado.

El error mostrado en la figura 130, tiene un valor inicial de -0.5 , debido a que está es la diferencia que existe entre el punto deseado $(0.5, 0.5)$ y la posición inicial $(0, 0)$. Conforme el robot avanza hacia el punto deseado, el error va disminuyendo hasta tomar un valor 0 cuando el robot alcanza la posición $(0.5, 0.5)$, aproximadamente en 300 unidades de tiempo.

La figura 131, muestra las velocidades angulares a lo largo del tiempo. Puesto que éstas han sido acotadas, los valores iniciales son $\omega_R = 7.68 \frac{rad}{s}$ y $\omega_L = -7.68 \frac{rad}{s}$. Se observa que ω_L incrementa hasta ser ligeramente mayor que ω_R , luego ambas velocidades empiezan a disminuir para trazar la curva hacia el punto $(0.5, 0.5)$. A partir de las 250 unidades de tiempo es más notorio que $\omega_R < \omega_L$, pues estas velocidades corresponden al trazado de la curva final para llegar al punto deseado.

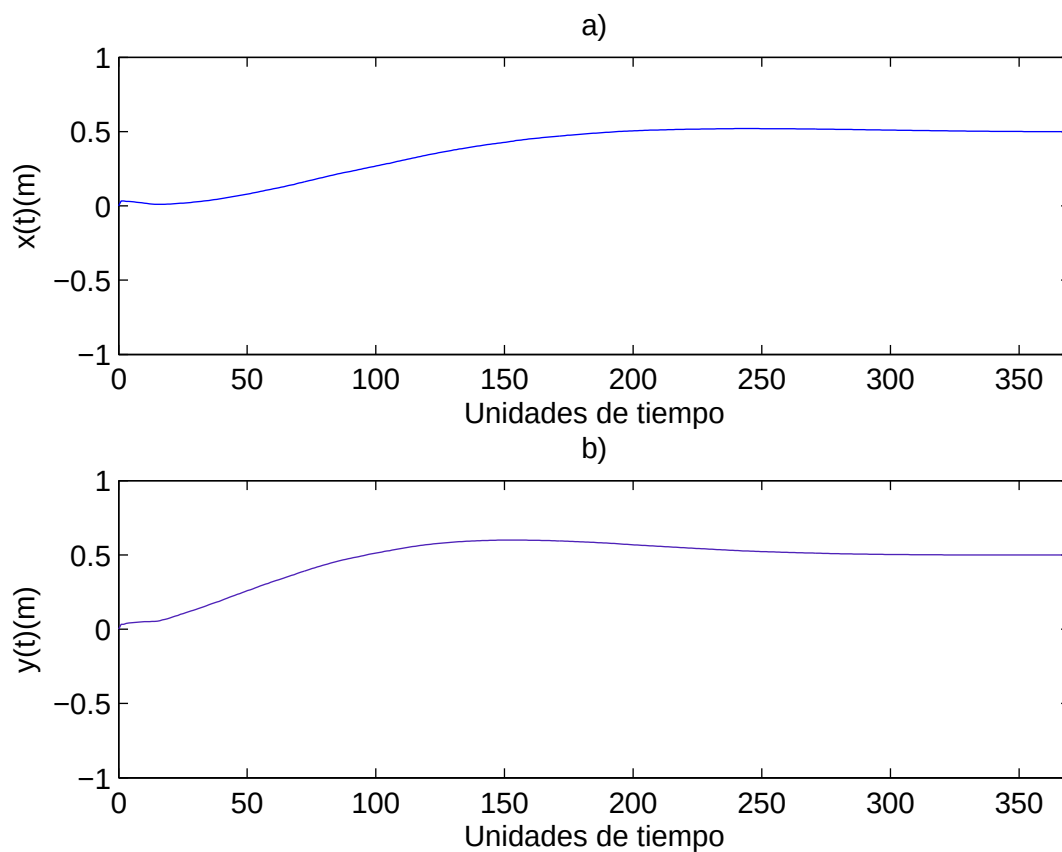


Figura 129: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

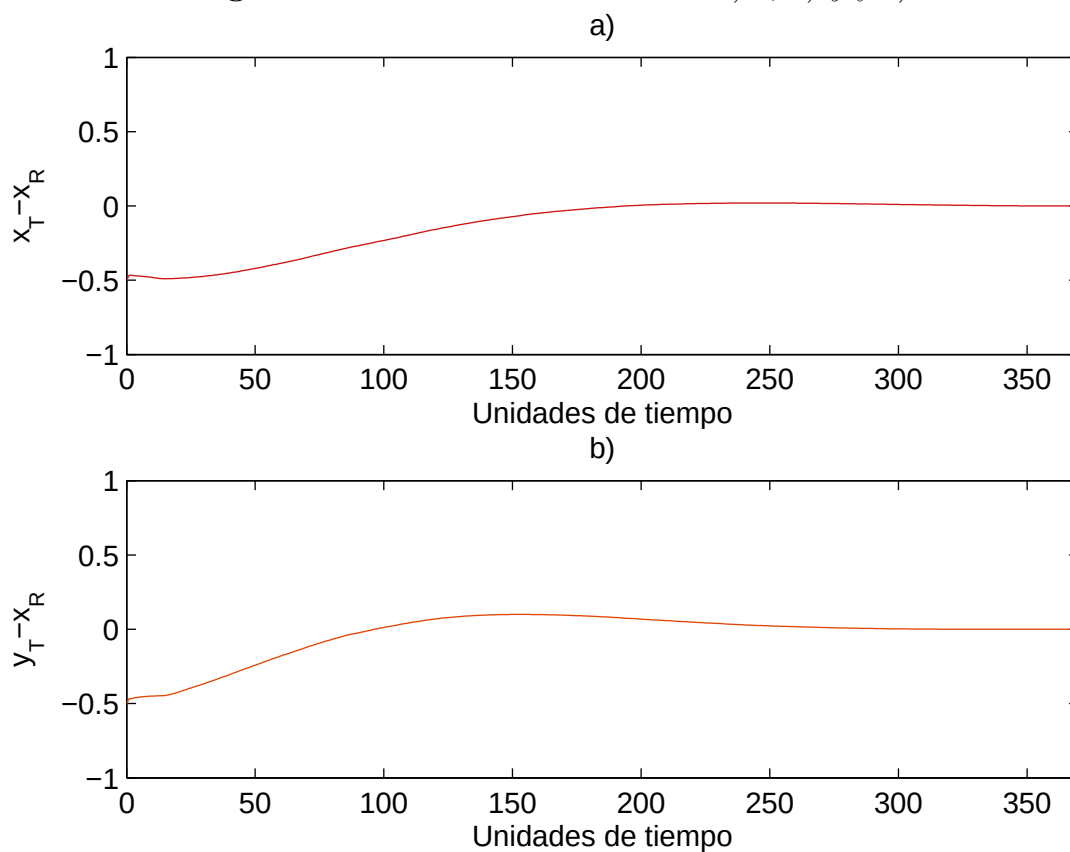


Figura 130: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

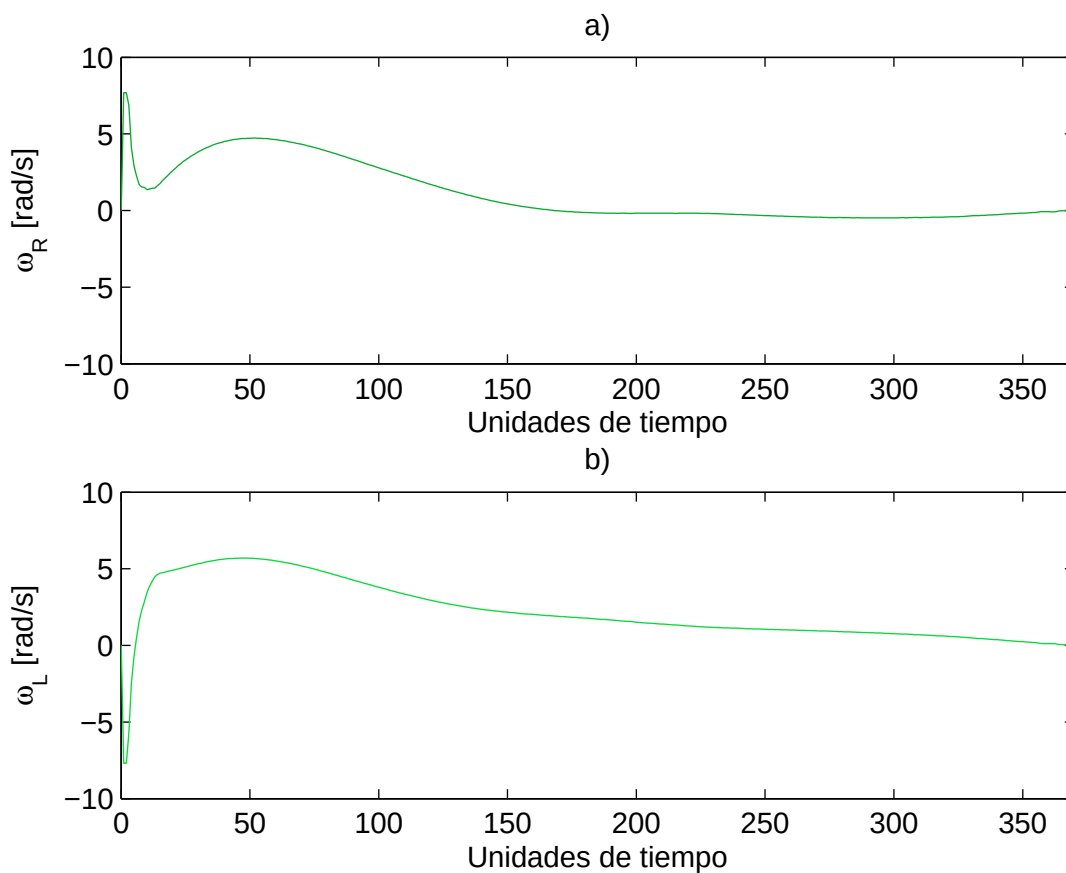


Figura 131: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

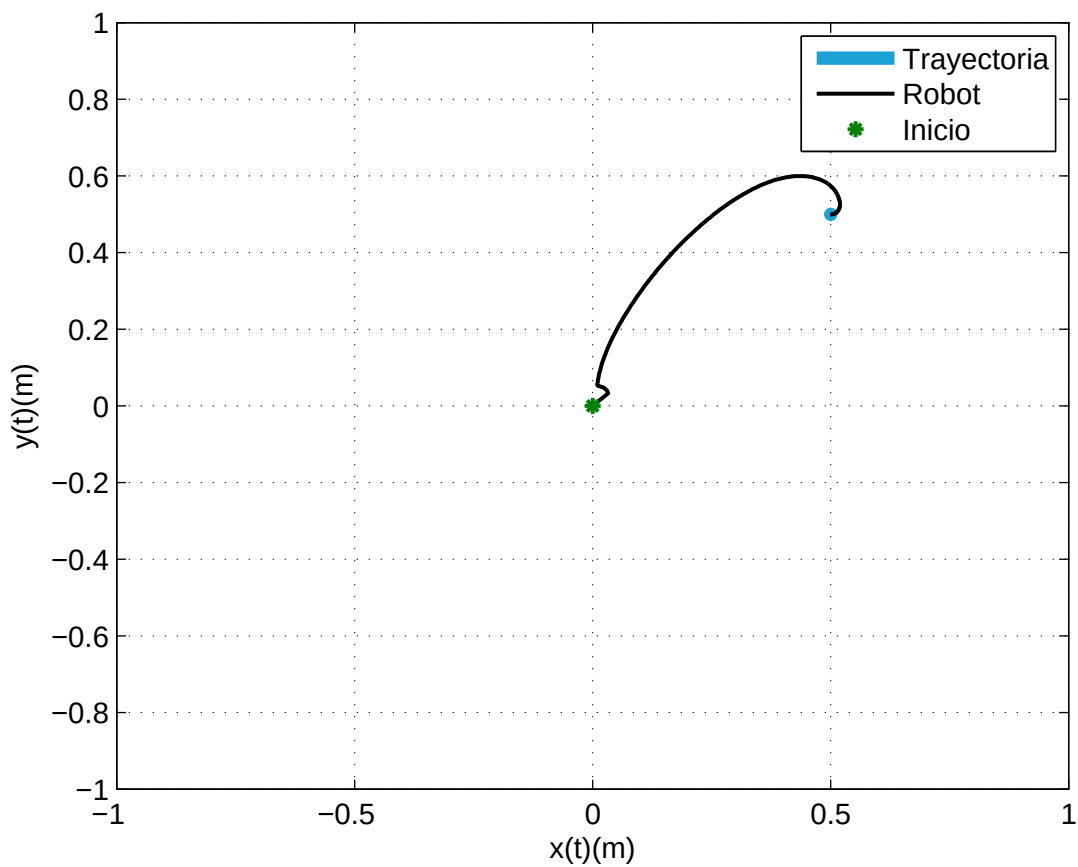


Figura 132: Punto deseado.

7.3 Trayectoria Circular

La trayectoria circular para la implementación experimental se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{50t})}{2}$ y $Y_d(t) = \frac{\cos(\frac{2\pi}{50t})}{2}$, utilizando las ganancias $K_p = 1$ y $K_d = 3$.

En la figura 136, se muestra la posición inicial del robot móvil, la trayectoria deseada y la trayectoria que ha trazado el robot. Donde se observa que el robot realiza un movimiento inicial parecido al mostrado en la figura 132. Éste se debe a la etapa de transición, en la que los primeros pulsos son recibidos por el robot y ejecutados, así como el sensado la segunda posición. Una vez transcurrida esta etapa, el robot traza una curva para incorporarse a la trayectoria circular, lo cual es algo muy similar a lo que sucede en la simulación.

La dinámica de los desplazamientos en los ejes coordenados mostrados en la figura 133, concuerda con la observada en la figura 30, con la única diferencia del primer movimiento de la etapa de transición en las primeras 5 unidades de tiempo.

En la figura 134, se exponen los errores absolutos para los movimientos en los ejes coordenados (x,y) . Como valores iniciales de las gráficas se tiene $X_T - X_R = 0$ y $Y_T - Y_R = -0.5$, ésto se debe a la diferencia del primer punto de la trayectoria deseada $(0, 0.5)$ y la posición inicial del robot $(0,0)$. Una vez el robot avanza hacia la trayectoria circular es notable la reducción del error, sin embargo, los valores no se mantienen constantes en cero como se muestra en la simulación. Se observa una oscilación, que se debe a que el mundo real no es precisamente un ambiente ideal y completamente controlado, pues existen ciertas variables que afectan el comportamiento de una implementación experimental y debido a ello se espera un mayor grado de error, que el mostrado en una simulación.

Las velocidades angulares del robot móvil se pueden analizar en la figura 135. Nuevamente la dinámica no es completamente la línea observada en la simulación, pero sigue el mismo comportamiento y la trayectoria ha sido realizada satisfactoriamente.

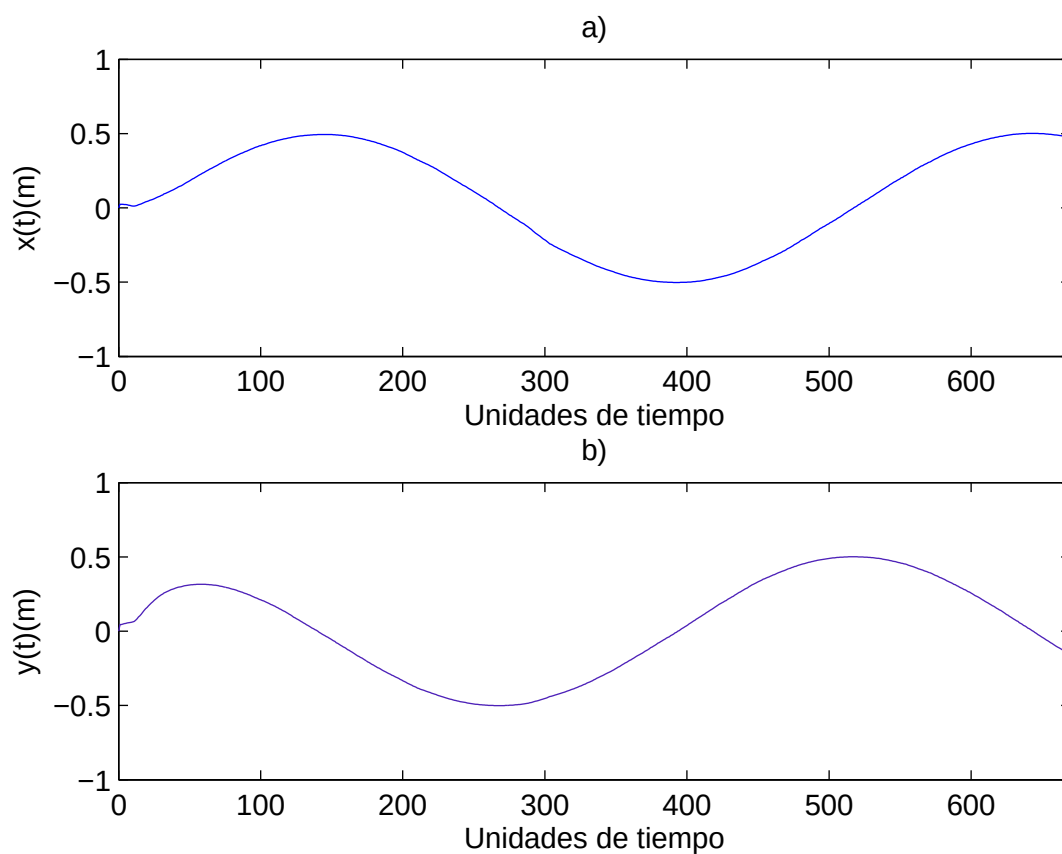


Figura 133: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

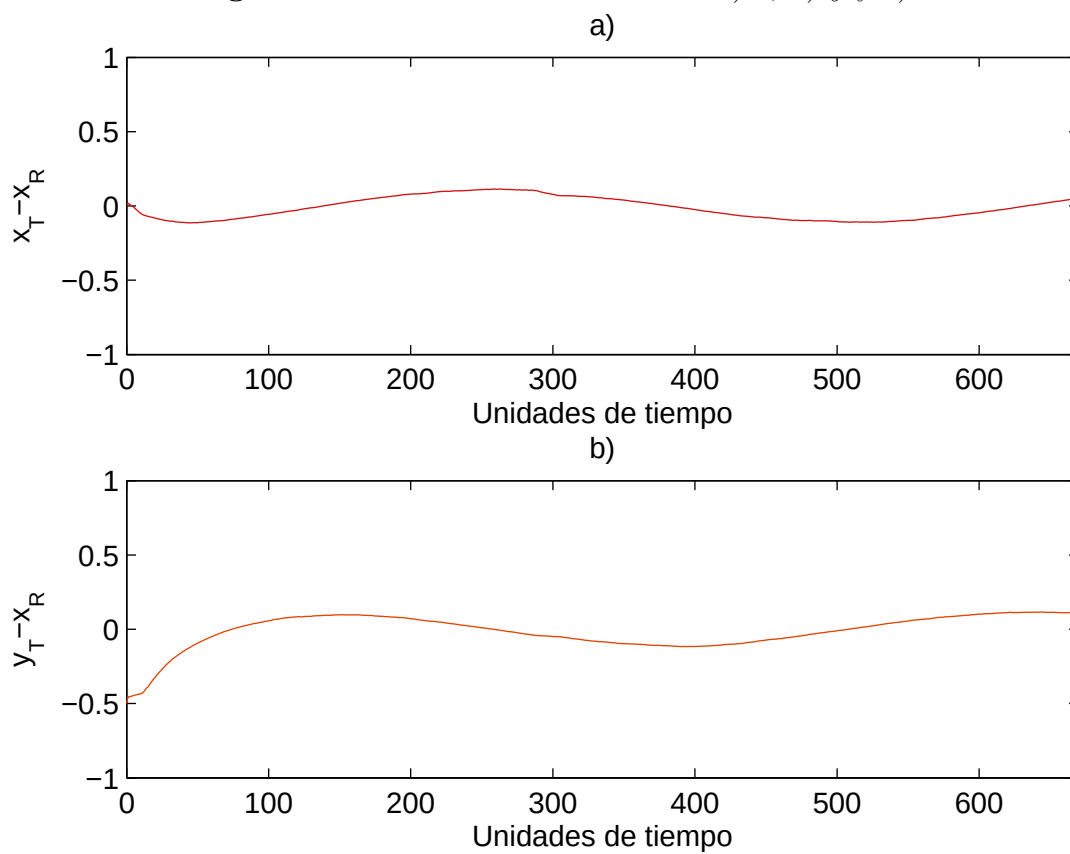


Figura 134: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

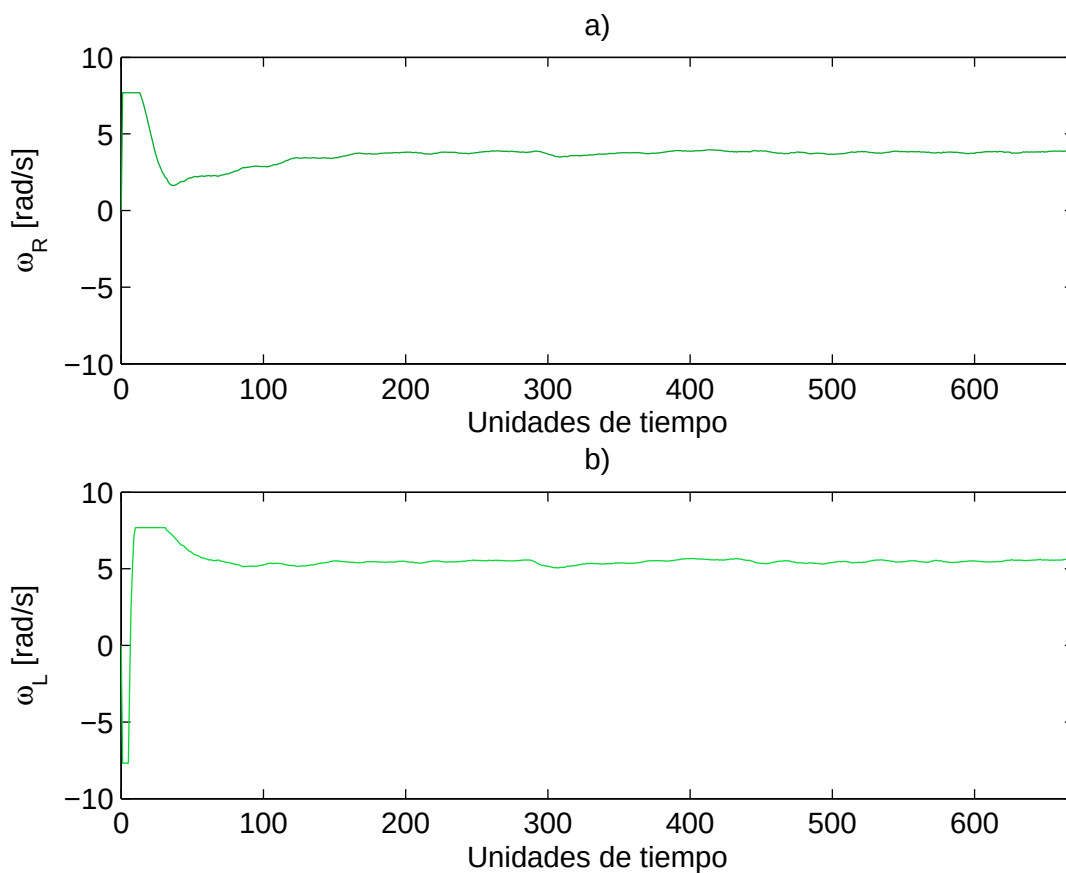


Figura 135: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

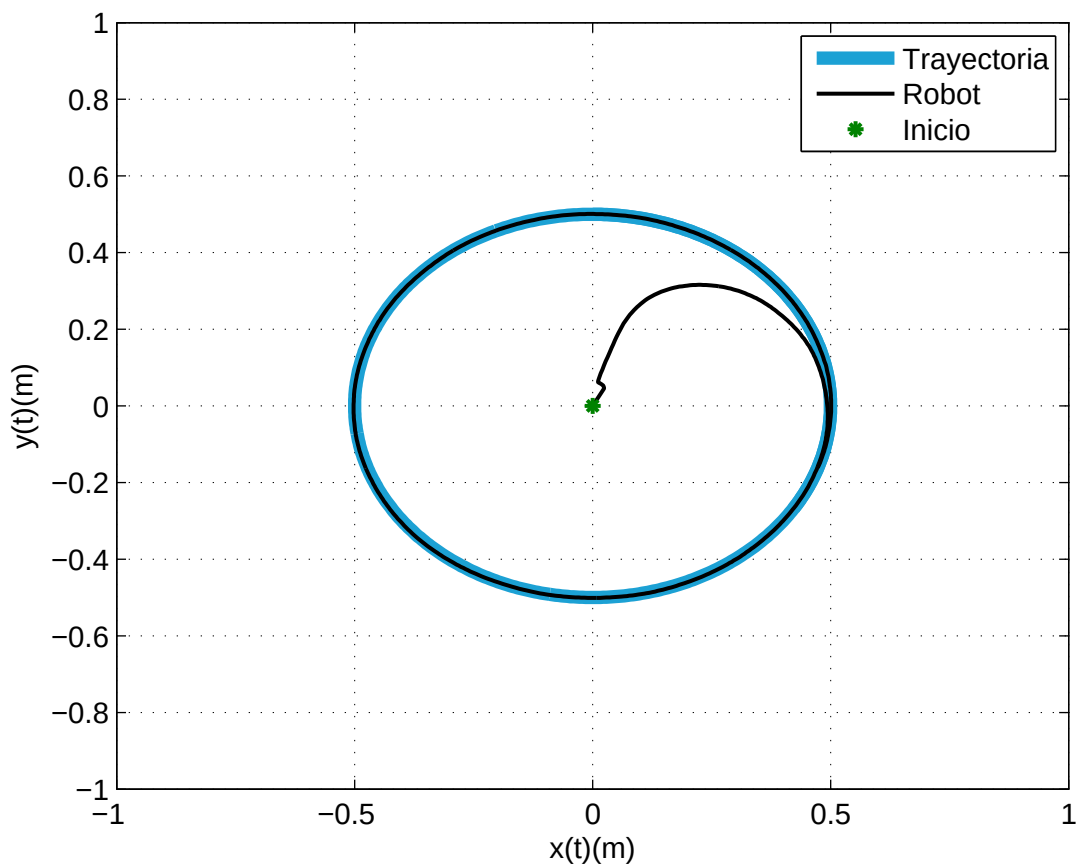


Figura 136: Trayectoria circular.

7.4 Trayectoria con la forma de infinito

La trayectoria con la forma de infinito definida para la parte de implementación experimental esta definida por las ecuaciones: $X_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{100t})}{2}$ y $Y_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{50t})}{2}$, utilizando las ganancias $K_p = 1$ y $K_d = 2$.

En la figura 140, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial del robot y la trayectoria trazada por el robot. Aunque el robot móvil ya se encuentra dentro de la trayectoria deseada, éste ejecuta un movimiento inicial hacia afuera de la trayectoria como consecuencia de la etapa de transición en la comunicación con el robot. Luego realiza un segundo movimiento para incorporarse a la trayectoria infinito. Además se identifica que la trayectoria recorrida por el robot no se encuentra en el centro de la trayectoria deseada, lo cual indica un cierto grado de error. Ésto no presenta mayor problema, pues a pesar de ello el error sigue siendo muy pequeño y la trayectoria recorrida no pierde la forma de la trayectoria deseada.

Las gráficas de la figura 137, presentan los movimientos realizados por el robot en cada eje coordenado. Donde la dinámica de los desplazamientos mostrada tanto en el eje (x) como en el (y), es muy parecida a la observada en la figura 34.

El error mostrado en las gráficas de la figura 138, es muy pequeño desde el inicio, pues la posición inicial del robot y el primer punto de la trayectoria es el mismo. Tanto la gráfica a) como la b) de la figura 138, presentan ligeras variaciones a lo largo del tiempo, sin ser un mayor problema, ya que el error se encuentra dentro del rango de tolerancia.

La dinámica de las velocidades angulares a lo largo del tiempo, se presentan en la figura 139. En ella se observa que la dinámica de las velocidades tiene el mismo comportamiento que el mostrado en la figura 36, con unas ligeras variaciones en sus valores.

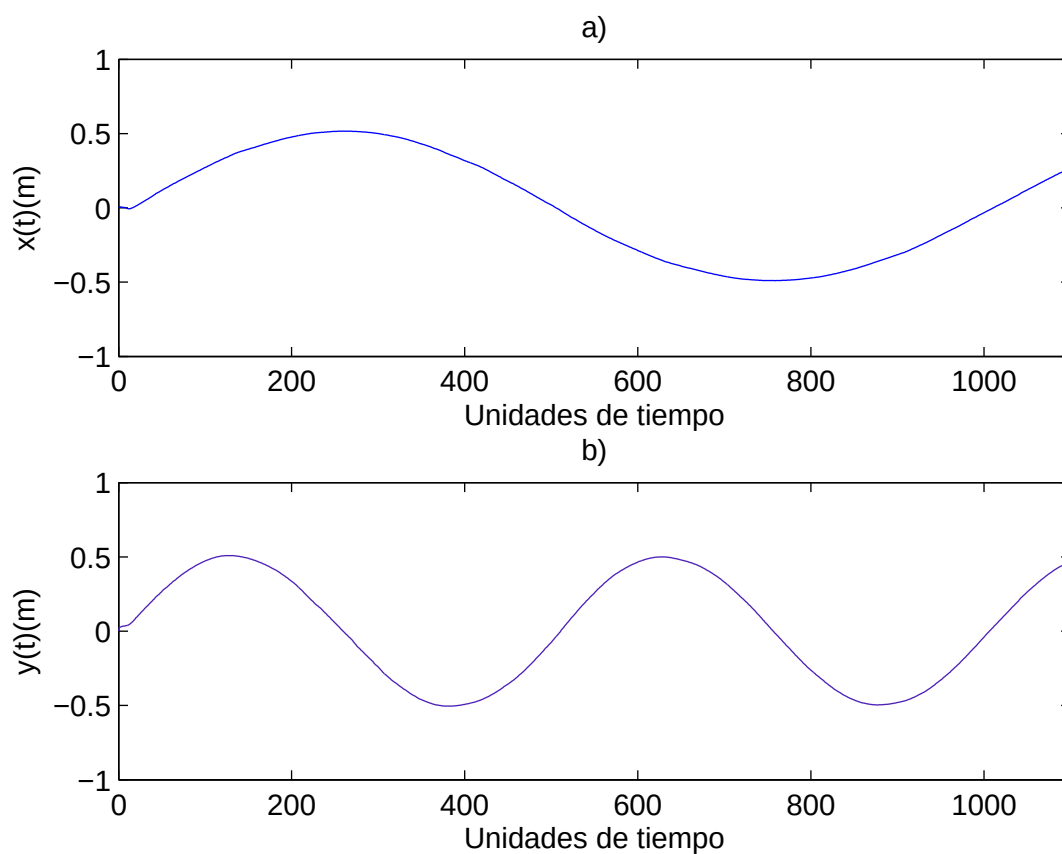


Figura 137: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

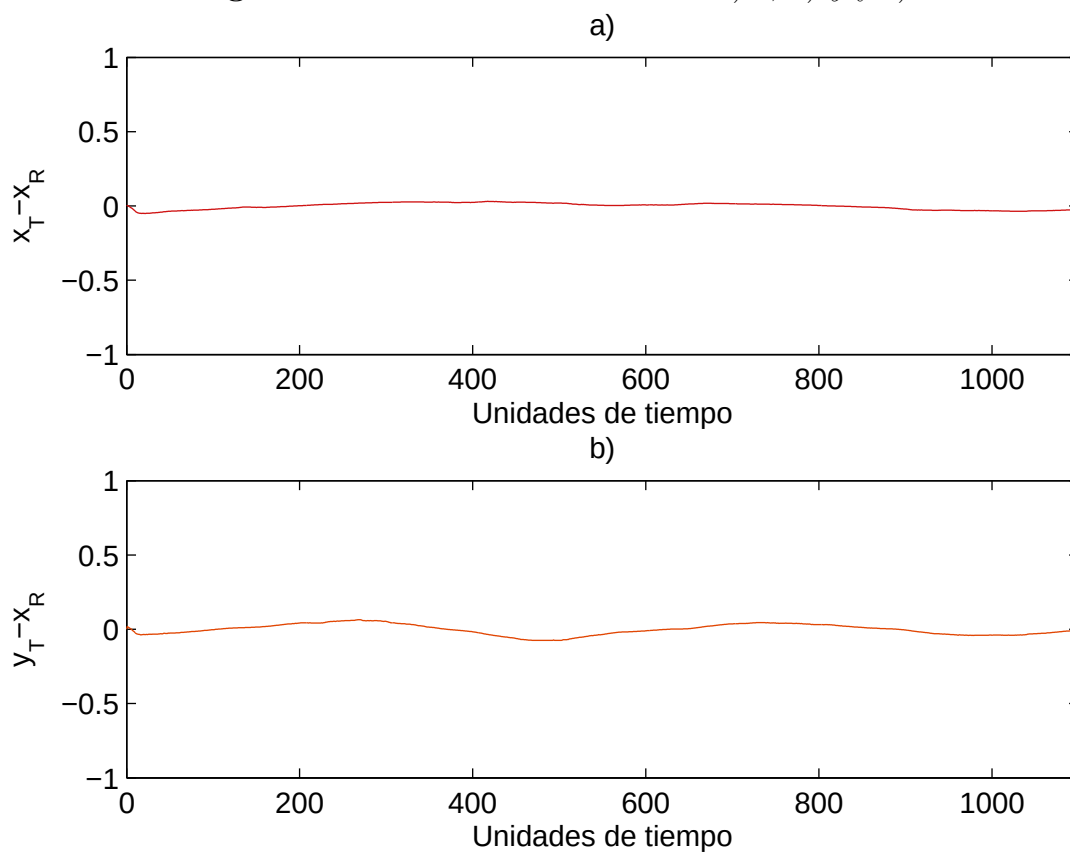


Figura 138: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

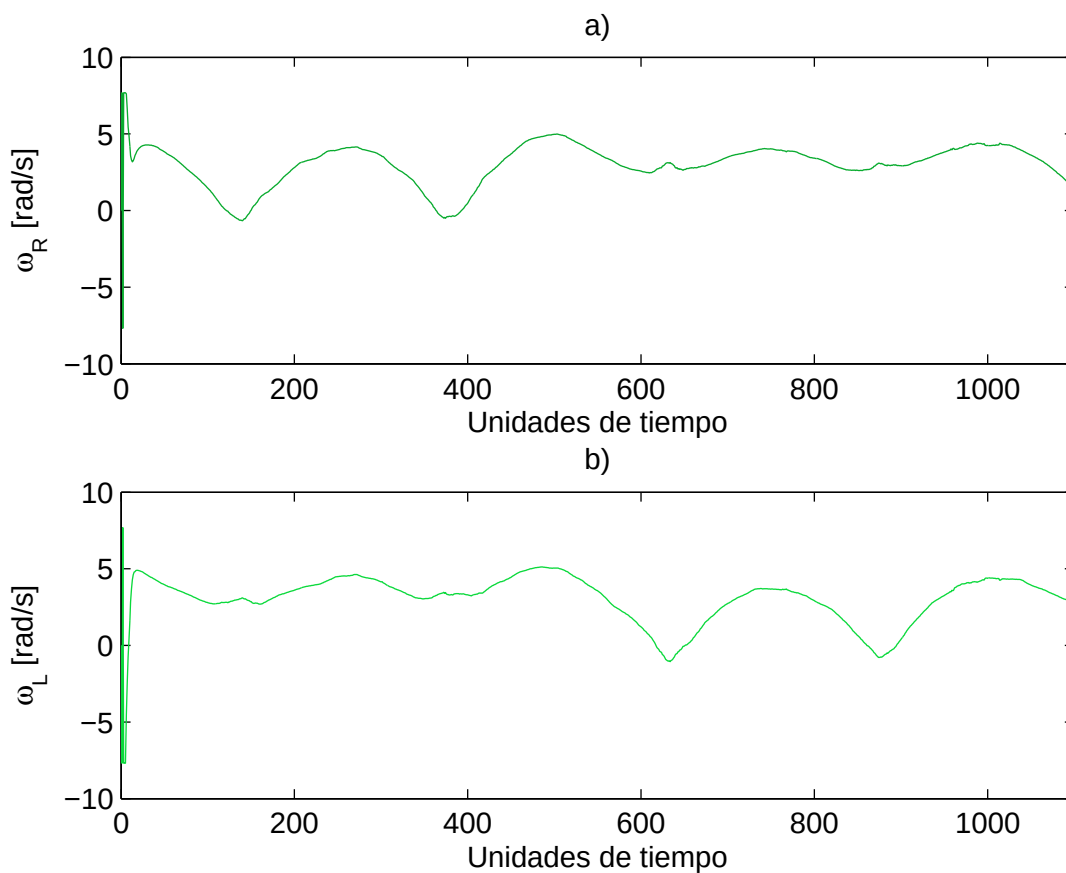


Figura 139: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

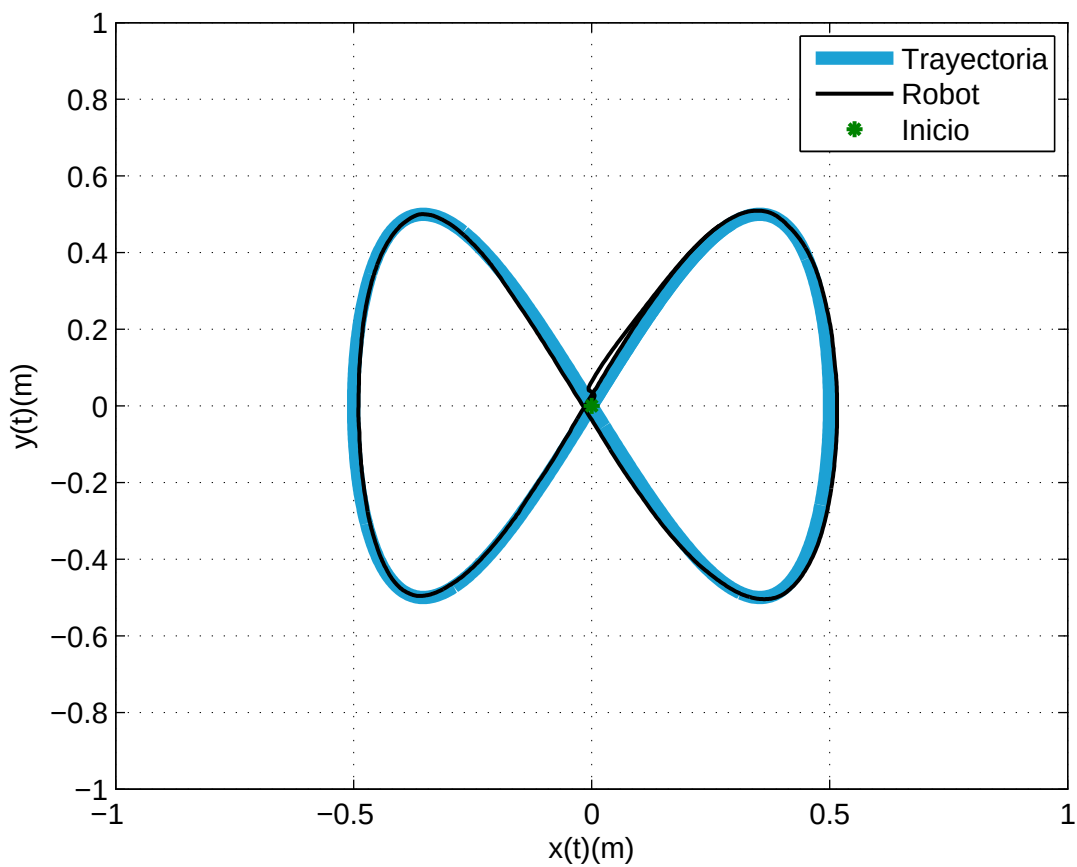


Figura 140: Trayectoria con la forma de infinito.

7.5 Trayectoria con la forma de ocho

La trayectoria con la forma de ocho empleada para la implementación experimental se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{50t})}{2}$ y $Y_d(t) = \frac{\sin(\frac{2\pi}{100t})}{2}$, utilizando las ganancias $K_p = 1$ y $K_d = 2$.

En la figura 144, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y el trayecto trazado por el robot móvil. En ella se observa el movimiento inicial del robot hacia fuera de la trayectoria de ocho, provocado por la etapa de transición. Así como su posterior incorporación a dicha trayectoria en su segundo movimiento. También se identifica un ligero error en ambos ejes coordenados, para la trayectoria trazada por el robot.

Las gráficas de la figura 141, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado. Donde la dinámica de los desplazamientos observada, es muy similar a la mostrada en la figura 141, teniendo una ligera variación en las primeras unidades de tiempo debida al primer movimiento del robot.

El error inicial mostrado en la figura 141, es de aproximadamente $X_T - X_R = 0$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es la posición inicial del robot. Posteriormente se observan pequeñas oscilaciones, que no afectan el desempeño esperado del seguimiento de la trayectoria.

La figura 143, muestra el comportamiento de las velocidades angulares ω_R y ω_L a lo largo del tiempo. Donde se identifican 2 impulsos tanto en la gráfica a) como b) de la figura 143, en 300 y 750 unidades de tiempo. Los cuales corresponden a 2 irregularidades en la trayectoria trazada por el robot móvil, en los puntos $(-0.5, 0.36)$ y $(-0.48, -0.3)$. El resto de la gráfica, corresponde al comportamiento mostrado en la figura 40.

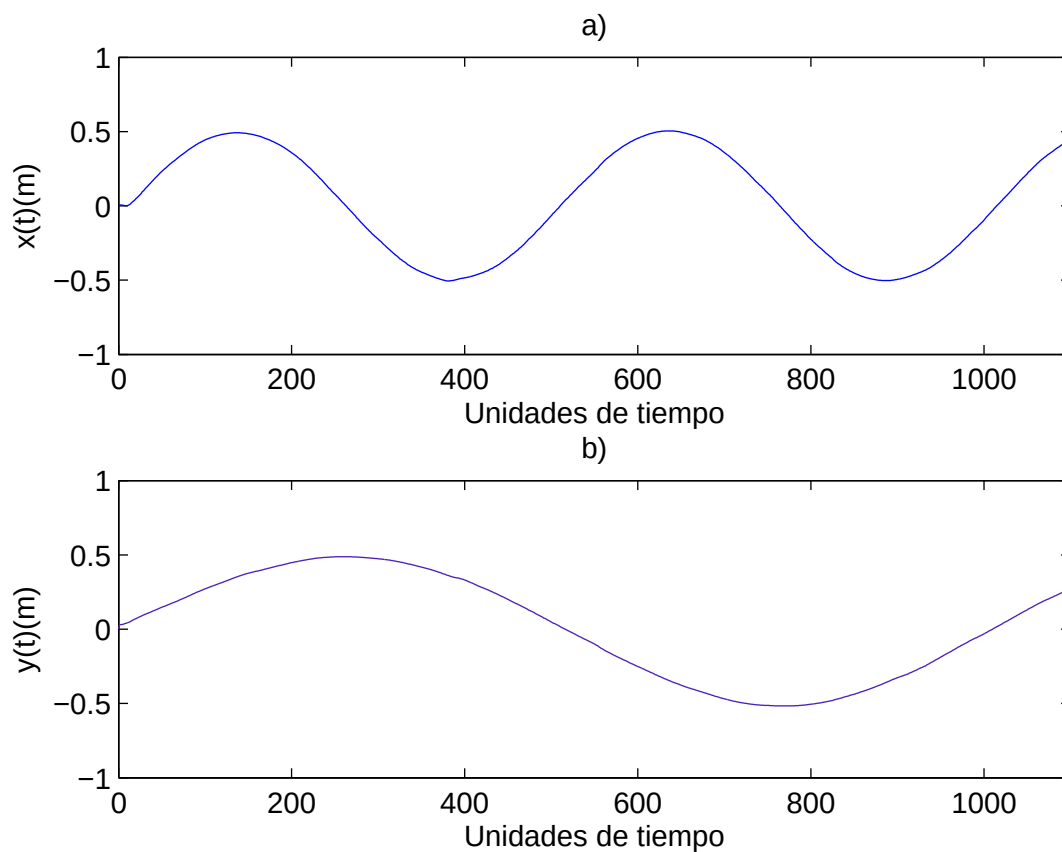


Figura 141: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

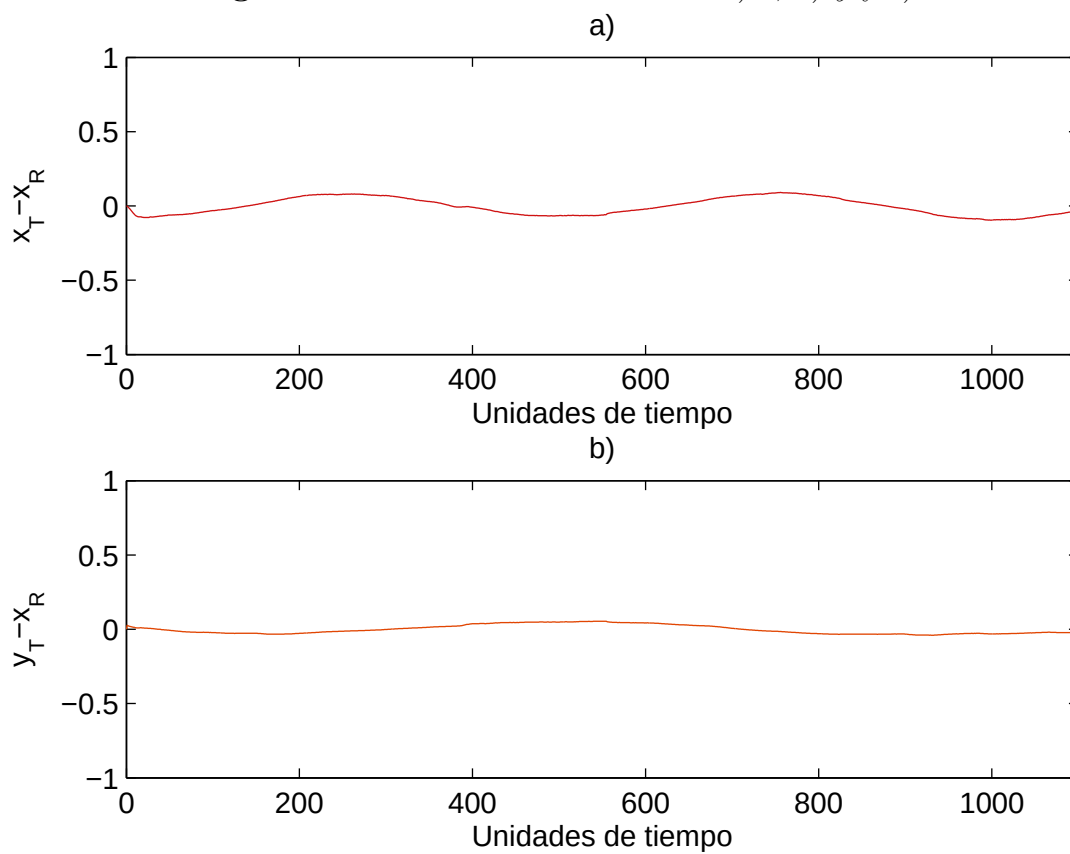


Figura 142: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

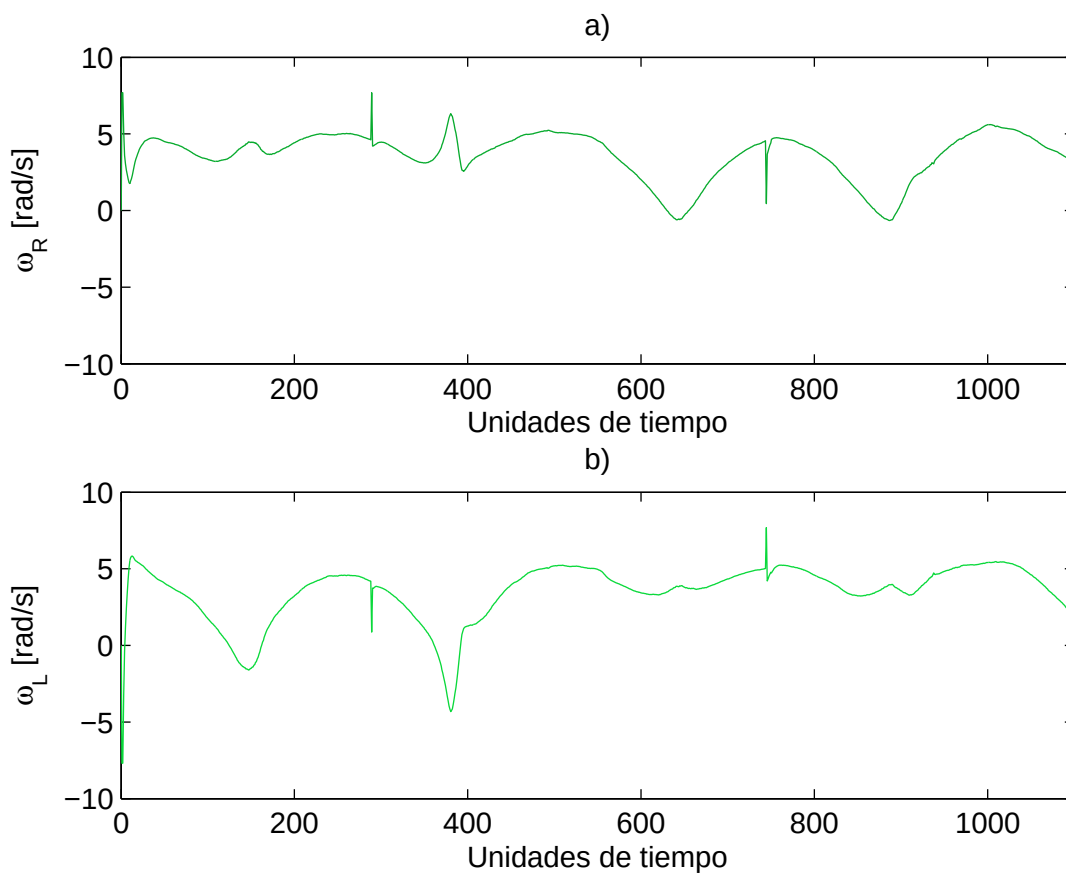


Figura 143: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

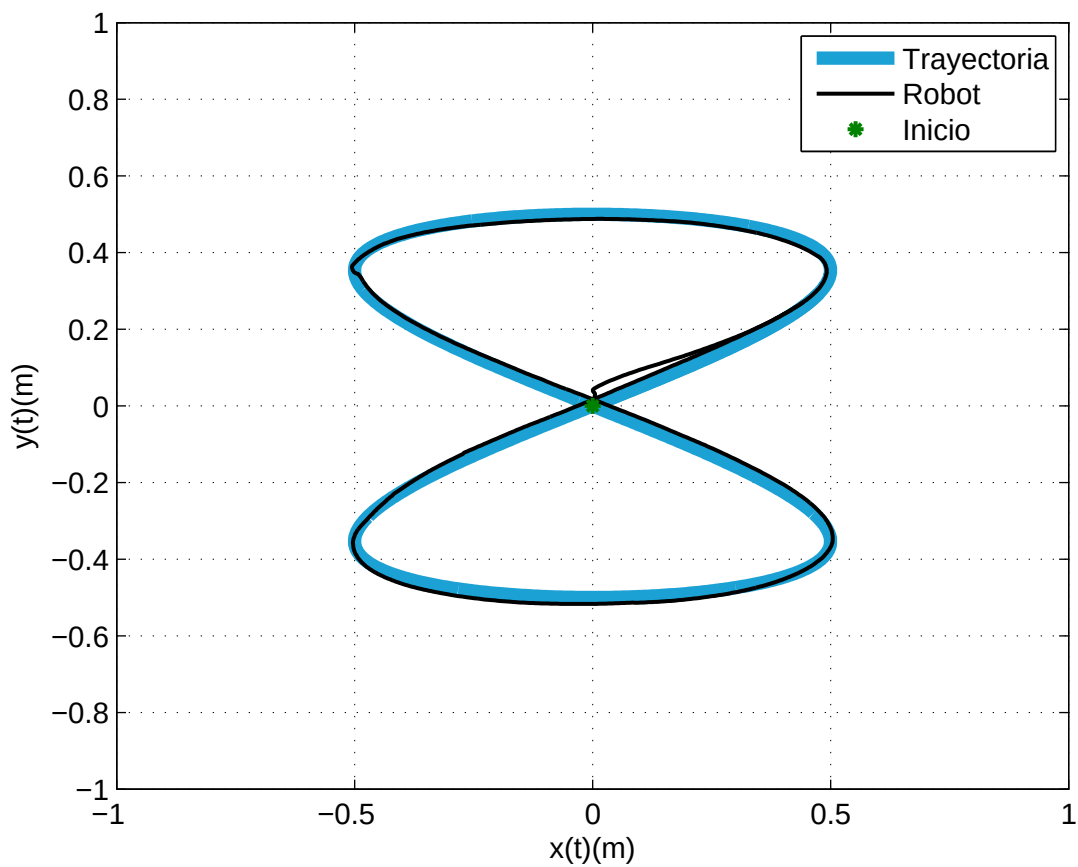


Figura 144: Trayectoria con la forma de Ocho.

7.6 Trayectorias con la forma de rosa polar

Las trayectorias con la forma de la rosa polar utilizadas para la implementación experimental, se encuentran definidas por las ecuaciones : $X_d(t) = \frac{(a+b)\cos(nft)\cos(ft)}{10}$, $Y_d(t) = \frac{(a+b)\cos(nft)\sin(ft)}{10}$ y los parámetros $a = 5$, $b = 3$.

7.6.1 Rosa polar con 3 Pétalos

Para la trayectoria deseada de la rosa polar con 3 pétalos se define $n = 3$, la $f = \frac{2\pi}{300}$ y las ganancias $K_p = 0.1$ y $K_d = 0.2$.

En la figura 148, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. Donde se observa que el robot realiza su movimiento inicial con una orientación de 45° , para luego girar hacia la derecha y trazar una línea recta hacia la trayectoria de 3 pétalos. Una vez alcanza los puntos de la trayectoria deseada, el robot da un giro de 180° para incorporarse y trazar la mitad de uno de los pétalos. Analizando detenidamente la trayectoria, se encuentra que el robot entra a la trayectoria deseada en el punto $(0.05,0)$. Ubicando este punto en las gráficas de la figura 141, se identifica que el robot entra a la trayectoria de 3 pétalos en aproximadamente 340 unidades de tiempo.

El error inicial en la mostrado en la figura 141, es $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.8,0)$. En las primeras 150 unidades de tiempo se observa un decremento pronunciado en el error del eje (x) , pues el robot parte rápidamente de su posición inicial para dirigirse a la trayectoria deseada.

La figura 143, se observa dentro de las primeras 100 unidades de tiempo, valores de velocidad que sobrepasan los límites de acotación, los cuales parecieran ser una velocidad constante de $\omega_R = \omega_L = 7.68 \frac{rad}{s}$. Esto indica que el robot realizó el movimiento de incorporación, a la velocidad máxima permitida.

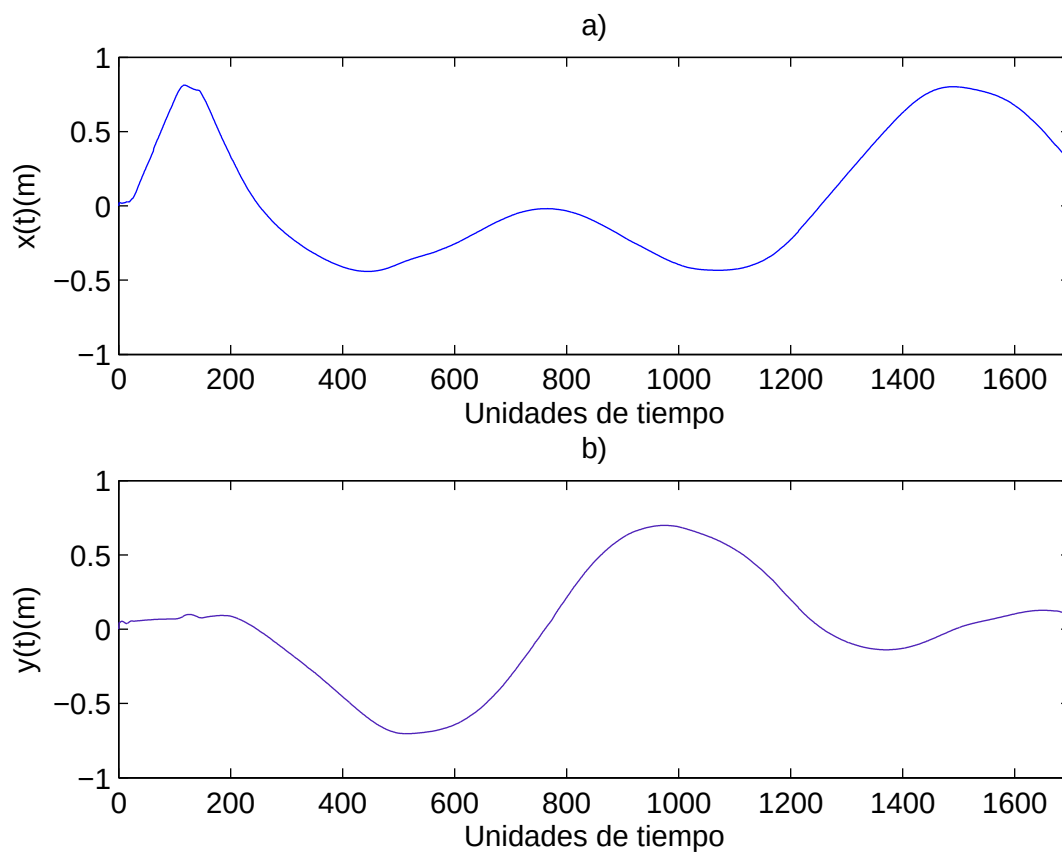


Figura 145: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

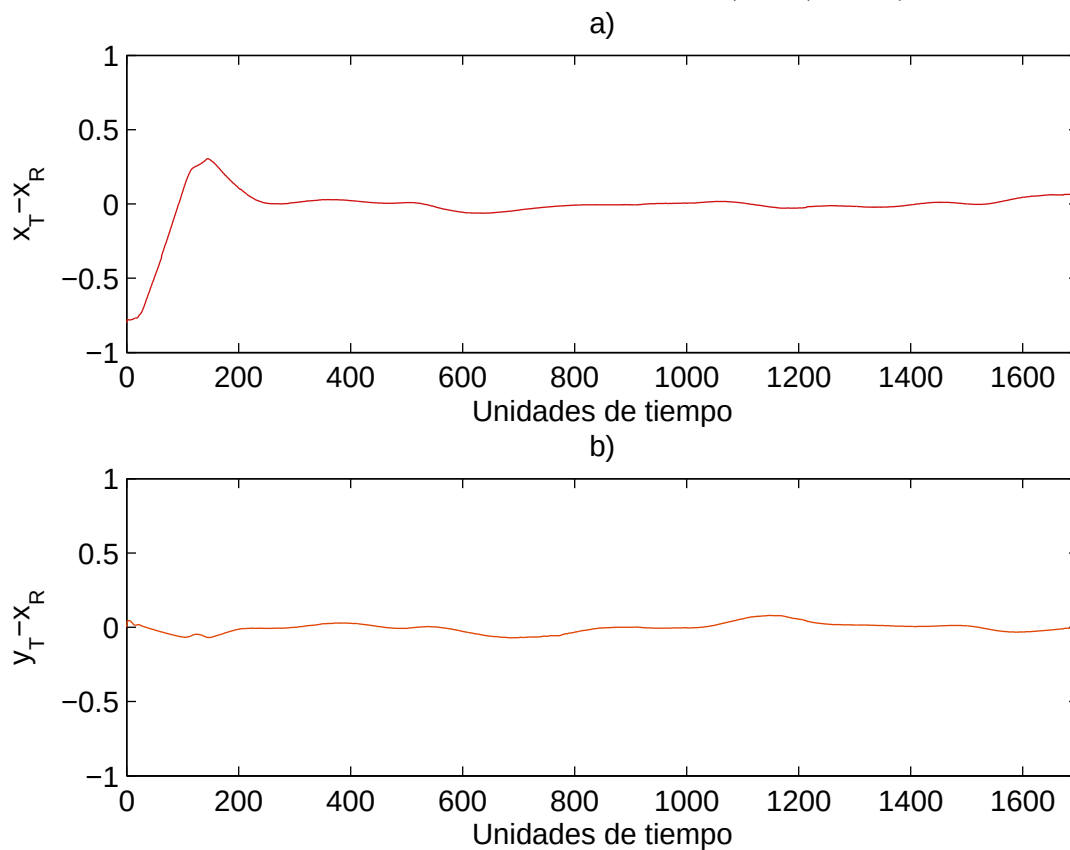


Figura 146: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

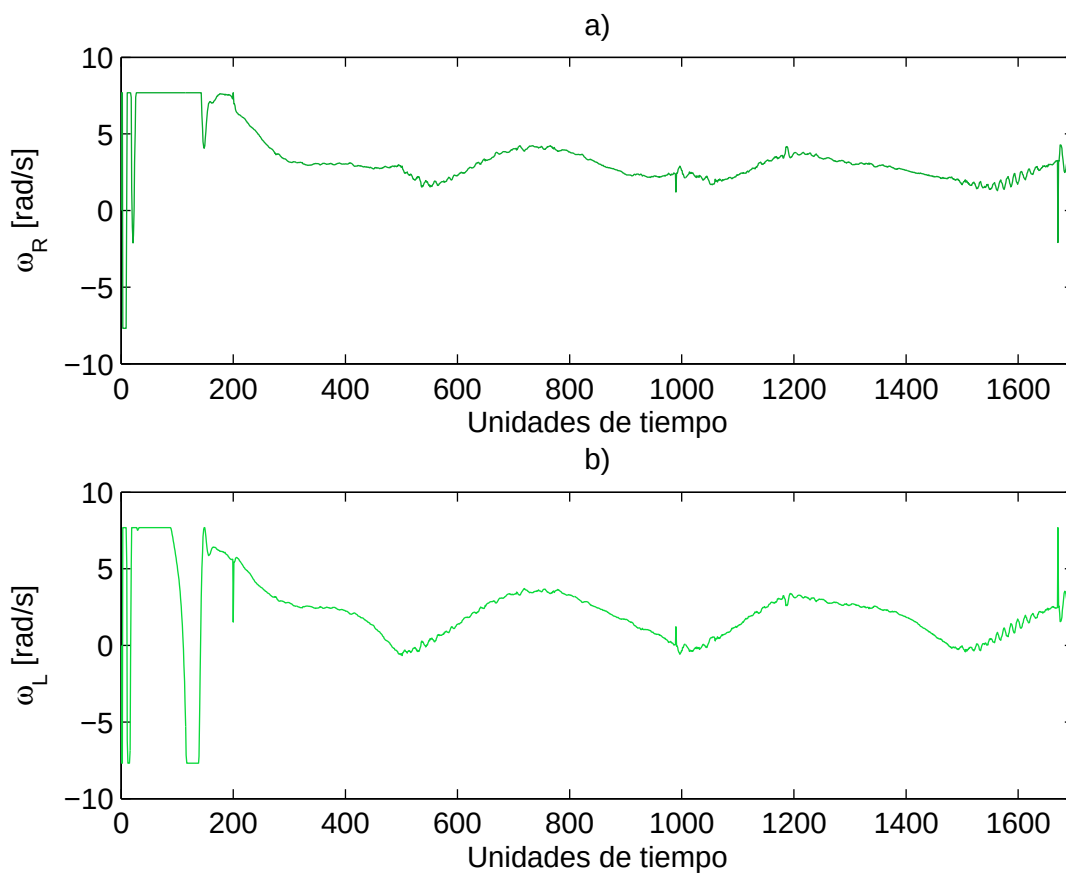


Figura 147: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

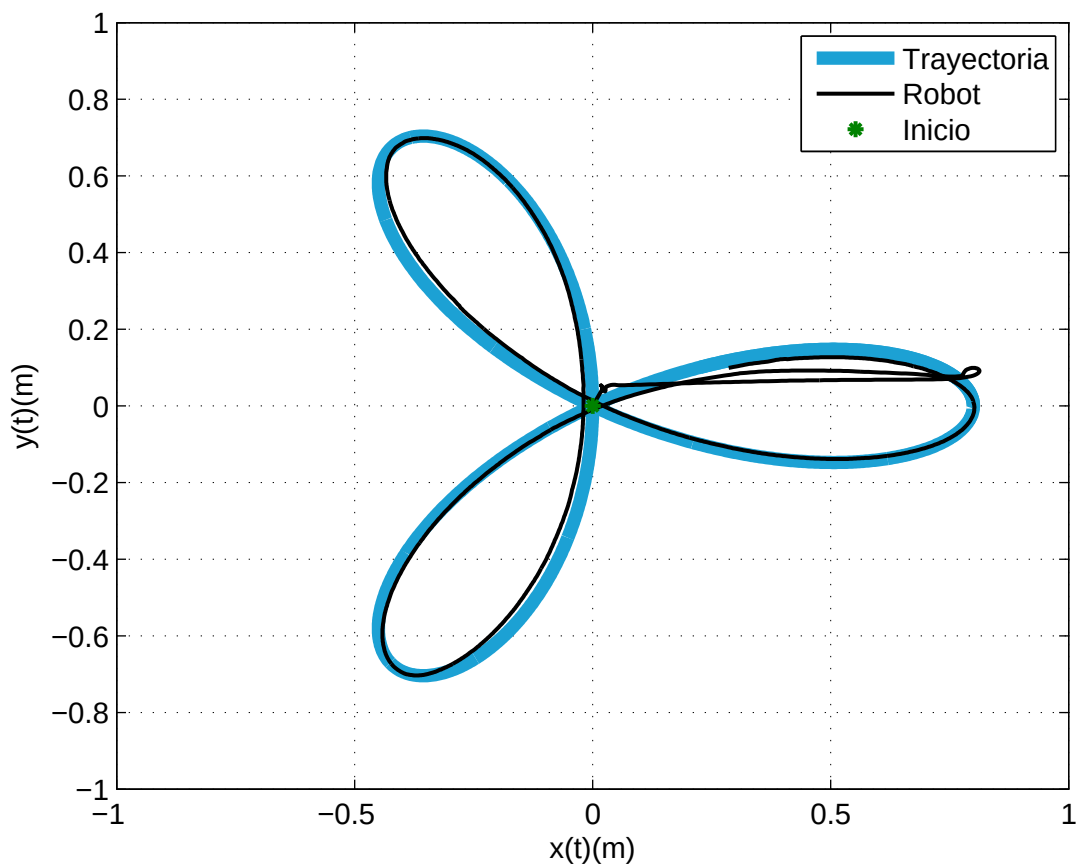


Figura 148: Trayectoria con la forma de rosa polar - 3 pétalos ($n=3$).

7.6.2 Rosa polar con 4 Pétalos

Para la trayectoria con forma de rosa polar de 4 pétalos, se define $n = 2$, $f = \frac{2\pi}{300}$ y se utilizan las ganancias $K_p = 0.1$ y $K_d = 0.2$.

La figura 152, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y el recorrido realizado por el robot móvil. Donde se observa que el robot al realizar su movimiento de incorporación, pasa de largo por aproximadamente 25 cm la trayectoria de 4 pétalos y luego gira 180° para entrar a la trayectoria deseada. Una vez alcanzada, el robot traza unas pequeñas oscilaciones y finalmente se estabiliza.

La figura 149, muestra los movimientos realizados por el robot en los ejes (x) y (y) . En la gráfica a) de la figura 149, se observa un incremento pronunciado dentro de las primeras 150 unidades de tiempo, mientras que en la gráfica b) los desplazamientos en el eje (y) son muy sutiles. Ésto corresponde al primer desplazamiento del robot en línea recta hacia la trayectoria de 4 pétalos. La dinámica que se encuentra entre las 150-250 unidades de tiempo, pertenece al giro de 180° e incorporación del robot a la trayectoria deseada.

El error inicial presentado en la figura 150, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.8, 0)$. El error en (x) , presenta un decremento pronunciado hasta 0, luego incrementa a 0.25 y finalmente vuelve a disminuir a 0. Ésto se debe a que el robot parte de su posición inicial, pasa de largo la trayectoria deseada y finalmente se incorpora a ella.

Las gráficas de la figura 151, muestran las dinámicas de las velocidades angulares ω_R y ω_L . En las primeras 250 unidades de tiempo se observan las velocidades con las que el robot móvil realiza su movimiento de incorporación a la trayectoria de 4 pétalos. Entre las 250-350 unidades de tiempo, se observan unas sobreoscilaciones en los valores de las velocidades, las cuales producen el movimiento oscilatorio del robot cuando entra a la trayectoria deseada.

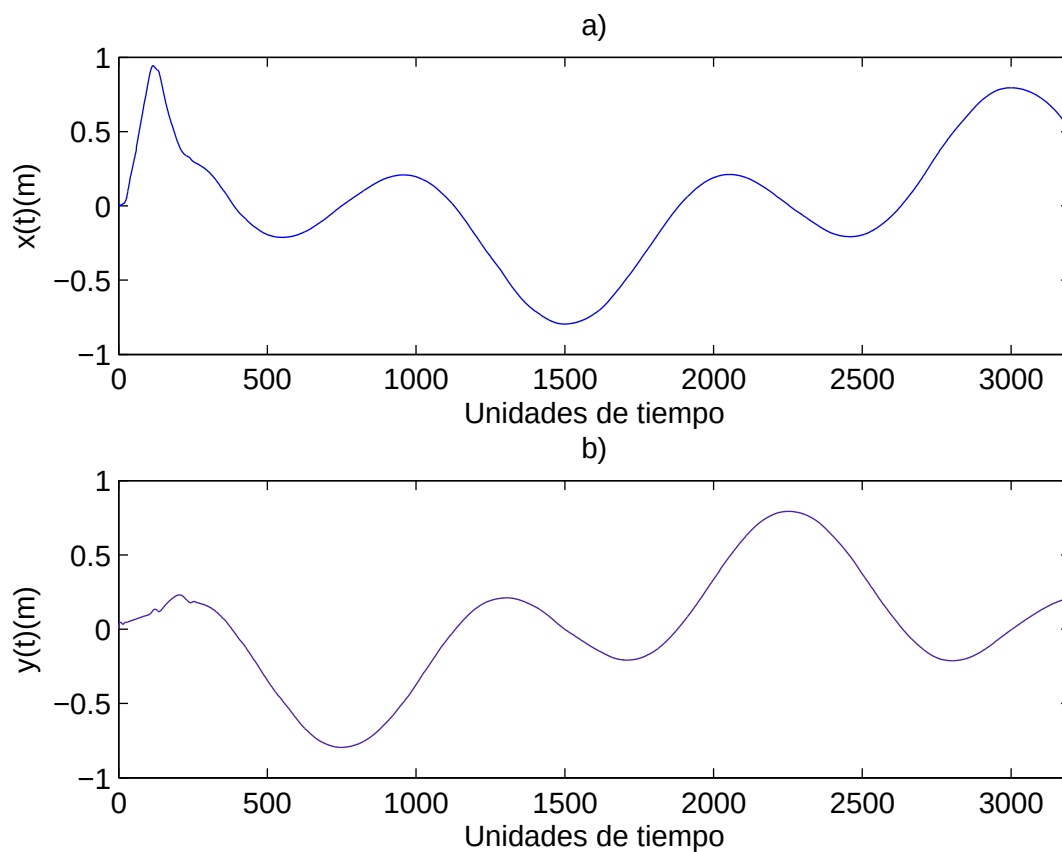


Figura 149: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

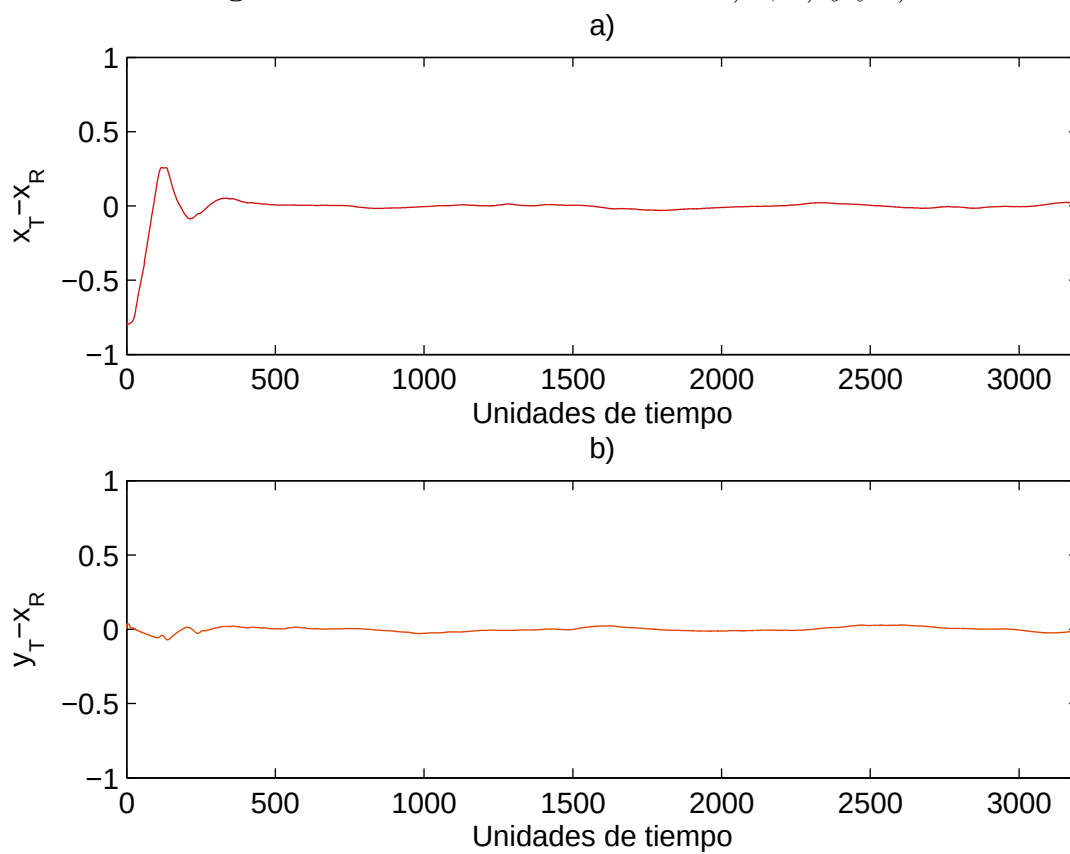


Figura 150: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

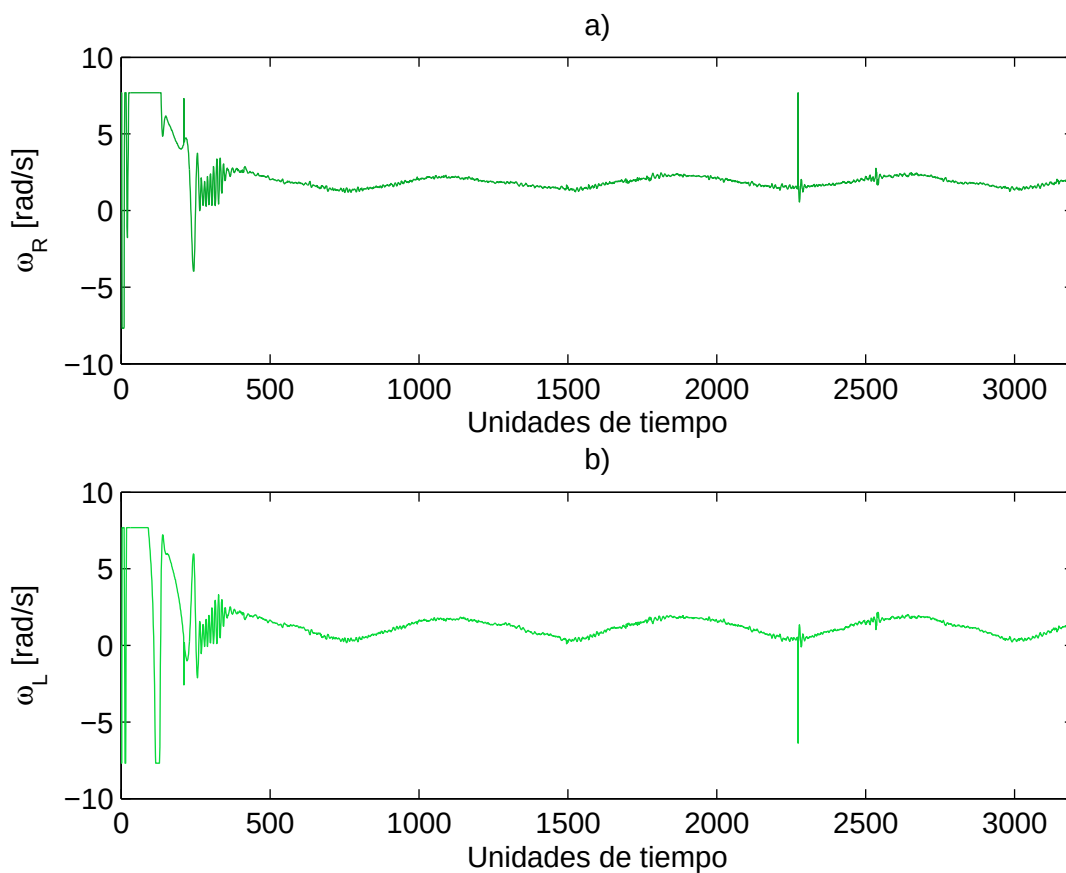


Figura 151: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

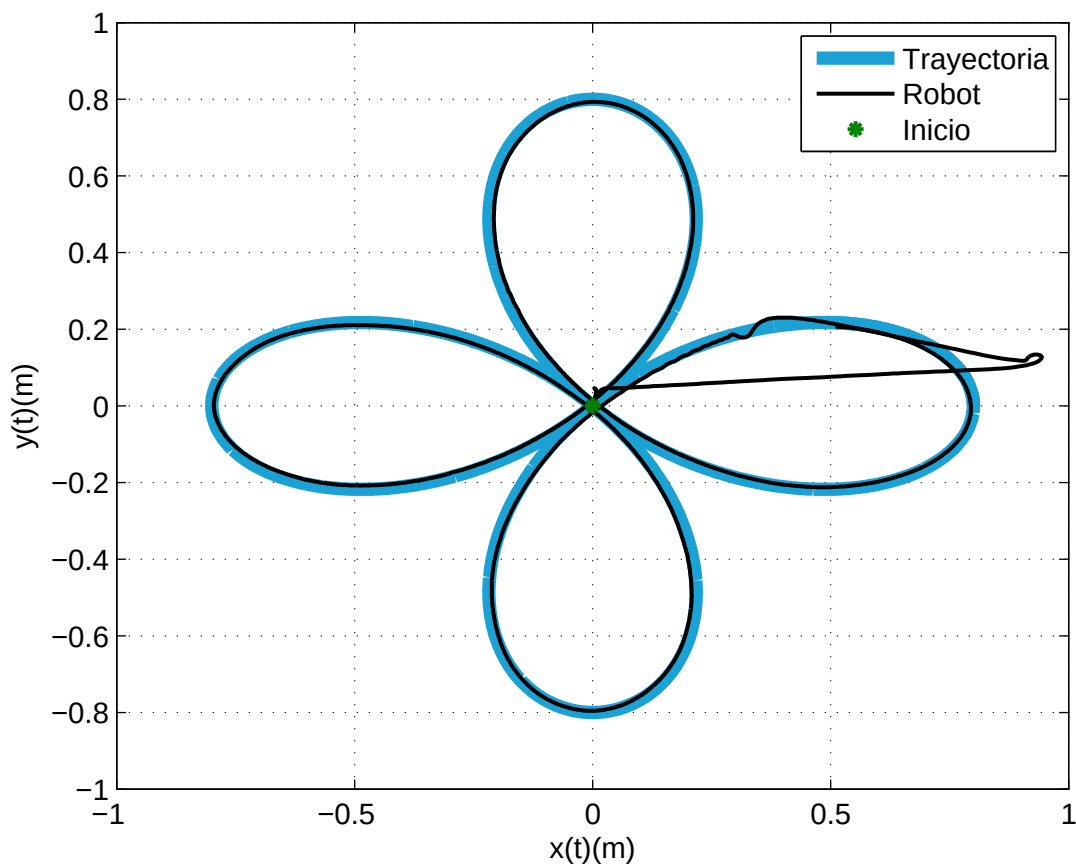


Figura 152: Trayectoria con la forma de rosa polar - 4 pétalos ($n=2$).

7.6.3 Rosa polar con 5 Pétalos

En el caso de la trayectoria de rosa polar con 5 pétalos, se define el valor de $n = 5$, $f = \frac{2\pi}{500}$ y se emplean las ganancias $K_p = 0.1$ y $K_d = 0.2$.

La figura 156, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil diferencial. Donde se observa el movimiento realizado por el robot móvil para su incorporación a la trayectoria de 5 pétalos. El robot pasa de largo la trayectoria deseada, realiza un giro de 180° y luego entra a dicha trayectoria. También se identifican unas irregularidades al momento de trazar las curvas cerradas de cada pétalo, debidas a las ganancias de la ley de control utilizadas. Sin embargo, son esos valores los que presentan el mejor comportamiento de seguimiento para esta trayectoria.

Las gráficas de la figura 153, muestran los desplazamientos del robot móvil realizados en cada eje coordenado. La dinámica de los desplazamientos en las primeras 250 unidades de tiempo, pertenecen al movimiento de incorporación a la trayectoria de 5 pétalos. El resto de la gráfica presenta un comportamiento muy parecido al observado en la figura 50.

En la figura 154, el error inicial es aproximadamente $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.8, 0)$. El error en (x) , presenta un decremento pronunciado hasta 0, luego incrementa a 0.3 y finalmente vuelve a disminuir a 0. Ésto se debe a que el robot parte de su posición inicial, pasa de largo la trayectoria deseada y finalmente se incorpora a ella. Ambos errores presentan oscilaciones en sus dinámicas, las cuales se encuentran dentro del límite de tolerancia.

La dinámica de las velocidades angulares se presenta en la figura 155, en donde se observa que aproximadamente cada 500 unidades de tiempo aparece cierta sobreoscilación, la cual produce las irregularidades en las curvas de los pétalos observadas en la figura 153. Este comportamiento se debe a las ganancias de la ley de control empleadas.

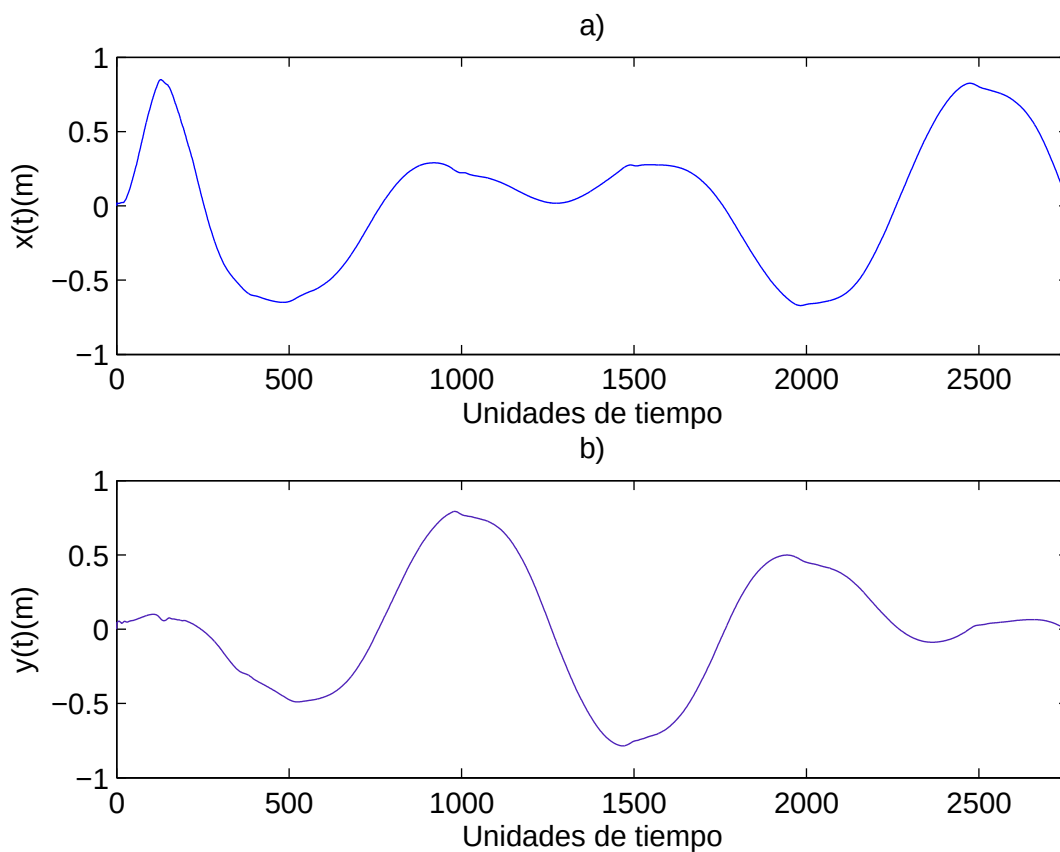


Figura 153: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

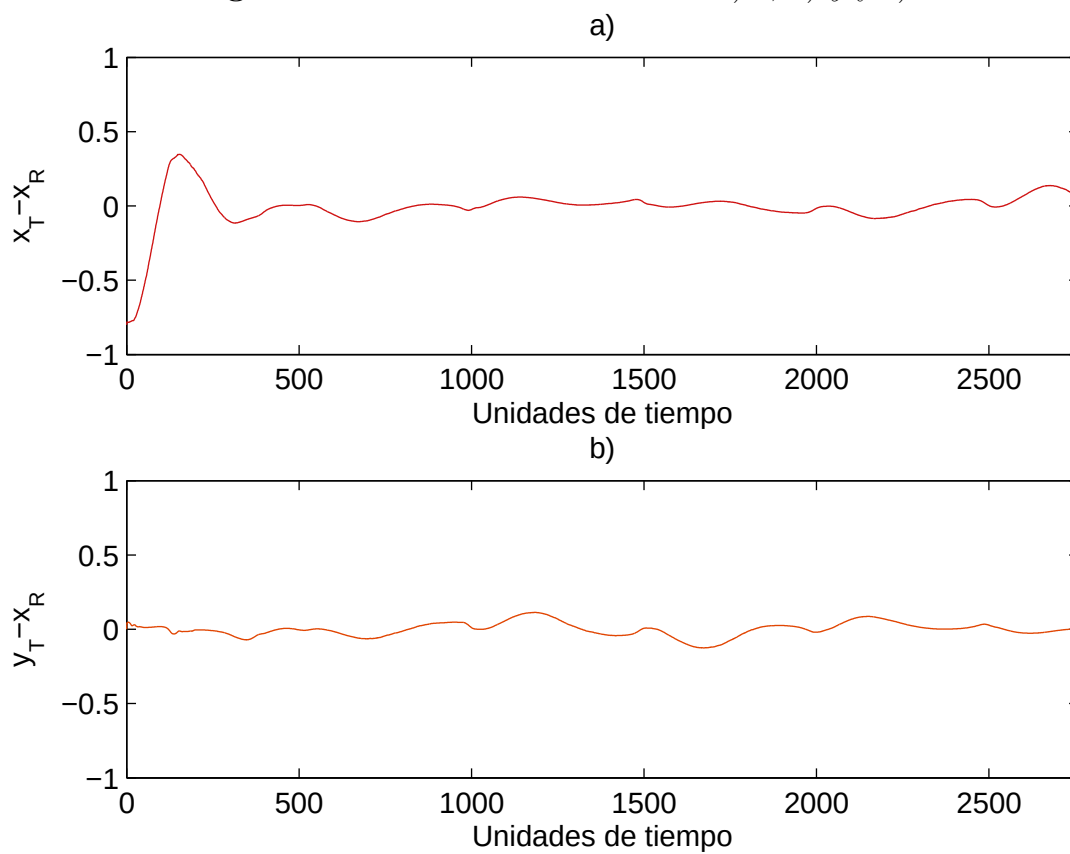


Figura 154: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

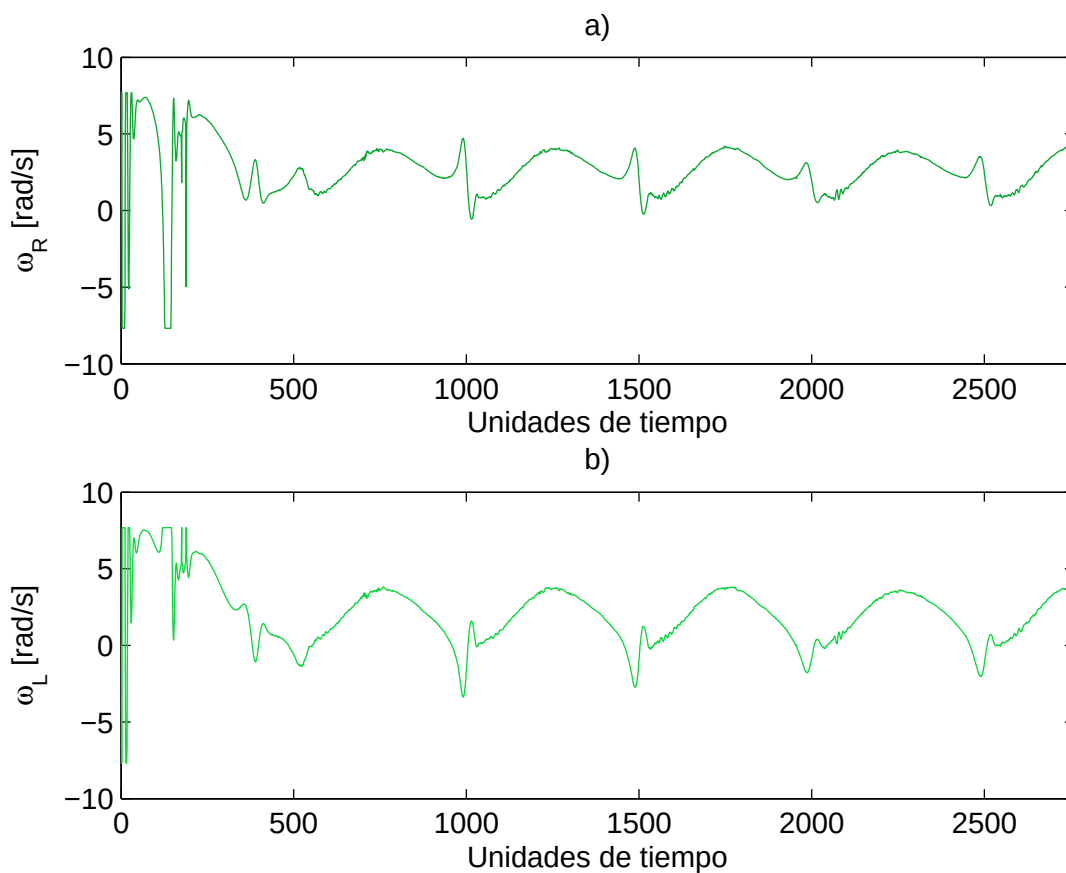


Figura 155: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

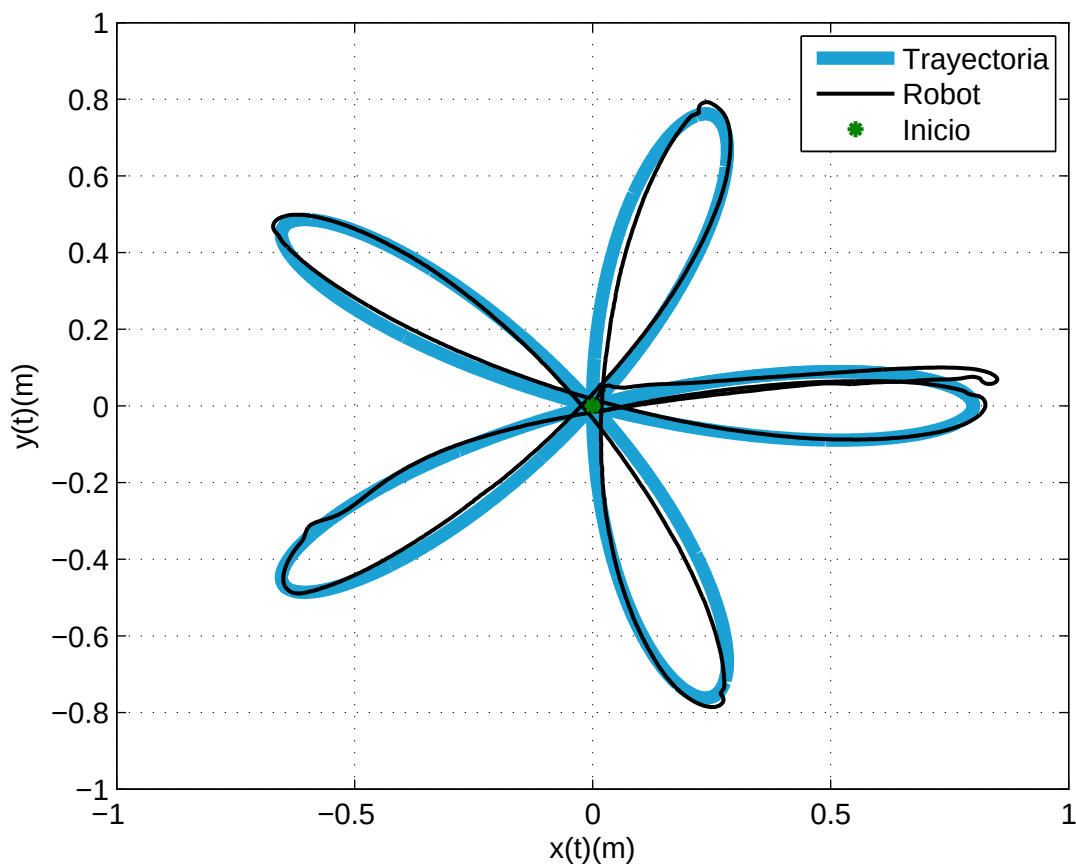


Figura 156: Trayectoria con la forma de rosa polar - 5 pétalos ($n=5$).

7.6.4 Rosa polar con 7 Pétalos

Para el caso en que la trayectoria deseada es la rosa polar de 7 pétalos, se define $n = 7$, $f = \frac{2\pi}{800}$ y se utilizan las ganancias $K_p = 0.1$ $K_d = 0.2$.

La figura 160, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil. En ella se observa el movimiento del robot para incorporarse a la trayectoria de 7 pétalos, en el cual traza una línea hacia la trayectoria pasando de largo por aproximadamente 30 cm, luego ejecuta un giro de 180° y entra a la trayectoria deseada. También se identifican ciertas irregularidades al momento de trazar cada curva cerrada de los pétalos y una oscilación en uno de ellos, entre los puntos $(-0.2, 0.6)$ y $(-0.15, 0.4)$.

La figura 157, muestra los movimientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado. En la gráfica a) de la figura 157, se observa un incremento pronunciado hasta 0.95 y luego decremento a -0.25 dentro de las primeras 250 unidades de tiempo, debido al movimiento de incorporación a la trayectoria de 7 pétalos.

El error inicial mostrado en la figura 158, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$. En ambas gráficas se observan pequeñas variaciones en el valor de error, pero que no pasan el límite de tolerancia.

En la figura 159, se muestra la dinámica de las velocidades angulares ω_R y ω_L a lo largo del tiempo. En ella se observa una serie de pulsos, los cuales provocan las irregularidades observadas en las curvas de los pétalos. También se identifica que algunos incrementos en las medias ondas presentan una oscilación, la más notable es la que se encuentra entre las 2250-2500 unidades de tiempo. Ésta particular dinámica en la velocidad, produce la oscilación observada entre los puntos $(-0.2, 0.6)$ y $(-0.15, 0.4)$, en la figura 160.

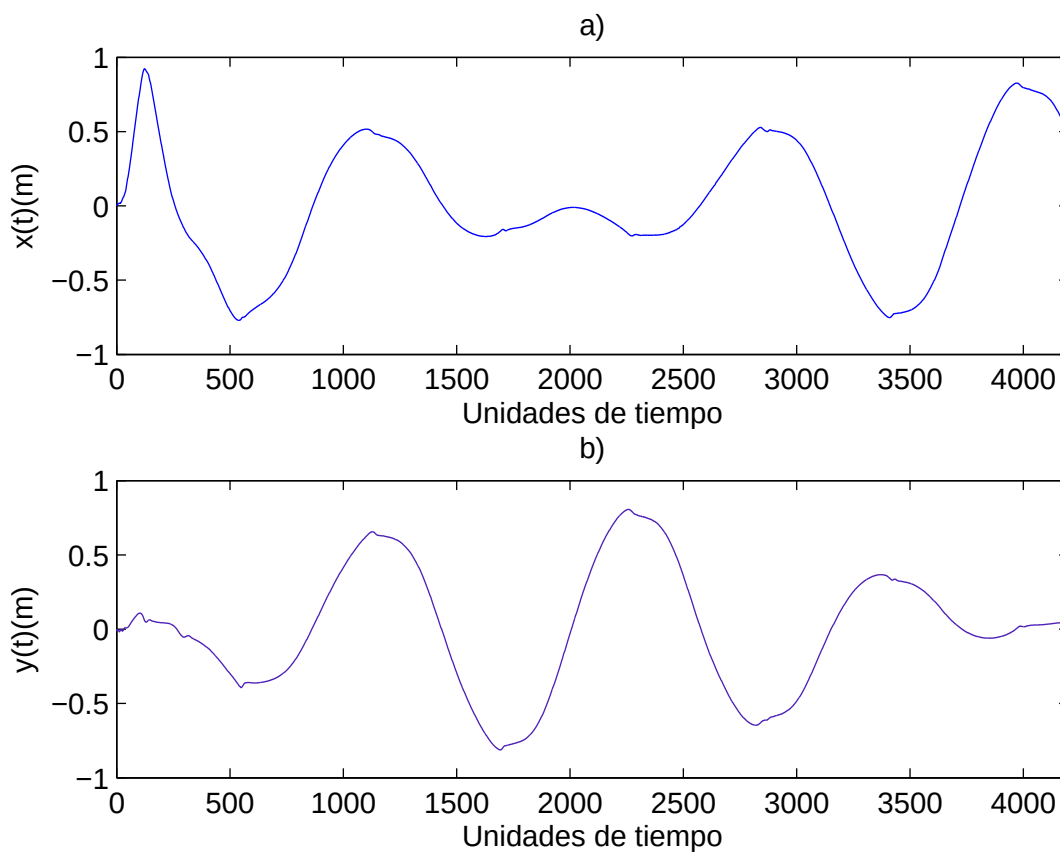


Figura 157: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

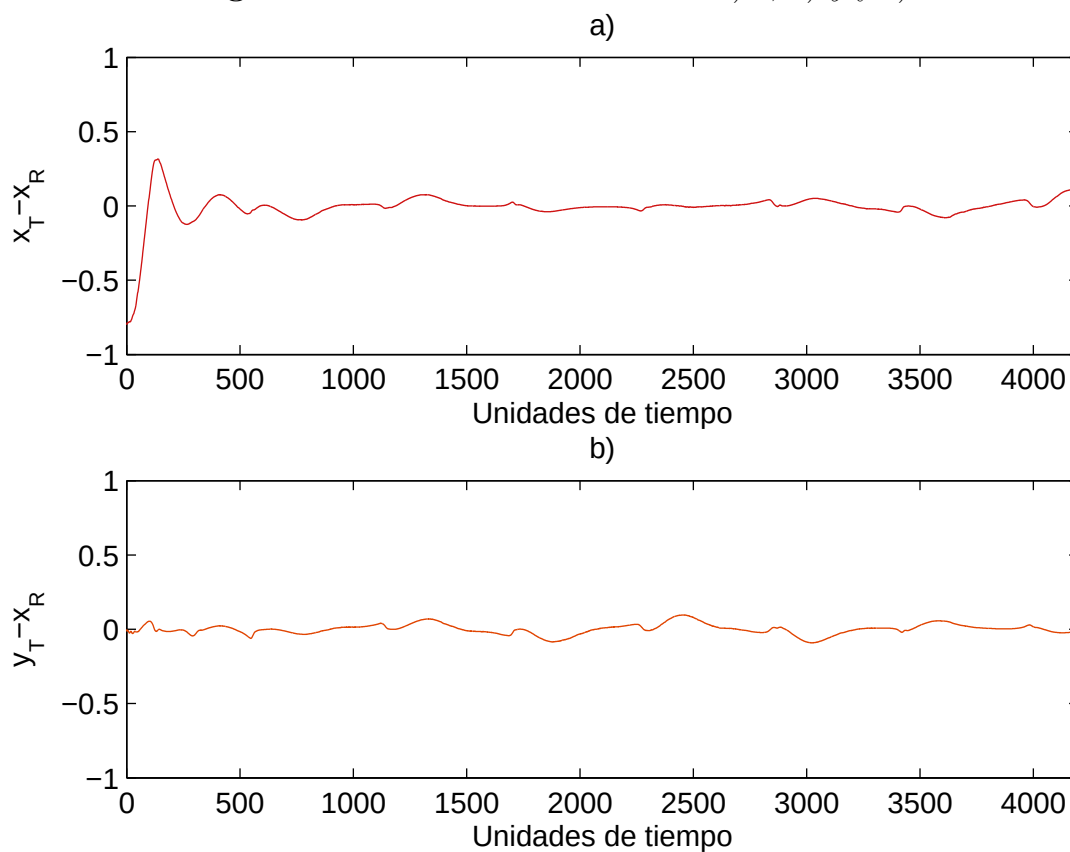


Figura 158: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

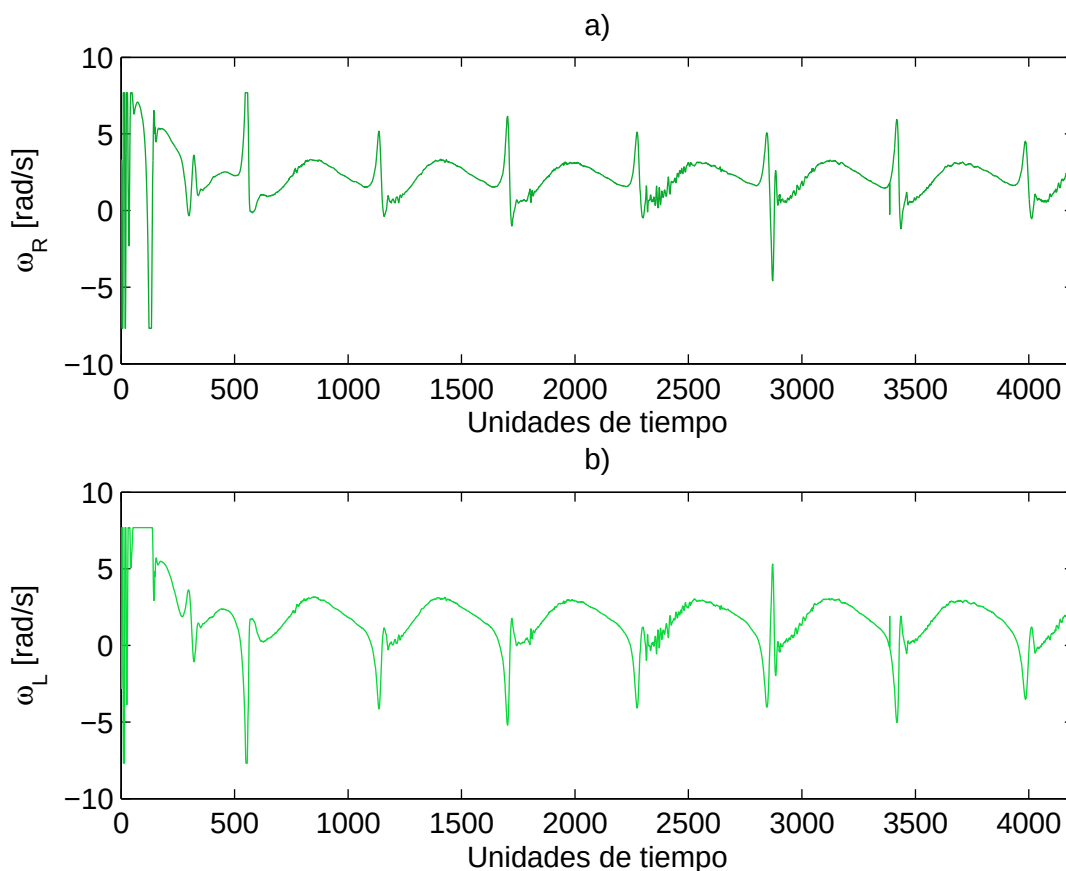


Figura 159: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

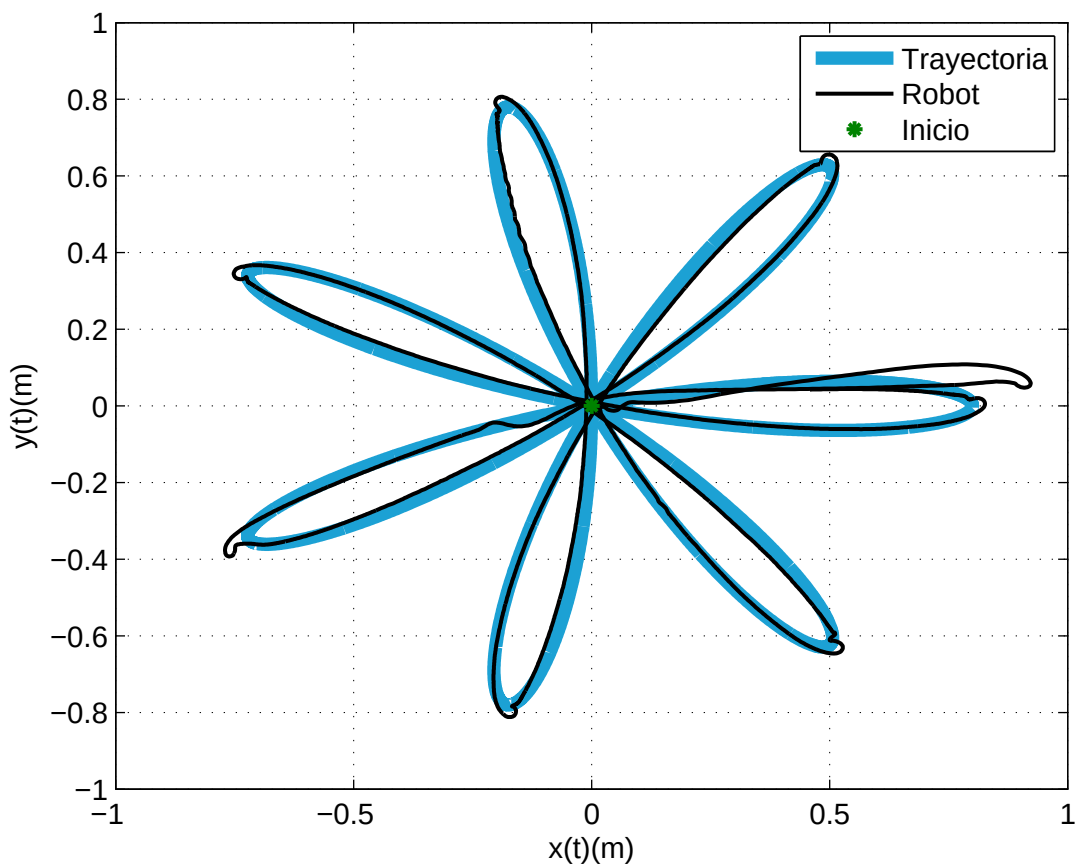


Figura 160: Trayectoria con la forma de rosa polar - 7 pétalos ($n=7$).

7.7 Trayectoria con la forma de espiral

La trayectoria con forma de espiral empleada en la implementación experimental, se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d(t) = (ab)^{(\theta t)} \cos(\theta t)$ y $Y_d(t) = (ab)^{(\theta t)} \sin(\theta t)$, con los parámetros $a = 0.4$, $b = 2$ y $\theta = \frac{2\pi}{100}$ y empleando las ganancias $K_p = 0.1$ y $K_d = 0.2$.

En la figura 164, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. Donde se observa que el robot parte de su posición inicial hacia la trayectoria espiral, trazando una línea recta y luego realiza un cambio de dirección repentino para avanzar y entrar a la trayectoria deseada.

La figura 161, muestra los movimientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado. Se observa el incremento pronunciado en la gráfica a) de la figura 161 correspondiente al trazado de la línea recta en el eje (x), en las primeras 10 unidades de tiempo. Luego en la figura 161 entre las 10-250 unidades de tiempo, los valores para la gráfica a) empiezan a disminuir, mientras que los valores en la gráfica b) comienzan a incrementar. Éste comportamiento corresponde a la incorporación a la trayectoria deseada.

En la figura 162, se observa un error inicial $X_T - X_R = -1$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (1,0). El error en (x) disminuye a cero en las primeras 10 unidades de tiempo, sin embargo, debido a que el robot aún no se encuentra en la trayectoria de la espiral, se identifica cierto error entre las 10-375 unidades de tiempo, el cual pertenece a la diferencia entre la curva trazada por el robot y la trayectoria deseada en el movimiento de incorporación del robot a la trayectoria espiral.

La figura 163 muestra la dinámica de las velocidades angulares ω_R y ω_L a lo largo del tiempo. Donde a partir de las 1250 unidades de tiempo, se observan pequeñas variaciones y una sobreoscilación entre 2150-2300 en la dinámica de las velocidades, debido a que la dinámica de la espiral va obteniendo valores más pequeños, pues tiende al punto 0.

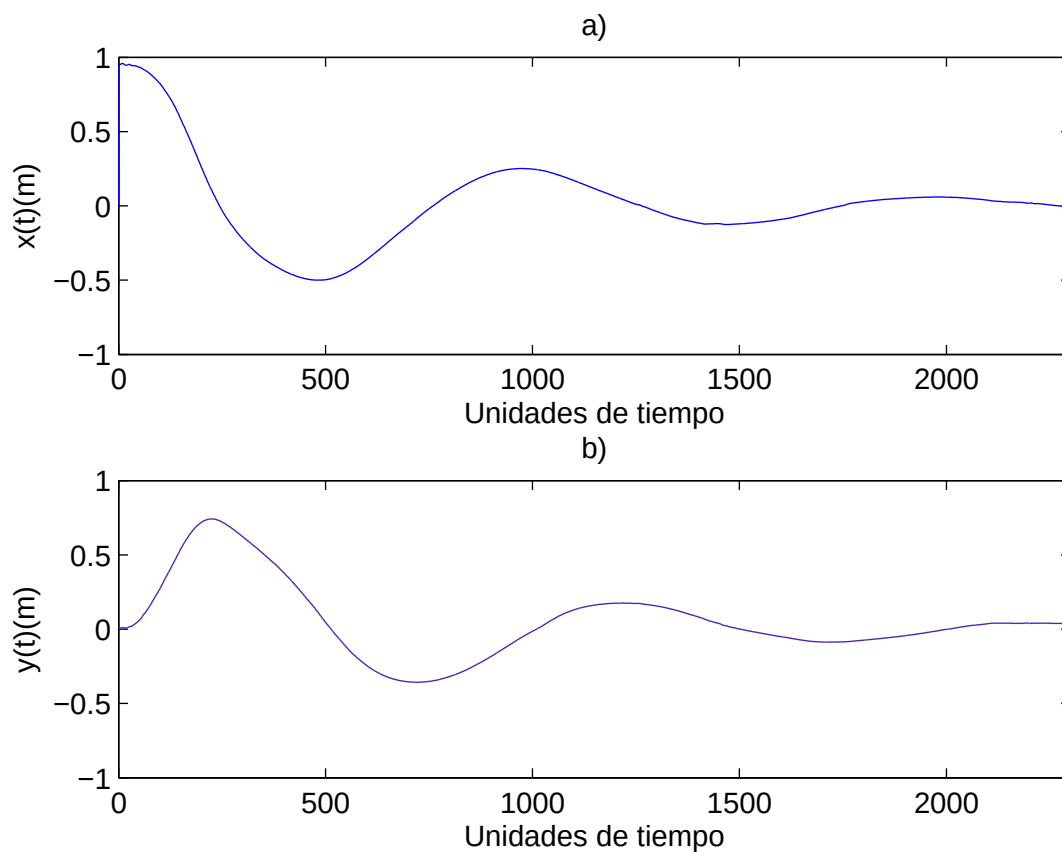


Figura 161: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

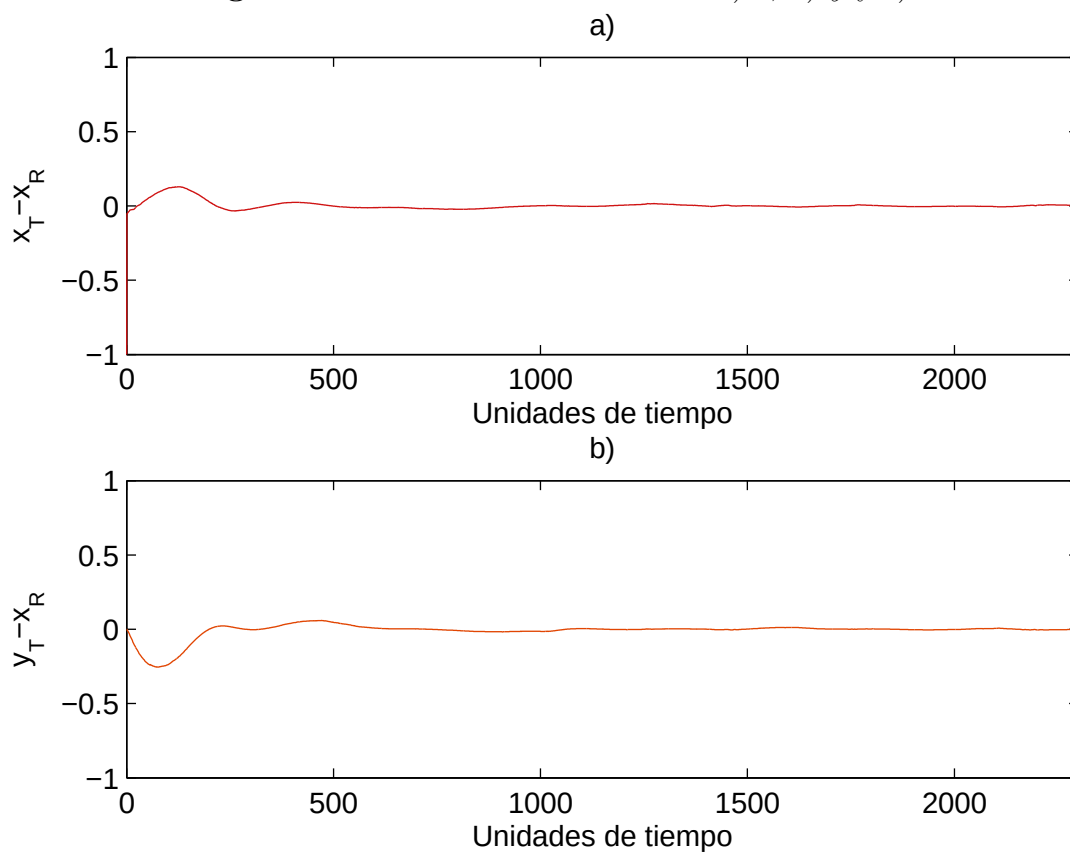


Figura 162: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

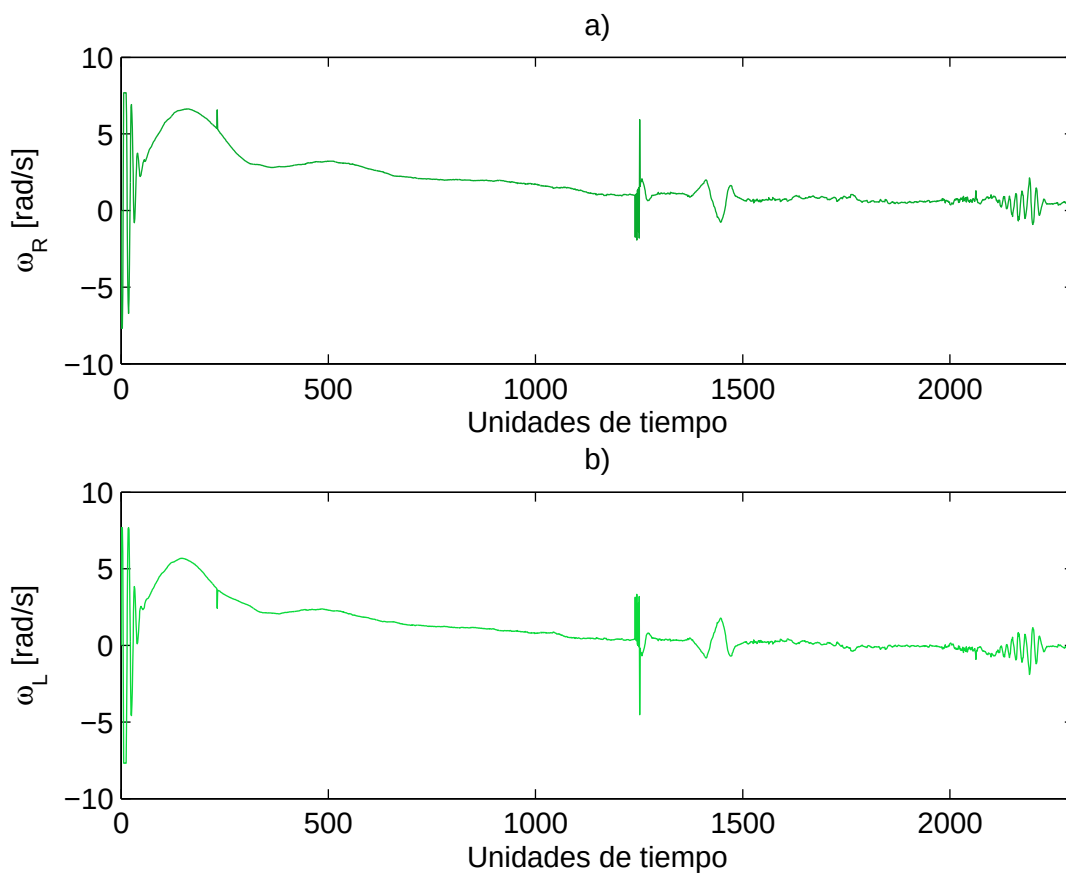


Figura 163: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

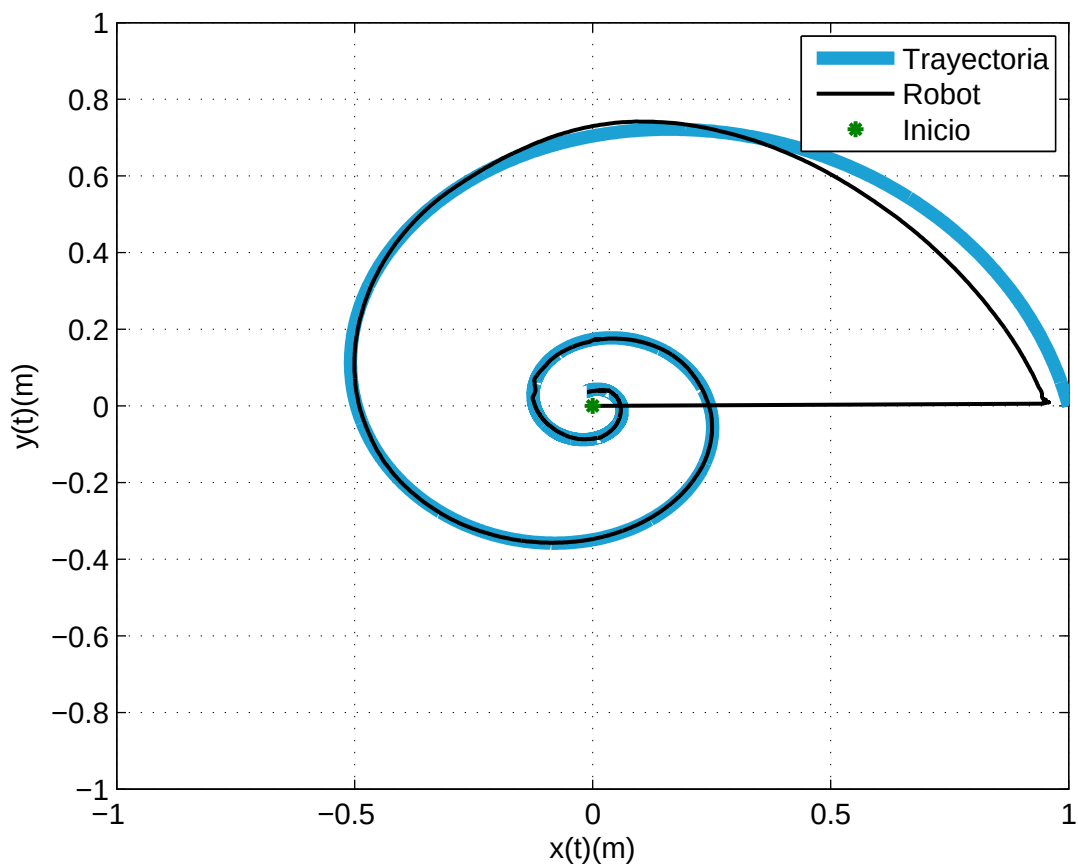


Figura 164: Trayectoria con la forma de espiral.

7.8 Trayectorias con la forma de epicicloides

Las trayectorias deseadas con la forma de epicicloides se encuentran definidas por las ecuaciones: $X_d(t) = (r_1 + r_2) \cos(ft) + r_2 \cos((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$, $Y_d(t) = (r_1 + r_2) \sin(ft) + r_2 \sin((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$, donde al variar la relación $k = \frac{r_1}{r_2}$ se obtienen epicicloides diferentes.

7.8.1 Cardioide (k=1)

En la trayectoria con la forma de cardioide, se debe tener una relación $k = 1$, por lo que los valores de los parámetros r , se han definido con $r_1 = 0.3$ y $r_2 = 0.3$. Para este caso se han empleado una $f = \frac{2\pi}{150}$, con las ganancias $K_p = 0.5$ y $K_d = 1.5$.

En la figura 168, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. Donde se observa que el robot parte de su posición inicial hacia la trayectoria cardioide, en línea recta con una orientación de 22° . Una vez alcanza la trayectoria deseada, realiza un giro repentino que le permite incorporarse a ella.

La figura 62, muestra los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado, en ella se observa un incremento pronunciado en la gráfica a) y uno más sutil en la gráfica b), dentro de las primeras 250 unidades de tiempo, los cuales corresponden al trazado de la línea recta hacia la trayectoria cardioide, por parte del robot móvil.

El error inicial mostrado en la figura 166, es $X_T - X_R = -0.9$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.9, 0)$. Una vez transcurren las 250 unidades de tiempo, el error en (x) disminuye a 0, pues el robot se encuentra dentro de la trayectoria deseada.

La figura 167, muestra la dinámica correspondiente a las velocidades angulares en el transcurso del tiempo. Donde en el intervalo 720-850 se observa la singularidad por $v = 0$, la cual es provocada por el trazado del vértice de la cardioide.

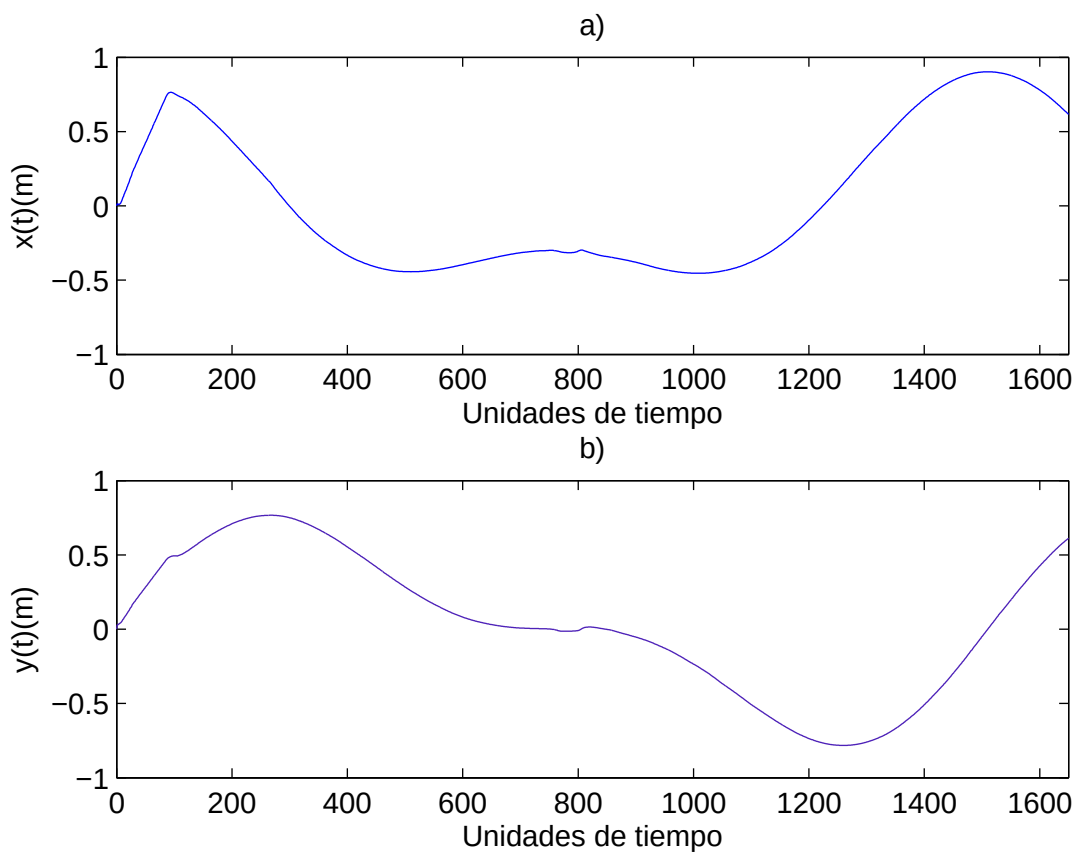


Figura 165: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

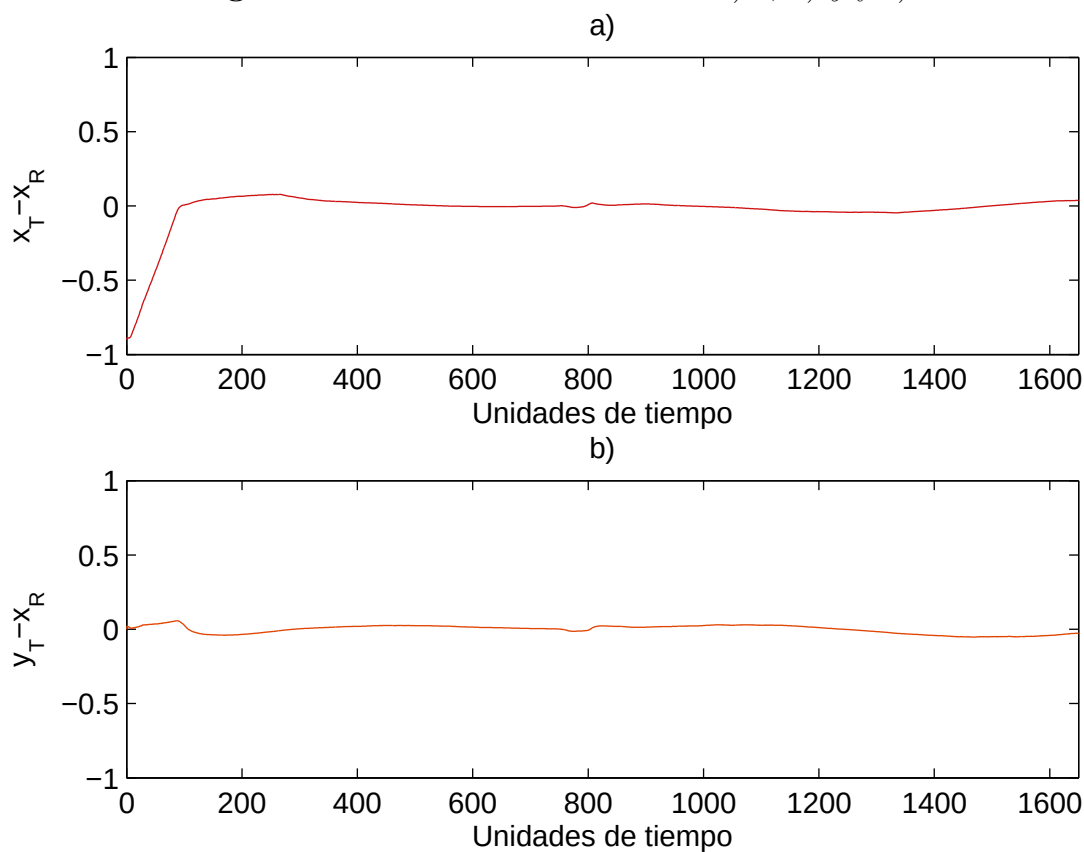


Figura 166: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

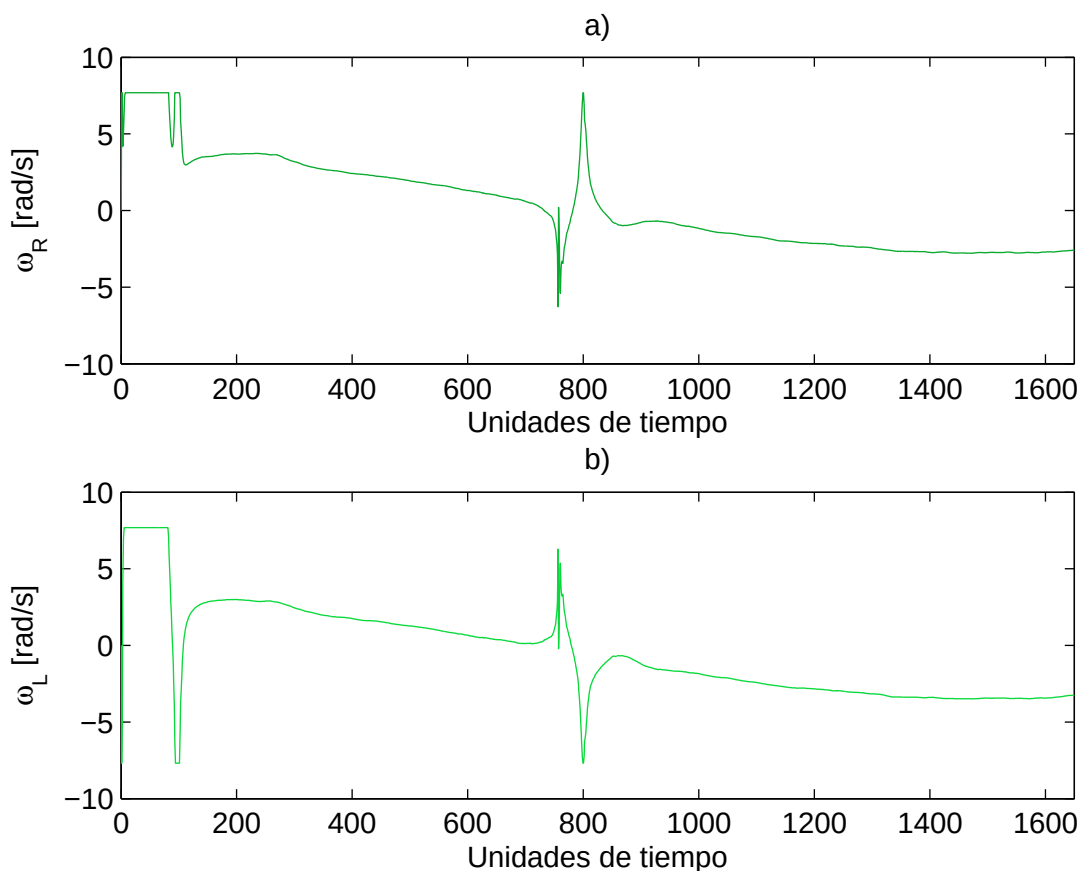


Figura 167: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

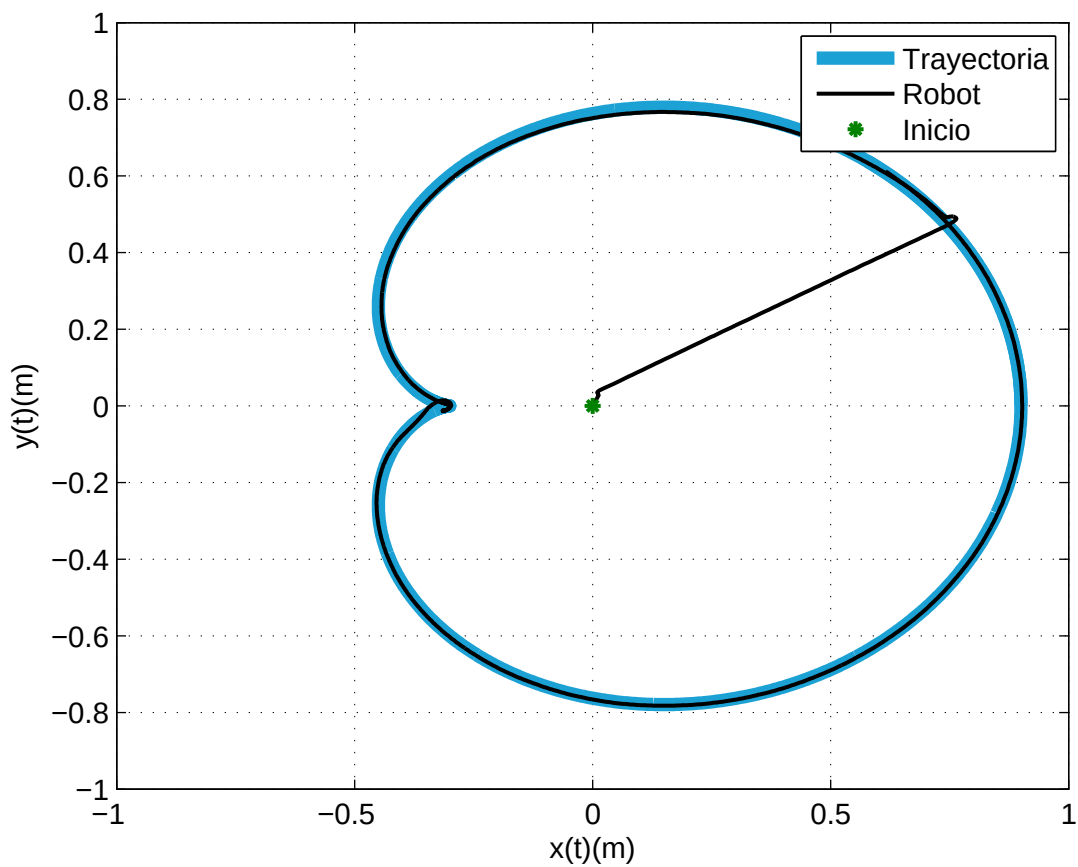


Figura 168: Trayectoria con la forma de cardioide.

7.8.2 Nefroide ($k=2$)

A la trayectoria nefroide le corresponde una $k = 2$, por lo que se han definido los parámetros $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.2$ y se ha seleccionado una $f = \frac{2\pi}{150}$ con las ganancias $K_p = 0.5$, $K_d = 1.5$.

La figura 172 muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. En ella se observa que el robot realiza un movimiento en línea recta hacia la trayectoria de la nefroide con dirección de 30° y una vez alcanzada el robot gira para incorporarse a ella. Además es notable que el robot no puede trazar los vértices de manera correcta, sino que realiza unas pequeñas curvas.

Las gráficas de la figura 169, muestran los desplazamientos realizados por el robot en cada eje coordenado. Donde se observa un incremento pronunciado tanto en el eje (x) como en el eje (y), dentro de las primeras 100 unidades de tiempo, los cuales corresponden al movimiento de incorporación a la nefroide.

El error inicial mostrado en la figura 170, es aproximadamente de $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria nefroide es $(0.8, 0)$. El error en el eje (x) disminuye a cero conforme el robot avanza hacia la trayectoria, mientras que el error en (y) presenta ligeras variaciones, manteniéndose cercano a cero. Los cambios repentinos de la gráfica a), en 400 y 1130 unidades de tiempo, se deben al trazado las pequeñas curvas en los vértices de la trayectoria.

La figura 167, muestra la dinámica correspondiente a las velocidades angulares en el transcurso del tiempo. Donde se observa que las singularidades provocadas por $v = 0$, se presentan en 400 y 1130 unidades de tiempo. Éstas dinámicas permiten al robot móvil trazar los vértices de la cardioide.

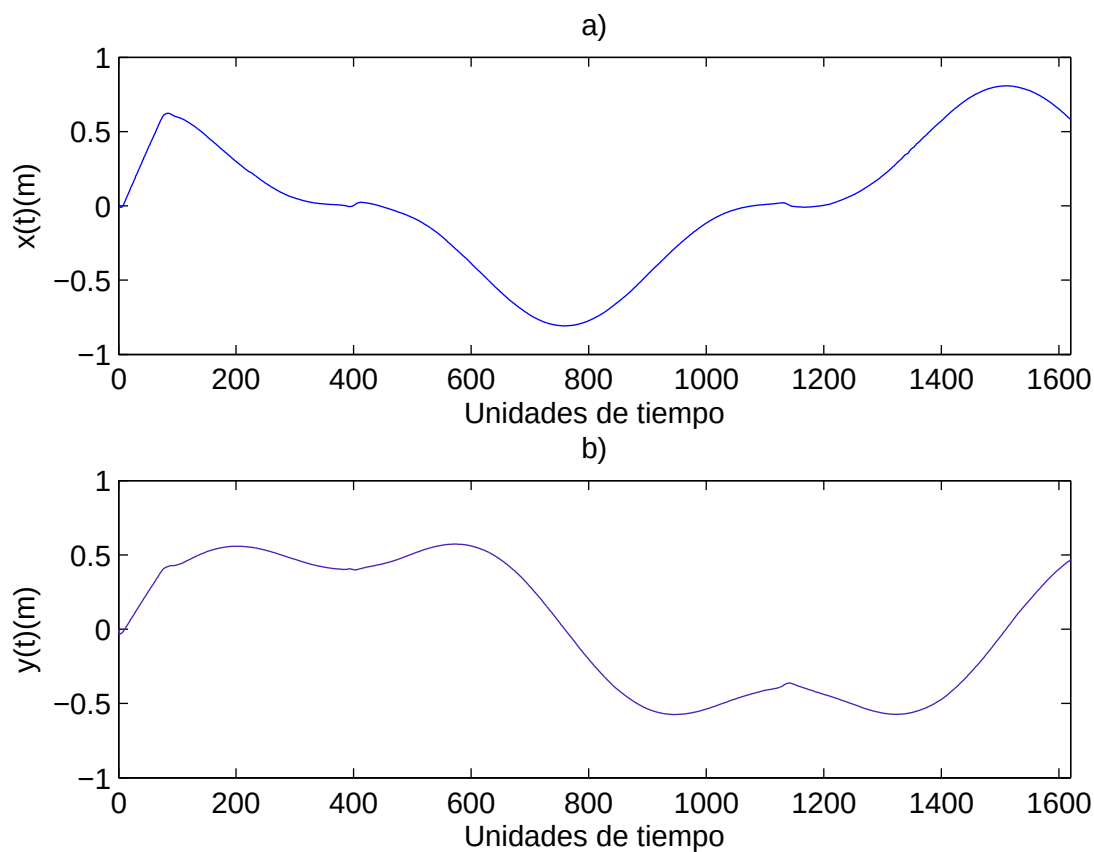


Figura 169: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

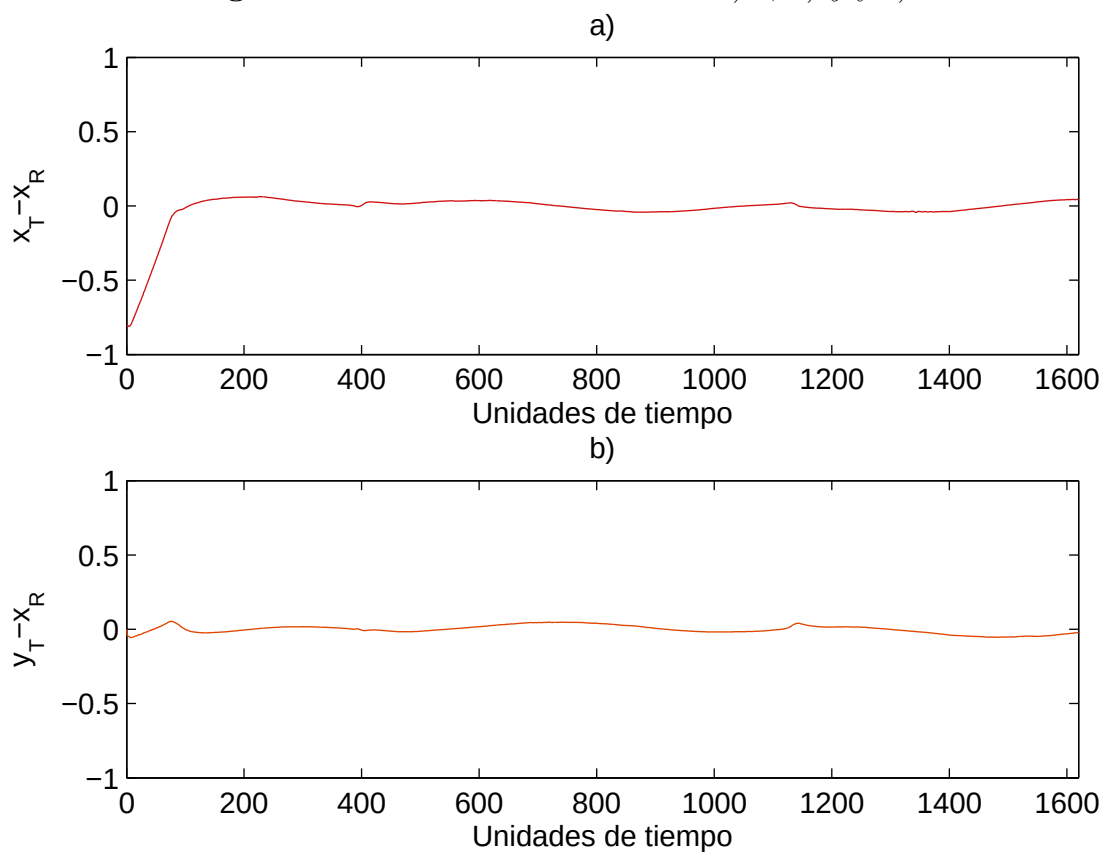


Figura 170: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

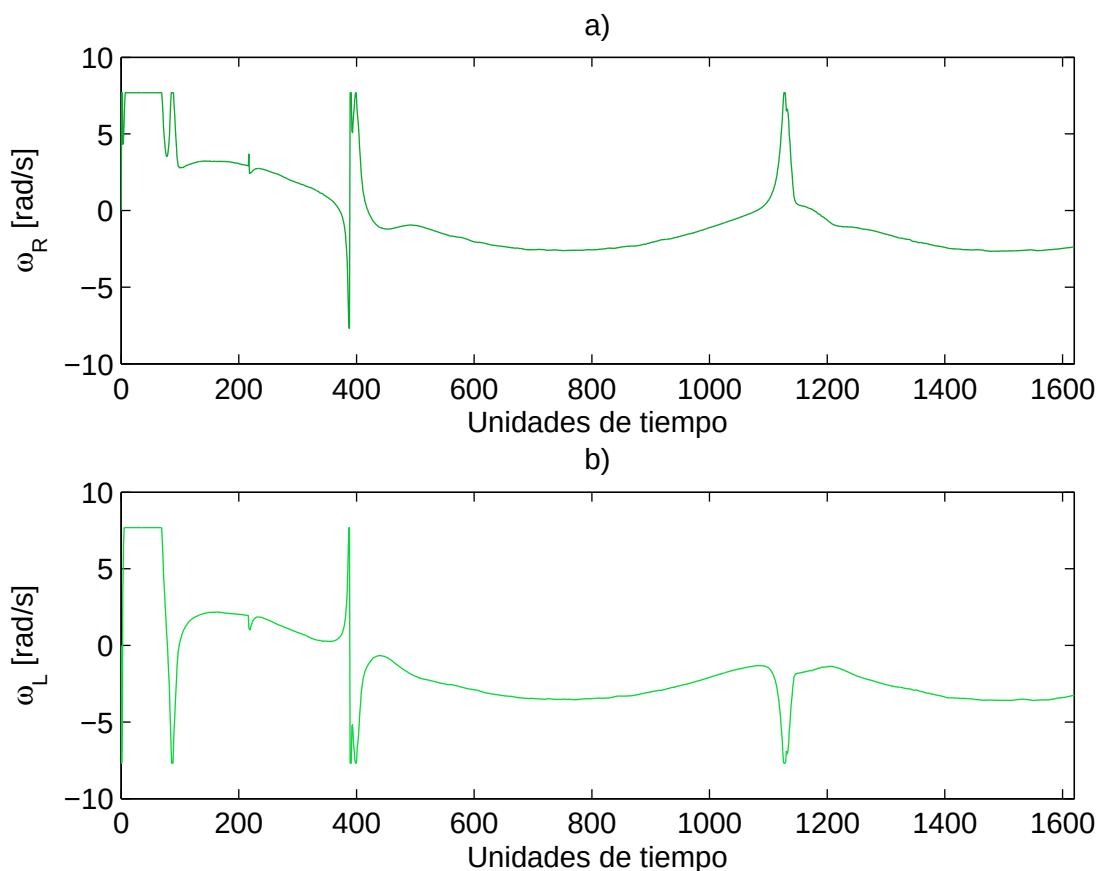


Figura 171: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

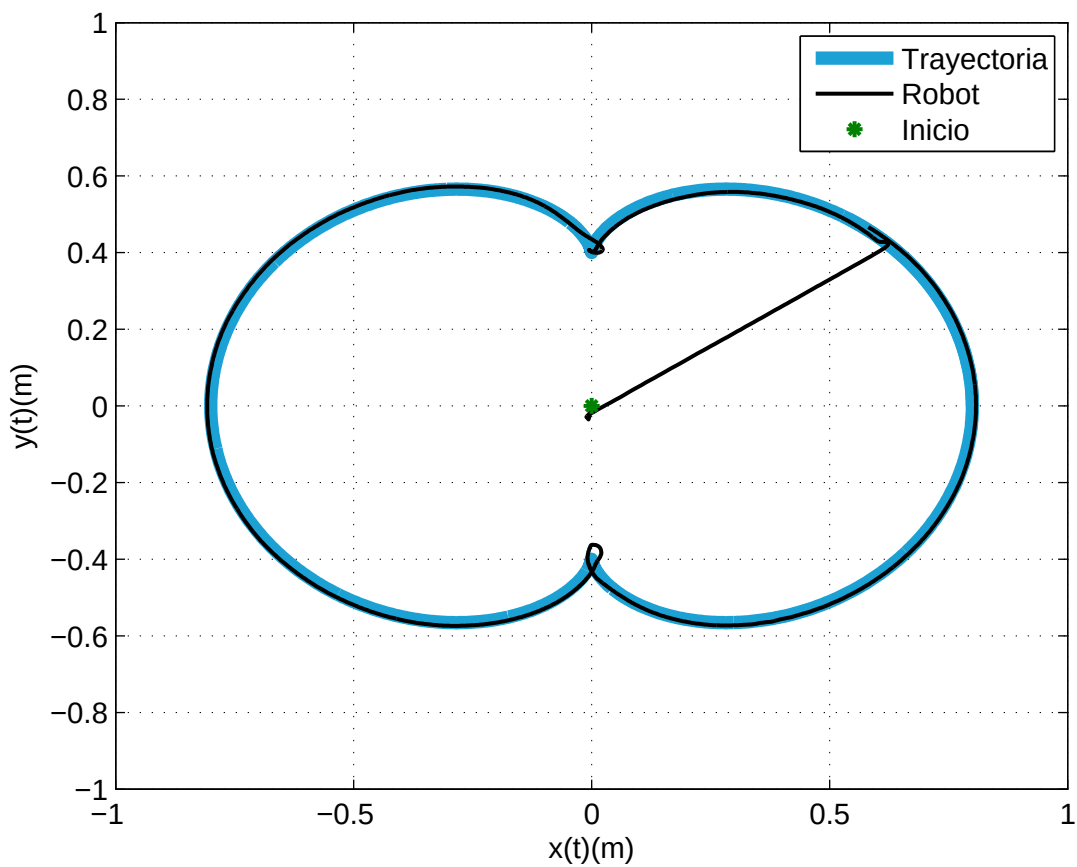


Figura 172: Trayectoria con la forma de nefroide.

7.8.3 Epicicloide de 3 arcos ($k=3$)

La trayectoria de la epicicloide con 3 arcos requiere una $k = 3$, por lo tanto, se han definido los parámetros $r_1 = 0.45$, $r_2 = 0.15$ y se utiliza una $f = \frac{2\pi}{150}$ y las ganancias $K_p = 0.5$, $K_d = 1.5$.

En la figura 176, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil. En ella se observa que el robot realiza un movimiento en línea recta hacia la trayectoria de 3 arcos con dirección de 30° y una vez alcanzada el robot gira para incorporarse a ella y trazar uno de sus vértices. También se identifica que el robot traza los vértices de la cardioide, realizando pequeñas curvas.

La figura 173, muestra las gráficas correspondientes a los movimientos realizados por el robot en cada eje coordenado, donde tanto la gráfica a) como la b), muestran un incremento pronunciado dentro de las primeras 100 unidades de tiempo. Éste aumento en los valores, corresponde al trazado de la línea recta realizada por el robot para incorporarse a la trayectoria deseada.

Las gráficas de la figura 174, muestran un error inicial de aproximadamente $X_T - X_R = -0.75$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.75, 0)$. Conforme el robot avanza, el error en el eje (x) disminuye considerablemente hasta llegar a cero, mostrando ligeras variaciones en sus valores, al igual que el error en el eje (y).

En la figura 179, se presentan las dinámicas de las velocidades angulares a lo largo del tiempo. Donde la dinámica de las velocidades para el trazado de los vértices de la trayectoria, aparecen en 350, 760 y 1250 unidades de tiempo. Las dinámicas que se encuentran entre estas singularidades, pertenecen a las velocidades que permiten al robot trazar los 3 arcos de la trayectoria deseada.

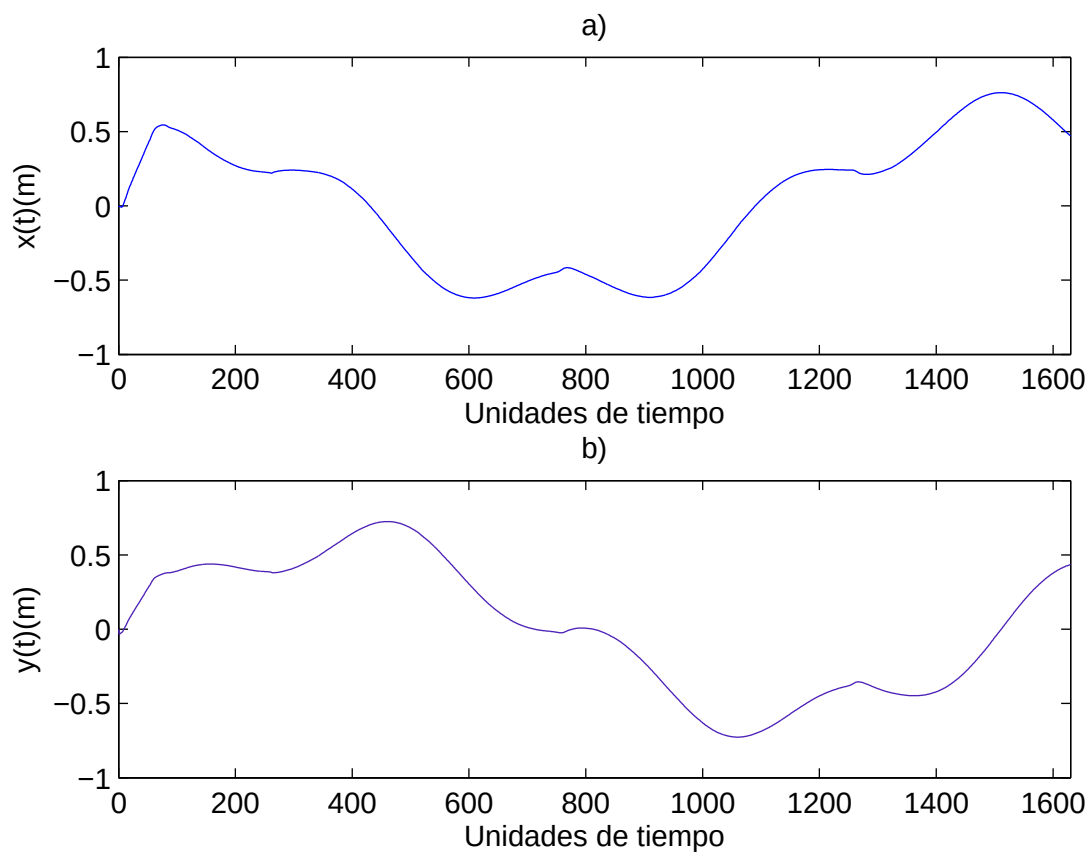


Figura 173: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

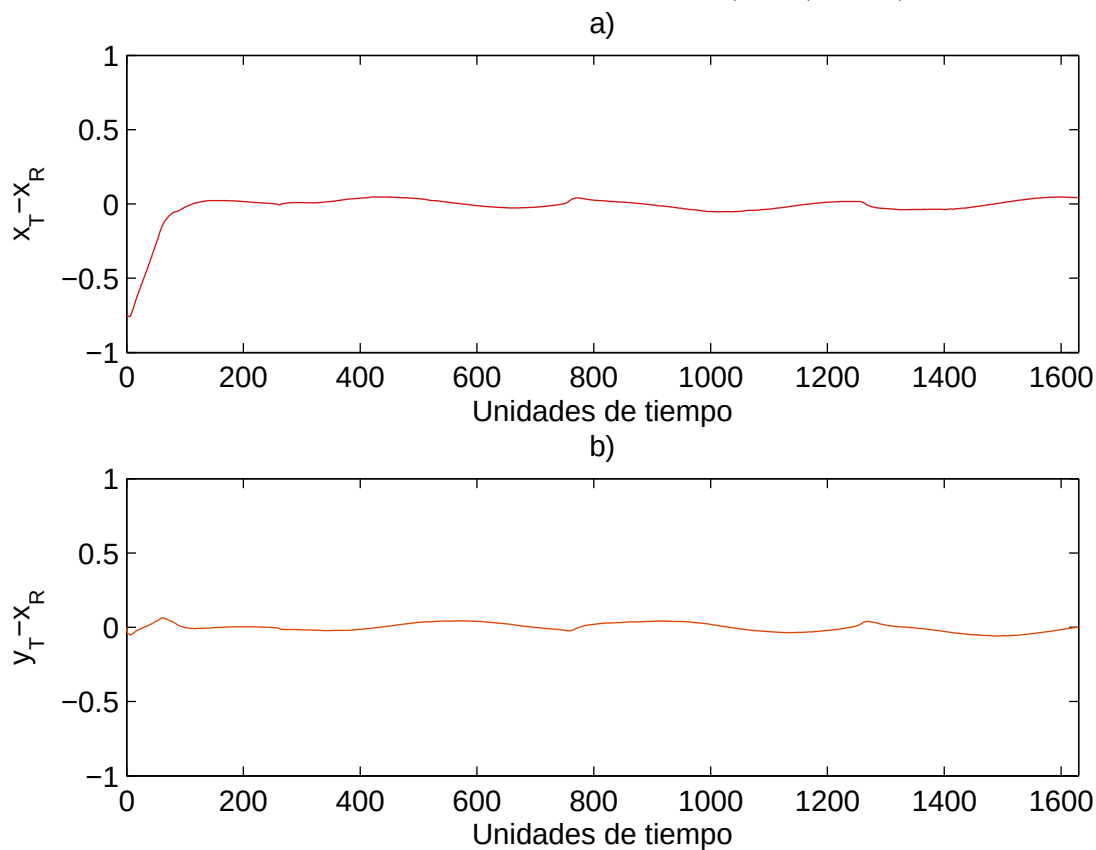


Figura 174: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

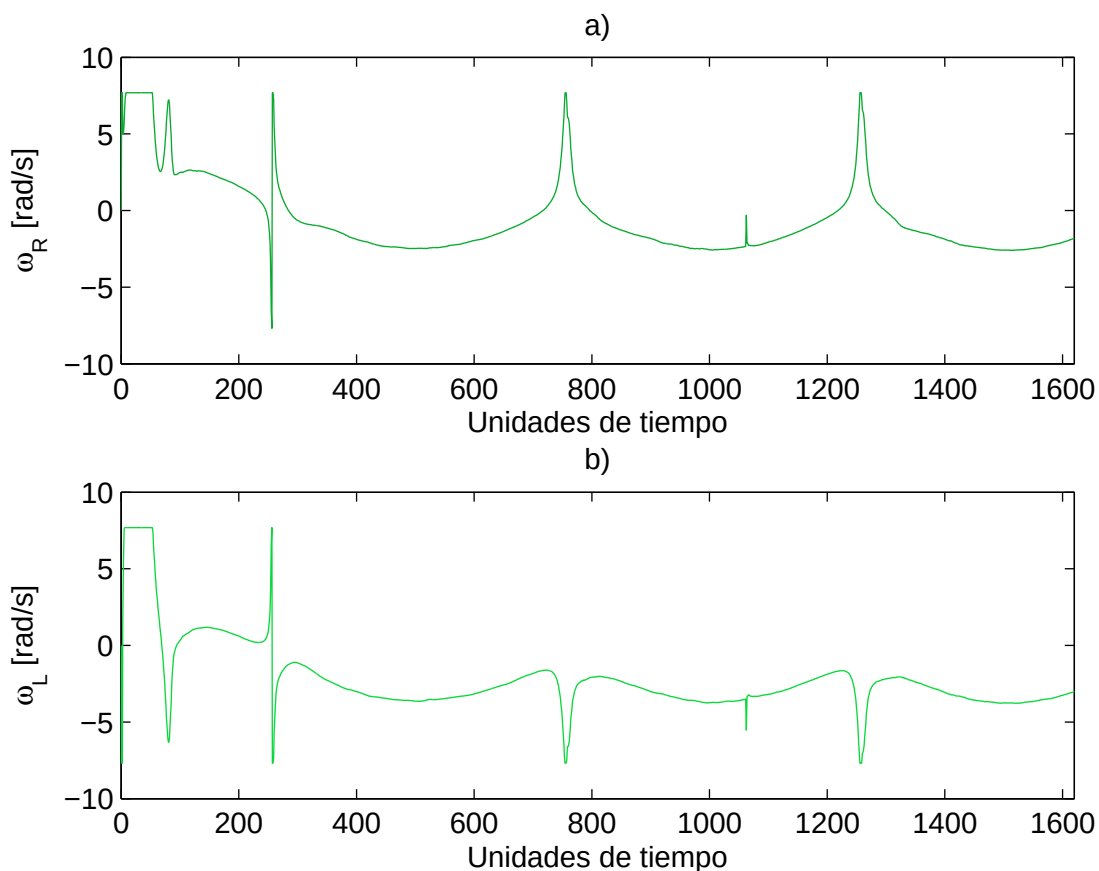


Figura 175: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

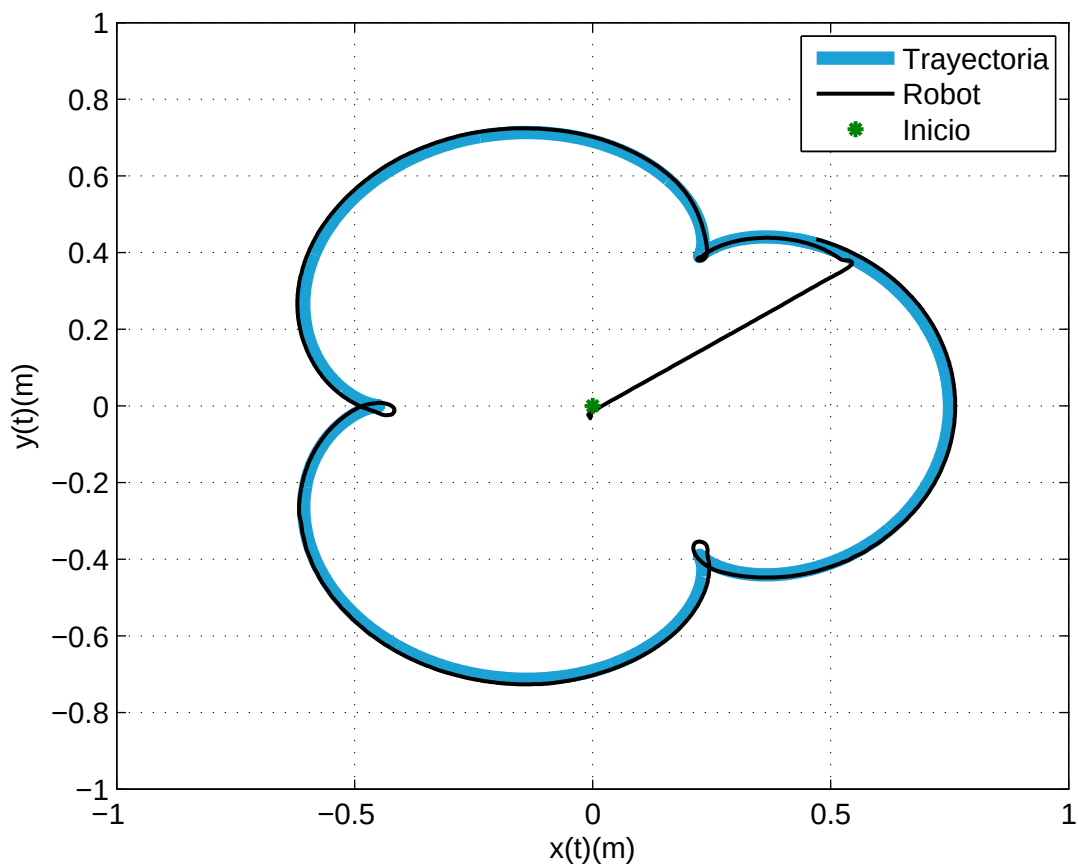


Figura 176: Trayectoria con la forma de epicicloide de 3 arcos ($k=3$).

7.8.4 Epicicloide de 4 arcos (k=4)

Para la trayectoria epicicloide de 4 arcos, es necesaria una relación $k = 4$, por lo que se han definido los parámetros $r_1 = 0.6$, $r_2 = 0.15$ y se ha empleado una $f = \frac{2\pi}{175}$ con las ganancias $K_p = 0.5$, $K_d = 1$.

La figura 180, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. Donde se observa que el robot realiza un primer movimiento en línea recta hacia la trayectoria de 4 arcos, pasando de largo por aproximadamente 40cm, posteriormente da un giro de 360° para regresar sobre la línea recta y luego trazar una curva que le permite incorporarse a la trayectoria deseada en uno de los vértices. También se identifica que el robot traza los vértices realizando pequeñas curvas.

Las gráficas de la figura 177, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado, en ella se observa tanto en la gráfica a) como en la gráfica b), un incremento y decremento pronunciado, en las primeras 250 unidades de tiempo. Esta dinámica corresponde al movimiento del robot para incorporarse a la trayectoria de 4 arcos.

El error inicial mostrado en la figura 178, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.85$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.85,0). Se observa que el error en el eje (x) disminuye a 0, luego aumenta a 0.25 y vuelve a disminuir dentro de las primeras 250 unidades de tiempo. La dinámica de la gráfica b) que se encuentra entre 125-200 unidades de tiempo, en la figura 178, corresponde al error que existe cuando el robot pasa de largo la trayectoria de 4 arcos y regresa para incorporarse a ella. Una vez el robot se encuentra dentro de la trayectoria deseada, los errores tanto para el eje (x) como para el (y) mantienen pequeñas oscilaciones cercanas a 0.

La figura 179, muestra la dinámica de las velocidades angulares ω_R y ω_R a lo largo del tiempo.

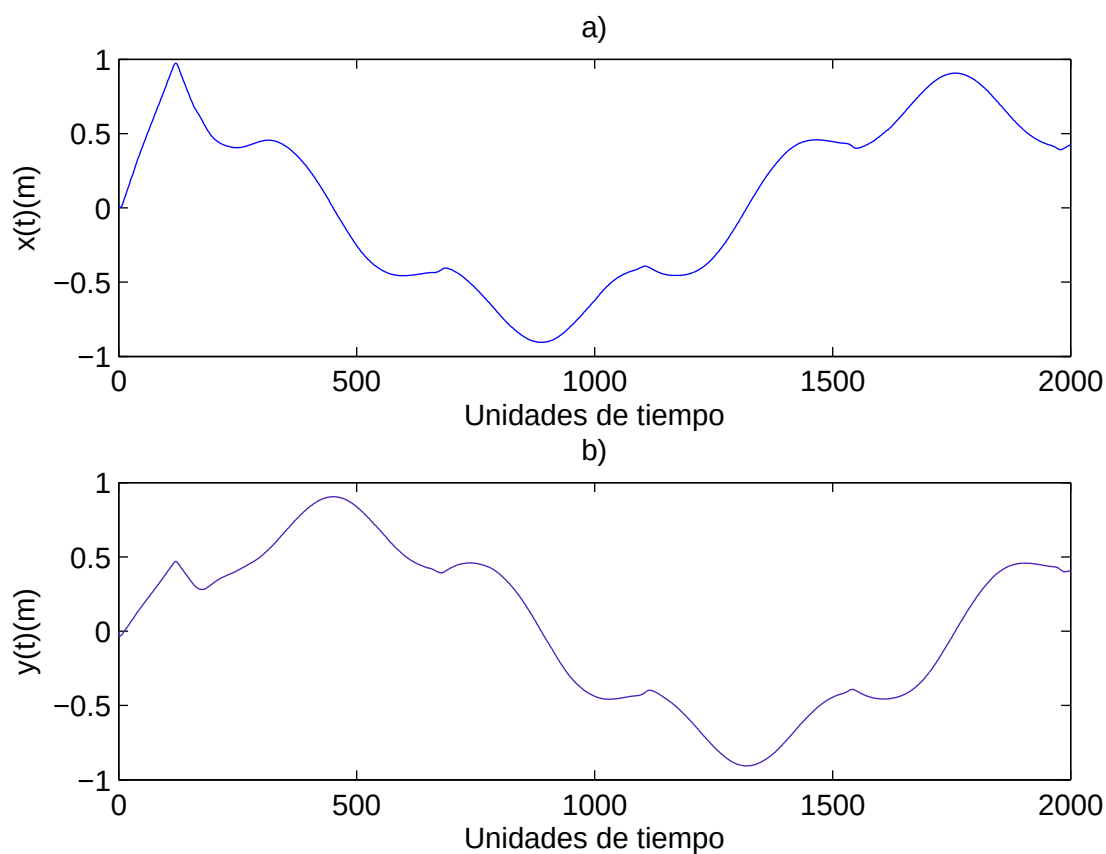


Figura 177: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

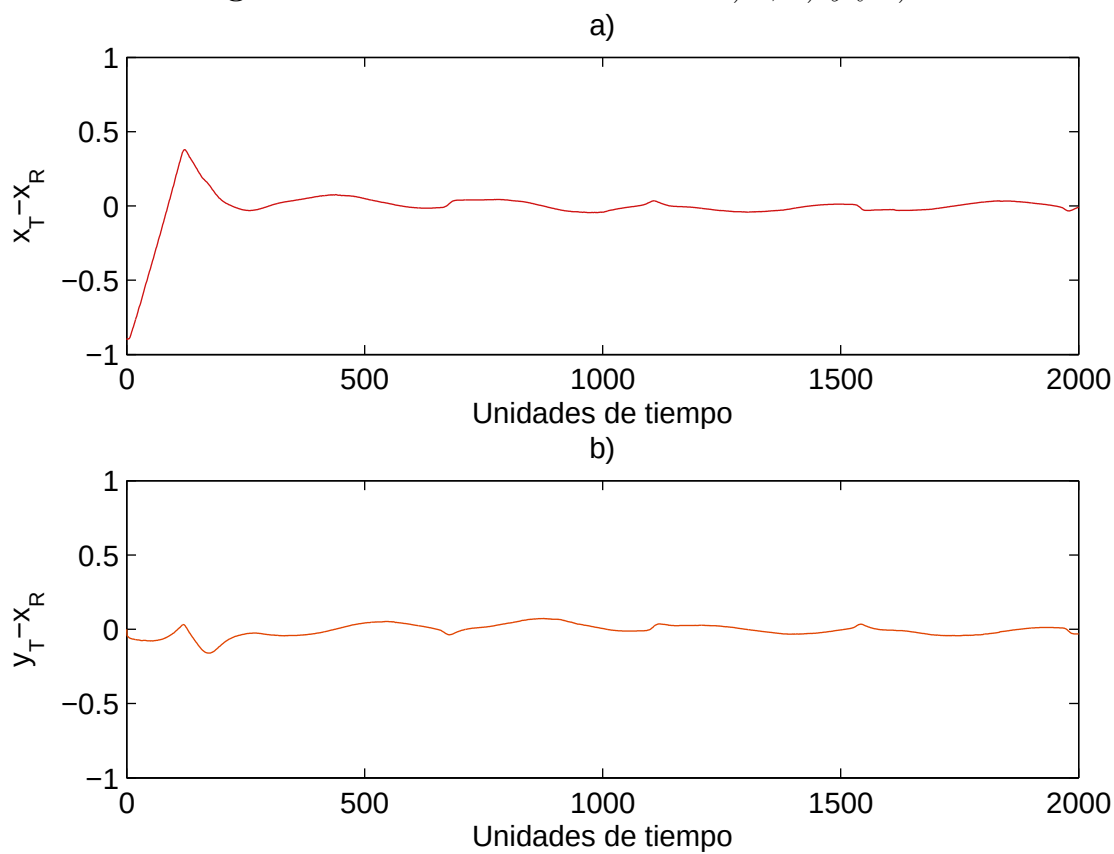


Figura 178: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

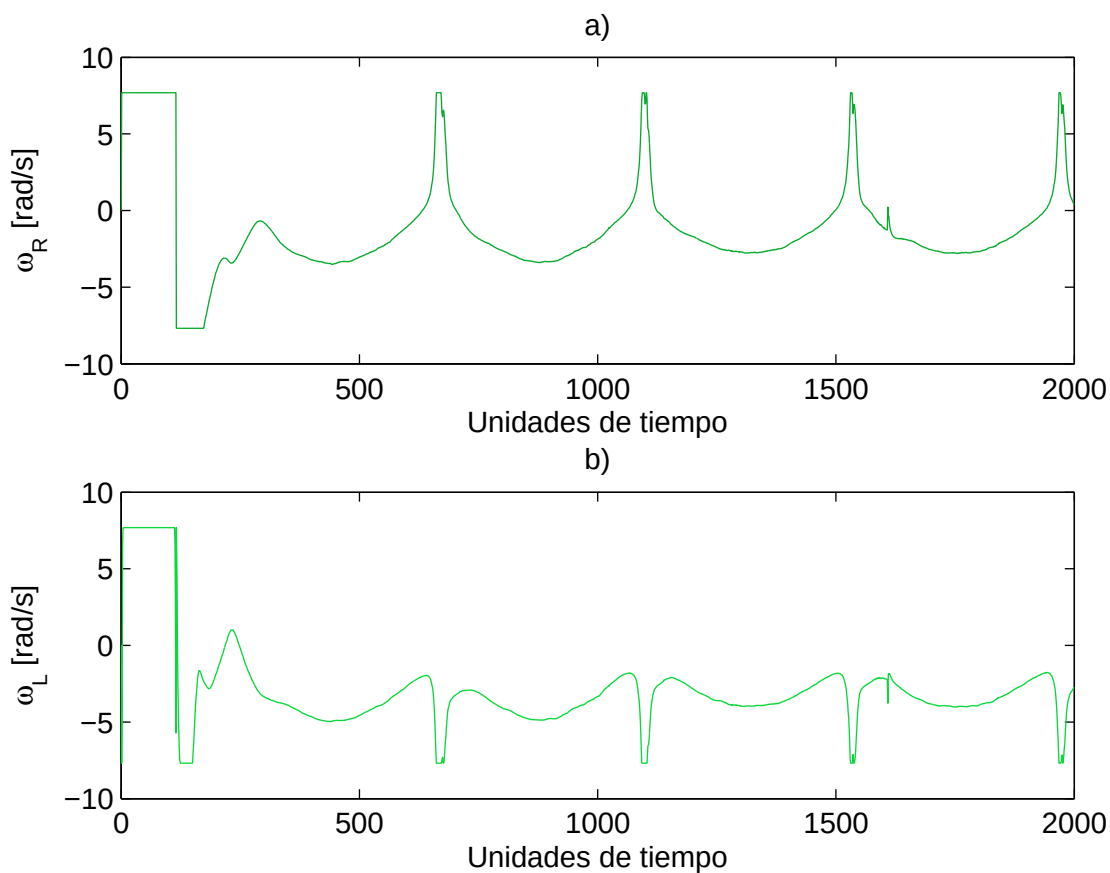


Figura 179: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

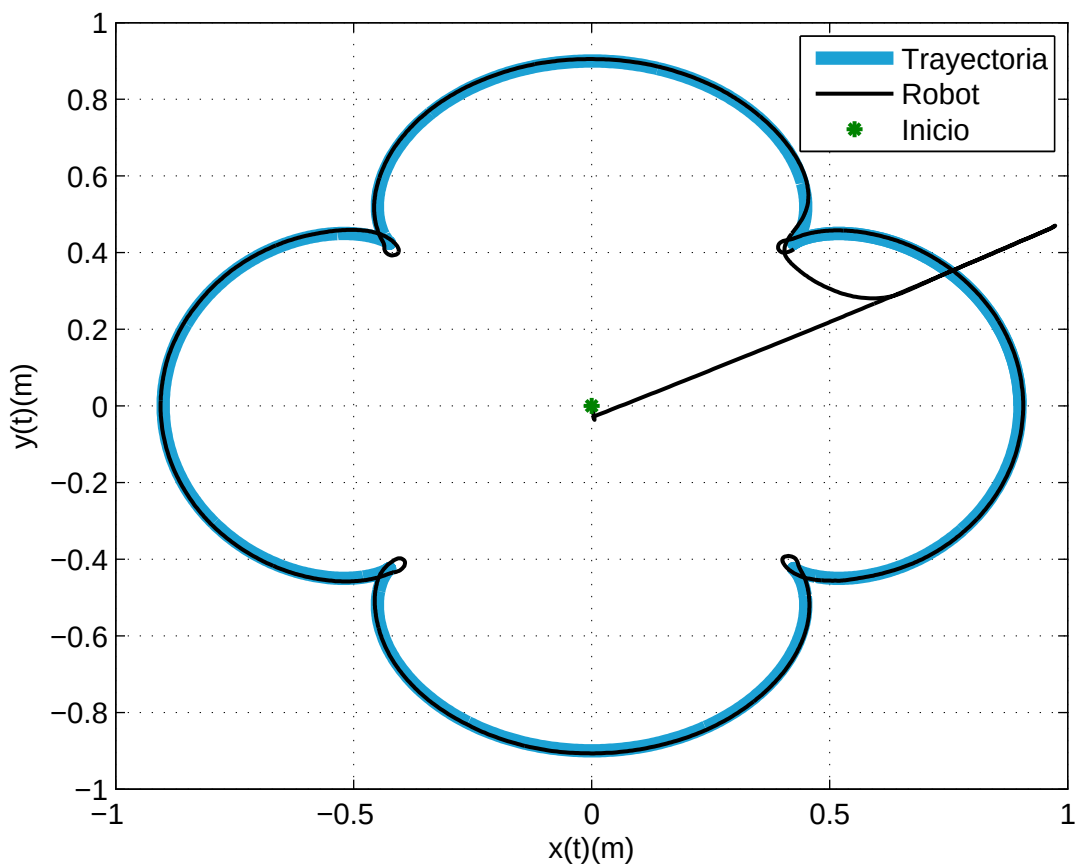


Figura 180: Trayectoria con la forma de epicicloide de 4 arcos ($k=4$).

7.8.5 Epicicloide de 6 arcos (k=6)

La trayectoria deseada epicicloide con 6 arcos, requiere de una relación $k = 6$, para ello los valores de los parámetros r definidos son $r_1 = 0.6$, $r_2 = 0.1$, así como $f = \frac{2\pi}{200}$ y las ganancias $K_p = 0.5$, $K_d = 1$.

La figura 184, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. En ella se observa que el robot realiza un primer movimiento en línea recta hacia la trayectoria de 4 arcos, pasando de largo por aproximadamente 25cm, posteriormente da un giro de 360° para regresar sobre la línea recta y luego trazar una curva que le permite incorporarse a la trayectoria deseada en uno de los vértices.

Las gráficas de la figura 177, muestran los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado, en ella se observa tanto en la gráfica a) como en la gráfica b), un incremento y decremento pronunciado, en las primeras 210 unidades de tiempo. Esta dinámica corresponde al movimiento del robot para incorporarse a la trayectoria de 6 arcos.

El error inicial mostrado en la figura 174, es de aproximadamente $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.8,0). Se observa que el error en el eje (x) disminuye a 0, luego aumenta a 0.25 y vuelve a disminuir dentro de las primeras 200 unidades de tiempo. La dinámica de la gráfica b) que se encuentra entre 80-125 unidades de tiempo, en la figura 174, corresponde al error que existe cuando el robot pasa de largo la trayectoria de 6 arcos y regresa para incorporarse a ella. Una vez el robot se encuentra dentro de la trayectoria deseada, los errores tanto para el eje (x) como para el (y) mantienen pequeñas oscilaciones cercanas a 0.

Las dinámicas de las velocidades ω_R y ω_L en la figura 183, muestran las singularidades correspondientes al trazado de cada uno de los vértices de la trayectoria de 6 arcos.

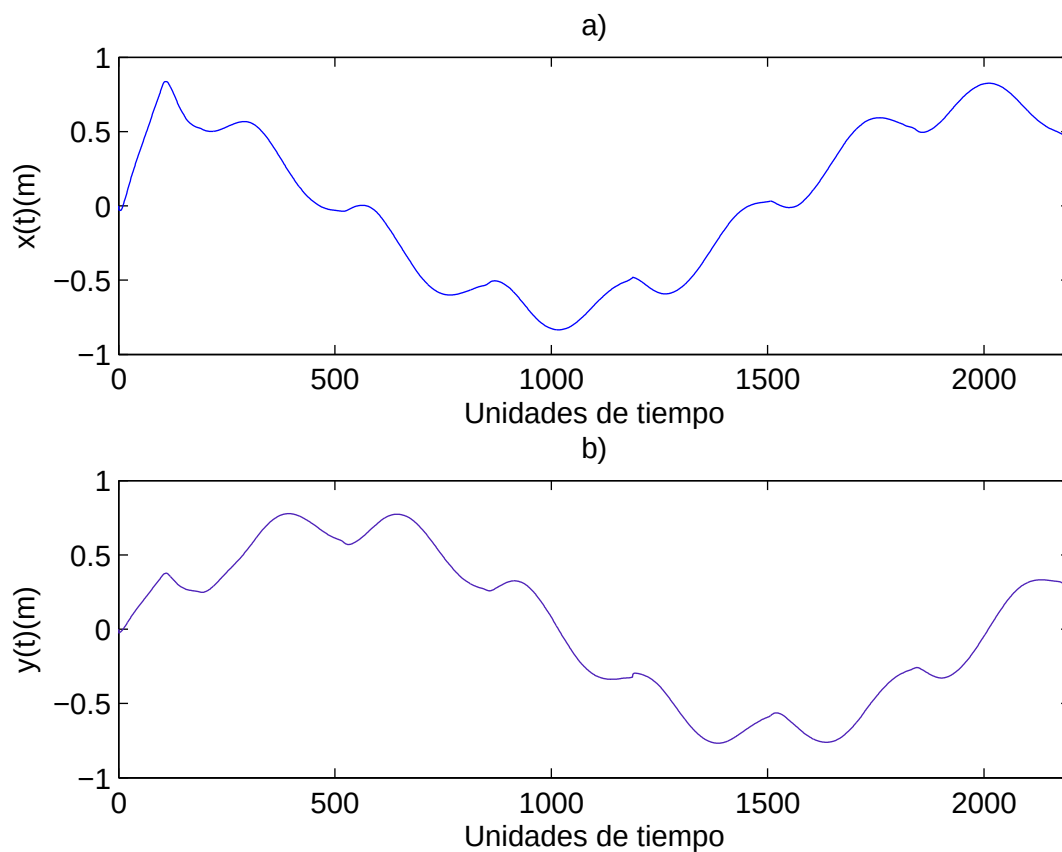


Figura 181: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

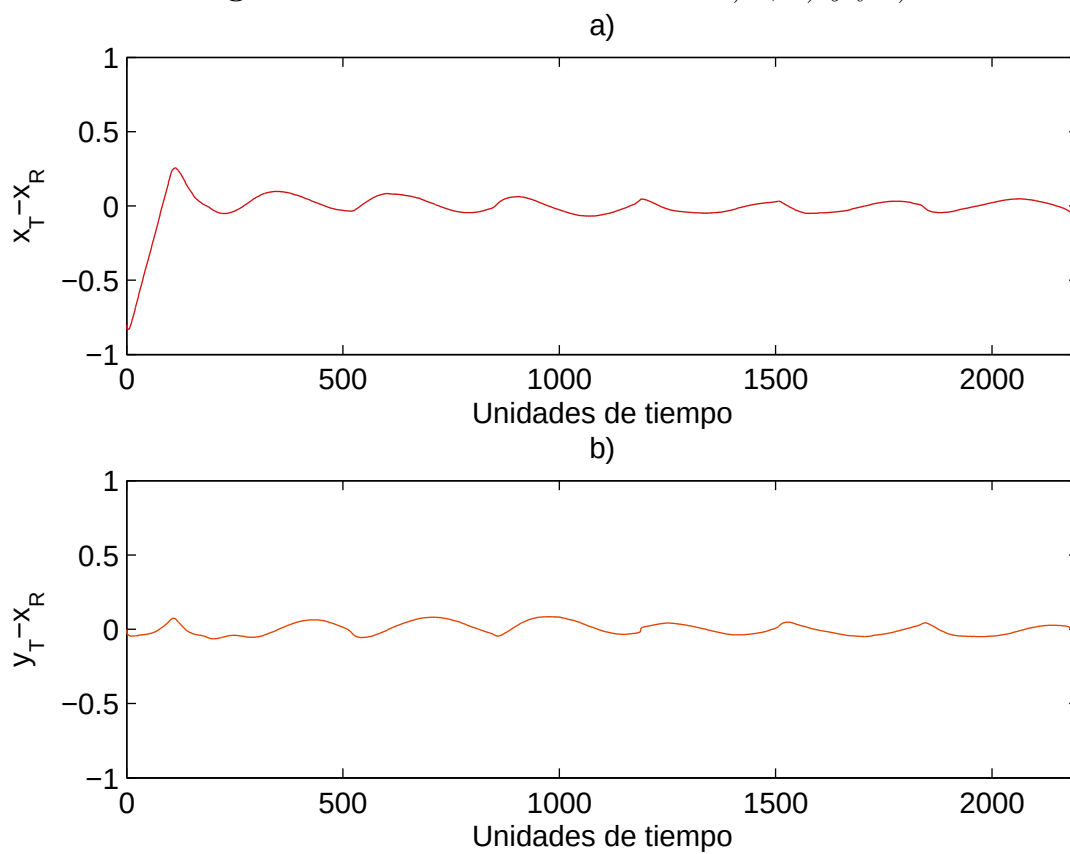


Figura 182: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

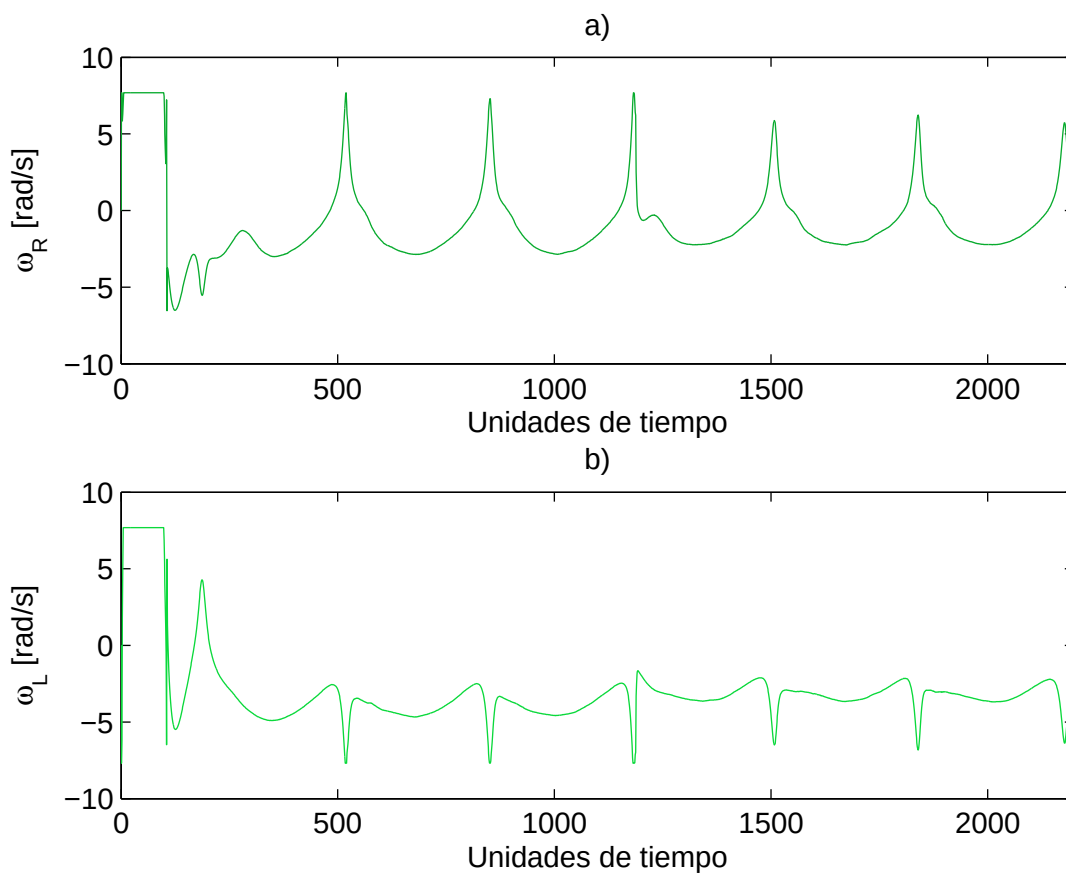


Figura 183: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

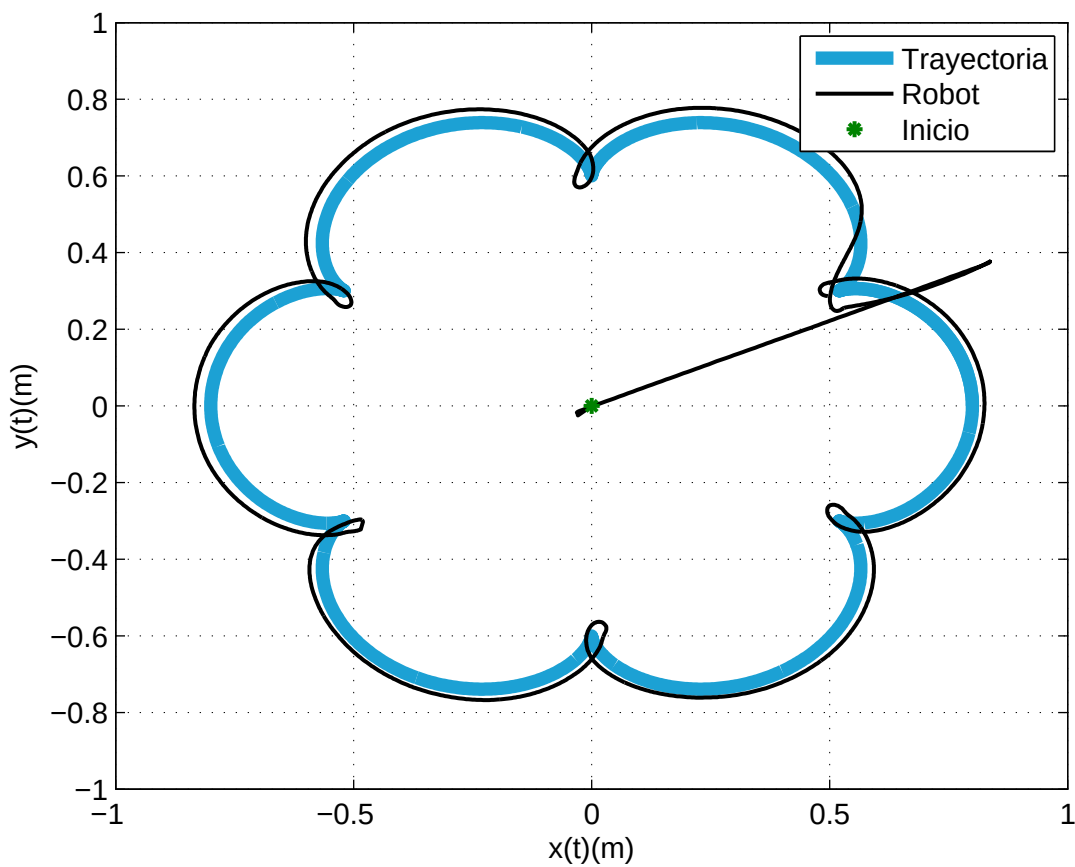


Figura 184: Trayectoria con la forma de epicicloide de 6 arcos ($k=6$).

7.8.6 Evoluta de cardioide ($k=0.5$)

La trayectoria de la evoluta de cardioide, requiere una relación $k = 0.5$, por lo que se han definidos los parámetros $r_1 = 0.2$, $r_2 = 0.4$, $f = \frac{2\pi}{150}$ y las ganancias $K_p = 0.33$, $K_d = 0.66$.

La figura 188, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil. Donde se observa que el robot parte de su posición inicial hacia la trayectoria de la evoluta y cuando está apunto de alcanzarla realiza un giro repentino a la izquierda, para seguir el contorno de la trayectoria e incorporarse a ella. También se observa una irregularidad al momento de trazar el vértice de la cardioide, pero que no afecta en el desempeño del seguimiento de la trayectoria.

La figura 185, muestra los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado. Debido al número de unidades de tiempo para completar la vuelta a la trayectoria deseada, y que el movimiento de incorporación del robot a ésta es muy rápido, las gráficas dan la impresión de empezar en un valor diferente a la posición inicial del robot (0,0). No obstante, se puede deducir que dentro de las primeras unidades de tiempo se observa en la gráfica a) de la figura 185, un incremento hasta 0.9, mientras que en la gráfica b), los valores para (y) disminuyen a -0.2. Este comportamiento corresponde a la línea recta que el robot traza para incorporarse a la trayectoria de la evoluta.

El error inicial que muestra la figura 186, es aproximadamente de $X_T - X_R = -0.9$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.9,0). El error en el eje (x), disminuye a cero conforme el robot avanza hasta alcanzar la trayectoria deseada.

La figura 187, muestra las dinámicas de las velocidades angulares en el tiempo. En ella se observa que la singularidad provocada por $v = 0$ para trazar el vértice, se encuentra en 1600 unidades de tiempo.

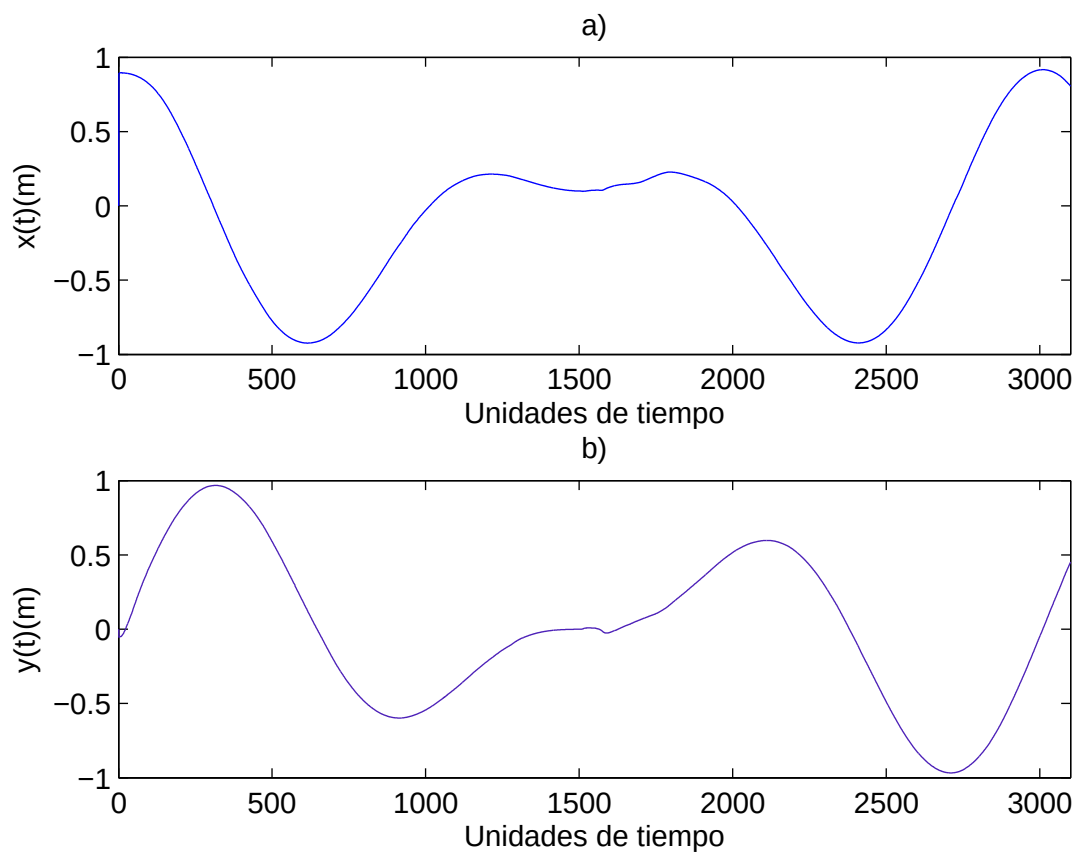


Figura 185: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

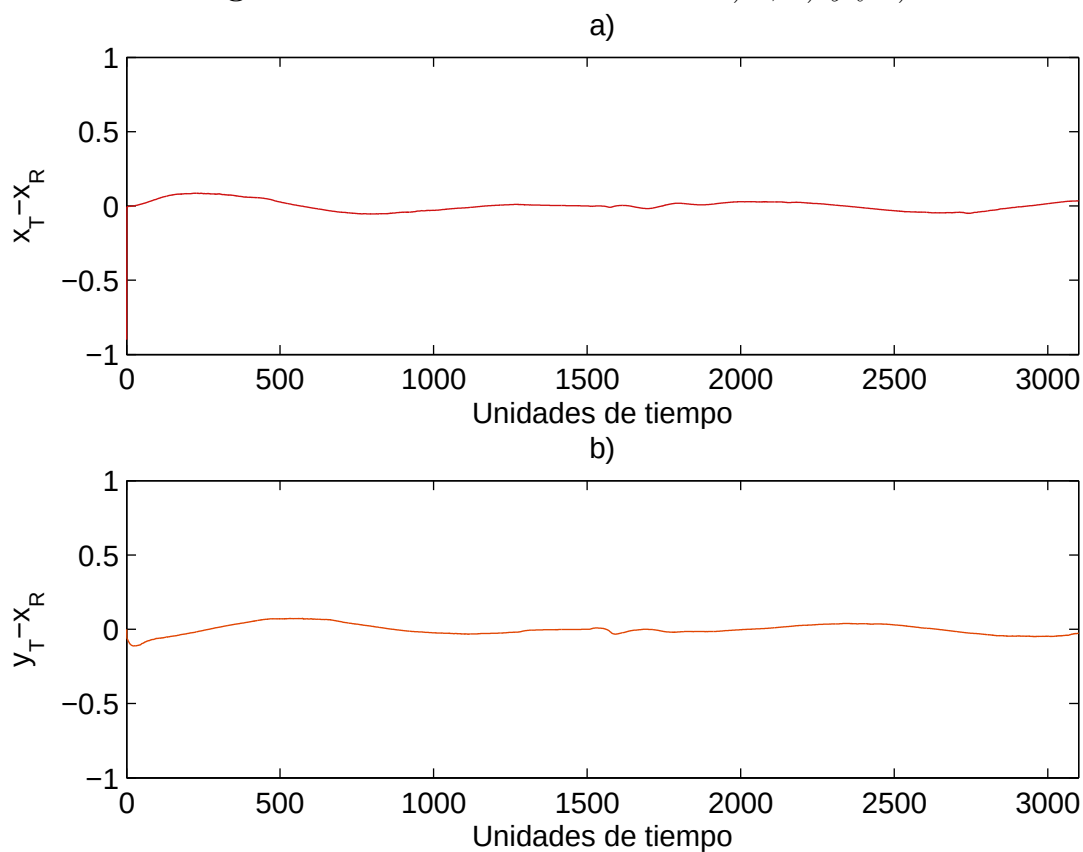


Figura 186: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

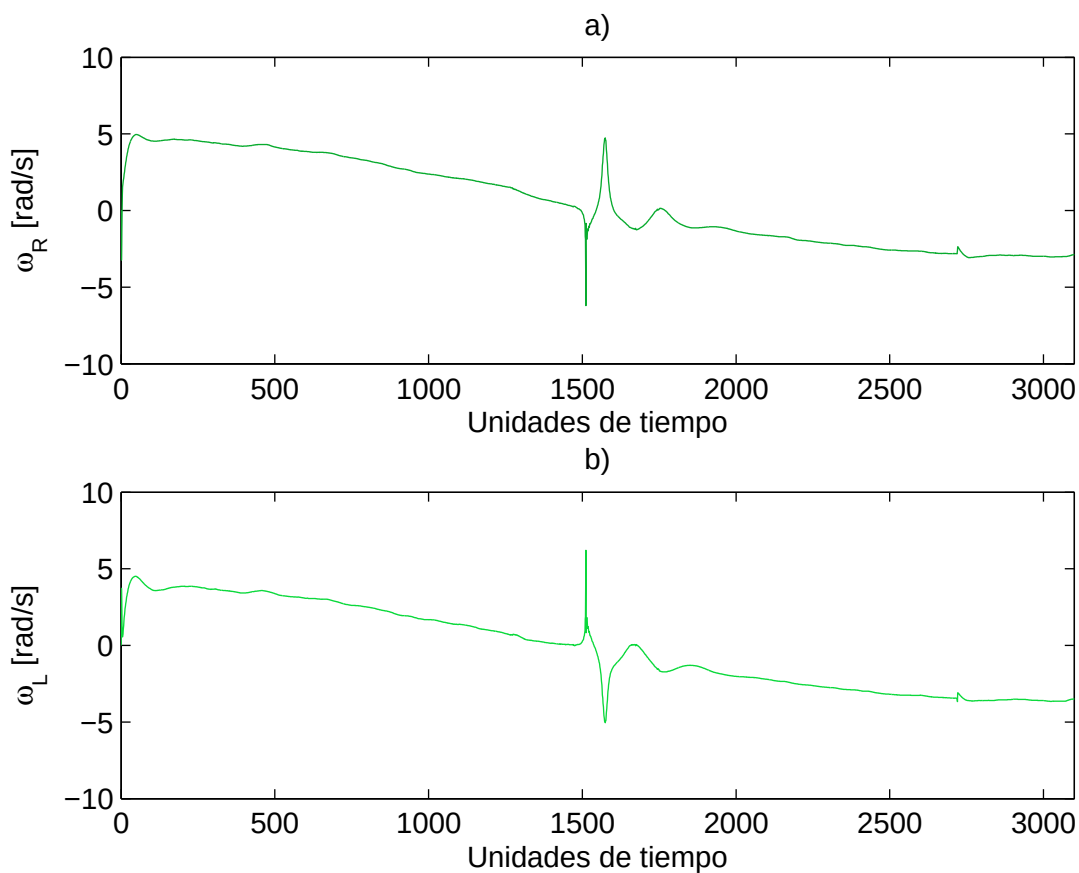


Figura 187: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

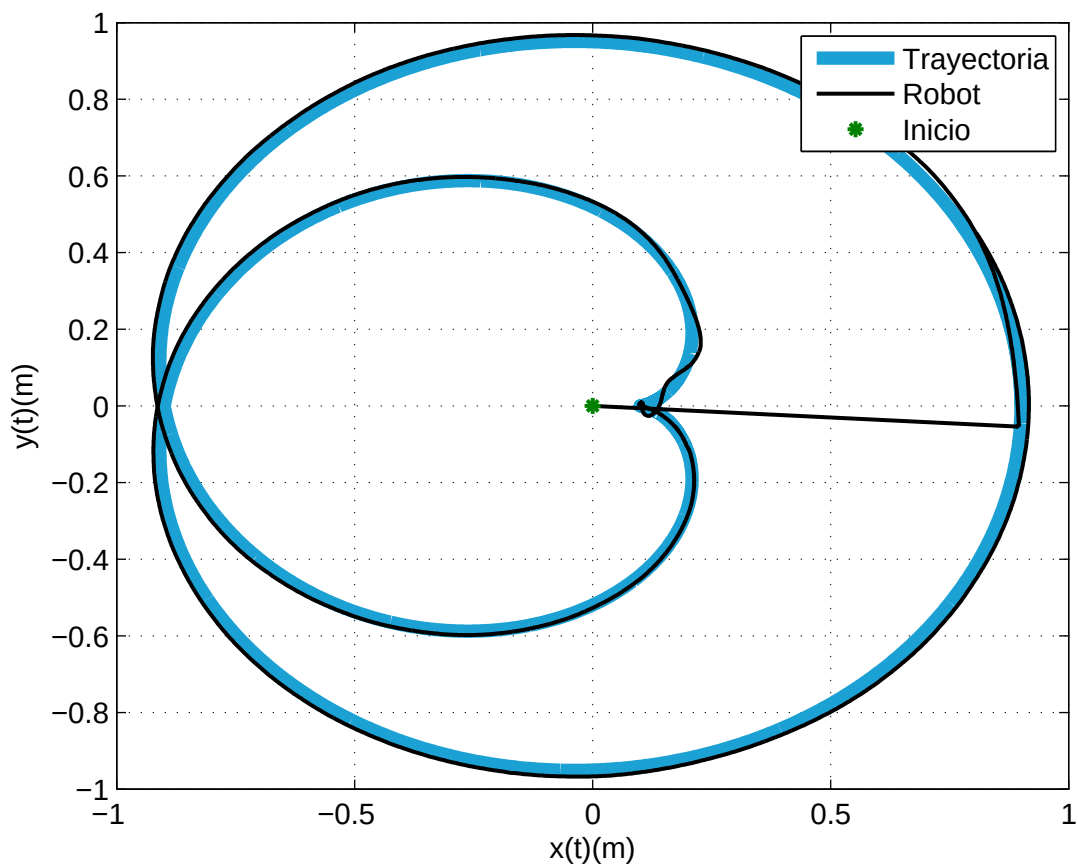


Figura 188: Trayectoria con la forma de la evoluta de cardioide.

7.8.7 Epicicloide con 3 cúspides (k=0.6)

Para la epicicloide de 3 cúspides, se necesita de una relación $k = 0.6$, por ello se definen los parámetros $r_1 = 0.18$, $r_2 = 0.3$, $f = \frac{2\pi}{100}$ y las ganancias $K_p = 0.5$, $K_d = 1$.

En la figura 192, se muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. En ella se observa que el robot parte de su posición inicial en línea recta hasta llegar al punto $(0.8, 0.4)$, donde cambia su dirección para dirigirse al punto $(0, 1.1)$, luego gira y avanza hacia el punto $(-0.75, 0.5)$, donde finalmente se incorpora a la trayectoria deseada al trazar una curva abierta. También se identifica que el robot traza los vértices de las cúspides con pequeñas curvas.

La figura 189, muestra los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado. En ella se observa que dentro de las primeras 500 unidades de tiempo, tanto la gráfica a) como la gráfica b), presentan un incremento y luego un decremento pronunciado, los cuales corresponden al movimiento de incorporación del robot móvil a la trayectoria deseada.

El error inicial mostrado en las gráficas de la figura 190, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.77$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.77, 0)$. La dinámica de los errores que se encuentra en las primeras 500 unidades de tiempo, pertenecen al error que existe entre la trayectoria de 3 cúspides y el movimiento de incorporación. Posteriormente se observan pequeñas oscilaciones que mantienen sus valores cercanos a 0.

La figura 191, muestra la dinámica de las velocidades angulares (ω_R, ω_L) a lo largo del tiempo. Donde se observan los tres picos que corresponden a las velocidades que el robot ejecuta para trazar los tres vértices de la trayectoria en 800, 2500 y 4200 unidades de tiempo. Las dinámicas que se encuentran entre estos picos, pertenecen a las velocidades que le permiten al robot móvil trazar las evolutas de la trayectoria deseada.

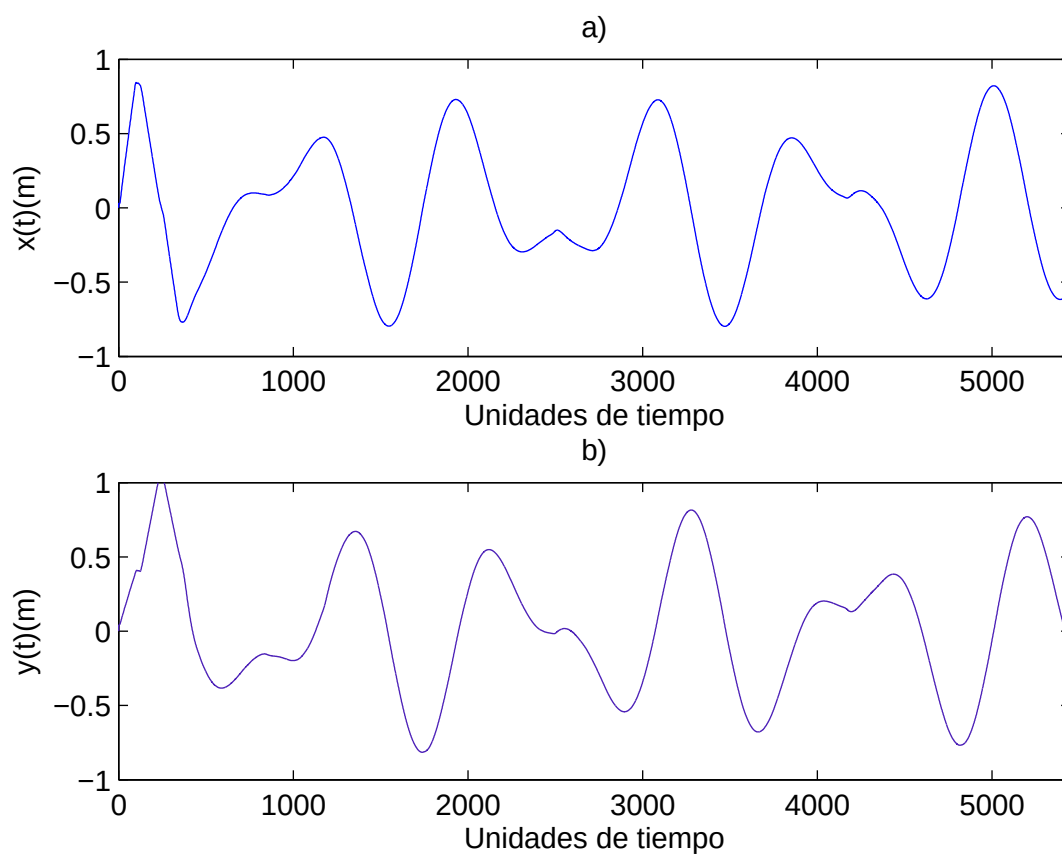


Figura 189: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

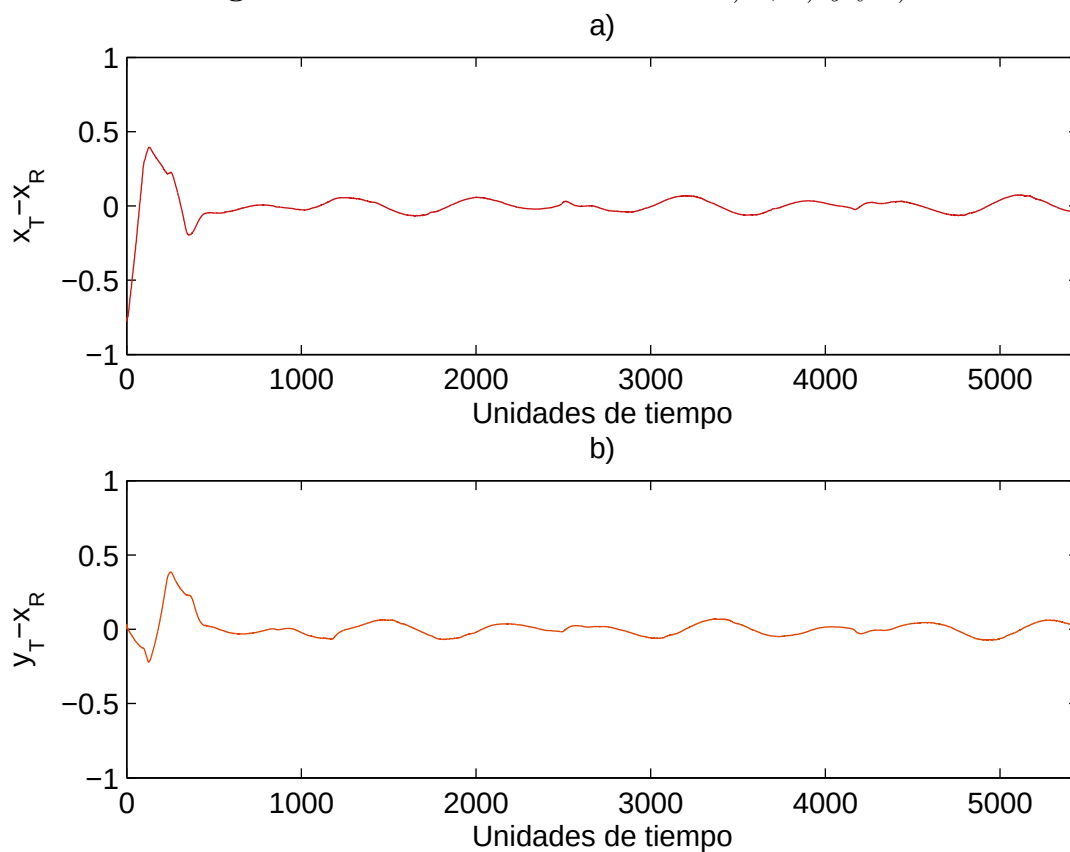


Figura 190: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

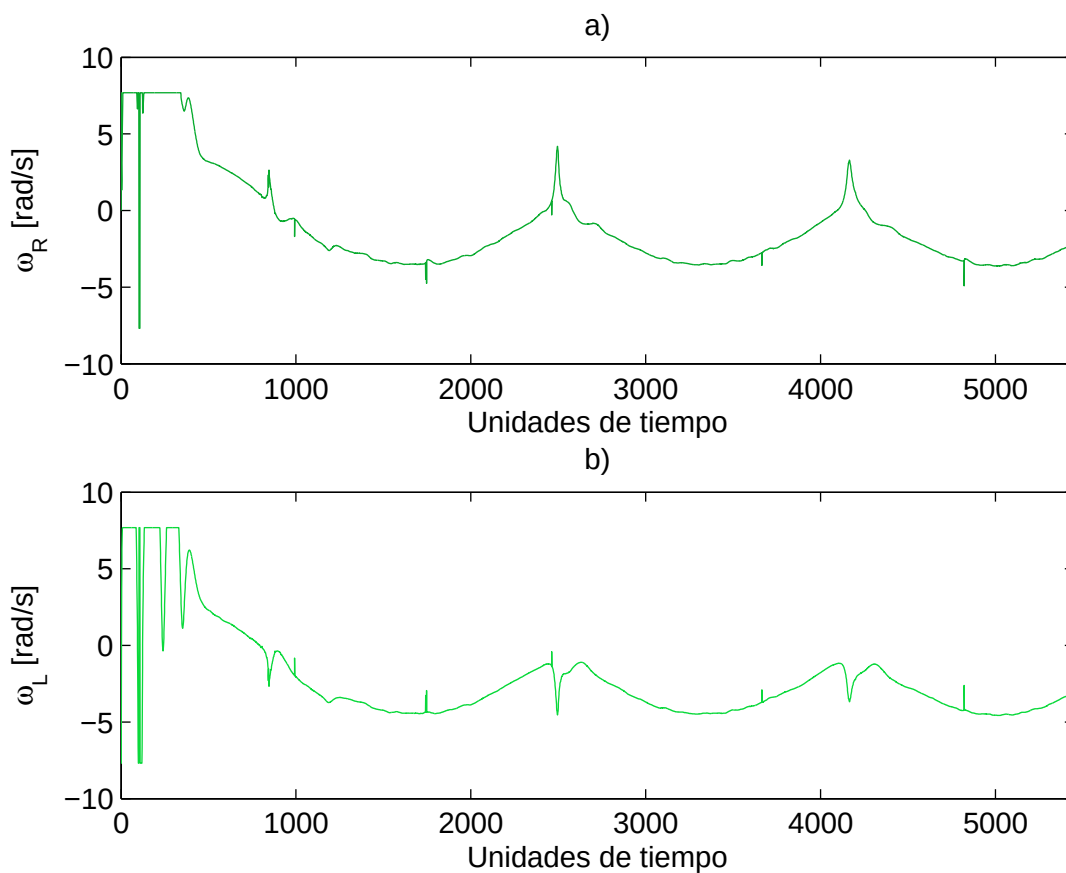


Figura 191: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

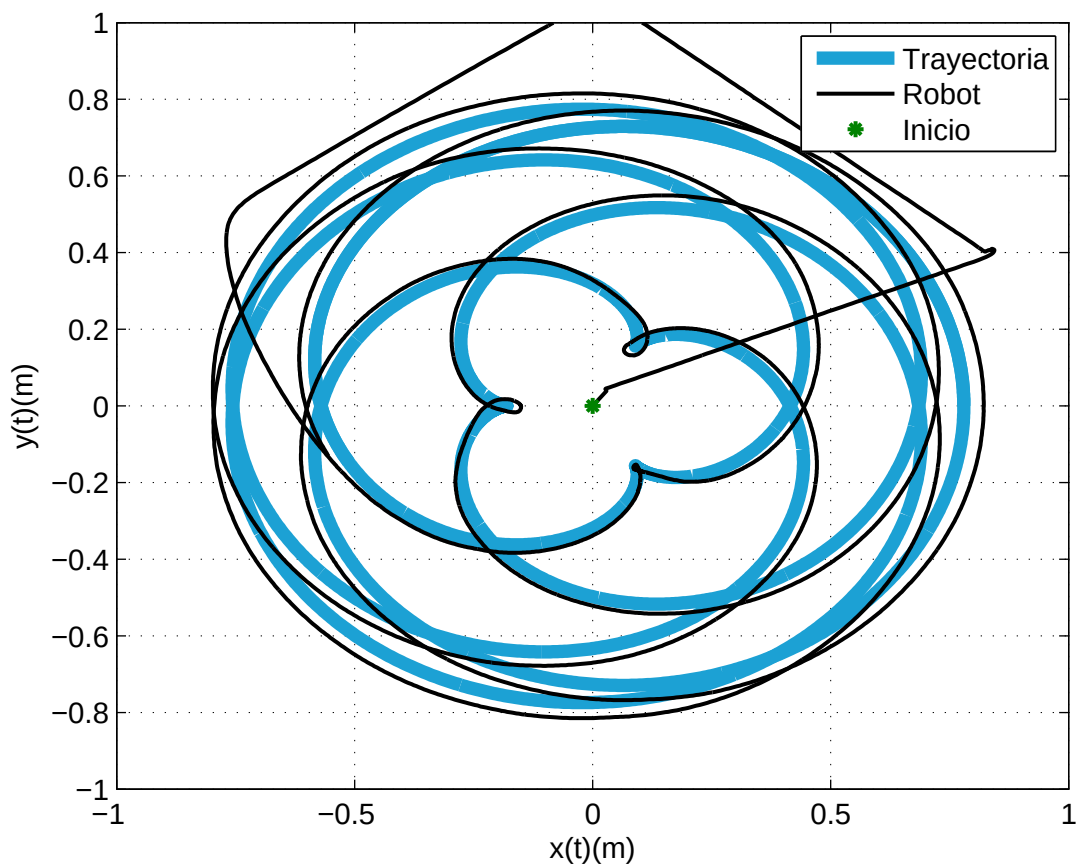


Figura 192: Trayectoria con la forma epicicloide - 3 cúspides ($k=0.6$).

7.8.8 Epicicloide con 4 cúspides ($k=0.8$)

La trayectoria epicicloide con 4 cúspides, requiere de una relación $k = 0.8$, por lo que se han definido los parámetros $r_1 = 0.24$, $r_2 = 0.3$, $f = \frac{2\pi}{100}$ y las ganancias $K_p = 0.5$, $K_d = 1$.

La figura 196, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. En ella se observa que el robot móvil parte de su posición inicial en línea recta hacia la trayectoria de 4 cúspides, luego realiza un giro a la izquierda para incorporarse en la evoluta de la trayectoria.

La figura 196, muestra los desplazamientos realizados por el robot en cada eje coordenado. Debido al número de unidades de tiempo para completar la vuelta a la trayectoria deseada, y que el movimiento de incorporación del robot a ésta es muy rápido, las gráficas dan la impresión de empezar en un valor diferente a la posición inicial del robot (0,0). No obstante, se puede deducir que dentro de las primeras unidades de tiempo se observa en la gráfica a) de la figura 196, un incremento hasta 0.75, mientras que en la gráfica b), los valores para (y) disminuyen a -0.1. Este comportamiento corresponde a la línea recta que el robot traza para incorporarse a la trayectoria de la evoluta.

En la figura 194, se muestra un error inicial de aproximadamente $X_T - X_R = -0.75$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.75,0). El error en el eje (x), disminuye a cero conforme el robot avanza hasta alcanzar la trayectoria deseada. Posteriormente se observan pequeñas oscilaciones con valores de error cercanos a 0.

La figura 196, muestra la dinámica de las velocidades angulares a lo largo del tiempo. Donde se observan los tres picos que corresponden a las velocidades que el robot ejecuta para trazar vértices de la trayectoria en 800, 2500 y 4200 unidades de tiempo. Las dinámicas que se encuentran entre estos picos, pertenecen a las velocidades que le permiten al robot móvil trazar las evolutas de la trayectoria deseada.

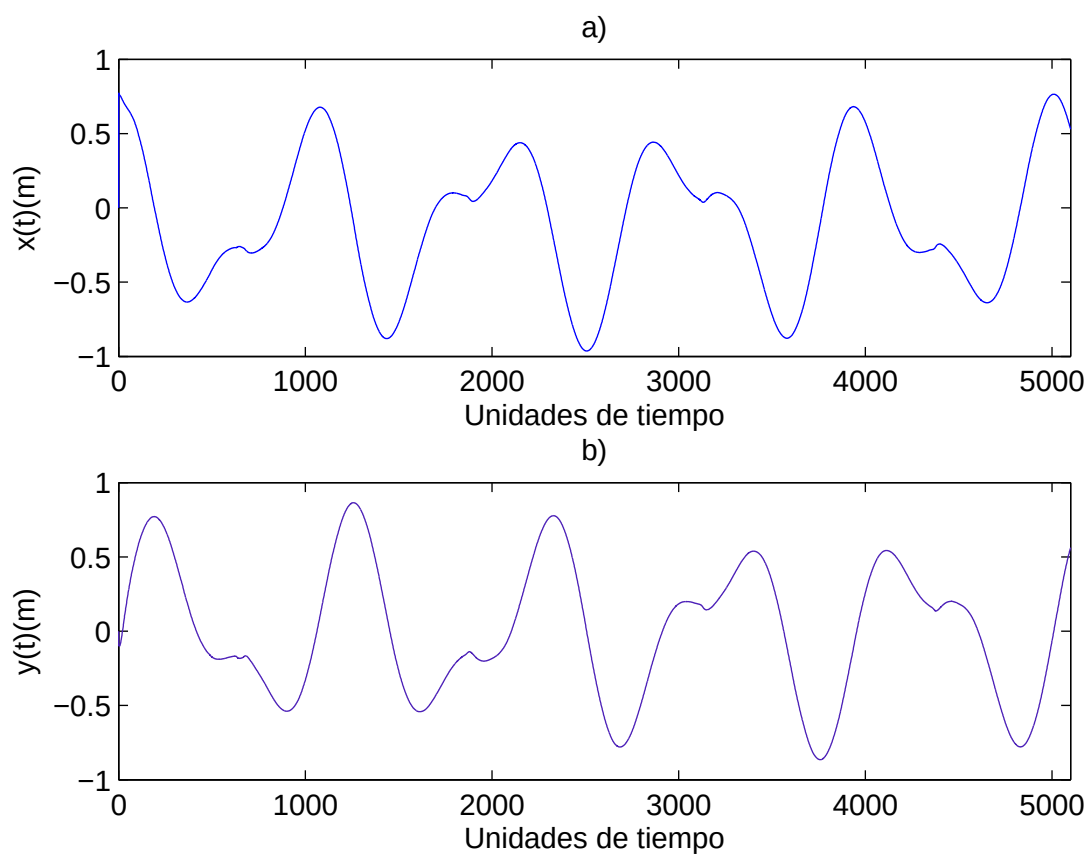


Figura 193: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

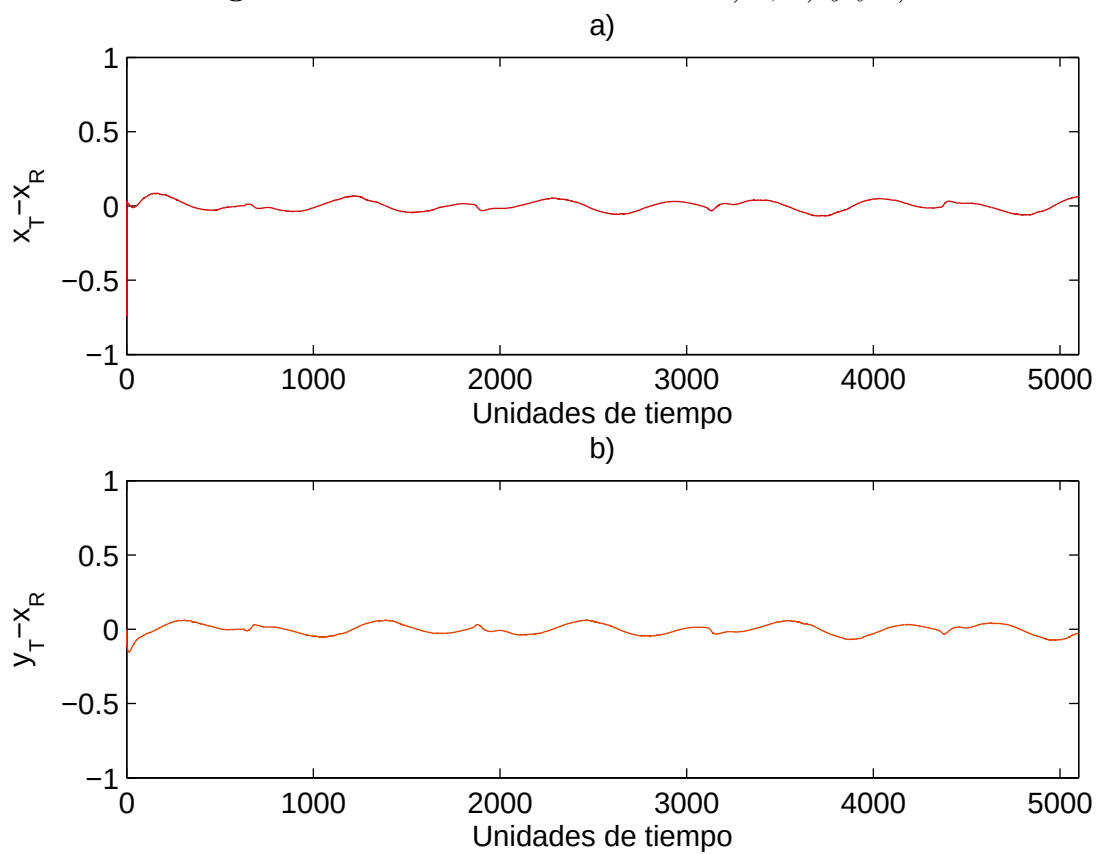


Figura 194: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

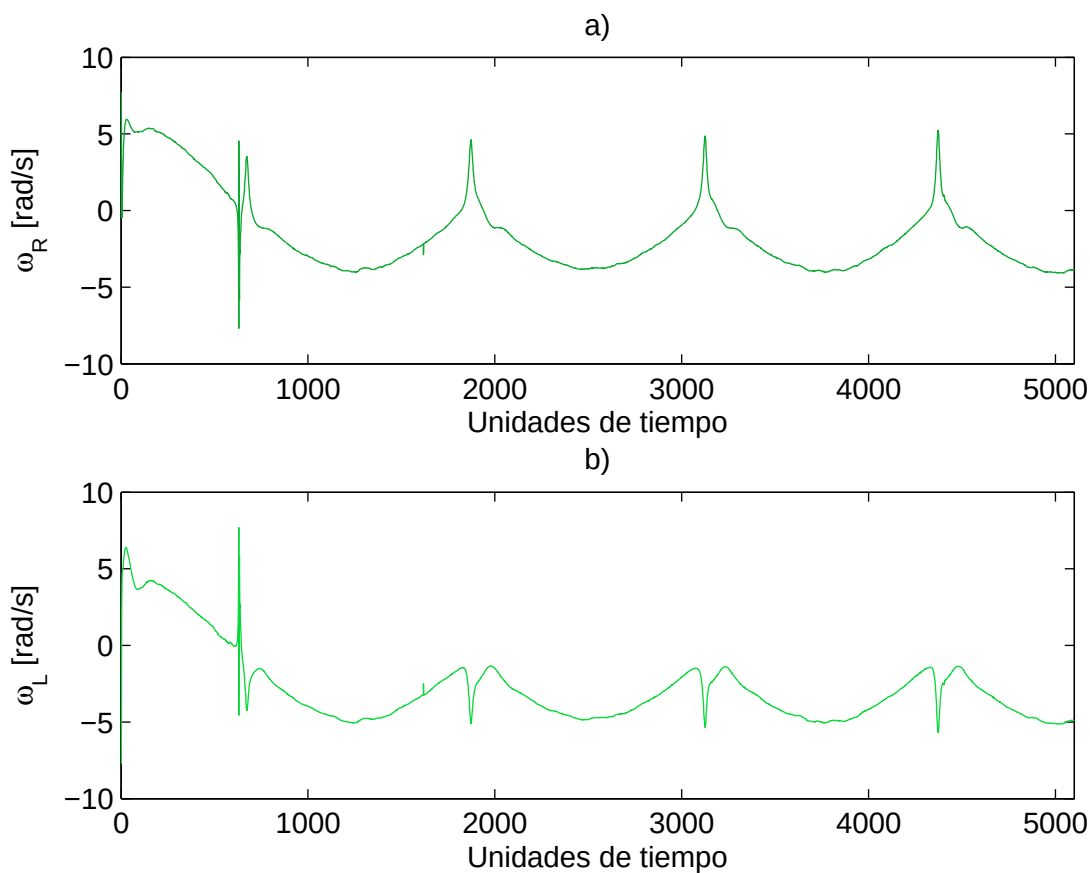


Figura 195: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

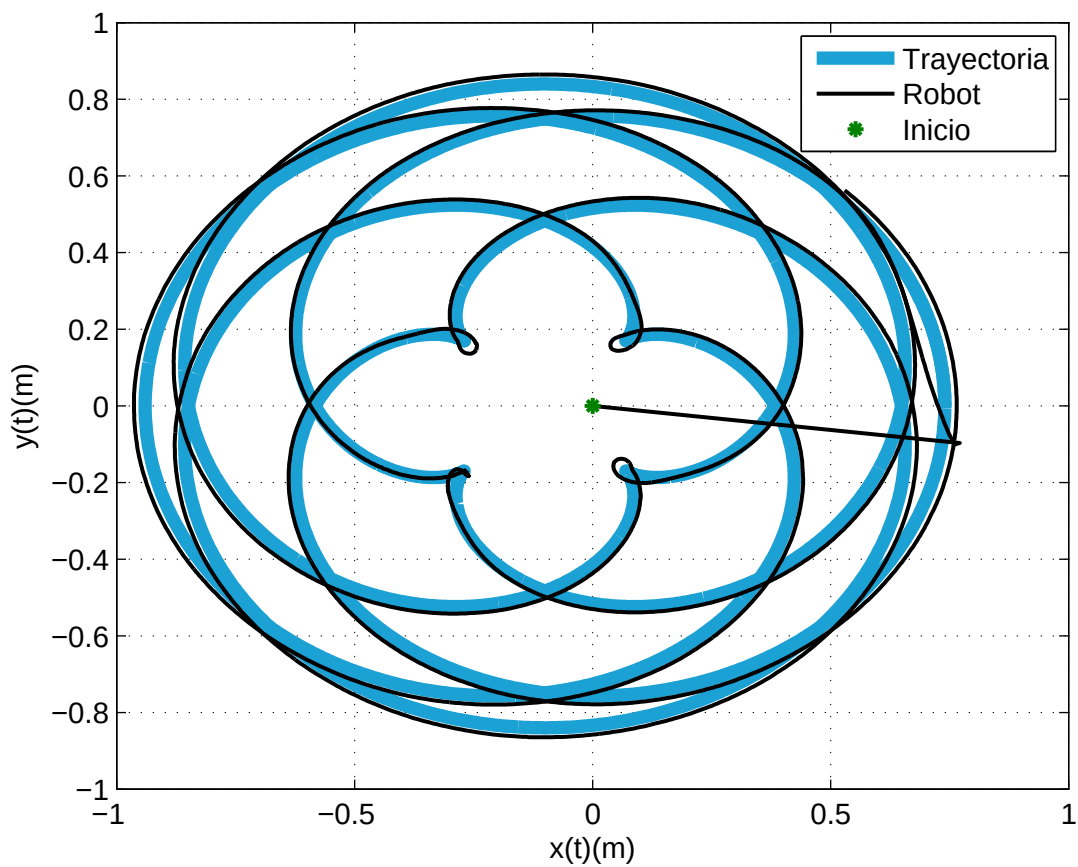


Figura 196: Trayectoria con la forma de epicicloide - 4 cúspides ($k=0.8$).

7.9 Trayectorias con la forma de hipocicloides

Las trayectorias deseadas con la forma de hipocicloides se encuentran definidas por las ecuaciones: $X_d(t) = (r_1 + r_2) \cos(ft) + r_2 \cos((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$ y $Y_d(t) = (r_1 + r_2) \sin(ft) - r_2 \sin((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$, donde al variar la relación $k = \frac{r_1}{r_2}$ se obtienen hipocicloides diferentes.

7.9.1 Deltoide (k=1)

En la trayectoria con forma de deltoide, se debe tener una relación $k = 1$, por lo que los valores de los parámetros r , se han definido con $r_1 = 0.3$ y $r_2 = 0.3$, con una $f = \frac{2\pi}{175}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 2$.

La figura 200, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. Donde se observa que el robot avanza en línea recta con una dirección aproximadamente de 340° , luego gira hacia la izquierda para trazar otra línea recta hacia la trayectoria de la deltoide, llegando al punto $(0.9, 0.4)$, donde gira 200° para realizar una curva e incorporarse a la deltoide. También se identifica que existe cierto grado de error en el eje (y), por parte de la trayectoria trazada por el robot. Ésto se debe a los vértices que tiene la figura, pues además de la singularidad que ocurre al ser $v = 0$, también físicamente representan un reto para el robot móvil, ya que no se encuentra diseñado para realizar cambios de dirección tan abruptos y repentinos.

En la figura 94, se muestra los desplazamientos realizados por el robot en cada eje coordenado. Donde se identifica en ambas gráficas, un incremento y luego un decremento pronunciado dentro de las primeras 200 unidades de tiempo. Ésto se debe al movimiento de incorporación del robot. La figura 198, presenta un error inicial de aproximadamente $X_T - X_R = -0.9$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.9, 0)$. La figura 199, muestra la dinámica de las velocidades angulares en el tiempo.

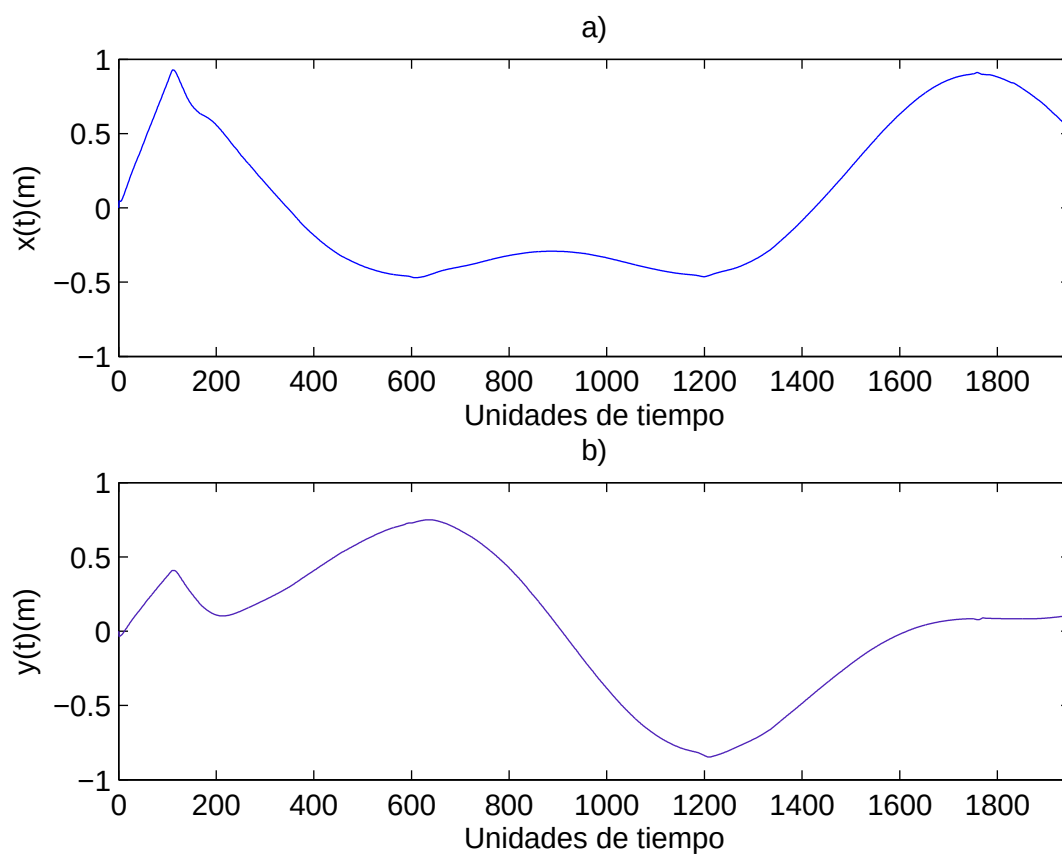


Figura 197: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

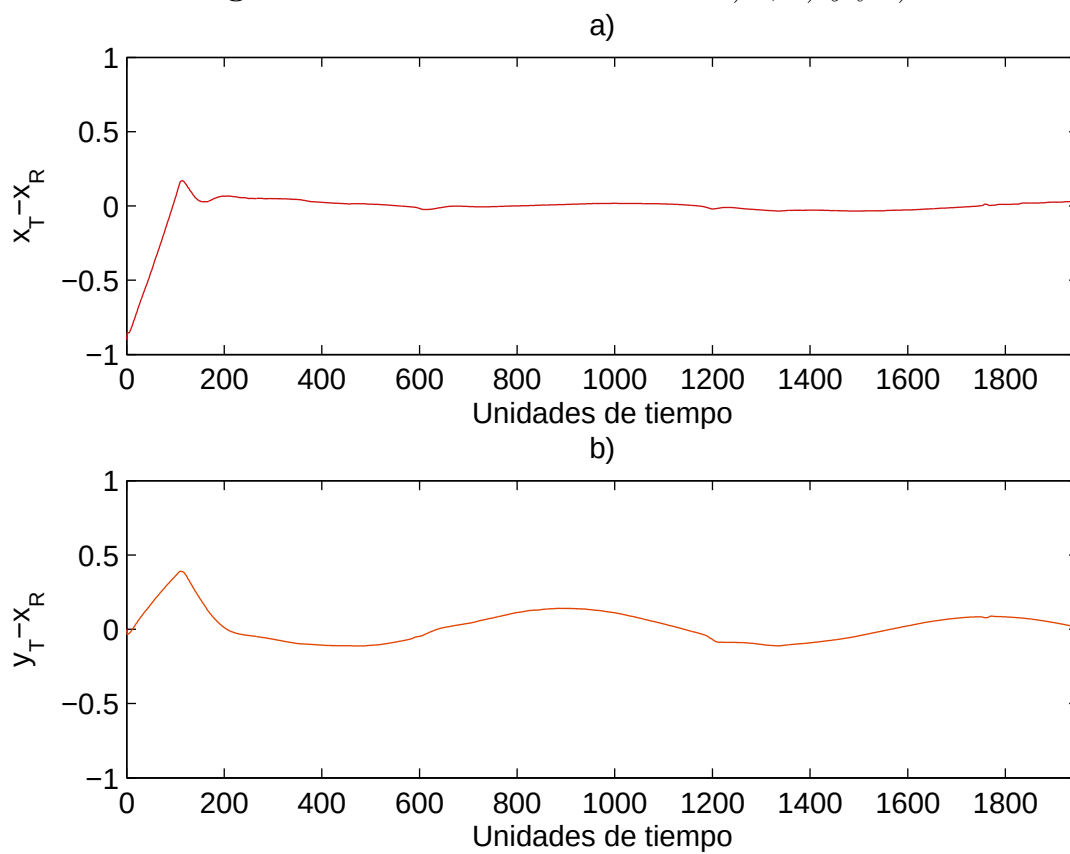


Figura 198: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

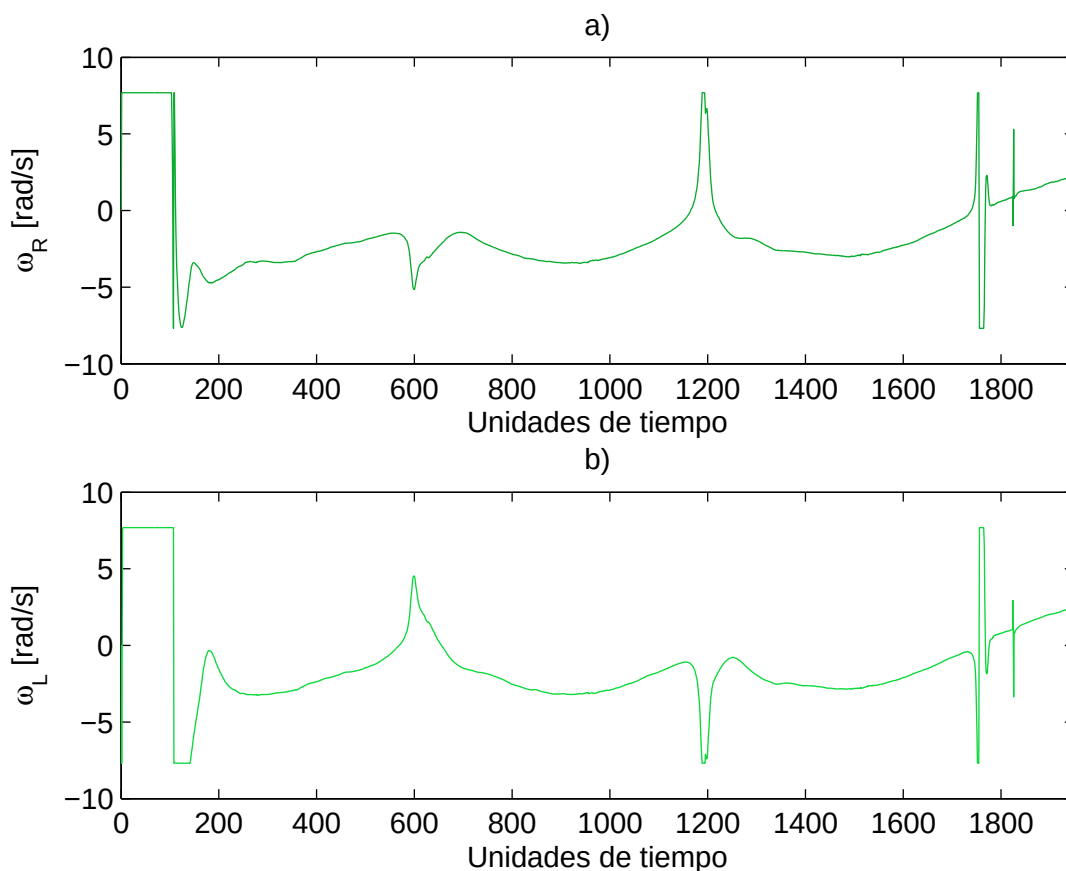


Figura 199: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

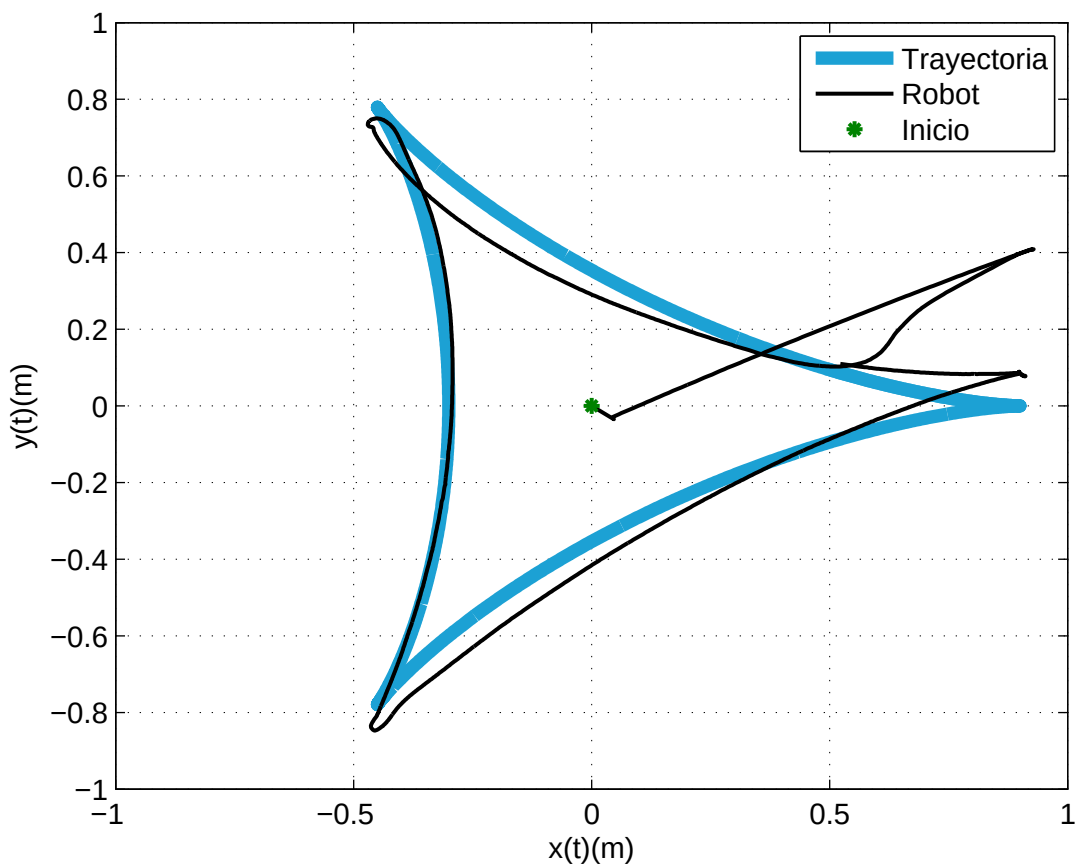


Figura 200: Trayectoria con la forma deltoide ($k=1$).

7.9.2 Astroide ($k=2$)

Para la trayectoria astroide, se requiere una relación $k = 2$, por ello se han definido los parámetros $r_1 = 0.6$, $r_2 = 0.2$, $f = \frac{2\pi}{150}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 2$.

La figura 204, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. En ella se observa que el robot avanza en línea recta con una dirección aproximadamente de 350° , luego gira hacia la izquierda para trazar otra línea recta hacia la trayectoria de la astroide, llegando al punto $(0.7, 0.35)$, donde gira 200° para realizar una curva e incorporarse a la astroide. También se identifica que existe cierto grado de error por parte de la trayectoria trazada por el robot, especialmente en el eje (y). A pesar de ello, la trayectoria realizada no pierde la forma de la astroide completamente, y es considerada como aceptable.

En la figura 201, se muestran los desplazamientos realizados por el robot en cada eje coordenado. Dentro de esta figura se observa tanto en la gráfica a) como en la gráfica b), un incremento y luego un decremento pronunciado dentro de las primeras 180 unidades de tiempo, esto se debe al movimiento de incorporación del robot a la trayectoria de la astroide.

El error inicial mostrado en la figura 202, es de aproximadamente $X_T - X_R = -0.75$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.75, 0)$. El error en el eje (x) disminuye conforme el robot avanza hacia la trayectoria de la deltoide, mientras que los valores del error en el eje (y) oscilan muy cercanamente a cero.

Las dinámicas de las velocidades angulares ω_R y ω_L a lo largo del tiempo, se muestran en la figura 199. Donde se observan las singularidades producidas por el trazado de los vértices en 480, 900, 1380 y 1780 unidades de tiempo.

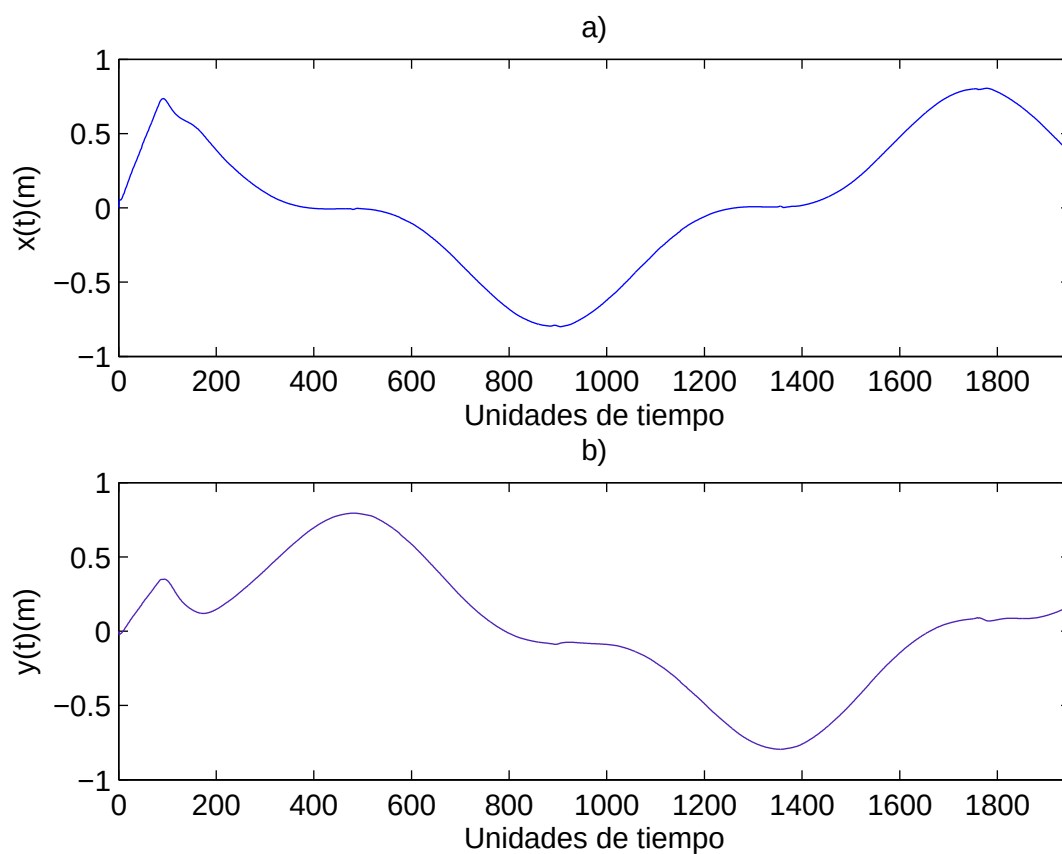


Figura 201: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

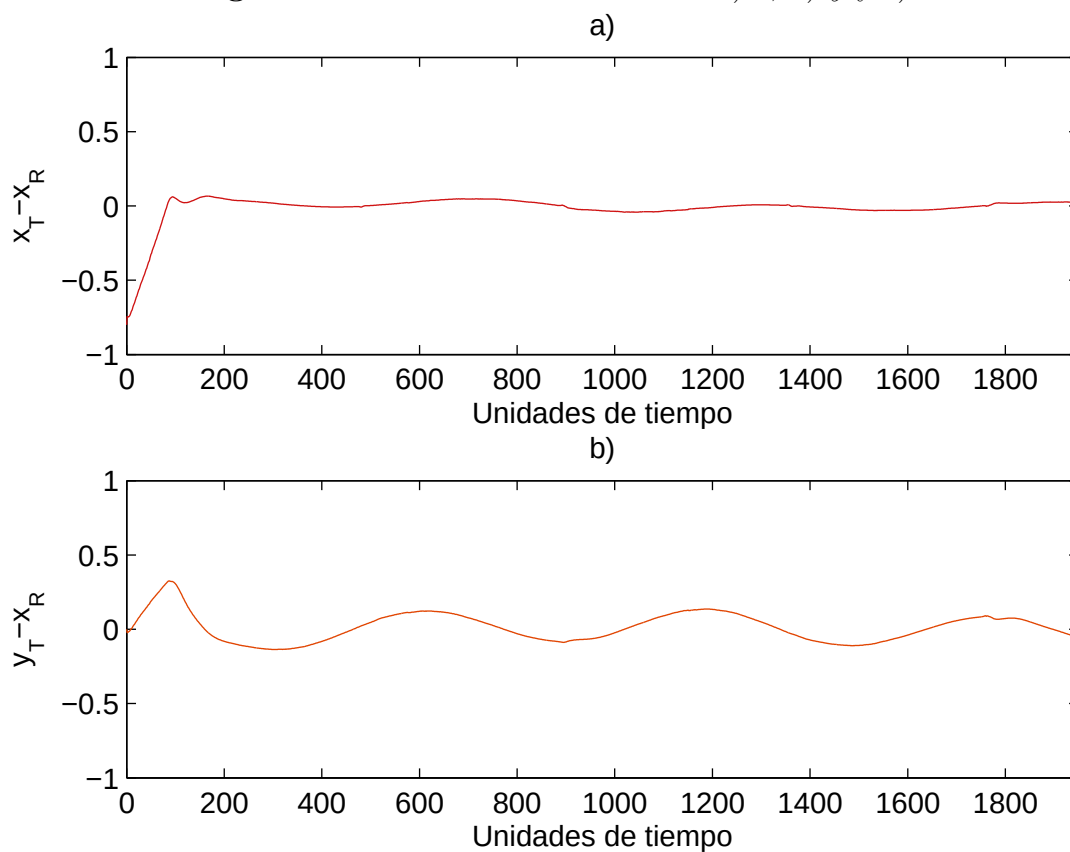


Figura 202: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

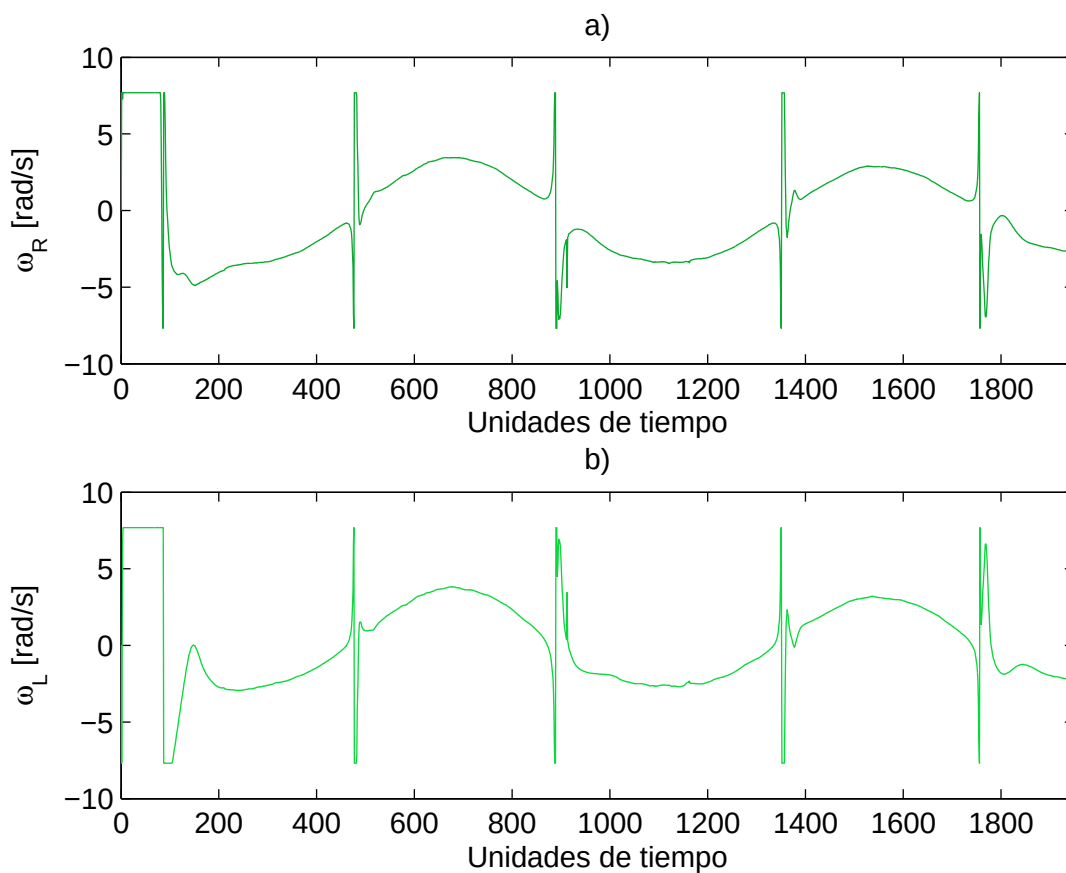


Figura 203: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

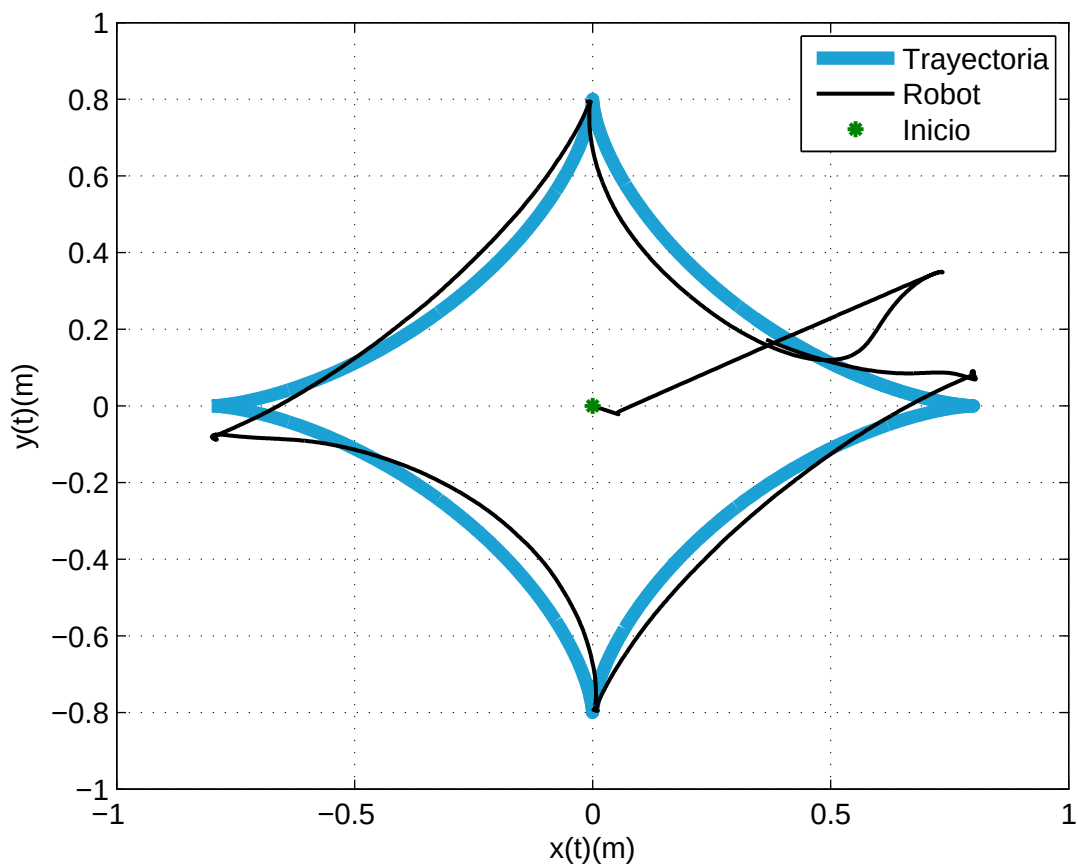


Figura 204: Trayectoria con la forma de astroide ($k=2$).

7.9.3 Hipocicloide con 5 puntas (k=3)

La trayectoria hipocicloide con 5 puntas, necesita de una relación $k = 3$, por lo tanto se han definido los parámetros $r_1 = 0.48$, $r_2 = 0.16$, $f = \frac{2\pi}{250}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 2$.

La figura 208, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. Donde se observa que el robot móvil avanza unos cuantos centímetros en línea recta con una dirección de 90° , luego gira a la derecha trazando una nueva línea recta hacia el punto $(0.9, 0.3)$, donde gira 200° para realizar una curva que le permite incorporarse a la trayectoria deseada. También se identifica que tres de los vértices de la trayectoria, han sido trazados por el robot con unas pequeñas curvas, pues trazarlos perfectamente es algo complicado de ejecutar.

La gráfica de la figura 205, muestra los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado. En esta figura se observa tanto en la gráfica a) como en la gráfica b), un incremento y luego un decremento pronunciado dentro de las primeras 200 unidades de tiempo, esto se debe al movimiento de incorporación del robot a la trayectoria hipocicloide.

El error inicial mostrado en la figura 206, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.8, 0)$. La gráfica a) de esta figura, muestra que el error en el eje (x) disminuye a 0, luego incrementa a 0.2 y finalmente vuelve a disminuir a 0, dentro de las primeras 200 unidades de tiempo. Mientras que el error en el eje (y) incrementa a 0.25 y luego disminuye a 0, presentando ligeras oscilaciones en sus valores.

La figura 207, muestra la dinámica de las velocidades angulares en el tiempo. En ella se observan las singularidades que producen el trazado de los vértices, en 550, 1000, 1500, 2050 y 2500 unidades de tiempo. Las dinámicas que se encuentran entre estos pulsos, corresponden a las velocidades que el robot utiliza para trazar los lados de la hipocicloide.

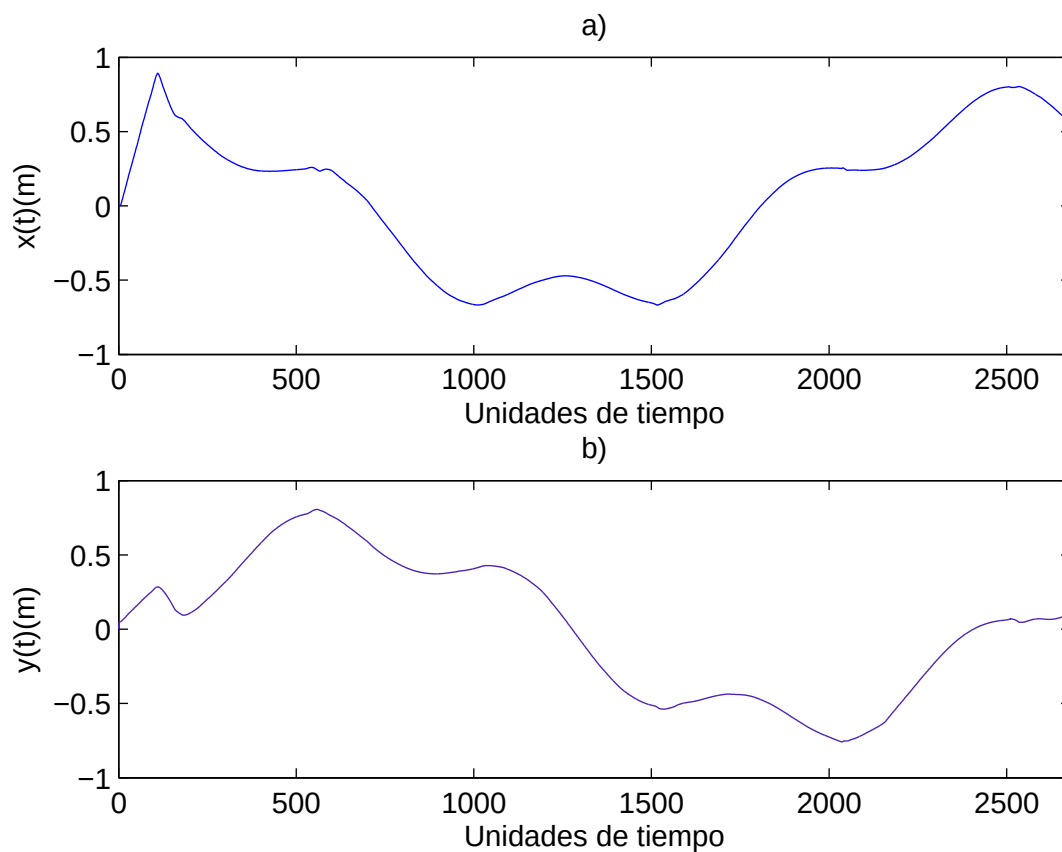


Figura 205: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

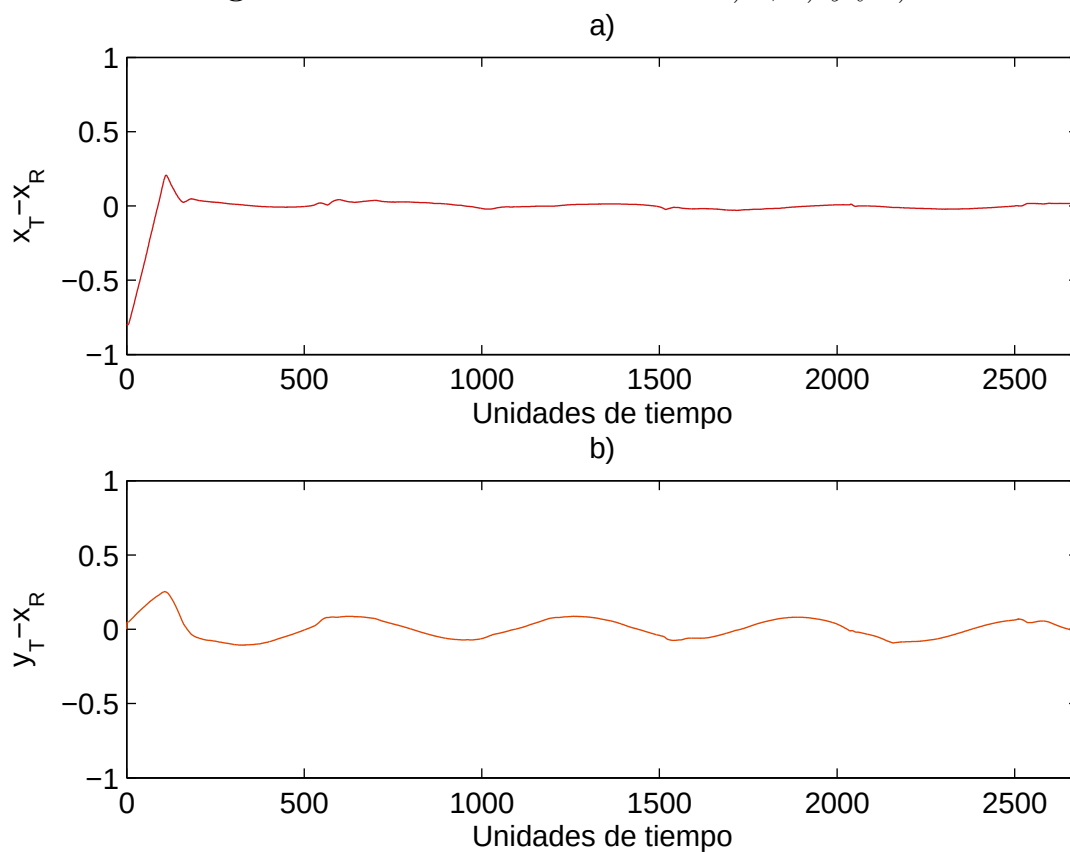


Figura 206: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

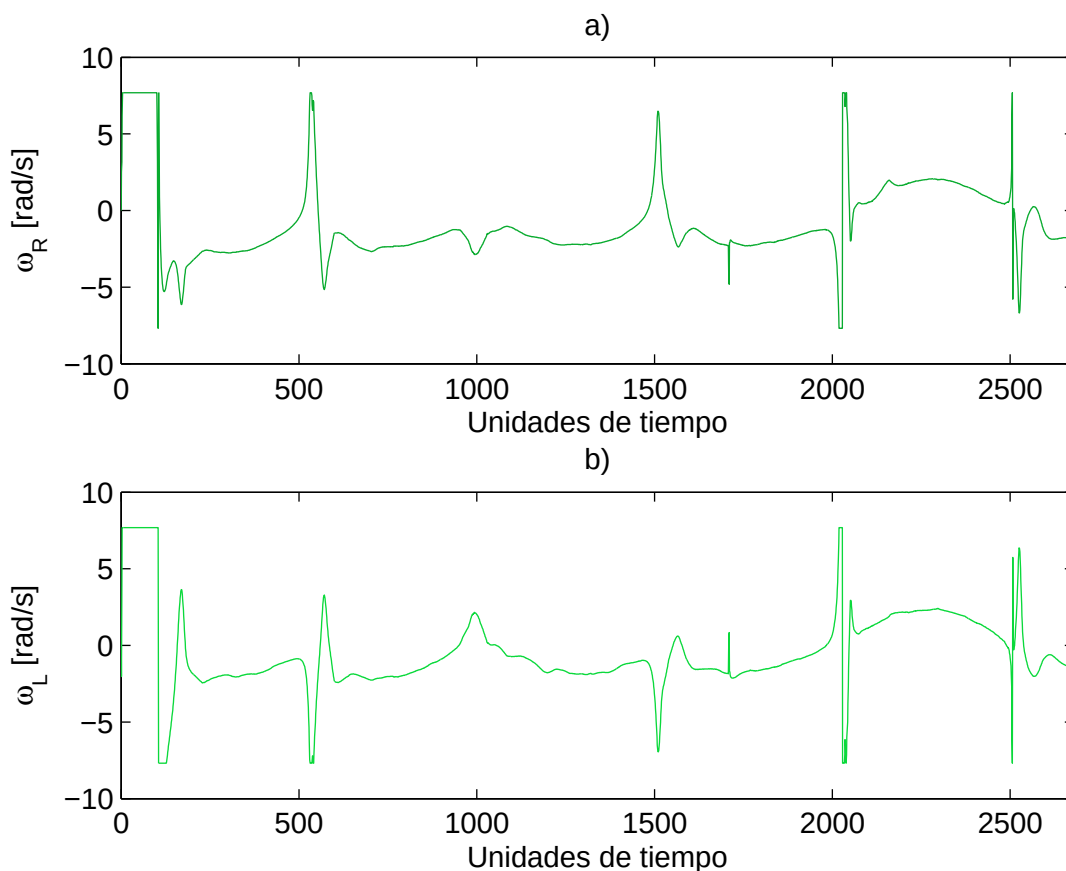


Figura 207: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

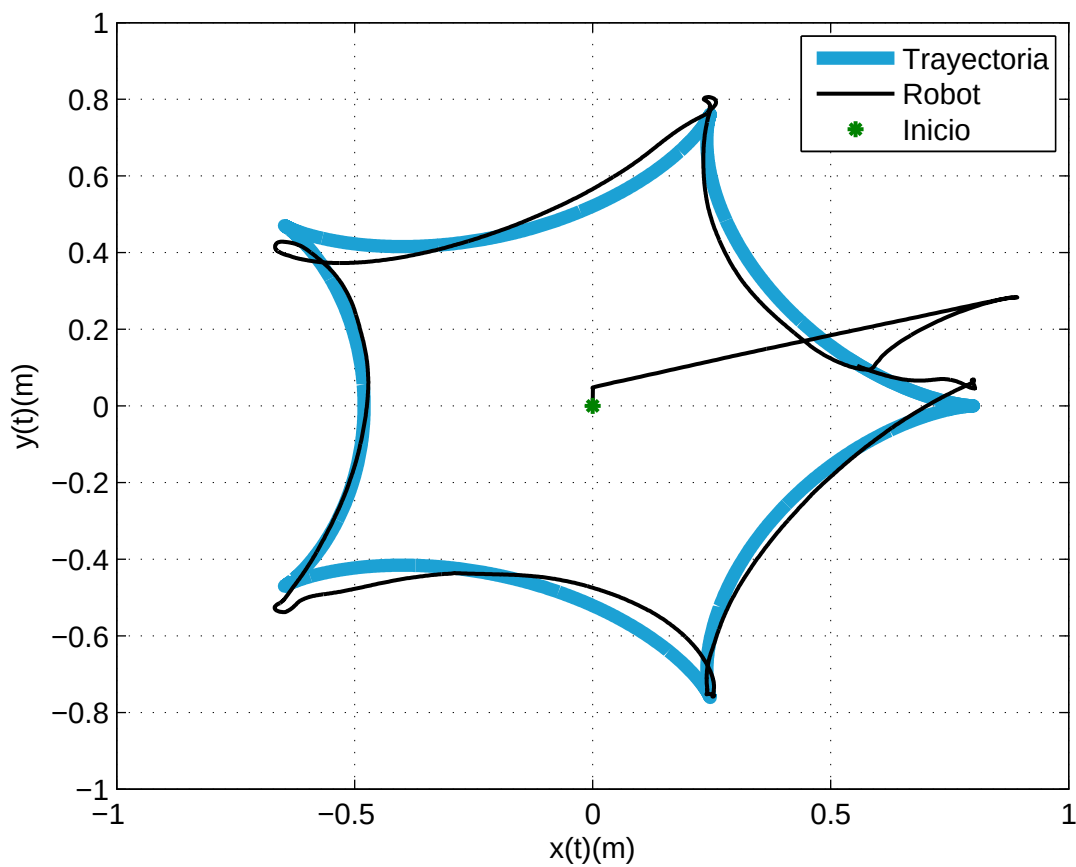


Figura 208: Trayectoria con la forma hipocicloide - 5 puntas ($k=3$).

7.9.4 Hipocicloide con 10 puntas (k=1.3333)

Para la trayectoria hipocicloide con 10 puntas, se requiere una relación $k = 1.3333$, por lo que se han definido los parámetros $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.3$, $f = \frac{2\pi}{150}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 2$.

La figura 212, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot móvil. En ella se observa que el robot móvil avanza en línea recta con una dirección de aproximadamente 22° , hasta el punto (1.1,0.65) donde gira 200° y avanza nuevamente en línea recta para llegar al punto (0.25,0.1), donde gira para trazar una curva que le permite incorporarse a la trayectoria hipocicloide. También es fácil de notar que existe un cierto grado de error, entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot. Así como que, algunos los vértices han sido trazados por el robot, con pequeñas curvas.

La figura 209, muestra los desplazamientos realizadas por el robot móvil en cada eje coordenado, en ella dentro de las primeras 500 unidades de tiempo, la gráfica a) presenta un incremento y luego un decremento muy pronunciados, mientras que la gráfica b), incrementa a 0.6, luego disminuye a 0.15 y vuelve a incrementar. Éste comportamiento corresponde al movimiento de incorporación que ejecuta el robot móvil.

Los errores iniciales mostrados en la figura 107, son aproximadamente $X_T - X_R = -1$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (1,0). Una vez el robot entra en la trayectoria hipocicloide, el error en el eje (x) presenta ligeras variaciones, manteniéndose muy cercano a cero. Mientras que el error en el eje (y), presenta oscilaciones de aproximadamente ± 0.15 alrededor de cero, confirmando así lo observado en la figura 209.

En la figura 108, se muestran las dinámicas de las velocidades angulares en el tiempo. Donde se identifican las singularidades de $v = 0$, producto del trazado de cada uno de los vértices de la trayectoria deseada.

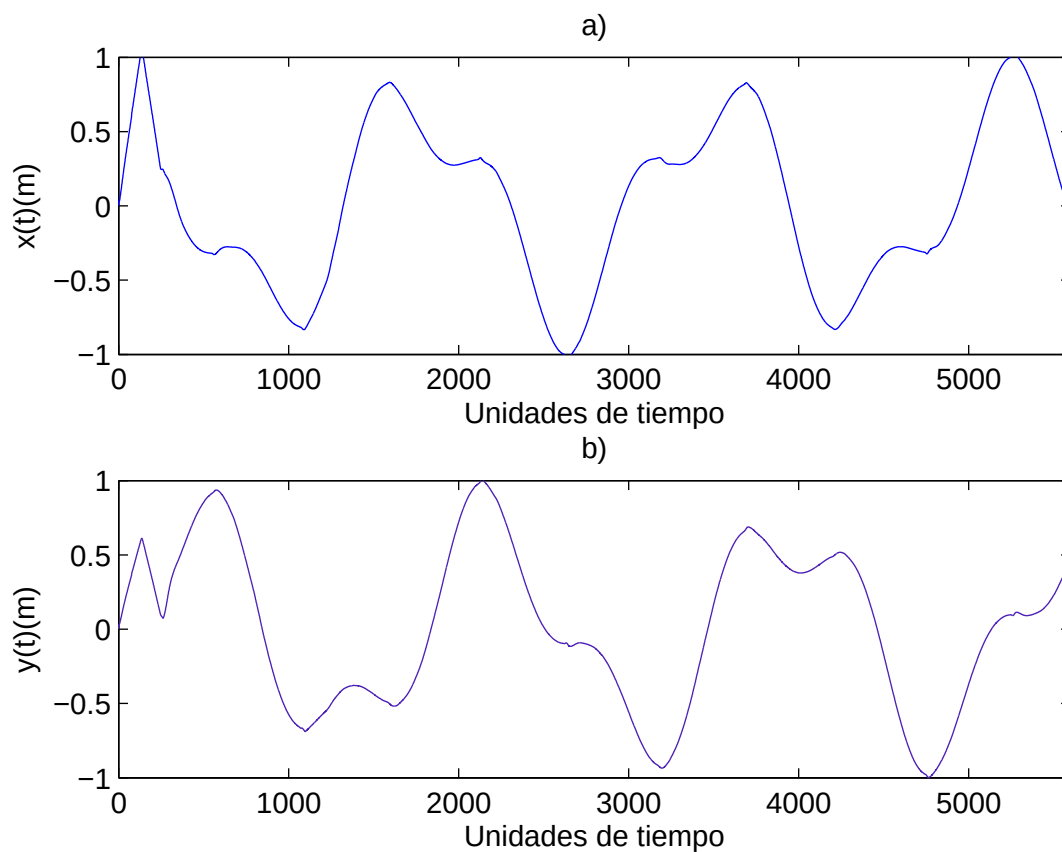


Figura 209: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

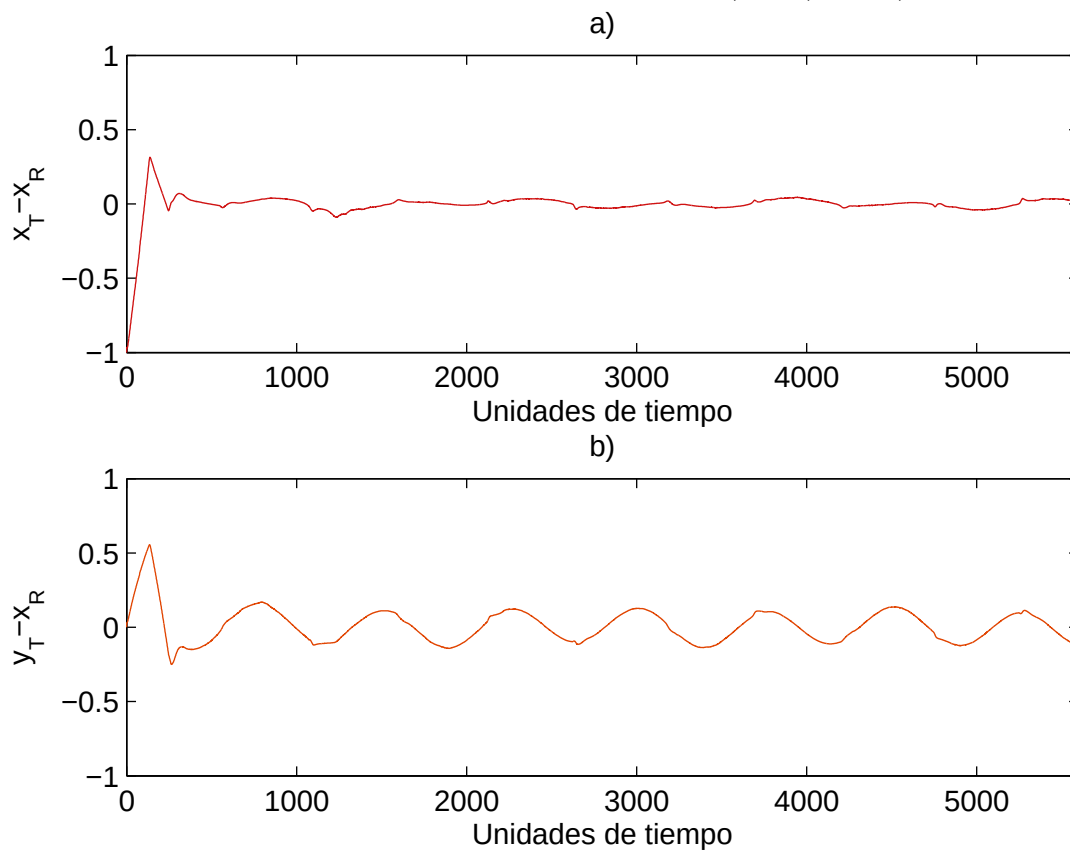


Figura 210: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

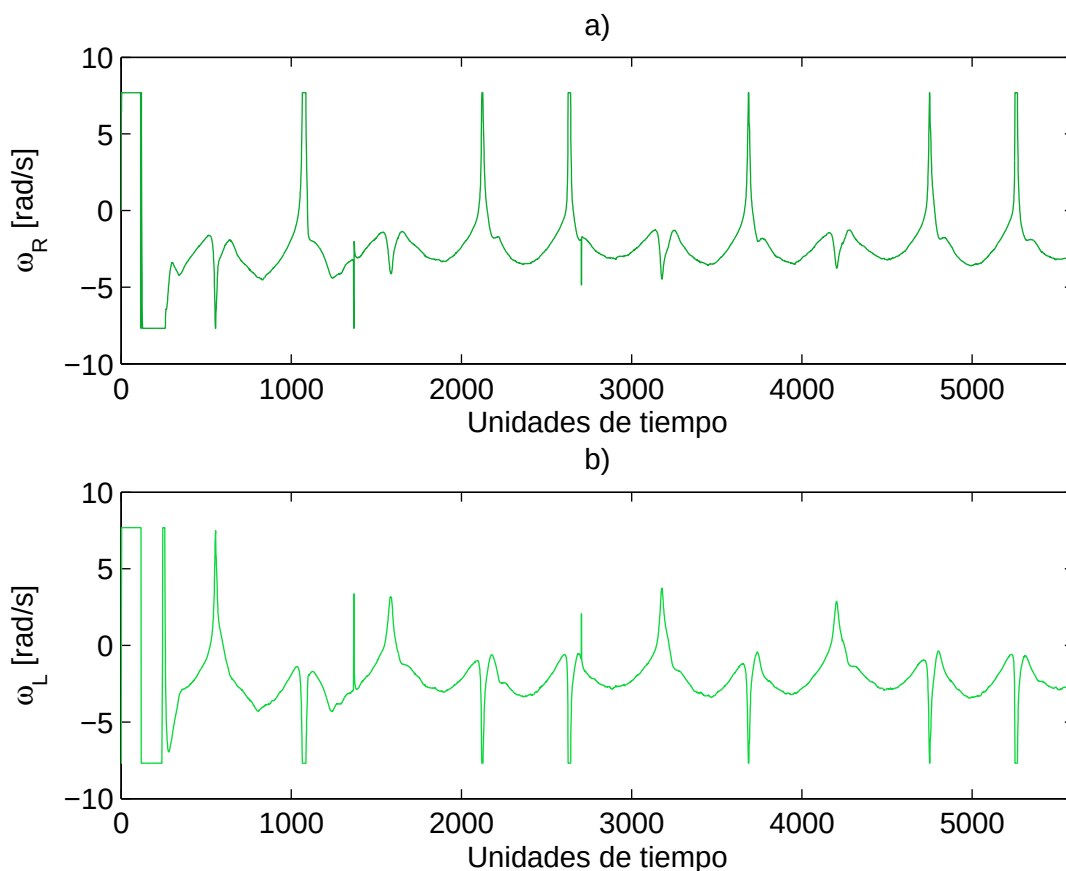


Figura 211: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

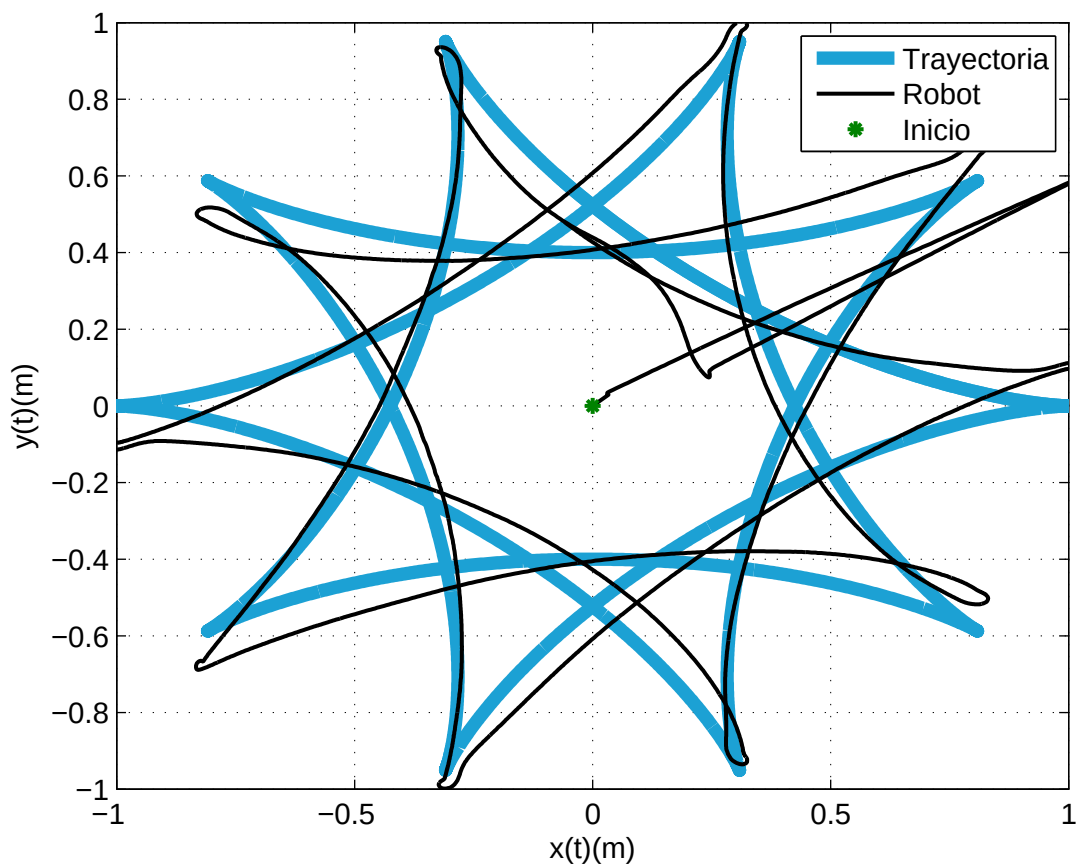


Figura 212: Trayectoria con la forma de hipocicloide - 10 puntas ($k=1.3333$).

7.10 Trayectoria con forma de órbitas

La trayectoria deseada con forma de órbitas se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d(t) = (r_1 - r_2) \cos(ft) + r_2 \cos((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$ y $Y_d(t) = (r_1 - r_2) \sin(ft) - r_2 \sin((\frac{r_1}{r_2} + 1)ft)$, con los parámetros $r_1 = 0.16$, $r_2 = 0.4$, $f = \frac{2\pi}{150}$ y las ganancias $K_p = 1$ y $K_d = 3$

La figura 216, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria trazada por el robot móvil. En ella se observa que el robot parte de su posición inicial y avanza en línea recta hasta el punto (0.6,0.8), luego traza una curva que le permite incorporarse a la trayectoria de las órbitas. También se observa que existe cierto grado de error por parte de la trayectoria realizada por el robot, especialmente en el eje (y).

La figura 213, muestra los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado. Debido al número de unidades de tiempo para completar la trayectoria y que la posición inicial del robot se encuentra muy cerca de la trayectoria de las órbitas, no es posible observar en las gráficas a) y b) de esta figura, el movimiento de incorporación. Sin embargo, la dinámica mostrada es casi idéntica a la observada en la figura 110.

El error inicial mostrado en la figura 214, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.15$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.15,0). Una vez el robot se encuentra dentro de la trayectoria de las órbitas, el error en el eje (x) muestra ligeras variaciones, mientras que el error en el eje (y) presenta oscilaciones de aproximadamente ± 0.15 alrededor de cero. Ésto corresponde a lo observado en la figura 216, un error que se encuentra dentro de lo aceptable, pues la trayectoria trazada por el robot no ha perdido la forma de la trayectoria deseada y cumple con el objetivo de este trabajo de tesis.

Los valles de las dinámicas de ω_R y ω_L en la figura 215, corresponden a las velocidades que el robot utiliza para trazar las curvas más cerradas de las órbitas, mientras que los incrementos y crestas pertenecen a las curvas abiertas de la trayectoria deseada.

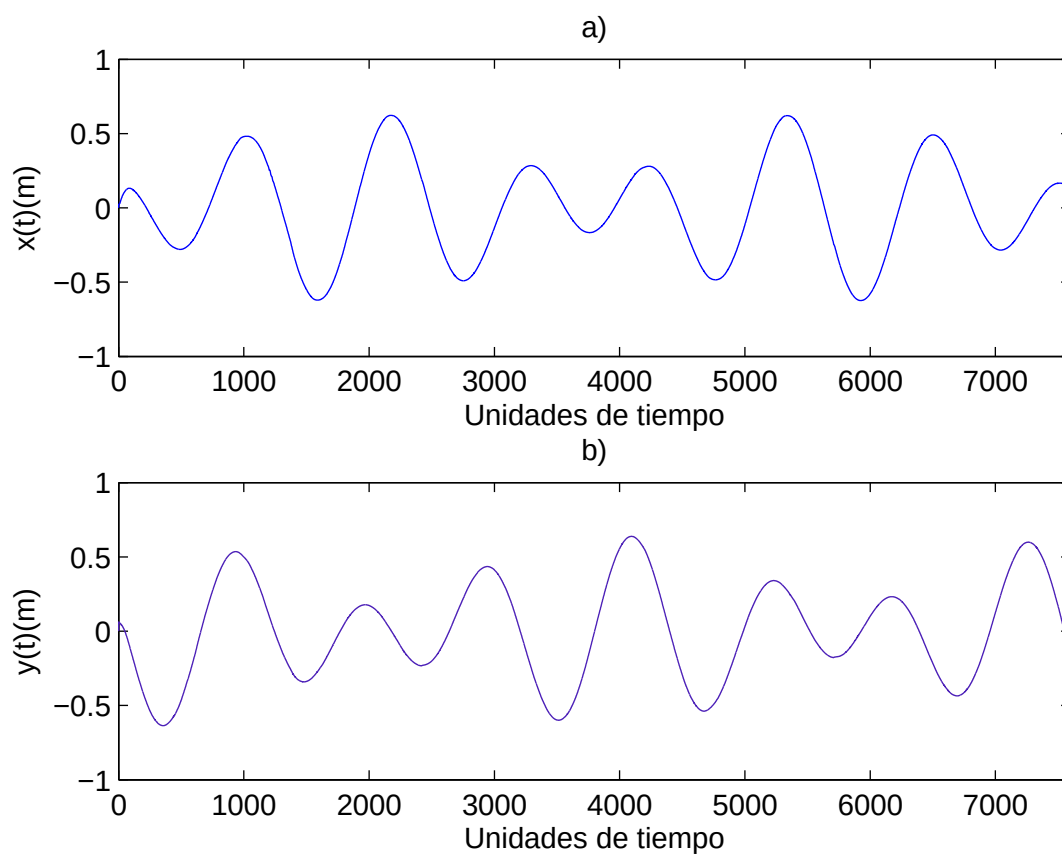


Figura 213: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

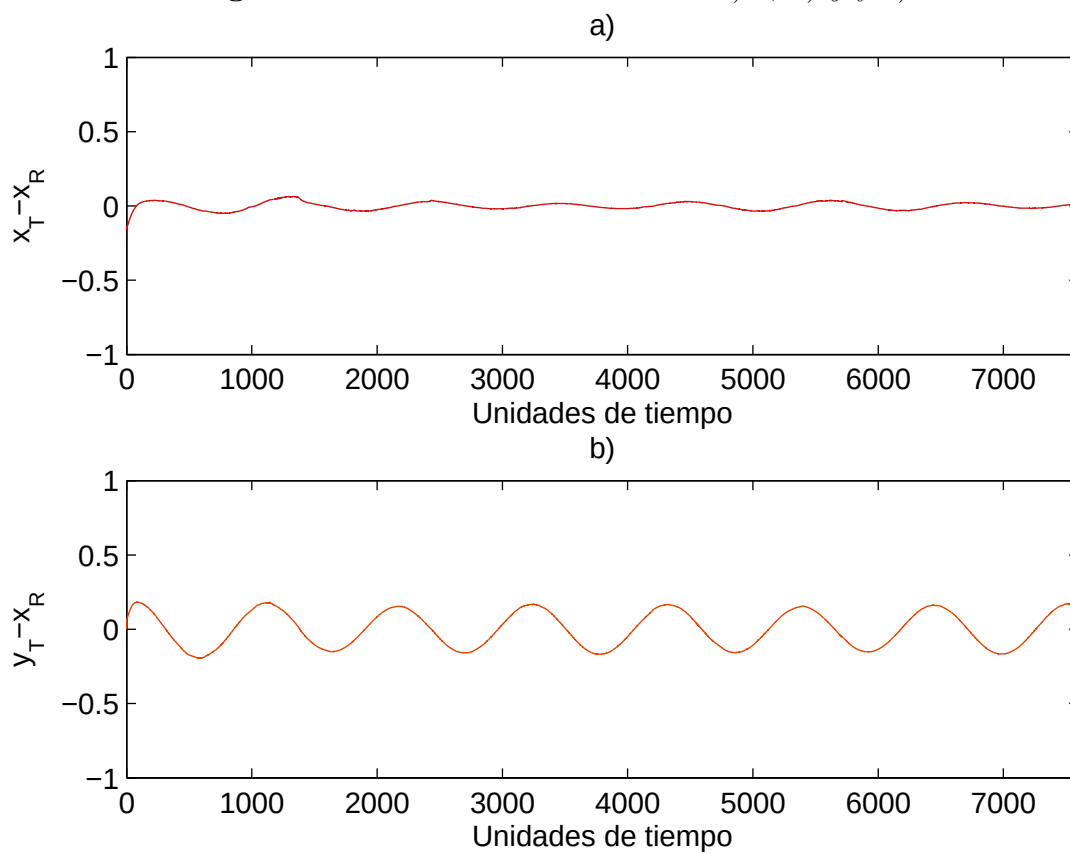


Figura 214: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

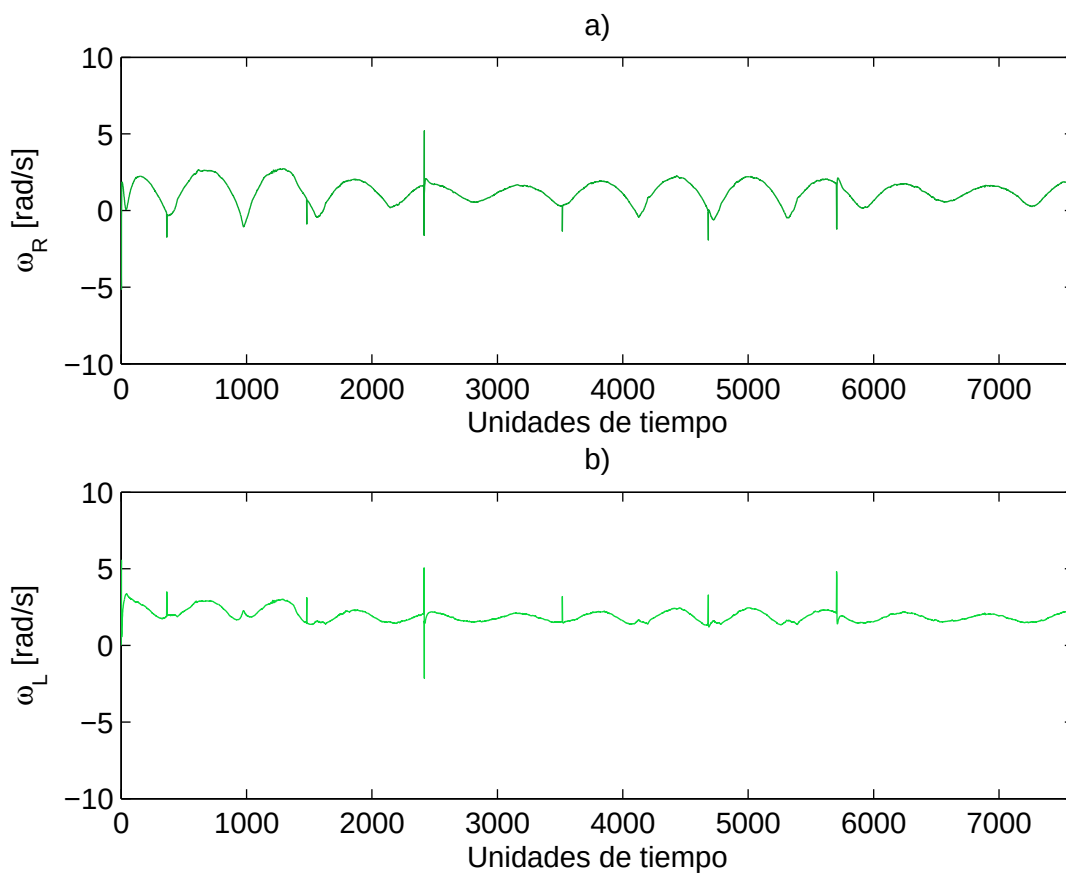


Figura 215: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

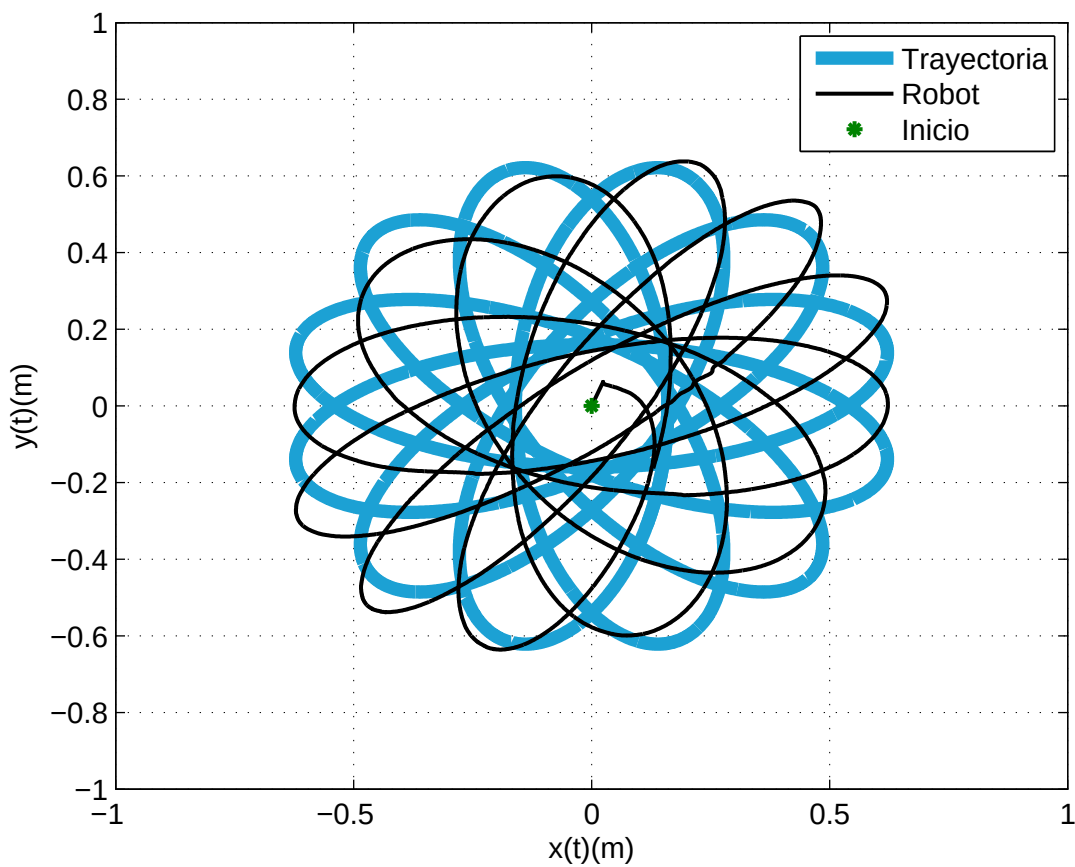


Figura 216: Trayectoria con la forma de órbitas.

7.11 Trayectorias especiales

7.11.0.1 Pescado

La trayectoria deseada con forma de pescado, se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d = s(\cos(aft) + \cos(bft)^j) - 0.5$ y $Y_d = s(\sin(cft) - \sin(dft)^k)$, con los parámetros $a = b = c = d = 1$, $j = 2$, $k = 7$, $s = 0.5$, $f = \frac{2\pi}{125}$ y las ganancias $K_p = 0.25$, $K_d = 0.375$.

La figura 220, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria recorrida por el robot móvil. Donde se observa que el robot móvil parte de su posición inicial hacia la trayectoria de pescado, trazando una curva. Una vez en la trayectoria deseada, parece que el error en ambos ejes es muy pequeño. Ya que solo se observan 2 pequeñas irregularidades al realizar las curvas cerradas de la cola.

En la figura 217, la gráfica a) muestra un incremento pronunciado hasta 0.5, dentro de las primeras 80 unidades de tiempo, mientras que los valores para la gráfica b), aumentan sutilmente. Éste comportamiento corresponde al movimiento de incorporación.

Las gráficas de error de la figura 218, muestran un error inicial de aproximadamente $X_T - X_R = -0.5$ y $Y_T - Y_R = 0$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es (0.5,0). Una vez el robot avanza, el error en el eje (x) se ve reducido a cero. Una vez el robot se encuentra dentro de la trayectoria de pescado, ambos errores muestran ligeras variaciones, las cuales son muy cercanas a cero.

Las dinámicas de las velocidades angulares se muestran en la figura 219. Donde la dinámica de las velocidades, responsable de hacer que el robot realice las curvas cerradas de la cola, se encuentran en 490 y 800 unidades de tiempo. Ésta última es seguida por una sobreoscilación, lo que provoca que el robot oscile en su posición mientras avanza del punto (-0.63,-0.4) al (-0.61,-0.25).

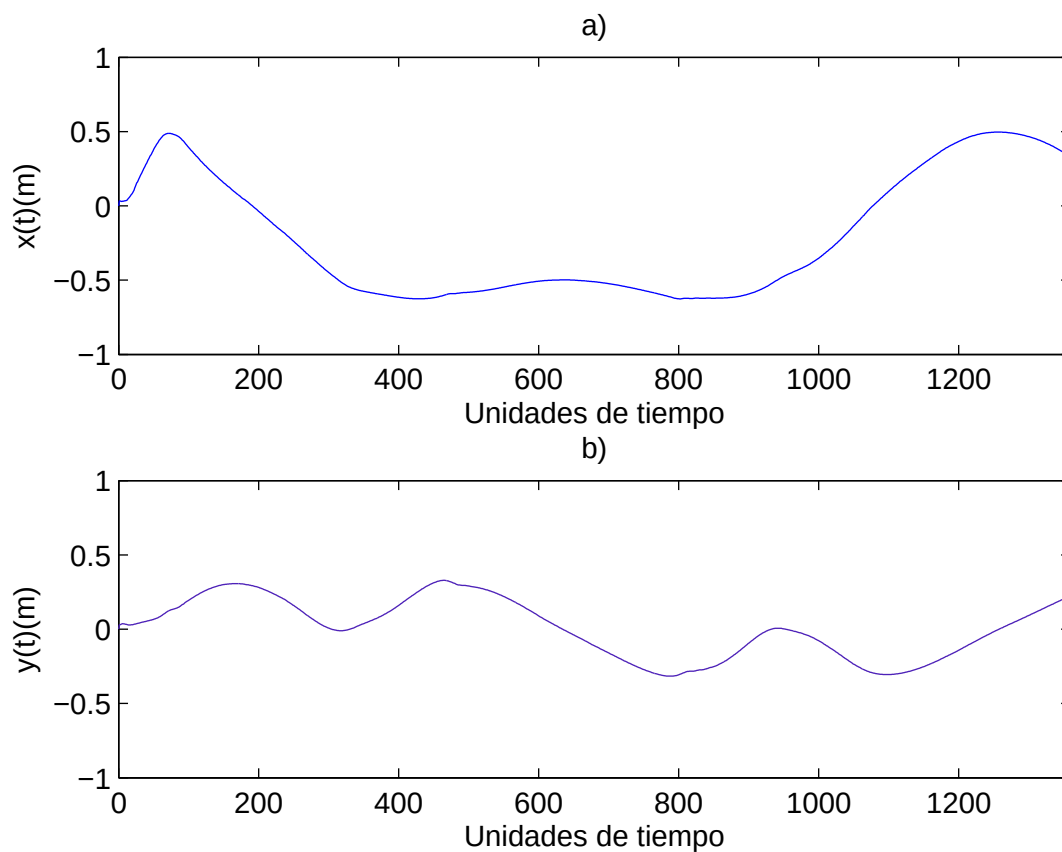


Figura 217: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

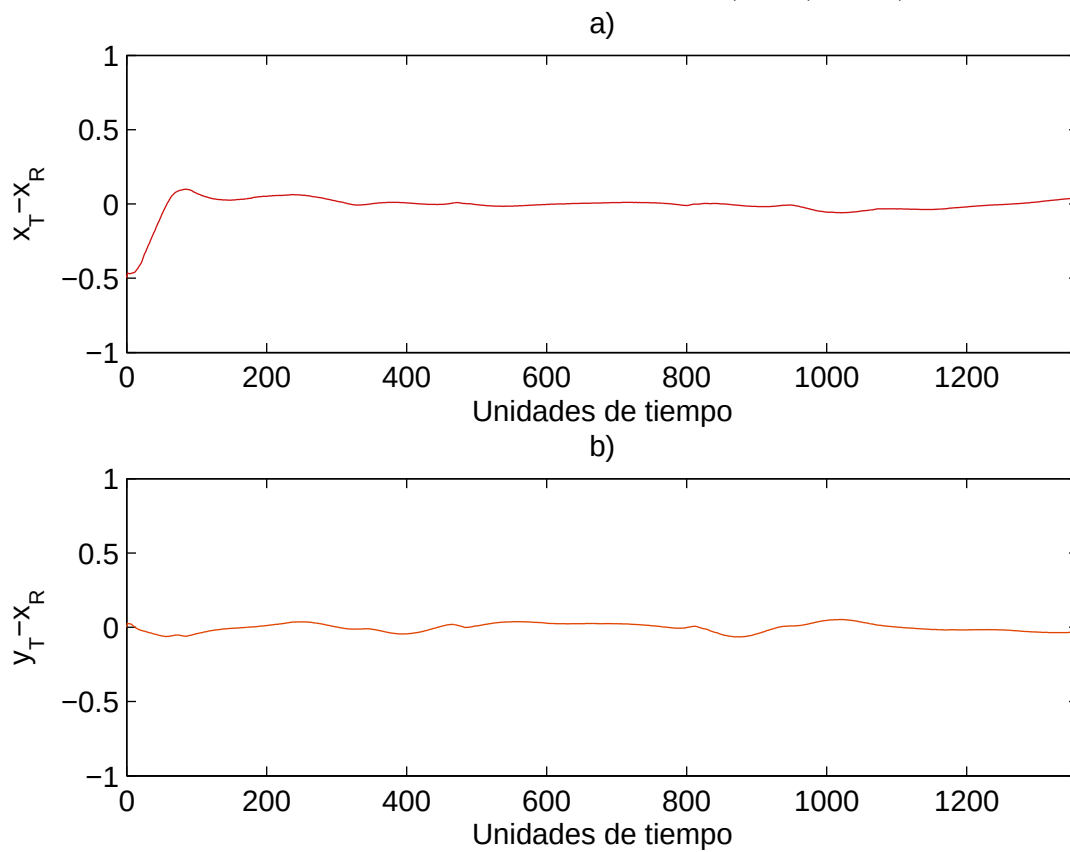


Figura 218: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

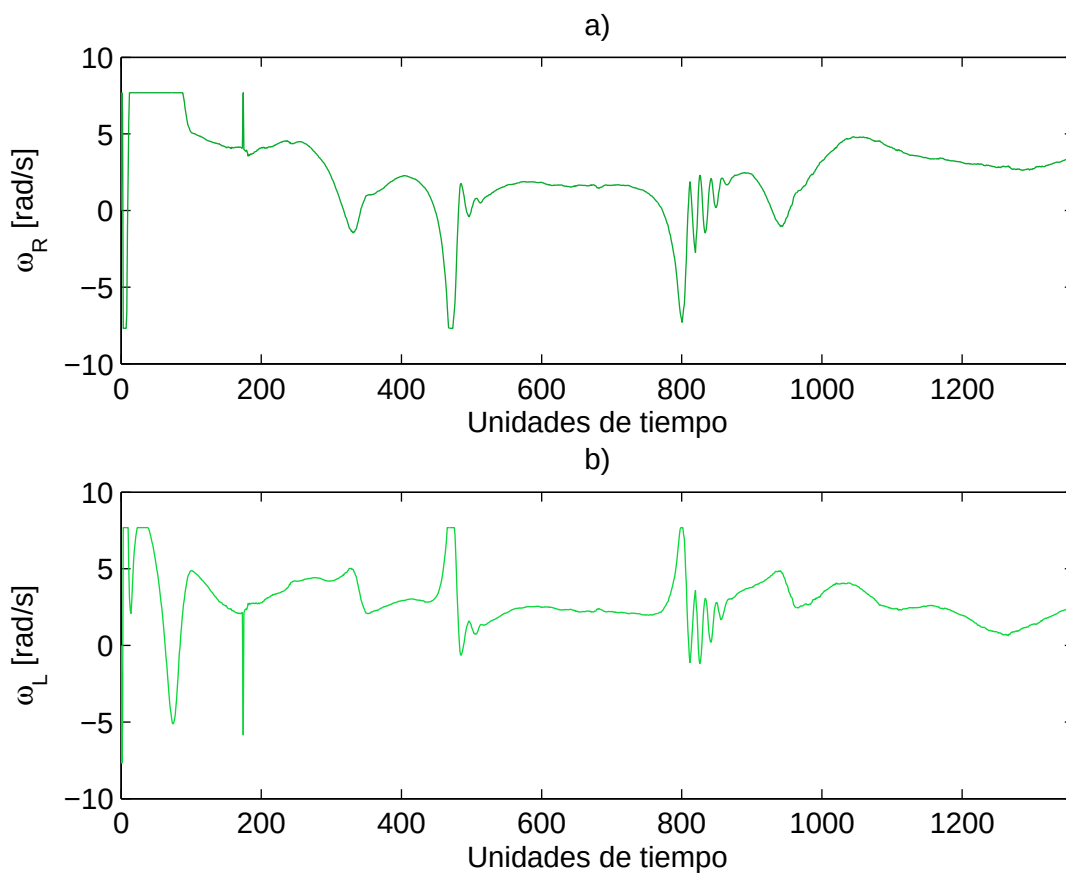


Figura 219: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

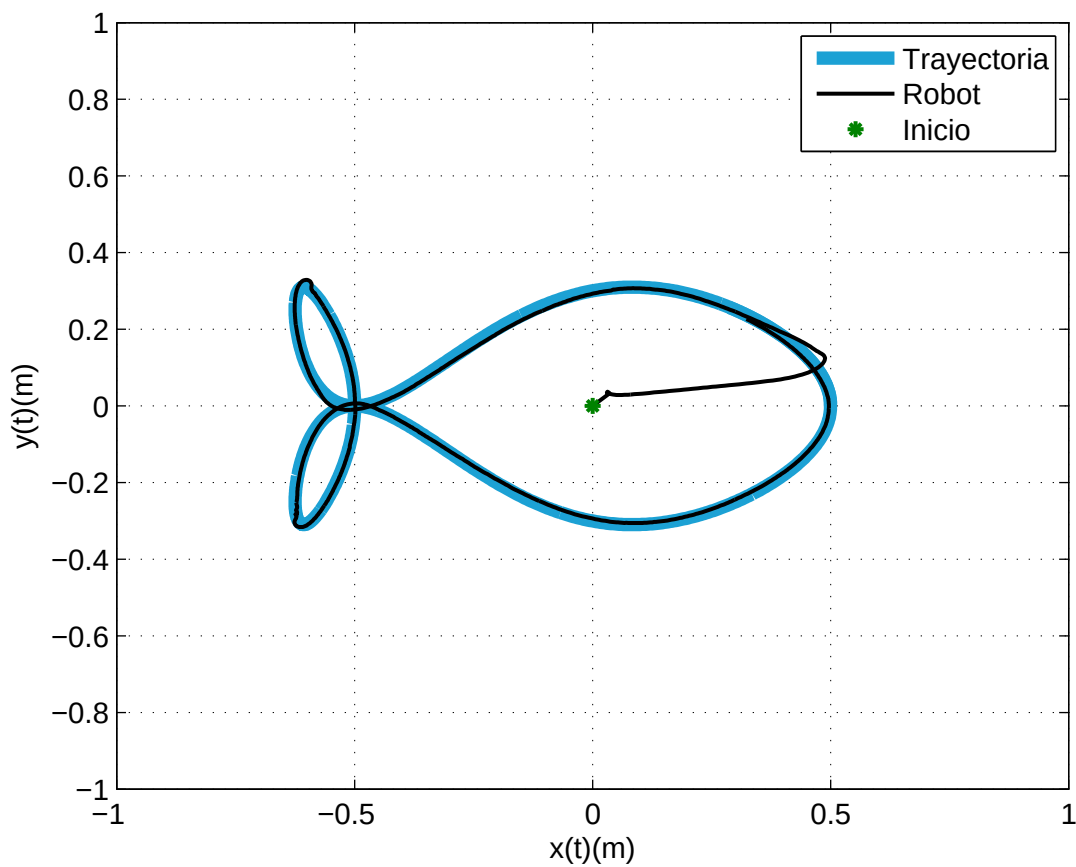


Figura 220: Trayectoria con la forma de pescado.

7.11.0.2 Elefante

La trayectoria deseada con forma de elefante, está definida por las ecuaciones: $X_d = s(\cos(af t) + \cos(bft)^j)$ y $Y_d = s(\sin(cft) - \sin(dft)^k) + 0.2$, con los parámetros $a = d = 1$, $b = c = j = 3$, $k = 2$, $s = 0.4$, $f = \frac{2\pi}{300}$ y las ganancias $K_p = 1$, $K_d = 2$.

La figura 224, muestra la posición inicial, la trayectoria deseada y la trayectoria trazada por el robot móvil. En ella se observa que el robot parte de su posición inicial en línea recta hacia la trayectoria elefante, con una dirección de aproximadamente 30° hasta llegar al punto $(0.7, 0.58)$, donde gira 170° y traza una curva que le permite incorporarse a la trayectoria elefante, en una de sus orejas.

La figura 221, muestra los desplazamientos realizados por el robot móvil para cada eje coordenado a lo largo del tiempo. En esta figura, la gráfica a) presenta un incremento y luego un decremento pronunciado dentro de las primeras 200 unidades de tiempo, mientras que la gráfica b) incrementa a 0.62, luego disminuye a 0.44 y vuelve a incrementar a 0.48. Ésta dinámica corresponde al movimiento de incorporación del robot a la trayectoria deseada.

El error inicial mostrado en la figura 222, es aproximadamente $X_T - X_R = -0.8$ y $Y_T - Y_R = -0.2$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0.5, 0.2)$. Una vez el robot se encuentra en la trayectoria elefante, ambos errores disminuyen a cero, mostrando pequeñas variaciones en las unidades de tiempo restantes.

La dinámica de las velocidades angulares se muestra en la figura 223, donde se observa una dinámica un tanto compleja para ω_R y ω_L , la cual permite que el robot realice la trayectoria deseada, de manera satisfactoria.

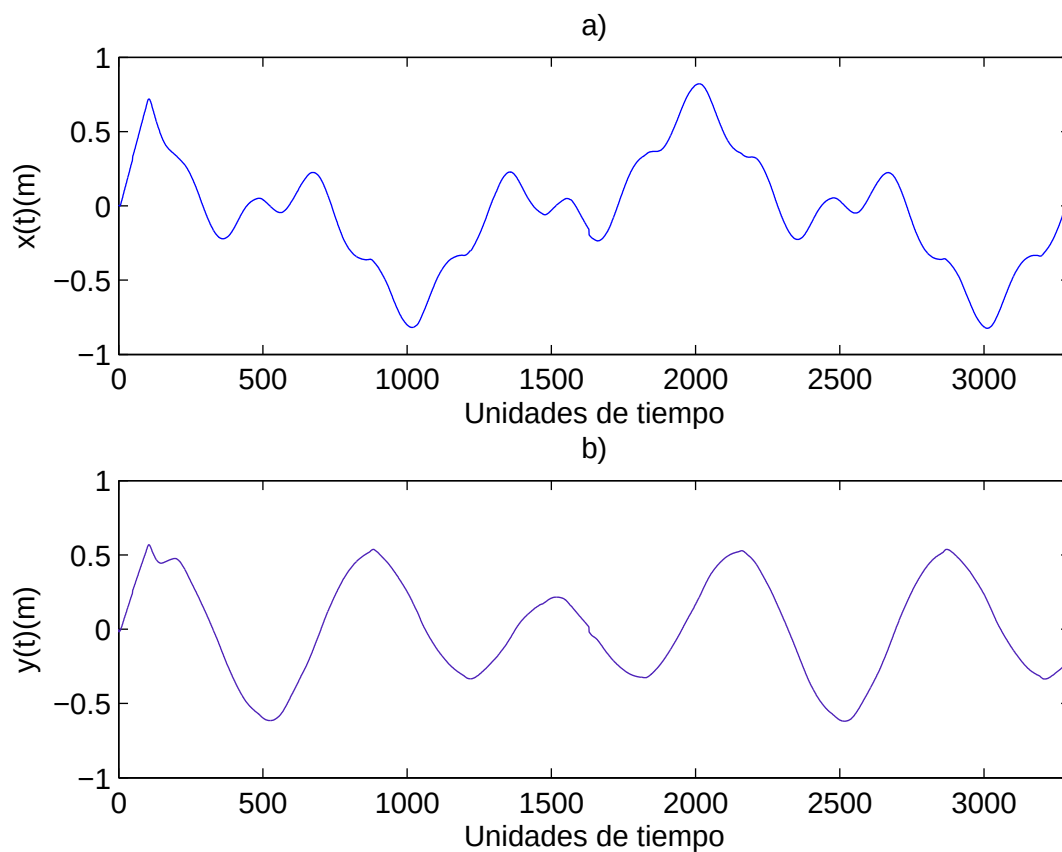


Figura 221: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

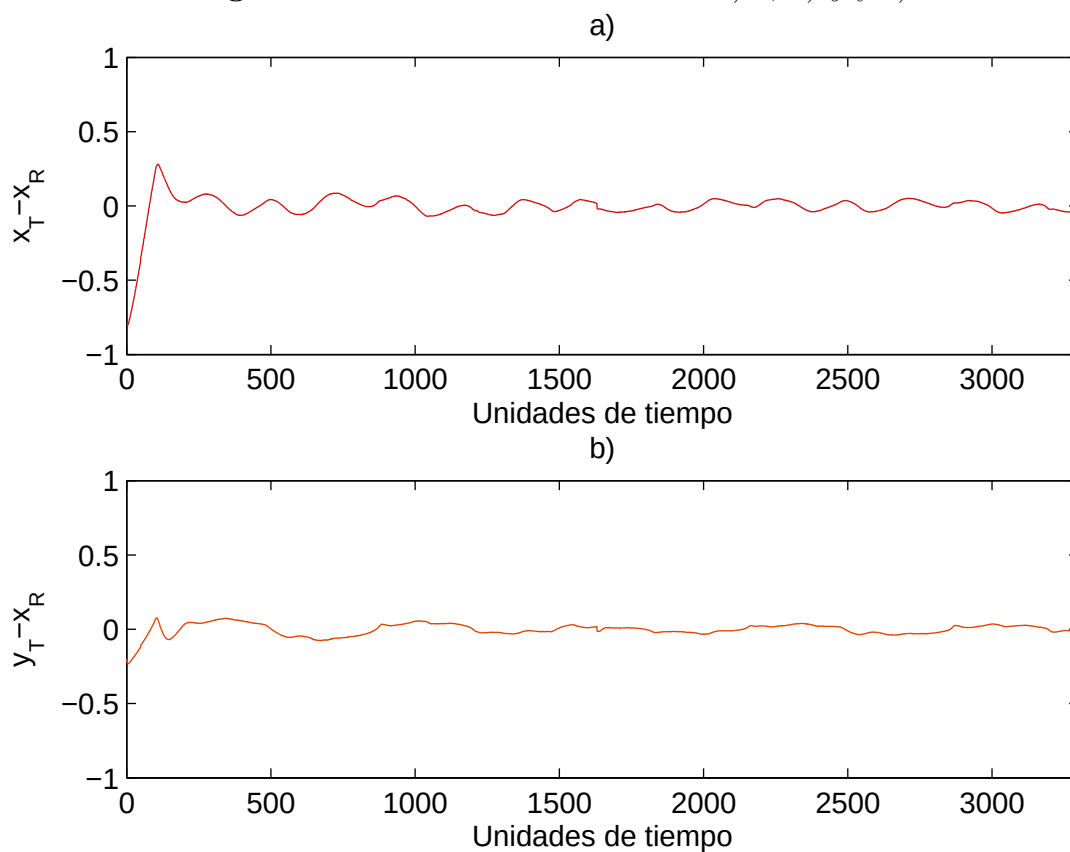


Figura 222: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

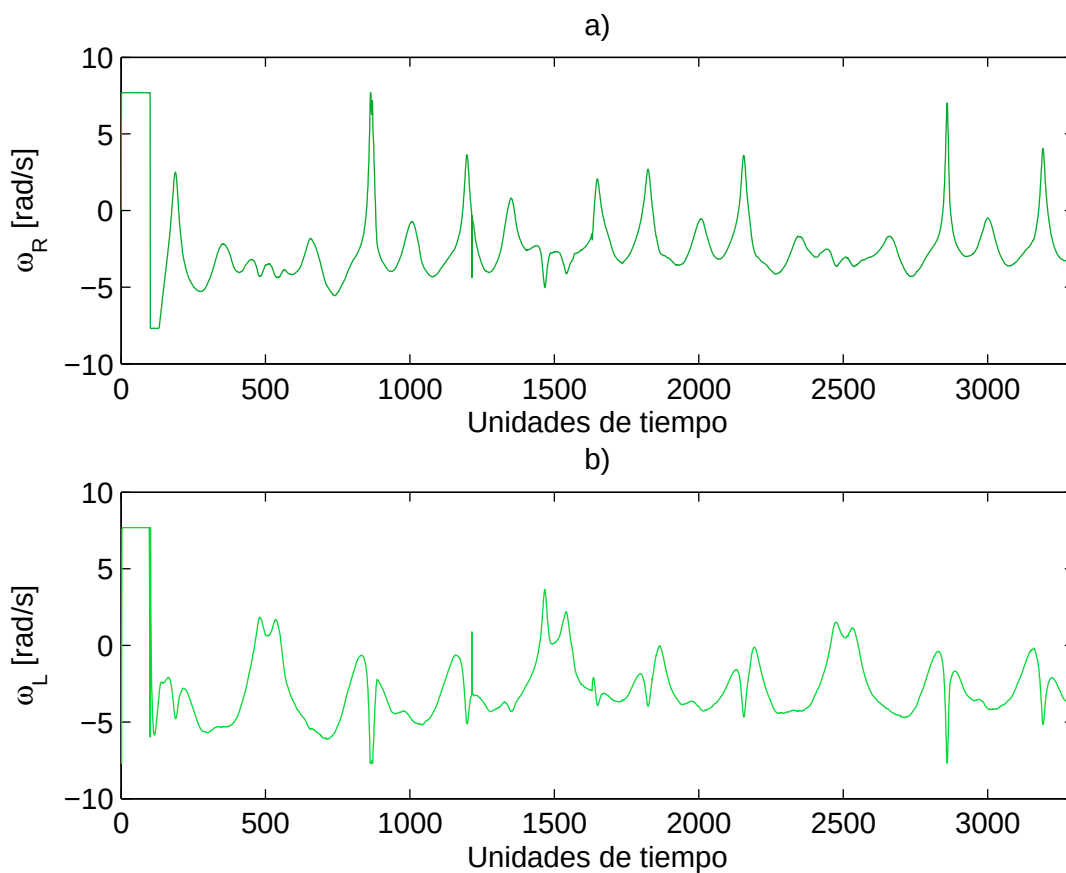


Figura 223: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

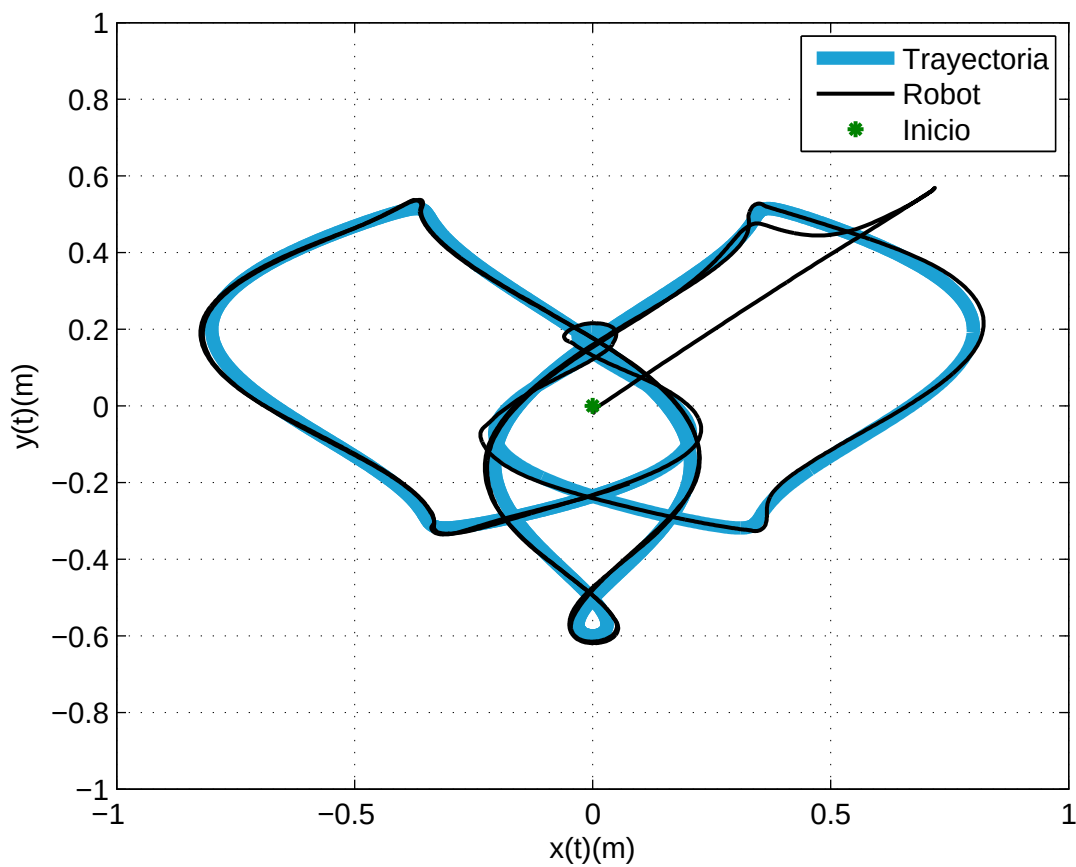


Figura 224: Trayectoria con la forma de elefante.

7.11.0.3 Zorro

La trayectoria deseada con forma de zorro se encuentra definida por las ecuaciones: $X_d = s(\cos(af t) - \cos(bft)^j)$ y $Y_d = s(\sin(cft) - \sin(dft)^k) + 0.4$, los parámetros $a = d = 1$, $b = c = j = 3$, $k = 2$, $s = 0.4$, $f = \frac{2\pi}{400}$ y las ganancias $K_p = 0.1$, $K_d = 0.2$.

La figura 228, muestra la trayectoria deseada, la posición inicial y la trayectoria realizada por el robot. Donde se observa que el robot parte de su posición inicial en línea recta con dirección de 30° , luego gira hacia la izquierda y empieza a trazar una curva para incorporarse a la trayectoria del zorro, en el vértice de su oreja. También se identifica que los vértices de la trayectoria presentan una cierta irregularidad, debido a la dificultad del robot por realizar esos cambios de orientación tan repentinos.

La figura 225, muestra los desplazamientos realizados por el robot móvil en cada eje coordenado. En la gráfica a) de esta figura, se observa un incremento muy sutil, dentro de las primeras 170 unidades de tiempo, mientras que los valores de la gráfica b), muestran un incremento pronunciado, pues estas dinámicas corresponden al movimiento de incorporación del robot a la trayectoria del zorro. Como se observa en la figura 228, este movimiento conlleva un mayor desplazamiento sobre el eje (y).

El error inicial en la figura 226, es aproximadamente $X_T - X_R = 0$ y $Y_T - Y_R = -0.4$, debido a que el primer punto de la trayectoria deseada es $(0, 0.4)$. Éste error disminuye conforme el robot avanza hacia la trayectoria y una vez que ha sido alcanzada, ambos errores se mantienen en cero, con unas pequeñas variaciones.

La figura 227, muestra la dinámica de las velocidades angulares en el tiempo. Donde es posible observar las singularidades provocadas, por el trazado de los vértices de la trayectoria.

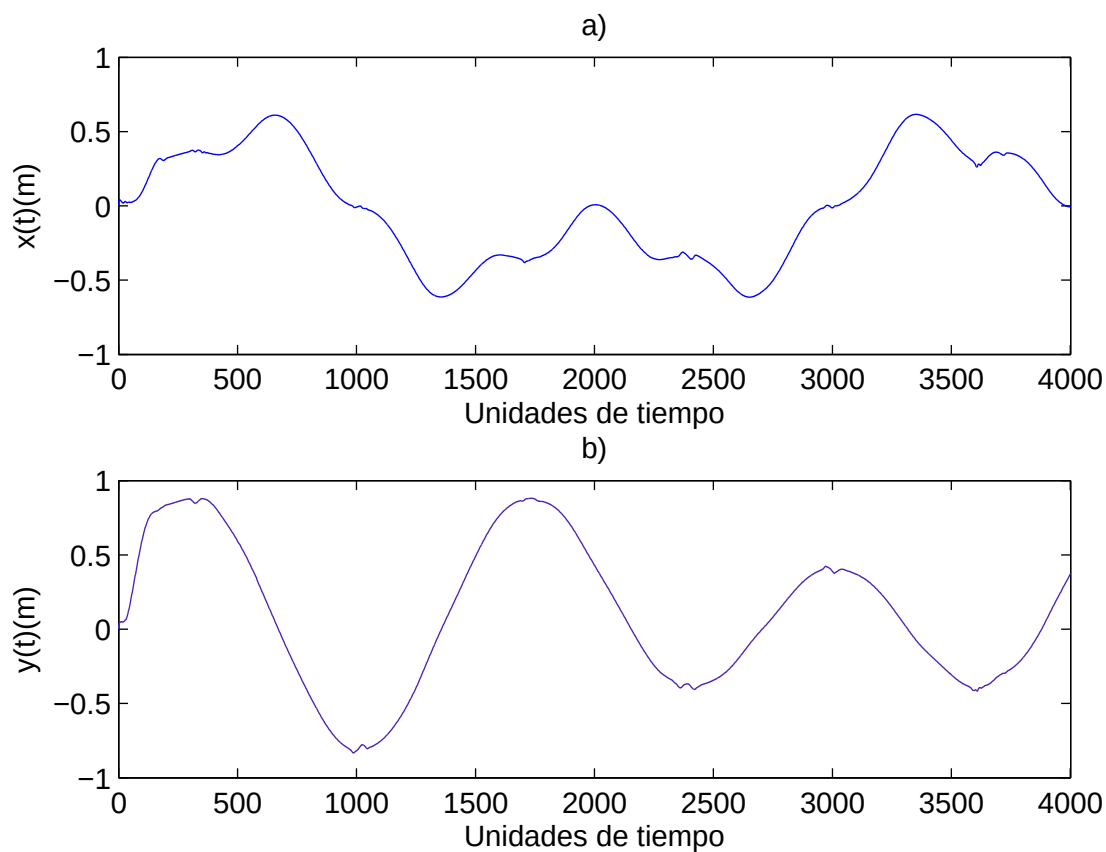


Figura 225: Dinámica del robot en: a) x , b) y y c) θ .

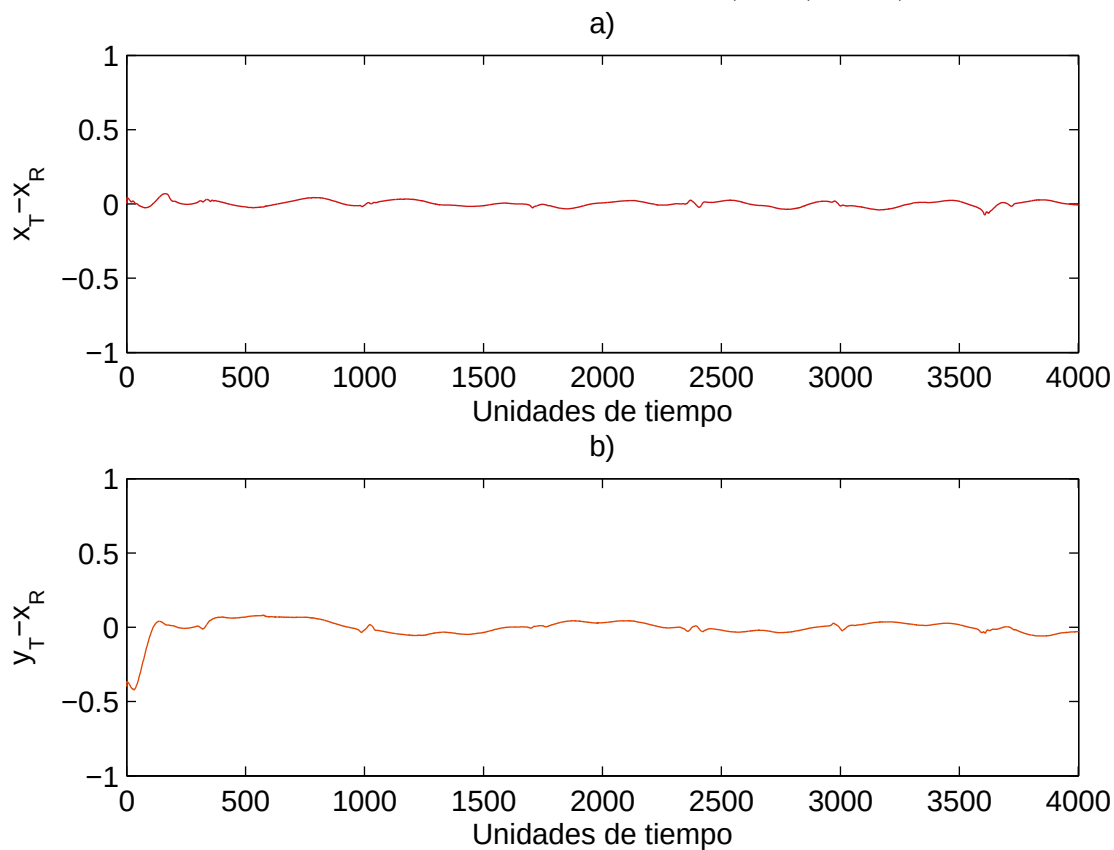


Figura 226: Dinámica del error entre la trayectoria deseada y la realizada por el robot para: a) x y b) y .

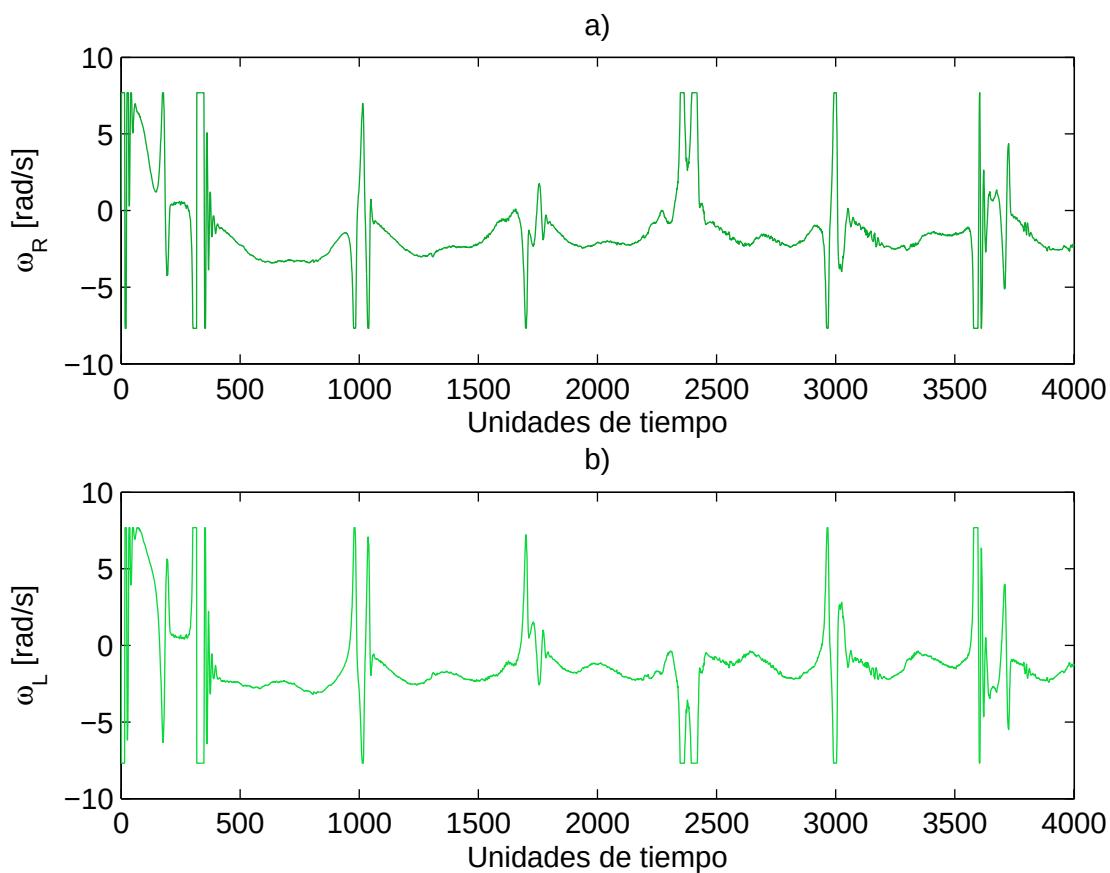


Figura 227: Dinámica de las velocidades angulares para las ruedas del robot: a) Derecha y b) Izquierda.

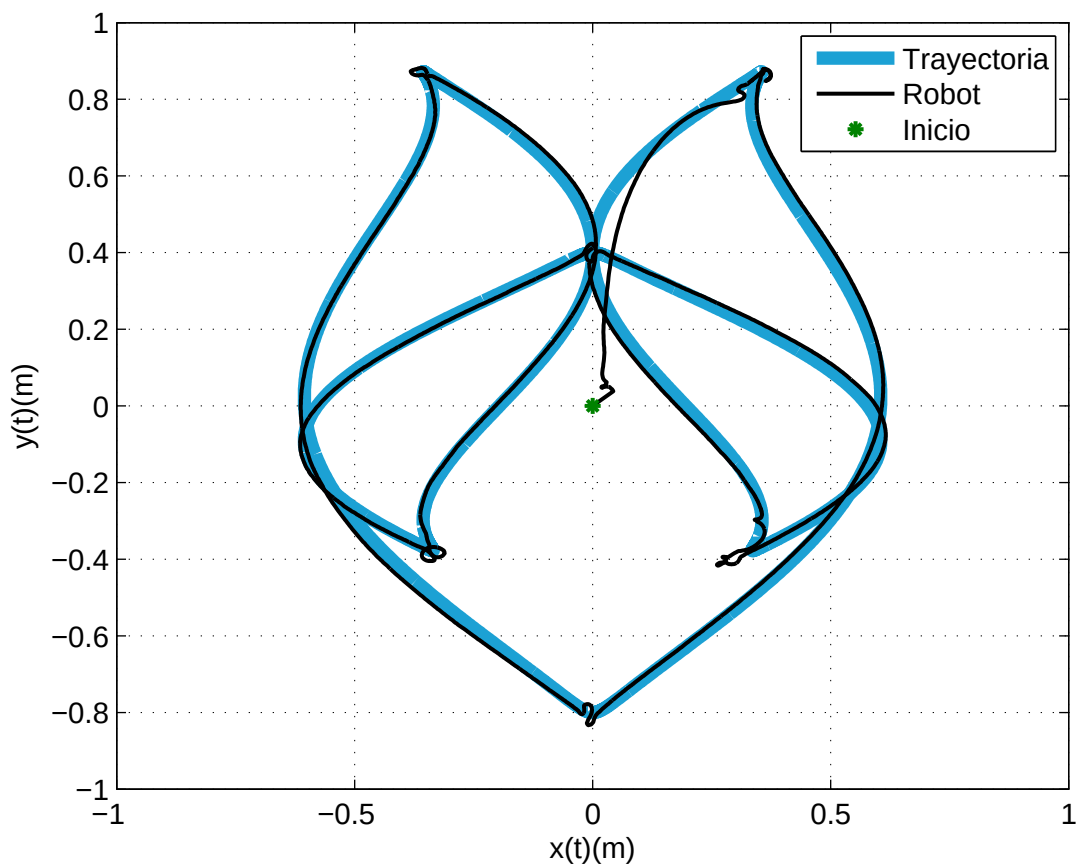


Figura 228: Trayectoria con la forma de zorro.

7.12 Conclusiones del capítulo

Analizando los datos obtenidos en la implementación experimental, se ha demostrado que se puede lograr experimentalmente los resultados obtenidos en las simulaciones realizadas en el capítulo 5. Se realizaron diferentes pruebas donde se definieron frecuencias y ganancias (K_d, K_p) con la finalidad de que el robot Khepera III cumpliera de manera correcta la tarea y objetivo principal de este trabajo de tesis: Seguimiento de trayectoria por parte de un robot móvil diferencial. Se encontró que algunos valores de ganancias, provocan una cierta oscilación al momento de iniciar el seguimiento de una trayectoria (etapa transitoria), el cual disminuye en poco tiempo y se obtiene un correcto seguimiento de trayectoria, con un error mínimo.

Capítulo 8

Conclusión

En este capítulo final de la presente tesis, se exponen las conclusiones más importantes sobre los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo. También se menciona la manera en que éste puede ser mejorado y el trabajo que se pretende realizar a futuro.

De los resultados obtenidos tanto en la parte de simulación como en la implementación experimental, se llega a las siguientes conclusiones finales:

- Las ganancias de la ley de control Kp y Kd , y las frecuencias utilizadas para generar la trayectoria deseada, dependen de ellas entre sí. Es decir, al modificar una se deben modificar las otras para un correcto seguimiento de la trayectoria.
- Los valores de las ganancias Kp y Kd definidas, dependen del tamaño y forma de la trayectoria deseada, pero especialmente del primer punto de la misma. Es decir, si el primer punto de la trayectoria se encuentra cerca de la posición inicial del robot, las ganancias pueden ser números enteros mayores a 3, esto provoca que el robot trace la trayectoria deseada a una velocidad razonable, con ello se logra que el error en el seguimiento de la trayectoria sea muy pequeño. Sin embargo, si el primer punto de la trayectoria deseada, se encuentra lejos de la posición inicial (aproximadamente a 0.5m), los valores de las ganancias deberán de estar en el intervalo $0 - 2$, esto provoca que el robot realice la trayectoria con una mayor velocidad y pueda alcanzar los primeros puntos de la trayectoria deseada, sacrificando un aumento en el error del seguimiento.

- Durante las diferentes pruebas realizadas en la implementación experimental se presentó sobreoscilación y pérdida de la trayectoria por parte del robot. Estos comportamientos no deseados se corrigieron al definir un valor idóneo para las ganancias en cada una de las trayectorias, ésto se logró realizando las pruebas con diferentes valores en las ganancias, hasta obtener un correcto seguimiento de la trayectoria por parte del Khepera.
- El error en el seguimiento de las trayectorias puede ser reducido, ya sea con la optimización del código, realizando ciertas medidas en el propio laboratorio e incluso utilizar otra técnica de control, pero no es la finalidad de este trabajo de tesis.
- Es importante tener en cuenta la aplicación que se tienen en mente para el robot móvil, para poder elegir correctamente la frecuencia y ganancias ideales. O bien, el diseño del controlador.

8.1 Trabajo a futuro

El trabajo desarrollado en esta tesis, fue centrado al seguimiento de una trayectoria deseada utilizando un controlador basado en la linealización por retroalimentación dinámica, sin embargo, ésto puede ser abordado de diversas formas empleando otras técnicas de control. Algunas consideraciones para un trabajo a futuro son:

- Aplicar la teoría de sistemas complejos para generar un comportamiento colectivo en grupos de robots móviles, para el seguimiento de trayectorias más complejas que las presentadas en este trabajo de tesis.
- Diseñar un controlador que tome en cuenta tanto el modelo cinemático como el

dinámico del robot móvil diferencial, para reducir los errores presentados en el seguimiento de trayectorias.

- Estudiar la robustez de la lógica difusa y redes neuronales, para su implementación en el controlador, con la finalidad de agregar al robot móvil la capacidad de evadir obstáculos tanto estáticos como en movimiento.
- Investigar la teoría necesaria para la implementación de control que permita al robot móvil, seguir un objetivo en movimiento.

Bibliografía

- [1] J. Camarena. (2009). *Análisis Cinemático, Dinámico y Control de Tiempo de un Vehículo Guiado Automáticamente*.
- [2] J.J. Cetina. (2017). *Diseño de Trayectorias Caóticas en Robots Móviles*. Tesis de maestría, Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones, CICESE.
- [3] C.M. Sánchez, J.R.G. Sánchez, C.Y.S. Cervantes, R.S. Ortigoza, V.M.H. Guzmán, J.N.A. Juárez and M.M. Aranda. (2016). *Trajectory Generation for Wheeled Mobile Robots Via Bézier Polynomials*. IEEE Latin America Transactions.
- [4] R. Martínez, C. Cruz, D. Reyes, A. Arellano and L.F. Pinedo. (2015). *Formación de Agentes: Una Aplicación de Patrullaje*. Congreso Nacional de Control Automático AMCA, Cuernavaca, Morelos, del 14 al 16 de octubre.
- [5] A. López-Parra (2017). *Formación en grupos de robots móviles*. Tesis de maestría, Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones, CICESE.
- [6] J.J. Cetina, A. Arellano, A. López, R.M. López, C Cruz. (2016). *Diseño de Trayectorias Caóticas en Robots Móviles*. Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA 2016).

- [7] M. Sandeep and M. Jharna. (2014). *Localization and Control of Differential Drive Mobile Robot*. Global Journal of Research In Engineering, [S.l.], nov. 2014.
- [8] N. Vinod and M. Abraham. (2015). *Design, Simulation and Implementation of Cascaded Path Tracking Controller for a Differential Drive Mobile Robot*. Interntational Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI), 2015.
- [9] A.G. Barrientos, J.L. López, E.S. Espinoza, J. Hoyo and G. Valencia. (2016). *Object Transportation Using a Cooperative Mobile Multi-Robot System*. IEEE Latin America Transactions.
- [10] Indrazno Siradjuddin, P. Tundung, S. Indah and Supriyatna Adhisuwignjo. (2015). *A Real-Time Model Based Visual Servoing Application for a Differential Drive Mobile Robot Using Beaglebone Black Embedded System*. IEEE International Symposium on Robotics and Intelligent Sensors (IEEE IRIS2015).
- [11] D. Drake, S. Koziol and E. Chabot. (2017). *Mobile Robot Path Planning with a Moving Goal*. IEEE.
- [12] N. Sariff and A. Wahab. (2014). *Automatic Mobile Obstacles Avoidance in a Static Environment by using a Hybrid Technique based on Fuzzy Logic and Artificial Neural*

Network. 2014 4th International Conference on Artificial Intelligence with Applications in Engineering and Technology.

- [13] M. Bougelben, D. Ayedi, C. Rekik and N. Derbel. (2017). *Fuzzy Logic Controller for Mobile Robot Navigation to Avoid Dynamic and Static Obstacles*. 2017 14th International Multi-Conference on Systems, Signals Devices (SSD).
- [14] Y. Kanayama, F. Miyazaki, and T. Noguchi. (1990). *A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot*.
- [15] A. Gholipur and M.J. Yazdanpanah. (2003). *Dynamic Tracking Control of Nonholonomic Mobile Robot With Model Reference Adaptation For Uncertain Parameters*. European Control Conference (ECC).
- [16] K. Ogata. (5a. Ed.) (2010). *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson Educación, S.A., Madrid, 2010.
- [17] K. Ogata. (1987). *Dinámica de Sistemas* Prentice Hall.
- [18] O. Duarte. (2006). *Análisis de Sistemas Dinámicos Lineales*. Universidad Nacional de Colombia.
- [19] A.V. Oppenheim and A.S. Willsky. (2da. Ed.) (1994). *Señales y Sistemas*. Prentice Hall, Inc.

- [20] R. Baraniuk. (2013). *Señales y Sistemas*. Rise University, Houston, Texas.
- [21] P. Suster and A. Jadlovská. (2010). *Neural Tracking Trajectory of the Mobile Robot Khepera II in Internal Model Control Structure*. International Conference Process Control.
- [22] K. Malu and J. Majumdar. (2014). *Kinematics, Localization and Control of Differential Drive Mobile Robot*. Global Journal of Researches in Engineering: Robotics Nano-Tech.
- [23] A. De Luca, G. Oriolo and M. Venditelli.(2001). *Control of Wheeled Mobile Robots: An Experimental Overview*.
- [24] C.H. Lehmann. (1942). *Analytic Geometry*. J. Wiley & sons, Incorporated
- [25] A.I. Markushévich. (2da. Ed.) (1984). *Curvas Maravillosas, Números Complejos y Representaciones Conformes, Funciones Maravillosas* .Moscú:MIR.
- [26] H. Martyn and A.P. Rollet. (2da. Ed.) (1961). *Mathematical Models*. Oxford University Press.
- [27] J. Lawrence and A. Dennis. (1972.) *A catalog of Special Plane Curves*. Dover Publications.
- [28] E.H. Lockwood. (1971). *A Book of Curves*. Cambridge at the University Press.

- [29] A. López-Parra, A. Arrellano, C. Cruz, R. Martínez, J.J. Cetina .(2016). *Formación en Grupos de Robots Móviles*. Congreso Latinoamericano de Control Automático (CLCA 2016).
- [30] F. Lambercy and J. Tharin. (2013). *Khepera III User Manual*. User manual, K-Team.