

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS



ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS ASOCIADAS
A LA MÚSICA TONAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

CRISTIAN MANUEL BAÑUELOS HIÑOJOSA

Ensenada, Baja California, México. Octubre de 2007

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS

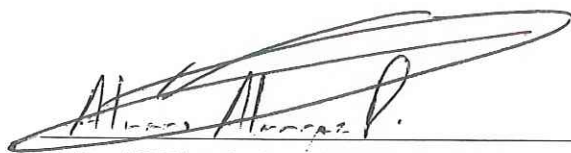
ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS ASOCIADAS
A LA MÚSICA TONAL

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

CRISTIAN MANUEL BAÑUELOS HINOJOSA

APROBADO POR:



DR. ALVARO ALVAREZ PARRILLA

PRESIDENTE



DR. CARLOS YEE ROMERO

SECRETARIO



LIC. ALVARO DÍAZ RODRÍGUEZ

1ER. VOCAL

DEDICATORIA

Para:

Manuel, María y Stephanie Bañuelos.

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios, poder terminar mi carrera universitaria y realizar este trabajo de tesis con el apoyo de toda mi familia, amigos y profesores. En especial agradezco a mis padres Manuel y María, mi hermana Stephanie Bañuelos (gracias hermanita por el dibujo de la gráfica completa K_7), mis abuelos así como a todos mis tíos y demás miembros de mi familia. Y que decir de los amigos, sin los cuales es imposible terminar en sano juicio esta licenciatura, gracias a Enrique Díaz, Mayra Montalvo, Marco Barrera, Manuel Ocegueda, Sol Gil, Amado Lázaro, Ulises Velarde, Alberto Riesgo, Lourdes Gómez, Oscar Tanahara, Yael Durán, Anna Chliaguina, Walter Osuna, Livier Chávez y todos ustedes que saben que los aprecio mucho.

Agradezco también a mis profesores, tanto de matemáticas: René Ortiz, Alvaro Alvarez, Carlos Yee, Selene Solorza, Gloria Rubí, Carlos Maldonado, Gilberto Jerónimo y Salvador García, entre muchos otros. Como a mis profesores de música: de piano, Evgeny Korolkov; de oboe, Boris Glouzman; de teoría musical, Lucía Chávez, Olena Getman y Álvaro Díaz.

Agradezco a los grandes compositores, que crearon piezas tan bellas. A los intérpretes y orquestas, mediadores entre ellos y nosotros; quienes sembraron en mí el deseo de entender más profundamente sus obras.

Por último, te agradezco a tí, que tienes en tus manos este trabajo, y con un poco de suerte para mí, lo leerás. Espero que disfrutes el contenido y, sobre todo, te sea de utilidad.

RESUMEN de la Tesis de Cristian Manuel Bañuelos Hinojosa presentada como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Ensenada, Baja California, México, octubre de 2007.

ESTRUCTURAS GEOMÉTRICAS ASOCIADAS A LA MÚSICA TONAL

Se analiza la teoría básica de la música tonal, tomando las definiciones de escalas, intervalos, acordes, triadas diatónicas y progresiones armónicas para ser traducidas a un lenguaje geométrico y algebraico. En particular las triadas diatónicas las consideramos como puntos en $\mathbb{Z}^3$. Se definen ciertas operaciones sobre las triadas, que generan sucesiones de acordes, las cuales corresponden a lo que se conoce como progresiones armónicas.

Por otra parte el subconjunto en $\mathbb{Z}^3$ de triadas diatónicas se puede dividir en clases de equivalencia, de acuerdo a los grados de la escala. Así mismo, se le asigna una métrica y un orden, que junto con las operaciones definidas, permiten pasar entre cualquier par de clases de triadas. Es conveniente aclarar que el resultado de estas operaciones se ajusta a las reglas básicas del contrapunto.

Por último se utilizan los resultados para analizar algunos fragmentos de obras de J.S. Bach, así como generar pequeñas piezas musicales. Lo anterior se implementa en un programa de cómputo que permite al usuario explorar y escuchar las progresiones generadas por las operaciones sobre las triadas.

Resumen aprobado:

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Alvaro Alvarez Parrilla', written over a horizontal line.

Alvaro Alvarez Parrilla

ÍNDICE GENERAL

1.. Introducción	2
<i>Parte I Antecedentes y definiciones</i>	6
2.. Historia	7
3.. Definiciones musicales	13
<i>Parte II Modelo Matemático</i>	27
4.. Definiciones musicales, desde un punto de vista matemático	28
4.1. Escalas	29
4.2. Intervalos	38
5.. Espacio de triadas diatónicas	41
5.1. Triada	42
5.2. El conjunto de triadas diatónicas como espacio métrico y conjunto parcialmente ordenado	48
5.2.1. Implicaciones armónicas	51
5.3. Conducción de voces	54
5.3.1. Acción de $\mathbb{Z}_7$ sobre las progresiones de acordes	56
5.4. Otras escalas	63
6.. Espacio de progresiones de acordes y contrapuntos	65
6.1. La gráfica completa K_7 y su ayuda en la visualización de las progresiones	67
6.2. Contrapuntos	69
<i>Parte III Aplicaciones del modelo matemático</i>	73
7.. Generador de progresiones de triadas diatónicas	74

7.1. Instrucciones de uso	75
8.. <i>Ejemplos</i>	78
9.. <i>Conclusiones</i>	87
 <i>Apéndice</i>	 90
A.. <i>Código del generador de triadas diatónicas</i>	91
A.1. Clase Escala	91
A.2. Clase Triada	95
A.3. Clase Lily	113
A.4. Clase principal: TriadasDiatonicas101	127
A.5. Disco compacto con sonidos, programa y documentación.	129

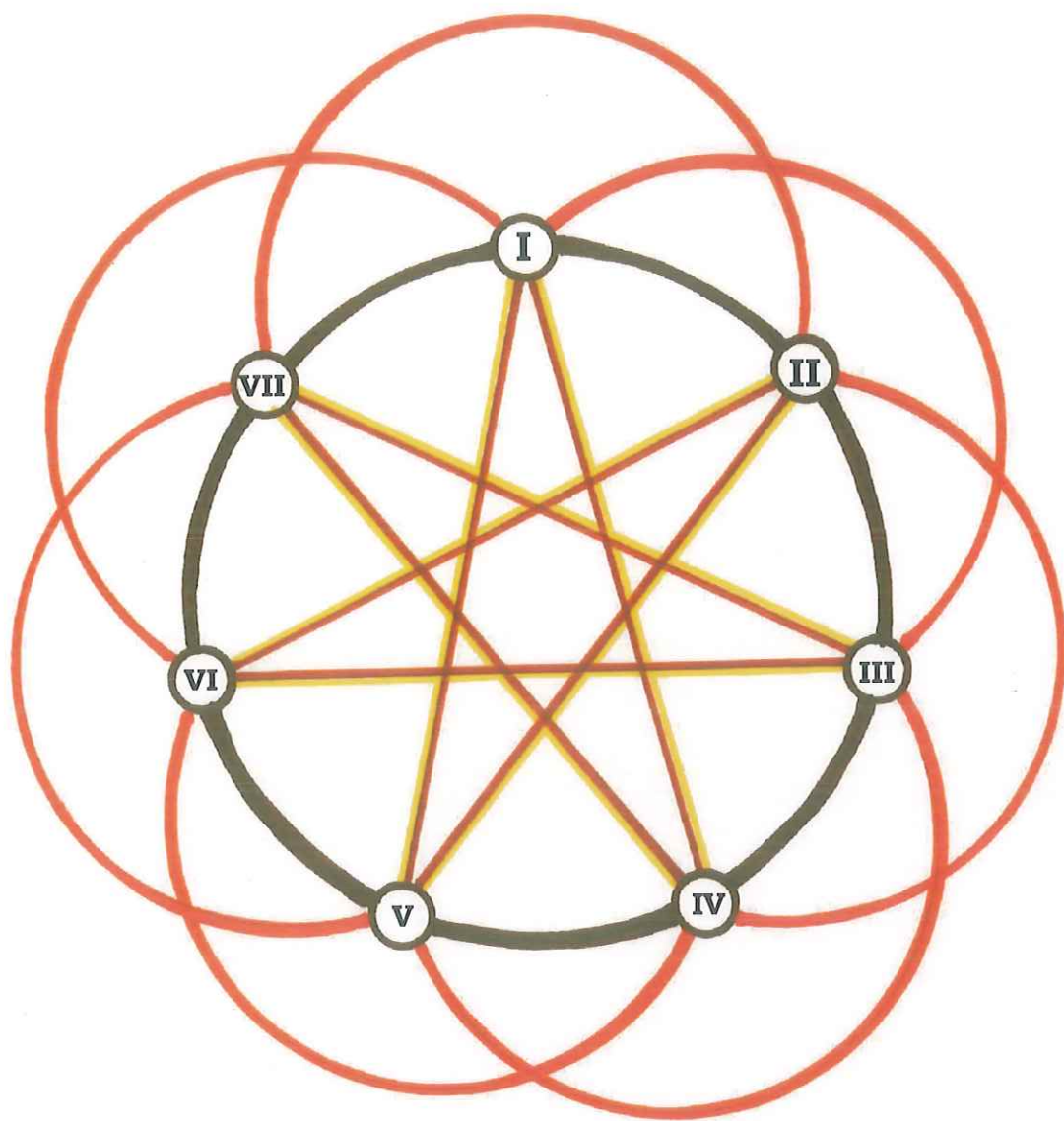
ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. (♩) Intervalos en una cuerda de longitud 1.	8
2.2. Diagrama de consonancia, (Fauvel J., Flood R., Wilson R, <i>Music and Mathematics</i> , Oxford University Press EE.UU. 2005, pag 87).	12
3.1. Notas en el teclado. Izquierda con bemoles (<i>b</i>), derecha con sostenidos (<i>#</i>).	14
3.2. Pentagrama	15
3.3. Pentagrama con dos voces.	15
3.4. (♩) Clave de <i>sol</i> y nota <i>do</i> central.	15
3.5. Clave de <i>fa</i> con <i>do</i> central.	16
3.6. Sistema.	16
3.7. (♩) Teclas blancas del teclado.	17
3.8. (♩) Teclas negras del teclado expresadas con sostenidos.	17
3.9. Teclas negras del teclado expresadas con bemoles.	17
3.10. (♩) Escala <i>sol</i> mayor.	19
3.11. (♩) Escala <i>sol</i> menor.	19
3.12. (♩) Intervalo melódico, Intervalo armónico.	19
3.13. (♩) Algunos acordes de tres notas: (<i>sol</i> ₅ , <i>la</i> ₅ , <i>do</i> ₆), (<i>sol</i> ₅ , <i>si</i> ₅ , <i>mi</i> ₆) y (<i>do</i> ₆ , <i>mi</i> ₆ , <i>sol</i> ₆).	22
3.14. (♩) Triada, primera y segunda inversión: (<i>do</i> ₅ , <i>mi</i> ₅ , <i>sol</i> ₅), (<i>mi</i> ₅ , <i>sol</i> ₅ , <i>do</i> ₆) y (<i>sol</i> ₅ , <i>do</i> ₆ , <i>mi</i> ₆).	22
3.15. (♩) Triada, primera y segunda inversión, equivalentes a la figura anterior.	23
3.16. (♩) Acordes equivalentes: (<i>do</i> ₅ , <i>mi</i> ₅ , <i>sol</i> ₅ , <i>do</i> ₆), (<i>do</i> ₅ , <i>mi</i> ₅ , <i>sol</i> ₅ , <i>mi</i> ₆) y (<i>do</i> ₅ , <i>mi</i> ₅ , <i>sol</i> ₅ , <i>sol</i> ₆).	23
3.17. Notación para las duraciones de las notas y silencios (1, 3/2, 1/2, 3/8, 1/4, 3/16, 1/8, 1/16).	24
3.18. (♩) Ejemplo de metro cuatro cuartos, compases y duración de las notas.	25
3.19. (♩) Ejemplo de metro tres cuartos, liga y líneas entre las notas.	25
4.1. Números correspondientes a las notas.	29
4.2. Relación entre <i>E</i> y $\mathbb{Z}_E$ para la escala <i>do</i> mayor.	37
5.1. (♩) Triadas diatónicas en <i>do</i> mayor, crecientes de izquierda derecha.	50

6.1.	Gráfica completa K_7 , asociada a los grados de la escala mayor.	68
8.1.	(♩) Ejemplo 1.	79
8.2.	(♩) Ejemplo 2.	79
8.3.	(♩) Preludio de Bach.	80
8.4.	(♩) Reducción del preludio.	80
8.5.	(♩) Progresión ejemplo.	82
8.6.	(♩) Progresión adornada.	82
8.7.	(♩) Progresión adornada 2.	82
8.8.	(♩) Progresión ejemplo b	83
8.9.	(♩) Progresión b adorno.	83
8.10.	(♩) Progresión b adorno 2.	83
8.11.	(♩) Fragmento del Coral BWV 7.7.	85
8.12.	(♩) Fragmento del Coral BWV III.6.	85
8.13.	(♩) Fragmento del coral BWV 12.7.	86

ÍNDICE DE CUADROS

I.	Escala pitagórica.	10
I.	(♩) Clasificación de intervalos donde M significa mayor, m menor, $+$ aumentado y $^{\circ}$ disminuido.	20
I.	(♩) Algunas escalas musicales.	30
II.	(♩) Intervalos consonantes y disonantes (P: perfecto, I: imperfecto).	39
I.	(♩) Estructura de las triadas.	43
II.	Intervalos en la escala <i>do</i> mayor. Segunda mayor $2M=2$, menor = $2m=3$; tercera mayor $3M=4$, menor = 3.	45
III.	Elementos $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_3$ tales que $ a_i \leq 1$ y $a \odot b \in \mathbb{T}$ para $a \in \mathbb{T}$	52
IV.	Elementos $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_3$ tales que $ a_i \leq 1$ y $a \odot b \notin \mathbb{T}$ para $a \in \mathbb{T}$	52
V.	Operaciones con las triadas.	53
VI.	Progresiones típicas de triadas diatónicas en intervalos constantes. Notación musical.	57
VII.	Progresiones típicas de elementos en $\mathbb{T}$ en intervalos constantes. Notación matemática.	57
VIII.	Propiedades de orden de las operaciones $+$, $+$ ' sobre $\mathbb{T}$	61
IX.	Escalas mayor y menor.	63
I.	(♩) Triadas consonantes.	70



1. INTRODUCCIÓN

Al escuchar una gran obra musical como la quinta sinfonía de Beethoven, uno puede quedar impresionado e intrigado, deseando saber la razón por la cual esos sonidos en ese orden producen tan espléndida obra que despiertan tales sentimientos. Uno puede imaginarse que escucha cierta simetría y al leer la partitura ésta es aún más clara. Por otra parte, las simetrías son manifestaciones de estructuras geométricas, por lo que no sorprende el deseo de tratar de explicar algunas partes de la música, que es tan bella, con herramientas elegantes como las de geometría y el álgebra.

En particular la *música tonal*, consiste en un estilo que fue compuesto principalmente durante los años 1650 - 1900 para la música de concierto, basado en la idea de darle cierta prioridad a unas notas sobre otras según sus propiedades acústicas y algunas otras convenciones. En 1722 Jean Phillippe Rameau, publicó su "*Tratado en armonía*"[1], donde estableció las bases teóricas para éste tipo de música. Dicha obra se convirtió en la autoridad en lo que respecta a los temas de armonía y teoría musical. Por otra parte, en 1923, Arnold Schoenberg publica su obra "*Method of Composing with Twelve Tones Which are Related Only with One Another*"[19], en donde revoluciona las ideas de armonía que se tenían hasta el momento, pasando de la tonalidad al dodecafonismo. A grandes razgos, la música tonal de concierto se encuentra contenida en el lapso entre estos dos grandes tratados armónicos. Ejemplos de compositores de este tipo de música son: Bach, Handel, Mozart, Beethoven,

Schubert, Schumann, Brahms, Wagner, Tchaikovsky, así como muchos de sus contemporáneos. Cabe destacar que la mayor parte de la música popular de nuestros días está basada en las reglas de la armonía tonal [1].

Por su parte, la teoría musical se encuentra en una etapa de transición debido a los avances que ha tenido la matemática en el último siglo. Se han introducido al análisis musicológico conceptos algebraicos, geométricos así como combinatorios [5]. Estas nuevas perspectivas pueden aportar mucho, tanto en el contexto del análisis como en la composición musical. En este trabajo se pretende seguir con esta línea de pensamiento y estudiar algunos espacios geométricos que surgen al analizar las estructuras inducidas por las reglas básicas de la *música tonal*.

Dividimos nuestro estudio en dos secciones complementarias: *armonía* y *contrapunto*. La primera estudia las relaciones y secuencias permitidas entre distintos acordes, que son un conjunto de notas que suenan simultáneamente en un tiempo dado y es lo que se conoce como aspecto vértical de la música. El contrapunto, por su parte, toma como base líneas melódicas simultáneas, dejando como aspecto secundario los acordes que se forman en cada instante. El estudio del contrapunto consiste en establecer las reglas que deben seguir dichas líneas melódicas así como las relaciones entre ellas. Decimos que la armonía y el contrapunto son complementarios ya que en la música tonal se busca un equilibrio entre el flujo melódico y las relaciones armónicas. Ejemplo de ésto es un coro, donde hay cuatro conjuntos de voces: Soprano, Alto, Tenor y Bajo, cantando melodías distintas; vemos que en cada tiempo tenemos un conjunto de cuatro notas, es decir un acorde que puede verse como un instante de un contrapunto. Cada voz canta su melodía, sin embargo, se busca que en conjunto las cuatro voces sigan las reglas armónicas de la música tonal. En términos geométricos,

cuando un coro canta se está sonorizando una curva en el espacio de notas musicales $\mathbb{Z}^4$.

En la literatura existen algunos trabajos acerca de espacios geométricos musicales, como el “*Tonnetz*” introducido por Leonhard Euler en 1739 [18], que organiza las notas musicales en una red que es equivalente a un toro¹ y representa una abstracción de ciertas reglas armónicas. Otro ejemplo es el realizado por Dimitri Tymoczko en el cual se aprovechan ciertas simetrías de los acordes y surgen lo que se conoce como orbifolds [10]. También existe la rama del estudio de la música via matemáticas de Guerino Mazzola, la cual es muy amplia e incluye aspectos semióticos y ontológicos. Este trabajo surge de la necesidad de un punto de vista intermedio donde se puedan explicar los conceptos básicos de la música tonal de una forma operacional.

Uno de los objetivos de este trabajo es formalizar en un lenguaje matemático más convencional algunas reglas de la música tonal, de manera que tengamos una estructura geométrica que las represente. Se pretende definir un *espacio musical* como una estructura geométrica que sea un subconjunto de $\mathbb{Z}^3$ junto con algunas operaciones por definir, de modo que una pieza musical consista en una curva o trayectoria en dicha estructura. Se desea describir las relaciones entre acordes por medio de las propiedades de la misma, mientras que los contrapuntos como secuencias en ella. Una forma análoga de pensar esto consiste en una traducción a matemáticas de conceptos que a través de la historia musical se han desarrollado de manera empírica. Se entiende que la música es un arte y como tal no puede sintetizarse en un conjunto de reglas, sin embargo se intenta construir una aproximación al espacio donde, por siglos, han trabajado los compositores. Se está consciente que dicha construcción tiene

¹ Estructura geométrica que tiene forma de una dona.

limitaciones intrínsecas, sin embargo puede ser útil como un modelo que representa una pequeña parte del gran universo musical.

La intención de este trabajo es doble: por una parte se desea que el resultado del mismo sea útil para matemáticos no familiarizados con la teoría musical, de manera que con la síntesis del mismo, puedan introducirse a la armonía y el contrapunto, para después pasar a estudios más especializados de los mismos. Para lograr esto tomaremos los conceptos básicos de la música tonal y los traduciremos a un lenguaje geométrico. Se supone el conocimiento básico de la teoría de grupos, así como manejar la geometría de $\mathbb{R}^n$. Por otra parte, para el lector familiarizado con la teoría musical, pero no matemática, se desea que encuentre en este trabajo una perspectiva distinta de la información con la que trabaja diariamente.

Por último, como anexo a este documento, se incluye un disco compácto que contiene los ejemplos de sonido de esta tesis. Las figuras y tablas a las que les corresponde un archivo de sonido, tienen el símbolo (♪).

Parte I

ANTECEDENTES Y DEFINICIONES

2. HISTORIA

Cada cultura tiene su propia tradición musical, la nuestra ha sido el resultado de un proceso complejo de evolución que mezcla tradición, estética y conveniencia, entre otros muchos factores. La música tonal, está contenida dentro de lo que se conoce como música occidental; tiene su semilla en la sociedad Griega, ya que de acuerdo a sus ideales de perfección numérica de la naturaleza se tomaron las notas que utilizamos para generar música. Pitágoras y Platón consideraron el estudio de la música como una interrelación de ciencia y expresión. Platón menciona en su obra *"La República"*, que es necesario estudiar las relaciones de las notas musicales para ver cuales son concordantes, cuales no y la razón de ello [15]. Su intención es que los individuos de la sociedad sean educados en la música que use notas y melodías que ennoblezcan, evitando cualquier tipo de música que pueda ser destructiva. Por una parte desea estudiar los sonidos y establecer una estructura para las notas que sean utilizadas; mientras que por otra, está consciente del poder de la música sobre las emociones y pasiones humanas. Por su parte Pitágoras, filósofo y matemático, construye precisamente una escala basada en estos ideales que será el fundamento de mucha de la música de nuestros tiempos. Pitágoras creía que todo en la naturaleza podía expresarse por números enteros y relaciones entre ellos, donde se encontraba la perfección. La música no es la excepción, al expresar los sonidos con cocientes numéricos, obtenemos la escala Pitagórica. Su construcción es fácil de visualizar

con una cuerda vibrante de longitud 1. De su vibración obtenemos un sonido, si la dividimos por la mitad obtenemos un sonido similar al anterior, pero más agudo. Nuestro oído encuentra una relación entre ambos, que se debe a la duplicación de la frecuencia. Se dice que este par de sonidos se encuentran a una octava de distancia y están acústicamente relacionados. Si tenemos una nota con frecuencia t , todas las notas cuyas frecuencias sean $2^n t$ con $n \in \mathbb{Z}$ están relacionados por octavas. Siguiendo con éste método, si dividimos la cuerda en tres partes iguales la relación de las frecuencias es de $2/3$. Llamamos a su inverso $3/2$ un intervalo de quinta¹. Ver figura 2.1.

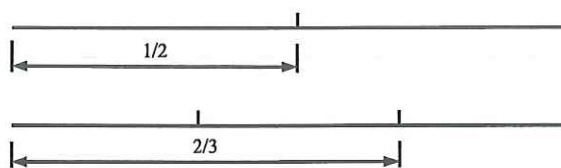


Fig. 2.1: (♩) Intervalos en una cuerda de longitud 1.

Tomemos una frecuencia t , para construir la escala Pitagórica comencemos con la nota una quinta bajo t , es decir $(2/3)t$, continuamos subiendo por quintas (multiplicando por $3/2$) hasta obtener siete notas: $(2/3)t$, t , $(3/2)t$, $(3/2)^2 t$, $(3/2)^3 t$, $(3/2)^4 t$, $(3/2)^5 t$. Normalicemos los resultados por octavas de modo que todas los cocientes se encuentren ordenados de menor a mayor entre t y $2t$, esto significa que multiplicamos cada término por algún 2^n con $n \in \mathbb{Z}$ para que su nota equivalente por octava esté entre t y $2t$. Por ejemplo la cuarta nota es $(3/2)^2 t$, que se encuentra fuera del intervalo $[t, 2t]$, sin embargo su nota equivalente por octava $\frac{1}{2}(3/2)^2 t = (9/8)t$. Realizamos lo mismo con las otras seis notas. Ordenando la secuencia de números

¹ Recordemos que la relación entre la longitud de onda y la frecuencia de un sonido es inversamente proporcional, de allí que la relación entre la división de la cuerda y la frecuencia sea mediante el recíproco.

obtenida de forma ascendente, nos resulta lo que se conoce como “*escala Pitagórica*” que se muestra en la tabla I, tomando $t = 1$.

Con esto tenemos una escala de siete notas formada por los dos cocientes sencillos $1/2$ y $2/3$, es parte de la belleza que buscaban los pitagóricos. En nuestra construcción utilizamos una frecuencia t como base, al aplicar la estructura mostrada obtenemos la escala, en la tabla I elegimos $t = 1$. Analicemos lo que sucede si construimos la escala pitagórica con $t = 4/3$, o alguna otra nota; a esto se le conoce como *trasposición*, el resultado es un conjunto de notas distintas a la escala original con $t = 1$. Este fue un grave problema que tiempo después encontraron los compositores, deseaban una escala similar a la Pitagórica pero que sin importar en que nota se iniciara, en el conjunto resultante se encontraran siempre las mismas notas, o sus equivalentes por octavas². Intentaron variaciones de la misma que tuvieran un equilibrio entre trasposición y simplicidad entre los cocientes de las notas. La que más aceptación ha tenido, no sin mucha controversia es la escala *igualmente temperada*. Consiste en la división de las frecuencias entre t y $2t$ en doce intervalos iguales, es decir, en lugar de construirla con potencias de $3/2 = 1,5$, la construimos con potencias de $2^{7/12} = 1,4983071\dots$, que es una aproximación relativamente cercana. Comparando la escala pitagórica con la igualmente temperada obtenemos resultados numéricos muy aproximados pero se pierde la idea de perfección numérica sobre cual se construyó en primer lugar. Ver tabla I. La escala pitagórica también se conoce como escala mayor.

Hay cierta ironía en estas escalas y su construcción. Por un lado los pitagóricos deseaban que la música fuera construida por cocientes sencillos, más aun, considerar la idea de números que no pueden expresarse como cocientes era una especie de

² Se recomienda al lector construir ejemplos de dichas trasposiciones y compararla con la escala Pitagórica.

Pitagórica	Igualmente temperada
1	$2^0 = 1$
$9/8 = 1,125$	$2^{2/12} \approx 1,122$
$81/64 \approx 1,265$	$2^{4/12} \approx 1,259$
$4/3 \approx 1,333$	$2^{5/12} \approx 1,334$
$3/2 = 1,5$	$2^{7/12} \approx 1,498$
$27/16 \approx 1,687$	$2^{9/12} \approx 1,681$
$243/128 \approx 1,898$	$2^{11/12} \approx 1,887$
2	$2^{12/12} \approx 2$

Tab. I: Escala pitagórica.

aberración. Ahora, siglos después tomando como base su construcción se llega a la convención de utilizar el número $2^{7/12}$ para construir las escalas, el cual tiene la peculiaridad de ser irracional. Sin embargo las escalas y afinaciones igualmente temperadas son fundamentales para los instrumentos con teclado fijo si se desea la transposición, sacrificando los intervalos con cocientes sencillos.

El problema de la construcción de escalas, o de las afinaciones, no está resuelto, la escala igualmente temperada no es mejor que las anteriores, es simplemente una convención que nos permite cambiar de escalas sin mayor problema, sólo con una pequeña desafinación con respecto a los intervalos puros creados por $3/2$. En cierta forma la escala igualmente temperada, podría llamarse también igualmente desafinada.

Además de los griegos muchas personas han abordado el problema de las afinaciones. Otro problema fundamental en la música es la dicotomía consonancia-disonancia. La consonancia es un fenómeno acústico que surge al combinar dos notas: de acuerdo a la relación entre sus frecuencias se pueden escuchar pulsaciones³. Mientras más

³ Esto se debe al fenómeno físico llamado resonancia, para ver una explicación más detallada ver [20].

rápido sean, se dice que es más disonante, mientras más lento son más consonantes. También se relaciona con la simplicidad de los cocientes de las fracciones: entre más simple la fracción, es más consonante, de allí que 1, $3/2$ y $1/2$ sean considerados los que cumplen mejor esto. El científico Helmholtz en su obra: *“Die Lehre von den Tonempfindungen als Physiologische Grundlage für die Theorie der Musik”*⁴, es quien ha proporcionado la explicación más satisfactoria de este fenómeno hasta la fecha. En la figura 2.2 se muestra uno de sus resultados, donde se grafican los intervalos entre las notas contra su grado de disonancia; un valor mayor corresponde a una disonancia mayor. Notemos que uno de los intervalos más consonantes es el de una quinta $3 : 2$.

En algunos libros se dice que la consonancia suena bien, y la disonancia mal, esto es una descripción ambigua e injusta ya que muchos de los momentos más bellos de nuestra música son precisamente en los momentos de disonancia, ya que introducen un efecto de tensión, que aplicado correctamente puede ser muy bello. Esta discriminación de intervalos representa en parte la idea de belleza que mencionamos de los griegos; donde fracciones sencillas son mejores que complejas, la consonancia es mejor a la disonancia en este sentido.

Estas escalas son la base para el análisis del presente trabajo, como veremos más adelante tomaremos ventaja de la invariancia a transposiciones de la escala en afinaciones igualmente temperadas para traducir conceptos musicales a un lenguaje matemático un poco más convencional.

⁴ “Sobre las sensaciones de tono como base fisiológica para la teoría de la música” [20].

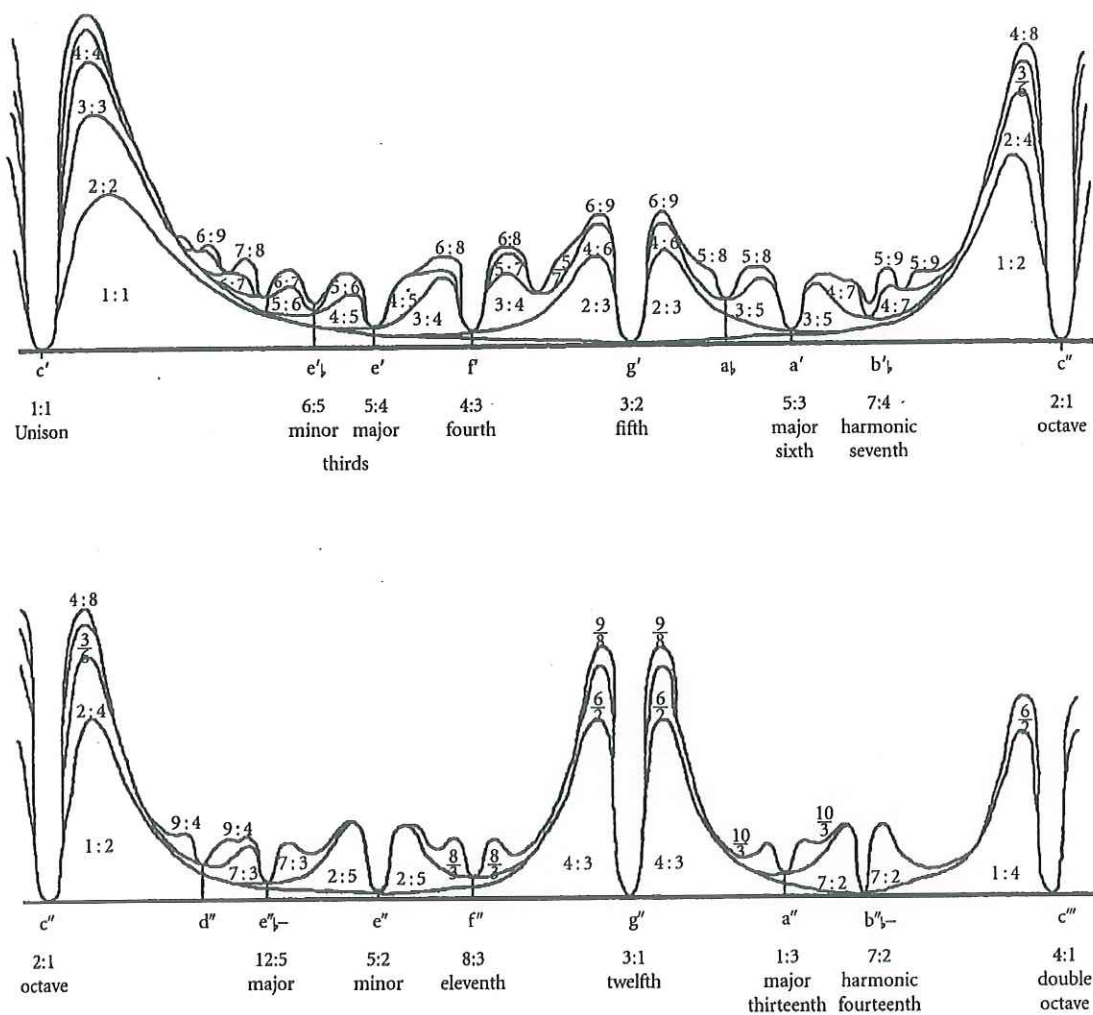


Fig. 2.2: Diagrama de consonancia, (Fauvel J., Flood R., Wilson R, *Music and Mathematics*, Oxford University Press EE.UU. 2005, pag 87).

3. DEFINICIONES MUSICALES

Existen muchos lenguajes, como español, ruso, alemán o francés, por mencionar sólo algunos. Cada uno utiliza distintos alfabetos, palabras y sonidos, todos pueden ser escritos y leídos. De igual manera para la música, cada sociedad, a lo largo de la historia ha desarrollado su propio lenguaje y algunas también una forma de plasmarlo y escribirlo, de forma que puedan compartirlo y sus obras sobrevivan a sus creadores. En este trabajo estamos utilizando el lenguaje musical conocido como música tonal. Comenzamos con una breve introducción a la notación que sirve como base para poder leer y escribir este tipo de música.

Una *nota musical* es un sonido, que en su forma más simple tiene asociada una frecuencia. Una nota es *aguda* si tiene frecuencia alta y es *grave* si tiene frecuencia baja. El conjunto de las frecuencias está ordenado totalmente, por lo que siempre podemos comparar las notas y decir cual es más grave o aguda con respecto a cualquier otra. La música tonal sólo toma un conjunto finito de notas con las que trabaja. El teclado de un piano¹ es un buen ejemplo para aprender a leer y escribir música. En el mismo cada tecla representa una nota musical y la distancia entre dos notas consecutivas se le llama *semitono* correspondiente a una distancia de $2^{1/12}$ en frecuencia. Es importante notar la periodicidad que tiene el teclado: cada doce teclas se repite el patrón. Como se muestra en la figura 3.1, los nombres de las notas que corresponden

¹ Por teclado nos referimos a un piano convencional de nuestros tiempos.

a las teclas blancas del teclado son *do*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, mientras que las notas correspondientes a las teclas negras del mismo son² *do#*, *re#*, *fa#*, *sol#*, *la#*; (*do sostenido*, *re sostenido*,) etc. O bien son llamadas *reb*, *mib*, *solb*, *lab*, *sib*; (*re bemol*, *mi bemol*, etc). A la nota *do* que está más cerca del centro del teclado se le conoce como *do* central. Suele denotarse como *do*₅, el que está a una octava superior como *do*₆, una octava inferior *do*₄, y así consecutivamente, lo mismo con las demás notas.

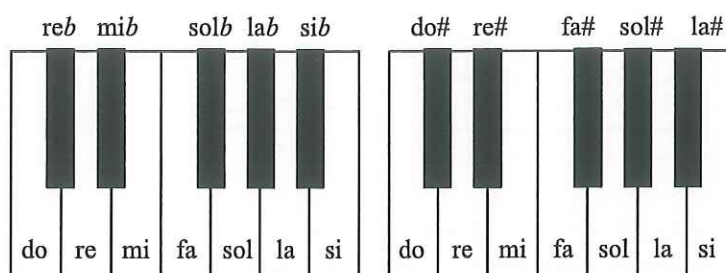


Fig. 3.1: Notas en el teclado. Izquierda con bemoles (*b*), derecha con sostenidos (*#*).

De momento, este teclado musical es nuestra forma de “expresar” música, sin embargo, para leer utilizamos el *pentagrama*. Consiste en un diagrama con cinco líneas horizontales que grafica tiempo contra nota. Se dibujan círculos en las líneas o en los espacios, representando el sonido de una nota. Entre mas arriba esté la nota escrita en el pentagrama, es más aguda, más abajo es mas grave. Se lee de izquierda a derecha de modo que se puede escribir una sucesión de notas como se muestra en la figura 3.2. La ventaja de ésta forma de escribir las notas es que pueden expresarse sonidos simultáneos, es decir lo que esté en la misma línea vertical suena al mismo tiempo, como se muestra en la figura 3.3. Si se desean alcanzar más notas de las nueve que contiene el pentagrama, sólo se escriben pequeñas líneas sobre o debajo del mismo (ver tercer nota en la figura 3.3).

² Lease el símbolo *#* como sostenido, y el símbolo *b* como bemol.

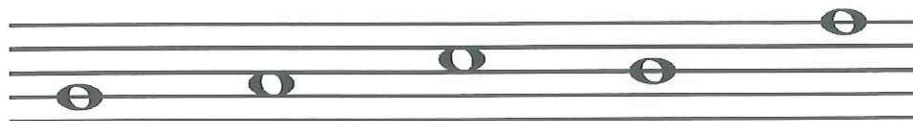


Fig. 3.2: Pentagrama

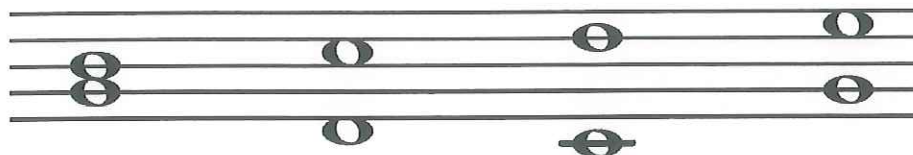
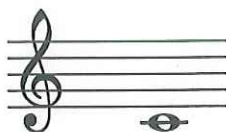


Fig. 3.3: Pentagrama con dos voces.

Queremos una correspondencia de las notas del teclado con las del pentagrama, sin embargo nos falta un punto de referencia, para esto se introducen las *claves*. La *clave de sol*, por ejemplo, es un símbolo que se escribe al inicio de cada pentagrama y representa un punto de referencia absoluto: indica que la segunda línea del pentagrama leída de abajo hacia arriba es la nota *sol* que está inmediatamente sobre el *do* central. Por su parte la *clave de fa* indica que la segunda línea del pentagrama leído de arriba hacia abajo es la nota *fa* que está inmediatamente debajo del *do* central (Ver figuras 3.4 y 3.5).

Fig. 3.4: (♩) Clave de sol y nota *do* central.

Por tradición, para mucha de la música de piano y de algunos otros instrumentos de teclado, se suelen escribir dos pentagramas: arriba con la clave de *sol* y abajo con la clave de *fa* a esta notación se le llama *sistema* y se muestra en la figura 3.6. En

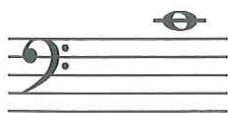


Fig. 3.5: Clave de *fa* con *do* central.

general un sistema puede consistir de más pentagramas, como sería necesario para plasmar una sinfonía, con todos sus instrumentos.

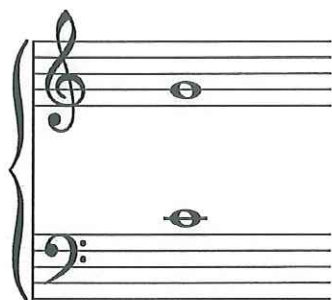


Fig. 3.6: Sistema.

Una vez que tenemos como representar las notas en el pentagrama, y tenemos el punto de referencia *do* central que nos relaciona el teclado con el sistema, podemos definir donde están todas las demás notas. Los espacios y líneas del pentagrama corresponden de momento únicamente a las teclas blancas en el teclado. Las teclas negras se localizan con ayuda de las anteriores. Si queremos la tecla que está entre *do* y *re* podemos indicarla como *do#*, que significa la tecla inmediatamente superior a *do*; o por *reb*, que significa la tecla inmediatamente inferior a *re*. Debido a que trabajamos con una escala igualmente temperada, *do#* y *reb* corresponden a la misma nota. De igual manera podemos aplicar este procedimiento para identificar las demás teclas negras con una posición en el pentagrama.

Ahora retomando la periodicidad del teclado, si comenzamos alguna de las notas

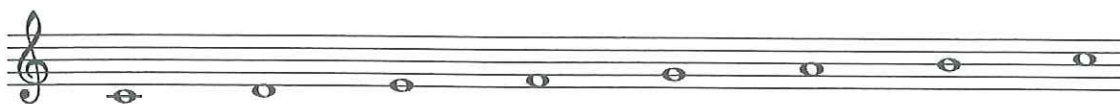


Fig. 3.7: (♩) Teclas blancas del teclado.



Fig. 3.8: (♩) Teclas negras del teclado expresadas con sostenidos.

do y subimos doce notas, es decir doce pasos, notamos que llegamos a otra nota *do*, sólo que más agudo. Si nos movemos sólo por las notas blancas, vemos que al avanzar siete pasos llegamos a una nota *do* más aguda. A las siete notas que pasamos para llegar de *do*₅ a *do*₆: *do, re, mi, fa, sol, la, si*; le llamaremos *estructura de la escala do mayor*. Notemos que las distancias entre notas consecutivas es un semitono, o dos semitonos (también conocido como *tono*). La escala mayor consiste de los pasos: “tono, tono, semitono, tono, tono, tono, semitono”. Esta estructura nos permite construir escalas mayores basadas en otras notas, por ejemplo si queremos la escala mayor basada en *sol*, debemos comenzar en alguna nota *sol* y tomar las notas que surgan de sumar los pasos: “tono, tono, semitono, tono, tono, tono, semitono”. La diferencia es que ahora ya no estaremos sólo en las notas blancas, sino que tendremos que tomar alguna nota negra: *sol, la, si, do, re, mi, fa#, sol*. Así podemos construir cualquier escala mayor.



Fig. 3.9: Teclas negras del teclado expresadas con bemoles.

Existe otra escala muy predominante en el lenguaje de la música tonal llamada *escala menor*. Si tomamos las notas blancas entre una nota *la* y la siguiente *la* más aguda, tenemos las notas: *la, si, do, re, mi, fa, sol, la*, llamada escala *la* menor, que nos ofrece la estructura: “tono, semitono, tono, tono, semitono, tono, tono”. De igual forma si queremos construir una escala menor basada en otra nota, debemos empezar en dicha nota y aplicar la estructura: “tono, semitono, tono, tono, semitono, tono, tono”. Por último es apropiado mencionar la *escala cromática* que consiste en doce notas separadas por un semitono.

Las escalas mayor y menor son fundamentales para la música tonal, sin embargo las escalas que surgen de tomar las notas blancas empezando en otras notas que *do* y *la* también tienen nombres y pertenecen a lo que se conoce como *música modal*, que no es de nuestro interés de momento.

Si utilizamos las notas de una escala distinta a *do* mayor, puede que nos encontremos con el problema de estar escribiendo muchos sostenidos $\sharp$ y bemoles b , por lo que es costumbre escribir al inicio de la línea todos los sostenidos y bemoles que requiramos, expresando de esta forma la escala en la que estamos trabajando; a esto se le conoce como *armadura de la escala*. De esta forma, las notas que en el pentagrama aparezcan en las líneas y espacios pertenecen a nuestra escala, mientras que las que aparezcan con símbolos $\sharp$ y b , son notas que no pertenecen. Las notas que pertenecen a la escala en la que decidimos trabajar se les llaman *diatónicas*, a las que no pertenecen a la misma se les llama *cromáticas*. En las figuras 3.10, 3.11 se muestran las escalas *sol* mayor y *sol* menor.

El siguiente paso en nuestras definiciones musicales básicas es el de intervalo, que es la distancia que hay entre un par de notas. Si las dos notas suenan simultáneamente

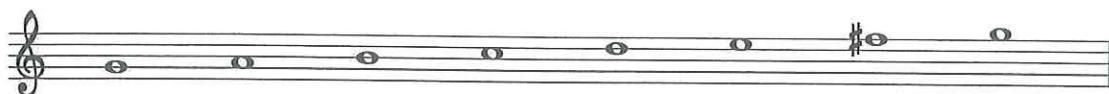


Fig. 3.10: (♩) Escala sol mayor.



Fig. 3.11: (♩) Escala sol menor.

se dice que es un *intervalo armónico*. Si una nota suena primero que la otra tenemos un *intervalo melódico*, ambos se muestran en la figura 3.12. Los intervallos se clasifican de acuerdo al número de semitonos que hay entre el par de notas, como se muestra en la tabla I.

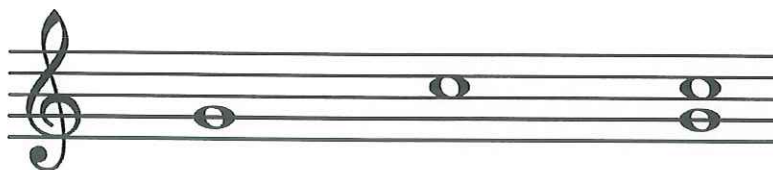


Fig. 3.12: (♩) Intervallo melódico, Intervallo armónico.

Hay que notar que los nombres son números ordinales “segunda”, “tercera”, etc, hasta llegar a la “octava”. Es importante ver que los nombres de los intervallos no tienen relación aparente con el número de semitonos que involucran, por ejemplo: la sexta mayor, si la vemos simplemente como una sucesión de diez semitonos, no tiene nada que ver con algo sexto aparentemente. Es necesario que recordemos que en la música tonal se trabaja con escalas de siete notas, por lo que los nombres de los intervallos reflejan precisamente esto. Si en la escala diatónica en que trabajamos avanzamos seis notas desde una fija, llegaremos a una nota que esté a 10 u 11

Semitonos	Notación	Nombre
0	P1, °2	Unísono
1	m2, +1	Segunda menor
2	M2, °3	Segunda mayor
3	m3, +2	Tercera menor
4	M3, °4	Tercera mayor
5	P4, +3	Cuarta perfecta
6	+4, °5	Tritono
7	P5, °6	Quinta perfecta
8	m6, + 5	Sexta menor
9	M6, °7	Sexta mayor
10	m7, +6	Séptima menor
11	M7, °8	Séptima mayor
12	P8, +7	Octava perfecta

Tab. I: (♩) Clasificación de intervalos donde *M* significa mayor, *m* menor, + aumentado y ° disminuido.

semitonos de distancia, lo cual representa precisamente el intervalo de una sexta.

Se pueden tener intervalos más grandes, sin embargo, como se tiene que las notas son periódicas, los intervalos serían equivalentes a los que ya definimos. A estos se les conocen como se conocen como *intervalos compuestos*, por ejemplo el intervalo décima mayor M10 consiste de 16 semitonos, y como las notas tienen período de 12 notas es equivalente al intervalo tercera mayor M3.

La periodicidad de la escala en estos términos se expresa diciendo que, un *do* más agudo que otro se dice que es un número de *octavas* superior o inferior al original. Las escalas mayor y menor son periódicas con período de una octava perfecta.

En la música tonal hay una distinción mas en los intervalos, consiste en el concepto de *disonancia* y *consonancia*. Estos términos se refieren al fenómeno auditivo que surge al combinar las frecuencias de dos notas distintas. Los pares de notas *consonantes* predominan en la música tonal, mientras que la *disonancia* es tratada

con cuidado. La razón de preferir la primera es que corresponde a pares de notas que tienen una relación de frecuencias f_1/f_2 sencilla como $1/2, 2/3$, etc., como se mencionó en la construcción de la escala pitagórica. Recordemos la relación de consonancia que se mostró en la figura 2.2.

Los *intervalos disonantes* son las segundas, las séptimas, el tritono, y en algunos casos la cuarta [4]. Los *intervalos consonantes* se clasifican en perfectos e imperfectos. Las consonancias perfectas son el unísono, la quinta y la octava, las consonancias imperfectas son las terceras y las sextas. El intervalo de la quinta perfecta es el más importante en el lenguaje de la música tonal, de él surge la triada, que es la base de la armonía, todos los demás intervalos se subordinan a este.

Ahora definimos un *acorde*, que es un conjunto de notas que suenan simultáneamente, algunos ejemplos se muestran en la figura 3.13. Existen muchos tipos de acordes, en la música tonal son de primordial interés los acordes de tres notas que están basados en el intervalo de una quinta, llamados *triadas*. Una *triada* consiste en un conjunto de tres notas donde el intervalo que hay entre la nota más baja y la central es una tercera, y el intervalo que hay entre la central y la más alta es también una tercera, de modo que el intervalo entre las notas más alejadas es una quinta ya sea perfecta, aumentada o disminuida. Otra forma de verlo consiste en las maneras de combinar dos intervalos terceros, mayores o menores que es equivalente a que una nota es la base, y las otras dos se encuentran a distancias de una tercera y una quinta respectivamente. Vemos que hay cuatro tipos de triadas 3M3M, 3M3m, 3m3M y 3m3m, que son llamadas aumentada, mayor, menor y disminuida respectivamente.

Si tenemos una triada, tenemos tres notas: la base, tercera y la quinta, y si encontramos notas iguales a las anteriores pero en otras octavas que suenan simulta-

neamente decimos que el acorde es equivalente al original pero está en una *inversión*. Si la nota que representa la tercera de la triada está mas abajo que las demás tenemos una triada en *primera inversión*. Por otra parte si tenemos que la nota que representa la quinta de la triada está más abajo que las otras dos tenemos una triada que está en *segunda inversión*. En la figura 3.14 se muestra un acorde en su forma base, así como su primera y segunda inversión. En la figura 3.15 se muestran acordes equivalentes a los de la figura anterior, pero con notas escritas en otras octavas.

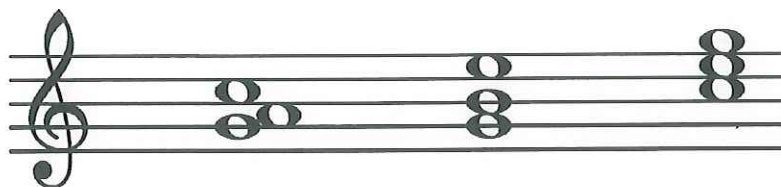


Fig. 3.13: (♩) Algunos acordes de tres notas: (*sol*₅, *la*₅, *do*₆), (*sol*₅, *si*₅, *mi*₆) y (*do*₆, *mi*₆, *sol*₆).

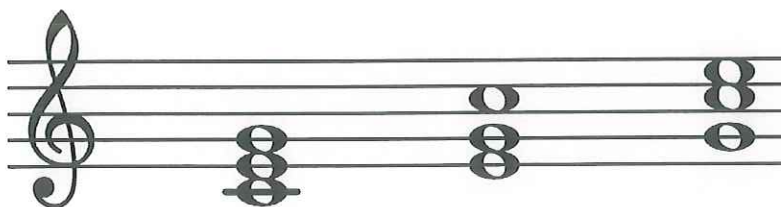


Fig. 3.14: (♩) Triada, primera y segunda inversión: (*do*₅, *mi*₅, *sol*₅), (*mi*₅, *sol*₅, *do*₆) y (*sol*₅, *do*₆, *mi*₆).

De hecho, si tenemos más de cuatro notas, pero si algunas son repetidas, de modo que al quedarnos sólo con las distintas vemos que es una triada o alguna de sus inversiones, ese conjunto con muchas notas es equivalente a la triada. Esto se muestra en la figura 3.16. Hemos mencionado solamente triadas y acordes formadas por notas de la escala, a estas se les llama *triadas diatónicas*; esto debido a que

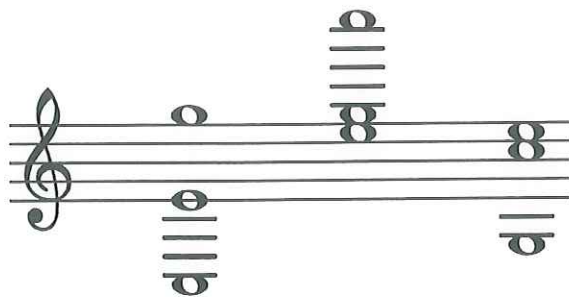


Fig. 3.15: (♯) Triada, primera y segunda inversión, equivalentes a la figura anterior.

podemos tener conjuntos de notas que satisfagan los requisitos de la triada mas no pertenezcan a la escala en la que estemos trabajando. Como ejemplo de esto basta ver los acordes anteriores donde cada triada era diatónica a *sol menor* o *do mayor*, sin embargo ninguna es diatónica a *do# menor*.

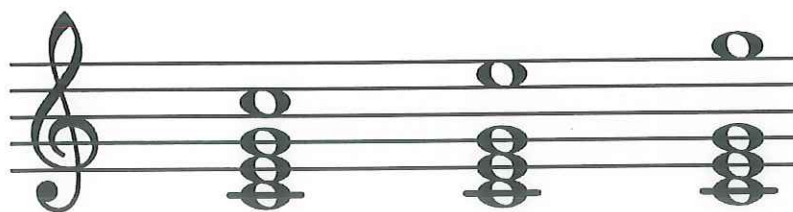


Fig. 3.16: (♯) Acordes equivalentes: (do_5 , mi_5 , sol_5 , do_6), (do_5 , mi_5 , sol_5 , mi_6) y (do_5 , mi_5 , sol_5 , sol_6).

Hasta este punto hemos mencionado muy poco del aspecto temporal de la música, es decir la distribución de las notas en el tiempo. Para esto primero se define un pulso, que es la unidad de tiempo básica. Suele indicarse como el número de pulsaciones que ocurren en un minuto, por ejemplo si decimos que vamos a trabajar con 60 pulsaciones por minuto, el pulso mide un sesentavo de minuto.

La duración de una nota se muestra como diferentes trazos que se le hacen al círculo original que representa la nota. Un círculo vacío se conoce como una *redonda*,

un círculo con una barra vertical se conoce como una *blanca*, que tiene la mitad de duración; un círculo relleno con una línea vertical es llamado *negra*, que dura la mitad del anterior y se requieren cuatro de estas para igualar a la original. A continuación se encuentran los octavos llamados *corcheas*, dieciseisavos llamados *semicorcheas*, etc. Si se desea prolongar la duración de una nota se traza un pequeño punto al lado derecho del círculo, lo cual indica que la duración de la nota es tres medios la duración de la nota original; o bien se puede prolongar la duración de la misma si se pone una *liga*, que es una línea que une dos notas consecutivas indicando que la duración de la nota es la suma de las duraciones de cada nota separada. Para una explicación más detallada ver [3].

Los silencios, por su parte, son tan fundamentales como las notas, por ello tienen su propia notación. En la figura 3.17 se muestra la notación para las duraciones de los silencios junto con sus análogos en sonido.

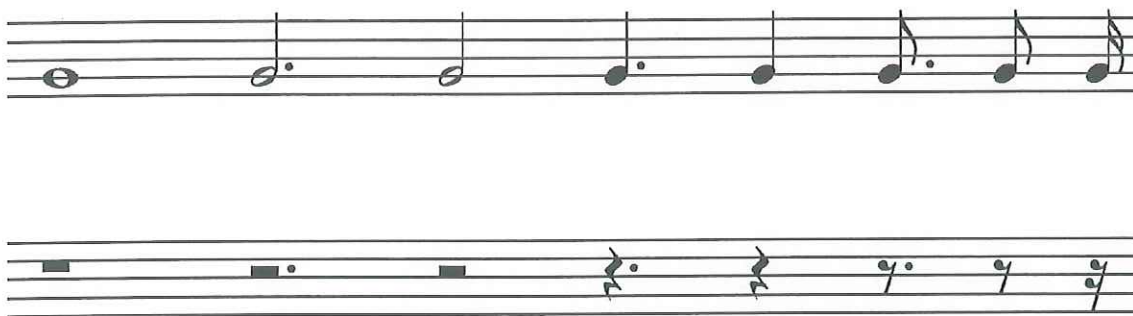


Fig. 3.17: Notación para las duraciones de las notas y silencios (1, $3/2$, $1/2$, $3/8$, $1/4$, $3/16$, $1/8$, $1/16$).

Así como las notas son periódicas, también se organiza la música en el tiempo de modo que se tenga cierta periodicidad. Se agrupan conjuntos de notas en lapsos llamados *compases*, cada uno dura lo mismo, pero las notas que lo conforman pueden tener distintas duraciones, siempre y cuando en cada compás la suma del tiempo



Fig. 3.18: (♩) Ejemplo de metro cuatro cuartos, compases y duración de las notas.

sea igual a la de otro compás. Conociendo esto definimos el *metro*, este indica la estructura de los compases. Se suele expresar con un par de números al inicio de la línea, donde el superior indica el número de pulsos que hay en un compás, mientras que el inferior indica el tipo de nota que define el pulso. Por ejemplo si tenemos indicado cuatro sobre cuatro, significa que en cada compás hay cuatro notas negras, el tiempo equivalente en silencio o en otras combinaciones de notas como una redonda o dos blancas. Cada que termine un compás se indica con una línea vertical que cruza el pentagrama.

Algunas veces para facilitar la lectura, si se tienen grupos de corcheas, se suele trazar una línea horizontal que las una; si se tienen grupos de semicorcheas se unen con dos líneas horizontales. En las figuras 3.18 y 3.19 se muestran ejemplos de lo mencionado anteriormente. Es costumbre indicar el tiempo cuatro cuartos con un semicírculo que se asemeja a la forma de la letra *C*, así como el tiempo dos medios con un semicírculo y una línea que la cruza verticalmente. Por su parte, las dos líneas verticales al final del pentagrama, indican el final del ejercicio o la pieza.



Fig. 3.19: (♩) Ejemplo de metro tres cuartos, liga y líneas entre las notas.

Existen metros compuestos como 9/8, o 12/8, pero de momento esto basta para nuestras definiciones de notas en el tiempo y en general de las definiciones musicales

básicas. Para ver más ejemplos de distintos metros así como piezas escritas en los mismos ver [3].

Parte II

MODELO MATEMÁTICO

4. DEFINICIONES MUSICALES, DESDE UN PUNTO DE VISTA MATEMÁTICO

La intención de esta sección es reescribir las definiciones que se dieron en el capítulo anterior pero ahora en un lenguaje matemático más tradicional, para poder encontrar más adelante alguna estructura geométrica relacionada con algunos de los objetos que surjan de estas definiciones.

Una estructura geométrica es un objeto matemático que es un conjunto con algunas operaciones y funciones definidas en él. Ejemplos de ellos son los espacios vectoriales, los espacios de Hilbert, los espacios métricos y espacios topológicos. Todos ellos tienen sus operaciones y funciones bien definidas. En este trabajo, a grandes razgos, queremos definir algunos conjuntos, así como operaciones y funciones en ellos, que nos permitan caracterizarlo como una estructura geométrica.

Comencemos definiendo el conjunto en el que vamos a trabajar. Tomemos como punto de partida las notas en un teclado de un piano convencional, que consiste aproximadamente de siete octavas. Utilizaremos la periodicidad del mismo así como la equivalencia de notas en distinta octavas a nuestro favor. Imaginemos un teclado con m octavas, es decir con $12 \times m$ notas. Ahora utilicemos el grupo abeliano $\mathbb{Z}_{12m} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 12m - 1\}$ con la operación definida como sigue: si $a, b \in \mathbb{Z}_{12m}$, entonces $a \star b = (a + b) \bmod(12m)$, usualmente se denota simplemente por $+$. Tomemos la

primera nota del teclado y asignémosle el número 0, a la nota siguiente ascendente el 1, a la siguiente el 2, etc., hasta llegar a la última $12m - 1$. Un piano convencional tiene aproximadamente siete octavas, por lo que $m = 7$ y la nota *do* central se encuentra cuatro octavas sobre la primer nota, es decir le corresponde el número 48. De esta manera tenemos una función biyectiva entre las notas en el teclado y el grupo abeliano $\mathbb{Z}_{12m}$.

Lo agudo o grave de una nota corresponde al orden natural de los enteros; agudo corresponde a mayor y grave a menor. El hecho de moverse por semitonos corresponde a sumar o restar 1 a la nota correspondiente, salvo las notas en el extremo del teclado, ya que $0 - 1 = 12m - 1$. Así a cada nota se le asigna un número entero, como se muestra en la figura 4.1.

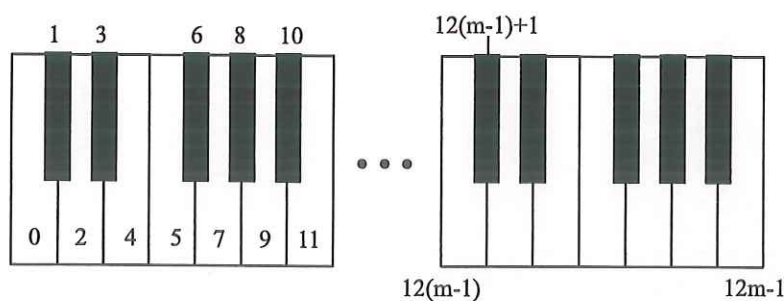


Fig. 4.1: Números correspondientes a las notas.

4.1. Escalas

Como vimos en el capítulo anterior, una escala consiste en una nota base, así como una estructura de tonos y semitonos, siendo un semitono -1 o 1 y un tono -2 o 2 . La escala cromática consiste en una sucesión lineal de doce notas separadas todas por un semitono; a nosotros nos interesan de momento las escalas diatónicas mayor

Escala	Estructura
Cromática	$\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
Mayor	$\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$
Menor natural	$\{0, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}$

Tab. I: (♩) Algunas escalas musicales.

y menor que consisten en las notas dadas por las estructuras: *tono, tono, semitono, tono, tono, tono, semitono* para la primera y *tono, semitono, tono, tono, semitono, tono, tono* para la segunda. Podemos expresar una escala como una nota base, por ejemplo el cero, y su estructura como se muestra en la tabla I. En base a esto podemos definir una escala musical de la siguiente manera:

Definición 4.1.1. Sea $N = \{x_0, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, tales que $0 \leq n \leq 12$, $x_i \in \mathbb{Z}_{12m}$, $x_j < x_{j+1}$ con $x_{n-1} - x_0 \leq 12$; y sea b una nota base: $0 \leq b < 12$. Una **escala** E es un subconjunto $E \subseteq \mathbb{Z}_{12m}$ definido por:

$$E = \{x \in \mathbb{Z}_{12m} | x = x_i + b + 12r\},$$

para $i, r \in \mathbb{Z}$ con $x_i \in N$, $0 \leq r < m$, donde m es el número de octavas. N es la **estructura de la escala**, n es el **número de clases de notas** en ella y b es la **nota base de la escala**.

Inmediatamente de la definición podemos ver que la escala E se genera con su estructura N , que consta de n elementos. Más aun podemos encontrar una partición de la misma con los siguientes conjuntos:

Definición 4.1.2. Llamamos *grados de la escala* a los conjuntos:

$$[x_i] = \{x \in E | x = x_i + b + 12r\},$$

para algun $r \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq r < m$. Si $e \in [x_i]$ se dice que e pertenece al grado i de la escala.

Es claro que $[x_i] \cap [x_j] = \emptyset$ si y sólo si $i \neq j$, así como:

$$E = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i].$$

Con esta partición de E podemos definir una relación de equivalencia en sus elementos. Diremos que $a, b \in E$ están relacionados $a \sim_{12} b$ si $a, b \in [x_i]$ para algún $1 \leq i \leq n$. Podemos ver también que las notas en las clases de equivalencia $[x_i]$ están relacionadas por octavas, ya que la distancia entre ellas son múltiplos de doce. Por otro lado, si tenemos la escala E , su base y la partición del conjunto dada por $\sim_{12}$ podemos recuperar la estructura al realizar el siguiente cociente:

$$N = (E - b) / \sim_{12}.$$

En esta definición lo que estamos expresando es que cuando trabajamos con una escala musical, hay una estructura básica que se repite. No permitimos que una escala tenga más de doce clases de notas ($0 \leq n < 12$), tampoco que existan dos notas idénticas o pertenecientes a la misma clase, como un *do* y otro *do* una octava superior ($x_j < x_{j+1}$, $x_{n-1} - x_0 \leq 12$). Al considerar la escala E nos aseguramos

que aparezcan todas las octavas de una cierta nota; por ejemplo si tenemos $do \rightsquigarrow 0$, también tendremos a $do_n \rightsquigarrow 0 + 12n$ en semitonos, de acuerdo al número de octavas m . Es natural considerar a la estructura de la escala N como los representantes de las clases de equivalencia o de los grados de la misma. Si N tiene 7 notas distintas, entonces E tiene 7 clases de equivalencia dadas por los múltiplos de los elementos de N .

Por ejemplo para la escala *do* mayor su estructura es $N = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$, y su nota base es el 0. Obteniendo la escala:

$$\begin{aligned} E = \{ & 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, \\ & 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, \\ & 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35, \\ & \dots, 12m - 1 \}. \end{aligned}$$

Esta escala tiene siete clases de equivalencias $0 \rightsquigarrow do$, $2 \rightsquigarrow re$, $4 \rightsquigarrow mi$, $5 \rightsquigarrow fa$, $7 \rightsquigarrow sol$, $9 \rightsquigarrow la$, $11 \rightsquigarrow si$. Notemos también que si tomamos cualquier otra escala con la forma *mayor*, donde la única diferencia es la nota base, seguiríamos teniendo siete clases de equivalencia, lo importante es la estructura y la distancia en semitónos que hay entre las notas. Tomemos por ejemplo, la escala *do#* mayor, sabemos que $do\# \rightsquigarrow 1$, y la estructura es $N = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$, por lo que la escala es:

$$\begin{aligned} E = \{ & 1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, \\ & 13, 15, 17, 18, 20, 22, 24, \\ & 25, 27, 29, 30, 32, 34, 36, \\ & \dots, 12m \}. \end{aligned}$$

Esta escala es idéntica a *do* mayor simplemente está trasladada un semitono. De igual forma cualquier escala mayor es una traslación de la escala *do* mayor. Tomemos por convención la escala *do* mayor como referencia a todas las demás. Como esto es válido para cualquier estructura de la escala, lo expresamos en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.3. *Sean E una escala con nota base b , así como D la escala con nota base 0, ambas con la misma estructura N . Entonces existe un $k \in \mathbb{Z}_{12m}$, $0 \leq k < 12$ tal que $E + k = \{e + k | e \in E\} = D$. Es decir, cualquier escala de estructura N es una traslación de a lo más doce notas, de la escala *do* con la misma estructura. Si sucede esto, decimos que las escalas son **equivalentes**.*

Demostración. La base de E es b , con $0 \leq b < 12$. Tomemos $k = -b$ ya que $b + k = 0$. Como E tiene estructura N construyamos la escala $E + k$ con estructura N . Ambos E y D comparten la estructura N , si $e \in E$, $e = x_i + b + 12p$, para algún $p \in \mathbb{Z}$, $e \in [x_i]$, pero por construcción $e - b = x_i + 0 + 12p$, por lo que $e - b \in [x_i]$ en una escala con base cero. Por lo que todas las notas que estén en el grado i de la escala E , también estarán en el grado i de la escala D . Podemos hacer esto con todas las clases de notas en E obteniendo todas las clases de notas de D y como las clases de equivalencia son una partición del conjunto tomaremos todos los elementos de E y D . Por lo que $E + k = D$. ■

Ahora pasamos a asignar una estructura de grupo que nos pueda ser de utilidad a una escala. Encontrando una función biyectiva con un grupo podemos definir una operación binaria en la escala. Tomemos una escala E con base b y estructura N . Como demostramos que son equivalentes trabajemos con la escala D , tiene la misma estructura pero con base en 0. Al igual que en los ejemplos anteriores, lo que nos interesa es la estructura.

Para encontrar la biyección primero notemos que $d \in D$ puede expresarse de manera única como $d = x_i + 12r$ para algún grado de la escala dado por $x_i \in N$ y algún $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < m$. Definamos pues, la función $f : D \subset \mathbb{Z}_{12m} \rightarrow \mathbb{Z}_{nm}$ como $f(d) = f(x_i + 12r) = i + nr$, donde $n = |N|$ es el número de clases de notas. Es fácil verificar que esta función está bien definida ya que cada nota se puede expresar únicamente como $d = x_i + 12r$. Sumar nr en $\mathbb{Z}_{nm}$ equivale a sumar $12r$ en D , donde r representa la octava en la que se encuentra la nota. Esta función ignora los semitonos que se encuentran entre las notas de la escala, simplemente muestra como cada n -notas se repite la estructura de la escala, en lugar de las 12 que se requerían en E . Una interpretación de esta función es que cada nota puede expresarse por la clase a la que pertenece, junto como su octava correspondiente nr . Esto permite que moverse en la escala sea más sencillo. Pero notemos que la definición de f requiere el conocimiento de la estructura N de la escala D .

La función inversa es $f^{-1} : \mathbb{Z}_{nm} \rightarrow D$, $f^{-1}(x) = f^{-1}(i + nr) = x_i + 12r$. Notemos que $nm = 0_{\mathbb{Z}_{nm}}$ por lo que $f^{-1}(nm) = x_0$. Hemos encontrado una biyección entre D con estructura N y el conjunto $\mathbb{Z}_{nm}$, por lo tanto entre cualquier escala E con estructura N y el conjunto $\mathbb{Z}_{nm}$.

El conjunto $f(D)$ hereda la partición de D , si definimos los conjuntos

$$[i] = \{a \in f(D) | a = i + nr\},$$

para algún $r \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq r < n$. Es claro que $[i] \cap [j] = \emptyset$ si y sólo si $i \neq j$, así como:

$$f(D) = \bigcup_{i=0}^{n-1} [i].$$

Denotaremos a la relación de equivalencia definida por esta partición en $f(D)$ por $\sim_n$.

Para dotar de una estructura de grupo a la escala D , utilizaremos la estructura de grupo que ya tiene $\mathbb{Z}_{nm}$ y la jalaremos a D via la biyección f ; esto es: definamos la siguiente operación binaria en D como $+_D : D \times D \rightarrow D$, para $a, b \in D$

$$a +_D b = f^{-1}(f(a) + f(b)),$$

donde la suma del lado derecho corresponde a la suma en $\mathbb{Z}_{nm}$. Vemos que es cerrada por que f es biyectiva. La asociativa es clara por su definición:

$$(a +_D b) +_D c = f^{-1}(f(f^{-1}(f(a) + f(b))) + f(c)) = f^{-1}(f(a) + f(b) + f(c)),$$

$$a +_D (b +_D c) = f^{-1}(f(a) + f(f^{-1}(f(a) + f(b)))) = f^{-1}(f(a) + f(b) + f(c)).$$

El elemento identidad en D es $id = \min\{D\} = x_0 \in N$, ya que $f(x_0) = 0$ por lo que

$$a +_D x_0 = f^{-1}(f(a) + 0) = a.$$

Si $a \in D$, entonces su inverso es $-a = f^{-1}(nm - f(a))$, ya que

$$a +_D (-a) = f^{-1}(f(a) + f(f^{-1}(nm - f(a)))) = f^{-1}(nm) = 0.$$

Con esto demostramos que D es un grupo con la operación $+_D$. Podemos generalizar esto para otras escalas E con la misma estructura que D , definimos la operación $+_E$ como tomar la escala E , trasponerla a D y realizar en ella la operación

$+_D$ y el resultado trasponerlo nuevamente a E . Es decir, siempre trabajamos con D que representa a las demás escalas con la misma estructura. Con todo lo anterior preparamos el camino para el siguiente:

Teorema 4.1.4. *Sea $E \subset \mathbb{Z}_{12m}$ una escala con nota base b y estructura N con m octavas y $n = |N|$ clases de notas, entonces $E \cong_f \mathbb{Z}_{nm}$. A la escala E con la estructura de grupo también la denotaremos por $\mathbb{Z}_E$.*

Demostración. Como E con estructura N es equivalente a la escala con base cero D dotada de la misma N , demostremos para D y el resultado es inmediato para una escala con cualquier otra base.

Por su definición, la función f es una biyección entre D y $\mathbb{Z}_{nm}$. Ahora revisemos que también es un homomorfismo. Tomemos $a, b \in D$, demostremos que $f(a +_D b) = f(a) + f(b)$. Sabemos que $a +_D b = f^{-1}(f(a) + f(b))$, por lo que $f(a +_D b) = f(f^{-1}(f(a) + f(b))) = f(a) + f(b)$. Por lo tanto $D \cong_f \mathbb{Z}_{nm}$, y es inmediato que $E \cong_f \mathbb{Z}_{nm}$. ■

Este teorema representa que una escala es isomorfa al grupo abeliano $\mathbb{Z}_{nm}$. Su importancia radica en que nos permite movernos en un espacio donde las notas son únicamente las de la escala, es decir nos movemos de forma diatónica. Como ejemplo de lo mostrado en la proposición anterior tomemos la escala *do* mayor D con estructura $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$. En ella la nota 33, como $33 \equiv 10 \pmod{12}$ podemos escribirla como $33 = 9 + 12 \times 2$, por lo que $r = 2$, $x_i = 9$ lo que nos dice que 33 pertenece a la clase de notas $i = 5$ que es el sexto grado de la escala¹, de modo que 33 sería algún *la*. Al aplicar la función f tenemos $f(33) = f(9 + 12 \times 2) = 5 + 7 \times 2 = 19$,

¹ Los grados de la escala se suelen denotar con números romanos I, II, III, IV, V, VI, VII; sin embargo como estamos utilizando notación de grupos, nosotros contamos los grados como 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, de modo que el sexto grado de la escala *VI* para nosotros es $i = 5$.

ya que la escala *do* mayor tiene siete notas. Si sumamos 1 a $f(33)$ nos movemos un paso en la escala, $f^{-1}(1+f(33)) = f^{-1}(20)$, como $20 \equiv 6 \pmod{7}$ lo podemos expresar como $20 = 6 + 7 \times 2$, por lo que $f^{-1}(20) = x_6 + 12 \times 2$, como $x_6 = 11$ en esta escala, entonces $f^{-1}(20) = 35$. Con esto vemos que si tenemos $a \in \mathbb{Z}_E$ el sumar y restar 1 corresponde a movimientos a pasos por la escala, sin embargo en el conjunto de notas $E \subset \mathbb{Z}_{nm}$ el movimiento puede no coincidir con pasos de tamaño 1 en semitonos. La relación entre una escala E y su equivalente $\mathbb{Z}_E$ se muestra gráficamente en la figura 4.2.

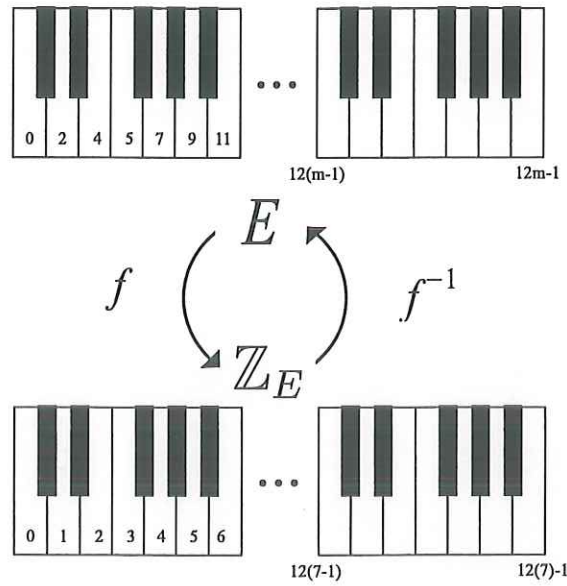


Fig. 4.2: Relación entre E y $\mathbb{Z}_E$ para la escala *do* mayor.

Por último, todas las notas posibles en una teclado bien temperado vienen dadas por la escala cromática $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. De modo que si tenemos una escala con base 0, denotada D , con estructura N , es inmediato que $f(D) = D$; más aun, no importa quien sea la base, obtenemos el mismo conjunto. Nos referiremos a dicha escala cromática con estructura de grupo, como C o $\mathbb{Z}_C$.

4.2. Intervalos

El siguiente paso en nuestra reformulación de las definiciones musicales es el del intervalo. Este será uno de los fundamentos más importantes para establecer una métrica a espacios musicales. Lo definimos como sigue:

Definición 4.2.1. *Si tenemos una escala $\mathbb{Z}_E$ y $a, b \in \mathbb{Z}_E$, definimos el intervalo armónico entre dos notas como*

$$I(a, b) = |f^{-1}(a) - f^{-1}(b)|.$$

Como vimos en la sección anterior si tenemos una escala $\mathbb{Z}_E$ y tomamos dos notas consecutivas en ella $a + 1, a \in \mathbb{Z}_E$; no necesariamente la distancia en semitonos entre sus notas primitivas $f^{-1}(a), f^{-1}(a + 1)$ es igual a 1. La definición de un intervalo armónico nos permite conocer la distancia entre notas de la escala $\mathbb{Z}_E$ con respecto a sus notas primitivas. Por ejemplo, tomemos las notas 19 y 20 en la escala *do* mayor $\mathbb{Z}_D$, como en la sección anterior. La distancia entre ellas es $|19 - 20| = 1$, como elementos de la escala, pero su intervalo armónico nos dice la distancia en semitonos que existe entre ellas: $I(19, 29) = |f^{-1}(19) - f^{-1}(20)| = |33 - 35| = 2$. Por otra parte, los intervalos armónicos se clasifican en consonantes y disonantes, como se mencionó en secciones anteriores, de acuerdo con la relación de las frecuencias de las notas entre si. Los consonantes se subdividen en perfectos e imperfectos. En la tradición tonal aparecen principalmente intervalos consonantes perfectos, después los imperfectos y las disonancias se utilizan con cuidado para lograr algún efecto musical

Semitonos	Nombre	Tipo
0	P1	Consonante P
1	m2	Disonante
2	M2	Disonante
3	m3	Consonante I
4	M3	Consonante I
5	P4	Consonante (D)
6	+4	Disonante
7	P5	Consonante P
8	m6	Consonante
9	M6	Consonante
10	m7	Disonante
11	M7	Disonante
12	P8	Consonante P

Tab. II: (♩) Intervalos consonantes y disonantes (P: perfecto, I: imperfecto).

deseado. Los intervalos disonantes y consonantes se muestran en la tabla II.

Los intervalos melódicos, por su parte tienen como función no solo decirnos el intervalo armónico entre dos notas, sino la dirección necesaria para llegar de la nota a hasta b , ascendente o descendente.

Definición 4.2.2. Si tenemos una escala $\mathbb{Z}_E$ y $a, b \in \mathbb{Z}_E$, definimos el *intervalo melódico* entre dos notas como:

$$Mel(a, b) = f^{-1}(b) - f^{-1}(a).$$

Si queremos la distancia diatónica entre las notas simplemente hacemos su resta en el siguiente orden

$$M(a, b) = b - a.$$

Con esto concluimos las definiciones básicas, en la siguiente sección analizamos el conjunto de los acordes y las triadas diatónicas.

Hasta este punto hemos escrito de forma matemática las definiciones de: *escala*, *estructura y grados de la misma*, así como los *intervalos*. Esto es el fundamento de las estructuras geométricas que queremos construir. Por una parte las escalas y sus estructuras sientan las bases para lo que más adelante será el movimiento de voces, ya que imponen restricciones sobre los grados de las mismas que pueden aparecer simultáneamente. Por otra parte los intervalos nos permiten construir distintos tipos de acordes y más aún, nos serán de mucha utilidad para definir una métrica en nuestros espacios musicales.

5. ESPACIO DE TRIADAS DIATÓNICAS

Un acorde es un conjunto de notas que suenan simultaneamente, son los bloques con los que se construye gran parte de la música, en particular los que contienen intervalos de quinta y tercera, llamados triadas, son muy importantes para la música tonal. Comencemos con la definición de un acorde en general. El conjunto de todos los acordes de n -notas lo definimos como sigue:

Definición 5.0.3. Si tenemos una escala $\mathbb{Z}_E$, llamamos *acordes de n -notas* a los elementos de $\mathbb{Z}_E^n$. Para un acorde de 4 notas $(B, T, A, S) \in \mathbb{Z}_C^4$, llamamos a sus componentes *bajo, tenor, alto y soprano* respectivamente. Si el acorde es de 3 notas $(T, A, S) \in \mathbb{Z}_C^3$ sus nombres son: *tenor, alto y soprano* respectivamente.

Los acordes básicos en la música tonal son la *triada* que consiste de tres notas y la *séptima*, de cuatro. Por tradición se dice que cada componente del acorde lo canta una voz, donde Soprano y Alto corresponden a voces femeninas, mientras que Tenor y Bajo a masculinas; como si un ensamble coral fuera quien ejecutara el acorde. En realidad estos nombres suelen utilizarse aunque sea un conjunto instrumental el que interpreta. Esta tradición viene de cuando la música era principalmente vocal.

5.1. Triada

Pasemos ahora a definir una triada. Como se dijo en la sección de definiciones musicales, una triada es un conjunto de tres notas, donde los extremos forman un intervalo de una quinta, mientras que la nota media forma intervalos de terceras con las otras dos notas. Como se ha mencionado el intervalo de la quinta es el fundamento de las escalas que trabajamos y no es la excepción para la construcción de acordes. Las triadas mayor y menor son las más estables armónicamente [4], ya que sus notas exteriores forman una quinta perfecta. La triada mayor con nota fundamental $do_5 \leadsto 0$ es $(0, 4, 7)$ en la escala cromática, su respectiva triada menor es $(0, 3, 7)$, podemos ver cierta simetría en su estructura ya que la primera consiste en la suma de intervalos $4 + 3$, mientras que la segunda $3 + 4$, es decir, son las concatenaciones de los intervalos $3M3m$ y $3m3M$. Otras triadas menos estables surgen al considerar las posibles combinaciones de intervalos de terceras $3m = 3$, $3M = 4$. Por ejemplo al concatenar dos terceras menores $3m3m$ obtenemos el acorde $(0, 3, 6)$, donde el intervalo que forman las notas exteriores no es una quinta perfecta $P5 = 7$, sino una quinta disminuida $5^\circ = 6$, por tal razón, esta triada se conoce como triada disminuida. El otro caso consiste en concatenar dos terceras mayores $3M3M$, obteniendo el acorde $(0, 4, 8)$, el intervalo exterior es una quinta aumentada $5^+ = 8$, por lo tanto se conoce como triada aumentada.

Resumiendo lo anterior, la triada surge de concatenar intervalos de terceras, existen cuatro posibles estructuras para una triada y se muestran en la tabla I.

Es importante notar que las triadas mayor y menor son los únicos acordes posibles donde todos los intervalos entre las notas que lo forman son consonantes. Los acordes séptimos por su parte, son acordes formados de concatenar tres intervalos de tercera,

Tipo de triada	Estructura en $\mathbb{Z}_C$
Mayor	(0,4,7)
Menor	(0,3,7)
Disminuida	(0,3,6)
Aumentada	(0,4,8)

Tab. I: (♯) Estructura de las triadas.

es importante notar que el intervalo que se forma entre las notas extremas del acorde corresponde a una séptima, de donde el acorde obtiene su nombre. Sin embargo los intervalos séptimos están clasificados como disonantes. De aquí que se hable de acordes consonantes y disonantes, las triadas mayor y menor son consonantes, mientras que los demás son disonantes. Algunas veces por cuestiones técnicas otros acordes son considerados consonantes, de momento no entraremos en esos detalles técnicos.

El siguiente paso importante son las triadas diatónicas de una escala dada, son las que se pueden formar exclusivamente con notas de la misma. De ahora en adelante sólo consideraremos escalas mayores, es decir con estructura mayor. Otra consideración que debemos tener en cuenta para las triadas diatónicas que deseamos definir es que no existan *cruces de voces*, esto es que se respete que la voz soprano siempre es mayor o igual que las demás, siguiendo la voz alto, tenor y bajo. Esto para permitir que cada voz tenga una posición bien definida.

Hasta ahora hemos mencionado la estructura de una triada, por ejemplo mayor (0, 4, 7), sin embargo podemos tener acordes que no consistan exactamente de las notas 0, 4, 7 y aun así sea una triada mayor. El ejemplo más sencillo de esto es con notas que estén en otra octava; este acorde traspuesto 12 semitonos sigue siendo una triada mayor $(12, 16, 19) = (0+12, 4+12, 7+12)$, de hecho la trasposición por octavas

preserva la estructura del acorde, de modo que $(0, 4, 7) \equiv (0 + 12r, 4 + 12k, 7 + 12m)$, siempre y cuando $0 + 12r \leq 4 + 12k \leq 7 + 12m$ para evitar el cruce de voces.

Los acordes son invariantes ante “permutaciones”¹ también, es decir, si tenemos $(0, 4, 7)$, $T = 0$, $A = 4$, $S = 7$, el acorde $(4, 7, 0 + 12)$, también es una triada. La estructura del acorde nos permite identificar que voz interpreta que parte de la triada. En el caso $(0, 4, 7)$, 0 es la base del acorde, 4 es la tercera del acorde por ser un intervalo de tercera, mientras que 7 es la quinta del acorde por formar un intervalo de quinta con la base. De modo que en el acorde equivalente $(4, 7, 0 + 12)$ decimos que a la voz tenor $T = 4$ le corresponde la tercera del acorde, el alto $A = 7$ tiene la quinta, mientras que el soprano $S = 0 + 12$ la base. Resumiendo, la estructura de una triada es invariante a traslación y permutación de las partes de la triada, siempre y cuando no haya cruce de voces.

Algo interesante a notar es que las escalas mayor y menor precisamente por sus construcciones permiten que cada uno de sus grados sea la nota fundamental de alguna triada. Comencemos con la escala *do* mayor D y su estructura $N = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$. En $\mathbb{Z}_D$ tenemos siete grados de la escala correspondientes a cada $x_i \in N$, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 las demás surgen de trasponer éstas en múltiplos de 12. Dicha estructura permite que cada grado de la escala sea una triada con notas de la escala. Los intervalos entre las notas nos ayudan a ver esto, notemos que dos notas consecutivas en la escala siempre nos dan un intervalo de segunda, ya sea menor ($2m = 1$ semitonos) o mayor ($2M = 2$ semitonos). Si tenemos una nota $i \in \mathbb{Z}_D$ entonces $I(i, i + 2)$ siempre es un intervalo de tercera, ya sea menor ($3m = 3$

¹ Permutaciones de una manera de momento ambigua, ya que se permutan las partes del acorde, pero las notas resultantes no son permutaciones de las originales. Se permutan las clases de las notas.

Distancias $I(i, i + 1)$	Distancias $I(i, i + 2)$
$I(0, 1) = 2$	$I(0, 2) = 4$
$I(1, 2) = 2$	$I(1, 3) = 3$
$I(2, 3) = 1$	$I(2, 4) = 3$
$I(3, 4) = 2$	$I(3, 5) = 4$
$I(4, 5) = 2$	$I(4, 6) = 4$
$I(5, 6) = 2$	$I(5, 0 + 7) = 3$
$I(6, 7) = 1$	$I(6, 7 + 1) = 3$

Tab. II: Intervalos en la escala *do* mayor. Segunda mayor $2M=2$, menor $= 2m=3$; tercera mayor $3M=4$, menor $= 3$.

semitonos) o mayor ($3M = 4$ semitonos). Esto se muestra en la tabla II.

De modo que si tomamos una nota cualquiera $a \in \mathbb{Z}_D$, el acorde $(a, a + 2, a + 4)$ es una triada ya que es la concatenación de dos intervalos de tercera, puede ser una triada mayor, menor, aumentada o disminuida, pero una triada al fin; más aun es una triada diatónica ya que está formada por notas de la escala. El tenor $T = a$ sería la nota fundamental de la triada, el alto $A = a + 2$ la tercera y el soprano $S = a + 4$ la quinta. Sin embargo como vimos, los acordes son invariantes ante trasposición por octavas y permutaciones de los elementos de la triada, vemos que el acorde $(a + 2 - 7, a, a + 4)$ es equivalente al anterior, ya que sólo se traspuso una octava² y se intercambió con la nota que le correspondía al tenor.

Hasta ahora hemos dado una idea de lo que son las triadas diatónicas, sin embargo falta una definición que exprese matemáticamente las ideas que hemos manejado en esta sección.

² Recordemos que en las escalas mayor y menor una octava corresponde a una suma de 7, a diferencia de la cromática que requiere 12 semitonos.

Definición 5.1.1. Una *triada diatónica* en una escala mayor es un elemento $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_D^3$ tal que $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ y existen un $k \in \mathbb{Z}_D$ y $\sigma \in S_3$ de modo que

$$(k, k, k) + (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) \bmod 7 \equiv (0, 2, 4),$$

Llamaremos $\mathbb{T}$ al conjunto de triadas diatónicas de la escala do mayor.

Esta definición expresa que un acorde de tres notas en la escala do mayor es una triada diatónica si bajo alguna trasposición y permutación, el acorde tiene estructura de una triada³ (0, 2, 4). Sólo nos falta poder identificar que voz interpreta que parte de la triada, necesitamos una función biyectiva entre las voces T, A, S y los grados de la triada: fundamental $\leadsto 0$, tercera $\leadsto 2$ y quinta $\leadsto 4$.

Dada una triada $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_D^3$, necesitamos identificar que componente de la triada es cada voz. Para ello permutamos las componentes de modo que la primera sea la fundamental, la siguiente sea la tercera y la última sea la quinta de la triada, en esta representación puede que las voces se crucen, pero no importa ya que sólo la utilizaremos para identificar sus partes.

La función de estructura está dada por $Est : \mathbb{T} \subset \mathbb{Z}_D^3 \rightarrow \mathbb{Z}_D^3$, si $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{T}$:

$$Est(a_1, a_2, a_3) = (a_i, a_j, a_l),$$

donde

$$\begin{aligned} a_i | k + a_i &\bmod 7 \equiv 0, \\ a_j | k + a_j &\bmod 7 \equiv 2, \\ a_l | k + a_l &\bmod 7 \equiv 4, \end{aligned}$$

Con $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$.

³ En notación de notas de la escala, como vimos $(a, a+2, a+4)$ es una triada, aquí se incluyen los cuatro tipos: mayor, menor, aumentada y disminuida.

Esta función toma una triada y acomoda sus coordenadas en orden de los grados que la componen (fundamental, tercera, quinta). Notemos que k es el dado en la definición de triada. Esta función es una simple permutación de las coordenadas, sin embargo puede que el resultado no sea una triada debido al cruce de voces. Resumiendo lo anterior podemos formularlo en la siguiente definición.

Definición 5.1.2. *El espacio de triadas diatónicas para la escala do mayor es el par $(\mathbb{T}, Est)$.*

Notemos que la función Est es una permutación de las coordenadas de $a \in \mathbb{T}$ que denotaremos por $Est(a_1, a_2, a_3) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})$, con $\sigma \in S_3$.

Definición 5.1.3. *Sea $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{T}$ una triada y su estructura $Est(a) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})$, si $\sigma(i) = 1$, entonces la fundamental de la triada es $Fundamental(a) = a_i$, si $\sigma(i) = 2$, entonces $Tercera(a) = a_i$ y si $\sigma(i) = 3$, entonces $Quinta(a) = a_i$ con $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Lo anterior se aplica para cualquier escala mayor, ya que son sólo trasposiciones de do mayor. Notemos también que el espacio $\mathbb{T}$ se particiona en siete clases de equivalencia dadas por los grados de la escala

$$[[0]], [[1]], [[2]], [[3]], [[4]], [[5]], [[6]].$$

Definidas como $[[i]] = \{a \in \mathbb{T} | i \equiv Fundamental(a) \pmod{7}\}$, utilizamos doble corchete para distinguir las clases de equivalencia de triadas, de las de notas. Cualquier triada diatónica tiene como fundamental una nota perteneciente a la estructura de la escala $N = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$. Podríamos definirlo análogamente para las terceras

de la triada, pero por razones musicales se caracterizan por su base. En notación musical a estas clases de equivalencia se les denota con números romanos⁴:

$$I, II, III, IV, V, VI, VII.$$

5.2. El conjunto de triadas diatónicas como espacio métrico y conjunto parcialmente ordenado

Dado un par de acordes, medimos la distancia entre ellos de acuerdo a la suma de los desplazamientos de cada una de las voces, explícitamente como:

Definición 5.2.1. Sean $a, b \in \mathbb{Z}_C^m$ dos acordes de m -notas, la *distancia melódica* entre ellos está dada por

$$d(a, b) = \sum_{i=0}^n |a_i - b_i|.$$

Por otra parte, la norma de a está dada por

$$d(a, 0) = \sum_{i=0}^n |a_i|.$$

Denotaremos la norma y la distancia por $d(a, b) = \|a - b\|$.

Esto corresponde a una métrica conocida como “métrica del taxista” o “manhattan”. Recordemos la definición matemática de métrica, que nos permite conocer la distancia entre dos puntos de un conjunto:

⁴ Cuando se utilizan números romanos para denotar acordes, se escriben con letras minúsculas los que tienen estructura *menor*. En este trabajo, no manejamos dicha notación, sino que escribimos todos con mayúsculas.

Definición 5.2.2. Una *métrica* en un conjunto X , es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisface $\forall x, y, z \in X$:

- $d(x, y) \geq 0$,
- $d(x, x) = 0$ si y solo si $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Es un buen momento para recordar que estamos trabajando con definiciones matemáticas, no musicales. Esto lo comentamos para evitar confusiones: al hablar de métrica nos referimos a un concepto geométrico que involucra distancias, no a la definición musical que se refiere a la estructura rítmica de una pieza.

Como el espacio de triadas diatónicas $\mathbb{T}$ es un subconjunto no vacío del espacio métrico con la métrica de taxista en $\mathbb{Z}^3$, entonces $\mathbb{T}$ también es un espacio métrico. Para triadas diatónicas $T, K \in \mathbb{T}$, la distancia entre ellas está dada por:

$$d(T, K) = |T_1 - K_1| + |T_2 - K_2| + |T_3 - K_3|.$$

Llamamos a esta función “distancia melódica”, para no llamarla del taxista. También porque representa la suma del desplazamiento total de cada voz, esto es la suma del movimiento melódico de las voces. Si fueran acordes de una nota, esta métrica coincidiría con el valor absoluto del intervalo melódico entre las notas (acordes de una nota).

Por otra parte, es conveniente definir una métrica en $\mathbb{Z}_7$, ya que es el conjunto que representa las clases de las notas con las que el bajo se mueve. Para ello tomemos $a, b \in \mathbb{Z}_7$. Definimos $d_7(a, b) = \min\{|a - b|, |a - b|^{-1}\}$. El inverso es con respecto al conjunto $\mathbb{Z}_7$. Por ejemplo, tomemos las notas $do \rightsquigarrow 0$ y $si \rightsquigarrow 6$, la distancia entre ellas

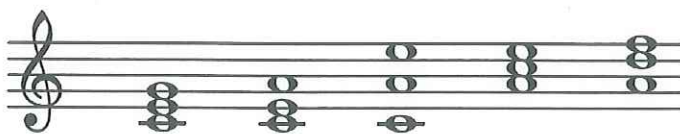


Fig. 5.1: (♩) Triadas diatónicas en *do* mayor, crecientes de izquierda derecha.

es $d_7(0, 6) = \min\{|0 - 6|, |0 - 6|^{-1}\}$, como $6^{-1} = 1$ tenemos $d_7(0, 6) = \min\{6, 1\} = 1$, por lo que su distancia es 1.

Ahora recordemos el orden lexicográfico en conjuntos. Si tenemos $a, b \in \mathbb{Z}^n$, donde $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, decimos que $a < b$ si $a_1 < b_1$ o bien

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \\ a_2 &= b_2, \\ &\dots, \\ a_k &= b_k, \\ a_{k-1} &< b_{k-1}, \end{aligned}$$

para algún $k = 1, \dots, n - 1$.

Este orden consiste en comparar la primera coordenada, la que tenga valor mayor, es el elemento mayor; si ambas son iguales, entonces comparamos la segunda, y así consecutivamente. Esta forma de organizar los elementos es similar a la forma en que se encuentran las palabras en un diccionario, para buscar una palabra buscamos la primera letra, despues comparamos la segunda, etc. Por ejemplo *aire* < *automóvil*, pero *Aaron* < *aire*. En el caso de triadas comparamos las voces empezando por el tenor, alto y soprano. Sabemos que $\mathbb{Z}^3$ con el orden lexicográfico es un conjunto ordenado, como $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}^3$, hereda la estructura de orden. Esto se muestra en la figura 5.1.

5.2.1. Implicaciones armónicas

De la métrica melódica entre triadas diatónicas surgen resultados interesantes que relacionan el movimiento melódico con las sucesiones de acordes, conocidas también como progresiones armónicas. Tomemos una triada $a \in \mathbb{T}$, queremos definir una operación que mueva la fundamental de la triada n -pasos, o bien la tercera o quinta. Para ello requerimos saber que parte de la estructura de la triada $a = (T, A, S)$ tiene cada componente; esto lo obtenemos con ayuda de la permutación Est . Definamos esta operación como sigue

Definición 5.2.3. Si $a \in \mathbb{T}$, definamos la función $\odot : \mathbb{T} \times \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}_C^3$ como:

$$(a_1, a_2, a_3) \odot (k, m, l) = (e_{\tau^{-1}(i)}, e_{\tau^{-1}(i)}, e_{\tau^{-1}(i)}),$$

Donde $(e_1, e_2, e_3) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) + (k, m, l)$ y σ es la permutación asociada a la estructura de la triada, $Est(a_1, a_2, a_3) = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})$.

Un problema natural que surge de esto, es describir el conjunto A tal que:

$$\mathbb{T} \odot A \subset \mathbb{T},$$

En otras palabras nos interesa encontrar, dada una triada $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{T}$, los puntos $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{Z}^3$ que satisfacen $(a_1, a_2, a_3) \odot (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{T}$. Por inspección podemos comprobar que los elementos que se muestran en la tabla III cumplen este requerimiento:

Mientras que los de la tabla IV no lo cumplen.

Con esto caracterizamos todos los elementos de $\mathbb{Z}^3$ que al operar sobre una triada

(0,0,0)
(0,0,1)
(-1,0,0)
(0,1,1)
(-1,-1,0)
(1,1,1)
(-1,-1,-1)

Tab. III: Elementos $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_3$ tales que $|a_i| \leq 1$ y $a \odot b \in \mathbb{T}$ para $a \in \mathbb{T}$.

(0,0,-1)	(1,1,-1)
(1,0,0)	(1,-1,1)
(0,1,0)	(-1,1,1)
(0,-1,0)	(1,-1,-1)
(0,1,-1)	(-1,-1,1)
(0,-1,1)	(-1,-1,-1)
(0,-1,-1)	(-1,1,-1)
(1,1,0)	(1,-1,-1)
(-1,1,0)	(-1,1,1)
(1,-1,0)	(1,1,-1)

Tab. IV: Elementos $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_3$ tales que $|a_i| \leq 1$ y $a \odot b \notin \mathbb{T}$ para $a \in \mathbb{T}$.

diatónica generan movimientos a paso en cada una de las voces, es decir ninguna voz tiene movimiento mayor a 1 al aplicar las operaciones. De los veintisiete elementos $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_3$ tales que $|a_i| \leq 1$; sólo siete de ellos generan otra triada diatónica.

Por otra parte si tomamos la operación $\odot$ y la aplicamos a los elementos de las triadas de acuerdo a la partición $\mathbb{T} = [[0]] \cup [[1]] \cup [[2]] \cup [[3]] \cup [[4]] \cup [[5]] \cup [[6]]$, obtenemos relaciones que pueden ser de interés musical ya que expresan una idea fundamental del contrapunto, que es el movimiento mínimo de las voces, del cual se hablará más adelante. Estas relaciones se muestran en la tabla V.

$$\begin{aligned}
 &\text{Si } a \in [i] \\
 &a \odot (-1, 0, 0) \in [i + 2] \\
 &a \odot (0, 0, 1) \in [i - 2] \\
 &a \odot (0, 1, 1) \in [i + 3] \\
 &a \odot (-1, -1, 0) \in [i - 3] \\
 &a \odot (1, 1, 1) \in [i + 1] \\
 &a \odot (-1, -1, -1) \in [i - 1]
 \end{aligned}$$

Tab. V: Operaciones con las triadas.

Esto significa que podemos pasar de una clase de triadas cualquiera a otra con movimientos unitarios en las voces. Por ejemplo si tenemos una triada $a \in [i]$ y queremos encontrar una triada que esté en la clase de equivalencia $[i + 2]$, basta realizar la operación $e = a \odot (-1, 0, 0)$, por la construcción $d(e, a) = 1$, es decir sólo la voz que es la fundamental de la triada a se movió un paso.

Teorema 5.2.4. Si $a, b \in \mathbb{T}$ con $a \in [i]$ y

1. $d(a, b) = 1$, entonces $b \in [i + 2]$ o $b \in [i - 2]$.
2. $d(a, b) = 2$, entonces $b \in [i + 3]$ o $b \in [i - 3]$.
3. $d(a, b) = 3$, entonces $b \in [i + 1]$ o $b \in [i - 1]$.

Demostración. La distancia $d(a, b) = 1$ corresponde a movimiento en solamente una voz, los elementos $e \in \mathbb{Z}^3$ que cumplen $d(a, a \odot e) = 1$ son únicamente $(-1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$ por la tabla V concluimos que $b \in [i + 2]$ o $b \in [i - 2]$, donde $b = a \odot e$.

Para $d(a, b) = 2$ los posibles movimientos en las voces que cumplen $d(a, a \odot e) = 2$ con $e \in \mathbb{Z}^3$, son únicamente $(0, 1, 1)$ y $(-1, -1, 0)$, por la tabla V, concluimos que $b \in [i + 3]$ o $b \in [i - 3]$.

En el caso $d(a, b) = 3$ tenemos solamente $d(a, a \odot e) = 3$ si $e = (1, 1, 1)$ y $e = (-1, -1, -1)$, por la tabla V, concluimos que $b \in [i + 1]$ o $b \in [i - 1]$.■

Este teorema nos será de mucha utilidad ya que permite clasificar todos las triadas que estén a una distancia menor o igual a 3 de una triada dada. Es decir si tenemos una vecindad alrededor de una triada $a \in \mathbb{T}$, $B(a, 4) = \{b \in \mathbb{T} | d(a, b) < 4\}$ podemos saber a que distancia se encuentran las notas fundamentales de cualquier par a, b . De modo que la operación $\odot$ nos permite movernos de una triada a hacia la triada b más cercana de cualquier grado $b \in [[i]]$ con $i \in \mathbb{Z}_7$; siempre y cuando utilicemos elementos $r \in \mathbb{Z}^3$ que satisfagan $a \odot r \in \mathbb{T}$, en específico los mostrados en la tabla III, debido a que todos generan un desplazamiento de a lo más 3 bajo la operación $\odot$ para cualquier elemento de $\mathbb{T}$. En cierto sentido $\odot$ nos facilita encontrar el movimiento mínimo entre clases de triadas. Por ejemplo si estamos en una triada $do \rightsquigarrow 0$ mayor $(0, 2, 4)$, podemos pasar a la triada perteneciente a la clase de $mi \rightsquigarrow 2$ más cercana con la operación $(0, 2, 4) \odot (-1, 0, 0) = (-1, 2, 4)$.

5.3. Conducción de voces

Hasta este punto hemos hablado de triadas diatónicas y su relación con otras de acuerdo a su distancia melódica y clase de equivalencia a la que pertenece. En esta

sección definimos las progresiones armónicas que, junto con los resultados obtenidos en la sección anterior, y de acuerdo a las convenciones armónicas de la música tonal, nos permiten generar sucesiones de acordes.

Definición 5.3.1. Una *progresión de m-acordes* es una sucesión de elementos $T_i \in \mathbb{Z}_C^n$, $\{T_i\}_{i=1}^m$. Una *progresión de triadas diatónicas* es una sucesión $\{T_i\}_{i=1}^m$, con $T \in \mathbb{T}$.

Definición 5.3.2. Dada una sucesión de triadas diatónicas $\{T_i\}_{i=1}^m$ con $T_i = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{Z}_C^3$. Definimos el *bajo de la sucesión* como $\{a_i\}$ tal que la a_i es la fundamental⁵ de la triada T_i modulo 7, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Por una parte tenemos las definiciones de sucesiones de acordes y triadas diatónicas. Estas nos permiten trabajar con lo que podríamos llamar el esqueleto de una pieza musical. De hecho muchas de las composiciones musicales comienzan con un esbozo de los acordes que la conformarán, para después pasar a elaborarlos y detallarlos, obteniendo algo mucho más complicado. Por otra parte, la definición del bajo de una sucesión es muy importante, ya que nos indica a que clases de triadas $[[i]]$ pertenece cada elemento de la sucesión. Como veremos más adelante, basta con conocer una triada inicial, una sucesión de bajos y la operación $\odot$ sobre los elementos de la tabla III, para generar una sucesión de triadas con movimiento mínimo.

Cabe notar que diversas triadas pueden tener el mismo bajo, por lo que el problema de la conducción de voces consiste en: dada una sucesión de bajos, encontrar progresiones de acordes “*musicalmente adecuadas*”. Esto es un término ambiguo, pues en la construcción de piezas musicales se utilizan muchas reglas que son difíciles

⁵ Recordemos que la fundamental de la triada se define como: $Fundamental(a_1, a_2, a_3) = a_i$ tal que $\sigma(i) = 1$; donde σ está dado por la permutación *Est*, intrínseca a la triada. Es decir, la primer coordenada de la permutación *Est*.

de expresar en pocas palabras. A pesar de esto existen ciertas guías, o reglas básicas que suelen utilizarse. Entre ellas destaca el movimiento mínimo de las voces, que se refiere a que dos triadas consecutivas no deben estar muy separadas. Esto es análogo a pedir que las voces no tengan mucho desplazamiento, lo cual nos induce a requerir principalmente movimiento a pasos⁶ en las mismas. En el lenguaje que hemos venido trabajando se representaría como $d(a, b) < 4$ donde $a, b \in \mathbb{T}$, lo cual junto con la operación $\odot$ y los elementos de la tabla V, resumidos en el teorema 5.2.4 satisfacen las condiciones musicales que acabamos de mencionar. Lo más importante es que con lo anterior tenemos una forma operacional de pasar entre una triada a y cualquier elemento en su vecindad $B(a, 4)$ de acuerdo a reglas básicas de la música tonal.

5.3.1. Acción de $\mathbb{Z}_7$ sobre las progresiones de acordes

En esta sección queremos expresar las progresiones de triadas diatónicas como una acción de grupo, o alguna otra función que nos sea de utilidad. Recordemos que una acción de grupo nos permite aprovechar la estructura del mismo para analizar conjuntos que no necesariamente tienen una estructura algebraica. Su definición es:

Definición 5.3.3. *Una acción de un grupo G en un conjunto X es una función de $G \times X \rightarrow X$, escrita como $g \star x$, para todo $g \in G$ y $x \in X$, que satisfaga las siguientes propiedades:*

1. $g_1 \star (g_2 \star x) = (g_1 + g_2) \star x$, para todo $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$,
2. $0 \star x = x$, para todo $x \in X$,

donde la operación binaria dentro del grupo se está denotando por $+$.

⁶ Movimiento a paso se refiere a movimientos con desplazamiento 1 en la escala.

Tenemos siete notas en las escalas que estamos trabajando, por lo que el bajo de una sucesión de triadas puede ser una de esas siete notas y ninguna otra. De manera que el bajo se mueve por intervalos de segundas, terceras, cuartas, quintas, sextas y séptimas. Si escogemos uno de estos y lo repetimos siete veces volvemos a la nota inicial como se muestra en la tabla VI. Estas progresiones son típicas precisamente por su simetría, si se escuchan, tienen un sonido muy característico a piezas de música tonal. Por otra parte coinciden exactamente con las progresiones obtenidas por los generadores de $\mathbb{Z}_7$, y como 7 es primo son todos sus elementos, esto se ilustra en la tabla VII.

Movimiento	Orden de las notas
($\rightarrow$) Segundas , ($\leftarrow$) séptimas.	I - II - III - IV - V - VI - VII - I
($\rightarrow$) Terceras, ($\leftarrow$) sextas.	I - VI - IV - II - VII - V - III - I
($\rightarrow$) Cuartas, ($\leftarrow$) quintas.	I - IV - VII - III - VI - II - V - I

Tab. VI: Progresiones típicas de triadas diatónicas en intervalos constantes. Notación musical.

Elemento del grupo	Orbita
($\rightarrow$) 1 , ($\leftarrow$) 6.	$[[0]] - [[1]] - [[2]] - [[3]] - [[4]] - [[5]] - [[6]] - [[0]]$
($\rightarrow$) 2, ($\leftarrow$) 5.	$[[0]] - [[5]] - [[3]] - [[1]] - [[6]] - [[4]] - [[2]] - [[0]]$
($\rightarrow$) 3, ($\leftarrow$) 4.	$[[0]] - [[3]] - [[6]] - [[2]] - [[5]] - [[1]] - [[4]] - [[0]]$

Tab. VII: Progresiones típicas de elementos en $\mathbb{T}$ en intervalos constantes. Notación matemática.

Si consideramos la acción trivial de $\mathbb{Z}_7$ sobre $\mathbb{Z}_7$ obtenemos las orbitas de las fundamentales de las triadas, como se muestran en la tabla VII. Esta acción es muy sencilla, sin embargo podemos extenderla al conjunto de triadas $\mathbb{T}$ de manera que obtengamos algo que es musicalmente interesante. Primero extendamos la acción del grupo al conjunto de representantes de triadas $\mathbb{T}/\sim_7$ como sigue:

1. Actuamos $\mathbb{Z}_7$ sobre el bajo de cada representante de las triadas.
2. Ajustamos las terceras y quintas del representante de las triadas para obtener la triada diatónica correspondiente al bajo más cercana, que resulte de la acción del grupo. Por la estructura de la escala esto corresponde a movimientos a pasos en las voces.

Así el cociente $\mathbb{T}/\sim_7$ consiste en tomar el cociente con la relación $\sim_n$ que se definió junto con la escala, a cada una de las coordenadas. Notemos que cada $T \in \mathbb{T}$ pertenece a una clase τ en $\mathbb{T}/\sim_7$, si $a \in \mathbb{Z}_7$ actúa en T tomamos el elemento $T' \in a\tau$ más cercano a T con la métrica melódica, de modo que $aT = T'$. Lo interesante de esta acción es que involucra exclusivamente movimiento a pasos en las voces, sin contar el bajo. Explícitamente la acción de $\mathbb{Z}_7$ sobre $\mathbb{T}/\sim_7$ es como sigue:

Definición 5.3.4. Si $a \in \mathbb{T}/\sim_7$. Definimos la función $+_7 : \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{T}/\sim_7 \rightarrow \mathbb{T}/\sim_7$ como:

- $0 +_7 a = a \odot (0, 0, 0)$.
- $1 +_7 a = a \odot (1, 1, 1)$.
- $2 +_7 a = a \odot (-1, 0, 0)$.
- $3 +_7 a = a \odot (0, 1, 1)$.
- $4 +_7 a = a \odot (-1, -1, 0)$.
- $5 +_7 a = a \odot (0, 0, 1)$.
- $6 +_7 a = a \odot (-1, -1, -1)$.

Notemos que no se puede extender directamente la acción sobre todo el conjunto de triadas diatónicas $\mathbb{T}$, sin embargo podemos utilizarla para obtener resultados

musicalmente interesantes. Por ejemplo definamos la operación $+$ igual que $+_7$, pero ahora sobre todo $\mathbb{T}$ en vez de $\mathbb{T}/\sim_7$ como:

Definición 5.3.5. Si $a \in \mathbb{T}$. Definimos la función $+: \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ como:

- $0 + a = a \odot (0, 0, 0)$.
- $1 + a = a \odot (1, 1, 1)$.
- $2 + a = a \odot (-1, 0, 0)$.
- $3 + a = a \odot (0, 1, 1)$.
- $4 + a = a \odot (-1, -1, 0)$.
- $5 + a = a \odot (0, 0, 1)$.
- $6 + a = a \odot (-1, -1, -1)$.

A manera de ejemplo tomemos la triada (do, mi, sol) que correspondería a $T = (0, 2, 4)$ en la escala diatónica. Vemos que $1 + (1 + T) = (2, 4, 6)$, mientras que $(1 + 1) + T = 2 + T = (-1, 2, 4)$, ambas pertenecen a la misma clase de triadas en $\mathbb{T}/\sim_7$, sin embargo en $\mathbb{Z}$ son distintas, por lo que $+$ no satisface la segunda condición de la definición de acción. Con lo anterior vemos que el problema de la conducción de voces se ha convertido en como extender la acción de $\mathbb{Z}_7$ sobre $\mathbb{T}/\sim_7$ al conjunto de todas las triadas $\mathbb{T}$.

Como se mencionó, la función $+: \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ no se extiende a $\mathbb{T}$ como una acción de grupo, sin embargo obtenemos una estructura con ciertas propiedades interesantes, por ejemplo en la tabla VIII se muestran las relaciones de orden entre los elementos de $\mathbb{T}$ con respecto a la función $+$. Por otra parte, esta función nos permite pasar entre clases de acordes $[i], [k]$ operacionalmente, de modo que la distancia entre el par de triadas sea mínima. Esto sigue siendo uno de nuestros principales objetivos,

de modo que aunque $+$ no sea una acción de grupo, sigue respetando las propiedades básicas sobre las cuales fue construida.

Por otra parte, partiendo de una clase de triada, se puede llegar al representante segundo más cercano de la clase, por medio de la operación:

Definición 5.3.6. Si $a \in \mathbb{T}$. Definimos la función $+': \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ como:

- $0 +' a = 0 + a$.
- $1 +' a = 4 + (4 + a)$.
- $2 +' a = 1 + (1 + a)$.
- $3 +' a = 4 + (4 + (2 + a))$.
- $4 +' a = 1 + (3 + a)$.
- $5 +' a = 6 + (6 + a)$.
- $6 +' a = 3 + (3 + a)$.

Para mantener la neutralidad del 0, definimos $0 +' a = a$, mientras que los demás van al segundo más cercano. Esta definición surge de que muchas veces los compositores no utilizan sólo las progresiones de acordes que involucran una distancia mínima, sino que suelen escoger una infinidad de otras opciones; entre ellas el siguiente paso natural para nosotros es el segundo acorde más cercano, lo cual introduce variedad melódica a nuestras sucesiones de triadas. Una propiedad interesante de esta operación es que se invierten el orden de las operaciones, como si $+'$ fuera simétrica a $+$. Esto se muestra en la tabla VIII.

Ninguna de estas dos funciones: $+$ y $+'$ cumple con la definición de acción de grupo, pero sí con algo más débil que llamamos una semiacción.

Definición 5.3.7. Si $T \in \mathbb{T}$ y $a, b \in G$ elementos de un grupo, llamamos a la función $\star : G \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ una **semiacción** si cumple

1. $a \star T \in \mathbb{T}$, para todo $a \in G$
2. $0 \star T = T$, con 0 la identidad de G ,
3. Si $a +_G b = 0$, entonces $a \star (b \star T) = b \star (a \star T) = T$,
4. $a_1 \star a_2 \star \cdots \star a_i \star T = a_{\sigma(1)} \star a_{\sigma(2)} \star \cdots \star a_{\sigma(i)} \star T$ para todo $\sigma \in S_i$.

Si $\star$ satisface lo anterior, decimos que $\star$ **semiactúa** sobre T .

Esto abre las puertas a un nuevo tema de estudio bastante amplio. La definición anterior permite que tratemos al espacio de triadas junto con las funciones $+$ y $+$ ' como un sistema dinámico. Como tema de investigación futuro, podría ser interesante estudiar dicho conjunto, así como las órbitas de los elementos para conocer el comportamiento del mismo en busca de resultados que puedan ser musical o matemáticamente interesantes.

Con todo lo anterior, tenemos una estructura y algunas operaciones para analizar las progresiones de triadas diatónicas. Pasemos ahora a consideraciones un poco más musicales. La importancia del intervalo de una quinta es tanta en la música tonal, que no sólo las escalas mayor y menor se construyen con él; nos dan la estructura básica para la construcción de las triadas y como veremos a continuación se utilizan también para las progresiones armónicas. Esta importancia, como vimos en los antecedentes, radica en que es el intervalo más consonante después del unísono y la octava.

$a = 0 + a$	$a < a + 1$	$a < a + 5$	$a < a + 3$	$a > a + 2$	$a > a + 4$	$a > a + 6$
$a = 0 + 'a$	$a > a + '1$	$a > a + '5$	$a > a + '3$	$a < a + '2$	$a < a + '4$	$a < a + '6$

Tab. VIII: Propiedades de orden de las operaciones $+$, $+$ ' sobre $\mathbb{T}$.

Al tener una triada y una sucesión de bajos podemos generar progresiones diatónicas de triadas que respeten el movimiento a pasos de las voces, con las funciones $+$ y $+$ '. Sean $T \in \mathbb{T}$ y $\{B_i\}_{i=1}^m$ una sucesión de bajos; las acciones necesarias para generar una progresión de triadas diatónicas que tengan una conducción de voces con movimientos principalmente a pasos se obtiene realizando las operaciones, $\{a_i = B_{i+1} - B_i\}_{i=1}^{m-1}$. Utilizando $+$, o $+$ ' de acuerdo a lo que se desee: movimiento mínimo, o el segundo más cercano.

Aquí es un buen punto para mencionar que en la música tonal, no todas las notas tienen la misma importancia. De acuerdo al grado que pertenece con respecto a la escala, es la función e importancia de la nota. Como es posible imaginar, la nota principal, es decir la tonalidad alrededor de la que gira una pieza tonal, es la nota base de la escala. Siguiendo con la jerarquía, la segunda nota en importancia es la que se encuentre a una quinta de distancia. En *do* mayor, por ejemplo, las notas más importantes son *do*, que es la base de la escala y *sol* que es la nota que forma un intervalo de quinta con la base. Se puede decir que gran parte de la música tonal consiste en un juego de progresiones de acordes que salen del primer grado de la escala I , llegan al quinto V , y buscan la manera de regresar a I . Esta secuencia básica con todas sus elaboraciones, puede generar una gran riqueza musical. A los demás grados de la escala también se les suele asignar funciones, sin embargo de momento no es nuestra intención entrar en tales detalles. Para tal discusión ver el libro [11]. Basta con que se tenga claro la importancia de la progresión $I \rightarrow V \rightarrow I$ y sus elaboraciones. Parte del trabajo de un compositor consiste en escoger la forma en que los acordes interactúan entre si, así como los adornos que pueda agregar a la estructura básica de modo que pueda expresar lo que desea.

5.4. Otras escalas

Hasta este momento hemos estado trabajando exclusivamente con escalas mayores, sin embargo todo lo que hemos trabajado se puede aplicar para otras escalas similares, de las cuales la más importante para nosotros es la que se conoce como menor. El par de escalas “mayor” y “menor” constituyen una parte fundamental de la música tonal. Recordemos sus estructuras mediante la tabla IX.

Existe una relación muy especial entre las escalas mayor y menor. Si tenemos la escala *do* mayor $\mathbb{Z}_D$, podemos obtener una estructura de escala menor simplemente cambiando la nota base. Recordemos que la base de la escala $\mathbb{Z}_D$ está dada por $M = D / \sim_{12}$, donde $D = f^{-1}(\mathbb{Z}_D)$. Como la nota base es cero, entonces $b = 0$, es decir $M = f^{-1}(\mathbb{Z}_D) / \sim_{12}$. Si cambiamos b por alguna otra nota de la escala, por ejemplo para $b = 9$, deseamos encontrar el conjunto $(D - 9) / \sim_{12}$, que es:

$$\begin{aligned} D &= \{\dots, 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, \dots\}, \\ D - 9 &= \{\dots, -9, -7, -5, -4, -2, 0, 2, \dots\}, \\ (D - 9) / \sim_{12} &= \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}. \end{aligned}$$

Esta es precisamente la estructura de una escala menor, también conocida como menor natural.

Para comprender mejor esto, puede ayudar imaginar un teclado. La escala *do* mayor corresponde a las teclas blancas del mismo, sin embargo las mismas notas

Escala	Estructura
Escala mayor	$M = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$
Escala menor	$m = \{0, 2, 3, 5, 7, 8, 10\}$

Tab. IX: Escalas mayor y menor.

también corresponden a la escala *la* menor. Esto es lo que se trata de explicar con la traslación $(D-9)/\sim_{12}$. Estas dos escalas están íntimamente relacionadas, se dice que ambas son *enarmónicas* por que comparten las mismas notas pero tienen diferentes notas base y estructuras.

Más aún, si intentamos lo anterior con otros valores de $b \in M$, obtenemos otras escalas que también son de interés musical, pero no de la música tonal, sino de música modal. A nosotros nos basta de momento conocer la relación entre la escala mayor y menor. Todos los resultados que hemos obtenido para las escalas mayores son ciertos para cualquier escala que sea una traslación modulo doce, en particular para las que tengan estructura menor natural.

6. ESPACIO DE PROGRESIONES DE ACORDES Y CONTRAPUNTOS

En esta sección deseamos caracterizar las sucesiones de acordes diatónicas dadas por la operación $\odot$ de la sección anterior. Requerimos una triada base así como los elementos de $\mathbb{Z}_7$ que semiactúan sobre $\mathbb{T}$. Dada una triada inicial $t \in \mathbb{T}$ podemos caracterizar cualquier progresión de n -acordes diatónicos con un elemento de $\mathbb{Z}_7^n$ donde cada entrada es el grado del acorde y la conducción de voces viene dada por movimiento mínimo, es decir a los acordes más cercanos al acorde anterior, que como vimos vienen dados por las operaciones $+$ y $+'$ de la sección pasada.

Definición 6.0.1. *Dada una triada base $t \in \mathbb{T}$, el conjunto de las progresiones diatónicas de n -acordes con movimiento a pasos, está dado por los elementos de $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_7^n$, donde la sucesión explícita es $\{S_i\}_{i=1}^n$:*

$$\begin{aligned} S_1 &= t, \\ S_{i+1} &= a_i + S_i. \end{aligned}$$

De esta forma, dada una triada inicial, identificamos de manera única las progresiones con un punto en $\mathbb{Z}_7^n$. Sintetizamos la información de modo que nos basta saber el inicio y las instrucciones para que las voces se adapten y obtengamos una progre-

sión diatónica adecuada. Cabe mencionar que estamos relacionando el conjunto de las progresiones de triadas diatónicas, con un módulo, *esta relación con dicha estructura algebraica podría ser un tema a investigar en trabajos futuros. Quizá podamos encontrar algunas propiedades contrapuntísticas que se reflejen en la estructura de módulo.*

Por otra parte, una forma distinta de visualizar estas sucesiones consiste en un conjunto de cuatro voces: Soprano, Alto, Tenor y Bajo que al cantar simultáneamente producen armonías. Ésta visión da prioridad al movimiento melódico, dejando, un poco, a un lado las armonías que se forman. El problema consiste en encontrar conjuntos de cuatro voces que formen acordes consonantes, mientras se preserva una melodía vocal¹, principalmente a pasos. Este sería un enfoque contrapuntístico, con énfasis en las voces, a diferencia del estudio que hemos estado trabajando, que se enfoca principalmente en los acordes. Nosotros hemos tomado un camino más enfocado en armonía, encontramos todas las posibles progresiones de triadas completas que satisfacen los movimientos melódicos básicos y las voces individuales aparecen de forma natural.

El contrapunto con cuatro voces viene dado cuando simultáneamente aparece la sucesión de triadas $\{T_i\}_{i=1}^n$ y el bajo de la sucesión $\{B_i\}_{i=1}^n$. Es decir, al expresar la música generada por la sucesión de triadas, se anexa el bajo una o dos octavas debajo, de acuerdo a los gustos del compositor.

¹ Melodía vocal se refiere a una que no tiene muchos saltos, en cierta forma es una melodía diseñada para ser cantada por la voz humana.

6.1. La gráfica completa K_7 y su ayuda en la visualización de las progresiones

Al tener una triada inicial $T \in \mathbb{T}$, podemos explorar el conjunto de todas las triadas a las que podemos llegar por medio de las operaciones $+$, y $+$ ' , definidas con $\odot$. Recordemos que de manera general, lo que se hace es operar sobre el bajo de la triada y la conducción de voces está dada por las operaciones mencionadas. Una forma útil de explorar dichas progresiones, es por medio de una gráfica, es decir un conjunto de puntos, llamados vértices, y líneas, llamadas aristas, que los unen. En nuestro caso tenemos siete puntos, correspondientes a las clases de las notas en la escala mayor. Como podemos pasar operacionalmente entre clases de triadas mediante las operaciones $+$ y $+$ ' , vemos que todas las notas están relacionadas, por lo que las podemos unir con una línea. Con esto obtenemos la gráfica completa² K_7 , que se muestra en la figura 6.1.

Esta visualización puede ser de mucha utilidad. Primero notemos que la gráfica está expuesta de modo que los aristas representan las operaciones $+$ o $+$ ' a una cierta triada $T \in \mathbb{T}$. Las líneas que conectan a las notas en el círculo, de color café oscuro, corresponden a movimientos del bajo a pasos, es decir intervalos de segundas ($1+a$, $6+a$), los semicírculos exteriores, de color rojo, son intervalos de terceras ($2+a$, $5+a$), mientras que las líneas interiores al círculo, de color amarillo, son intervalos de quintas ($3+a$, $4+a$). Ahora recordemos de las secciones anteriores que las operaciones $+$ y $+$ ' tienen ciertas propiedades con respecto al ordenamiento de las triadas, como se muestra en la tabla VIII.

Si utilizamos la operación $+$, operar con 1 nos da un desplazamiento de triadas

² Una gráfica completa es aquella donde todos sus vértices están conectados por un arista.

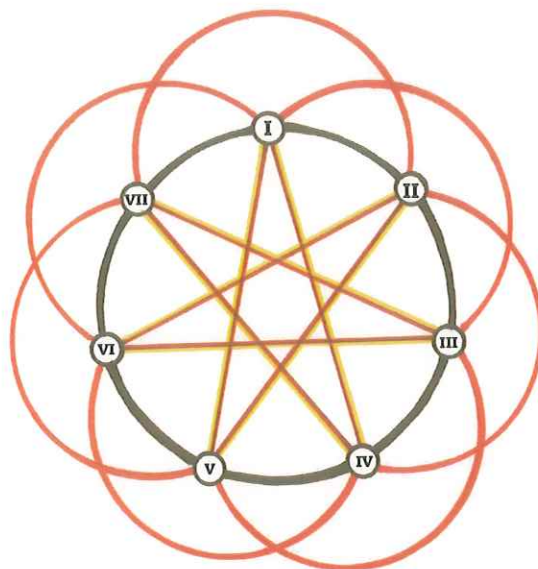


Fig. 6.1: Gráfica completa K_7 , asociada a los grados de la escala mayor.

igual a tres, y una triada mayor a la anterior. Es decir para $a \in \mathbb{T}$ tenemos $d(a, 1 + a) = 3$ y $a < 1 + a$. De operar con 6 nos resulta $d(a, 6 + a) = 3$ y $a > 6 + a$. Estas son las líneas del círculo. Ahora las curvas exteriores son operaciones de 2 y 5, de las que nos resulta $d(a, 2 + a) = d(a, 5 + a) = 1$ así como $a > 2 + a$ y $a < 5 + a$. Por último las líneas interiores corresponden a 3 y 4 de las cuales obtenemos $d(a, 3 + a) = d(a, 4 + a) = 2$ así como $a < 3 + a$ y $a > 4 + a$. En cambio si utilizamos la operación $+$ obtenemos $d(a, 1 + a) = d(a, 6 + a) = 4$, $d(a, 2 + a) = d(a, 5 + a) = 6$ y $d(a, 3 + a) = d(a, 4 + a) = 5$; así como las desigualdades anteriores pero con sentido opuesto.

La gráfica es útil para visualizar las operaciones con intervalos constantes, y con ayuda de la información anterior también a conducir la sucesión, para que se ajuste a lo que el compositor desee. Al elegir la dirección del giro, se mantendrá el sentido creciente o decreciente. Por ejemplo, se tiene una triada $a \in \mathbb{T}$ y se quiere una sucesión

con acordes crecientes, se puede ver que no debe operarse con $2 + a$, $4 + a$ o $4 + a$. En cambio si el compositor desea una progresión a intervalos constates de segundas, pero con cambio de direcciones, puede operar con:

$$3 + 3 +' 3 + 3 +' a.$$

Ya que las operaciones $+$ y $+'$ tienen sentido de giro opuesto y desplazamiento distinto, el compositor puede experimentar con ellos para obtener una variedad de progresiones musicales. Esto se muestra en la sección 8.

6.2. Contrapuntos

El contrapunto por su parte tiene muchas reglas y recomendaciones que lo definen y enriquecen, aquí mostramos sólo algunas para complementar la visión de las progresiones que hemos venido trabajando. Consiste en un conjunto de melodías simultaneas, que son consonantes entre sí la mayor parte del tiempo. Suele haber una melodía principal llamada *cantus* y otras secundarias. Principalmente consta de movimiento a pasos, sin embargo puede haber pequeños saltos³, siempre y cuando no predominen. Para ver una descripción detallada de las reglas del contrapunto ver [4]. De modo que un *cantus* es una sucesión de notas $\{a_i\}_{i=1}^n$ con $a_i \in \mathbb{Z}_E$ para toda $1 \leq i \leq n$.

Al introducir otras melodías hay muchas cosas que considerar, sin embargo la más importante es que las voces sean consonantes entre sí. Es decir que para un par de voces $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$, el intervalo $I(a_i, b_i)$ es consonante⁴. Para tres voces, tenemos una

³ Intervalos melódicos mayores a 1.

⁴ Ver tabla II en la sección de Intervalos en definiciones musicales.

situación más complicada ya que requerimos que se formen acordes consonantes⁵.

Estos se muestran en la tabla I.

Tipo de acorde	Estructura
Mayor	$(0, 3M, P5), (0, 4, 7)$.
Menor	$(0, 3m, P5), (0, 3, 7)$.
Mayor primera inversión	$(0, 3m, 6m), (0, 3, 8)$.
Menor primera inversión	$(0, 3M, 6M), (0, 4, 9)$.
Disminuido primera inversión	$(0, 3m, 6M), (0, 3, 9)$.

Tab. I: (♯) Triadas consonantes.

Al referirnos a un acorde mayor o menor en primera o segunda inversión nos referimos a que es una permutación de las partes de la triada del original, sin embargo siguen siendo acordes mayor o menor. Para una explicación más detallada ver [4].

Una restricción muy importante que se utiliza en las progresiones de acordes, es evitar lo que se conoce como *quintas paralelas*. Esto consiste en evitar que los grados de las notas de un par de voces de la triada formen entre ellos un intervalo de una quinta en dos pasos consecutivos de la sucesión. Por ejemplo, si tenemos la progresión $(0, 2, 4) \rightarrow (1, 3, 5)$, vemos que en las dos triadas, los grados de las voces externas: tenor y soprano forman un intervalo de quinta. Esta restricción suele aplicarse enfáticamente, una justificación consiste en que el intervalo de una quinta es el más fuerte, y da la impresión de que la melodía se detiene, obstruyendo el flujo melódico⁶.

Otro recurso utilizado por los compositores consiste en utilizar acordes incompletos. Para entender este concepto recordemos que estamos trabajando con triadas,

⁵ Son acordes donde los intervalos entre sus notas son consonantes. Esán formados por intervalos de terceras, quintas y sextas. Ver libro [4].

⁶ Ver el primer capítulo del libro *Counterpoint in Composition* de F. Salzer y C. Schachter, [4]

que consisten de tres notas, y un bajo que puede escribirse una octava debajo de la nota más grave de la triada. El bajo contiene la nota fundamental de la misma, que se repite en alguna de las voces superiores. Sin embargo si en las voces de la triada tenemos que dos notas pertenecen a la misma clase de notas, por ejemplo el acorde $(0,2,7)$, decimos que es un acorde incompleto. Esto nos permite tener más variedad en las herramientas de composición, sin embargo de momento no nos interesan. Ahora nos enfocamos en progresiones de triadas diatónicas completas.

Si tenemos un *cantus* $\{a_n\}$, podemos definir otras secuencias de números que nos sean de utilidad como la de *intervalos melódicos* y la de *intervalos cromáticos*

$$\{M_i\} = \{a_{i+1} - a_i\},$$

$$\{I_i\} = \{f^{-1}(a_{i+1}) - f^{-1}(a_i)\}.$$

Estas secuencias nos indican la distancia en semitonos, o en grados de la escala, y son de utilidad ya que nos muestran una forma explícita de trabajar con los *cantus* y las sucesiones de notas. La primera nos ofrece una forma de clasificar las voces. Por ejemplo, cuando decimos que una voz se mueve principalmente a pasos, nos estamos refiriendo a que consiste de intervalos melódicos principalmente de 1 y -1 . Esto queda más claro con la siguiente definición que involucra la sucesión $\{M_i\}$:

Definición 6.2.1. Si tenemos una voz con n intervalos melódicos $\{M_i\}$, definimos su *desplazamiento* como $D = \sum_{i=1}^n |M_i|$.

Esta definición permite clasificar las voces por desplazamiento, vemos que mientras más grande sea el valor $|D - n|$ más tiende la voz a tener saltos. En cambio si $D = n$ tenemos exclusivamente movimiento a pasos. Con esto en mente decimos que

dos voces P_1, P_2 están relacionadas entre si cuando $D_1 = D_2$, y definimos $P_1 < P_2$ si y sólo si $D_1 < D_2$. Con esto particionamos el conjunto de todas las voces y podemos establecer un preorden entre los elementos de la forma $[P_1] \leq [P_2]$ si $P_1 \leq P_2$.

Ejemplo 6.2.2. Si P es una voz con $n = 5$ y $D_P = 8$, algunas posibles distribuciones de intervalos son:

$$1, -1, -1, -2, -3;$$

$$1, 3, -2, -1, -1;$$

pero la distribución 4, 4 no es posible por que se requiere tener cinco notas.

Cabe notar también que las clases de equivalencia definidas por desplazamiento son invariantes ante trasposición y reflexión, ya que $\{M_i\}$ pertenece a la misma clase que $\{-M_i\}$ y cualquier permutación $\{M_{\sigma(i)}\}$ también. Esto es de interés musical por que se suelen usar estas formas para variar una pieza.

Con esto terminamos la breve exposición de algunas ideas contrapuntísticas, pasamos ahora a las aplicaciones de los resultados de este trabajo, que son las progresiones de acordes, y líneas melódicas generadas con elementos del espacio $(\mathbb{T}, Est)$ y las operaciones $+$, $+$ ' y $\odot$.

Parte III

APLICACIONES DEL MODELO MATEMÁTICO

7. GENERADOR DE PROGRESIONES DE TRIADAS DIATÓNICAS

A lo largo del trabajo, hemos desarrollado una teoría básica de los fundamentos de la música tonal, como las escalas, acordes, triadas y progresiones de ellas. Sabemos que si tenemos una triada inicial y una sucesión de operaciones $\odot$, $+$, y $+$ ', podemos generar dichas sucesiones, pero también hemos visto que los cálculos requeridos suelen ser largos y tediosos. Es un buen momento para recurrir a la ayuda de los sistemas de cómputo, que nos permiten realizar cálculos de manera automatizada, si le damos las instrucciones correctas. La idea de este programa es que el usuario pueda experimentar de forma sencilla con las operaciones entre triadas, que se definieron en esta tesis. En nuestro caso, el trabajo consiste en escribir las definiciones que hemos venido trabajando en un lenguaje que una computadora pueda entender. Para este trabajo hemos escogido el lenguaje de programación "*Java*" para la parte del cálculo matemático; y para la parte musical y de sonido el lenguaje "*Lilypond*". Ambos tienen la ventaja de ser compatibles entre diferentes sistemas operativos.

El programa final lleva el nombre "*TriadasDiatonicas101.jar*", consiste en una aplicación que toma del usuario una triada inicial, y una secuencia de operaciones $+$ y $+$ ', dando como salida tres archivos en formato lilypond, que una vez procesados generan las partituras y el sonido que resulte de los mismos.

7.1. Instrucciones de uso

Para el funcionamiento correcto de la aplicación es necesario contar con los siguientes paquetes instalados:

1. El ambiente Java JRE 6.0.

(<https://java.sun.com/j2se/1.4.2/download.html>)

2. El compilador de música Lilypond 2.10.

(<http://lilypond.org/web/>)

Ambos paquetes se incluyen en el disco anexo a esta tesis, o pueden ser obtenidos en las páginas de internet correspondientes.

Pasos para obtener una sucesión de triadas diatónicas:

1. Ejecutar la aplicación *TriadasDiatonicas101.jar*.
2. Aparece una ventana de bienvenida.
3. Se debe ingresar la triada inicial $T \in \mathbb{T}$ de la sucesión, comenzando por el valor de la voz del “tenor”. Se debe ingresar un elemento de la escala *do* mayor $\mathbb{Z}_D$, donde¹ $0 \rightsquigarrow do$ y los demás valores corresponden a notas en la escala $\mathbb{Z}_D$.
4. Se ingresa el valor de la voz “alto”.
5. Por último se ingresa el valor de la voz “soprano”.
6. Si los valores no corresponden a los de una triada, o hay cruce de voces, se genera una advertencia y la aplicación es terminada.

¹ Por comodidad para el usuario, los números n que se ingresan son traspuestos tres octavas, $n + 3 \times 7$, de modo que 0 corresponde a la nota *do* central en $\mathbb{Z}_D$, para evitar ingresar números como 21 o 28.

7. Si los valores son correctos, se debe ingresar el número de operaciones que se desean realizar sobre la triada.
8. Se introduce el primer valor a de las operaciones a realizar, sobre T . Si se introduce un valor $a > 0$, se ejecuta la operación $a + T$. Si $a < 0$, se ejecuta la operación $a + 'T$.
9. Se introduce el segundo valor b de manera análoga al paso anterior. Esto se realiza el número de veces que especificó el usuario.
10. Si todos los valores se ingresaron correctamente, se obtienen tres archivos en formato lilypond con los resultados de las operaciones, que se encuentran en la misma carpeta que la aplicación *TriadasDiatonicas101.jar*. Cada archivo tiene la fecha de creación en el nombre, así como las palabras: progresión, preludio y sonata; estos se explican a continuación:
 - a) Progresión: Este archivo genera la progresión de acordes de acuerdo a la teoría desarrollada. Genera las triadas en la clave de *sol*, así como el bajo de las mismas en la clave de *fa*.
 - b) Preludio: Genera un archivo similar al anterior, pero los acordes son arpegiados de forma ascendente, es decir adornados de modo que se toca una nota a la vez comenzando de la más grave, hasta la más aguda, en lugar de todas las notas simultáneas.
 - c) Sonata: Una variación del archivo anterior, donde la triada se expresa como un *bajo de Alberti*, que es la división del acorde en forma estilizada.
11. Para compilar los archivos lilypond, basta ejecutarlos y seguir las instrucciones.

Para mayor información ver la documentación anexa en el disco compacto.

12. Por ultimo se obtienen las partituras así como los archivos de sonido "MIDI" por cada partitura, que es el resultado que buscábamos. Este es el fin de la aplicación.

El código de la aplicación corresponde a las funciones y definiciones de la teoría de este trabajo. Como estamos utilizando un lenguaje orientado objetos, hemos dividido las funciones en tres clases:

1. La clase *Escala.java* consiste en las funciones requeridas para pasar del conjunto de notas E , al conjunto $\mathbb{Z}_E$, aquí se implementa la función $f : E \rightarrow \mathbb{Z}_E$.
2. La clase *Triada.java* es quizá la más extensa, ya que en ella se implementan todas las funciones de las triadas en $\mathbb{T}$. Entre ellas destacan: la función distancia, la función *Est* que nos permite identificar las partes de la misma (fundamental, tercera y quinta), las operaciones $\odot$, $+$ y $+$ '; así como las funciones que permiten generar progresiones de triadas de acuerdo a las mismas. Es en esta clase donde se generan las progresiones, preludios y sonatas.
3. La clase *Lily.java* consiste de las funciones de formato. Estas son las que traducen los resultados numéricos obtenidos por las clases *escala* y *triada*, al lenguaje *lilypond*, requerido para obtener las partituras y archivos de sonido MIDI.

Por último está el archivo principal del programa "TriadasDiatonicas101.java" que es donde se organiza la interface gráfica que utilizará el usuario para ingresar las operaciones. El código de cada una de estas clases, se anexa en el apéndice, que puede consultarse para mayor detalle de las funciones.

8. EJEMPLOS

Hemos encontrado dos estructuras que son de interés: el espacio de triadas T y las progresiones diatónicas a un acorde base dado, que como vimos los podemos caracterizar como puntos en $\mathbb{Z}^n$. En esta sección mostramos ejemplos de estas progresiones de acordes; primero analizamos progresiones correspondientes a textos introductorios a la armonía; después analizaremos algunos fragmentos de obras de J.S. Bach.

Comencemos por introducir ejemplos de progresiones del libro [14], *Harmony*, de Walter Pistón. Al introducir las sucesiones de triadas diatónicas menciona varios ejemplos que pueden ser modelados con las operaciones que hemos definido. Consisten en progresiones donde se exponen las triadas en las voces superiores, mientras que a la voz inferior le corresponde el bajo de la sucesión, es decir las clases de los acordes. A continuación mostramos dos de ellos:

- En la página 19 encontramos la progresión de triadas diatónicas que se muestra en la figura 8.1. Se encuentra escrito en la escala *do* mayor; comienza con la triada $a = (3, 5, 8)$ y consiste de las operaciones:

$$3 + 3 + ' 3 + ' 3 + 3 + ' a.$$



Fig. 8.1: (♩) Ejemplo 1.

- En la página 36 tenemos la progresión de acordes¹ que se muestra en la figura 8.2. En ella, la triada inicial es $a = (2, 4, 7)$, mientras que las operaciones que se realizan son:

$$1 + 3 + '5 + 5 + 3 + 5 + 1 + '5 + 5 + a.$$



Fig. 8.2: (♩) Ejemplo 2.

Pasemos ahora a analizar algunos fragmentos de piezas de Bach. Comencemos nuestro análisis con un fragmento de un pequeño preludio de Bach (BWV 924). El fragmento se muestra en la figura 8.3. Consiste de elaboraciones rítmicas y armónicas un poco más complejas, sin embargo puede apreciarse que está basada en una progresión de triadas diatónicas sencillas, adornadas. La reducción de una pieza consiste en tomar lo más esencial de ella para analizar su estructura, en nuestro caso extraemos

¹ La versión de libro se encuentra en *fa* mayor, sin embargo por simplicidad en este trabajo se traspuso a *do* mayor.

una progresión de triadas diatónicas², obteniendo como resultado lo que se muestra en la figura 8.4. Esta progresión trabaja en una escala en *do* mayor, donde la triada inicial es $a = (4, 7, 9)$ y las operaciones:

$$4 + ' 4 + 4 + ' 4 + a.$$

Notemos que la forma en que se encuentran expuestos los acordes en el preludio dan la impresión de que sólo hay dos voces, sin embargo para fines armónicos podemos agrupar las notas de modo que en realidad sea un acorde con cuatro voces, simplemente no todas las notas suenan simultáneamente. A esta exposición de acordes se le conoce como arpeggio.

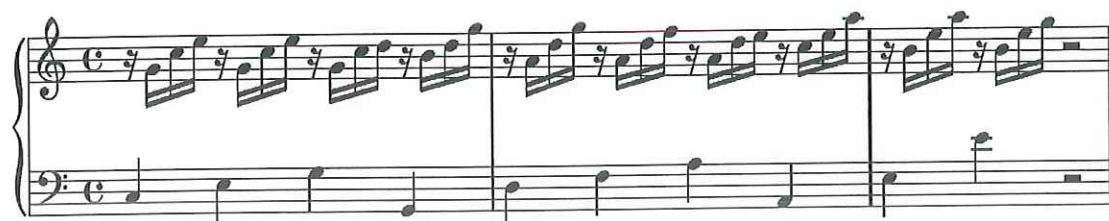


Fig. 8.3: (♩) Preludio de Bach.

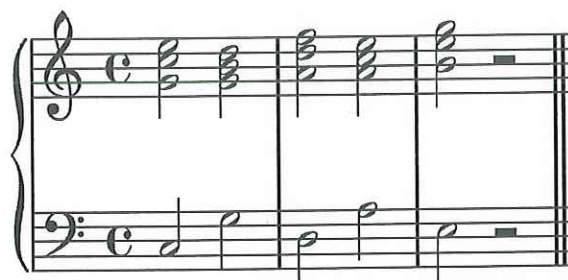


Fig. 8.4: (♩) Reducción del preludio.

² Para una exposición más detallada de reducción de piezas ver libro [2] E. Aldwell, C. Schachter, *Harmony & Voice Leading* pag 271

Podemos proceder de manera inversa, es decir generar progresiones de acordes y expresarlas en forma de pequeños preludios como el de Bach. Sin embargo como los compositores no utilizan únicamente progresiones de triadas diatónicas, sino que las adornan rítmica y armónicamente, sus composiciones suelen ser mucho más complicados que nuestros resultados, pero estos pueden ser de utilidad pedagógica para empezar a componer pequeñas piezas. A continuación mostramos ejemplos de dichas piezas:

- Comencemos en la triada $a = (4, 7, 9)$ en *do* mayor al igual que el pequeño preludio de Bach. Ahora generemos una progresión de acordes que pase por las clases:

$$I, III, II, IV, V, I, VI, III, IV, V, I,$$

que en los términos que hemos venido manejando son

$$[0], [2], [1], [3], [4], [0], [5], [2], [3], [4], [0],$$

como clases de triadas diatónicas. Si utilizamos ahora la técnica de conducción de voces que hemos desarrollado, definida con la operación $+$, debemos realizar las siguientes operaciones:

$$3 + 1 + 1 + 4 + 5 + 3 + 1 + 2 + 6 + 2 + a.$$

Para llegar de $[0]$ a $[2]$ debemos realizar $2 + a$, después para llegar de $[2]$ a $[1]$ al resultado anterior le sumamos $6 + 2 + a$ y así consecutivamente; obteniendo

la progresión que se muestra en la figura 8.5. Adornándola como el preludio de Bach obtenemos algo más interesante, que vemos en la figura 8.6; y podemos realizar muchísimos otros ejemplos como el de la figura 8.7. Con esto mostramos como podemos comenzar de algo muy sencillo y crear estructuras que musicalmente pueden sonar más interesantes.

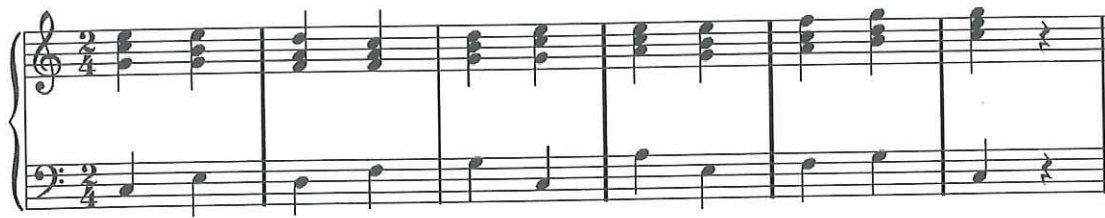


Fig. 8.5: (♩) Progresión ejemplo.



Fig. 8.6: (♩) Progresión adornada.



Fig. 8.7: (♩) Progresión adornada 2.

- Combinando las operaciones + y +' podemos realizar conducciones de voces más elaboradas. Por ejemplo en el anterior cambiamos la operación de la triada

mas cercana + en los primeros cinco términos, por el de la segunda triada más cercana +':

$$3 + '1 + '1 + '4 + '5 + '3 + 1 + 2 + 6 + 2 + a,$$

y obtenemos una progresión similar a la anterior pero con dirección distinta.³

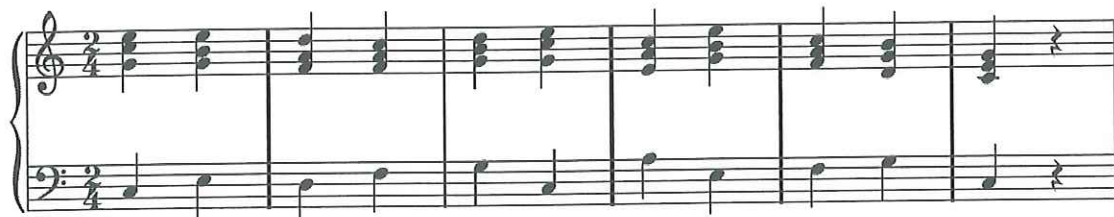


Fig. 8.8: (♩) Progresión ejemplo *b*.



Fig. 8.9: (♩) Progresión *b* adorno.



Fig. 8.10: (♩) Progresión *b* adorno 2.

Las progresiones diatónicas que se generan con esta conducción de voces, corresponden a las que suelen encontrarse en las primeras secciones de libros introductorios

³ Esto es por las propiedades de orden que tienen las mismas que se mostraron en la tabla VIII.

a la armonía como [3], [6], [7]. Esto debido a que en este trabajo no se incluyen los acordes incompletos y acordes séptimos, que enriquecen mucho el vocabulario musical; pero complican la teoría que intentamos desarrollar, eso es material para otro trabajo.

Otra fuente de ejemplos de progresiones armónicas son los corales de Bach. Estos consisten en pequeñas piezas escritas generalmente para cuatro voces y se caracterizan por tener una densidad armónica muy alta, en cada pulso se cambia la armonía [21].

Corales de Bach

Tienen una gran riqueza y complejidad armónica por lo que van más allá de simples progresiones diatónicas, sin embargo pueden encontrarse pequeños pasajes donde podamos aplicar lo desarrollado en este trabajo para ser analizados.

- Tomemos por ejemplo el segundo compás del coral BWV 7.7 (figura 8.11). Este se encuentra en la escala *si* menor; comenzamos con la triada $a = (0, 3, 5)$ y realizamos las operaciones:

$$4 + 3 + 6 + 'a.$$

- En el coral BWV III.6 (figura 8.12), en el tercer compás tenemos una progresión muy sencilla en la escala *do* mayor, comenzando en la triada $a = (2, 4, 7)$ se realizan las operaciones $3 + 4 + a$.
- En el coral BWV 12.7 que tenemos en la figura 8.13 tenemos un ejemplo de una progresión con acordes incompletos en las voces superiores como el que



Fig. 8.11: (♩) Fragmento del Coral BWV 7.7.



Fig. 8.12: (♩) Fragmento del Coral BWV III.6.

aparece en el segundo tiempo del segundo compás, además el bajo no indica el grado de la escala de la triada.

Es limitado el uso que podemos dar a nuestro modelo en los corales de Bach, debido a su complejidad. Sin embargo vemos que hay fragmentos que podemos modelar correctamente y esto nos da una vision, o idea de lo que sucede en ellos. Otra cosa por considerarse más adelante es la introducción del bajo melódico, éste difiere con el nuestro, en que la sucesión asociada corresponde a una melodía sin muchos saltos como lo es típicamente un *cantus*.



Fig. 8.13: (♫) Fragmento del coral BWV 12.7.

9. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se manejó la idea de visualizar las notas musicales como puntos en el conjunto $\mathbb{Z}_{nm}$. Una vez expuesta toda la teoría desarrollada, podemos resumir los resultados más importantes de esta tesis como:

- Dotamos de una estructura de grupo y espacio métrico a las escalas musicales de la forma $\mathbb{Z}_E$.
- Definimos el conjunto de triadas diatónicas a una escala, así como la función que nos permite identificar las partes de la misma (T, Est) . Dando a este conjunto una estructura de espacio métrico con la distancia melódica, así como de conjunto parcialmente ordenado con el orden lexicográfico.
- Una vez encontrada la partición de clases de triadas dada por los grados de la escala $T = \bigcup_{i=0}^{n-1} [[i]]$, definimos las operaciones $\odot$, $+$ y $+'$; que nos permiten estudiar la interrelación entre dichas clases. Es decir, encontramos una forma operacional de pasar entre clases de triadas con desplazamiento mínimo.
- Describimos las progresiones de n triadas como puntos en $\mathbb{Z}^n$, de modo que dada una triada inicial y un punto en $\mathbb{Z}^n$ se pueda desarrollar la sucesión completa. Así como implementamos el programa “*TriadasDiatonicas101.java*”, que permite al usuario experimentar con los espacios aquí definidos.

Con estas operaciones y funciones definidas sobre el conjunto de triadas $\mathbb{T}$, obtenemos la estructura geométrica que buscábamos. Estos resultados justifican su importancia con lo obtenido al analizar piezas musicales a la luz de dicha teoría. De acuerdo a las piezas estudiadas, vemos que se describe adecuadamente un nivel introductorio de la armonía tonal. Musicalmente se satisfacen dos de las condiciones más importantes de la conducción de voces: el movimiento de voces principalmente a pasos en la escala, así como retener notas comunes entre triadas consecutivas. Sin embargo, aún hay mucho trabajo por realizar para describir situaciones armónicas mucho más ricas y complejas.

Desde el punto de vista musical, es necesario introducir el concepto de acordes séptimos y resolución de disonancias, así como el de acordes incompletos en una sucesión. También es necesario incluir la jerarquización de los grados de la escala en una progresión dada y el concepto de *modulación*, que consiste en aprovechar las escalas enarmónicas para simular el cambio de tonalidad en una pieza.

En este trabajo, se han sentado la bases para realizar todo lo anterior. Para las progresiones de acordes séptimos, se pueden utilizar una generalización a cuatro dimensiones de la operación $\odot$. Mientras que la jerarquización de los grados se puede aplicar dando peso a los aristas de la gráfica de progresiones (fig 6.1). La modulación puede desarrollarse utilizando la trasposición de escalas junto a la jerarquización de las notas. En general, hay mucho trabajo por hacer.

Desde el punto de vista matemático, es de gran interés el hecho de que el conjunto de progresiones de triadas diatónicas se comporta como un sistema dinámico. Es necesario profundizar en las funciones $\odot$, $+$ y $+'$ para encontrar alguna acción de grupo que nos permita conocer mejor el conjunto $\mathbb{T}$. En particular, es de gran interés

caracterizar con claridad el conjunto A , que satisface $\mathbb{T} \odot A \subset \mathbb{T}$, donde $\odot : \mathbb{T} \times (A \subseteq \mathbb{Z}^3) \rightarrow \mathbb{T}$. Es decir, los puntos $(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{Z}^3$ que satisfacen $(a_1, a_2, a_3) \odot (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{T}$ para cada triada $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{T}$. Por otra parte, el conjunto de progresiones, visto como $\mathbb{Z}_7^n$ puede ser estudiado como un módulo, y quizá se encuentre información de interés musical al trabajarlo de dicha forma.

Es interesante notar que el análisis musical con términos matemáticos puede ser complicado y la notación que requerimos puede ser muy oscura para alguien no familiarizado, sin embargo es la esperanza que el exponer los conceptos musicales con una notación matemática geométrica, pueda servir para que alguna persona familiarizada con ella pueda introducirse a la teoría musical. Es nuestra intención seguir desarrollando este modelo, para incluir más aspectos de la música en nuestra teoría. Como trabajo futuro se pretende llegar a una estructura robusta que permita describir operacionalmente aspectos diatónicos y cromáticos de la música, para eventualmente analizar y generar composiciones musicales complejas.

APÉNDICE

A. CÓDIGO DEL GENERADOR DE TRIADAS DIATÓNICAS

A.1. Clase *Escala*

```
/*
 * Escala.java
 */

package TesisMusica;

public class Escala {

    public Escala() {
    }

    public Escala(int nota, char tip) {
        tipo = tip;
        base = nota;
        this.Generar(base, tipo);
    }

    /**
     * Corresponde a la funcion ''f^{-1}'' de la seccion
     * de matematicas que nos
     * lleva de la escala a Z_E
     * @param indice
     * @return
     */
    public int getNota(int indice){
        int NOTA;
        if(indice>=notas.length){
            NOTA = notas[notas.length-1];
        }else{
            NOTA = notas[indice];
        }
    }
}
```

```
    }
    return NOTA;
}

/**
 * Corresponde a la funcion ''f'' de la seccion de matematicas
 *que nos lleva de la escala a Z_E
 * @param nota
 * @return
 */
public int getIndice(int nota){
    int reg = 0;
    for (int i=0; i<notas.length; i++){
        if (nota == notas[i]){
            reg = i;
            return reg;
        }
    }
    // Cuidado si la nota no esta en la escala
    System.out.println("ERROR, la nota no esta en la escala");
    return 83;
}

/**
 * Genera una triada diatonica con la nota fundamental indicada
 * @param nota
 * @return
 */
public int[] triada(int nota){
    int n1 = this.getIndice(nota);
    int[] acorde = {notas[n1],notas[n1+2],notas[n1+4]};
    return acorde;
}

/**
 * Genera un acorde septimo diatonico con la nota fundamental
 *indicada
 * @param nota
 * @return
 */
```

```
public int[] septima(int nota){
    int n1 = this.getIndice(nota);
int[] acorde = {notas[n1],notas[n1+2],notas[n1+4],notas[n1+6]};
    return acorde;
}
```

```
/**
```

```
 * Genera la escala con la nota base y el tipo
```

```
 * @param nota
```

```
 * @param tipo
```

```
 * @return
```

```
 */
```

```
private int[] Generar(int nota, char tipo){
```

```
    int[] Mayor =      {2,2,1,2,2,2,1};
```

```
    int[] Menor =      {2,1,2,2,1,2,2};
```

```
    int[] Dorian =      {2,1,2,2,2,1,2};
```

```
    int[] Phrygian =    {1,2,2,2,1,2,2};
```

```
    int[] Lydian =      {2,2,2,1,2,2,1};
```

```
    int[] Mixolydian =  {2,2,1,2,2,1,2};
```

```
    int[] Tono =        {2,2,2,2,2,2};
```

```
    int[] Octatonica =  {2,1,2,1,2,1,2,1};
```

```
    int[] Cromatica =   {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1};
```

```
    int[] Blues =       {3,2,1,1,3,2};
```

```
    int [] Escala = {0};
```

```
    switch (tipo)
```

```
    {
```

```
        case 'M':
```

```
            Escala = (int[])Mayor.clone();
```

```
        break;
```

```
        case 'm':
```

```
            Escala = (int[])Menor.clone();
```

```
        break;
```

```
        case 'D':
```

```
            Escala = (int[])Dorian.clone();
```

```
        break;
```

```
        case 'P':
```

```
            Escala = (int[])Phrygian.clone();
```

```
        break;
```

```
        case 'L':
```



```
        Escala = (int[])Lydian.clone();
    break;
    case 'X':
        Escala = (int[])Mixolydian.clone();
    break;
    case 'T':
        Escala = (int[])Tono.clone();
    break;
    case 'O':
        Escala = (int[])Octatonica.clone();
    break;
    case 'C':
        Escala = (int[])Cromatica.clone();
    break;
    case 'B':
        Escala = (int[])Blues.clone();
    break;

    default:
        Escala = (int[])Mayor.clone();
    break;
}

// Seis Octavas
int octavas = 6;
int[] ESC = new int[Escala.length*octavas];
ESC[0]=nota;
for (int i=1; i<Escala.length*octavas; i++){
    ESC[i] = ESC[i-1] + Escala[ (i-1)%Escala.length];
}

notas = (int[])ESC.clone();
return ESC;
}

/**
 * Regresa un arreglo con las notas de la escala,
 * correspondiente a las notas en E
 * @return
 */
```

```
public int[] getNotas(){
    int[] ESC = (int[])notas.clone();
    return ESC;
}

/**
 * Corresponde a la funcion intervalo entre dos notas de la escala
 * @param n1
 * @param n2
 * @return
 */
public int Int(int n1, int n2){
// Dada un par de notas en la escala ZE, encontrar su intervalo
int intervalo = Math.abs(this.getNota(n1) - this.getNota(n2));
    return intervalo;
}

char tipo;
int base;
int [] notas;
}
```

A.2. Clase Triada

```
/*
 * Triada.java
 */

package TesisMusica;

import java.io.*;
import java.lang.Math;
import java.lang.String;
import java.util.Random;
import javax.swing.JOptionPane;

public class Triada {

/** Inicializa la triada, toma como parametros el valor inicial
 *del tenor, alto y soprano, revisa si es una triada asignandole
```

```
*el grado de la triada a cada voz.
* 0 es la base de la escala en que se trabaja
*mas cercana superior al do central.
*/
public Triada(int Ten, int Alt, int Sop) {
    //int[] [] Tr = new int[3][2];
    Tr[0][0] = Ten;
    Tr[1][0] = Alt;
    Tr[2][0] = Sop;
    this.setEstructura();
}

/**
 * Funciona igual que el inicializador de la clase "Triada".
 * @param Ten
 * @param Alt
 * @param Sop
 */
public void Inicializar(int Ten, int Alt, int Sop) {
    Tr[0][0] = Ten;
    Tr[1][0] = Alt;
    Tr[2][0] = Sop;
    this.setEstructura();
}

/**
 * Distancia entre triadas utilizando la metrica melodica.
 * @param K
 * Toma una triada diatonica
 * @return
 * Regresa la distancia entre ellas
 */
public int Distancia(Triada K){
    int dist = 0;
    int ten, alt, sop;
    ten = Math.abs(this.getTenor() - K.getTenor());
    alt = Math.abs(this.getAlto() - K.getAlto());
    sop = Math.abs(this.getSoprano() - K.getSoprano());
    dist = ten + alt + sop;
    return dist;
}
```

```
}

/**
 *Toma un numero entero y actua sobre el valor actual
 *de la triada.
 * @param numero
 * Numero que actua
 */
public void Accion(int numero){
    if(numero>6){numero = numero%7;}
    switch (numero){
        case 5: { this.Suma(0,0,1);          break;}
        case 2: { this.Suma(-1,0,0);         break;}
        case 3: { this.Suma(0,1,1);          break;}
        case 4: { this.Suma(-1,-1,0);        break;}
        case 1: { this.Suma(1,1,1);          break;}
        case 6: { this.Suma(-1,-1,-1);       break;}

        case 0:
        default: ;
    }
}

/**
 * Se mueve al segundo acorde mas cercano con respecto
 *a la accion de la base
 * @param numero
 */
public void Accion2(int numero){
    if(numero>6){numero = numero%7;}
    switch (numero){
        case 5: { this.Accion(6); this.Accion(6); break;}
        case 2: { this.Accion(1); this.Accion(1);          break;}
        case 3: { this.Accion(2); this.Accion(4); this.Accion(4); break;}
        case 4: { this.Accion(3); this.Accion(1);          break;}
        case 1: { this.Accion(4); this.Accion(4);          break;}
        case 6: { this.Accion(3); this.Accion(3);          break;}

        case 0:
        default: ;
    }
}
```



```
    }  
}  
  
/**  
 * Crea un archivo en formato Lilypond con una progresi'on de acordes  
 * dada por el usuario. Se especifica la escala y la duracion de los  
 * acordes, asi como una triada base y una sucesion de elementos en  
 * Z7 para que actuen sobre el bajo. Se utiliza la conduccion  
 * de voces de la minima distancia (o segunda cercana )con la metrica  
 * melodica.  
 * Tempo 2/4. Regresa el nombre del archivo impreso.  
 *Indica la base de la escala.  
 * @param baseEscala  
 * @param tipoEscala  
 * @param dur  
 * @param acciones  
 * @return  
 */  
public String PROGRESION  
(int baseEscala,char tipoEscala,int dur,int[] acciones){  
    // Tiene el bajo normalizado con nota minima el do4.  
    // 2/4  
    int temp1 = 2;  
    int temp2 = 4;  
    Lily L = new Lily();  
    String ARCHIVO = "";  
    String Nombre = "Progresion";  
  
    Escala Dom = new Escala(baseEscala,tipoEscala);  
    int[] E = Dom.getNotas();  
    Triada T = new Triada(Tr[0][0],Tr[1][0],Tr[2][0]);  
    // FIN Preparativos  
  
    // INICIO MUSICA  
    int T1,T2,T3;  
    int notas = acciones.length;  
    int[] TR = new int[3];  
    int[] Bas = new int[notas+1];  
  
    ARCHIVO += L.voz1(temp1,temp2);
```

```
T1 = T.getTenor();
T2 = T.getAlto();
T3 = T.getSoprano();
Bas[0] = T.getBaseNormalizada();
TR[0] = Dom.getNota(T1);
TR[1] = Dom.getNota(T2);
TR[2] = Dom.getNota(T3);

ARCHIVO += L.acorde(TR, dur);
for(int i = 0; i<notas ; i++){
    if (acciones[i]>0){
        T.Accion(acciones[i]);
    }else{
        T.Accion2(Math.abs(acciones[i]));
    }
}
T1 = T.getTenor();
T2 = T.getAlto();
T3 = T.getSoprano();
Bas[i+1] = T.getBaseNormalizada();
TR[0] = Dom.getNota(T1);
TR[1] = Dom.getNota(T2);
TR[2] = Dom.getNota(T3);
ARCHIVO += L.acorde(TR, dur);
} //for

ARCHIVO += L.voz2(temp1,temp2);
for(int j = 0; j<notas+1 ; j++){
ARCHIVO += L.nota(Dom.getNota(Math.abs(Bas[j])))+L.duracion(dur);
}

// FIN MUSICA.

ARCHIVO += L.despues(2,temp1,temp2);
ARCHIVO += (char)(37)+"Operaciones realizadas\n"+(char)(37)+"(";
for(int k =0; k<notas-1;k++){
    ARCHIVO += acciones[k]+" ";
}
ARCHIVO += acciones[notas-1]+")\n";

ARCHIVO += (char)(37)+"Clase del bajo\n"+(char)(37)+"(";
```

```
        for(int k =0; k<notas;k++){
            ARCHIVO += Bas[k]%7+", ";
        }
        ARCHIVO += Bas[notas]%7+")";

        System.out.println(ARCHIVO);
        String Nom2=L.ImprimirArchivoNom(ARCHIVO,Nombre+".ly");
        return Nom2;
    }

/**
 * Crea un archivo en formato Lilypond con una
 * progresi\on de acordes en
 * formato como el peque~{n}o preludio de Bach
 * manejado en la tesis.
 * Se especifica la escala y la duracion de los
 * acordes, asi como una triada base y una sucesion
 * de elementeos en Z7
 * para que actuen sobre el bajo. Se utiliza la
 * conduccion de voces de la
 * minima distancia (o segunda cercana )con la
 * metrica mel\'odica.
 * Tempo 4/4. Regresa el nombre del archivo
 * impreso.
 * @param baseEscala
 * @param tipoEscala
 * @param dur
 * @param acciones
 * @return
 */
public String PRELUDIO
(int baseEscala,char tipoEscala,int dur, int[] acciones){
    // Tiene el bajo normalizado con nota minima el do4.

    int temp1 = 4;
    int temp2 = 4;
    int durBas = 4;
    int dur2 = 16;

    Lily L = new Lily();
```

```
String ARCHIVO = "";
String Nombre = "Preludio";

Escala Dom = new Escala(baseEscala, tipoEscala);
int[] E = Dom.getNotas();
Triada T = new Triada(Tr[0][0], Tr[1][0], Tr[2][0]);
// FIN Preparativos

// INICIO MUSICA
int T1, T2, T3;
int notas = acciones.length;
int[] TR = new int[3];
int[] Bas = new int[notas+1];

ARCHIVO += L.voz1(temp1, temp2);
T1 = T.getTenor();
T2 = T.getAlto();
T3 = T.getSoprano();
Bas[0] = T.getBaseNormalizada();
TR[0] = Dom.getNota(T1);
TR[1] = Dom.getNota(T2);
TR[2] = Dom.getNota(T3);

ARCHIVO += "r"+dur2+" "+L.arpeggioSube(TR, dur2);
for(int i = 0; i<notas ; i++){
    if (acciones[i]>0){
        T.Accion(acciones[i]);
    }else{
        T.Accion2(Math.abs(acciones[i]));
    }
}
T1 = T.getTenor();
T2 = T.getAlto();
T3 = T.getSoprano();
Bas[i+1] = T.getBaseNormalizada();
TR[0] = Dom.getNota(T1);
TR[1] = Dom.getNota(T2);
TR[2] = Dom.getNota(T3);
ARCHIVO += "r"+dur2+" "+L.arpeggioSube(TR, dur2);
} //for
```



```

        ARCHIVO += L.voz2(temp1,temp2);
        for(int j = 0; j<notas+1 ; j++){
ARCHIVO += L.nota(Dom.getNota(Math.abs(Bas[j])))+L.duracion(dur);
        }

        // FIN MUSICA.

        ARCHIVO += L.despues(2,temp1,temp2);
ARCHIVO += (char)(37)+"Operaciones realizadas\n"+(char)(37)+"(";
        for(int k =0; k<notas-1;k++){
ARCHIVO += acciones[k]+" ";
        }
ARCHIVO += acciones[notas-1+"]\n";

        ARCHIVO += (char)(37)+"Clase del bajo\n"+(char)(37)+"(";
        for(int k =0; k<notas;k++){
ARCHIVO += Bas[k]%7+" ";
        }
ARCHIVO += Bas[notas]%7+")";

        System.out.println(ARCHIVO);
        String Nom2=L.ImprimirArchivoNom(ARCHIVO,Nombre+".ly");
        return Nom2;
    }

/**
 * Crea un archivo en formato Lilypond con una
 * progresi'on de acordes en
 * formato 0535 dada por el usuario.
 * Se especifica la escala y la duracion de los
 * acordes, asi como una triada base y una sucesion
 * de elementos en Z7
 * para que actuen sobre el bajo. Se utiliza la
 * conduccion de voces de la
 * minima distancia (o segunda cercana )con la
 * metrica mel\'odica.
 * Tempo 4/4. Regresa el nombre del archivo
 * impreso.
 * @param baseEscala
 * @param tipoEscala

```

```
* @param dur
* @param acciones
* @return
*/
public String SONATA
(int baseEscala, char tipoEscala, int dur, int[] acciones){
    // Tiene el bajo normalizado con nota minima el do4.
    // 2/4
    int temp1 = 4;
    int temp2 = 4;
    int durBas = 4;
    int dur2 = 16;

    Lily L = new Lily();
    String ARCHIVO = "";
    String Nombre = "Sonata";

    Escala Dom = new Escala(baseEscala,tipoEscala);
    int[] E = Dom.getNotas();
    Triada T = new Triada(Tr[0][0],Tr[1][0],Tr[2][0]);
    // FIN Preparativos

    // INICIO MUSICA
    int T1,T2,T3;
    int notas = acciones.length;
    int[] TR = new int[3];
    int[] Bas = new int[notas+1];

    ARCHIVO += L.voz1(temp1,temp2);
    T1 = T.getTenor();
    T2 = T.getAlto();
    T3 = T.getSoprano();
    Bas[0] = T.getBaseNormalizada();
    TR[0] = Dom.getNota(T1);
    TR[1] = Dom.getNota(T2);
    TR[2] = Dom.getNota(T3);

    ARCHIVO += L.arpeggio0535(TR, dur2);
    for(int i = 0; i<notas ; i++){
        if (acciones[i]>0){
```

```
        T.Accion(acciones[i]);
    }else{
        T.Accion2(Math.abs(acciones[i]));
    }
    T1 = T.getTenor();
    T2 = T.getAlto();
    T3 = T.getSoprano();
    Bas[i+1] = T.getBaseNormalizada();
    TR[0] = Dom.getNota(T1);
    TR[1] = Dom.getNota(T2);
    TR[2] = Dom.getNota(T3);
    ARCHIVO += L.arpeggio0535(TR, dur2);
} //for

ARCHIVO += L.voz2(temp1,temp2);
for(int j = 0; j<notas+1 ; j++){
ARCHIVO += L.nota(Dom.getNota(Math.abs(Bas[j])))+L.duracion(dur);
}

// FIN MUSICA.

ARCHIVO += L.despues(2,temp1,temp2);
ARCHIVO += (char)(37)+"Operaciones realizadas\n"+(char)(37)+"(";
for(int k =0; k<notas-1;k++){
    ARCHIVO += acciones[k]+" ";
}
ARCHIVO += acciones[notas-1]+")\n";

ARCHIVO += (char)(37)+"Clase del bajo\n"+(char)(37)+"(";
for(int k =0; k<notas;k++){
    ARCHIVO += Bas[k]%7+" ";
}
ARCHIVO += Bas[notas]%7+")";

System.out.println(ARCHIVO);
String Nom2=L.ImprimirArchivoNom(ARCHIVO,Nombre+".ly");
return Nom2;
}

/**
```

```
* Crea un archivo en formato Lilypond con una
* progresion de clases de
* triadas asi como las clases del bajo.
* Por convencion musical se ponen las triadas
* normalizadas con respecto a la nota base en la
* octava de do central,
* mientras que el bajo se pone dos octavas abajo.
* @param baseEscala
    *Indica la base de la escala.
    * @param tipoEscala
    *Indica el tipo de la escala 'M': mayor 'm': menor.
    * @param dur
    *Indica la duracion de las notas de la escala.
    * @param acciones
    *Indica las operaciones a realizar.
*/
public void ProgresionTZ7
(int baseEscala,char tipoEscala,int dur,int[]acciones){
    // Tiene el bajo normalizado con nota minima el do4.
    // 2/4
    //temp1,temp2
    int temp1 = 2;
    int temp2 = 4;

    Lily L = new Lily();
    String ARCHIVO = "";
    String Nombre = "Triadas";

    Escala Dom = new Escala(baseEscala,tipoEscala);
    int[] E = Dom.getNotas();
    Triada T = new Triada(Tr[0][0]%7+3*7,Tr[1][0]%7+3*7,Tr[2][0]%7+3*7);
    // FIN Preparativos

    // INICIO MUSICA
    int T1,T2,T3;
    int notas = acciones.length;
    int[] TR = new int[3];
    int[] Bas = new int[notas+1];

    ARCHIVO += L.voz1(temp1,temp2);
```



```

T1 = T.getTenor()%7+3*7;
T2 = T.getAlto()%7+3*7;
T3 = T.getSoprano()%7+3*7;
Bas[0] = T.getBaseNormalizada();
TR[0] = Dom.getNota(T1);
TR[1] = Dom.getNota(T2);
TR[2] = Dom.getNota(T3);

ARCHIVO += L.acorde(TR, dur);
for(int i = 0; i<notas ; i++){
T.Accion(acciones[i]);
T1 = T.getTenor()%7+3*7;
T2 = T.getAlto()%7+3*7;
T3 = T.getSoprano()%7+3*7;
Bas[i+1] = T.getBaseNormalizada();
TR[0] = Dom.getNota(T1);
TR[1] = Dom.getNota(T2);
TR[2] = Dom.getNota(T3);
ARCHIVO += L.acorde(TR, dur);
}

ARCHIVO += L.voz2(temp1,temp2);
for(int j = 0; j<notas+1 ; j++){
ARCHIVO += L.nota(Dom.getNota(Math.abs(Bas[j])))+L.duracion(dur);
}

// FIN MUSICA.

ARCHIVO += L.despues(2,temp1,temp2);
ARCHIVO += (char)(37)+"Operaciones realizadas\n"+(char)(37)+"(";
for(int k =0; k<notas-1;k++){
ARCHIVO += acciones[k]+" ";
}
ARCHIVO += acciones[notas-1+"]\n";

ARCHIVO += (char)(37)+"Clase del bajo\n"+(char)(37)+"(";
for(int k =0; k<notas;k++){
ARCHIVO += Bas[k]%7+" ";
}
ARCHIVO += Bas[notas]%7+")";

```

```
        System.out.println(ARCHIVO);
        L.ImprimirArchivo(ARCHIVO,Nombre+".ly");
    }

/**
 * Toma el bajo de una sucesion de acordes, así como las acciones
 * correspondientes a dicho bajo y genera un bajo
 * melodico. Puede mejorarse
 * creando una funcion que dado una sucesion de
 * clase de bajos obtengamos
 * las acciones necesarias para generar dicho bajo.
 * Falta Revisar el rango
 * de la voz
 * @param Bas
 * @param acciones
 * @return
 */
    public int[] BajoMelodicoNormalizado(int[] Bas, int[] acciones){
        // Revisar rango de la voz
        int[] BasMel = new int[Bas.length];
        BasMel[0]=Bas[0]%7+ 2*7;
        int k = 0;
        int M = 0;
        for(int i = 0; i<Bas.length-1; i++){
            //k = (Bas[i+1]%7-Bas[i]%7);
            k = acciones[i]%7;
            if(k>3){
                M = Math.abs(7-k%7);
                BasMel[i+1]=BasMel[i]-M;
            }else{
                //BasMel[i+1]=BasMel[i]+(Bas[i+1]%7-Bas[i]%7);
                BasMel[i+1]=BasMel[i]+k;
            }
        }
        return BasMel;
    }

// ----- Funciones con triadas.
```

```

/**
 * Se asigna un vector (B,T,Q) que se suma a la
 * triada donde la primer
 * coordenada es la base del acorde, T es la tercera y
 * Q es la quinta.
 * Esta funcion se encarga de que se sumen
 * correctamente.
 * @param B
 * Valor que se suma a la base.
 * @param T
 * Valor que se suma a la triada.
 * @param Q
 * Valor que se suma a la quinta.
 */
public void Suma(int B, int T, int Q){
    for(int i = 0; i<3; i++){
        if( Tr[i][1] == 1 ){Tr[i][0] = Tr[i][0] + B;}
        elseif( Tr[i][1] == 3 ){Tr[i][0] = Tr[i][0] + T;}
    elseif( Tr[i][1] == 5 ){Tr[i][0] = Tr[i][0] + Q;}//if3//else 2
        }//else 1
        }//else 2
    }//for
    this.setEstructura();
}

/**
 * Revisa que se evite el cruce de voces, así como
 * que en efecto sea
 * una triada. Cumple la funcion de EST en la teoria
 * de la tesis.
 */
public void setEstructura(){
    if( Tr[1][0]<Tr[0][0] | Tr[2][0]<Tr[0][0] | Tr[2][0]<Tr[1][0] ){
        System.out.println("ERROR..." + Tr[0][0] + ", " + Tr[1][0] + ", " +
            "" + Tr[2][0] + ", cruce de voces.");
        JOptionPane.showMessageDialog(null, "ERROR... cruce de voces.");
        System.exit(1);
    }
    if((Tr[1][0]-Tr[0][0])%7==2 & (Tr[2][0]-Tr[0][0])%7==4 ){

```

```

        Tr[0][1]=1;
        Tr[1][1]=3;
        Tr[2][1]=5;
    }else { //else 1
    if( (Tr[1][0]-Tr[0][0])%7==4 & (Tr[2][0]-Tr[0][0])%7==2 ){
        Tr[0][1]=1;
        Tr[1][1]=5;
        Tr[2][1]=3;
    }else { //else 2
    if( (Tr[1][0]-Tr[0][0])%7==2 & (Tr[2][0]-Tr[0][0])%7==5 ){
        Tr[0][1]=3;
        Tr[1][1]=5;
        Tr[2][1]=1;
    }else { //else 3
    if( (Tr[1][0]-Tr[0][0])%7==5 & (Tr[2][0]-Tr[0][0])%7==2 ){
        Tr[0][1]=3;
        Tr[1][1]=1;
        Tr[2][1]=5;
    }else { //else 4
    if( (Tr[1][0]-Tr[0][0])%7==3 & (Tr[2][0]-Tr[0][0])%7==5 ){
        Tr[0][1]=5;
        Tr[1][1]=1;
        Tr[2][1]=3;
    }else { //else 5
    if( (Tr[1][0]-Tr[0][0])%7==5 & (Tr[2][0]-Tr[0][0])%7==3 ){
        Tr[0][1]=5;
        Tr[1][1]=3;
        Tr[2][1]=1;
    }else { //else 6
        System.out.println("ERROR..." + Tr[0][0] + ", " + Tr[1][0] + ", " +
            "" + Tr[2][0] + ", no es una triada");
        JOptionPane.showMessageDialog(null, "ERROR... no es una triada");
        System.exit(1);
    } //else 6
    } //else 5
    } //else 4
    } //else 3
    } //else 2
    } //else 1
}

```

```
/**
 * Regresa el valor de la voz alto en la triada.
 * @return
 */
public int getTenor(){
    return Tr[0][0];
}
/**
 * Regresa el valor de la voz alto en la triada.
 * @return
 */
public int getAlto(){
    return Tr[1][0];
}
/**
 * Regresa el valor de la voz alto en la triada.
 * @return
 */
public int getSoprano(){
    return Tr[2][0];
}

/**
 * Regresa el valor de la voz que es la base del
 * acorde en la triada.
 * @return
 */
public int getBase(){
    int Base = -100;
    for(int i = 0; i < 3; i++){
        if( Tr[i][1]==1 ){ Base = Tr[i][0]; }
    }
    return Base;
}

/**
 * Regresa la clase del acorde de acuerdo a su base.
 * Es normalizado por
 * que lo muestra en la octava Do4 - Do5.
 * @return
```



```
    */
    public int getBaseNormalizada(){
        int Base = -100;
        for(int i = 0; i < 3; i++){
            if( Tr[i][1]==1 ){ Base = Tr[i][0]; }
        }
        Base = Base%7 + 2*7;
        return Base;
    }

    /**
    * Regresa el valor de la voz que es la tercera del
    * acorde en la triada.
    * @return
    */
    public int getTercera(){
        int Tercera = -100;
        for(int i = 0; i < 3; i++){
            if( Tr[i][1]==3 ){ Tercera = Tr[i][0]; }
        }
        return Tercera;
    }

    /**
    * Regresa la clase del acorde de acuerdo a su base.
    * Es normalizado por
    * que lo muestra la primer nota en la octava Do4 -
    * Do5 y tiene rango de
    * una octava.
    * @return
    */
    public int getTerceraNormalizada(){
        int Tercera = -100;
        for(int i = 0; i < 3; i++){
            if( Tr[i][1]==1 ){ Tercera = Tr[i][0]; }
        }
        Tercera = Tercera%7 + 2*7;
        return Tercera;
    }

    /**
```

```
* Regresa el valor de la voz que es la quinta del
* acorde en la triada.
* @return
*/
    public int getQuinta(){
        int Quinta = -100;
        for(int i = 0; i < 3; i++){
            if( Tr[i][1]==5 ){ Quinta = Tr[i][0]; }
        }
        return Quinta;
    }

/**
* Regresa que parte de la triada es la voz tenor,
* si la base (1), tercera(3)
* o quinta(5);
* @return
*/
    public int getTenorTip(){
        return Tr[0][1];
    }

/**
* Regresa que parte de la triada es la voz alto,
* si la base (1), tercera(3)
* o quinta(5);
* @return
*/
    public int getAltoTip(){
        return Tr[1][1];
    }

/**
* Regresa que parte de la triada es la voz alto,
* si la base (1), tercera(3)
* o quinta(5);
* @return
*/
    public int getSopranoTip(){
        return Tr[2][1];
    }
/**
```

```
*Este vector de tres componentes guarda el valor de
* las voces Tr[0][0]:
*Tenor, Tr[1][0]: Alto, Tr[2][0]: Soprano. La segunda
* componente indica
*el grado de la nota en la triada si la base (1),
* tercera(3) o quinta(5).
*/
int[][] Tr = new int[3][2];
}
```

A.3. Clase Lily

```
/*
 * Lily.java
 */

package TesisMusica;

import java.util.Calendar;
import java.lang.Math;
import java.lang.String;
import java.util.GregorianCalendar;
import java.io.*;
import java.util.Random;

public class Lily {

    public Lily() {
    }

    // INICIO FORMATO

    // Comillas
    /**
     * Funcion para Lilypond que imprime un par de comillas: ''
     * @return
     */

    public static String ll(){
        String reg = ""+(char)(34);
        return reg;
    }
}
```

```
}

/**
 * Funcion para Lilypond que imprime una comilla: '
 * @return
 */
public static String l(){
    String reg = ""+(char)(39);
    return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que imprime la version del
 * mismo con la que se
 * trabaja
 * @return
 */
public static String version(){
    String reg = "\n\\version "+ll()+"2.10.10"+ll()+"\n\n";
    return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que escribe el preambulo
 * para la musica que
 * consistira de solo una voz. Toma como parametros
 * el tempo que llevara.
 * Indicado por t1 para el numero superior y t2 para el
 * inferior.
 * Por ejemplo cuatro cuartos seria t1=4, t2=4.
 * @param t1
 * @param t2
 * @return
 */
public static String voz1(int t1, int t2){
    // Para piano
    String reg = "arriba = \\context Voice = "+ll()+"one"+ll();
    reg += "\n\n";
    reg += "{\n\n";
}
```

```
// reg += "\\key "+s+"\n"; Clave, opcional
reg += "\\clef treble\n\n";
reg += "\\time "+t1+"/"+t2+"\n\n";
return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que escribe el preambulo para la musica que
 * consistira de dos voces. Toma como parametros el tempo que llevara.
 * Indicado por t1 para el numero superior y t2 para el inferior.
 * Por ejemplo cuatro cuartos seria t1=4, t2=4.
 * @param t1
 * @param t2
 * @return
 */

public static String voz2(int t1, int t2){
    // Para piano
    String reg = "\n}\n\n";
    reg += "\n\nabajo = \\context Voice = "+t1()+"two"+t1();
    reg += "{\n\n";
    reg += "\\clef bass\n\n";
    reg += "\\time "+t1+"/"+t2+"\n\n";
    return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que imprime la segunda
 * parte del archivo, junto
 * con los parametros necesarios para la salida de
 * audio MIDI. Toma como
 * parametro el mismo tempo que se indico para voz1
 * y voz2, asi como el
 * numero de voces que se manejan: 1 o 2.
 * @param voces
 * @param t1
 * @param t2
 * @return
 */
public static String despues(int voces, int t1, int t2){
```



```

//\bar "||"
String reg = "\\bar"+ll()+"||"+ll()+"\n}\n\n";
reg += "\\score {\n\n";
reg += "\\context PianoStaff <<\n";
reg += "\t\\context Staff = "+ll()+"treble"+ll();
reg += "\n\t<<\n";
reg += "\t\\time "+t1+"/"+t2+"\n";
reg += "\\arriba\n";
reg += "\n\t>>\n";

if (voces == 2)
{
    reg += "\t\\context Staff = "+ll()+"bass"+ll();
    reg += "\n\t<<\n";
    reg += "\\abajo\n";
    reg += "\n\t>>\n";

}

reg += ">>\n";
reg += "\\layout { }\n";
reg += "\\midi {\n";
reg += "\t\\context {\n";
reg += "\t\\Score\n";
reg += "\ttempoWholesPerMinute = #(ly:make-moment 90 4)\n";
reg += "\t}\n";
reg += "\t}\n";
reg += "}";
reg += "";
reg += version();

return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que le asigna un numero a
 * cada nota de la escala,
 * utilizando sostenidos. Consiste de siete octavas.
 * @param d
 * @return
 */

```

```
public static String nota(int d){
    // Se puede corregir lo de la l();
    // Tambien falta con bemoles.
    String reg = "";
    switch (d)
    {
        case 0: reg += "c,,"; break;
        case 1: reg += "cis,,"; break;
        case 2: reg += "d,,"; break;
        case 3: reg += "dis,,"; break;
        case 4: reg += "e,,"; break;
        case 5: reg += "f,,"; break;
        case 6: reg += "fis,,"; break;
        case 7: reg += "g,,"; break;
        case 8: reg += "gis,,"; break;
        case 9: reg += "a,,"; break;
        case 10: reg += "ais,,"; break;
        case 11: reg += "b,,"; break;

        case 12: reg += "c,"; break;
        case 13: reg += "cis,"; break;
        case 14: reg += "d,"; break;
        case 15: reg += "dis,"; break;
        case 16: reg += "e,"; break;
        case 17: reg += "f,"; break;
        case 18: reg += "fis,"; break;
        case 19: reg += "g,"; break;
        case 20: reg += "gis,"; break;
        case 21: reg += "a,"; break;
        case 22: reg += "ais,"; break;
        case 23: reg += "b,"; break;

        case 24: reg += "c"; break;
        case 25: reg += "cis"; break;
        case 26: reg += "d"; break;
        case 27: reg += "dis"; break;
        case 28: reg += "e"; break;
        case 29: reg += "f"; break;
        case 30: reg += "fis"; break;
        case 31: reg += "g"; break;
    }
}
```

```
case 32: reg += "gis"; break;
case 33: reg += "a"; break;
case 34: reg += "ais"; break;
case 35: reg += "b"; break;
// Do central
case 36: reg += "c"+ l(); break;
case 37: reg += "cis"+ l(); break;
case 38: reg += "d"+ l(); break;
case 39: reg += "dis"+ l(); break;
case 40: reg += "e"+ l(); break;
case 41: reg += "f"+ l(); break;
case 42: reg += "fis"+ l(); break;
case 43: reg += "g"+ l(); break;
case 44: reg += "gis"+ l(); break;
case 45: reg += "a"+ l(); break;
case 46: reg += "ais"+ l(); break;
case 47: reg += "b"+ l(); break;

case 48: reg += "c"+ l()+l(); break;
case 49: reg += "cis"+ l()+l(); break;
case 50: reg += "d"+ l()+l(); break;
case 51: reg += "dis"+ l()+l(); break;
case 52: reg += "e"+ l()+l(); break;
case 53: reg += "f"+ l()+l(); break;
case 54: reg += "fis"+ l()+l(); break;
case 55: reg += "g"+ l()+l(); break;
case 56: reg += "gis"+ l()+l(); break;
case 57: reg += "a"+ l()+l(); break;
case 58: reg += "ais"+ l()+l(); break;
case 59: reg += "b"+ l()+l(); break;

case 60: reg += "c"+ l()+l()+l(); break;
case 61: reg += "cis"+ l()+l()+l(); break;
case 62: reg += "d"+ l()+l()+l(); break;
case 63: reg += "dis"+ l()+l()+l(); break;
case 64: reg += "e"+ l()+l()+l(); break;
case 65: reg += "f"+ l()+l()+l(); break;
case 66: reg += "fis"+ l()+l()+l(); break;
case 67: reg += "g"+ l()+l()+l(); break;
case 68: reg += "gis"+ l()+l()+l(); break;
```

```

    case 69: reg += "a"+  l()+l()+l(); break;
    case 70: reg += "ais"+ l()+l()+l(); break;
    case 71: reg += "b"+  l()+l()+l(); break;

    case 72: reg += "c"+  l()+l()+l()+l(); break;
    case 73: reg += "cis"+ l()+l()+l()+l(); break;
    case 74: reg += "d"+  l()+l()+l()+l(); break;
    case 75: reg += "dis"+ l()+l()+l()+l(); break;
    case 76: reg += "e"+  l()+l()+l()+l(); break;
    case 77: reg += "f"+  l()+l()+l()+l(); break;
    case 78: reg += "fis"+ l()+l()+l()+l(); break;
    case 79: reg += "g"+  l()+l()+l()+l(); break;
    case 80: reg += "gis"+ l()+l()+l()+l(); break;
    case 81: reg += "a"+  l()+l()+l()+l(); break;
    case 82: reg += "ais"+ l()+l()+l()+l(); break;
    case 83: reg += "b"+  l()+l()+l()+l(); break;

    default: reg += "";
}
return reg;
}

/**
 * Funcion para lilypond que imprime la duracion de
 * una nota, se escribe
 * inmediatamente despues de la misma. Si se
 * ingresa un valor negativo, se
 * imprimira un silencio con dicha duracion.
 * @param n
 * @return
 */
public static String duracion(int n){
    String reg = "";
    if (n < 0){
        reg += " r"+(-n)+" ";
    }
    else if (n >= 40){
        reg += ""+n%10+" ";
    }
    else {

```

```
        reg += ""+n+" ";
    }
    return reg;
}

// Funciones de texto

// Polifonia

/**
 * Funcion para Lilypond que inicializa la estructura
 * de polifonia, a
 * continuacion se escriben las notas de la voz
 * superior.
 * @return
 */
public static String PolifInic(){
    String reg = "<< { ";
    return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que corresponde a la parte
 * central de la
 * estructura de polifonia. A continuacion estan las
 * notas de la segunda voz,
 * es precedida por las notas de la primer voz.
 * @return
 */
public static String PolifMed(){
    String reg = " } \\\\ \n { ";
    return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que termina con la
 * estructura de polifonia. Es
 * precedida por PolifInic, las notas de la primera voz,
 * PolifMed
 * y las notas de la segunda voz
```



```
* @return
*/
public static String PoliFin(){
    String reg = " } >>";
    return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que Imprime el acorde con 3
 * notas en X de duracion 'd' de manera 0535.
 * Donde los numeros anteriores representan
 * las partes de la triada.
 * @param X
 * @param d
 * @return
 */
public static String arpeggio0535(int[] X, int d){
    // funciona solo para acordes de tres notas
    String reg = " ";
    reg += nota(X[0])+d+" ";
    reg += nota(X[2])+d+" ";
    reg += nota(X[1])+d+" ";
    reg += nota(X[2])+d+" ";

    reg += ""+"\n";
    return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que imprime la triada con
 * notas en X y duracion
 * 'd' de manera arpegiada descendente.
 * @param X
 * @param d
 * @return
 */
public static String arpeggioBaja(int[] X, int d){
    String reg = " ";
    for (int i = X.length-1; i >=0 ; i -- ){
        reg += nota(X[i])+d+" ";
    }
}
```

```
    }
    reg += ""+"\n";
    return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que imprime la triada con
 * notas en X y duracion
 * 'd' de manera arpegiada ascendente.
 * @param X
 * @param d
 * @return
 */
public static String arpeggioSube(int[] X, int d){
    String reg = " ";
    for (int i = 0; i < X.length; i ++ ){
        reg += nota(X[i])+d+" ";
    }
    reg += ""+"\n";
    return reg;
}

/**
 * Funcion para Lilypond que imprime un acorde de
 * duracion 'd'dcon las
 * notas del arreglo de tres elementos X.
 * @param X
 * @param d
 * @return
 */
public static String acorde(int[] X, int d){
    String reg = "< ";
    for (int i = 0; i < X.length; i ++ ){
        reg += nota(X[i])+ " ";
    }

    reg += ">"+d+"\n";
    return reg;
}
```

```
// FIN FORMATOs

// FALTAN LAS FUNCIONES ESPECIFICAS
// DE ARMONIA Y ESCALAS.

/**
 * Dado un arreglo de enteros A y un valor ''a'', nos
 * indica si es o no
 * elemento del mismo.
 * @param a
 * @param A
 * @return
 */
public boolean Elemento(int a, int[] A){
    boolean condicion = false;
    for(int i=0; i<A.length; i++){
        if(a == A[i]){
            condicion = true;
        }
    }
    return condicion;
}

/**
 * Dado el arreglo 'int' A, obtenemos un elemento al
 * azar de los
 * contenidos en el mismo
 * @param A
 * @return
 */
public static int aleat(int[] A){
    // Random integers that range from from 0 to n
    Random rand = new Random();
    int n = A.length;
    int i = rand.nextInt(n);
    return A[i];
}

/**
```

```
* Dado el arreglo 'double' A, obtenemos un elemento
* al azar de los
* contenidos en el mismo
* @param A
* @return
*/
public static double aleat(double[] A){
    // Random integers that range from from 0 to n
    Random rand = new Random();
    int n = A.length;
    int i = rand.nextInt(n);
    return A[i];
}
```

```
/**
* Dado un arreglo de numeros ''double'' A, nos
* regresa un reordenamiento
* pseudoaleatorio del mismo.
* @param A
* @return
*/
public static double[] MatAleat(double[] A){
    // Random integers that range from from 0 to n
    Random rand = new Random();
    int n = A.length;
    double temp;

    for(int i=0; i<n; i++){
        int k = rand.nextInt(n);
        temp = A[i];
        A[i] = A[k];
        A[k] = temp;
    }
    return A;
}
```

```
/**
* Dado un arreglo de numeros enteros A, nos
* regresa un reordenamiento
* pseudoaleatorio del mismo.
```

```

* @param A
* @return
*/
public static int[] MatAleat(int[] A){
    // Random integers that range from from 0 to n
    Random rand = new Random();
    int n = A.length;
    int temp;

    for(int i=0; i<n; i++){
        int k = rand.nextInt(n);
        temp = A[i];
        A[i] = A[k];
        A[k] = temp;
    }
    return A;
}

/**
* Imprime el escrito ARCHIVO en un archivo con nombre: NOMBRE
* en la carpeta donde se encuentre la aplicacion.
* @param ARCHIVO
* @param NOMBRE
*/
public static void ImprimirArchivo(String ARCHIVO, String NOMBRE ){
    Calendar cal = new GregorianCalendar();
    String anio = String.valueOf(cal.get(Calendar.YEAR));
    String mes = String.valueOf(cal.get(Calendar.MONTH)+1);
    String dia = String.valueOf(cal.get(Calendar.DAY_OF_MONTH));
    String hora = String.valueOf(cal.get(Calendar.HOUR_OF_DAY));
    String minuto = String.valueOf(cal.get(Calendar.MINUTE));
    String segundo = String.valueOf(cal.get(Calendar.SECOND));

    String Nombre = mes+"-"+dia+"-"+anio+"-Hr-"+hora+"-"+
    +minuto+"-"+segundo;
    NOMBRE = Nombre+"-"+NOMBRE;
    // Intentar sacar a archivo
    FileOutputStream out; // declare a file output object
    PrintStream p; // declare a print stream object
    try

```



```

        {
            // Create a new file output stream
            // connected to "myfile.txt"
            out = new FileOutputStream(NOMBRE);
            // Connect print stream to the output stream
            p = new PrintStream( out );
            p.print(ARCHIVO);
            p.close();
        }
        catch (Exception e)
        {
            System.err.println ("Error writing to file");
        }
    }

    /**
    * Imprime el escrito ARCHIVO en un archivo con nombre: NOMBRE en la
    * carpeta donde se encuentre la aplicacion. Anexando la fecha en
    * que fue creado.
    * @param ARCHIVO
    * @param NOMBRE
    * @return
    */
    public static String ImprimirArchivoNom
    (String ARCHIVO, String NOMBRE ){
        Calendar cal = new GregorianCalendar();
        String anio = String.valueOf(cal.get(Calendar.YEAR));
        String mes = String.valueOf(cal.get(Calendar.MONTH)+1);
        String dia = String.valueOf(cal.get(Calendar.DAY_OF_MONTH));
        String hora = String.valueOf(cal.get(Calendar.HOUR_OF_DAY));
        String minuto = String.valueOf(cal.get(Calendar.MINUTE));
        String segundo = String.valueOf(cal.get(Calendar.SECOND));

        String Nombre = mes+"-"+dia+"-"+anio+"-Hr-"+hora+"-"+minuto+"-"+
        +segundo;
        NOMBRE = Nombre+"-"+NOMBRE;
        // Intentar sacar a archivo
        FileOutputStream out; // declare a file output object
        PrintStream p; // declare a print stream object
        try

```

```
{
    // Create a new file output stream
    // connected to "myfile.txt"
    out = new FileOutputStream(NOMBRE);
    // Connect print stream to the output stream
    p = new PrintStream( out );
    p.print(ARCHIVO);
    p.close();
}
catch (Exception e)
{
    System.err.println ("Error writing to file");
}
return NOMBRE;
}
}
```

A.4. Clase principal: *TriadasDiatonicas101*

```
/*
 * TriadasDiatonicas101.java
 */
package triadasdiatonicas101;
import java.io.*;
import java.lang.Math;
import java.lang.String;
import javax.swing.JOptionPane;
import TesisMusica.Triada;
import TesisMusica.Lily;

public class TriadasDiatonicas101 {

    public TriadasDiatonicas101() {

    }

    public static void main(String[] args) {
        Lily L = new Lily();
        String ans, archivoNom;
        int tenor, alto, soprano, numOp, esc;
        char tipo;
```

```
JOptionPane.showMessageDialog(null,"Bienvenido a Triadas diatonicas "
+"1.01.\n\nA continuacion ingresa los datos que se te indican "
+"para\nobtener una progresion de triadas diatonicas en " +
"la escala do mayor. \n" +
"Al final obtendras tres archivos que debes compilar con " +
"Lilypond\npara poder accesar las partituras y los " +
"archivos MIDI.\n\n");
ans = JOptionPane.showInputDialog(null,
"Ingrese triada inicial\n" +
"(0=do central): Tenor");
tenor = Integer.parseInt(ans);
tenor = tenor + 3*7;//0
ans = JOptionPane.showInputDialog(null,
"Ingrese triada inicial: Alto");
alto = Integer.parseInt(ans);
alto = alto + 3*7;//2
ans = JOptionPane.showInputDialog(null,
"Ingrese triada inicial: " +
"Soprano");
soprano = Integer.parseInt(ans);
soprano = soprano + 3*7;//4
Triada T = new Triada(tenor,alto,soprano);
ans = JOptionPane.showInputDialog(null, "Numero de operaciones.");
numOp = Integer.parseInt(ans);
int[] accionUs = new int[numOp];
for (int i =0; i<accionUs.length; i++){
ans = JOptionPane.showInputDialog(null, "Ingrese las operaciones " +
"(x>0 operacion +, x<0 operacion +' )");
accionUs[i]=Integer.parseInt(ans);
}
int dur = 4;
T.Inicializar(tenor,alto,soprano);
archivoNom = T.PROGRESION(0,'M',dur,accionUs);
JOptionPane.showMessageDialog(null, "Ejecutar archivo:
"+archivoNom+" " +
"\ncon el programa lilypond para obtener el resultado.");
archivoNom = T.PRELUDIO(0,'M',dur,accionUs);
JOptionPane.showMessageDialog(null, "Ejecutar archivo:
"+archivoNom+" " +
"\ncon el programa lilypond para obtener el resultado.");
```

```
        archivoNom = T.SONATA(0,'M',dur,accionUs);
JOptionPane.showMessageDialog(null, "Ejecutar archivo:
"+archivoNom+" " +
"\ncon el programa lilypond para obtener el resultado.");
    }
}
```

A.5. Disco compacto con sonidos, programa y documentación.

Como anexo a esta tesis se incluyen los sonidos para todos los ejemplos, el programa ejecutable, así como su código y documentación, en un disco compacto. También pueden obtenerse directamente de la página:

<http://cristian.manuel.googlepages.com/tesis>

o bien contactandome en cristian.manuel@gmail.com con gusto se lo puedo proporcionar.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Jean-Philippe Rameau, *Treatise on Harmony*.
Dover, EE.UU. 1997.
- [2] E. Aldwell, C. Schachter, *Harmony & Voice Leading*.
Tercera Edición, Thomson-Schirmer EE.UU. 2003.
- [3] Steven G. Laitz, *The Complete Musician*.
Oxford University Press, EE.UU. 2003.
- [4] F. Salzer, C. Schachter, *Counterpoint in Composition*.
Columbia University Press, EE.UU. 1989.
- [5] Kent Kennan, *Counterpoint*.
Cuarta edición, Prentice Hall EE.UU. 1999.
- [6] Jeffrey Evans, *Exploring Theory with Practica Musica*.
Ars Nova, EE.UU. 2004.
- [7] S. Kostka, D. Payne, *Tonal Harmony: With an introduction to twentieth-century music*.
Quinta Edición, McGraw-Hill EE.UU. 2004.
- [8] J. Estrada, J. Gil, *Música y Teoría de Grupos Finitos (3 variables booleanas)*.
Universidad Nacional Autónoma de México, México 1984.
- [9] G. Mazzola, *The Topos of Music*.
Birkhauser Verlag, Alemania 2003.
- [10] D. Tymoczko, *The Geometry of Musical Chords*.
Science 313, 72 (2006)
- [11] Forte Allen, *Tonal Harmony in concept & practice*.
Third Edition, Holt, Rinehart and Winston Ed. EE.UU. 1979.
- [12] Fauvel J., Flood R., Wilson R., *Music and Mathematics*.
Oxford University Press EE.UU. 2005.

-
- [13] Apostol T., *Introduction to Analytic Number Theory*.
Springer-Verlag EE.UU. 1976
- [14] Walter Pistón., *Harmony, third edition*
Norton EE.UU. 1962
- [15] Platón, *La República, Diálogos*.
Edimat Libros, España.
- [16] D. Dummit, M. Foote, *Abstract Algebra*.
John Wiley and Sons, EE.UU. 2004.
- [17] Rudin W., *Principles of Mathematical Analysis*.
McGraw-Hill International Editions, EE.UU. 1953.
- [18] Euler Leonhard, *Tentamen Novae Theoriae Musicae*.
(sept. 9, 2007);
<http://www.thummer.com/blog/2007/06/eulers-tonnetz.html>
- [19] Arnold Shoenberg Center, *Biography*.
(sept. 17, 2007);
http://schoenberg.at/1_as/bio/biographie_e.htm
- [20] Helmholtz, Hermann von, *Die Lehre von den Tonempfindungen als Physiologische Grundlage fur die Theorie der Musik*.
University of Karlsruhe, 1999
(sept. 9, 2007);
<http://www.ubka.uni-karlsruhe.de/cgi-bin/psview?document=wasbleibt/27162822>
- [21] Bach, J.S., *Chorales Harmonized by J.S. Bach*.
(sept. 9, 2007);
<http://www.jsbchorales.net/>

ÍNDICE ALFABÉTICO

- Acorde, 21, 41
 - arpeggio, 76, 80
 - consonante, 43
 - disonante, 43
 - incompleto, 71, 88
 - progresión, 55
 - séptimo, 41
- Alto, 41
- Bajo, 41
 - de Alberti, 76
 - melódico, 85
 - sucesión, 55
- Cantus, 69
- Clave
 - de fa, 15
 - de sol, 15
- Compás, 25
- Consonancia
 - imperfecta, 39
 - perfecta, 39
- Disonancia, 39
 - resolución, 88
- Distancia
 - melódica, 49
- Do
 - central, 14
- Dodecafonismo, 2
- Escala, 30
 - cromática, 18, 37
 - enarmónica, 64, 88
 - equivalencias, 33
 - estructura, 31
 - estructura de grupo, 36
 - grados, 31
 - igualmente temperada, 9
 - mayor, 9, 17, 63
 - menor, 18, 63
 - nota base, 30
 - Pitagórica, 10
 - trasposicion, 9
- Espacio
 - triadas diatónicas, 47
- Euler, Leonhard, 4
- Gráfica, 67
- Gráfica completa, 67
- Grupo
 - acción, 56
 - generadores, 57
 - orbitas, 57
- Intervalo, 18
 - armónico, 19, 38
 - compuesto, 20
 - consonante, 21
 - cromático, 71
 - disonante, 21
 - melódico, 19, 39, 71
 - quintas paralelas, 70
- Liga, 24
- Métrica
 - matemática, 49
 - para los grados de la escala, 50
 - taxi, 48

- Música
 teoría, 3
 tonal, 13
Mazzola, Guerino, 4
Metro, 25
Modulación, 88
Nota, 13, 29
 aguda, 13
 cromática, 18
 diatónica, 18
 duraciones, 24
 grave, 13
Octava, 20
Orden
 lexicográfico, 50
Pentagrama, 14
Pulso, 23
Rameau, Jean Phillipe, 2
Schoenberg, Arnold, 2
Semiacción, 61
Semitono, 13
Silencios, 24
Sistema, 15
Sistema dinámico, 61
Soprano, 41
Tenor, 41
Tonalidad, 88
Tono, 17
Triada, 21
 aumentada, 42
 clases de las, 58
 consonante, 70
 diatónica, 23, 46
 disminuida, 42
 estructura, 46
 fundamental de la, 47
 inversiones, 22
 mayor, 42
 menor, 42
 orden lexicográfico, 50
 progresiones, 55, 57, 65
 quinta de la, 47
 tercera de la, 47
Tymoczko, Dimitri, 4
Voces
 cruce, 43
 desplazamiento, 71