



Universidad Autónoma de Baja California
Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo
Maestría en Ciencias Educativas



***“Errores aritméticos que cometen los estudiantes
de tercer grado de secundaria”***

T E S I S

que para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS EDUCATIVAS

Presenta

Elizabeth Gómez Solís

Ensenada B.C., Diciembre, 2009



Universidad Autónoma de Baja California
Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo
Maestría en Ciencias Educativas



***“Errores aritméticos que cometen los estudiantes
de tercer grado de secundaria”***

T E S I S

que para obtener el grado de

MAESTRA EN CIENCIAS EDUCATIVAS

Presenta

Elizabeth Gómez Solís

APROBADO POR:

Dr. Eduardo Bachkoff Escudero
(Director de Tesis)

Dra. Graciela Cordero Arroyo
Sinodal

Dr. Javier Organista Sandoval
Sinodal

Ensenada B.C., Diciembre, 2009

A mí hija Meliza

Agradecimientos

A Dios.

A mi hija Meliza, por su paciencia y apoyo incondicional.

A mis padres, por su apoyo incondicional durante la realización de este trabajo.

A mi director de tesis, el Dr. Eduardo Backhoff Escudero, por brindarme su apoyo para concluir con otro de mis objetivos profesionales.

Con profundo agradecimiento a la Dra. Graciela Cordero Arroyo, Mtra. Kiyoko Nishikawa Aceves y Dr. Javier Organista Sandoval, por sus valiosos comentarios y sugerencias a este trabajo.

CONTENIDO

I. INTRODUCCIÓN	01
1.1. Preguntas de investigación	07
1.2. Supuestos	08
1.3. Objetivos	08
1.4. Importancia del estudio	08
1.5. Organización del trabajo de tesis	09
II. LAS PRUEBAS DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA DISEÑADAS POR EL INEE	11
2.1. Concepto de currículum	11
2.2. Currículum de matemáticas de secundaria	12
2.2.1. Enfoque de la enseñanza de matemáticas	12
2.2.2. Contenidos del currículum de matemáticas	13
2.3. El INEE y la evaluación de los aprendizajes	18
2.3.1. Características generales de las pruebas Excale	19
2.3.2. Características del Excale09 de Matemáticas	21
III. MARCO TEÓRICO	24
3.1. Fundamentos filosóficos del error	24
3.2. Antecedentes sobre el estudio del error en educación matemática	27
3.3. Situación actual sobre el estudio del error en educación matemática	31
3.4. Líneas de investigación sobre análisis de los errores	32
3.5. Causas, dificultades y clasificación de errores	33
3.6. Técnicas de análisis del error en matemáticas	41
IV. MÉTODO	43
4.1. Participante	44
4.2. Instrumentos	44
4.2.1. Los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas	45
4.2.2. Guía de entrevista	49
4.3. Procedimiento	50
4.3.1. Aplicación de los 12 problemas	50
4.3.2. Aplicación de entrevistas	51
4.3.3. Descripción de respuestas erróneas	52
4.3.4. Clasificación de tipos de error.	52
4.3.5. Comparación entre tipos de error y distractores	53
4.4. Procesamiento de análisis de resultados	53
4.4.1. Procesamiento de características de las escuelas y los participantes	54
4.4.2. Procesamiento de clasificación de respuestas a los 12 problemas	54
4.4.3. Procesamiento de análisis de las entrevistas	55
4.4.4. Procesamiento de clasificación de tipos de error que elaboró el comité	55

4.4.5. Procesamiento de comparación entre tipos de error y distractores	55
---	----

V. RESULTADOS 55

5.1. Análisis de respuestas a los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas. 55

5.1.1. Características de las escuelas y los participantes. 55

5.1.2. Clasificación de respuestas a los 12 problemas 56

5.1.3. Descripción de los tipos de errores. 58

5.1.4. Análisis de las entrevistas. 76

5.2. Clasificación de los tipos error, según el modelo de clasificación empírica de errores de Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987). 78

5.3. Comparación entre distractores y los tipos de error de cada problema. 89

VI. DISCUSIÓN 99

REFERENCIAS

ANEXOS

Anexo A. Tabla de contenidos que evalúa el Excale09 de Matemáticas

Anexo B. Especificaciones de los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas, sobre el eje de Aritmética, tema de números naturales y sus operaciones.

Anexo C. Los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas.

Anexo D. Guía de entrevistas.

Anexo E. Material que se entregó al comité.

TABLAS

Tabla	Descripción	Página
2.1.	Contenidos de Aritmética en el currículum de secundaria.	14
2.2.	Contenidos de Álgebra en el currículum de secundaria.	15
2.3.	Contenidos de Geometría en el currículum de secundaria.	16
2.4.	Contenidos sobre presentación y tratamiento de la información en el currículum de secundaria.	17
2.5.	Contenidos de nociones de probabilidad en el currículum de secundaria.	18
2.6.	Los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas, sobre el eje de Aritmética, tema de números naturales y sus operaciones básicas.	23
4.1.	Estudiantes que participaron en el estudio.	44
4.2.	Especificaciones de los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas,	46
4.3.	Problemas contestados por grupo de estudiantes.	51
5.1.	Descripción de las escuelas participantes en la investigación.	56
5.2.	Descripción de los participantes de la investigación.	57
5.3.	Clasificación de respuestas emitidas por los estudiantes al responder los 12 problemas en la modalidad de respuesta construida.	58
5.4.	Cantidad por tipo de errores de los 12 problemas.	58
5.5.	Descripción general de los tipos de error del problema 1 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	60
5.6.	Descripción general de los tipos de error del problema 2 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	62
5.7.	Descripción general de los tipos de error del problema 3 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	63
5.8.	Descripción general de los tipos de error del problema 4 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	64
5.9.	Comparación entre tipos de error de los problemas 3 y 4	65
5.10.	Descripción general de los tipos de error del problema 5 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	67

Continuación...

Tabla	Descripción	Página
5.11.	Descripción general de los tipos de error del problema 6 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron	68
5.12.	Descripción general de los tipos de error del problema 7 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	70
5.13.	Tipos de respuestas erróneas presentes en los problemas 6 y 7	70
5.14.	Descripción general de los tipos de error del problema 8 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	72
5.15.	Descripción general de los tipos de error del problema 9 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	73
5.16.	Descripción general de los tipos de error del problema 10 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	74
5.17.	Descripción general de los tipos de error del problema 11 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	76
5.18.	Descripción general de los tipos de error del problema 12 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron.	78
5.19.	Alumnos entrevistados para aclarar el procedimiento utilizado al contestar los problemas.	78
5.20.	Cantidad por tipo de errores de los 12 problemas.	78
5.21.	Respuestas de los estudiantes a cada problema de acuerdo con el contenido a evaluar.	78
5.22.	Modelo de clasificación empírica de errores desarrollada por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)	80
5.23.	Clasificación de los tipos de error del problema 1	81
5.24.	Clasificación de los tipos de error del problema 2	82
5.25.	Clasificación de los tipos de error del problema 3	83
5.26.	Clasificación de los tipos de error del problema 4	83
5.27.	Clasificación de los tipos de error del problema 5	84
5.28.	Clasificación de los tipos de error del problema 6	84
5.29.	Clasificación de los tipos de error del problema 7	85
5.30.	Clasificación de los tipos de error del problema 8	85
5.31.	Clasificación de los tipos de error del problema 9	86
5.32.	Clasificación de los tipos de error del problema 10	87
5.33.	Clasificación de los tipos de error del problema 11	87
5.34.	Clasificación de los tipos de error del problema 12	88
5.35.	Categorías del modelo desarrollado por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987), utilizadas por los jueces para clasificar los tipos de error de cada problema.	89

Continuación...

Tabla	Descripción	Página
5.36.	Causas que originaron los 43 tipos de error de acuerdo con el comité a partir del modelo de Movshovitz- Hadar, <i>et al.</i> (1987)	90
5.37.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 1	91
5.38.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 2	91
5.39.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 3	92
5.40.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 4	93
5.41.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 5	93
5.42.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 6	94
5.43.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 7	95
5.44.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 8	95
5.45.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 9	96
5.46.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 10	96
5.47.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 11	97
5.48.	Comparación entre tipos de error y distractores del problema 12	97
5.49.	Comparación entre tipos de error y distractores de cada problema.	98

FIGURAS

Figura	Descripción	Página
4.1.	Etapa de desarrollo del estudio.	50
4.2.	Procesamiento de la información.	54
5.1.	Esquema elaborado por los estudiantes que cometieron el error <i>E5.3</i>	66

I. Introducción

En México, las matemáticas escolares ocupan un lugar central en los planes y programas oficiales implementados por la Secretaría de Educación Pública (SEP). Su importancia se refleja en la gran proporción que se le destina en la currícula de los niveles básicos obligatorios (preescolar, primaria y secundaria).

El interés por la enseñanza de las matemáticas en el ámbito internacional crece en la década de los ochenta. En el V Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) realizado en Adelaida, Australia, en agosto de 1984, se presentaron una serie de trabajos relacionados con el tema "Matemática para todos". Los trabajos buscaban contribuir a mejorar la comprensión de la enseñanza de las matemáticas, pero no sólo de los estudiantes más capaces, sino también de aquellos que provenían de culturas y circunstancias sociales diferentes, así como de distintos niveles escolares. En dicho congreso se incluyó un área temática titulada "Teoría de la educación matemática". Así, al finalizar el evento se consolidó un grupo de trabajo denominado *Theory of Mathematics Education* (TME), interesado en construir las bases teóricas de la didáctica de las matemáticas como ciencia (Demerow, Dun Kley, Nebres y Werry, 1984), grupo que ha realizado aportaciones importantes a este campo.

En México, en esta década no se registraron esfuerzos claros en este campo. El Primer Congreso Nacional de Investigación Educativa (CNIE) se realizó en noviembre de 1981. Uno de sus objetivos fue determinar los lineamientos de la actividad investigadora, pero también se pretendía conocer el estado del conocimiento en el campo de la educación en nuestro país. Para cumplir con dicho objetivo, las líneas temáticas que se establecieron fueron: 1) Marcos teóricos para el estudio de la investigación educativa; 2) Inventarios, metodología y capacidad de la investigación educativa; 3) Formación de investigadores; 4) Comunicación y difusión de resultados y, 5) Evaluación y prioridades de la investigación educativa (Servín, 1994).

Una década después se realizó el Segundo Congreso Nacional de Investigación Educativa (COMIE) en noviembre de 1993, con el propósito de conocer el balance de la investigación sobre investigación educativa entre 1981 y 1993. En este congreso participaron universidades e instituciones públicas de carácter nacional, del sector educativo y de investigación; así como fundaciones, instituciones y organismos de carácter privado o civil (Servín, 1994).

En el segundo congreso se abrieron seis ejes temáticos: 1) Sujetos de la investigación; 2) Procesos de enseñanza-aprendizaje; 3) Procesos curriculares, institucionales y organizacionales; 4) Educación, sociedad, cultura y políticas organizacionales; 5) Educación no formal de adultos y popular, y 6) Teoría, campo e historia de la educación. Dentro del segundo eje se incluyó el subtema Procesos de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas (Galán, 1996). Los trabajos presentados sobre matemáticas se concentraron en un compendio coordinado por Block y Waldegg (1995). Estos investigadores concluyeron que los estudios realizados en la década de los setenta seguían líneas de investigación centradas en elaboración de textos y formación de profesores. Para los ochenta, se abrió la línea de investigación sobre la didáctica de las matemáticas centrada en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina.

En 2003 el COMIE presentó la Colección La Investigación Educativa en México, con el objetivo de conocer los estados del conocimiento del país. Esta colección comprende la década de los noventa (1992-2002) (Rueda, 2003). En la Colección, López y Eudave (2003) estuvieron a cargo de la elaboración del capítulo sobre investigación en educación matemática en nivel secundaria. Los autores mencionan que se encontraron un total de 80 trabajos, entre publicaciones y tesis, sobre investigación en matemáticas a nivel secundaria. Se especifica que los contenidos que se abordaron fueron: álgebra, aritmética, geometría y probabilidad, y en su mayoría se centraron en preálgebra y álgebra, con un total de 37 trabajos presentados. En el documento citado, se señala que la línea de evaluación de los aprendizajes fue incipiente, y se espera que aumente para la siguiente década con el impulso que la SEP le ha dado en México a la evaluación externa.

Un ejemplo de ello es la creación del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) en agosto de 2002 (INEE, 2004), así como el impulso a los proyectos de los estándares nacionales y las evaluaciones realizadas dentro del programa de Carrera Magisterial (López y Eudave, 2003).

Los trabajos recopilados sobre investigación en matemáticas se caracterizan por la diversidad de aproximaciones teóricas, metodológicas, de contenido, de elementos del sistema didáctico (alumno, maestro y alumno; enseñanza y, recursos de enseñanza), así como de líneas de investigación.

Una de las líneas de investigación sobre educación de las matemáticas que da origen a estudios en todos los niveles educativos y en diversos países, es el estudio del error en el aprendizaje de las matemáticas.

El estudio del error en matemáticas cuenta con una larga historia. Por ejemplo, Radatz (1980) señala que las investigaciones realizadas hasta los años ochenta se centraron en dos aspectos: a) un predominio de los temas de aritmética y conocimiento del número, y b) la pluralidad en las aproximaciones teóricas y metodológicas para abordar el estudio del error. Este autor identificó que las investigaciones acerca del error en Estados Unidos presentaron un desarrollo teórico continuo, mientras que en los países europeos fueron esporádicas. En el caso de México, los primeros estudios acerca del error en matemáticas se desarrollaron al consolidarse los diferentes grupos de investigación en esta disciplina (Cortés, 2003).

En el aprendizaje de las matemáticas, el estudio del error se ha abordado desde distintos enfoques. Las reflexiones actuales los consideran como parte normal del proceso de aprendizaje, debido a que la producción de errores y dificultades no es exclusiva de los estudiantes menos capaces para trabajar con las matemáticas. Sin embargo, el sistema educativo tiene como objetivo permanente lograr que todos los alumnos tengan un aprendizaje correcto de las matemáticas, con lo cual, la presencia de errores y

dificultades en el manejo de dicha disciplina se puede considerar como un fracaso de los objetivos (Rico, 1995).

Si se acepta que el conocimiento matemático en parte es construido a través de un proceso reflexivo en el que los errores son una realidad permanente, es necesario incluir actividades que se generen por la crítica a las propias producciones. Las metodologías actuales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en su mayoría recomiendan identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, determinar sus causas y que el profesor organice la enseñanza considerando las ideas previas de los estudiantes (Abrate, Pochulu y Vargas, 2006).

La metodología mencionada es posible gracias a que las matemáticas escolares tienen bien definidos los contenidos y los problemas que se plantean a los estudiantes; además los planteamientos matemáticos poseen una respuesta adecuada o correcta, y cualquier otra respuesta se considera inadecuada o incorrecta; aunque puede darse el caso de dejar sin respuesta el problema planteado. Al considerar que una respuesta es incorrecta en un problema matemático, la respuesta es errónea en relación a la situación planteada. Sin embargo, el error no es efecto de la ignorancia o del azar, como lo consideran algunas de las escuelas empiristas del aprendizaje, sino de conocimientos adquiridos anteriormente, con orígenes en diferentes causas, de las cuales algunas se presentan inevitablemente (Rico, 1995).

Cabe señalar que dicha metodología se menciona de forma explícita en los nuevos planes y programas oficiales de nivel básico de secundaria en México, a partir de 2006 (SEP, 2006a). En este documento, en su apartado de evaluación del aprendizaje, se explica que el maestro debe poner atención en las participaciones de los alumnos, con el fin de conocer el grado de dominio y las dificultades que presentan en sus aprendizajes. Los errores y los aciertos le sirven al profesor para comprender cómo piensan los alumnos y, con base en ello, elegir la mejor manera para apoyarlos en su aprendizaje. De esta manera, se espera dejar de ver a los errores como algo penoso o que debe evitarse.

Así mismo, a partir de las décadas de los ochenta y noventa, las investigaciones sobre el análisis del error en el aprendizaje de las matemáticas lo conciben como instrumento de identificación de los problemas curriculares o de la metodología de enseñanza. Por otro lado, se constituye como instrumento para la comprensión de los procesos cognitivos de los alumnos. Una de las personas que ha abordado el error desde esta perspectiva es Borassi (1989).

En relación con las investigaciones en matemáticas a nivel secundaria sobre detección de concepciones erróneas, el análisis de sus causas y el estudio de su evolución, Del Río (1990) explica que hasta 1990 las principales investigaciones que se habían ocupado de este importante tema abordaron los contenidos de aritmética, álgebra, geometría, y análisis de gráficas de funciones y cálculo diferencial e integral. Dichos estudios dan cuenta del análisis del error en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, como instrumento para conocer los procesos cognitivos de los estudiantes en temas específicos.

Ahora bien, en la recopilación realizada en la tercera colección sobre los estados del conocimiento de Investigación Educativa en México correspondiente a la década de los noventa, como investigaciones o publicaciones sobre detección de concepciones erróneas, análisis de sus causas y el estudio de su evolución, solamente aparece el trabajo de Eudave (1997), cuyo objetivo fue identificar la naturaleza de los errores cometidos por los estudiantes al resolver tareas algebraicas simples. Por otra parte, se encontraron investigaciones que abordaron el estudio del error como instrumento para conocer los procesos cognitivos de los estudiantes en contenidos de aritmética y álgebra. La evaluación de los aprendizajes en matemáticas fue otra área que se vio poco favorecida en esta década.

Una de las formas empleadas por el INEE para evaluar el sistema educativo mexicano es a través de los aprendizajes que logran los estudiantes en determinadas asignaturas y grados escolares. La evaluación que realiza esta institución se hace mediante pruebas

elaboradas y aplicadas por el Instituto, conocidas como Exámenes de la Calidad y del Logro Educativo (Excale). Su primera aplicación fue entre mayo y junio de 2005, con el fin de evaluar los aprendizajes en español y matemáticas, de estudiantes de sexto de primaria (Excale06) y tercero de secundaria (Excale09).

En el caso específico del Excale09 de Matemáticas, el INEE lo aplicó a una muestra conformada por 52,251 estudiantes de tercer grado de secundaria, pertenecientes a 2,397 escuelas a nivel nacional. Los resultados obtenidos en el Excale09 de Matemáticas fueron: 51.1% de los estudiantes se encuentran por debajo del nivel básico; 29.5% de los estudiantes se ubicaron en el nivel básico; 18% de los estudiantes se encuentran en el nivel medio y únicamente 1.4% de los estudiantes se ubican en nivel avanzado (Backhoff, Andrade, Sánchez, Peon y Bouzas, 2006a).

Ante este panorama nacional, el INEE ha desarrollado varios proyectos a partir de los resultados obtenidos por el Excale para cumplir con su misión. Uno de sus proyectos, titulado *Análisis de errores cometidos por los estudiantes a partir de las pruebas Excale de Matemáticas*, tienen el objetivo general de identificar los errores sistemáticos cometidos por los estudiantes al resolver problemas matemáticos considerados en el curriculum nacional de educación básica. Entre sus objetivos particulares se mencionan identificar los errores sistemáticos cometidos por los alumnos de tercero y sexto de primaria y tercero de secundaria al contestar los reactivos en los que se evalúa el tema de números naturales y sus operaciones básicas; así como el de identificar las causas que expliquen los errores que cometen los estudiantes sobre este tema.

El presente trabajo se desprende de este proyecto. Su propósito es describir y clasificar los errores cometidos por los estudiantes de tercero de secundaria al contestar, en la modalidad de respuesta construida, 12 problemas del eje de Aritmética, en el tema “números naturales y sus operaciones básicas”, del Excale09 de Matemáticas.

Los resultados aportan información relevante para comprender por qué y en qué contenido los estudiantes de secundaria contestan erróneamente los problemas, lo que podrá ser, es de utilidad para los profesores cuando abordan dicho contenido en sus aulas. Un segundo propósito es dar a conocer si las operaciones que utilizaron los alumnos en las respuestas erróneas son las mismas que el INEE utilizó en los tres distractores al aplicar los mismos problemas en la modalidad de respuesta de opción múltiple.

1.1. Preguntas de investigación

La investigación se centra en las siguientes preguntas enfocadas al estudio del error: *¿cuáles son los errores que cometen los estudiantes de tercero de secundaria al responder 12 problemas del eje de Aritmética, en el tema “números naturales y sus operaciones básicas” del Excale09 de Matemáticas?* La respuesta aporta información para ampliar los datos que el INEE ha dado a conocer sobre los resultados obtenidos en los Excale09 de Matemáticas.

La otra pregunta consiste en identificar, a partir del modelo empírico de clasificación de errores en Matemáticas propuesto por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). *¿cuáles son las causas que originaron los errores cometidos por los estudiantes de secundaria al resolver los 12 problemas?*

La última pregunta se centra en comparar si: *¿las respuestas erróneas que dieron los estudiantes a los problemas al aplicarse en modalidad de respuesta construida, coinciden con las respuestas implícitas en los distractores de los problemas al aplicarlos en modalidad de respuesta de opción múltiple?*

1.2. Supuestos

- Los errores que cometen los estudiantes al resolver los 12 problemas de Aritmética, no tienen su origen en la dificultad para resolver el algoritmo implícito.

- Los errores que cometen los estudiantes pueden ser clasificados satisfactoriamente con la clasificación de errores en matemáticas de Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987).
- Los errores que cometen los estudiantes al contestar los 12 problemas en modalidad de respuesta construida, no coinciden con las respuestas implícitas en los distractores.

1.3. Objetivos

Generales:

- a) Clasificar los errores que cometen los estudiantes de tercero de secundaria al contestar 12 problemas del eje de Aritmética, en el tema de “números naturales y sus operaciones básicas” del Excale09 de Matemáticas.
- b) Identificar si los tipos de errores que dieron los estudiantes de tercero de secundaria a los problemas coinciden con las respuestas implícitas en los distractores del Excale09 de Matemáticas.

Particulares:

- 1) Contribuir al conocimiento sobre los tipos de errores que cometen los estudiantes de secundaria al resolver 12 problemas en la modalidad de respuesta construida del tema de “Aritmética”, del Excale09 de Matemáticas.
- 2) Especificar las posibles causas que originan que los alumnos cometan errores al contestar los 12 problemas.
- 3) Proponer una alternativa metodológica para lograr que los distractores que se utilizan en los Excale09 de Matemáticas sean los tipos de errores más comunes que presentan los estudiantes al resolver los problemas.

1.4. Importancia del estudio

Los resultados de este estudio aportan información para identificar las causas del por qué los estudiantes de secundaria obtienen bajos resultados al contestar el Excale09 de Matemáticas. Permite, además, conocer si las respuestas erróneas dadas por los

estudiantes en 12 problemas aplicados en la modalidad de respuesta construida corresponden a distractores especificados en los mismos problemas cuando se aplican en la modalidad de respuesta de opción múltiple. Estos datos den soporte a la propuesta para determinar los distractores a partir de los errores más comunes que cometen los alumnos. Así, el distractor sea un elemento que de cuenta de los procesos cognitivos erróneos que poseen los estudiantes que lo seleccionan.

Esta investigación utilizó información del proyecto *Análisis de errores cometidos por los estudiantes a partir de las pruebas Excale de Matemáticas*, desarrollado por el INEE. En este sentido los resultados de este estudio son una extensión y un aporte a dicho proyecto.

1.5. Organización del trabajo de tesis

La organización de la presente tesis de maestría se presenta de la siguiente manera. En el *capítulo I, de Introducción*, se incluye la descripción del problema, las preguntas de investigación, los supuestos, los objetivos y la importancia del estudio. En el *capítulo II, de Las pruebas de matemáticas de secundaria diseñadas por el INEE*, incluye una breve descripción sobre el concepto de curriculum, el curriculum de matemáticas de secundaria en México, su enfoque y contenidos, la evaluación de los aprendizajes que realiza el INEE, características de los Excale y características del Excale09 de Matemáticas. En el *capítulo III, del Marco Teórico*, se hace una revisión de la literatura acerca de los fundamentos filosóficos del error, antecedentes y situación actual sobre el estudio del error en matemáticas, principales líneas de investigación sobre el análisis del error en matemáticas, modelos de clasificación y técnicas de análisis de los errores en matemáticas. El *capítulo IV, del Método*, se organiza en cuatro fases: en la primera fase se realizó la selección de los estudiantes, la aplicación de los instrumentos (12 problemas del Excale09 de Matemáticas y una entrevista semiestructurada) y el análisis de la descripción de los errores; en la segunda fase, el comité realizó la clasificación de los errores que emitieron los estudiantes de secundaria, según el modelo de clasificación propuesto por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987); en la fase tres, se realizó la comparación

entre los errores cometidos por los estudiantes y los errores implícitos en los distractores de cada problema. El **capítulo V, de los Resultados**, presenta los resultados sobre las características generales de los participantes, la descripción de los errores de los 12 problemas, las causas de los errores según el modelo propuesto por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987) que realizó el comité y los resultados de la comparación entre los errores y las respuestas erróneas implícitas en los distractores. En el **capítulo VI, de Discusión**, se analizan las preguntas de investigación y se reflexiona sobre el cumplimiento de los objetivos, se muestran los principales hallazgos y las limitaciones del estudio y se incluyen recomendaciones para futuras investigaciones derivadas de los resultados encontrados en la presente investigación.

II. Las pruebas de matemáticas de secundaria diseñadas por el INEE

En el presente capítulo se desarrollan los siguientes contenidos: concepto de currículum; propósitos del currículum mexicano de matemáticas para secundaria; enfoque de la enseñanza de las matemáticas de secundaria; contenidos del currículum de matemáticas de secundaria; y se presenta un panorama general sobre el INEE y las características de los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativo (Excale) diseñados por el instituto para evaluar los aprendizajes que logran los estudiantes del Sistema Educativo Mexicano.

2.1. Concepto de currículum

Desde un enfoque procesual, el currículum es un objeto que se construye en las fases de: configuración, implantación, concreción y expresión. Durante dicho proceso el currículum sufre diversas transformaciones que son generadas por múltiples fuerzas y agentes que influyen en su configuración e intervienen en distintos aspectos del mismo. Visto así, es llamado sistema curricular (Gimeno, 2002).

La visión del currículum como algo que se construye, origina varios significados porque además de ser susceptible de diferentes enfoques paradigmáticos, algunos autores se centran en ciertas fases o momentos del proceso (Carroll, 1963; Alsina, 2000; Mullis, *et al.*, 2002). Por ello, todas las definiciones sobre currículum son parciales y tienen parte de verdad (Gimeno, 2002). La perspectiva sobre currículum que en este apartado se retoma, es la elaborada por Gimeno (2002), que distingue seis niveles:

1. *Currículum prescrito*: Orientación de lo que debe ser el contenido, sobre todo en relación con la escolaridad obligatoria.
2. *Currículum presentado a los profesores*: Traducción elaborada por diversos medios para que los profesores den significado y contenido al currículum prescrito.

3. *Currículum moldeado por los profesores*: El profesor es un agente activo y traductor que interviene en configurar los significados de las propuestas curriculares.
4. *Currículum en acción*: La práctica real, guiada por los esquemas teóricos y prácticos del profesor, que se concreta en las tareas académicas. esta fase es lo que le da sentido a la calidad de la enseñanza.
5. *Currículum realizado*: Efectos que se producen como consecuencia de la práctica que afecta los aprendizajes de los estudiantes y a los profesores.
6. *Currículum evaluado*: A través de éste se refuerza el significado concreto de la práctica educativa.

2.2. Currículum de matemáticas de secundaria

En México, los planes y programas para matemáticas tienen como propósito central que los estudiantes aprendan a utilizar las matemáticas para resolver problemas que involucren la curiosidad y la imaginación creativa, y no sólo los que se resuelven con procedimientos y técnicas aprendidas en las escuelas. Es decir, con el estudio de las matemáticas se pretende el desarrollo de habilidades, la promoción de actitudes positivas y la adquisición del conocimiento de la disciplina (SEP, 1993).

2.2.1. Enfoque de la enseñanza de matemáticas

Con la Reforma Educativa de 1993, los planes y programas de matemáticas para secundaria adoptaron un enfoque para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas donde el profesor plantea a los estudiantes situaciones problemáticas, con la intención de que éstos se vean inmersos en un proceso de construcción del conocimiento. Este proceso solicita al estudiante resolver el problema, apoyado en sus conocimientos previos, elaborar conjeturas, descubrir nuevas estrategias de solución, seleccionar las estrategias más adecuadas y validar sus resultados (SEP, 1993).

El enfoque se basa en la resolución de problemas, que en los últimos 30 años se ha identificado como una actividad importante en el aprendizaje de las matemáticas. Se pone atención especial a los tipos de problemas que permiten a los estudiantes no sólo

buscar respuestas, sino también reflexionar en torno al significado y a las formas de razonamiento asociadas con la solución de los problemas. Un aspecto notable se relaciona con las actividades que el estudiante realiza intencionalmente en busca de los significados de las matemáticas y con discutir el sentido de la solución de los problemas que se le presentan (Santos, 2007).

Las matemáticas vistas en términos de resolución de problemas cuestionan la aceptación de la disciplina como el conjunto de hechos, algoritmos o reglas que el estudiante debe memorizar, y definen a las matemáticas como la ciencia de los patrones (Santos, 2007).

2.2.3. Contenidos del currículum de matemáticas

El currículum de matemáticas en la escuela secundaria está organizado en tres programas de estudio, uno para cada grado escolar. Los programas de estudio se organizan en cinco áreas:

1. Aritmética.
2. Álgebra.
3. Geometría (en el tercer grado se agrega trigonometría).
4. Presentación y tratamiento de la información.
5. Nociones de probabilidad

A continuación se describen de manera breve cada una de las cinco áreas del programa de matemáticas para secundaria.

1. Aritmética. En primero y segundo grado, el programa oficial enfatiza la comprensión de los números naturales y de manera especial de los números decimales en esta área. Así mismo, se favorece la comprensión de las nociones aritméticas a partir de la resolución de problemas diversos y el desarrollo de las estrategias de conteo, cálculo mental, estimación de resultados y el uso de la calculadora.

En cuanto al estudio de las fracciones, se inicia en primer grado con una revisión de los usos y significado de las fracciones comunes y sus operaciones, para continuar en grados posteriores con el tema de fracciones algebraicas.

En tercer grado se incluye el cálculo de la raíz cuadrada por diversos métodos. Este tema, junto con el de errores de aproximación, permite la introducción de temas como son la recurrencia y el error de aproximación, su cálculo y estimación en situaciones sencillas (ver Tabla 2.1).

Tabla 2.1. Contenidos de Aritmética en el currículum de secundaria

Temas de Aritmética		
Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
Los números naturales y sus operaciones.	Números naturales y decimales.	-
Sistemas de numeración.	-	-
Los decimales y sus operaciones.	-	-
-	Conteo.	-
-	Números primos y compuestos.	-
Fracciones.	Fracciones.	-
Proporcionalidad.		-
Números con signo.	Números con signo.	-
Preálgebra.	-	-
-	-	Raíz cuadrada y cálculos aproximados.

2. Álgebra. El álgebra es uno de los temas centrales de la enseñanza de las matemáticas en el programa para la escuela secundaria.

En primer grado se incluyen algunos contenidos de preálgebra con la intención de introducir a los estudiantes en el uso de las literales. En segundo grado se revisan las reglas de escritura algebraica; se estudian las ecuaciones lineales y las operaciones con monomios y polinomios; se introduce el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones lineales. Estos temas se retoman en tercer grado y se completan con el de

productos notables y factorización, así como con el estudio de las ecuaciones cuadráticas (ver Tabla 2.2).

Tabla 2.2. Contenidos de Álgebra en el currículum de secundaria

Temas de Álgebra		
Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
-	Iniciación al lenguaje algebraico.	-
-	Ecuaciones lineales o de primer grado.	Sistemas de ecuaciones lineales.
-	El plano cartesiano.	Plano cartesiano y funciones.
-	Sistemas de ecuaciones lineales.	Ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.
-	Operaciones con monomios y polinomios.	Operaciones con expresiones algebraicas.
-	-	Productos notables y factorización.
-	-	Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

3. Geometría. En esta área, el currículum enfatiza primordialmente: los trazos y construcciones geométricos; el uso efectivo de los diferentes instrumentos de medida; el diseño de situaciones y problemas que favorecen el desarrollo de las capacidades para estimar magnitudes físicas y geométricas; el uso de fórmulas para calcular perímetros, áreas, volúmenes y capacidades; la exploración de las simetrías de una figura; el conocimiento, manipulación y representación plana de los sólidos geométricos comunes; la aplicación de los teoremas de Pitágoras y de semejanza en la solución de problemas de cálculo geométrico.

En el tercer grado de secundaria se introduce la trigonometría, con el estudio de las razones trigonométricas de un triángulo y las utilicen en la resolución de problemas como el cálculo de distancias inaccesibles a la medición directa (ver Tabla 2.3).

Tabla 2.3. Contenidos de Geometría en el currículum de secundaria

Temas de Geometría		
Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
Dibujo y trazos geométricos.	Figuras básicas y trazos geométricos.	Triángulos y cuadriláteros.
-	-	Círculo.
-	-	El teorema de Pitágoras.
Simetría axial.	Simetría axial y central.	-
-	Ángulos entre paralelas y una secante.	-
Medición y cálculo de áreas y perímetros.	Equivalencia de figuras y cálculo de áreas.	-
Sólidos.	Sólidos.	Sólidos.
-	-	Elementos de trigonometría.

4. Presentación y tratamiento de la información. Esta área inicia con el estudio de los usos de porcentajes, tablas, gráficas y otras formas comunes de representar la información, centrando la atención en la identificación de la proporcionalidad en diversas tablas y gráficas.

En segundo grado se insiste en la lectura y elaboración de tablas y gráficas de uso frecuente en la estadística, la economía y otras disciplinas. En tercer grado se abordan algunos temas de estadística, como son las nociones de población, muestra, censo y encuesta (ver Tabla 2.4).

Tabla 2.4. Contenidos sobre presentación y tratamiento de la información en el currículum de secundaria

Tema: Presentación y tratamiento de la información		
Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
Lectura y elaboración de tablas y gráficas.	Organización y presentación de datos.	-
Exploración de la proporcionalidad en tablas y gráficas.	-	-
Razones y porcentajes.	Cálculo y determinación de tantos por cien, por mil y partes en millón.	-
-	Cálculo de promedios y densidades.	-
-	Función como una relación entre dos cantidades.	-
-	-	Razones trigonométricas.
-	-	Valores del seno, coseno y tangente para ángulos de 30°, 45° y 60°
-	-	Triángulos rectángulos.

5. Nociones de probabilidad. En esta área se pone énfasis en que los alumnos exploren de manera empírica o teórica los posibles resultados de una experiencia aleatoria y así construyan modelos de probabilidad para simular y resolver problemas.

Se privilegia el empleo de diagramas de árbol en la enumeración y descripción de los posibles resultados de una experiencia aleatoria, el uso de la fórmula clásica de la probabilidad en situaciones con un número pequeño de resultados equiprobables; el estudio de las experiencias repetidas e independientes y la regla del producto; así como la resolución de problemas de probabilidad por medio de la simulación (ver Tabla 2.5).

Tabla 2.5. Contenidos de nociones de probabilidad en el curriculum de secundaria

Temas de Probabilidad		
Primer grado	Segundo grado	Tercer grado
Registro y enumeración de resultados de un experimento aleatorio.	Noción frecuencial de la probabilidad.	Nociones de probabilidad.
Estimación y comparación de probabilidades.	Experiencias aleatorias y fórmula clásica.	-
Diagramas de árbol y arreglos rectangulares.	-	-
Expresión de la probabilidad como una fracción, un decimal y un porcentaje.	-	-
-	Problemas sencillos que puedan resolverse por simulación.	Solución de problemas por simulación; esquema de urnas de Bernoulli.
-	Cálculos con probabilidades.	Cálculos con probabilidades.

2.3. El INEE y la evaluación de los aprendizajes

El INEE es una instancia técnicamente independiente de la SEP; sin embargo, tiene la función de colaborar con esta en la evaluación del Sistema Educativo Nacional. El instituto tiene dentro de sus objetivos evaluar lo que los estudiantes mexicanos aprenden del currículum nacional, con el fin de retroalimentar a las políticas educativas nacionales y estatales; los programas de estudio y los libros de texto; la administración y gestión escolar, y la formación y actualización docente (Backhoff y Díaz, 2005a, INEE, 2004).

Para lograr el objetivo de evaluar los conocimientos y habilidades de los estudiantes de educación básica y media superior, el instituto desarrollo el *Plan General de Evaluación del Aprendizaje* (PGEA), donde se especifica la creación de una nueva generación de pruebas nacionales, llamados *Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos* (Excale). Los Excale00 son pruebas que se aplican a estudiantes que cursan tercer grado de preescolar; los Excale03 se aplican a estudiantes que cursan tercer grado de primaria. Los Excale06 se aplican a estudiantes que cursan sexto grado de primaria; los Excale09 se aplican a los estudiantes que cursan tercer grado de secundaria; los Excale12, se aplican a los estudiantes que cursan tercer grado de preparatoria (Backhoff y Díaz, 2005a).

2.3.1. Características generales de las pruebas Excale

El Consejo Técnico del INEE definió que sus pruebas *Excale* deberían presentar las siguientes cuatro características: 1) de gran escala; 2) de tipo criterial; 3) alineadas al currículo nacional; 4) con diseño matricial. A continuación se describe cada una de las características.

1) *Pruebas de gran escala.* Las pruebas de gran escala están diseñadas para evaluar una gran cantidad de estudiantes de un estado, una región o un país. Los resultados pueden tener un gran impacto, en particular para los estudiantes, los profesores y las instituciones. Los requisitos técnicos que se requieren son altos, su elaboración implica procedimientos sofisticados, se requiere contar con especialistas en exámenes y en la materia de conocimiento en cuestión, tiempo para su elaboración y dinero para su elaboración y aplicación. Entre los propósitos de una evaluación de gran escala se encuentran: seleccionar, rendir cuentas de la gestión, y certificar el logro educativo (Contreras, 2000; Backhoff, Monroy, Peón, Sánchez y Tanamachi, 2005b). En el caso concreto del INEE, su objetivo es evaluar el logro del aprendizaje de los estudiantes mexicanos, y con los resultados apoyar en la mejora del sistema educativo nacional, así como aportar elementos para la rendición de cuentas sobre la gestión educativa (Backhoff y Díaz, 2005a, INEE, 2006).

2) *Pruebas criterioles.* Una manera de clasificar las pruebas de aprendizaje es de acuerdo con la interpretación de sus resultados. Las pruebas criterioles se diseñan para evaluar con mayor precisión el grado de dominio que el estudiante tiene sobre contenidos específicos. Así, el referente para interpretar los resultados es la cantidad y el tipo de material que el estudiante maneja del universo de contenidos evaluados de la prueba (Popham, 1990).

Por lo general, las pruebas criterioles cumplen con el propósito de evaluar programas, certificar competencias académicas y diagnosticar (Contreras, 2000).

Estas pruebas, dejan de lado la idea de comparar a los alumnos entre sí o comparar unas escuelas con otras, sin embargo, se centran en el análisis y valoración de lo que los estudiantes logran hacer respecto a lo que deberían aprender, como resultado de la intervención de la escuela (Backhoff, *et al.*, 2005b).

En el caso de los Excale, son pruebas criterioles, que enfatizan en la descripción detallada de los contenidos que se evalúan y ofrecen a los profesores y a las instituciones educativas mayor información del dominio que sus estudiantes tienen de los contenidos evaluados, así como de aquéllos en los que presentan mayores dificultades (Backhoff, *et al.*, 2006).

3) *Pruebas alineadas al currículum nacional.* En México, la educación básica se caracteriza por contar con un currículum único, que ha sufrido cambios recientes en los planes de estudio de los niveles de preescolar, primaria y actualmente en secundaria. La ventaja de contar con un currículum único, libros de texto gratuitos y una formación magisterial uniforme, permite profundizar con mayor detalle en la calidad de los servicios educativos que se ofrecen a nivel nacional en México (Backhoff, *et al.*, 2005b). Estas características del sistema educativo mexicano influyeron para que el INEE considerara que la nueva generación de pruebas estuviera alineada al currículum. Es decir, el instituto determinó como propósito evaluar los aprendizajes del currículum mexicano (conocimientos y habilidades). Sin embargo, dicha característica generó que la validez de los exámenes dependa directamente de qué tan bien estén definidas las metas curriculares. Además, una prueba apegada a currículum es de gran utilidad para los profesores al evaluar lo que se espera que se enseñe en las aulas. La información que se obtiene de su aplicación aporta información sobre los avances logrados por los estudiantes del sistema educativo nacional, y también de aquellos contenidos en los que vale la pena redoblar esfuerzos (*op. cit.*).

4) *Pruebas con diseño matricial.* Las pruebas de tipo matricial permiten evaluar una gran cantidad de contenidos, sin someter a los estudiantes a largas jornadas para la resolución. Para lograr lo anterior, se construye un conjunto de reactivos que cubren el dominio completo que se desea evaluar. Posteriormente, se divide en subconjuntos que son repartidos entre varios estudiantes, de esta forma cada uno de los alumnos contesta solamente una parte de los reactivos que se diseñaron para evaluar toda una área de conocimiento (Gaviria 2005, como se cita en Backhoff, *et al.*, 2005b). Sin embargo, es importante mencionar una de las desventajas de elaborar pruebas con diseño matricial, es que los niveles de precisión de calificaciones individuales o por alumno se pierden, a cambio de ello las ventajas son que se fortalecen los análisis sobre resultados a nivel entidad federativa, modalidad educativa y estrato social (Backhoff y Díaz, 2005a).

Con respecto al tipo de respuesta que forman la prueba, los Excale utilizan ítems de opción múltiple que se caracterizan en que le piden al estudiante elegir entre las respuestas dadas la correcta. Además, este tipo de respuesta permite medir muchos tipos de aprendizajes y obtener una buena muestra de contenido (Contreras, 2000).

2.3.2. Características del Excale09 de Matemáticas

De acuerdo con el *Plan Maestro de Desarrollo*, propuesto por el INEE, se realizó una evaluación de los aprendizajes de los estudiantes del Sistema Nacional Educativo en los meses de mayo y junio de 2005. En el estudio se evaluaron las competencias de español y matemáticas a estudiantes que cursaban sexto de primaria y tercero de secundaria, aplicando por primera ocasión los *Excale* (Backhoff, *et al.*, 2006).

Con respecto al *Excale09 de Matemáticas*, consta de 128 reactivos de opción múltiple, que requiere que el estudiante seleccione la respuesta correcta entre cuatro diferentes opciones de respuestas dadas. Los reactivos implican la resolución de problemas por parte de los estudiantes en contextos diversos: problemas de la vida, problemas

geométricos y problemas numéricos, con el fin de ofrecer mayor y mejor información sobre lo que saben los estudiantes del currículum nacional (Backhoff, *et al.*, 2006).

Como se vio anteriormente, el currículum nacional de matemáticas para secundaria, plasmado en los planes y programas de 1993, consta de cinco ejes temáticos: aritmética, álgebra, geometría, presentación y tratamiento de la información, y probabilidad. Los contenidos de estos ejes, son los evaluados en Excale09 matemáticas, distribuidos de la siguiente manera: 34% de reactivos corresponden a aritmética; 26% a álgebra; 33% a geometría; 3% a presentación y tratamiento de la información y, 4% a probabilidad. Ahora bien, de todos los contenidos que evalúa el Excale09 de Matemáticas (Anexo A), para el presente trabajo de tesis, solamente se tomaron en cuenta los 12 problemas del eje de Aritmética, tema de números naturales y sus operaciones básicas, que incluye los contenidos de operaciones con números naturales: revisión de algoritmos; y múltiplos y divisores de un número (ver Tabla 2.6), porque fue la información que el proyecto del INEE proporcionó para realizar la presente investigación.

Tabla 2.6. Los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas, sobre el eje de Aritmética, tema de números naturales y sus operaciones básicas.

Contenido curricular	Especificaciones del contenido a evaluar	Ítems
Operaciones con números naturales. - Revisión de los algoritmos.	Resolver problemas que implican dos o más operaciones de adición y multiplicación.	8
	Resolver problemas que implican dos o más operaciones de adición y sustracción.	
	Resolver problemas que implican dos o más operaciones de multiplicación y división.	
	Resolver problemas que implican dos o más operaciones de multiplicación.	
	Identificar la expresión x^n que modela una situación problemática.	
	Resolver problemas que impliquen calcular la raíz cuadrada hasta centésimos.	
	Comprender el significado y uso de la raíz cuadrada.	
Múltiplos y divisores de un número.	Selecciona las operaciones necesarias (dos o más) que resuelven un problema y el orden de su aplicación.	4
	Resolver problemas que impliquen usar criterios de divisibilidad.	
	Resolver problemas que impliquen calcular el m.c.m.	
	Resolver problemas que involucren usar el concepto y el cálculo del m.c.d.	
	Resolver problemas que impliquen usar m.c.d.	

Fuente: Backhoff, *et al.*, 2006.

III. Marco teórico

En este capítulo se desarrolla una concepción del error como posibilidad en la construcción del conocimiento científico y, en la construcción del conocimiento matemático en los individuos. Por ello, se inicia con los fundamentos filosóficos del error y se concluye con siete de las categorías del error en matemáticas y ciencias, las cuales permiten realizar investigaciones descriptivas del error en el aprendizaje de las matemáticas escolares.

3.1. Fundamentos filosóficos del error

El estudio sobre la capacidad humana para conocer y acceder a la verdad ha sido una preocupación constante de filósofos y pensadores. El error es una posibilidad en el conocimiento científico. Esta afirmación se observa con frecuencia en la historia de diversas disciplinas, las cuales han aceptado como conocimientos válidos y acabados una gran cantidad de conceptos, que hoy en día se ha comprobado que son falsos (Rojas, 2005; Rico, 1995).

La preocupación contemporánea por el conocimiento científico erróneo y las condiciones que lo generan, ha sido abordada por pensadores como Popper (1961), Bachelard (2003) y Lakatos (1982). Se mencionan aquí algunas de sus ideas:

a) Popper

Uno de los principales intereses de Popper (1961) fue cuestionar cuál era la fuente última del conocimiento. Propuso la existencia de dos posturas clásicas que dan respuesta a su planteamiento. La primera es desde el empirismo, el cual considera a la experiencia como fuente última del conocimiento. La segunda, dada por el racionalismo, argumenta que la fuente última de conocimiento verdadero es dada por la razón.

Las dos posturas clásicas se sustentan en la *teoría de la verdad manifiesta*, denominada así por Popper (1961). En ella se plantea que la verdad es siempre reconocida como verdad, que sólo es necesario descubrirla. Al reflexionar sobre cómo aparece el error si la verdad es manifiesta, Popper propone que es difícil de alcanzar y cuando se ha encontrado es fácil volver a perderla. Con ello, da al error un gran poder de supervivencia.

Popper (1961) acepta que se puede errar con frecuencia, pero que es la búsqueda de la eliminación del error y la *falibilidad* lo que lleva a la verdad. Por ello, su interés se centra en identificar los modos de detectar y eliminar el error, como medio para acercarse más a la verdad.

Sus conclusiones más importantes son:

- No hay fuente última del conocimiento. Toda fuente de conocimiento es aceptada como posible y es necesario someterla a examen crítico.
- La cuestión epistemológica adecuada es preguntarse si la afirmación hecha es verdadera, si concuerda con los hechos. La manera de afirmarlo es someter a prueba, de manera directa, la afirmación misma, o bien, sometiendo a prueba las afirmaciones.
- La fuente más importante de nuestro conocimiento es la tradición. La mayoría de las cosas las aprendemos por el ejemplo, la lectura o porque las hemos escuchado.
- El conocimiento por tradición debe ser susceptible de examen crítico, lo cual genera que se modifique o abandone.
- El conocimiento no surge de la nada. El avance del conocimiento se logra a partir de la modificación del conocimiento anterior.
- No hay criterios para establecer la verdad, pero sí hay criterios para detectar el error y la falsedad, así la incoherencia y la inconsistencia permiten establecer la falsedad.
- El examen crítico de las conjeturas con las que se sondea lo desconocido, se debe apoyar en la observación, el razonamiento, la intuición y la imaginación.
- Un problema resuelto plantea nuevos problemas por resolver, la profundidad de ellos depende de la profundidad del problema original y la solución del mismo.

Las aportaciones de Popper (1961) han contribuido al conocimiento general, y al escribir se dirigía a los científicos; sin embargo, destacó aspectos que apoyan los estudios sobre el error: primero, que no hay fuente última del conocimiento; segundo le dio un valor al error, pero más que eso le dio cabida a su existencia, es decir, plantea la posibilidad del error como una forma de acercarse al conocimiento verdadero; por último la búsqueda crítica y constante del error permiten eliminar las teorías falsas.

b) Bachelard

Bachelard (2003) planteó la noción de *obstáculo epistemológico* para explicar la aparición inevitable de los errores en el conocimiento y la importancia de los mismos al generar el avance en el conocimiento científico. Algunas ideas de este autor son:

- Plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculo. Es en el acto mismo del conocimiento donde aparecen los entorpecimientos y las confusiones, lo cual muestra estancamiento y hasta retroceso, es ahí donde se disciernen causas de inercia llamadas obstáculos epistemológicos.
- El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta una sombra. Es decir, el conocimiento real nunca es pleno e inmediato, es lo que debería haberse pensado; sin embargo, el pensamiento empírico es claro e inmediato cuando se ha puesto a disposición de la razón.
- Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad. Es decir, se conoce en contra de un conocimiento anterior, al destruir conocimientos mal adquiridos o superar aquello que obstaculiza el espíritu mismo.
- Es imposible hacer de golpe *tabula rasa* de los conocimientos usuales, debido a que no se puede iniciar de repente desde cero para fundar y acrecentar bienes. Es decir, ante lo real, lo que se cree saber impide pensar claramente sobre lo que debería saberse.
- Para todo espíritu científico, todo conocimiento es una respuesta a una pregunta. Nada es espontáneo, ni está dado, todo se construye.
- La noción de obstáculo epistemológico puede estudiarse en el desarrollo del pensamiento científico y en la práctica de la educación.

Esta noción de obstáculo epistemológico la retomó posteriormente Brousseau, Davis y Werner (1986) para la didáctica de las matemáticas y se redefinió como la teoría de situaciones didácticas. La noción de obstáculo epistemológico y las sucesivas tipificaciones y caracterizaciones de la misma se han utilizado como clave para el estudio, las sistematizaciones, el análisis y las explicaciones de los errores que se presentan en el pensamiento científico.

c) Lakatos

Lakatos (1982) ofrece una metodología basada en los principios de la falsabilidad para la construcción del conocimiento matemático mediante la dialéctica de plantear conjeturas que aproximen a la respuesta de un problema a través de la crítica de las conjeturas por medio de contraejemplos globales o locales. Para este autor, los matemáticos son falibles y sus productos no pueden ser considerados perfectos y finales, sino que requieren de renegociaciones al emerger nuevos desafíos.

A manera de cierre, los autores revisados hasta este momento hacen referencia al conocimiento en general. De ellos, los elementos que se rescatan para los fines de la presente investigación son: todos dan cuenta de que el conocimiento es humano y por ello lleva consigo los errores y los prejuicios del investigador; el error es una constante en la construcción del conocimiento.

3.2. Antecedentes sobre el estudio del error en educación matemática

El estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido de interés para investigadores que lo abordan desde aproximaciones diversas y por múltiples intereses. En diferentes épocas, el análisis y la categorización de los errores han sido influidos tanto por la pedagogía como la psicología.

A inicios del siglo XX, cuando la psicología se reconoció como una ciencia objetiva, interesada en estudiar la conducta observable de los sujetos, en Estados Unidos Edward L. Thorndike (1922) publicó su libro titulado *The psychology of arithmetic*. En él concluye que las leyes del asociacionismo eran muy sencillos de aplicarse a los aprendizajes escolares, porque la doctrina del asociacionismo sostenía que todo conocimiento, incluyendo el más complejo, estaba formado por relaciones sencillas. El aprendizaje consistía en establecer y reforzar las asociaciones necesarias, y la labor del maestro consistía en ofrecer al estudiante las cantidades adecuadas de ejercicios en un orden apropiado, iniciando de lo más sencillo a lo más difícil (Resnick y Ford, 2007).

Thorndike y otros compañeros investigaron los libros de texto de aquella época y encontraron que variaba la cantidad de práctica que se aplicaba a cada combinación numérica. Esto generó una gran cantidad de investigaciones sobre las dificultades relativas a los problemas de aritmética. Un ejemplo de ello fueron los trabajos realizados por Knight y Behrens (como se cita en Resnick y Ford, 2007) con estudiantes de segundo grado, de los cuales registraron cuidadosamente el número de errores cometidos, el número de veces que se tenía que presentar la combinación para que se aprendiera, y la cantidad de práctica necesaria para cada problema. El fin fue proporcionar información sobre la práctica necesaria para cada problema.

En este mismo siglo, los análisis sobre el estudio del error se caracterizaron por ser investigaciones que abordan los errores cometidos en aritmética por los estudiantes de los primeros grados escolares. Una excepción, según Cury (1995), fue el trabajo de Smith realizado con alumnos de bachillerato (*high school*) sobre errores en las demostraciones de geometría plana.

En Alemania, por la misma época, aparecieron las primeras investigaciones sobre análisis de los errores, influenciadas por las corrientes en pedagogía empírica, caracterizada por emplear técnicas de introspección, propias de la psicología experimental. A Hermann Weimer se le considera el iniciador de los estudios sobre investigación didáctica orientada a establecer patrones individuales de errores (Radatz, 1980).

Una segunda fase en el análisis de los errores surgió a partir de los años 50, desde el enfoque llamado procesamiento de información, desarrollado en Estados Unidos. Cabe mencionar que las ciencias de la informática por este mismo tiempo comenzaban a surgir y tuvieron fuerte influencia para la vida del enfoque del procesamiento de la información, se retomó su lenguaje y se incorporó el planteamiento teórico-metodológico basado en la metáfora mente-computadora, la analogía es de carácter funcional (Hernández Rojas, 2004).

Muchos de los estudios desde el enfoque del procesamiento de la información pretenden dar cuenta de cómo se realiza el procesamiento de la información, desde que ingresa al sistema cognitivo hasta que finaliza en la ejecución de una conducta determinada. Para lograr lo anterior

las estrategias metodológicas utilizadas son: introspección, investigación empírica, entrevista o análisis de protocolo y la simulación. Las investigaciones sobre análisis de errores usaron la metodología de entrevista o análisis de protocolo, que consiste en pedir a los alumnos que *piensen en voz alta cuando* resuelven los problemas, y a través de ciertos protocolos ya existentes se analizan las estrategias de resolución o los patrones de errores de los estudiantes (Hernández Rojas, 2004).

A partir de los estudios del procesamiento humano de la información, Brown y Burton (1978) desarrollaron un programa denominado Buggy, con el fin de estudiar los errores sistemáticos cometidos por los estudiantes en operaciones de sustracción. La teoría de la generación de los *buggys*, como menciona Cury (1995) proporciona ideas sobre las mejores y peores elecciones de ejemplos y sobre los métodos más eficientes para seleccionar material. Además, señala que muchas de las investigaciones sobre análisis de errores que utilizan computadoras han influido notablemente en trabajos realizados en Estados Unidos y América Latina.

Rico (1995) señala que las investigaciones realizadas sobre el error antes de la década de los sesenta aportaron datos sobre el análisis de los tipos de soluciones incorrectas y el análisis de los tipos de error detectados. Estos hallazgos se retomaron para la construcción de clasificaciones que permiten determinar cómo surgen los errores y los factores que pueden influir para que aparezcan.

Radatz (1980) también mencionó que los estudios sobre análisis de errores, aparecidos hasta esas fechas, se caracterizaron por el predominio de errores en matemáticas escolares en aritmética y conocimiento numérico. Éstos se abordaron desde diversos enfoques teóricos y a través de distintas estrategias metodológicas. Otro de los aspectos que destaca este autor es la trayectoria del estudio del error en educación matemática. Estados Unidos presentó un desarrollo teórico continuo desde inicio del siglo XX, en cambio los países europeos mostraron un desarrollo hasta fechas recientes.

Rico (1995) señala que hasta estas fechas, las investigaciones sobre el análisis de los errores en matemáticas se preocupaban por clasificarlos con el fin de proporcionar a los profesores estrategias de enseñanza, para que los alumnos lograran un manejo de las matemáticas escolares y así eliminar los errores.

En la década de los setenta, la teoría de Piaget fue redescubierta en Estados Unidos por las grandes expectativas que generaba en el campo de la educación. Piaget desarrolló esta teoría en Europa desde los años veinte, con el principal interés de dar respuesta a tres preguntas: ¿cómo el sujeto construye el conocimiento científico? ¿cómo se traslada el sujeto de un conocimiento inferior a otro de orden superior? y ¿cómo se construyen las categorías básicas del pensamiento racional? Así este autor desarrolló un paradigma que permitió descubrir de manera detallada cómo los sujetos conocen y aprenden, qué mecanismos intervienen en su proceso de aprendizaje y, cómo son los mecanismos del desarrollo intelectual (Abrate y Pochulu, 2006; Hernández Rojas, 2004).

En la década de los ochenta y noventa el análisis de los errores fue influido por la teoría constructivista. Las ideas de Piaget, Vigotsky, Kuhn, Lakatos y Popper, entre otros autores, influyeron en la perspectiva de usar el análisis de los errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje, enfoque que ha sido desarrollado por la investigadora Raffaella Borasi (Borasi, 1989).

Borasi afirma que los errores se analizan con dos objetivos: el primero para eliminarlo y el segundo para explorar sus objetivos. Sin embargo, en cualquiera de los dos casos se centra en el contenido técnico-matemático del error, en la naturaleza de la matemática o en el proceso de aprendizaje de la propia disciplina (Cury, 2004).

Si el interés es el contenido técnico-matemático y se quiere eliminar, se procura diagnosticar sus causas, pues representa una falla en el proceso. Si se pretende explorarlo, el error es un estadio necesario en el proceso de aprendizaje al generar nuevos descubrimientos matemáticos. En cambio, si el interés se centra en la naturaleza de la matemática, la eliminación del error se

relaciona con la incompreensión del alumno sobre un concepto presentado. Sin embargo, si se desea explorar el error, se debe reflexionar sobre los límites y características de la matemática.

Si se centra en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, el error es un instrumento que permite identificar problemas en el currículum o en la metodología de la enseñanza, y el análisis permite su eliminación. Cuando se explora el error, se convierte en un instrumento útil para comprender los procesos cognitivos de los alumnos.

A manera de cierre de este tema, las investigaciones sobre análisis del error se agrupan, según sus objetivos, en dos: a) superar el error a través de su eliminación; b) explorar sus potencialidades. La primera categoría, el análisis del error parte de las teorías del aprendizaje del paradigma conductista y del procesamiento de la información. La segunda categoría tiene como enfoque el paradigma constructivista (Engler, Gregoriana, Muller, Vrancken y Herlein, 2004).

Es necesario mencionar que dicha categorización no es rígida. Tampoco debe considerarse que un enfoque es mejor que el otro, o que uno superó al otro según como fueron apareciendo en la historia del análisis del error, sino que todo dependerá de los objetivos y los fines con los que se lleve a cabo el análisis del error en matemáticas.

3.3. Situación actual sobre el estudio del error en educación matemática

Las reflexiones actuales sobre análisis del error en el aprendizaje de las matemáticas, los consideran como parte normal en los procesos de aprendizaje. La pedagogía actual, considera el proceso de enseñanza-aprendizaje como un sistema de comunicación en doble sentido, es decir del alumno al maestro y del maestro al alumno.

A partir del análisis de las actividades realizadas por los alumnos, Brousseau, David y Werner (1986) señalan que:

- Frecuentemente los errores de los alumnos son resultado de procedimientos sistemáticos imperfectos, y se usan de manera consistente.
- Los alumnos presentan con frecuencia concepciones inadecuadas sobre aspectos fundamentales de las matemáticas.

- Los profesores pueden no reconocer los procedimientos imperfectos y las concepciones inadecuadas de sus estudiantes.
- Los alumnos crean sus propios métodos no formales para realizar las tareas solicitadas por el maestro.

Rico (1995) menciona que actualmente la mayor parte de los investigadores y especialistas consideran como características generales de los errores cometidos por los alumnos, las siguientes:

- Los errores aparecen de manera inesperada y sorprenden al maestro. Por lo general se mantiene ocultos, es decir, no es que surjan en ese momento.
- Los errores reflejan el conocimiento de los alumnos. Son persistentes y difíciles de superar por sí mismos, su corrección puede requerir de una reorganización del conocimiento del alumno.
- Los errores pueden ser sistemáticos o por azar. Cuando los errores son sistemáticos señalan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión inadecuada.
- El alumno que comete el error pero no es consciente de ello, no cuestiona su respuesta y no considera el significado de símbolos, conceptos o reglas con las que realiza su actividad.

3.4. Líneas de investigación sobre análisis de los errores

Actualmente el análisis de los errores en el aprendizaje de las matemáticas es una línea de investigación sólida en educación matemática. De acuerdo con las aportaciones de Rico (1995), las investigaciones realizadas hasta inicios de la década de los noventa se centran en cuatro líneas de investigación, que se describen a continuación:

1. Estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías y clasificaciones de errores. Cada uno de los estudios proceden de teorías psicológicas, psicopedagógicas o de la propia matemática.
2. Investigaciones centradas en el tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas.

3. Estudios relacionados con la formación de los maestros sobre observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje.
4. Trabajos que se fundamentan en la psicometría, con el uso de la estadística.

El presente estudio se inserta en la primera línea de investigación, al establecer dentro de sus objetivos realizar el análisis e identificar las causas que originaron los errores que cometieron los estudiantes de tercero de secundaria

3.5. Causas, dificultades y clasificaciones de errores

La teoría de la información establece que el pensamiento puede representarse en modelos de procesamiento de información. Sin embargo, los procesos de pensamiento son internos por naturaleza y para su estudio se usan métodos indirectos de observación. Las aportaciones desde dicho modelo teórico son relevantes al indicar que hay patrones consistentes en los errores, tanto a nivel individual como colectivo, lo que da origen a diversas clasificaciones del error.

A continuación se mencionan siete clasificaciones del error. Es necesario especificar que no son las únicas, pero a partir de la revisión de la literatura sobre el tema, se ha observado que son las más utilizadas en estudios que tienen como objetivo analizar los tipos de error, con el fin de conocer las causas de su origen.

Radatz (1979) clasifica el error matemático desde el punto de vista del procesamiento de la información y propone cinco categorías:

1. *Errores debidos a dificultades en el lenguaje:* El aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos son un problema para los estudiantes, porque utilizan sus referentes del lenguaje natural.
2. *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial:* La tarea de pensar a través de imágenes en matemáticas, en algunos estudiantes genera dificultades y produce errores debido a que implica una demanda de análisis y síntesis.

3. *Errores debidos al aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos:* Se incluyen todas las deficiencias sobre contenidos y procedimientos específicos en la realización de una tarea matemática.
4. *Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento:* La experiencia previa sobre problemas similares genera rigidez y falta de flexibilidad para descifrar y decodificar nueva información lo cual inhibe el procesamiento de nueva información. Dentro de este tipo de error, Radatz incluye la subclasificación de Pipping (como se cita en Radatz, 1979):
 - a) *Errores por perseverancia:* Predominan los elementos de una tarea o problema.
 - b) *Errores de asociación:* incluyen interrelaciones incorrectas entre elementos singulares.
 - c) *Errores de interferencia:* Se generan porque operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
 - d) *Errores de asimilación:* Generan fallas en la lectura y escritura por una audición incorrecta.
 - e) *Errores de transferencia negativa a partir de las tareas anteriores:* Muestran el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto problemas verbales o escritos.
5. *Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.* Surgen a partir de aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Otra de las clasificaciones fue elaborada por Booth (1984) propone una clasificación de los errores cometidos en el conocimiento algebraico. El autor describe los errores comunes cometidos por los alumnos atribuidos a:

- *La naturaleza y significado de los símbolos y las letras:* Los símbolos son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones. El reconocimiento de la naturaleza y el significado de los símbolos para poder comprender cómo operan con ellos y cómo interpretar los resultados permite la transferencia de conocimiento aritmético y algebraico.

- *El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra:* Muchos estudiantes suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige siempre una solución única y numérica.
- *La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.* Las dificultades que los estudiantes presentan en álgebra muchas veces no son dificultades en esta materia, sino problemas que se quedan sin corregir en aritmética.
- *El uso inapropiado de alguna regla de procedimiento:* Algunos errores se deben a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que han extraído y que utilizan tal cual o la adaptan inadecuadamente a una situación nueva. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones.

La clasificación propuesta por Davis (1984) se basa en una teoría de esquemas personales. Estos esquemas se presentan de forma similar en individuos que comparten la misma experiencia. Su combinación mediante los principios generales que regulan el procesamiento humano de la información permite tipificar e interpretar algunos errores más usuales de los escolares en el aprendizaje de las matemáticas. Los esquemas presentan las siguientes características:

- Deben considerarse como esquemas para asimilar información, es decir, para organizar los datos entrantes.
- Cada estructura de representación puede identificarse por los errores que presenta, con lo que revela parte de su modo interno de trabajo.
- Cada estructura de representación tiene un origen legítimo en el aprendizaje inicialmente correcto.
- Cada estructura de trabajo necesita un tipo de información inicial y no funciona correctamente sino se le proporciona toda la información.
- Los esquemas son persistentes. Esta propiedad los hace reconocibles como entidades internas de procesamiento de la información, debido a que pueden corresponderse con ciertos comportamientos externos observables.
- La creación y el modo de operaciones de los esquemas sigue y ciertas reglas ordenadas. Una de estas reglas se denomina *sobregeneralización*, plantea que el procesamiento tiende a producirse según el esquema asumido y cuando encuentra algún inconveniente se producen modificaciones que permiten continuar.

- La recuperación de un esquema en la memoria puede realizarse mediante términos clave breves y explícitos.
- Un alumno que realiza una tarea matemática con éxito encuentra gran parte de la información necesaria en los esquemas que utiliza, los cuales suelen no estar presentes en los enunciados o tareas a resolver.

Al postular la representación interna de la información, las estructuras de sus pensamientos y algunas características de sus componentes estructurales, Davis (1984) plantea un mecanismo mediante el cual se analiza el pensamiento matemático humano y algunos de sus errores. Los errores clásicos explicitados por su modelo son:

- Reversiones binarias: Por ejemplo: $4 \times 4 = 8$; $2^3 = 6$
- Errores inducidos por el lenguaje o la notación: Por ejemplo: $2x - x = 2$
- Errores por recuperación de un esquema previo.
- Errores producidos por una representación inadecuada.
- Reglas que producen reglas.

La siguiente clasificación fue propuesta por Socas (1997). Este autor menciona tres aspectos relevantes que los alumnos pueden presentar durante la construcción del conocimiento matemático: las dificultades, los obstáculos y los errores.

El primer aspecto son las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas con diversos orígenes, y que se clasifican en cinco categorías:

- 1) *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas:* La principal forma de comunicación de los objetos matemáticos, es a través de la forma escrita de los signos matemáticos. El problema se produce entre significados diferentes en matemáticas y el lenguaje habitual, palabras específicamente matemáticas, palabras con el mismo significado en el lenguaje habitual y el matemático, y el uso de los signos (que se denomina como *naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos*).
- 2) *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático:* Es la capacidad de seguir un argumento lógico. Es la mayor causa de dificultades en el aprendizaje de la

disciplina. Es necesario sintonizar la lógica social con la lógica de la matemática, porque en varias situaciones se contraponen la primera con la segunda.

- 3) *Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas:* Se relacionan con la institución escolar, el currículo matemático y los métodos de enseñanza. La institución escolar reduce dificultades dependiendo de los materiales curriculares, los recursos y estilos de aprendizaje. Son cuatro los elementos a considerar como dificultad: a) habilidades para el desarrollo de capacidades matemáticas; b) necesidad de contenidos anteriores; c) nivel de abstracción requerido; y d) lógica de la matemática escolar. Los métodos de enseñanza deben considerar adaptación del lenguaje, secuencia de las unidades didácticas, respecto al individuo y recursos.
- 4) *Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos:* Poseer referentes sobre los procesos de aprendizaje y desarrollo intelectual permite conocer el nivel de dificultad, realizaciones y respuestas a esperar de los alumnos.
- 5) *Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas:* Algunas actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad y al miedo. La ansiedad por terminar la actividad y el miedo al fracaso o equivocación originan bloqueos en los estudiantes.

El segundo aspecto son los obstáculos epistemológicos. En el contexto del desarrollo de la ciencia, Bachelard introdujo el concepto de obstáculo epistemológico: *“hay que plantear el problema del conocimiento en obstáculos, que no son obstáculos externos, pues es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones (...) causas de estancamiento y hasta retroceso”* (Bachelard, 2003, p.15).

El concepto de obstáculos epistemológicos de Bachelard lo retomaron autores como Brousseau y Tall para aplicarlo a la didáctica de las matemáticas.

El tercer aspecto es el relacionado con el error, Socas lo divide en dos situaciones: la primera, el papel del error en el desarrollo del conocimiento matemático; la segunda, el error en el aprendizaje de las matemáticas. Este último puede originarse por dos causas: los errores que

tienen su origen en los obstáculos y los errores que se originan por la ausencia de significado. Los errores tendrían dos procedencias distintas, una relacionada con la dificultad asociada a la complejidad de los objetos matemáticos; la otra asociada con los aspectos afectivos y emocionales de los alumnos hacia las matemáticas.

La tipología de los orígenes del error que plantea Socas (1997) sobre el conocimiento algebraico es:

- *Error que tiene su origen en un obstáculo:* Las principales causas son problemas relacionados con la adición aritmética y adición algebraica; la no aceptación de la falta de clausura (expresiones incompletas) y la concatenación.
- *Errores que tienen su origen en la ausencia de sentido:* Al originarse estos errores en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación, se diferencian tres etapas distintas:
 - a) Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética: Entre los que se encuentra el uso del mismo significado de los signos en ambas áreas.
 - b) Errores de procedimientos: Es el uso inapropiado de fórmulas, sobre todo por una falsa generalización sobre operadores. Entre los errores derivados se distinguen:
 - 1) Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva:
 - Extensión de la propiedad distributiva de la multiplicación en relación con la adición (o sustracción) al caso de la multiplicación.
 - La estructura $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ se extiende fácilmente al caso de la suma $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
 - En las raíces es muy frecuente extender la distributividad de la radicación respecto de la multiplicación, a la distributividad de la radicación respecto a la adición o sustracción.

2) Errores relativos al uso de recíprocos:

$1/3 + 1/5 = 1 / (3 + 5)$	$\longrightarrow$	$1/x + 1/y = 1 / (x + y)$
$1/2 + 1/3 = 2 / (3 + 5)$	$\longrightarrow$	$1/x + 1/y = 2 / (x + y)$
$1/3 + 1/5 = 1 / (3 \cdot 5)$	$\longrightarrow$	$1/x + 1/y = 1 / (x \cdot y)$

3) Errores de cancelación:

$$(x \cdot y) / (x \cdot z) = y / z \text{ se extiende a } (x + y) / (x + z) = y + z$$

y también a:

$$(a \cdot x + b \cdot y) / (x + y) = a + b$$

$$(a \cdot x + b) / b = a \cdot x$$

$$(a \cdot x - b) / a = x \cdot b$$

c) Errores debido a las características propias del lenguaje algebraico: Son propios del álgebra. El sentido del signo y la sustitución formal, son ejemplo de ello.

Otra de las clasificaciones sobre el error fue propuesta por Brousseau (como cita Franchi y Hernández de Rincón, 2004), quien define que el error tiene dos orígenes. El primero proviene de la ignorancia, inseguridad y el azar; el segundo, surge como resultado de un conocimiento anterior de éxito, pero para ciertos procesos resulta inadecuado o falso y es originado por los obstáculos. Su propuesta de clasificación de los errores la elabora a partir de los errores reconocidos por los docentes.

- *Error a nivel práctico:* El profesor considera que son errores de cálculo por parte del alumno.
- *Error en la tarea:* El profesor establece el origen por el descuido del alumno al realizar la actividad solicitada.
- *Error en técnica:* El profesor critica la ejecución de un modo operativo conocido.
- *Error de tecnología:* El profesor critica la elección de técnica utilizada por el alumno.
- *Error de nivel teórico:* El profesor devalúa los conocimientos teóricos, técnicos y tecnológicos que el alumno posee.

Otra de las clasificaciones fue propuesta por Astolfi (1999). Este autor propone una perspectiva general de los errores, estableciendo las siguientes categorías:

- *Errores debido a la comprensión de las instrucciones de trabajo dadas:* Dificultad del alumno para comprender las instrucciones de trabajo que se les da en forma oral o escrita. La razón se debe a que las preguntas son más claras para el que las plantea porque conoce la respuesta que espera, pero no así para el que las lee.

- *Errores que provienen de los hábitos escolares:* Para tener éxito escolar el alumno debe funcionar como un pequeño especialista. La clase funciona en una mecánica donde todo embona bien, y es propicia para que siempre se llegue a la respuesta correcta.
- *Los errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos (a menudo denominadas representaciones):* Se relaciona con el concepto de Bachelard (2003) de los obstáculos epistemológicos. Estos errores establecen saberes superficiales y se movilizan cada vez que el oficio de alumno tiende a relacionarlas con el problema que se le presenta. Estas concepciones muestran resistencia a los esfuerzos de la enseñanza. Se mantienen casi intactos en la mayoría de los adultos que culminan sus estudios, aún cuando Piaget planteó en su teoría que la transformación de los esquemas es progresiva en el transcurso del desarrollo del sujeto.
- *Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas:* Reside en la construcción progresiva de los conceptos relacionados directamente con la diversidad de las operaciones intelectuales que deben utilizarse para la resolución de problemas que están al alcance de los estudiantes.
- *Errores debidos a los procesos adoptados:* El alumno se apropia del método recibido en clase o hace uso de procedimientos primitivos, costosos o poco elegantes que generan mayores posibilidades de fallos.
- *Errores debido a la sobrecarga cognitiva:* Cuando se presentan problemas que requieren el uso de diversas operaciones mentales, se lleva al alumno a una situación conocida como "sobrecarga cognitiva".
- *Errores que tienen su origen en otra disciplina:* De acuerdo con la postura piagetiana, la transferencia es una actividad natural del pensamiento, debido a que el sujeto puede utilizar los esquemas en cualquier situación.
- *Errores causados por la complejidad del contenido.*

Por último, las autoras Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987) elaboraron una clasificación empírica de los errores, con las siguientes categorías:

- *Errores debidos a datos mal utilizados:* Errores producidos por diferencias entre los datos que aparecen en el planteamiento y el tratamiento que le da el alumno. Incluyen situaciones tales como añadir datos extraños, olvidar algún dato necesario para la

solución, contestar algo no necesario, asignar a una parte de la información un significado inconsistente en el planteamiento, utilizar los valores de una variable para otra distinta y realizar lectura incorrecta del enunciado.

- *Errores debidos a una interpretación incorrecta del lenguaje:* Incluyen errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos, descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje distinto.
- *Errores debido a interferencias no validas lógicamente:* Son errores que se producen por argumentos falsos de razonamiento, que no se deben al contenido específico.
- *Errores debido al uso de teoremas deformados:* Errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición que es identificable. Incluye errores generados por aplicar un teorema sin las condiciones necesarias, aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal, realizar una valoración o desarrollo inadecuado de un teorema o fórmula.
- *Errores debidos a la falta de verificación en la solución:* Se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución a la pregunta planteada.
- *Errores técnicos:* Incluyen todos los relacionados con cálculo, al tomar datos de una tabla, al manipular símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

Para este estudio se seleccionó la clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987), que presenta las siguientes características: i) tiene como base un análisis constructivo de las respuestas de los alumnos; emerge de una prueba aplicada a nivel nacional a estudiantes de secundaria; ii) los ítems aplicados fueron en modalidad de respuesta construida y de opción múltiple; iii) por último, evalúa contenidos de matemáticas.

3.6. Técnicas de análisis del error en matemáticas

A lo largo de la historia del análisis y la investigación del error en matemáticas, se han utilizado diversos métodos para abordarlo. Rico (1995) menciona que existen cuatro categorías:

- 1) Contar el número de soluciones incorrectas. Es un método similar al psicométrico, que hace uso de análisis estadístico. Su valor diagnóstico es limitado.

- 2) Analizar los errores cometidos. Es un método basado en clasificar los errores cometidos, analizar su desvío de la solución correcta y realizar inferencias sobre las posibles causas del origen del error.
- 3) Analizar los patrones de error. Los análisis realizados desde esta metodología permiten determinar errores sistemáticos causados por concepciones inadecuadas. Asimismo, si se varían aspectos de las tareas, los patrones de errores que se producen permiten conocer las estrategias utilizadas.
- 4) Construir problemas que provoquen errores en los alumnos. La técnica tiene como punto de partida conocer los patrones de error que cometen los estudiantes al resolver tareas específicas, crear hipótesis sobre las causas de dichos errores y crear problemas que generan errores similares.

Las técnicas que se utilizaron en este estudio fueron: contar el número de soluciones incorrectas y analizar los errores cometidos. La elección de las técnicas obedeció a los objetivos propuestos en el trabajo, que tienen que ver con la identificación y clasificación de los errores matemáticos que cometen los estudiantes de tercer grado de secundaria.

IV. Método

Este estudio corresponde a un diseño retrospectivo, transversal, comparativo y exploratorio. Es *retrospectivo* al contar con una parte de la información obtenida por el INEE, del proyecto “Análisis de errores cometidos por los estudiantes a partir de las pruebas Excale de Matemáticas” (INEE, 2007). Es *transversal* porque los resultados de los 12 problemas del eje de Aritmética del tema de números naturales y sus operaciones, corresponden a septiembre y noviembre de 2007. Es *comparativo* al establecer como objetivo identificar si los tipos de error que dieron los alumnos de tercero de secundaria a los problemas coinciden con los errores implícitos en los distractores del Excale09 de Matemáticas (Méndez, Nimihira, Moreno y Sosa, 2001). Es una investigación *exploratoria* al obtener información que permite identificar los tipos de error que cometen los estudiantes de secundaria al contestar los Excale09 de Matemáticas. (Hernández Sampieri, Fernández y Baptista, 2006).

Según la descripción de líneas de investigación elaborada por Rico (1995) sobre los estudios del error en matemáticas, esta investigación se ubica en la línea de análisis del error, porque el objetivo de la investigación es identificar y clasificar los errores cometidos por los estudiantes al contestar los problemas en la modalidad de respuesta construida.

Debido a que esta investigación deriva del proyecto “Análisis de errores cometidos por los estudiantes a partir de las pruebas Excale de Matemáticas, desarrollado por el INEE, es importante señalar que la selección de la muestra y la aplicación de los instrumentos (12 problemas del Excale09 de Matemáticas y las entrevistas semiestructuradas) a los que se refiere en esta investigación, fueron acciones realizadas por el INEE. A partir de los datos que proporcionó la institución, se llevaron a cabo los análisis necesarios para dar respuesta a las preguntas de investigación que se plantearon en este estudio.

4.1. Participantes

La muestra objeto de estudio se conformó por 186 estudiantes que cursaron tercer grado de secundaria en el periodo comprendido entre septiembre y noviembre de 2007. Los estudiantes eran alumnos de cinco secundarias: dos técnicas del estado de Nuevo León y dos técnicas y una general del Estado de México. La elección de las escuelas y de los estudiantes fue intencional toda vez que no se requería trabajar con una muestra aleatoria de la población de estudio. Del total de las escuelas se seleccionaron a 19 grupos. La selección de los estudiantes la realizó el maestro a cargo de la materia de matemáticas, de cada grupo se solicitó la participación de 10 estudiantes: cinco mujeres y cinco hombres (ver Tabla 4.1).

Tabla 4.1. Estudiantes que participaron en el estudio

Entidad	Modalidad		Género	
	General	Técnica	Masculino	Femenino
Estado de México	20	81	38	47
Nuevo León	0	85	46	55
Total	20	166	84	102

4.2. Instrumentos

Los instrumentos empleados para obtener la información fueron dos. El primero, se integró con 12 problemas del Excale09 de Matemáticas, eje de Aritmética sobre el tema de números naturales y sus operaciones básicas, y los aplicaron en modalidad de respuesta construida. En esta modalidad el estudiante tiene que construir la respuesta que solicita el reactivo a partir de sus capacidades y habilidades; a diferencia en la modalidad de opción múltiple donde tiene que seleccionar la respuesta correcta (Contreras, 2000). El fin de la aplicación de los problemas fue conocer las respuestas erróneas de los estudiantes al contestar los problemas. Para lograr los objetivos de este trabajo, de los mismos problemas, pero en modalidad de respuesta de opción múltiple, se tomaron los tres distractores de cada problema, con el objetivo de comparar si los errores que cometieron los alumnos al contestar los problemas en modalidad de respuesta construida son iguales a los errores que se presentan al aplicarse en la modalidad de opción múltiple.

El segundo instrumento fue una entrevista semiestructurada. La aplicación se realizó sólo a aquellos estudiantes que no dejaron claro en la hoja de respuestas el

procedimiento que siguieron para llegar a su resultado, o que solamente anotaron una respuesta numérica. La entrevista tuvo el fin de conocer el procedimiento que realizaron los estudiantes para llegar al resultado en la modalidad de respuesta construida.

4.2.1. Los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas

El Excale09 de Matemáticas consta de 128 reactivos, de los cuales se tomaron exclusivamente 12 de los problemas correspondientes al eje de Aritmética, en el tema de números naturales y sus operaciones básicas. Estos problemas se distribuyen de la siguiente manera: ocho problemas abarcan los contenidos curriculares de revisión de los algoritmos y cuatro corresponden al tema de múltiplos y divisores de un número. Cabe señalar que los problemas 3 y 4 así como el 6 y 7 evalúan el mismo contenido (ver Tabla 4.2).

Los 12 problemas se centran en evaluar las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación. Los números que se presentan son números naturales de dos a seis dígitos máximo, se define como *números naturales* a los números enteros positivos (Baldor, 2007); los 12 problemas están inmersos en un contexto de la vida real.

Tabla 4.2. Especificaciones de los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas

No.	Problema		Contenido a evaluar	Especificaciones del contenido a evaluar
	Respuesta de opción múltiple	Respuesta construida		
1	Sabemos que María tiene una caja con menos de 50 chocolates y los quiere guardar en bolsitas con la misma cantidad cada una. Los puede guardar en cada bolsita sin que le sobre nada en grupos de 3 en 3, de 5 en 5, y de 9 en 9. ¿De qué otra manera María puede guardar sus chocolates en cada bolsita sin que le sobre ninguno? A) 8 en 8 B) 12 en 12 C) 15 en 15 D) 17 en 17	Sabemos que María tiene una caja con menos de 50 chocolates y los quiere guardar en bolsitas con la misma cantidad cada una. Los puede guardar en cada bolsita sin que le sobre nada en grupos de 3 en 3, de 5 en 5, y de 9 en 9. ¿De qué otra manera María puede guardar sus chocolates en cada bolsita sin que le sobre ninguno?	Múltiplos y divisores de números.	Resolver problemas que impliquen usar el mínimo común múltiplo y máximo común divisor.
2	Un establo tiene 185 vacas y estima que en promedio sus vacas producen diariamente 15 litros de leche cada una. La cantidad de leche recolectada por día se distribuye en partes iguales en cinco establecimientos. ¿Cuántos litros de leche se espera surtir diariamente en cada establecimiento? A) 13875 B) 2775 C) 555 D) 61	Un establo tiene 185 vacas y estima que en promedio sus vacas producen diariamente 15 litros de leche cada una. La cantidad de leche recolectada por día se distribuye en partes iguales en cinco establecimientos. ¿Cuántos litros de leche se espera surtir diariamente en cada establecimiento?	Operaciones con números naturales. - Revisión de los algoritmos.	Resolver un problema que implique dos o más operaciones de multiplicación y división.
3	Don José tenía inicialmente 2250 litros de agua en un depósito y contrató un grupo de gente para les surtieran otros 5000 litros en ese depósito. Más tarde utilizó 3750 litros para regar su huerto. ¿Con cuántos litros de agua se quedó? A) 1250 B) 3500 C) 7250 D) 11000	Don José tenía inicialmente 2,250 litros de agua en un depósito y contrató un grupo de gente para que le surtieran otros 5,000 litros en ese depósito. Más tarde utilizó 3,750 litros para regar su huerto. ¿Con cuántos litros de agua se quedó?	Operaciones con números naturales. - Revisión de los algoritmos.	Resolver problemas que impliquen dos o más operaciones de adición y sustracción.

Continuación...

No.	Problema		Contenido a evaluar	Especificaciones del contenido a evaluar
	Respuesta de opción múltiple	Respuesta construida		
4	En un juego Luis ganó 37 puntos en su primer tirada, en la segunda perdió 17 puntos y en la tercera tirada ganó 30 puntos. ¿Cuántos puntos lleva acumulados hasta ese momento? A) 47 B) 54 C) 84 D) 50	En un juego, Luis ganó 37 puntos en su primer tirada, en la segunda perdió 17 puntos y en la tercera tirada ganó 30 puntos. ¿Cuántos puntos lleva acumulados hasta ese momento?		
5	En un cultivo había inicialmente dos bacterias. Si éstas se reproducen duplicándose cada hora. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el número de bacterias que habrá 6 horas después? A) $2 + 6$ B) 2×6 C) 7^2 D) 2^7	En un cultivo había inicialmente dos bacterias. Si éstas se reproducen duplicándose cada hora. ¿Cuántas bacterias habrá seis horas después?	Operaciones con números naturales. - Revisión de los algoritmos	Identificar la expresión x^n que modele una situación problemática
6	José armó un rompecabezas con 400 piezas cuadradas. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el número de piezas que tiene un lado del rompecabezas que armó José? A) $\sqrt{400}$ B) 400^2 C) $400/2$ D) 400×2	José armó un rompecabezas con 400 piezas cuadradas. Armado el rompecabezas también tenía forma de cuadrado. ¿Cuántas piezas tiene un lado del rompecabezas que armó José?	Operaciones con números naturales. - Revisión de los algoritmos.	Resolver problemas que impliquen calcular la raíz cuadrada hasta centésimos.
7	Un terreno cuadrado tiene 350 cm^2 de área. ¿Cuál de las siguientes expresiones indica los valores dentro de los cuales se encuentra uno de sus lados? A) 18.235 B) 122.500 C) 87.5 D) 18.708	Un terreno cuadrado tiene 350 m^2 de área. ¿Cuál es la medida de uno de sus lados?		

Continuación...

No.	Problema		Contenido a evaluar	Especificaciones del contenido a evaluar
	Respuesta de opción múltiple	Respuesta construida		
8	Don Chava tiene 86 conejos y quiere meterlos en jaulas con la misma cantidad de conejos cada una. Su hijo Juan le propone meterlos de tres en tres, pero de esta manera le sobran dos conejos. Su hijo Mario le propone meterlos de cinco en cinco, pero le sobra un conejo. ¿Por lo menos, cuántos conejos le faltan a don Chava para que pudiera aceptar tanto la propuesta de Juan como la de Mario sin que le sobre ninguno? A) 1 B) 4 C) 2 D) 3	Don Chava tiene 86 conejos y quiere meterlos en jaulas con la misma cantidad de conejos en cada una. Su hijo Juan le propone meterlos de tres en tres, pero de esta manera le sobran dos conejos; su hijo Mario le propone meterlos de cinco en cinco, pero le sobra un conejo. ¿Por lo menos, cuántos conejos le faltan a don Chava para que pudiera aceptar tanto la propuesta de Juan como la de Mario sin que le sobre ninguno?	Múltiplos y divisores de números.	Resolver problemas que impliquen usar criterios de divisibilidad.
9	Para la fiesta de la escuela, Tere fue a comprar platos desechables que costaron \$20.00 el paquete y por su parte Juan fue a comprar cucharas de \$15.00 el paquete. Ambos gastaron lo mismo ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que pudieron haber gastado cada uno? A) \$15 B) \$35 C) \$60 D) \$300	Para la fiesta de la escuela, Tere fue a comprar platos desechables que costaron \$20.00 el paquete y por su parte Juan fue a comprar cucharas de \$15.00 el paquete. Ambos gastaron lo mismo, ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que pidieron haber gastado cada uno?	Múltiplos y divisores de números.	Resolver problemas que impliquen calcular el m.c.m
10	José tiene dos cuerdas, una mide 42 cm., y la otra 30 cm. Cortará ambas cuerdas en pedazos del mismo tamaño, sin que le sobre nada. ¿Cuál es la medida más grande que puede tener cada pedazo de cuerda? A) 2 cm B) 6cm C) 12 cm D) 42 cm	José tiene dos cuerdas, una mide 42 cm, y la otra 30 cm. Cortará ambas cuerdas en pedazos del mismo tamaño, sin que le sobre nada. ¿Cuál es la medida más grande que puede tener cada pedazo de cuerda?	Múltiplos y divisores de números.	Resolver problemas que involucren usar el concepto y el cálculo del m.c.d.

Continuación...

No	Problema		Contenido a evaluar	Especificaciones de contenido a evaluar
	Respuesta de opción múltiple	Respuesta construida		
11	Seis docenas de naranjas más cinco naranjas, ¿Cuántas naranjas son? ¿Cuál de las siguientes operaciones resuelve correctamente este problema? A) $(6 \times 5) + 12$ B) $(6 \times 12) + 5$ C) $(6 + 12) \times 5$ D) $(6 + 5) \times 12$	Ana compró seis docenas de naranjas más cinco naranjas, ¿Cuántas naranja son en total?	Ana compró seis docenas de naranjas más cinco naranjas. ¿Cuántas naranjas son en total?	Seleccionar las operaciones necesarias (dos o más) que resuelven un problema y el orden de su aplicación.
12	Para la fiesta del pueblo, don José regaló 120 refrescos y por su parte doña Lola regaló 15 cajas con 24 refrescos cada una. Si durante la fiesta se consumieron 320 refrescos. ¿Cuántos refrescos sobraron? A) 40 B) 160 C) 360 D) 480	Para la fiesta del pueblo, don José regaló 120 refrescos y por su parte doña Lola regaló 15 cajas con 24 refrescos cada una. Durante la fiesta se consumieron 320 refrescos. ¿Cuántos refrescos sobraron?	Operaciones con números naturales. - Revisión de los algoritmos.	Resolver problemas que impliquen dos o más operaciones de adición y multiplicación.

Fuente: Backhoff, *et al.*, 2006

Es importante mencionar que los 12 problemas que se aplicaron en la modalidad de respuesta construida son los mismos problemas aplicados en modalidad de respuesta de opción múltiple a estudiantes de tercero de secundaria en el año 2005 a nivel nacional. Por este motivo, los problemas utilizados en la presente investigación son problemas espejo (casi idénticos a los originales). Dichos problemas fueron extraídos del explorador de los Excale que aparece en el portal del instituto en Internet: <http://www.inee.edu.mx/> (ver Anexo B).

4.2.2. Guía de la entrevista

La entrevista se aplicó a 20 estudiantes (11%) que no dejaron claro en su hoja de respuesta el procedimiento que siguieron para llegar al resultado.

La entrevista consintió en presentar al alumno la hoja del problema contestado. El entrevistador solicitó al alumno que explicara en voz alta el procedimiento que siguió y el entrevistado anotó en la hoja de respuestas del estudiante las aclaraciones. Cabe

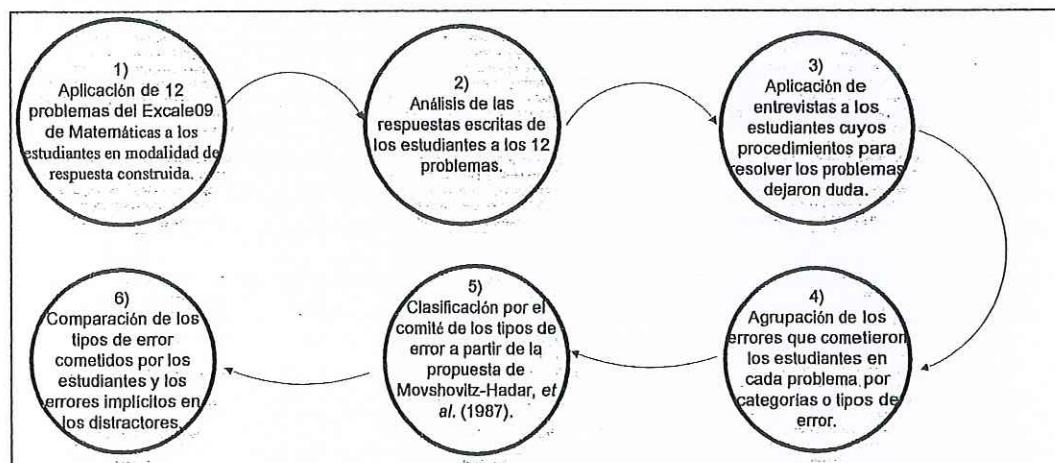
destacar que la entrevista fue semiestructurada y las preguntas que se plantearon a los estudiantes fueron de acuerdo con el problema que resolvieron.

4.3. Procedimiento

En este apartado se describe la forma de aplicación por parte del INEE, de los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas, y la entrevista que se realizó a los estudiantes que no dejaron claro el procedimiento para llegar a su resultado. Asimismo, se explica la forma en que se llevó a cabo la clasificación de los errores a partir de la propuesta de clasificación empírica de errores en matemáticas de Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987). Por último, se describe la comparación entre las respuestas erróneas que dieron los alumnos al contestar los 12 problemas en la modalidad de respuesta construida y los tres distractores de cada uno de los problemas cuando se aplican en la modalidad de respuesta de opción múltiple.

En el siguiente diagrama (ver Figura 4.1) se presentan las etapas y pasos que se siguieron en este estudio.

Figura 4.1. Etapas de desarrollo del estudio



4.3.1. Aplicación de los 12 problemas

De cada escuela se tomaron entre cuatro y cinco grupos de tercer grado de secundaria. Se solicitó al maestro encargado de la materia de matemáticas que eligiera a 10 de sus estudiantes, cinco mujeres y cinco hombres. Los 10 alumnos se concentraron en un aula y se les explicó que iban a resolver problemas matemáticos. Las instrucciones enfatizaron: dejarles claro que era un trabajo individual; leer el problema hasta que

fuera claro; anotar todo el procedimiento que utilizaron para llegar a su respuesta; en cuanto terminaran de resolver el ejercicio, deberán hacerlo saber al entrevistador y entregar su hoja de respuestas; esperar a que terminaran los otros compañeros para iniciar con el siguiente problema.

A cada uno de los estudiantes se le entregó impreso el mismo problema. La aplicación de los problemas fue de la siguiente manera: i) cada problema se les presentó de forma impresa, ii) cuando terminaron todos los alumnos de resolver el primer problema, se recogió, iii) se entregó el siguiente problema (ver Anexo C).

En la Tabla 4.3 se observan los problemas aplicados a cada grupo de estudiantes y el número de problemas que contestaron.

Tabla 4.3. Problemas contestados por grupo de estudiantes

No. de escuela	Estado	Grupo	Número del problema resuelto por grupo	Número de problemas que se les aplicaron por grupo
A	Nuevo León	1a	1, 2, y 3	3
		2a	1, 2 y 3	3
		3a	4, 5 y 6	3
		4a	4, 5 y 6	3
B	Estado de México	1b	1, 2 y 3	3
		2b	1, 2 y 3	3
		3b	4, 5 y 6	3
		4b	4, 5 y 6	3
C	Nuevo León	1c	8 y 9	2
		2c	8 y 9	2
		3c	10, 11 y 12	3
		4c	10, 11 y 12	3
		5c	7	1
D	Estado de México	1d	8, 9	2
		2d	8 y 9	2
		3d	10, 11 y 12	3
		4d	10, 11 y 12	3
E	Estado de México	1e	7	1
		2e	7	1

4.3.2. Aplicación de entrevistas

Al finalizar la aplicación de los problemas en cada grupo, el entrevistador solicitó a los alumnos cuyas respuestas no fueran claras o habían anotado solamente un valor numérico, que permanecieran en el salón. En total se entrevistaron a 20 alumnos.

Se aplicó una entrevista semiestructurada, el tipo de preguntas fue de acuerdo con el problema que contestaron. El aplicador realizó la entrevista de forma individual y anotó las aclaraciones que dieron los estudiante en la misma hoja de respuesta (ver Anexo D).

4.3.3 Descripción de respuestas erróneas

A partir de los datos que proporcionó el INEE de la aplicación de los problemas y las entrevistas, para los fines de esta investigación las respuestas se clasificaron en tres categorías: *aciertos* (A), incluyó todas las respuestas correctas; *omisiones* (O), respuestas donde los alumnos escribieron sobre la dificultades por las cuales no pudieron contestar el problema; *respuestas erróneas* (RE), incluyó todas las respuestas que presentaron errores en el procedimiento o en el resultado. A partir de la categorización anterior se tomaron únicamente todas las respuestas erróneas (RE) y se realizó un análisis de contenido. Cabe señalar, que se describieron todas las respuestas errores sin importar la cantidad de alumnos que los cometieron.

4.3.4. Clasificación de tipos de error

La aplicación de problemas para detectar errores y posteriormente clasificarlos con base a una categoría existente, es una metodología que se utiliza en educación matemática para analizar el error en el aprendizaje de las matemáticas.

Con el objetivo de establecer las posibles causas de los errores cometidos por los estudiantes, se clasificaron a partir del modelo propuesto por Movshivitz-Hadar, *et al.* (1987). La selección del modelo de clasificación se determinó porque surgió en situaciones similares a las que presentan las pruebas Excale en su aplicación, estas son: parte de la aplicación de una prueba de matemáticas a gran escala; se elaboró a partir de las respuestas de los alumnos a problemas en las modalidades de respuesta construida y opción múltiple; por último permite un análisis constructivo del error.

Para realizar la clasificación de las respuestas erróneas se conformó un comité, el cual se integró por cinco profesores de matemáticas de nivel secundaria. Las características de la selección de los integrantes fueron: dar clases de matemáticas a estudiantes de tercero de secundaria, tener un grado superior a licenciatura y pertenecer al municipio de Ensenada, Baja California.

Se convocó al comité a una reunión de capacitación, con la intención de:

- Explicar los objetivos de la investigación.
- Exponer el propósito por el cual se solicitó su apoyo.
- Explicar el modelo de clasificación empírica de Movshivitz-Hadar, *et al* (1987).
- Exponer un ejemplo.
- Resolver un caso.
- Explicar los lineamientos. La clasificación la realizó cada maestro de forma individual; se propuso un tiempo de 15 días para entregar la carpeta al moderador de la reunión.
- Entregar material. A cada maestro se le entregó una carpeta que incluyó: clasificación empírica de Movshivitz-Hadar, *et al.* (1987), los 12 problemas junto con los tipos de error y por último una hoja de comentarios para cada problema (ver Anexo E).
- Cierre de reunión.

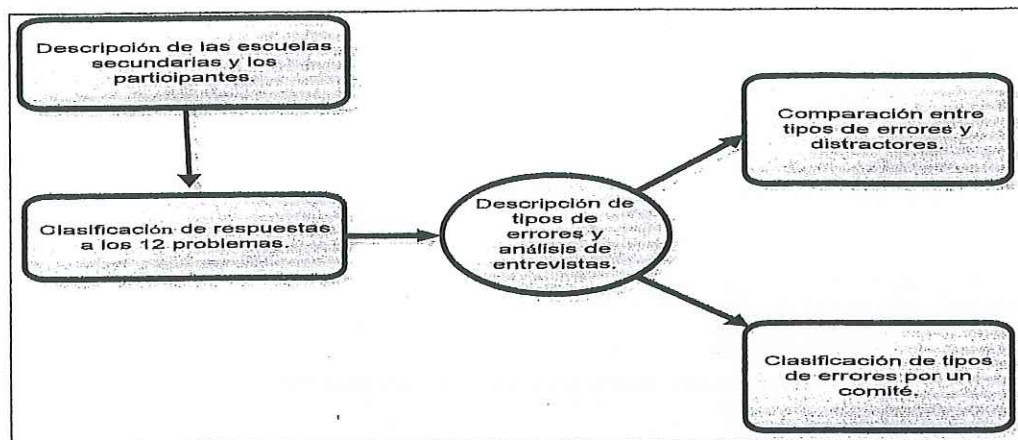
4.3.5. Comparación entre tipos de error y distractores

El INEE, en su documento sobre elaboración de los Excale, especifica que los distractores que forman parte de cada uno de los reactivos de las pruebas los elabora un comité de especialistas que los determinan a partir de considerar los errores más frecuentes que cometen los estudiantes al resolver los problemas (Backhoff, *et al.*, 2005b). Partiendo de esta premisa, se comparó si los errores que cometieron los alumnos al contestar los 12 problemas en la modalidad de respuesta construida son iguales a los errores implícitos en las preguntas de opción múltiple.

4.4. Procesamiento de análisis de resultados

Los resultados fueron analizados en cinco partes. Primero, se realizó la descripción de las escuelas secundarias y los participantes. Segundo, se clasificaron las respuestas que dieron los alumnos a los 12 problemas. Tercero, se realizó la descripción de los tipos de error. Cuarto, un comité clasificó los tipos de error. Por último, en el quinto apartado, se realizó la comparación entre tipos de error y las respuestas implícitas en los distractores (ver Figura 4.2).

Figura 4.2. Procesamiento de la información



4.4.1. Procesamiento de características de las escuelas y los participantes

Para conocer las características de las escuelas y los participantes se aplicó un análisis estadístico descriptivo. Se obtuvieron los descriptivos de frecuencia y porcentaje.

4.4.2. Procesamiento de clasificación de respuestas a los 12 problemas

Con la información que el INEE proporcionó para realizar la presente investigación, sobre las respuestas que dieron los estudiantes de tercero de secundaria al contestar los 12 problemas, se diseñó una base de datos. Esta herramienta organizó la información en función de indicadores como:

- Tipos de respuestas: aciertos (A), respuestas erróneas (RE) y omisiones (O).
- Estudiantes entrevistados.

Las respuestas erróneas se analizaron de dos formas. El primero fue un análisis de contenido según la propuesta de Mayring (2000), que propone cinco operaciones:

- a) *Reducir la información.* Implica focalizar y abstraer la información relevante para responder la pregunta de investigación.
- b) *Identificar unidades analíticas.* Implica dividir y separar el contenido en categorías de análisis para identificar patrones.
- c) *Identificar unidades de codificación.* Asignar un código a cada unidad de contenido de acuerdo con la categoría donde se incluya.
- d) *Resumir el análisis de contenido.*
- e) *Elaborar conclusiones.* Presentar ideas finales a partir del proceso de generalización.

A partir de este análisis de contenido, se observó que las respuestas erróneas presentaron patrones sistemáticos y consistentes en los estudiantes sin importar la escuela de origen, logrando así categorizar las 239 respuestas erróneas en diversos tipos de error.

El segundo tipo de análisis consistió en un análisis estadístico descriptivo. Para ello, se obtuvieron la frecuencia y el porcentaje. Los estadísticos descriptivos se refieren únicamente a los resultados obtenidos en las respuestas erróneas sin considerar las omisiones y los aciertos.

4.4.3. Procesamiento de análisis de las entrevistas

Las entrevistas se aplicaron a 20 estudiantes de tercero de secundaria que al contestar alguno de los 12 problemas no dejaron claro el procedimiento que siguieron o porque omitieron su procedimiento y sólo anotaron un resultado numérico.

A partir de la información obtenida de las aplicaciones de las entrevistas se realizaron dos tipos de análisis: el primero fue un análisis de contenido según el modelo de Mayring (2000) que se explicó líneas arriba, con el objetivo de completar o definir el procedimiento que los estudiantes realizaron; el segundo, fue un análisis descriptivo, del que se obtuvieron frecuencia y porcentaje de los datos.

4.4.4. Procedimiento de clasificación de tipos de error que elaboró el comité

Para el análisis de los resultados de la clasificación de respuestas erróneas que elaboró el comité, a partir del modelo de Movshivitz-Hadar, *et al.* (1987), se realizó un análisis estadístico descriptivo. Los descriptores obtenidos fueron: frecuencia, porcentaje y media.

4.4.5. Procedimiento de comparación entre tipos de error y distractores

Al contar con los tipos de error y las respuestas implícitas en los distractores de cada problema, se realizaron dos tipos de análisis. El primero fue un análisis de contenido, con el fin de determinar la operación y las respuestas de los tipos de error y de los errores de cada uno de los distractores. El segundo fue un análisis estadístico descriptivo y se obtuvieron los descriptores de frecuencia y porcentaje de los datos.

V. Resultados

Los resultados que se presentan en el siguiente capítulo se obtuvieron de las respuestas erróneas que emitieron los estudiantes de tercero de secundaria al contestar en modalidad de respuesta construida 12 problemas del Excale09 de Matemáticas y de las entrevistas que se aplicaron a los estudiantes. Con el fin de organizar la información los resultados se presentan de la siguiente manera:

- Primero, se consideraron las características de las escuelas secundarias participantes y de la población seleccionada.
- Posteriormente, se muestra la clasificación de las respuestas que dieron los estudiantes al contestar los 12 problemas.
- Enseguida se describen los tipos de error de cada uno de los problemas que cometieron los estudiantes. Cabe señalar que se mencionan todos los tipos de error sin importar la cantidad de alumnos que los presentaron.
- Cuarto, el comité realizó la clasificación de los tipos de error a partir del modelo propuesto por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987), con el objetivo de determinar las posibles causas que los originaron.
- Por último, se realizó una comparación entre los tipos de error que emitieron los estudiantes al contestar los problemas en modalidad de respuesta construida y las respuestas implícitas en los distractores de los problemas en modalidad de opción múltiple.

5.1. Análisis de las respuestas a los 12 problemas del Excale 09 de Matemáticas

En este apartado se muestran las principales características de las escuelas y los participantes que conformaron la muestra, así como el análisis de contenido y estadístico de las respuestas erróneas que dieron los alumnos a los 12 problemas. Por último se realizó un conteo de los datos obtenidos de las entrevistas que se aplicaron a los alumnos.

5.1.1. Características de las escuelas y los participantes

La muestra se integró de 186 alumnos que cursaron tercero de secundaria en el periodo comprendido de septiembre y noviembre de 2007. La muestra se seleccionó de cinco escuelas secundarias: una general y dos técnicas del Estado de México, y dos técnicas del estado de Nuevo León. La elección fue intencional, y se incluyeron escuelas

secundarias del turno matutino y vespertino. Por escuela se tomaron de cuatro a cinco grupos, excepto en una de las escuelas generales del Estado de México, donde solamente se aplicaron los problemas a dos grupos de estudiantes (ver Tabla 5.1).

Tabla 5.1. Descripción de las escuelas participantes en la investigación

Escuelas secundarias	Modalidad				Cantidad de grupos por escuela	Turno de cada grupo			
	General		Técnica			NL		EM	
	NL	EM	NL	EM		M	V	M	V
A	1				4		4		
B				1	4			2	2
C	1				5	2	3		
D				1	4			2	2
E		1			2			2	
Total	2	1		2	19	2	7	6	4
%	40	20		40	100	10	37	32	21

NL= Nuevo León; EM= Estado de México; M= matutino; V= vespertino

Respecto a las cinco escuelas participantes (identificadas con las primeras letras del abecedario), una de las ellas pertenece a modalidad general y cuatro a la modalidad técnica. Asimismo, ocho grupos fueron del turno matutino y 11 del turno vespertino.

Para seleccionar a los estudiantes, a cada maestro de la materia de Matemáticas se le solicitó seleccionar a 10 de sus alumnos: cinco mujeres y cinco hombres. El total de la población fue de 186 estudiantes: 101(54%) mujeres y 85 (46%) hombres (ver Tabla 5.2).

Por otro lado, respecto a la cantidad de problemas que contestaron los alumnos, se aprecia que cada grupo respondió tres problemas (en un tiempo aproximado de una hora) excepto los grupos 1c, 2c y 1d, que resolvieron dos problemas; los grupos 1e, 2e y 5c resolvieron solamente uno. En total cada problema lo contestaron 40 estudiantes de cuatro grupos distintos, excepto el problema 7, que fue contestado por 26 alumnos de tres grupos.

Tabla 5.2. Descripción de los participantes de la investigación

Escuelas secundarias	Estado	Grupo	Población				Número del problema resuelto por grupo
			Femenino		Masculino		
			f	%	f	%	
A	NL	1a	5	50	5	50	1, 2, y 3
		2a	5	50	5	50	1, 2 y 3
		3a	6	60	4	40	4, 5 y 6
		4a	4	40	6	60	4, 5 y 6
B	EM	1b	6	60	4	40	1, 2 y 3
		2b	5	50	5	50	1, 2 y 3
		3b	5	50	5	50	4, 5 y 6
		4b	5	50	5	50	4, 5 y 6
C	NL	1c	7	70	3	30	8 y 9
		2c	7	70	3	30	8 y 9
		3c	4	40	6	60	10, 11 y 12
		4c	6	60	4	40	10, 11 y 12
		5c	4	66	2	33	7
D	EM	1d	5	50	5	50	8, 9
		2d	7	70	3	30	8 y 9
		3d	6	60	4	40	10, 11 y 12
		4d	6	60	4	40	10, 11 y 12
E	EM	1e	5	50	5	50	7
		2e	4	40	6	60	7
		Total	101	54%	85	46%	

NL= Nuevo León; EM= Estado de México; f= frecuencia.

5.1.2. Clasificación de las respuestas a los 12 problemas

Las respuestas que dieron los estudiantes a los 12 problemas se clasificaron en tres categorías: la primera, *aciertos* (A), incluyó todas las respuestas que correspondieron al resultado correcto, sin considerar un único procedimiento; la segunda categoría, *respuestas erróneas* (RE), incluyó todas las respuestas en las que el resultado fue distinto a la respuesta correcta; la tercera categoría, *omisiones* (O), todas las respuestas que mencionaron por escrito las dificultades por las cuales no se había resuelto o terminado el problema, por ejemplo un estudiante escribió sobre lo difícil del problema, pero no especificó algún procedimiento o solución. Cabe señalar que no se presentaron problemas sin respuestas.

Como se observa en la Tabla 5.3 se obtuvieron un total de 466 respuestas: 199 aciertos (42%), 239 respuestas erróneas (51%) y 29 omisiones (7%).

Tabla 5.3. Clasificación de respuestas emitidas por los estudiantes al responder los 12 problemas en la modalidad de respuesta construida

Problema	N=	Aciertos		Errores		Omisiones	
		f	%	f	%	f	%
1	40	3	7.5	37	92.5	0	0
2	40	33	82.5	6	15	1	2.5
3	40	29	72.5	10	25	1	2.5
4	40	33	82.5	7	17.5	0	0
5	40	6	15	30	75	4	10
6	40	2	5	35	87.5	3	7.5
7	26	2	7.7	20	77	4	15.3
8	40	6	15	19	48	15	37
9	40	16	40	24	60	0	0
10	40	6	15	34	85	0	0
11	40	24	60	15	37.5	1	2.5
12	40	38	95	2	5	0	0
Total		198	42	239	51	29	7

Al realizar el análisis de contenido de las 239 respuestas erróneas, se encontraron patrones sistemáticos de errores, permitiendo categorizarlas en 43 tipos de error. Los problemas 3 y 9 presentaron cinco tipos de error; seguidos de los problemas 1, 5, 6, 7 y 11 con cuatro tipos de error; los problemas 2, 8 y 10 presentaron tres tipos de error; por último los problemas 4 y 12 presentaron dos tipos de error (ver Tabla 5.4).

Tabla 5.4. Cantidad de tipo de errores de los 12 problemas

Problema	Cantidad de tipos de error	
	f	%
1	4	9.3
2	3	6.9
3	5	11
4	2	4.6
5	4	9.3
6	4	9.3
7	4	9.3
8	3	6.9
9	5	11
10	3	6.9
11	4	9.3
12	2	4.6
Total	43	100

5.1.3. Descripción de los tipos de error

A continuación se presentan las tablas (5.5 a 5.18) con la información de cada uno de los 12 problemas. En la primera columna de cada tabla se menciona el problema; en la segunda, se ubica el código que le corresponde a ese tipo de error; en la tercera columna

se explica el procedimiento que siguieron los alumnos y la respuesta errónea que emitieron; la cuarta y quinta muestran el porcentaje relativo correspondiente a las respuestas erróneas.

Problema 1

La solución al problema 1 (ver la primera columna de la Tabla 5.5) implica usar la relación entre el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor. La solución al problema se realiza en dos momentos. Primero, el alumno debe estimar el número total de chocolates, cantidad que se obtiene al determinar el mínimo común múltiplo de 3, 5 y 9, que es 45. El segundo paso implica encontrar los divisores de 45 que no se mencionan en el problema, las respuestas correctas son: 1, 15 ó 45. Cabe señalar que este problema al aplicarse en la modalidad de respuesta construida tiene tres respuestas correctas, y todas se consideraron como aciertos.

El problema en la modalidad de respuesta construida lo contestaron 40 estudiantes, 37 de ellos emitieron una respuesta errónea (92%).

En relación con los tipos de error, en el problema 1 se presentaron cuatro (ver columna tres de la Tabla 5.5). Para cada tipo de error se calculó su frecuencia de ocurrencia y el porcentaje. El error con mayor frecuencia fue el *E1.2* (51%), seguido por los tipos de error *E1.1* y *E1.3* (22%), y por último, el error *E1.4* (5%).

En tipo de error *E1.2* el alumno realizó el siguiente procedimiento: determinó que 50 era el total de chocolates que contenía la caja, dato que se menciona en el problema. Posteriormente, dividieron $50/5$ y $50/10$. Su respuesta fue que podían hacer 5 bolsitas con 10 chocolates o 10 bolsitas con 5 chocolates. En esta respuesta se identificó que el error se generó al momento de determinar la cantidad total de chocolates que tenía María y se omitió información necesaria para solucionar el problema.

En el tipo de error *E1.1* el estudiante anotó que la cantidad total de chocolates menor a 50 era 49, posteriormente dividió $49/7$. Su respuesta fue 7 bolsitas con 7 chocolates cada una. En la respuesta se identificó que el error se generó al momento de especificar el total de chocolates que tenía María y omitió información con respecto a que el total de chocolates también se guardaba en bolsitas de 3, 5 ó 9 chocolates.

En el caso del tipo de error *E1.3*, aquí los alumnos realizaron divisiones con números menores a 50 (49, 48 y 47) y utilizaron los divisores 3, 5 y 9. Las respuestas fueron diversas sin especificar un resultado final. En este tipo de error el estudiante sólo se centró en determinar la cantidad total de chocolates, pero sin lograrlo.

Por último en el tipo de error *E1.4*, los alumnos realizaron divisiones con números menores a 50 (49, 48, 47 y 46) y utilizaron los divisores 7, 6, 4, 2 incluyendo 3, 5 y 9. Sus respuestas fueron diversas sin especificar un resultado final. Igual que en el tipo de error *E1.3* los estudiantes se centraron en determinar la cantidad de chocolates, sin lograrlo.

Tabla 5.5. Descripción general de los tipos de error del problema 1 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error			Estudiantes	
				Errores	%
Sabemos que María tiene una caja con menos de 50 chocolates y los quiere guardar en bolsitas con la misma cantidad cada una. Los puede guardar en cada bolsita sin que le sobre nada en grupos de 3 en 3, de 5 en 5, y de 9 en 9. ¿De qué otra manera María puede guardar sus chocolates en cada bolsita sin que le sobre ninguno?	E1.1	<i>Operación:</i> 49/7 <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno anota que el total de chocolates es 49, ya que en orden descendente es menor a 50. 2. Divide 49/7 <i>Resultado:</i> 7 bolsitas con 7 chocolates.		8	22
	E1.2	<i>Operación:</i> 50/b <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno anota que el total de chocolates es 50. 2. Divide 50 entre los divisores 5 y 10, y los resultados cubren las características de que cada paquete tenga la misma cantidad de chocolates sin que sobre ninguno. <i>Resultado:</i> 5 bolsitas con 10 chocolates y, 10 bolsitas con 5 chocolates.		19	51
	E1.3	<i>Operación:</i> 49/a, 49/b, 49/c <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante realiza una serie de divisiones, donde el dividendo son números menores a 50, y los divisores fueron únicamente 3, 5, y 9. <i>Resultado:</i> Varios (por ejemplo 49/3, 49/5, 49/9, 48/3, 48/5, 48/9)		8	22
	E1.4	<i>Operación:</i> 48/a, 48/b, 48/c; 47/a, 47/b, 47/c; <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante realiza divisiones y considera al dividendo a partir del 50, utilizando como divisores varios números incluyendo el 3, 5 y 9. <i>Resultado:</i> Varios (por ejemplo 47/3, 47/5, 47/9, 47/2, 47/4)		2	5
Total				37	100

E1.1, E1.2, E1.3, y E1.4 = códigos de los tipos de error

A partir de estos datos, se concluye que los errores del problema 1 se generaron al momento de tener que determinar la cantidad total de chocolates que tenía María y por omitir información como que el total de chocolates también se guardaban en bolsitas de 3 en 3, de 5 en 5 y de 9 en 9.

Problema 2

En el problema 2 (ver la primera columna de la Tabla 5.6) la solución implica usar dos operaciones: primero multiplicar y después dividir. Es decir, primero el alumno necesita conocer el total de litros de leche que se produce en el establo y lo obtiene al multiplicar 185×15 , el resultado es 2775 litros; segundo, para conocer la cantidad de litros de leche que se surten a cada establecimiento divide $2775/5$, el resultado es 555 litros de leche por establecimiento al día.

El problema 2 en lo contestaron 40 estudiantes, 6 alumnos contestaron de forma incorrecta (15%).

El problema 2 presentó tres tipos de error (ver columna tres de la Tabla 5.6). De cada uno de los tipos de error se calculó la frecuencia de ocurrencia y el porcentaje. El error que se presentó con mayor frecuencia fue el *E2.1* (68%), seguido por los tipos de error *E2.2* y *E2.3* (16%).

En el tipo de error *E2.1* los alumnos respondieron al problema de la siguiente forma: tomaron el 185 como el total de litros de leche que se producían en el establo, después dividieron $185/5$. Su resultado final fue 37 litros de leche por establecimiento. El error se generó al determinar la cantidad de litros de leche que se producían en el establo.

En el procedimiento del error *E2.2* el estudiante multiplicó 185×5 , el resultado de la operación fue 925; después dividió $925/185$. Su resultado final fue que a cada establecimiento por día le tocaron cinco litros de leche. El error se presentó al momento de determinar la cantidad de leche que reparten a cada establecimiento.

El tipo de error *E2.3* el alumno en su procedimiento multiplicó $185 \times 15 = 2,775$, $2,775 \times 5$, su resultado parcial fue de 13875 litros de leche. Después dividió $1,3875/15$, su resultado final fue 925 litros de leche por establecimiento. El error se generó al momento de determinar la cantidad total de leche que se producía en el establo.

Tabla 5.6. Descripción general de los tipos de error del problema 2 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes	
			Errores	%
Un establo tiene 185 vacas y estima que en promedio sus vacas producen diariamente 15 litros de leche cada una. La cantidad de leche recolectada por día se distribuye en partes iguales en cinco establecimientos. ¿Cuántos litros de leche se espera surtir diariamente en cada establecimiento?	E2.1	<i>Operación:</i> a / c <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno anota 185 como la cantidad total de litros de leche que se producen al día en el establo. 2. Divide 185 litros de leche entre 5 que es la cantidad de establecimientos en los que se distribuye la leche diariamente. <i>Resultado:</i> 37 litros	4	68
	E2.2	<i>Operación:</i> $(ab) / a$ <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno multiplica 185 entre 15, para determinar la cantidad total de litros de leche que se producen en el establo. 2. Divide 2,275 que es el total de leche que se produce en el establo entre 185. <i>Resultado:</i> 15 litros	1	16
	E2.3	<i>Operación:</i> $(a \times b \times c) / b$ <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno multiplica 185 litros por 15 y por 5, para determinar el total de litros de leche que se producen en el establo. 2. Divide 13,875, que es el total de litros de leche entre 15. <i>Resultado:</i> 925 litros	1	16
	Total		6	100

E2.1, E2.2, E2.3= códigos de los tipos de error

A partir de la descripción de los tipos de error del problema 2, se observó que estos se generaron al momento de determinar la cantidad total de litros de leche que había en el establo y al establecer relaciones incorrectas de los datos.

Problema 3

El problema 3 (ver primera columna de la Tabla 5.7) implica usar dos operaciones: adición y sustracción en el orden mencionado. En la solución el alumno suma 2,250 que es la cantidad de litros de agua inicial más 5,000 litros de agua que surtieron, la respuesta parcial son 7,250 litros de agua en el depósito. Después a los 7,250 litros de agua se le restan 3,750 litros de agua utilizados para regar el huerto, quedando al final un total de 3,500 litros de agua en el depósito.

El problema 3 lo contestaron 40 estudiantes, 10 alumnos emitieron una respuesta errónea (25%). Se obtuvieron cinco tipos de error. El tipo de error E3.2 se cometió con mayor frecuencia (40%), seguidos por los tipos de error E3.3 y E3.4 (20%), y por último los tipos de error E3.1 y E3.5 (10%) (ver columna tres de Tabla 5.7).

En el tipo de error E3.2, el estudiante utilizó las operaciones de adición y sustracción para contestar el problema, sin embargo cometió un error al resolver la operación de sustracción con cifras de cuatro números, que incluye cero y que implica “llevar”.

En el tipo de error *E3.3*, el estudiante tomó el 5,000 como el total de litros de agua que había en el depósito y les restó 3,750. Su resultado fue 1,250 litros. En esta respuesta se observó que el error se presentó al momento de definir el total de litros de agua que había en el depósito.

Por otra parte, en el tipo de error *E3.4* el estudiante dio como resultado final el último dato que se mencionó en el problema.

El tipo de error *E3.1* la respuesta implicó sumar $2250 + 5000 = 7250$, después restó $7250 - 3730 = 4520$. Su resultado fue 4520 litros. El error fue causa de la dificultad del estudiante al resolver la operación de adición. En el tipo de error *E3.5* el alumno restó todos los datos en el orden en que se mencionan en el problema. Al momento de resolver la operación modificó los resultados y al final su resultado fue un número positivo.

Tabla 5.7. Descripción general de los tipos de error del problema 3 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes	
			Errores	%
Don José tenía inicialmente 2250 litros de agua en un depósito y contrató un grupo de gente para les surtieran otros 5000 litros en ese depósito. Más tarde utilizó 3750 litros para regar su huerto. ¿Con cuántos litros de agua se quedó?	<i>E3.1</i>	Operación: $(a + b) - c$. Procedimiento: 1. El alumno comete el error al resolver la operación de adición. Resultado: Varios (por ejemplo: 7,000)	1	10
	<i>E3.2</i>	Operación: $(a + b) - c$. Procedimiento: 1. El alumno comete el error al resolver la operación sustracción. Resultado: Varios (por ejemplo 4500).	4	40
	<i>E3.3</i>	Operación: $(b - c)$ Procedimiento: 1. El alumno toma el 5,000 como el total de litros que hay en el depósito. 2. A 5,000 litros le resta los 3,750 litros que se utilizaron para regar el huerto. Resultado: 1250 litros	2	20
	<i>E3.4</i>	Operación: C Procedimiento: 1. El alumno menciona 3,750, como resultado al problema. Resultado: 3,750 litros	2	20
	<i>E3.5</i>	Operación: $(a - b - c)$ Procedimiento: 1. El estudiante resta todas las cantidades, en el orden en que van apareciendo en el problema (2,250-5,000-3,750) Resultado: Por ejemplo: 4,700	1	10
	Total		10	100

E3.1, *E3.2*, *E3.3*, *E3.4* y *E3.5* = códigos de los tipos de error

Como se aprecia, los tipos de error del problema 3 se generaron al momento de determinar la cantidad total de litros de agua que había en el depósito, por fallas al resolver la operación de adición y por relacionar incorrectamente los datos.

Problema 4

El problema 4 implica el uso de las operaciones de sustracción y adición para su resolución, el resultado final del problema 4 es producto de $(a - b) + c$. En este problema (ver la primera columna la Tabla 5.8) el estudiante tiene de inicio 37 puntos en su primera tirada, a los cuales les resta 17 puntos que perdió en su segunda tirada, su primer resultado parcial es 20; después le suma 20 +30 puntos que ganó en su tercera tirada, con un resultado final de 50 puntos.

El problema lo contestaron 40 alumnos, 7 estudiantes dieron respuestas erróneas. Los tipos de error fueron dos. El tipo de error *E4.1* fue el que presentó mayor frecuencia (57%), seguido del error *E4.2* con 43% (ver quinta y sexta columnas de la Tabla 5.8).

El tipo de error *E4.1* el estudiante sumó todos los valores que se mencionan en el problema: $37 + 17$, su resultado fue 47 puntos. En error se generó porque el estudiante realizó una relación incorrecta de los datos y omitió información necesaria para la solución.

Respecto al tipo de error *E4.2* en la respuesta el estudiante sumó todos los datos proporcionados en el problema.

Tabla 5.8. Descripción general de los tipos de error del problema 4 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes		
			Errores	%	
En un juego Luis ganó 37 puntos en su primer tirada, en la segunda perdió 17 puntos y en la tercera tirada ganó 30 puntos. ¿Cuántos puntos lleva acumulados hasta ese momento?	E4.1	Operación:	(b + c)	4	57
		Procedimiento:	1. El alumno realiza la suma de 17 puntos más 30 puntos.		
		Resultado:	47 puntos		
	E4.2	Operación:	(a + b + c)	3	43
		Procedimiento:	1. El estudiante suma los tres valores de acuerdo con el orden en que se mencionan en el problema (37 + 17 + 30)		
		Resultado:	84 puntos		
	Total		7	100	

E4.1 y E4.2 = códigos de los tipos de error

Con respecto a los tipos errores del problema 4, las causas fueron por omitir datos necesarios para solucionar el problema y errores al relacionar los datos de manera incorrecta.

Cabe mencionar que los problemas 3 y 4 evalúan el mismo contenido. El resultado del problema 3 es producto de $(a + b) - c$ la solución al problema 4 es resultado de $(a - b) + c$. Al comparar entre los tipos de error de estos dos problemas, se observó que las respuestas erróneas *E3.3* y *E4.1*, así como *E3.5* y *E4.2* son similares (ver Tabla 5.9).

Tabla 5.9. Comparación entre tipos de error de los problemas 3 y 4

Problema 3		Problema 4	
Tipo de error	Resolución	Tipo de error	Resolución
E3.1	Error al resolver algoritmo de adición.	E4.1	$(b + c)$
E3.2	Error al resolver algoritmo de sustracción.	E4.2	$(a + b + c)$
E3.3	$(b - c)$	-	-
E3.4	c	-	-
E3.5	$(a - b - c)$	-	-

Los tipos de error *E3.1* y *E3.2* no se presentaron en el problema 4, porque son causados por cometer errores al resolver el algoritmo con cifras de cuatro dígitos que implican “llevar”. Lo anterior da cuenta de que la resolución del algoritmo en operaciones básicas con una cantidad de cifras de cuatro dígitos que impliquen “llevar”, sigue siendo una causa de la presencia de errores en la solución de problemas en matemáticas.

Problema 5

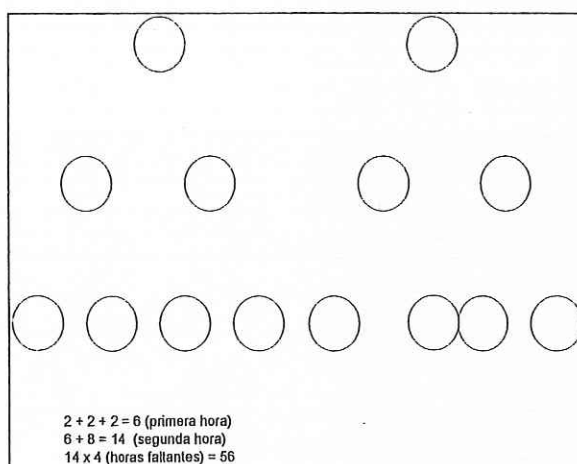
En el problema 5 (ver la primera columna de Tabla 5.10) se plantea una situación en la que inicialmente en un cultivo había dos bacterias y éstas se reproducen duplicándose cada hora, el alumno necesita determinar cuántas bacterias habrá en seis horas después. La resolución implica elevar dos a la séptima potencia. El resultado es 128 bacterias.

El problema lo contestaron 40 alumnos, de los cuales 30 alumnos emitieron una respuesta errónea (75%). Los tipos de error fueron cuatro. Como se aprecia en la Tabla 5.10 el tipo de error más frecuente fue el *E5.2* (53%), seguido del tipo de error *E5.3* (30%), después el error *E5.1* (10%) y por último el error *E5.4* (7%).

El tipo de error *E5.2* en sus respuestas los estudiantes generalizaron uno de los resultados parciales para llegar al resultado final, es decir, multiplicaron $2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$, hasta este momento faltaban 4 horas para completar las 6, el siguiente paso fue multiplicar 8×4 (horas faltantes) = 32. El resultado final fue 32. Cabe destacar que estos alumnos no hicieron uso de la operación de la multiplicación, sino de un diagrama de árbol, por lo cual para algunos de ellos el espacio de la hoja de respuesta fue insuficiente. Estos errores fueron causa de una generalización.

En el tipo de error *E5.3* los estudiantes contestaron elaborando el diagrama que aparece en la Figura 5.1. El estudiante contó dos veces las bacterias de inicio, si se observa el alumno especificó que para la primera hora contaba con seis bacterias y para la segunda hora con 14 bacterias, después multiplicó 14×4 (horas faltantes). Su resultado final fue 56 bacterias. El error fue por una generalización.

Figura 5.1. Esquema elaborado por los estudiantes que cometieron el error *E5.3*



En el tipo de error *E5.1* los alumnos realizaron la multiplicación $2 \times 2 = 4 \times 2 = 8 \times 2 = 16 \times 2 = 32 \times 2 = 64 \times 2 = 126 \times 2 = 252$, y cometió error en una de las operaciones. Los resultados finales fueron varios, por ejemplo 252 bacterias. El error se cometió por fallas al resolver el algoritmo de multiplicación. El tipo de error *E5.4* el alumno multiplicó $2 \times 6 = 12$. Su resultado fueron 12 bacterias.

Tabla 5.10. Descripción general de los tipos de error del problema 5 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes	
			Errores	%
En un cultivo había inicialmente dos bacterias. Si éstas se reproducen duplicándose cada hora. ¿Cuántas bacterias habrá seis horas después?	E5.1	Procedimiento: 1. El alumno comete error al resolver una de las operaciones de multiplicación. Resultado: <i>Varías: (por ejemplo 124 bacterias)</i>	3	10
	E5.2	Procedimientos: $\checkmark$ Multiplica 8 (bacterias hasta la segunda hora) por 4 (horas faltantes). $\checkmark$ Multiplica 16 (bacterias hasta la tercera hora) por 3 (horas faltantes). Resultado: $\checkmark$ Multiplica 32 (bacterias hasta la cuarta hora) por 2 (horas faltantes). <i>Varías: por ejemplo 32, 48 y 64</i>	16	53
	E5.3	Procedimiento: 1. Multiplica 14 (bacterias hasta la segunda hora) por 4 (horas faltantes) (ver Figura 2) Resultado: <i>56 bacterias.</i>	9	30
	E5.4	Resolución: $\checkmark$ Multiplica 2 (bacterias de inicio) por 6 (horas totales). Resultado: <i>12 bacterias</i>	2	7
	Total		30	100

E5.1, E5.2, E5.3 y E5.4= códigos de los tipos de error

Con relación a los tipos de error del problema 5, estos se cometieron por generalización y fallas en la resolución del algoritmo de multiplicación.

Problema 6

El problema 6 (ver la primera columna de la Tabla 5.11) para su solución solicita que el estudiante conozca el significado de raíz cuadrada y un método para solucionar la raíz cuadrada exacta. En el problema se le plantea al estudiante una situación en la que tiene que determinar la cantidad de piezas que conforman uno de los lados de un rompecabezas que tiene forma cuadrada y está compuesto por un total de 400 piezas. El resultado es 20 piezas por lado.

El problema fue contestado por 40 alumnos, 35 estudiantes emitieron una respuesta errónea (87%). Las respuestas erróneas se concentraron en seis tipos de error. El tipo de error E6.2 se presentó con mayor frecuencia (68%), seguido del E6.5 (8%), y por último el E6.1, E6.3, E6.4 y E6.6 (6%).

El procedimiento que realizó el estudiante en el error E6.2 fue que respondió el problema usando el concepto de perímetro de un cuadrado: si el cuadrado tiene un total de 400 figuras y cada lado del cuadrado tiene la misma cantidad de piezas, dividió 400 entre 4, cantidad de lados del cuadrado. El concepto de perímetro también se utilizó en

el tipo de error *E6.5*, donde el estudiante determinó que 400 era el valor de cada uno de los 4 lados, y sumó $400 + 400 + 400 + 400 = 1,600$

En el tipo de error *E6.1* el estudiante utilizó el concepto de área: si el 400 es el total de figuras del cuadrado y el área de un cuadrado se obtiene al multiplicar lado por lado, para saber cuánto mide cada lado dividió $400/2$. El resultado fue 200.

En el tipo de error *E6.3* el estudiante utilizó los conceptos de área y perímetro de un cuadrado. El estudiante consideró 400 como el valor de uno de los lados y multiplicó $400 \times 400 = 160,000$. Posteriormente divide $160,000/4 = 40,000$ (el cuadrado tiene cuatro lados que miden lo mismo). El resultado fue 40,000 piezas por lado.

Respecto al tipo de error *E6.4* el alumno consideró 400 como la cantidad de piezas de uno de los lados y respondió $400^2 = 160,000$. El resultado fue 160,000. Por último, en el tipo de error *E6.6* el estudiante sacó la raíz cuadrada de 400, pero cometió error al resolver el algoritmo. Los resultados fueron varios, por ejemplo 200.

Tabla 5.11. Descripción general de los tipos de error del problema 6 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes	
			Errores	%
José armó un rompecabezas con 400 piezas cuadradas. Armandó el rompecabezas también tenía forma de cuadrado. ¿Cuántas piezas tiene un lado del rompecabezas que armó José?	<i>E6.1</i>	Operación: $(a / 2)$ Procedimiento: 1. El estudiante divide 400/2 Resultado: 200 piezas	2	6
	<i>E6.2</i>	Operación: $(a / 4)$ Procedimiento: 1. El estudiante divide 400/4 Resultado: 100 piezas	24	68
	<i>E6.3</i>	Operación: $[(a \times a) / 4]$ Procedimiento: 1. El estudiante multiplica 400×400 2. Divide $160,000/4$ Resultado: 40,000 piezas	2	6
	<i>E6.4</i>	Operación: a^2 Procedimiento: 1. El estudiante multiplica: 400×400 Resultado: 160,000 piezas	2	6
	<i>E6.5</i>	Operación: $(a + a + a + a)$ Procedimiento: 1. El estudiante suma $400 + 400 + 400 + 400$ Resultado: 1,600 piezas	3	8
	<i>E6.6</i>	Procedimiento: 1. El estudiante comete error: $\sqrt{400}$ Resultado: Varias: por ejemplo 200	2	6
	Total		35	100

E6.1, *E6.2*, *E6.3*, *E6.4*, *E6.5* y *E6.6*= códigos de los tipos de error

Con respecto a la información anterior, se concluye que los tipos de error del problema 6 fueron causa de una confusión sobre los conceptos de área y perímetro de un cuadrado.

Problema 7

El problema 7 (ver primera columna de la Tabla 5.12) implica que el alumno conozca un método para solucionar la raíz cuadrada inexacta y que tenga práctica en resolver problemas que implican esta operación aritmética. En el problema se plantea una situación en la que el alumno tiene que determinar la medida del lado de un terreno cuadrado que posee un área de 350 m^2 . El resultado es 18.707 m.

Es un problema lo respondieron 26 alumnos, 20 de ellos presentaron respuestas erróneas. Las respuestas erróneas se concentraron en cuatro tipos de error (ver columna tres de Tabla 5.12). El tipo de error *E7.2* se presentó con mayor porcentaje (65%), seguido por los tipos de error *E7.1* y *E7.4* (15%) y por último el tipo de error *E7.3* (5%).

El tipo de error *E7.2* el estudiante dividió $350 / 2$, su resultado fue 175 m.

El error *E7.1* fue causado porque el alumno se equivocó al resolver la raíz cuadrada. En el tipo de error *E7.4* el estudiante aplicó el concepto de área de un cuadrado: el dato de 350 lo consideró como la medida de uno de los lados de la figura, así multiplicó $350 \times 350 = 122,500$. El resultado fue 122,500.

Por último, el tipo de error *E7.3* el estudiante respondió el problema aplicando dos conceptos: área y perímetro. El dato 350, el alumno lo tomó como la medida de uno de los lados del cuadrado. Multiplicó $350 \times 350 = 122,500$. Posteriormente dividió $122,500/4$ (número de lados de un cuadrado) = 30,625. El resultado final fue 30,625.

Tabla 5.12. Descripción general de los tipos de error del problema 7 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes	
			Errores	%
Un terreno cuadrado tiene 350 m ² de área. ¿Cuál es la medida de uno de sus lados?	E7.1	Procedimiento: 1. El alumno comete error al resolver la operación de la raíz cuadrada inexacta. Resultado: Varios: por ejemplo 18.03	3	15
	E7.2	Operación: $(a / 2)$ Procedimiento: 1. El alumno considera el 350 como el total del área del cuadrado. 2. Divide 350 / 2 Resultado: 175 m	13	65
	E7.3	Operación: $[(a \times a) / 4]$ Procedimiento: 1. El estudiante toma el valor de 350 como la medida de uno de los lados del terreno. 2. Multiplica 350 x 350=122,500 3. 122,500 los divide entre 4 Resultado: 30,625 m	1	5
	E7.4	Operación: a^2 Procedimiento: 1. El estudiante toma el valor de 350 como la medida de uno de los lados del terreno. 2. Realiza la operación de 350 x 350=122,500 Resultado: 122,500 m	3	15
	Total		20	100

E7.1, E7.2, E7.3 y E7.4 = códigos de los tipos de error

A partir del análisis de los tipos de error del problema 7, se observó que se presentaron confusiones en los conceptos de área y perímetro de un cuadrado, así como entre raíz cuadrada y división

Hay un aspecto que resaltar de los problemas 6 y 7, ambos evalúan el mismo contenido. El problema 6 se resuelve con una raíz cuadrada exacta y el problema 7 implica la solución de una raíz cuadrada inexacta. Los tipos de error que se presentaron en ambos problemas se relacionan con dificultades por parte del alumno en resolver el algoritmo de raíz cuadrada y confusión en los conceptos de área y perímetro de un cuadrado como se aprecia en la Tabla 5.13.

Tabla 5.13. Tipos de respuestas erróneas presentes en los problemas 6 y 7

Problema 6	Problema 7
❖ Error al resolver la operación de raíz cuadrada exacta	❖ Error al resolver la operación de raíz cuadrada inexacta
❖ $a / 2$	❖ $a / 2$
❖ $(a \times a) / 4$	❖ $(a \times a) / 4$
❖ (a^2)	❖ (a^2)
❖ $(a + a + a + a)$	-
❖ $a / 4$	-

Problema 8

En este problema (ver la primera columna de la Tabla 5.14), la resolución involucra usar los criterios de divisibilidad. La solución implica tres pasos. Primero, el estudiante necesita conocer por simple inspección si 86 es divisible entre 3 y 5, la respuesta es no. Segundo, determinar qué número mayor a 86 es divisible entre 3 y 5, su respuesta es 90; Tercero, restar $90-86$, su resultado final es, faltan 4 conejos.

El total de alumnos que contestó este problema fueron 40, de los cuales 19 contestaron respuestas erróneas (47%).

En relación con los tipos de respuestas erróneas, este problema presentó tres tipos (ver la tercera columna de la Tabla 5.14). De cada error se calculó la frecuencia de ocurrencia y el porcentaje relativo. El tipo de error con mayor frecuencia fue el *E8.1* (68%), seguido por el tipo de error *E8.2* (27%), por último el tipo de error *E8.3* (5%).

En el tipo de error *E8.1* el estudiante realizó lo siguiente: primero dividió $86/3$, su resultado fue 28 conejos y le sobraron 2; segundo dividió $86/5$, su resultado fue 17 conejos y sobró 1. La respuesta final fue: para guardar los conejos de 3 en 3 hay que agregar un conejo y para guardarlos de 5 en 5 hay que agregar cuatro conejos. En esta respuesta se observó que el alumno no consideró que tenía que encontrar un número mayor a 86 divisible entre 3 y 5.

El tipo error *E8.2* el estudiante dividió $86/3$, $86/5$, $87/3$, $87/5$, sus respuestas fueron varias por ejemplo 28, 17 y 29. En la respuesta se observó que el alumno tuvo claro que necesitaba determinar un número distinto a 86, divisible entre 3 y 5, sin lograrlo.

Con relación al tipo de error *E8.3* el estudiante en su resolución dividió $86/2 = 43$. Su resultado final fue: 43 conejos los guardó de 3 en 3 y los otros 43 de 5 en 5.

Tabla 5.14. Descripción general de los tipos de error del problema 8 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes	
			Errores	%
Don Chava tiene 86 conejos y quiere meterlos en jaulas con la misma cantidad de conejos cada una. Su hijo Juan le propone meterlos de tres en tres, pero de esta manera le sobran dos conejos. Su hijo Mario le propone meterlos de cinco en cinco, pero le sobra un conejo. ¿Por lo menos, cuántos conejos le faltan a don Chava para que pudiera aceptar tanto la propuesta de Juan como la de Mario sin que le sobre ninguno?	E8.1	Operación: a/b, a/c Procedimiento: 1. El alumno divide 86/3 2. El alumno divide 86/5 Resultado: Un conejo para guardarlos de 3 en 3 y 4 para guardarlos de 5 en 5.	13	68
		Operación: a / b, a / c, n / b, n/c Procedimiento: 1. El alumno divide 86/3 2. Posteriormente divide 86/5 3. Divide 87/3 4. Divide 87/5 Resultado: Varios (por ejemplo 28, 17 y 29)	5	27
	E8.3	Operación: a / 2 Operación: 1. El estudiante divide 86/2 Resultado: 43 conejos para guardar de 3 en tres y 43 conejos para guardar de 5 en 5.	1	5
		Total	19	100

E8.1, E8.2 y E8.3 = códigos de los tipos de error

A partir de los resultados obtenidos de los tipos de error del problema 8, se concluye que los errores se cometieron al determinar un número mayor a 86 divisible entre 3 y 5

Problema 9

En el problema 9 (ver la primera columna de la Tabla 5.15) la solución involucra usar el concepto de múltiplo (mínimo común múltiplo). Para su solución el estudiante necesita obtener el mínimo común múltiplo de 15 y 20. El resultado es la cantidad mínima de dinero que tanto Tere como Juan gastaron igual a \$60.

El problema en la modalidad de respuesta construida lo contestaron por un total de 40 estudiantes, 24 emitieron respuestas erróneas.

En relación con los tipos errores, en este problema se presentaron cinco tipos (ver tercera columna de la Tabla 5.15). De cada tipo de error se calculó la frecuencia de ocurrencia y el porcentaje relativo. El error con mayor frecuencia fue el E9.1 (37%), seguido por los errores E9.2 y el E9.3 (21%), posteriormente el error E9.5 (13%) y por último el error E9.4 (8%).

En el tipo de error E9.1 la respuesta se desarrolló en dos pasos: primero, el alumno realizó la operación de $20+20=40$, su primer resultado parcial fue que Tere gastó \$40; segundo, realizó la suma de $15+15=30$, su segundo resultado parcial fue que Juan gastó

\$30. El resultado final fue Tere gastó \$40 y Juan gastó \$30. En este tipo de error el estudiante omitió la información de que tanto Tere como Juan gastaron la misma cantidad de dinero en sus compras individuales.

En el caso del tipo de error E9.2 el estudiante sumó $20+15=35$. Su respuesta final fue que gastaron \$35.

En el tipo de error E9.3 el alumno contestó el problema con la resta $20 - 15 = 5$. Su resultado final fue que lo mínimo que gastaron cada uno fueron \$5.

En el tipo de error E9.5 el alumno cometió error al determinar el mínimo común múltiplo. Por último, en el error E9.4, el estudiante multiplicó $20 \times 15 = 300$.

Tabla 5.15. Descripción general de los tipos de error del problema 9 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error			Estudiantes	
				Errores	%
Para la fiesta de la escuela, Tere fue a comprar platos desechables que costaron \$20.00 el paquete y por su parte Juan fue a comprar cucharas de \$15.00 el paquete. Ambos gastaron lo mismo ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que pudieron haber gastado cada uno?	E9.1	Operación: $(a + a), (b + b)$ Procedimiento: 1. El estudiante suma $20+20=40$ 2. Suma $15+15=30$ Resultado: Tere gastó \$40 y Juan \$30		9	37
	E9.2	Operación: $(a + b)$ Procedimiento: 1. El alumno suma $20+15=35$ Resultado: Gastaron \$35		5	21
	E9.3	Operación: $(a - b)$ Procedimiento: 1. El estudiante resta $20-15=5$ Resultado: Lo mínimo fueron \$5		5	21
	E9.4	Operación: $(a \times b)$ Procedimiento: 1. El alumno multiplica $20 \times 15 = 300$ Resultado: Lo que gastaron fueron \$300		2	8
	E9.5	Procedimiento: El estudiante comete error al obtener el m.c.m. Resultado: Varios, por ejemplo 20		3	13
	Total			24	100

E9.1, E9.2, E9.3, E9.4 y E9.5= códigos de los tipos de error

Problema 10

En el problema 10 (ver primera columna de la Tabla 5.16) la solución implica el uso del concepto de divisor de un número (máximo común divisor). El estudiante necesita aplicar el procedimiento que conoce para encontrar el máximo común divisor de 42 y 30, medidas de dos cuerdas que necesita cortar en pedazos del mismo tamaño. El resultado es 6 centímetros.

El problema 10 lo contestaron un total de 40 estudiantes, 34 alumnos emitieron respuestas erróneas (85%).

Las 34 respuestas se concentraron en tres tipos de error (ver columna tres de la Tabla 5.16). De cada tipo de error se calculó la frecuencia de ocurrencia y el porcentaje relativo. El tipo de error con mayor frecuencia fue el *E10.1* (91%), seguido por el *E10.3* (6%) y por último el *E10.2* (3%).

El tipo de error *E10.1* lo emitieron un total de 31 estudiantes. En su respuesta el alumno dividió $42/30$, su resultado fue, la medida más grande que puede tener la cuerda es de 1cm.

En el tipo de error *E10.3* la respuesta se desarrolló en dos momentos: primero, el alumno buscó un número que dividió de manera exacta al 42 y al 30, en este caso fue 6. Dividió $42/6$ su respuesta parcial fue, cada pedazo mide 7 cm, posteriormente dividió $30/6$, la respuesta parcial fue que cada pedazo mide 5 cm. El resultado final fue: las medidas de las cuerdas fueron de 7 y 5 cm.

Tabla 5.16. Descripción general de los tipos de error del problema 10 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes	
			Errores	%
José tiene dos cuerdas, una mide 42 cm., y la otra 30 cm. Cortará ambas cuerdas en pedazos del mismo tamaño, sin que le sobre nada. ¿Cuál es la medida más grande que puede tener cada pedazo de cuerda?	<i>E10.1</i>	<i>Operación:</i> a/b <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante divide $42/30=1$ <i>Resultado:</i> Cada pedazo de cuerda mide 1 cm	31	91
	<i>E10.2</i>	<i>Operación:</i> $(a+b)/2$ <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante suma $42+30=72$ 2. Divide $72/2=36$ <i>Resultado:</i> Cada cuerda mide 36cm.	1	3
	<i>E10.3</i>	<i>Operación:</i> $a/n, b/n$ <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante divide $42/6=7$ ó $42/7=6$ 2. Posteriormente divide $30/5=6$ ó $30/6=5$ <i>Resultado:</i> 7cm y 5 cm ó 6 cm y 5 cm	2	6
	<i>Total</i>		34	100

E10.1, E10.2 y E10.3 = códigos de los tipos de error

Problema 11

En el problema 11 (ver primera columna de la Tabla 5.17) la solución implica dos momentos: primero, determinar la cantidad de naranjas que integran las seis docenas, donde el resultado parcial son 72 naranjas; segundo, sumar cinco naranjas que se agregaron a las docenas que había, es decir $5+72=77$. El resultado final es 77 naranjas en total.

El problema lo contestaron 40 estudiantes, 15 alumnos emitieron respuestas erróneas.

En relación con los tipos de respuestas erróneas, en este problema se presentaron cuatro (ver la tercera columna de la Tabla 5.17). El tipo de error que se presentó con mayor frecuencia fue el *E11.1* (40%), seguido por los errores *E11.2* y el *E11.4* (27%) y por último el *E11.3* (6%).

En el tipo de error *E11.1* el procedimiento que siguieron los alumnos fue sumar $6 + 5 = 11$. En esta respuesta se observó que el alumno realizó una lectura incorrecta del enunciado al no identificar que en el problema se especifica que son seis docenas de naranjas y no seis naranjas.

Con respecto al tipo de error *E11.2* el estudiante dividió su respuesta en dos momentos: primero, sumaron $6 + 5 = 11$; segundo, multiplicaron $11 \times 12 = 132$ (12, es la cantidad de objetos que tiene una docena). Su resultado fue que Ana compró 132 naranjas. Este error se generó por una relación incorrecta de los datos. El tipo de error *E11.4* fue porque el estudiante se equivocó al resolver el algoritmo.

El tipo de error *E11.3* el alumno multiplicó $6 \times 5=30$, después dividió $30 / 12 = 2$ (12, es la cantidad de objetos que tiene una docena). El resultado fue dos naranjas. Este error se generó por una relación incorrecta de los datos.

Tabla 5.17. Descripción general de los tipos de error del problema 11 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes	
			Errores	%
Ana compró seis docenas de naranjas, más cinco naranjas ¿Cuántas naranjas son en total?	E11.1	Operación: $a + c$ Procedimiento: 1. El estudiante suma $6+5=11$ Resultado: 11 naranjas	6	40
	E11.2	Operación: $(a + c) \times b$ Procedimiento: 1. El alumno suma $6+5=11$ 2. Multiplica $11 \times 12=132$ Resultado: 132 naranjas	4	27
	E11.3	Operación: $(a \times c) / b$ Procedimiento: 1. Multiplica $6 \times 5=30$ 2. Divide $30/12=2$ Resultado: 2 naranjas	1	6
	E11.4	Operación: $(a \times b) + c$ Procedimiento: Error al resolver operaciones Resultado: Varias	4	27
	Total		15	100

E11.1, E11.2, E11.3 y E11.4= códigos de los tipos de error

Como se observa en los tipos de error que emitieron los alumnos al responder el problema 11, los errores se presentaron al omitir la palabra docena, al establecer una relación incorrecta de los datos y por errores en la resolución del algoritmo.

Problema 12

En el problema 12 (ver la primera columna de la Tabla 5.18) la solución implica tres pasos. Primero, determinar la cantidad de refrescos que regaló doña Lola, para ello se multiplica $15 \times 24 = 360$. La primera respuesta parcial es: doña Lola regaló 360 refrescos. Segundo, es necesario saber cuántos refrescos había en total, para ello se suman los refrescos que regaló don José y los que regaló doña Lola, es decir $120 + 360=480$; la cantidad total de refrescos que hubo eran 480. Tercero, se resta $480 - 320 = 160$, la última respuesta es que al final de la fiesta había 160 refrescos.

El problema fue contestado por 40 estudiantes, dos de ellos emitieron respuestas erróneas. Respecto al tipo de errores, este problema presentó dos tipos (ver la tercera columna de la Tabla 5.18).

En error E12.1 fue causa de problemas que tuvo el alumno al resolver el algoritmo. En el error E12.2 el estudiante sumó $120 + 15 + 24 + 320 = 479$. Su respuesta fue que sobraron 479 refrescos.

Tabla 5.18. Descripción general de los tipos de error del problema 12 y porcentaje de estudiantes que lo cometieron

Problema	Tipo de error		Estudiantes	
			Errores	%
Para la fiesta del pueblo, don José regaló 120 refrescos y por su parte doña Lola regaló 15 cajas con 24 refrescos cada una. Durante la fiesta se consumieron 320 refrescos. ¿Cuántos refrescos sobraron?	E12.1	Procedimiento: El estudiante comete el error al resolver las operaciones.	1	50%
		Resultado: Varios		
	E12.2	Operación: (a + b + c + d) Procedimiento: 1. El alumno realiza la siguiente operación: 120+15+24+320=479	1	50%
		Resultado: 479 refrescos		
Total			2	100

E12.1 y E12.2 = códigos de los tipos de error

5.1.4. Análisis de las entrevistas

Las entrevistas se aplicaron a 20 estudiantes (11%) que no fue claro el procedimiento que siguieron o que solamente dieron el resultado al problema en forma numérica. Como se observa en la Tabla 5.19, se entrevistaron a cinco estudiantes que resolvieron el problema 1 porque su respuesta fue confusa; a cinco estudiantes que respondieron el problema 4 porque solamente emitieron una respuesta numérica; en el caso del problema 5 se entrevistaron a nueve alumnos: siete dieron una respuesta confusa al problema al contestar con un diagrama de árbol y dos una respuesta numérica; por último se entrevistó a un estudiante que contestó el problema 8 por omitir su procedimiento en la hoja de respuesta.

Tabla 5.19. Alumnos entrevistados para aclarar el procedimiento utilizado al contestar los problemas

Problema	Tipo de aclaración	
	Procedimiento confuso	Resultado numérico
1	5	-
4	-	5
5	7	2
8	-	1
Total	12	8

Las 239 respuestas erróneas se categorizaron en 43 tipos de error. Los problemas con hasta cinco tipos de error fueron el 3 y el 9; los problemas que tuvieron hasta cuatro tipos de error fueron: 1, 5, 6, 7 y 11; los problemas con hasta tres tipos de error fueron: 2, 8 y 10; por último, los problemas con hasta dos tipos de error fueron: 4 y 12 (ver Tabla 5.20).

Tabla 5.20. Cantidad por tipo de errores de los 12 problemas

Problema	Cantidad por tipos de error	
	<i>f</i>	%
1	4	9.3
2	3	6.9
3	5	11
4	2	4.6
5	4	9.3
6	4	9.3
7	4	9.3
8	3	6.9
9	5	11
10	3	6.9
11	4	9.3
12	2	4.6
Total	43	100

Los problemas en los cuales más del 50% de los estudiantes contestó los problemas de forma errónea fueron: el 1 (92.5%), el 5 (75%), el 6 (87.5%), el 7 (77%), el 9 (60%) y el 10 (85%). Estos problemas evalúan contenidos referentes a múltiplos de un número (mínimo común múltiplo), divisores de un número (máximo común divisor), potenciación y radicación. Los problemas que menos del 50% de los alumnos emitieron una respuesta errónea fueron: el 2 (15%), el 3 (25%), el 4 (17.5%), el 8 (47.5%), el 11 (37.5%) y, el 12 (5%), estos problemas evalúan el uso de operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división e implicar resolver problemas en donde se utilicen de dos a tres tipos de operaciones distintas (ver Tabla 5.21).

Tabla 5.21. Respuestas de los estudiantes a cada problema de acuerdo con el contenido a evaluar

Problema	Especificación de contenido a evaluar	N=	Aciertos		Errores		Omisiones	
			<i>f</i>	%	<i>f</i>	%	<i>f</i>	%
1	Usar relación entre máximo común múltiplo y mínimo común divisor.	40	3	7.5	37	92.5	0	0
2	Usar multiplicación y división.	40	33	82.5	6	15	1	2.5
3	Usar adición y sustracción.	40	29	72.5	10	25	1	2.5
4		40	33	82.5	7	17.5	0	0
5	Usar potenciación.	40	6	15	30	75	4	10
6	Usar radicación.	40	2	5	35	87.5	3	7.5
7		26	2	7.7	20	77	4	15.3
8	Usar criterios de divisibilidad.	40	6	15	19	48	15	37
9	Usar concepto de múltiplo (mínimo común múltiplo).	40	16	40	24	60	0	0
10	Usar el concepto de divisor de un número (máximo común divisor).	40	6	15	34	85	0	0
11	Usar multiplicación y adición.	40	24	60	15	37.5	1	2.5
12	Usa multiplicación, adición y sustracción.	40	38	95	2	5	0	0
Total			198	42	239	51	29	7

Cabe resaltar que los problemas 1, 5, 6, 7 y 9 fueron en los que más del 50% de las respuestas fueron erróneas y también son los que presentaron entre cuatro y cinco tipos de error (ver Tabla 5.20 y 5.21).

5.2 Clasificación de los tipos errores, según el modelo de clasificación empírica de errores de Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987)

En este apartado se presenta la clasificación de los 43 tipos de error que realizó el comité, a partir del modelo de clasificación empírica de errores en matemáticas desarrollada por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987) (ver Tabla 5.22).

El modelo se divide en seis categorías. La primera categoría (datos mal utilizados) se divide en siete subcategorías; la segunda categoría (interpretación incorrecta del lenguaje matemático) se divide en tres subcategorías; las categorías tercera (inferencias no válidas lógicamente), cuarta (teoremas o definiciones distorsionadas), quinta (falta de verificación en la solución) y sexta (errores técnicos) incluyen una subcategoría.

Tabla 5.22. Modelo de clasificación empírica de errores desarrollada por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987)

Categoría de error	Descripción de las categorías
(1) Datos mal utilizados	Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. 11. añade información innecesaria, 12. olvida algún dato necesario para la solución, 13. contesta algo que no es necesario, 14. asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado, 15. se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta 16. hace una lectura incorrecta del enunciado, 17. copia incorrectamente algunos de los datos durante el procedimiento.
(2) Interpretación incorrecta del lenguaje matemático	Errores debido a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje (posiblemente simbólico). 21. traducción de una expresión del lenguaje natural a un término matemático o una ecuación que representa la relación de una descripción verbal, 22. designan un concepto matemático mediante un símbolo que tradicionalmente se refiere a otro concepto y opera con el símbolo en su uso convencional, 23. interpretación incorrecta de símbolos gráficos como de términos matemáticos.
(3) Inferencias no válidas lógicamente	Errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido en específico. 30. errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento.
(4) Teoremas o definiciones distorsionadas	Errores que se producen por distorsión de un principio, regla, teoría o definición identificable. 40. errores que se producen por distorsión de un principio, regla teoría o definición.
(5) Falta de verificación en la solución	Errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución al problema planteado. 50. errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución al problema planteado.
(6) Errores técnicos	Errores de cálculo, al tomar datos de una tabla en la manipulación de símbolos algebraicos o los derivados de la ejecución de algoritmos. 60. incluye todos los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o los derivados de ejecuciones de algoritmos.

A continuación se presentan las tablas (5.23 a 5.34) con la información de la categorización de los tipos de error que realizó el comité, a partir del modelo desarrollado por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987). En la primera columna se especifica el número del problema; en la segunda se ubica el código correspondiente al tipo de error; en las columnas siguientes se anotaron las categorías del modelo en las cuales los integrantes del comité clasificaron los tipos de error. En las dos últimas columnas se anotó la frecuencia y la moda respectivamente.

Cabe aclarar que la frecuencia varía en cada tipo de error, el motivo fue porque hubo integrantes del comité que clasificaron un mismo tipo de error en más de una categoría.

Problema 1

En el problema 1 se obtuvieron cuatro tipos de error: el *E1.1* fue ubicado por los jueces en las categorías 12, 16, 30 y 50; el *E1.2* en las categorías 11, 12, 16, 30 y 50; el *E1.3* en las categorías 11, 14, 13 y 30; el *E1.4* en las categorías 11, 14, 16 y 30.

La categoría que los jueces del comité seleccionaron con mayor frecuencia como la causa de los errores *E1.1*, *E1.2*, *E1.3* y *E1.4*, fue la categoría 16 y corresponde a errores generados porque el alumno realizó una lectura incorrecta del problema (ver Tabla 5.23).

Tabla 5.23. Clasificación de los tipos de error del problema 1

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)						f	M
		11	12	14	16	30	50		
1	<i>E1.1</i>		2		4	1	1	8	16
	<i>E1.2</i>	1	1		4	1	1	8	16
	<i>E1.3</i>	1		1	3	1		6	16
	<i>E1.4</i>	1		1	3	1		6	16
Total		3	3	2	14	4	2	28	-

Donde:

11= errores por añadir información innecesaria;

12= errores por olvidar algún dato necesario para la solución;

14= errores por asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado;

16=errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

50= errores que se presentan por falta de verificación en la solución;

E1.1, *E1.2*, *E1.3*, *E1.4*= corresponden a los tipos de error; *f*= cantidad categorías seleccionadas por los cinc especialistas; *M*=Moda;

Problema 2

En el problema 2 se presentaron tres tipos de error: el error *E2.1* fue clasificado por los jueces en las categorías 12, 16 y 30; los tipos de error *E2.2* y *E2.3* los clasificaron en las categorías 12, 14, 16 y 30.

La categoría que designó por mayor frecuencia el comité como causa de los tipos de error *E2.1*, *E2.2* y *E2.3* fue la 16, que incluye los errores generados por una lectura incorrecta del enunciado (ver Tabla 5.24)

Tabla 5.24. Clasificación de los tipos de error del problema 2

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)				f	M
		12	14	16	30		
2	<i>E2.1</i>	1		5	1	7	16
	<i>E2.2</i>	2	2	3	1	8	16
	<i>E2.3</i>	1	2	4	1	8	16
	<i>Total</i>	4	4	12	3	23	-

Donde:

12= errores por olvidar algún dato necesario para la solución;

14= errores por asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado;

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

E2.1, *E1.2.2*, *E1.2.3*, = corresponden a los tipos de error; *f*= frecuencia; *M*= Moda;

Problema 3

En este problema se presentaron cuatro tipos de error (*E3.1*, *E3.2*, *E3.3* y *E3.4*), que el comité clasificó en dos categorías. Respecto a los tipos de error *E3.1* y *E3.2*, los jueces los clasificaron como errores generados por causas técnicas (categoría 60). Los tipos de error *E3.3* y *E3.4* fueron causados porque el alumno realizó una lectura incorrecta del enunciado (categoría 16). Respecto al tipo de error *E3.5* los jueces lo clasificaron en dos categorías por igual: como error generado por una lectura incorrecta del enunciado (categoría 16) y como error generado por causas técnicas (categoría 60). Cabe señalar que otras de las categorías que utilizaron los jueces con menor frecuencia que las anteriores fueron la 12, 14, 15 y 50 (ver Tabla 5.25).

Tabla 5.25. Clasificación de los tipos de error del problema 3

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)						f	M
		12	14	15	16	30	50		
3	E3.1						2	3	5
	E3.2						1	4	5
	E3.3	2			4				6
	E3.4	1	1		5	1			8
	E3.5		1	1	2	1			5
Total		3	2	1	11	2	3	7	29

Donde:

12= errores por olvidar algún dato necesario para la solución;

14= errores por asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado;

15= errores porque se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta;

16= errores porque se hace una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

50= errores que se presentan por falta de verificación en la solución;

60= errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o derivados de la ejecución del algoritmo;

E3.1, E3.2, E3.3, E3.4, E3.5= corresponden a los tipos de error; f= frecuencia; M= Moda;

Problema 4

El problema 4 presentó dos tipos de error (ver Tabla 5.26). El tipo de error *E4.1* fue clasificado por los jueces en las categorías 12, 16 y 10; el *E4.2* en las categorías 12 y 16. La categoría seleccionada con mayor frecuencia por los jueces y por lo tanto como causa de los errores *E4.1* y *E4.2* fue la 16, en ésta se menciona que el error se generó porque el estudiante realizó una lectura incorrecta del enunciado.

Tabla 5.26. Clasificación de los tipos de error del problema 4

Problema	Tipo de error	Clasificación según Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)			f	M
		12	16	30		
4	E4.1	2	5	1	8	16
	E4.2	1	5		6	16
	Total	3	10	1	14	-

Donde:

12= errores por olvidar algún dato necesario para la solución;

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

E4.1, E4.2= corresponden a los tipos de error; f= frecuencia; M= Moda;

Problema 5

En relación a cada uno de los tipos de error del problema 5, los jueces opinaron que el error *E5.1* fue por causa de errores técnicos (categoría 60). Los tipos de errores *E5.2*, *E5.3* y *E5.4* se originaron porque el estudiante realizó una lectura incorrecta del enunciado (categoría 16) (ver Tabla 5.27). No obstante, también fueron utilizadas las categorías 12, 13, 14, 30 y 50, aunque con menor frecuencia que las anteriores.

Tabla 5.27. Clasificación de los tipos de error del problema 5

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar et al. (1987)							f	M
		12	13	14	16	30	50	60		
5	E5.1			1			1	3	5	60
	E5.2	1	1		4	1			7	16
	E5.3				4	2			6	16
	E5.4				4	2			6	16
	Total	1	1	1	12	5	1	3	24	-

Donde:

12= errores por olvidar algún dato necesario para la solución;

13= errores por contestar algo que no es necesario;

14= errores por asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado;

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

50= errores que se presentan por falta de verificación en la solución;

60= errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o derivados de la ejecución del algoritmo;

E5.1, E5.2, E5.3, E5.4= corresponden a los tipos de error; f= frecuencia; M= Moda;

Problema 6

En el problema 6 los jueces clasificaron los seis tipos de error en dos categorías. Los errores E6.1 y E6.2 fueron originados porque el estudiante realizó una lectura incorrecta del problema (categoría 16). Los tipos de error E6.3, E6.4, E6.5 y E6.6 fueron generados por fallas en el razonamiento por parte del estudiante (categoría 30). Sin embargo, la distinción entre si el error pertenece a una categoría o a otra, no siempre es tan clara, ya que las opiniones de los jueces son muy cercanas. Por ejemplo, en los errores E6.1 y E6.2 tres jueces opinaron que la categoría 16 era la más relevante y dos opinaron que la categoría 30 (ver Tabla 5.28)

Tabla 5.28. Clasificación de los tipos de error del problema 6

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, et al. (1987)				f	M
		13	14	16	30		
6	E6.1	1	1	3	2	7	16
	E6.2	1	1	3	2	7	16
	E6.3	1		2	3	6	30
	E6.4	1		2	3	6	30
	E6.5	2		1	3	6	30
	E6.6			2	4	6	30
	Total	6	2	13	17	38	-

Donde:

13= errores por contestar algo que no es necesario;

14= errores por asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado;

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

E6.1, E6.2, E6.3, E6.4, E6.5, E6.6= corresponden a los tipos de error; f= frecuencia; M= Moda;

Problema 7

El problema 7 presentó cuatro tipos de error (ver Tabla 5.29). El tipo de error E7.1 fue clasificado por los jueces en la categoría 60, errores generados por un error técnico; los errores E7.2, E7.3 y E7.4 fueron clasificados en las categorías 16, 30 y 40. Los jueces al

clasificar los tipos de error los centraron en dos categorías: el error *E7.1* fue generado por un error técnico (categoría 60). Los errores *E7.2*, *E7.3* y *E7.4* fueron causa de fallas en el razonamiento al resolver el problema.

Tabla 5.29. Clasificación de los tipos de error del problema 7

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)				f	M
		16	30	40	60		
13	<i>E7.1</i>				5	5	60
	<i>E7.2</i>	2	3	1		6	30
	<i>E7.3</i>	2	3	1		6	30
	<i>E7.4</i>	1	3	1		5	30
	<i>Total</i>	5	9	3	5	22	-

Donde:

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

40= errores por teoremas o definiciones distorsionadas;

60= errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o derivados de la ejecución del algoritmo;

E7.1, *E7.2*, *E7.3* y *E7.4*= corresponden a los tipos de error; *f*= frecuencia; *M*= Moda;

Problema 8

El problema 8 presentó tres tipos de error (*E8.1*, *E8.2* y *E8.4*) clasificados por los jueces en dos categorías, de acuerdo con el modelo desarrollado por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987). Los tipos de error *E8.1* y *E8.3* fueron categorizados como errores generados, porque el estudiante realizó una lectura incorrecta del problema (categoría 16). El error *E8.2* fue clasificado en dos categorías por igual: la 16, el estudiante realizó una lectura incorrecta del enunciado y la categoría 30 que corresponde a errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben a los contenidos en específico (ver Tabla 5.30). Las categorías 11, 12 y 14 también se presentaron pero con menor frecuencia.

Tabla 5.30. Clasificación de los tipos de error del problema 8

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)				f	M
		11	12	14	16	30	
8	<i>E8.1</i>	1		1	3	2	16
	<i>E8.2</i>		1		3	3	16, 30
	<i>E8.3</i>				4	1	16
	<i>Total</i>	1	1	1	10	6	-

Donde:

11= errores por añadir información innecesaria;

12= errores por olvidar algún dato necesario para la solución;

14= errores por asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado;

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

E8.1, *E8.2*, *E8.3*= corresponden a los tipos de error; *f*= frecuencia; *M*= Moda;

Problema 9

El problema 9 presentó cinco tipos de error (*E9.1*, *E9.2*, *E9.3*, *E9.4* y *E9.5*) clasificados por los jueces en tres categorías. Los tipos de error *E9.1* y *E9.3* fueron clasificados como errores originados porque el estudiante realizó una lectura incorrecta del problema (categoría 16). Los tipos de error *E9.2* y *E9.4* fueron clasificados en dos categorías por igual: errores que tienen origen en una lectura incorrecta del problema (categoría 16) y errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido en específico (categoría 30). Por último, el tipo de error *E9.5* fue clasificado en dos categorías por igual: como error que se presenta por fallas en la verificación de la solución (categoría 50) y como error técnico (categoría 60) (ver Tabla 5.31). Las categorías 12, 13 y 14 fueron seleccionadas por los jueces pero con menor frecuencia.

Tabla 5.31. Clasificación de los tipos de error del problema 9

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)							<i>f</i>	M
		12	13	14	16	30	50	60		
9	<i>E9.1</i>	1			3	2			6	16
	<i>E9.2</i>	1			3	3			7	16, 30
	<i>E9.3</i>		1		3	2			6	16
	<i>E9.4</i>			1	3	3			7	16, 30
	<i>E9.5</i>				1	1	2	2	6	50, 60
Total		2	1	1	13	11	2	2	32	-

Donde:

12= errores por olvidar algún dato necesario para la solución;

13= errores por contestar algo que no es necesario;

14= errores por asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado;

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

50= errores que se presentan por falta de verificación en la solución;

60= errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o derivados de la ejecución del algoritmo;

E9.1, *E9.2*, *E9.3*, *E9.4*, *E9.5*= corresponden a los tipos de error; *f*= frecuencia; M= Moda;

Problema 10

En el problema 10 se registraron tres tipos de error (ver Tabla 5.32). Los tipos de error *E10.1* y *E10.2* fueron clasificados por los jueces en las categorías 16 y 30; el error *E10.3* fue clasificado en la categoría 16, 30 y 60.

Las categorías que los jueces seleccionaron con mayor frecuencia para los errores *E10.1* y *E10.2* fueron dos categorías por igual: como errores generados por una lectura incorrecta del problema (categoría 16) y errores causados por fallas en el razonamiento y no por el contenido en específico (categoría 30). El error *E10.3* fue clasificado como un error generado por fallas en el razonamiento (categoría 30).

Tabla 5.32. Clasificación de los tipos de error del problema 10

Problema	Tipo de error	Clasificación según Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)			f	M
		16	30	60		
10	E10.1	3	3		6	16, 30
	E10.2	3	3		6	16, 30
	E10.3	2	3	1	6	30
	Total	8	9	1	18	-

Donde:

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

60= errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o derivados de la ejecución del algoritmo;

E10.1, E10.2, E10.3, = corresponden a los tipos de error; f= frecuencia; M= Moda;

Problema 11

Los cuatro tipos de error (E11.1, E11.2, E11.3 y E11.4) del problema 11 fueron clasificados con mayor frecuencia por los jueces en la categoría 30, que incluye los errores generados por fallas en el razonamiento y no se deben al contenido en específico (ver Tabla 5.33). Aunque también seleccionaron las categorías 13, 14, 16, 23, 50 y 60 pero con menor frecuencia.

Tabla 5.33. Clasificación de los tipos de error del problema 11

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987).							f	M
		13	14	16	23	30	50	60		
11	E11.1	1		1	1	2			5	30
	E11.2		1			4			5	30
	E11.3	1		1		3			5	30
	E11.4						1	4	5	30
Total		2	1	2	1	9	1	4	20	-

Donde:

13= errores por contestar algo que no es necesario;

14= errores por asignar a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado;

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

23= errores por realizar una incorrecta interpretación de símbolos gráficos como de términos matemáticos;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

50= errores que se presentan por falta de verificación en la solución;

60= errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o derivados de la ejecución del algoritmo;

E11.1, E11.2, E11.3, E11.4= corresponden a los tipos de error; f= frecuencia; M= Moda;

Problema 12

El problema 12 presentó dos tipos de error. El error E12.1 fue clasificado por los jueces en la categoría 60, errores generados por fallas técnicas. El error E12.2 tuvo su origen en una lectura incorrecta del problema (categoría 16) (ver Tabla 5.34). Cabe señalar que las categorías 15 y 50 también fueron seleccionadas por los jueces pero con menor frecuencia.

Tabla 5.34. Clasificación de los tipos de error del problema 12

Problema	Tipo de error	Clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)				f	M
		15	16	30	60		
12	E12.1				5	5	60
	E12.2	2	3	2	1	8	16
	Total	2	3	2	6	13	-

Donde:

15= errores por utilizar los valores numéricos de una variable para otra distinta;

16= errores por hacer una lectura incorrecta del enunciado;

30= errores que tiene que ver con fallas en el razonamiento y no se debe al contenido en específico;

60= errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o derivados de la ejecución del algoritmo;

E12.1, E12.2= corresponden a los tipos de error; f= frecuencia; M= Moda;

Al analizar las categorías en las cuales los jueces clasificaron los 43 tipos de error cometidos por los estudiantes al resolver los 12 problemas, se observa que las categorías seleccionadas con mayor frecuencia como causa de los errores fueron: la categoría 16 (errores generados porque el alumno hace una lectura incorrecta del enunciado); la categoría 30 (errores que fueron cometidos por fallas en el razonamiento y no fue por el contenido en específico), la categoría 14 (errores porque se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado); la categoría 12 (errores generados por olvidar datos necesarios para la solución el problema); y la categoría 60 (errores técnicos que incluye errores de cálculo) (ver Tabla 5.35).

Las categorías que fueron utilizadas con menor frecuencia por los jueces como causa de los errores fueron: la categoría 11 (errores por añadir información innecesaria); la categoría 13 (errores por contestar algo que no se solicita); la categoría 15 (errores por utilizar valores numéricos de una variable para otra distinta) la categoría 23 (errores por una incorrecta interpretación de los símbolos gráficos); la categoría 40 (errores que se producen por distorsionar un principio, teoría o definición); y la categoría 50 (errores por falta de verificación en la solución).

Las categorías que ningún juez seleccionó para clasificar los errores cometidos por los estudiantes fueron: la categoría 17 (errores por copiar incorrectamente algunos de los datos durante el procedimiento); la categoría 21 (errores generados por una inadecuada traducción de una expresión del lenguaje natural a un término matemático o una ecuación que representa la relación de una descripción verbal); y la categoría 22 (errores originados por designar un concepto matemático mediante un símbolo que

tradicionalmente se refiere a otro concepto y que opera con el símbolo en su uso convencional)

Tabla 5.35. Categorías del modelo desarrollado por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987), utilizadas por los jueces para clasificar los tipos de error de cada problema

Problema	Categoría de errores del modelo desarrollado por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)													
	11	12	13	14	15	16	17	21	22	23	30	40	50	60
1	*	*		*		*					*		*	
2		*		*		*					*			
3		*		*	*	*					*		*	*
5		*				*					*			
4		*	*	*		*					*		*	*
6			*	*		*					*			
13						*					*	*		*
8	*	*		*		*					*			
9		*	*	*		*					*		*	*
10						*					*		*	*
11			*	*		*				*	*		*	*
12					*	*					*			*
Total	2	7	4	8	2	12	0	0	0	1	12	1	5	7

A partir de esta panorámica general, el comité argumentó que los 43 tipos de error fueron generados por las siguientes causas: 19 tipos de error se debieron a que el estudiante hace una lectura incorrecta del enunciado (categoría 16); 13 tipos de error fueron cometidos por fallas en el razonamiento y no por el contenido en específico (categoría 30); cinco tipos de error fueron generados por fallas técnicas (categorías 60). Se presentaron problemas clasificados en dos categorías por igual: cuatro tipos de error fueron cometidos por una lectura incorrecta del problema (categoría 16) y errores por fallas en el razonamiento (categoría 30); un tipo de error fue cometido por una lectura incorrecta del problema (categoría 16) y por error en fallas técnicas (categoría 60); un error fue originado por errores generados por fallas en la verificación de la solución (categoría 50) y errores cometidos por fallas técnicas (categoría 60) (ver Tabla 5.36). Cabe señalar que los tipos de respuestas erróneas que fueron clasificados por el comité en dos categorías por igual corresponden a problemas que evalúan el contenido de múltiplos y divisores de un número, tal es el caso del problema 9 y 10.

Tabla 5.36. Causas que originaron los 43 tipos de error de acuerdo con el comité a partir del modelo de Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987)

Categoría de errores del modelo desarrollado por Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987)	<i>f</i>	%
16	19	44
30	13	30
60	5	11
16 - 30	4	9
16 - 60	1	2
50 - 60	1	2
<i>Total</i>	<i>43</i>	<i>100</i>

5.3. Comparación entre distractores y los tipos de error de cada problema

En el presente apartado se desarrolla un análisis entre las respuesta implícitas en cada uno de los distractores de los 12 problemas que se presentaron a los estudiantes cuando el examen se aplica en modalidad de respuesta de opción múltiple, y los tipos de error que emitieron los alumnos al resolver los mismos problemas en la modalidad de respuesta construida. El propósito es identificar si los tipos de error coinciden con las respuestas incorrectas de los distractores. Lo anterior parte de la premisa que, de acuerdo con el INNE, los distractores son los errores más comunes que realizan los alumnos al resolver los problemas (Backhoff, *et al.*, 2005b).

La información se presenta en las siguientes tablas (5.37 a 5.48) divididas en tres columnas. En la primera columna se especifica el problema y la respuesta correcta. En la segunda columna se encuentran los tres distractores que se mencionan en las tablas de especificaciones elaboradas por el INEE, así como las respuestas erróneas que dieron los estudiantes al contestar los problemas en la modalidad de respuesta construida. En la tercera columna se ubica la operación implícita que se realiza en cada uno de los distractores y en las respuestas erróneas que emitieron los estudiantes.

Problema 1

En el problema 1 se presentan tres distractores y se obtuvieron cuatro tipos de error (ver Tabla 5.37). Como se observa, ninguna de las cuatro respuestas erróneas fueron resultado de una operación igual a la de las respuestas implícitas en los distractores del problema.

Cabe resaltar el problema 1 al aplicarse en la modalidad de respuesta construida, presentó tres tipos de respuestas correctas, pero al aplicarlo en la modalidad de respuesta de opción múltiple solamente se seleccionó una opción correcta. Lo anterior da cuenta de la diferencia que existe al aplicar un mismo problema en distintas modalidades de respuestas.

Tabla 5.37. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 1

Problema / Solución	Distractor/ Respuesta errónea	Operación
Sabemos que María tiene una caja con menos de 50 chocolates y los quiere guardar en bolsitas con la misma cantidad cada una. Los puede guardar en cada bolsita sin que le sobre nada en grupos de 3 en 3, de 5 en 5, y de 9 en 9. ¿De qué otra manera María puede guardar sus chocolates en cada bolsita sin que le sobre ninguno? <i>Respuestas correctas:</i> <i>R1= 1 bolsa con 45 chocolates;</i> <i>R2= 3 bolsas con 15 chocolates;</i> <i>R3= 45 bolsas de un chocolate;</i> <i>Operaciones:</i> <i>R1= El alumno debe identificar que el número total de chocolates(x) es 45, número divisible de forma exacta entre 3, 5 y 9. Además especificar que otro de sus divisores es 45.</i> <i>R2= El alumno debe identificar que el número total de chocolates(x) es 45, número divisible de forma exacta entre 3, 5 y 9. Además especificar que otro de sus divisores es 15.</i> <i>R3= El alumno debe identificar que el número total de chocolates (x) es 45, número divisible de manera exacta entre 3, 5 y 9. Además especificar que otro de sus divisores es 1</i>	Respuesta de opción múltiple	
	A) 8 en 8	$a + b$
	B) 12 en 12	$a + c$
	C) 17 en 17	$a + b + c$
	Respuesta construida	
	E1.1) 7 en 7	$49 / 7$
	E1.2) 5 bolsitas con 10 chocolates	$50 / b$
	E1.3) 16, 9 ó 5 chocolates por bolsita.	$49 / a, 49 / b, 49 / c$
	E1.4) Varios, por ejemplo 16, 9 y 5.	$49 / a, 49 / b, 49 / c, 48 / a, 48 / b, 48 / c, \text{etc.}$

Valor de variables: x = número natural de dos cifras, divisible entre 3(a), 5(b) y 9(c); E1.1, E1.2, E1.3, E1.4= corresponden a los tipos de error.

Problema 2

En este segundo problema se obtuvieron tres tipos de error. Al compararlos con los tres distractores correspondientes al problema, tampoco hubo igualdad entre las operaciones utilizadas en los distractores y las de respuestas erróneas (ver Tabla 5.38).

Tabla 5.38. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 2

Problema / Solución	Distractor/ Respuesta errónea	Operación
Un establo tiene 185 vacas y estima que en promedio sus vacas producen diariamente 15 litros de leche cada una. La cantidad de leche recolectada por día se distribuye en partes iguales en cinco establecimientos. ¿Cuántos litros de leche se espera surtir diariamente en cada establecimiento? <i>Respuesta correcta: 555 litros</i> <i>Operación: $(a \times b) / c$</i> <i>$(185 \times 15) / 5$</i>	Respuesta de opción múltiple	
	A) 13 875	$(a \times b \times c)$
	B) 27 75	$(a \times b)$
	C) 61	$(a \times c)$
	Respuesta construida	
	E2.1) 37	a / c
	E2.2) 15	$(a \times b) / a$
	E2.3) 925	$(a \times b \times c) / b$

Valor de variables: a= 185; b= 15; c=5; E2.1, E2.2, E2.3= corresponden a los tipos de error

Problema 3

En el problema 3 se presentaron cinco tipos de respuestas erróneas y al compararlas con los distractores, se encuentra que hay igualdad entre uno de ellos. El tipo de error *E3.3* en el que los estudiantes utilizaron la operación $(b - c)$ es igual al distractor "A" que implica la misma operación y el mismo resultado (ver Tabla 5.39).

El problema 3 en la modalidad de respuesta construida lo contestaron 40 estudiantes (100%), 10 alumnos (25%) emitieron una respuesta errónea: dos alumnos (5%) cometieron el tipo de error que corresponde a la operación $(b - c)$.

Tabla 5.39. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 3

Problema / Solución	Distractor/ Respuesta errónea	Operación
	Respuesta de opción múltiple	
Don José tenía inicialmente 2250 litros de agua en un depósito y contrató un grupo de gente para les surtieran otros 5000 litros en ese depósito. Más tarde utilizó 3750 litros para regar su huerto. ¿Con cuántos litros de agua se quedó? Respuesta correcta: 3500 Operación: $(a + b) - c$ $(2250 + 5000) - 3750$	A) 1250	$(b - c)$
	B) 7250	$(a + b)$
	C) 11000	$(a + b + c)$
	Respuesta construida	
	E3.1) Error al resolver operación de adición.	$(a + b) - c$
	E3.2) Error al resolver operación de sustracción.	$(a + b) - c$
	E3.3) 1250	$(b - c)$
	E3.4) 3750	c
	E3.5) Varios. Error al resolver sustracción.	$(a - b - c)$

Valores de la variables: $a = 2250$; $b = 5000$; $c = 3750$; E3.1, E3.2, E3.3, E3.4, E3.5= corresponden a los tipos de error

Problema 4

En el problema 4 cuando los alumnos lo resolvieron en la modalidad de respuesta construida, presentaron dos tipos de error. Al comparar los tipos de error con los tres distractores del problema se observó que las dos respuestas erróneas corresponden a dos de los distractores (ver Tabla 5.40).

En el tipo de error *E4.1* el estudiante utilizó la operación $(b + c)$ y es igual al distractor "A" que implica la misma operación. En el tipo de error *E4.2* los alumnos utilizaron la operación $(a + b + c)$, que es igual a la del distractor "C".

Cabe destacar que este problema en la modalidad de respuesta construida fue contestado por 40 alumnos (100%), 7 estudiantes (17.5%) emitieron una respuesta errónea, 4 estudiantes (10%) presentaron el tipo de error *E4.1* y 3 alumnos (7.5%) emitieron el tipo de error *E4.2*.

Tabla 5.40. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 4

Problema / Solución	Distractor / Respuesta errónea	Operación
En un juego Luis ganó 37 puntos en su primer tirada, en la segunda perdió 17 puntos y en la tercera tirada ganó 30 puntos. ¿Cuántos puntos lleva acumulados hasta ese momento? <i>Respuesta correcta:</i> 50 puntos <i>Operación:</i> $[(a - b) + c]$ $[(37 - 17) + 30]$	Respuesta de opción múltiple	
	A) 47	$(b + c)$
	B) 54	$(a + b)$
	C) 84	$(a + b + c)$
	Respuesta construida	
	E4.1) 47	$(b + c)$
	E4.2) 84	$(a + b + c)$

Valor de variables: $a = 37$; $b = 17$; $c = 30$; E4.1, E4.2= corresponden a los tipos de error

Problema 5

En el problema 5 cuando los alumnos lo contestaron en modalidad de respuesta construida dieron cuatro tipos de respuestas erróneas. Al comparar los tres tipos de error con los tres distractores del problema, se encontró que hay una respuesta errónea que es igual a uno de los distractores. En el tipo de error E5.4 los alumnos utilizaron la operación $(a \times n)$ que es igual al distractor "B" (ver Tabla 5.41).

Cabe destacar que un total de 40 estudiantes (100%) contestaron el problema en la modalidad de respuesta construida, de los cuales 30 alumnos (85%) dieron una respuesta errónea: el tipo de error E5.4 solamente lo presentaron dos estudiantes (5%).

Tabla 5.41. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 5

Problema / Solución	Distractor / Respuesta errónea	Operación
En un cultivo había inicialmente dos bacterias. Si éstas se reproducen duplicándose cada hora. ¿Cuántas bacterias habrá seis horas después? <i>Respuesta correcta:</i> 256 bacterias <i>Operación:</i> n^n 2^7	Respuesta de opción múltiple	
	A) 8	$(a + n)$
	B) 12	$(a \times n)$
	C) 49	n^2
	Respuesta construida	
	E5.1) Varios (por ejemplo 124)	2^7 Error al resolver multiplicación.
	E5.2) 32, 48 y 64	8×4 , 16×3 , 32×2
	E5.3) 56	(14×4)
	E5.4) 12	$(a \times n)$

Valor de variables: $a = 2$; $n = 6$ ó 7 E5.1, E5.2, E5.3, E5.4= corresponden a los tipos de error

Problema 6

En el problema 6, al ser contestado por los estudiantes en la modalidad de respuesta construida se presentaron un total de seis tipos de error. Se observa que dos tipos de error son iguales a dos de los distractores del problema (ver Tabla 5.42).

Respecto a los tipos de error que son iguales a los distractores, en el tipo de error *E6.1* el estudiante utilizó la operación $(a/2)$ que es la misma operación y resultado del distractor "C". En el caso del tipo de error *E6.4* los estudiantes hicieron uso de la operación (a^2) , que es igual que la operación y resultado del distractor "A".

Fueron 40 alumnos (100%) que contestaron el problema en la modalidad de respuesta construida, de los cuales 35 (85%) emitieron una respuesta errónea: dos estudiantes (5%) dieron el tipo de error *E6.1* y, otros dos (5%) el error *E6.4*

Tabla 5.42. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 6

Problema / Solución	Distractor / Respuesta errónea	Operación
José armó un rompecabezas con 400 piezas cuadradas. Armandó el rompecabezas también tenía forma de cuadrado. ¿Cuántas piezas tiene un lado del rompecabezas que armó José? Respuesta correcta: 20 piezas Operación: $\sqrt{a}$ $\sqrt{400}$	Respuesta de opción múltiple	
	A) 16000	a^2
	B) 800	$(a \times 2)$
	C) 200	$(a / 2)$
	Respuesta construida	
	E6.1) 200	$(a / 2)$
	E6.2) 100	$(a / 4)$
	E6.3) 40000	$[(a \times a) / 4]$
	E6.4) 16000	a^2
	E6.5) 1600	$(a+a+a+a)$
	E6.6) Error al resolver la raíz cuadrada.	$\sqrt{a}$

Valor de variables: $a=400$; E6.1, E6.2, E6.3, E6.4, E6.5, E6.6= corresponden a los tipos de error

Problema 7

En el problema 7 se presentaron cuatro tipos de error. Se encontró que una de las respuestas erróneas corresponde a uno de los tres distractores del problema. El tipo de error *E7.4* donde los estudiantes utilizaron la operación (a^2) es igual al distractor "B" que implica la misma operación (ver Tabla 5.43).

Cabe mencionar que el problema 7 en la modalidad de respuesta construida fue contestado por 26 alumnos (100%), 20 estudiantes (50%) emitieron respuestas erróneas: 3 alumnos (7.5%) respondieron con el tipo de error *E7.4*

Tabla 5.43. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 7

Problema / Solución	Opción múltiple	
	Distractor / Respuesta errónea	Operación
Un terreno cuadrado tiene 350 cm ² de área. ¿Cuál es la medida de uno de sus lados? Respuesta correcta: 18.708 Operación: $\sqrt{a}$ $\sqrt{350}$	A) 18,235	$\sqrt{a:b}$
	B) 122,500	a^2
	C) 87.5	$(a/4)$
	Respuesta construida	
	E.7.1) Error al resolver raíz cuadrada inexacta.	$\sqrt{a:c}$
	E7.2) 175	$(a/2)$
	E7.3) 30,625	$[(a \times a)/4]$
	E7.4) 122,500	a^2

Valor de variables: $a=350$; $b=0.235$; $c=0.580$; E7.1, E7.2, E7.3, E7.4= corresponden a los tipos de error

Problema 8

En el Problema 8 se obtuvieron tres tipos de error. Al realizar la comparación entre los tipos erróneas y los tres distractores del problema, ninguno fue igual en resultado y operación (ver Tabla 5.44).

Tabla 5.44. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 8

Problema / Solución	Opción múltiple	
	Distractor / Respuesta errónea	Operación
Don Chava tiene 86 conejos y quiere meterlos en jaulas con la misma cantidad de conejos cada una. Su hijo Juan le propone meterlos de tres en tres, pero de esta manera le sobran dos conejos. Su hijo Mario le propone meterlos de cinco en cinco, pero le sobra un conejo. ¿Por lo menos, cuántos conejos le faltan a don Chava para que pudiera aceptar tanto la propuesta de Juan como la de Mario sin que le sobre ninguno? Respuesta correcta: 4 conejos Operación: Encontrar un número mayor a 86 divisible entre 3 y 5.	Respuesta de opción múltiple	
	A) 1	$d - e$
	B) 2	$c - b$
	C) 3	$d + e$
	Respuesta construida	
	E8.1) Un conejo para guardarlos de 3 en 3 y, cuatro para guardarlos de 5 en 5.	$a/b, a/c$
	E8.2) 18, 17 y 29	$a/b, a/c,$ $n/b, n/c,$
	E8.3) 43 conejos los guarda de 5 en 5 y los otros 43 de 3 en 3.	$a/2$

Valor de variables: $a=86$; $b=3$; $c=5$; $d=2$; $e=1$; E8.1, E8.2, E8.3 = corresponden a los tipos de error

Problema 9

El problema 9 tuvo cinco tipos de respuestas erróneas. Al comparar dichas respuestas con los tres distractores del problema se identificaron dos igualdades en cuanto a la operación utilizada: la primera es el tipo de error E9.2, aquí los alumnos utilizaron la operación $(a + b)$ que es igual a la utilizada para el distractor "B"; la segunda es el tipo de error E9.4, los estudiantes respondieron utilizando la operación $(a \times b)$, que corresponde al distractor "C" (ver Tabla 5.45).

El problema fue contestado por 40 estudiantes (100%), 24 alumnos (60%) contestaron de forma errónea: 5 alumnos (12.5%) emitieron el tipo de error *E9.2*, y dos alumnos (5%) emitieron el error *E9.4*.

Tabla 5.45. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 9

Problema / Solución	Distractor / Respuesta errónea	Operación
Para la fiesta de la escuela, Tere fue a comprar platos desechables que costaron \$20.00 el paquete y por su parte Juan fue a comprar cucharas de \$15.00 el paquete. Ambos gastaron lo mismo ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que pudieron haber gastado cada uno? <i>Respuesta correcta: \$60</i> <i>Operación: Determinar mínimo común múltiplo de a (20) y b (15).</i>	Respuesta de opción múltiple	
	A) \$15	Elección del valor más pequeño entre a y b
	B) \$35	$(a + b)$
	C) \$300	$(a \times b)$
	Respuesta construida	
	E9.1) Tere gastó \$40, Juan gastó \$30	$(a + a), (b + b)$
	E9.2) \$35	$(a + b)$
	E9.3) \$5	$(a - b)$
	E9.4) 300	$(a \times b)$
	E9.5) Error al obtener m.c.m	Error al obtener el m.c.m, de a y b.

Valor de variables: a: \$20; b: \$15; E9.1, E9.2, E9.3, E9.4, E9.5= corresponden a los tipos de error; m.c.m : mínimo común múltiplo;

Problema 10

El problema 10, al ser resultado en la modalidad de respuesta construida, se presentaron tres tipos de error, y al compararlos con los tres distractores del problema no se encontró igualdad entre los resultados y las operaciones utilizadas (ver Tabla 5.46).

Tabla 5.46. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 10

Problema / Solución	Distractor / Respuesta errónea	Operación
José tiene dos cuerdas, una mide 42 cm., y la otra 30 cm. Cortará ambas cuerdas en pedazos del mismo tamaño, sin que le sobre nada. ¿Cuál es la medida más grande que puede tener cada pedazo de cuerda? <i>Respuesta correcta: 6 cm</i> <i>Operación: determinar el máximo común divisor de a(15) y b(20).</i>	Respuesta de opción múltiple	
	A) 2 cm	El menor divisor común de a y b
	B) 12 cm	$(a - b)$
	C) 42 cm	El valor más grande de a y b
	Respuesta construida	
	E10.1) 1.4cm	a / b
	E10.2) 36 cm	$(a + b) / 2$
	E10.3) 7 y 5 cm	$a / n, b / n$

Valor de variables: a= 42 cm; b: 30 cm; E10.1, E10.2, E10.3= corresponden a los tipos de error

Problema 11

El problema 11 presentó cuatro tipos de error. Al comparar estos errores y los tres distractores del problema se encontró una igualdad entre ellos. En el tipo de error *E11.2* los estudiantes utilizaron la operación $[(a + c) \times b]$, que es igual al distractor "C" (ver Tabla 5.47).

El total de estudiantes que contestó el problema en la modalidad de respuesta construida fueron 40 (100%), 15 estudiantes (37.5%) contestaron de forma errónea: cuatro estudiantes (10%) emitieron el error *E11.2*.

Tabla 5.47. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 11

Problema / Solución	Distractor / Respuesta errónea	Operación
Ana compró seis docenas de naranjas, más cinco naranjas ¿Cuántas naranjas son en total? <i>Respuesta correcta: 77 naranjas</i> <i>Operación: $(a \times b) + c$</i> $(6 \times 12) + 5$	Respuesta de opción múltiple	
	A) 42 naranjas	$[(a \times c) + b]$
	B) 90 naranjas	$[(a + b) \times c]$
	C) 132 naranjas	$[(a + c) \times b]$
	Respuesta construida	
	E11.1) 11 naranjas.	$(a + c)$
	E11.2) 132 naranjas.	$[(a + c) \times b]$
	E11.3) 2 naranjas	$[(a \times c) / b]$
	E11.4) Error al resolver operación.	$[(a \times b) + c]$

Valor de variables: $a=6$; $b=12$; $c=5$; E11.1, E11.2, E11.3, E11.4= corresponden a los tipos de error

Problema 12

En el Problema 12 al aplicarse en la modalidad de respuesta construida se encontraron dos tipos de error. Al comparar los dos tipos de error con los tres distractores del problema no se encontró igualdad entre los resultados y las operaciones utilizadas (ver Tabla 5.48).

Tabla 5.48. Comparación entre tipos de error y distractores del problema 12

Problema / Solución	Distractor / Respuesta errónea	Operación
Para la fiesta del pueblo, don José regaló 120 refrescos y por su parte dona Lola regaló 15 cajas con 24 refrescos cada una. Durante la fiesta se consumieron 320 refrescos ¿Cuántos refrescos sobraron? <i>Respuesta correcta: 160 refrescos</i> <i>Operación: $\{[a + (b \times c)] - d\}$</i>	Respuesta de opción múltiple	
	A) 40 refrescos	$[(b \times c) - d]$
	B) 360 refrescos	$(b \times c)$
	C) 480 refrescos	$[a + (b \times c)]$
	Respuesta construida	
	E12.1) 479 refrescos	$(a + b + c + d)$
	E12.2) Error al resolver operación.	$\{[a + (b \times c)] - d\}$

Valor de variables: $a=120$; $b=15$; $c=24$; E12.1, E12.2= corresponden a los tipos de error

A manera de síntesis, el total de tipos de error que presentaron los alumnos al resolver los 12 problemas en la modalidad de respuesta construida fueron 43 (100%). Se observa que 10 tipos de error (25%) fueron iguales (en resultado y operación) a los distractores. En los problemas 4, 7 y 9 presentaron hasta dos igualdades; los problemas 3, 5, 6 y 11 presentaron una igualdad. Sin embargo, en los problemas 1, 2, 8, 10 y 12 ninguno de los tipos de error fue igual a los distractores (ver Tabla 5.49)

Tabla 5.49. Comparación entre tipos de error y distractores de cada problema

Problema	Cantidad de tipos de error	Cantidad de igualdades entre distractores y tipos de error
1	4	0
2	3	0
3	5	1
4	2	2
5	4	1
6	4	1
7	4	2
8	3	0
9	5	2
10	3	0
11	4	1
12	2	0
Total	43	10
%	100	25

Nota: en todos los reactivos el número de distractores fue de tres.

VI. Conclusiones

Este capítulo tiene el propósito de presentar una síntesis del planteamiento del trabajo de tesis, de los resultados obtenidos, así como de las fortalezas y limitaciones de la investigación. El apartado concluye con algunas recomendaciones para futuros estudios que den respuesta a las preguntas que no se respondieron en este trabajo, con relación a los errores que cometen los estudiantes de secundaria al resolver problemas aritméticos.

El estudio de los errores en matemáticas es de gran interés por las aportaciones que realiza al proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina. Las opiniones de los especialistas actuales sobre el análisis de los errores de las matemáticas consideran que éstos son parte normal del aprendizaje de los estudiantes y que su estudio ayuda a entenderlos y a mejorar la didáctica de las matemáticas.

Cabe destacar que el estudio del error en matemáticas se aborda desde diversas perspectivas y con múltiples fines. Una de las áreas sobre su estudio se centra en investigar los errores que cometen los estudiantes en los procesos de evaluación del aprendizaje (Nasher, 1987). Con el fin de realizar aportaciones a esta área, el INEE desarrolló el proyecto titulado *Análisis de errores cometidos por los estudiantes a partir de las pruebas Excale de Matemáticas*, cuyo objetivo es identificar los errores sistemáticos que cometen los alumnos de tercero y sexto de primaria, y de tercero de secundaria, al contestar los problemas con los que se evalúa el tema de números naturales y sus operaciones básicas, así como, identificar las causas de dichos errores.

La presente investigación se desarrolló como una extensión del trabajo del INEE, y tuvo como objetivos: 1) identificar los errores que cometen los estudiantes de tercero de secundaria al contestar 12 problemas del eje de Aritmética, en el tema de números naturales y sus operaciones básicas del Excale09 de Matemáticas, 2) clasificar dichos errores de acuerdo a la propuesta de Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987) y 3) comparar los errores que cometen los estudiantes cuando responden abiertamente los problemas, con lo

errores implícitos de los distractores que forman parte de los reactivos de opción múltiple de las pruebas Excale09.

Para lograr los objetivos propuestos se utilizó una metodología que se desarrolló en seis fases.

- Primera fase, aplicación de los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas en modalidad de respuesta construida a estudiantes de tercer grado de secundaria, con el objetivo de recabar información sobre las respuestas de los estudiantes al contestar los problemas.
- Segunda fase, análisis de las respuestas escritas por los estudiantes a los 12 problemas, con el fin de identificar que todos los estudiantes contestaron el problema y dejaran por escrito su procedimiento.
- Tercer fase, aplicación de entrevistas a los estudiantes que no dejaron explícitos los procedimientos utilizados para resolver los problemas; la entrevista tuvo el objetivo de tener muy claro el procedimiento que realizó el alumno para evitar interpretaciones inadecuadas y alterar los resultados, además porque el estudiante pudo obtener resultados correctos utilizando procedimiento incorrectos (Rico, 1995).
- Cuarta fase, agrupación de los errores cometidos por los estudiantes en cada problema en categorías o tipos de error que los tipifiquen, con el fin de identificar los patrones sistemáticos de error que cometen los alumnos.
- Quinta fase, clasificación de estos tipos de errores en la tipología propuesta por Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987), con el objetivo de determinar las causas que originaron los errores. Esta clasificación la realizó un grupo de especialistas en la enseñanza de las matemáticas que fue capacitado con este propósito.
- Sexta fase, comparación de los tipos de error cometidos por los estudiantes y los errores implícitos en los distractores de los reactivos de opción múltiple, con el fin de identificar si los distractores corresponden a los errores más comunes que cometen los alumnos al responder los problemas de la prueba Excale09, tal como lo proponen Backhoff y Díaz (2005a).

A continuación se describen de manera de síntesis, los hallazgos más importantes reportados en esta investigación.

Hallazgos encontrados

La muestra de estudiantes se conformó con 186 alumnos de tercer grado de secundaria, que provenían de una secundaria general y dos escuelas técnicas del Estado de México, así como de dos secundarias técnicas del estado de Nuevo León.

El instrumento utilizado consistió en una prueba de respuesta construida de matemáticas, compuesta por los 12 problemas del Excale09, del eje de Aritmética, sobre el tema de números naturales y sus operaciones básicas. A cada estudiante se le administraron de uno a tres problemas y, en total, se obtuvieron 466 respuestas: 198 aciertos (42%), 239 respuestas erróneas (51%) y 29 omisiones (7%).

Después de analizar las respuestas de los estudiantes, se entrevistaron a 20 alumnos que no habían explicitado correctamente los procedimientos utilizados al resolver los problemas administrados: cinco estudiantes que contestaron el problema 1, porque dieron un resultado parcial; cinco alumnos que contestaron el problema 4, que justificaron que el problema era muy sencillo, por lo que no había motivo para anotar el procedimiento; nueve alumnos que contestaron el problema 5, que en su mayoría lo respondieron con la elaboración de un diagrama de árbol, y; un alumno que contestó el problema 8, que anotó un resultado numérico.

En relación a las 239 respuestas erróneas emitidas por los estudiantes, se encontraron patrones consistentes y sistemáticos, como lo señala Rico, (1995). Al respecto Davis (1984) menciona que los patrones de error se pueden predecir a partir de ciertas estructuras mentales y algunas leyes generales del procesamiento de la información. Estas consistencias permitieron clasificar las 239 respuestas erróneas en 43 tipos de error.

Rico (1995) argumenta que las concepciones inadecuadas de los alumnos se deben a fallas en los fundamentos de las matemáticas y que a través de ellos se pueden percibir las dificultades que presentan los alumnos a ciertos temas. A partir de los resultados que se obtuvieron en este trabajo, los temas en los cuales más del 50% de los alumnos que contestaron los problemas emitieron una respuesta errónea se dieron en las siguientes situaciones:

- Resolver problemas que impliquen usar la relación entre máximo común múltiplo y mínimo común divisor.
- Resolver problemas que impliquen usar raíz cuadrada exacta.
- Resolver problemas que impliquen usar raíz cuadrada inexacta.
- Resolver problemas que impliquen usar el concepto de divisor de un número (máximo común divisor).
- Resolver problemas que impliquen usar el concepto de potenciación.
- Resolver problemas que impliquen usar el concepto de múltiplo (mínimo común múltiplo).

Un dato importante que arrojó el estudio fue que los problemas que implicaron soluciones con operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división, fueron problemas donde los estudiantes presentaron menor porcentaje de respuestas erróneas. Estas situaciones fueron las siguientes:

- Resolver problemas que impliquen usar criterios de divisibilidad.
- Resolver problemas que impliquen usar dos operaciones: multiplicación y adición.
- Resolver problemas que impliquen usar dos operaciones: adición y sustracción.
- Resolver problemas que impliquen usar dos operaciones: sustracción y adición.
- Resolver problemas que impliquen usar dos operaciones: multiplicación y división.
- Resolver problemas que impliquen usar más de dos operaciones: multiplicación, adición y sustracción.

Cabe señalar que los reactivos en los que más del 50% de los estudiantes contestaron de forma errónea, fueron los mismos donde se presentaron el mayor número de tipos de error. Es decir, a mayor dificultad del problema, mayor cantidad de tipos de error.

En cuanto a las causas que originaron los 43 tipos de error, a partir del modelo de clasificación empírica de Movshovitz-Hadar, *et al.* (1987), el comité de especialistas concluyó que: 19 tipos de error se generaron porque el estudiante realizó una lectura incorrecta del enunciado; 13 tipos de error se generaron por fallas en el razonamiento y no se deben al contenido en específico del problema; 5 tipos de error fueron errores técnicos, que incluyen diversos errores de cálculo (al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o los derivados de ejecuciones de algoritmos); 4 tipos de error fueron clasificados en dos categorías por igual, errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido en específico y errores generados porque el estudiante realizó una lectura incorrecta del enunciado; un tipo de error fue clasificado en dos categorías por igual, errores técnicos, que incluye todos los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos, o los derivados de ejecuciones de algoritmos, y errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido en específico; un tipo de error fue clasificado en dos categorías por igual, errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución al problema planteado, y errores técnicos que incluye todos los errores de cálculo (al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o los derivados de ejecuciones de algoritmos). Hay que resaltar que los tipos de error que el comité tuvo dificultad para clasificar y por ello las incluyó en dos categorías, corresponden a problemas que evalúan contenidos de múltiplos y divisores de un número.

Cabe mencionar que ninguno de los tipos de error fue clasificado en las categorías que corresponden a errores: 1) generados por copiar incorrectamente algunos de los datos durante el procedimiento, 2) generados por una traducción de una expresión del lenguaje natural a un término matemático o una ecuación que representa la relación de una descripción verbal y 3) por designar un concepto matemático mediante símbolos que

tradicionalmente se refieren a otro concepto y opera con el símbolo en su uso convencional. Para la primera categoría la razón fue porque en el proceso de aplicación, a los estudiantes se les dio tiempo suficiente para resolver este tipo de problemas matemáticos, además no se presentó información en tablas; la segunda y tercera categorías no se presentaron porque los problemas sobre aritmética aplicados en modalidad de respuesta construida no solicitaron que el estudiante realizara traducciones de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje o viceversa.

Cabe resaltar que el comité argumentó que al realizar la clasificación de los tipos de error que emitieron los estudiantes dejaron en evidencia que a los alumnos no se les enseñan los principios y métodos para resolver problemas, aun cuando la resolución de problemas aparece en los planes y programas se secundaria como el enfoque para el estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (SEP, 1993), además los docentes no crean en las aulas un ambiente que motive a los estudiantes a participar activamente para explorar sus creencias y obtener respuestas específicas a sus acciones, tal como lo señala Santos (2007) y Nasher (1987).

Por último el comité propuso una revisión de la redacción de los problemas, argumentando que su falta de claridad generó que los estudiantes cometieran errores en sus respuestas. Al respecto Abrate (2006) menciona que los errores que cometen los alumnos se deben también a fallas en los procesos educativos que no se incluyen en las clasificaciones, como son: ineficacia del profesor, fallas en el curriculum, un entorno social y cultural desfavorable para el aprendizaje y el problema en sí mismo, así como la interacción entre estas variables.

Una premisa de la que parten las pruebas Excale09 de Matemáticas, es que las preguntas de opción múltiple incluyen distractores que representan opciones plausibles para el estudiante y que éstas son seleccionadas de acuerdo con las respuestas erróneas más comunes de los estudiantes. Sin embargo, un hallazgo importante que se encontró en este trabajo fue que solo 10 de los 43 tipos de error cometidos por los estudiantes fueron iguales a los errores implícitos en los distractores de los reactivos de los Excale09. Esto

quiere decir que aproximadamente una tercera parte de los distractores representan las respuestas más comunes que cometen los estudiantes al responder estos reactivos de opción múltiple.

Lo anterior es importante de señalar debido a que las pruebas nacionales pueden utilizarse para encontrar las concepciones más inadecuadas y deficientes de los estudiantes, con lo cual se pueden convertir en pruebas diagnósticas que arrojen información para mejorar las prácticas pedagógicas de la enseñanza de las matemáticas en el nivel de secundaria (Nesher, 1987).

Cabe señalar que hubo tres problemas en los que se presentaron dos igualdades entre los tipos de error y las respuestas de los distractores; cuatro de los problemas presentaron una igualdad y en cinco problemas no se presentó ninguna igualdad.

Finalmente, se identificó que los tipos de error en los que se encontró igualdad con los distractores no fueron los errores que los estudiantes cometieron con mayor frecuencia, sino errores que presentaron de dos a cinco estudiantes como máximo.

Fortalezas y debilidades de estudio

Es importante identificar tanto las fortalezas como las debilidades de esta investigación a fin de ponderar el valor que agrega al estudio de los errores matemáticos. Empecemos primero por las fortalezas.

La investigación utilizó información del proyecto *Análisis de errores cometidos por los estudiantes a partir de las pruebas Excale de Matemáticas*, desarrollado por el INEE. En este sentido los resultados de este estudio son una extensión y un aporte a dicho proyecto nacional.

Un aspecto a resaltar de esta tesis es la metodología que se diseñó para analizar la información sobre las respuestas erróneas que cometieron los estudiantes al responder los problemas de matemáticas. Entre sus características podemos destacar las siguientes:

i) clasificación de las respuestas a los 12 problemas; ii) descripción de los tipos de error y análisis de las entrevistas; iii) clasificación de los tipos de error por un comité de especialistas a partir de un modelo de clasificación de errores; iii) comparación entre los tipos de error y los distractores de los reactivos de opción múltiple.

Con respecto a las aportaciones de este estudio es importante mencionar que los resultados arrojan información relevante sobre los tipos de error que cometen los estudiantes al contestar problemas del eje de aritmética, sobre el tema de números naturales y sus operaciones básicas, contenidos que forma parte de los Planes y Programas de estudio de secundaria (SEP, 2006a, 2006b). En este sentido, los resultados obtenidos son de apoyo para los profesores interesados en realizar el análisis de los errores como herramienta en el proceso de aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes (Borasi, 1987). Así mismo, dan cuenta que los contenidos relacionados con las operaciones de potenciación, radicación, múltiplo de un número y divisor de un número, son por sí mismos contenidos matemáticos difíciles para los alumnos y que se tendría que poner mayor atención cuando se abordan dichos contenidos en clase.

Un dato importante que arrojó el estudio fue que los alumnos de tercero de secundaria siguen presentando errores generados por fallas de cálculo en operaciones aritméticas de adición, sustracción y multiplicación con cifras que incluyen de cuatro a seis dígitos. Esto implica que los estudiantes no aprenden a revisar y a corregir los cálculos y operaciones que realizan al momento de resolver problemas, con lo cual se podrían evitar una gran cantidad de errores en las evaluaciones.

Los resultados sobre las causas que originaron los errores del eje de Aritmética, sobre el tema de números naturales y sus operaciones básicas, aportan información relevante sobre los aspectos que los profesores pueden considerar al momento de diseñar las estrategias de enseñanza para este tema y hacer uso de los errores de los alumnos para que logren aprendizajes más efectivos. Al respecto Godino, Batanero y Font (2003) argumentan que los profesores deberían tener un acercamiento a los errores y dificultades

que las investigaciones han documentado sobre cada tema, con el fin de incluirlas en sus planeaciones de clase.

Con relación a los resultados obtenidos al comparar los tipos de error y las respuestas implícitas, este trabajo propone una metodología para lograr que las respuestas implícitas que se mencionan en los distractores de los Excale 09 de Matemáticas sean los errores más comunes que cometen los estudiantes al resolver los problemas, y lograr con ello mayor información de la que ya proporcionan sobre el aprendizaje que logran los estudiantes del curriculum nacional.

Con relación a las debilidades de este estudio, se pueden destacar las siguientes. Se encontró que la clasificación de errores que se seleccionó (Movshovitz-Hadar, *et al.*, 1987) incluye dos categorías en las que caen todos los tipos de error que cometieron los estudiantes, es decir resultó ser muy general para los propósitos de este trabajo. En consecuencia, habrá que buscar otras clasificaciones que se adecuen mejor a las respuestas que cometen los estudiantes mexicanos de tercero de secundaria en el tema de Aritmética.

Otra debilidad del estudio se relaciona con la metodología utilizada para que un comité de especialistas realizara la clasificación de los tipos de error. El problema principal fue que, una vez que se les capacitó, se les solicitó que realizaran la clasificación de manera individual, en vez de que este trabajo se realizara de manera colectiva, intercambiando ideas y dando argumentos para que de manera colegiada se clasificaran cada uno de los errores. Al hacerlo de manera individual no se pudo evitar que los especialistas clasificaran de manera distinta un mismo tipo de error y que, en algunos casos, utilizaran dos o más categorías de tipos de error para clasificar una respuesta errónea de los estudiantes.

Finalmente, debido a que en esta tesis no se pudieron utilizar los mismos problemas que los que contiene el Excale09, se tuvo que recurrir a usar problemas “espejo” que el INEE publica en su página de Internet, es decir problemas muy similares pero no idénticos a los

originales. Esta condición limitó el análisis de los resultados que se presentan en este trabajo, toda vez que se desconoce el grado de similitud de los problemas utilizados. En el momento, en que el INEE libere los reactivos originales se podrá superar esta limitación.

A manera de cierre

Como se ha podido apreciar, el estudio del error en matemáticas es un campo muy vasto en la literatura científica, que incluye: la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de los contenidos matemáticos, dentro y fuera del aula. Esta investigación representa un pequeño aporte a la forma de aproximarse a los errores implícitos en las evaluaciones nacionales y curriculares de las matemáticas de secundaria. Sin embargo, queda mucho por investigar.

Algunas ideas al respecto podrían centrarse en los siguientes temas: la elaboración de una clasificación de errores más adecuada para los distintos problemas matemáticos del currículo mexicano de secundaria; la clasificación de errores en otras áreas de las matemáticas de secundaria, distintas a la Aritmética; el seguimiento de los errores de matemáticas a lo largo del currículo de primaria y de secundaria; la identificación de concepciones erróneas de los escolares desde la educación inicial (preescolar), y; la supervivencia de los errores matemáticos a través del tiempo.

Referencias

- Abrate, R., Pochulu, M., y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemáticas. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.
- Alsina, C. (2000). Mañana será otro día: un reto matemático llamado futuro. En J.M., Gofii (Coord.), *El curriculum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp.13-22). Barcelona: Graó.
- Astolfi, J. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. España : Diana Editores.
- Bachelard, G. (2003). *La formación del conocimiento científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. México: Siglo XXI Editores.
- Backhoff, E. y Díaz, M. A. (2005a). *Plan General de Evaluación del Aprendizaje*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
- Backhoff, E., Monroy, L., Peón, M., Sanchez, A., y Tanamachi, L. (2005b). *Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (Excale). Proceso de construcción y características básicas*. México: INEE.
- Backhoff, E., Andrade, E., Sánchez, A., Peón, M., y Bouzas, A. (2006). *El aprendizaje del Español y las Matemáticas en la Educación Básica en México: Sexto de primaria y tercero de secundaria*. México: INEE.
- Baldor, A. (2007). *Aritmética*. México: Grupo Editorial Patria.
- Blando, A., Kelly, A., Schneider, B., Sleeman, D. (1889). Analyzing and modeling arithmetic errors. *Journal for research in mathematics educations*, 20 (3), 301-308.
- Block y Waldegg (1995), G., Ávila, A., Mancera, E., Rojano, T., Rigo, M., et al. (1995). Matemáticas. En D. Block y G. Waldegg (Coords.), *La investigación educativa en los ochenta. Perspectiva de los 90. Procesos de enseñanza y aprendizaje II: Vol. 2* (pp. 21-130). México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa-Fundación SNTE.
- Borasi, R. (1989). Students' constructive uses of mathematical errors: a taxonomy. *Educational Resources Information Center (ERIC)*. Consultado el 16 de enero de 2009 en: http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/1e/e4/7a.pdf
- Brousseau, G., Davis, R., Werner, T. (1986). Observing students at work. En B., Christiansen, G., Howson, y M., Otte (Coords), *Perspectives on mathematics educations* (pp.205-242). Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Brown, J., S., y Burton, R. R. (1978). Diagnostic models for procedural gugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192
- Caroll, J. (1963). A model for school learning. *Teacher collage*, 64, 723-733.

- Contreras, A. (2000). *Desarrollo y pilotaje de un examen de Español para la educación primaria en Baja California*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Baja California, Ensenada.
- Cortés, J. (2003). *Análisis de las estrategias de cálculo estimativo que utilizan estudiantes de 2do de secundaria en Baja California*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Baja California, Ensenada.
- Cury, H. (1995). Retrospectiva historica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática. *Zetetiké, Campinas*, 3 (4), 39-50.
- Cury, H. (2004). Analise de errors em educação matematica. *Veritati, Salvador*, 3 (4), 95-107.
- Davis, R. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science aproach to mathematics education*. Australia: Cromm Helm.
- Demerow, P., Dunkley, M., Nebres, F., y Werry., B. (1984). Matemática para todos, del ICME 5to. Recuperado el 30 de Mayo de 2008 de: <http://unesdoc.unesco.org/images/0007/000759/075946sb.pdf>
- Engler, A., Greroriani, G., Muller, D., Vrancken, S. y Henklein, M (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Premisa*, 6 (23), 23-32.
- Eudave, D. (1997). *Errores de notación algebraica. Su frecuencia y naturaleza*. Universidad Autónoma de Aguascalientes. *Centro de Ciencias Sociales y Humanas*. Tesis para obtener el grado de Maestro en Educación.
- Franchi, L., y Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte I. *Educere*, 8 (24), 63-71.
- Hernández Rojas, G. (2004). *Paradigmas en psicología de la educación*. México: Paidós Educador.
- Hernández Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Galán, M., (1996). Reseña de "Colección Investigación Educativa de los ochenta, perspectiva para los noventa". *Redaly*, 1 (001), 245-248.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2004). *Documentos Institucionales. Proyecto de creación. Decreto. Estatuto Orgánico. Plan Maestro de Desarrollo 2004-2012*. México: Autor.
- Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2006). *Hacia un nuevo paradigma para la evaluación educativa*. México: Autor.
- Lakatos, I. (1982). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

- León A. A., y Sánchez, A. (2006) Análisis de errores en las Pruebas Nacionales Excale 06 de Matemáticas.
- López, D. y Eudave, D. (2003). Investigación educativa en matemáticas. Nivel básico: secundaria. En A. D. López y Mota (Coords.), *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: Procesos de enseñanza y aprendizaje I* (pp.171-213). México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.
- Mayring, P. (2000). Qualitative content analysis. *Forum: Qualiyative Social Research*, 1 (2), 1-10.
- Méndez, I., Namihira, D., Moreno.,L., y Sosa, C. (2001). *El protocolo de investigación. Lineamientos para su elaboración y análisis*. México: Trillas.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., e Inbar, S. (1987). An emprirical classification model for errors in hagh school mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 10 (1), 3-14
- Mullis, I., Martin, M., Smith, T., Garden, R., Gregory, K., González, E., *et al.* (2002). *Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: the role of students' misconceptions. *Learning mathematics*, 7, 33-39.
- Popper, K. (1961). *Conjeturas y refutaciones: el desarrollo del conocimiento científico*. Barcelona: Paidós.
- Popham, J. (1990). *Modern educational measurement: A practitioner's perspective*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall
- Radatz, H. (1979). Errors analysis in mathematics education. *Journal for research in mathematics education*, 10 (3), 163-172.
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematics learning process: a survey. *Learning of Mathematics*, 9, 163-172.
- Resnick, L., y Ford, W. (2007). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.
- Rico, L (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En Jeremy Kilpatrick (Ed.), *Educación Matemática* (pp. 69-104). México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Rojas, R. M. (2005). *Any Rand y Karl Popper sobre el conocimiento: ¿es posible encontrar un punto de conexión?* Consultado el 23 de noviembre de 2007 en: <http://www.eleutheria.ufm.edu/Articulos/AynRandyKarlPopper.htm>
- Rosas Salgado, J. (1995). La comprensión del algebra y los números racionales. *Educación Matemática*, 7 (2), 44-59.

Rueda, M. (2003). Presentación de la colección. En A. D. López y Mota (Coords.), *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: Procesos de enseñanza y aprendizaje I* (pp. 3-15). México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

Sacristán, J. (2002). *El currículum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata.

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Secretaría de Educación Pública. (1993). *Plan y Programas de estudio. Educación Secundaria*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública. (2006a). *Plan y Programas de estudio. Educación Secundaria*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública (2006b). *Fundamentación curricular. Matemáticas*. México: Autor.

Servín, M. (1994). La investigación educativa en México: 1980-1990. *Educación de Adultos*, 17-19, 9-13.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-148). Barcelona: ICE-Horson.

Thorndike, E. (1922). The psychology of arithmetic. *Canadian Libraries*. Consultado el 20 de septiembre de 2009 en: <http://www.archive.org/details/psychologyofarit00thoruoft>

Anexo A

Tabla de contenidos que evalúa el Excale09 de Matemáticas

Eje	Tema	Contenido curricular	Especificaciones del contenido a evaluar	Ítems
Aritmética	Los números naturales y sus operaciones.	Operaciones con números naturales. - Revisión de los algoritmos.	Resolver problemas que impliquen dos o más operaciones de adición y multiplicación.	8
			Resolver problemas que impliquen dos o más operaciones de adición y sustracción.	
			Resolver problemas que impliquen dos o más operaciones de multiplicación y división.	
			Resolver problemas que impliquen dos o más operaciones de multiplicación.	
			Identificar la expresión x^n que modela una situación problemática.	
			Resolver problemas que impliquen calcular la raíz cuadrada hasta centésimos.	
			Comprender el significado y uso de la raíz cuadrada.	
			Seleccionar las operaciones necesarias (dos o más) que resuelven un problema y el orden de su aplicación.	
	Múltiplos y divisores de un número.		Resolver problemas que impliquen usar criterios de divisibilidad.	4
			Resolver problemas que impliquen calcular el m.c.m.	
			Resolver problemas que involucren usar el concepto y el cálculo del m.c.d.	
			Resolver problemas que impliquen usar m.c.d.	
	Los números decimales y sus operaciones.	Lectura, escritura y comparación.	Traducir del lenguaje simbólico al lenguaje verbal.	6
			Traducir del lenguaje verbal al lenguaje simbólico.	
			Leer y escribir números expresados mediante potencias de 10.	
			Comparar números decimales (con parte entera y decimales hasta milésimos).	
			Usar la propiedad de densidad de los decimales.	
			Usar el significado de los decimales en distintos contextos.	
		Problemas y aplicaciones diversas.	Seleccionar las operaciones necesarias que resuelvan un problema y el orden de su aplicación.	7
			Resolver problemas que impliquen estimar resultados al sumar números decimales.	
			Resolver problemas con dos o más operaciones, adición multiplicación, sustracción.	
			Resolver problemas con dos o más operaciones adición, y sustracción con decimales hasta centésimos.	
		Problemas y aplicaciones diversas.	Resolver problemas con dos o más operaciones adición, y sustracción con decimales hasta milésimos.	7
			Resolver problemas que impliquen multiplicación y división con números decimales.	
			Resolver problemas que impliquen conocer los efectos de elevar una base decimal a un exponente natural.	

Continuación...

Eje	Tema	Contenido curricular	Especificaciones del contenido a evaluar	Ítems
Aritmética.	Los fraccionarios.	Revisión de fracciones, sus usos y significados en diversos contextos	Identificar el significado de una fracción como parte de un todo.	1
		Equivalencia, orden y composición de fracciones	Orden fraccionario con distinto numerador y con distinto denominador, en donde los denominadores no son múltiplos entre sí.	2
			Identificar fracciones equivalentes.	
		Suma y resta de dos fracciones.	Resolver problemas que impliquen sumar y restar fracciones con denominadores no múltiplos.	3
			Resolver problemas que impliquen sumar o restar fracciones mixtas, con denominadores que son múltiplos de uno de ellos.	
			Resolver problemas que impliquen sumar, restar y comparar fracciones.	
		Situaciones asociadas a la multiplicación de fracciones.	Identificar la operación representada con el método de áreas.	2
			Resolver fracciones que implican multiplicar fracciones.	
	Los números con signos y sus operaciones	Situaciones asociadas a la multiplicación de fracciones. - División de fracciones.	Resolver problemas que impliquen dividir fracciones.	1
		Comparación.	Resolver problemas que involucren ordenar números con signo.	1
		Operaciones de números con signo.	Sumar números negativos.	1
	Proporcionalidad.	Tablas de números o cantidades que varían proporcionalmente.	Identificar conjuntos de cantidades representados en tablas que tienen relación proporcional entre sí.	1
		Problemas de variación proporcional directa.	Resolver problemas de proporcionalidad directa.	4
			Resolver problemas de proporcionalidad directa que implican usar una fracción de valor unitario.	
			Identificar la gráfica que corresponde, dados varios conjuntos de cantidades organizadas en tablas.	
			Encontrar las cantidades que corresponden a dichas proporciones, dada la cantidad a repartir y las proporciones.	
		Porcentaje.	Resolver problemas que impliquen la aplicación o el cálculo de un porcentaje.	2
			Resolver problemas que impliquen la determinación de un porcentaje, es decir, qué porcentaje representa una cantidad.	
	Preálgebra.	Iniciación al lenguaje algebraico	Identificar la expresión algebraica que modela un problema.	2
			Resolver problemas que impliquen identificar la expresión algebraica que modela una secuencia numérica.	

Continuación...

Eje	Tema	Contenido curricular	Especificaciones del contenido a evaluar	Ítems
Aritmética.		Identificar patrones numéricos y geométricos, y su expresión, usando lenguaje algebraico.	Resolver problemas que impliquen encontrar el número de un determinado lugar en una secuencia numérica.	1
		Valor numérico.	Usar la jerarquía de operaciones y de paréntesis para determinar el valor de un polinomio.	3
			Resolver problemas que impliquen usar la jerarquía de operaciones. Identificar la operación que corresponde con un valor determinado de un conjunto de cadena de operaciones.	
Álgebra.	Operaciones con monomios y polinomios.	Operaciones con monomios y polinomios.	Resolver problemas que impliquen la simplificación de términos semejantes de trinomios. Multiplicar binomios.	2
	Productos notables y factorización.	Los productos notables.	Identificar el producto notable que equivale con $(a+b)(a-b)$.	3
			Identificar el producto notable que equivale con $(a+b)(a+b)$.	
			Desarrollar el cuadrado de un binomio.	
	Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.	Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.	Resolver de problemas que impliquen identificar expresiones algebraicas equivalentes, después de aplicar alguna regla de factorización (factor común, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, trinomio de segundo grado).	1
	Ecuaciones lineales o de primer grado.	Sistemas de ecuaciones lineales.	Identificar un sistema de ecuaciones que modele una situación.	5
			Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones de 2×2	
			Usar el método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones de 2×2	
			Identificar sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 que no tienen solución.	
			Identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales en una representación gráfica.	
	Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.	Resolución de ecuaciones.	Resolver problemas que impliquen identificar la ecuación cuadrática que modela una situación.	5
			Situar correctamente los valores de los parámetros en una fórmula general de resolución de ecuaciones.	
			Resolver problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas.	
			Identificar la gráfica de una ecuación cuadrática.	
			Resolver ecuaciones incompletas.	
	Funciones.	Noción de funciones.	Resolver problemas que impliquen identificar la función que modela una tabla de valores.	8
			Dada la función de la fórmula $f(x) = ax + b$ identificar su gráfica.	
			Identificar la gráfica que corresponde con una función.	

Continuación...

Eje	Tema	Contenido curricular	Especificaciones del contenido a evaluar	Ítems
Álgebra			Identificar una función que modela una situación dada.	
			Identificar la tabla de valores que corresponde con una función.	
			Identificar la función que corresponde con los valores de una tabla.	
			Identificar la función que corresponde con una gráfica.	
			Identificar la tabla de valores que corresponde con una función.	
Geometría.	Dibujos y trazos geométricos.	Paralelas y perpendiculares.	Identificar las instrucciones para trazar una perpendicular a un segmento por uno de sus extremos.	2
			Identificar las instrucciones para trazar una paralela a una recta por un punto dado.	
	Formas.	Polígonos	Identificar las instrucciones para la construcción de polígonos regulares.	3
			Identificar las instrucciones para la construcción de un cuadrilátero.	
			Identificar las instrucciones para la construcción de triángulos equiláteros.	
		Triángulos.	Reconocer que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° .	2
			Reconocer las relaciones entre las medidas de los lados con que se puede construir un triángulo.	
		Círculos y circunferencias.	Reconocer instrucciones para construir un círculo.	5
			Identificar las instrucciones para la construcción de la tangente a una circunferencia por un punto exterior a ella.	
			Identificar las instrucciones para la construcción de la tangente a una circunferencia por un punto sobre ella.	
			Aplicar las propiedades del ángulo central inscrito a una circunferencia.	
			Aplicar propiedades de los ángulos inscritos en una semicircunferencia.	
		Escala.	Resolver problemas que impliquen identificar escalas entre figuras.	4
			Identificar la medida de una figura que fue sujeta a una escala.	
			Aplicar el teorema de Tales.	
		Simetría.	Reconocer el efecto de una ampliación a escala sobre el área total y el volumen de un paralelepípedo.	3
			Identificar las características simétricas de una figura.	
			Identificar figuras simétricas respecto a una recta.	
			Reconocer los resultados de realizar dos reflexiones consecutivas respecto a dos rectas.	

Continuación...

Eje	Tema	Contenido curricular	Especificaciones del contenido a evaluar	Ítems
Geometría.		Sólidos.	Identificar semejanzas entre sólidos.	11
			Identificar diferencias entre sólidos.	
			Identificar las características de los poliedros después de realizar un corte con un plano.	
			Identificar el poliedro que corresponde con un desarrollo plano.	
			Identificar vistas laterales y frontales de sólidos.	
			Identificar la pirámide que corresponde con un desarrollo plano.	
			Imaginar e identificar las características de un sólido formado por otros sólidos.	
			Imaginar el resultado de girar sólidos formados por conos y cilindros.	
			Determinar las secciones planas que se forman al cortar un cubo.	
			Determinar las secciones planas que se forman al cortar un cono.	
			Determinar las secciones planas que se forman al cortar una pirámide.	
	Medición y cálculo geométrico.	Área y perímetro.	Reconocer la equivalencia de áreas de triángulos no semejantes que mantienen la misma base y altura.	6
			Calcular el área de un trapecio a partir de la descomposición de áreas.	
			Calcular perímetros de rectángulos.	
			Calcular el área de regiones formadas por la intersección de un círculo y un cuadrilátero.	
			Calcular el área de figuras compuestas de semicircunferencias.	
			Comparar el volumen de sólidos, prisma y pirámide.	
		Volumen.	Calcular el volumen de un prisma.	5
			Resolver problemas que impliquen calcular y comparar el área de prismas y pirámides.	
			Calcular el área total de sólidos compuestos.	
			Calcular el área lateral de sólidos.	
		Teorema de Pitágoras.	Calcular la medida de un cateto a partir de la medida de la hipotenusa y de otro cateto.	2
			Expresar con un radical la medida de un cateto, calculado a partir de la hipotenusa y del cateto.	
		Razones trigonométricas.	Resolver problemas que impliquen calcular las razones trigonométricas.	2
			Resolver problemas que impliquen expresar el significado de las razones trigonométricas.	

Continuación...

Eje	Tema	Contenido curricular	Especificaciones del contenido a evaluar	Ítems
Presentación y tratamiento de la información.	Tablas y gráficas.		Resolver problemas que impliquen interpretar tablas a partir de gráficas.	4
			Identificar la tabla que corresponde con los datos que se presentan en una gráfica de barras.	
			Calcular e interpretar frecuencias absolutas y relativas.	
			Resolver problemas que impliquen calcular la moda y la media aritmética.	
Probabilidad.	Probabilidad.	Usar estrategias de conteo.	Resolver de problemas que impliquen usar estrategias de conteo.	1
		Estimar y comparar probabilidades en situaciones diversas.	Resolver problemas que impliquen comparar probabilidades.	4
			Resolver problemas que impliquen expresar una probabilidad como fracción.	
			Resolver problemas que impliquen utilizar la regla de la suma.	
			Resolver problemas que impliquen usar la regla del producto.	

Fuente: INEE (2006a).

Anexo B

Tablas de especificaciones de 12 problemas del Excale09 de Matemáticas, sobre el eje de Aritméticas, del tema números naturales y sus operaciones básicas.

Incluye las tablas de especificaciones de cada uno de los 12 problemas del Excale 09 de Matemáticas, sobre el eje de Aritmética, del tema de números naturales y sus operaciones básicas. Consultar en el portal del INEE: <http://www.inee.edu.mx/>



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área: Aritmética.	d. Tema: Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido / Contenido eje para la elaboración del reactivo: Múltiplos y divisores de un número.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que involucren: usar la relación entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más datos.	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

Con el estudio de este contenido se espera que los alumnos comprendan los conceptos de divisores y múltiplos de un número y sea capaz de reconocer las relaciones que existen entre ambos.

Para esto es necesario que el estudiante se familiarice con los conceptos de divisores y divisores comunes, así como de múltiplos y múltiplos comunes de dos o más números.

b. Delimitación del contenido:

No incluir números naturales de más de dos dígitos.

c. Importancia del contenido:

Los criterios de divisibilidad y descomposición en primos de un número son importantes porque constituyen el fundamento de toda la aritmética superior; por otro lado, el cálculo de múltiplos y mínimo común múltiplo de dos o más números es importante no sólo por sí mismo, sino que prepara al estudiante para el estudio de las fracciones y el álgebra. Conocer y comprender la relación que existe entre ambos (divisores y múltiplos de un número) permite al estudiante ampliar su comprensión del sistema de numeración decimal, así como enfrentarse sin inconvenientes a una gran variedad de problemas de la vida cotidiana.

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

El estudio de los múltiplos de un número se inicia en sexto grado de primaria, preparando al estudiante en el desarrollo del análisis de procedimientos más formales para encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más números, estudiándose con mayor profundidad en los dos primeros grados de secundaria. El estudio de los divisores de un número inicia en primero de secundaria,

poniendo énfasis sobre las características de nuestro sistema de numeración decimal. La relación entre ambos se estudia a lo largo de la educación secundaria.

e. Conocimientos y habilidades previos:

Conocer los conceptos de: "múltiplos", "múltiplos comunes", "divisores" y "divisores comunes" de dos o más números.

Habilidad para reconocer la relación entre múltiplos y divisores de dos números.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.

Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área : Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido / Contenido eje para la elaboración del reactivo: Múltiplos y divisores de un número.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que involucren: usar la relación entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más datos.	

2. REACTIVO MUESTRA

Sabemos que María tiene una caja con menos de 50 chocolates y los quiere guardar en bolsitas con la misma cantidad cada una.

Los puede guardar en cada bolsita sin que le sobre nada en grupos de 3 en 3, de 5 en 5, y de 9 en 9.

¿Cuál de las siguientes es otra manera en que María puede guardar sus chocolates en cada bolsita sin que le sobre ninguno?

- A) 8 en 8
- B) 12 en 12
- C) 15 en 15 *
- D) 17 en 17

* Respuesta correcta



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área: Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido: Problemas y aplicaciones diversas.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen usar dos o más operaciones: multiplicación y división.	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

En la educación básica secundaria el estudio de los problemas multiplicativos se centra en el significado de las operaciones, y se espera que frente a situaciones problemáticas que impliquen dos o más operaciones, los estudiantes adquieran la capacidad para reconocer y usar adecuadamente las operaciones que resultan útiles para resolverlas.

El estudio de la multiplicación y la división se centra en la comprensión de las nociones esenciales que subyacen en los procedimientos aritméticos, por ejemplo, en el significado del residuo (FAD Página 28)

En el caso de la división se consideran situaciones que impliquen una división exacta, con residuo y aproximada (LM página 40).

b. Delimitación del contenido:

Como no se pretende centrar la atención en los cálculos numéricos, sino en el significado de las operaciones, los números que se presenten en los problemas de este contenido deben ser números naturales de dos o tres dígitos.

c. Importancia del contenido:

El uso adecuado de la multiplicación y la división en situaciones cotidianas es una habilidad básica en la formación matemática del estudiante, en parte, porque es muy común su uso en diversas situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, en la resolución de problemas que tienen que ver con el manejo de dinero, así como en problemas de medición, etcétera. Y por otra parte, porque es una herramienta matemática muy usada en otros contenidos como la proporcionalidad, los problemas de conteo, etcétera.

El estudio de la multiplicación considera no sólo los casos en que esta operación puede interpretarse como una suma repetida, sino que incluye el inicio informal del estudio de problemas de conteo, lo cual facilitará la comprensión de nociones importantes de la probabilidad (SOC página 15)

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

El estudio de este contenido inicia de manera intuitiva en el segundo grado de Primaria con el tema *Introducción a la multiplicación mediante resolución de problemas que impliquen agrupamientos y arreglos rectangulares, utilizando diversos procedimientos, y Planteamiento y resolución de problemas de reparto de objetos.*

A partir de tercer grado inicia gradualmente el estudio formal de los algoritmos convencionales y se continúa con el estudio de este contenido hasta la Educación Secundaria, aumentando el grado de dificultad de los problemas que se plantean.

El aumento en la dificultad no radica únicamente en el uso de números con más cifras, sino también en la variedad de problemas que se resuelven con cada una de las operaciones y en las relaciones que se establecen entre los datos. En la Educación Secundaria el estudio se centra en el significado de las operaciones.

e. Conocimientos y habilidades previos:

Resolver problemas que impliquen usar la multiplicación y la división por separado, es decir, solamente una operación.

Conocer un algoritmo de la multiplicación y de la división, o estrategias alternativas.

Poner en práctica habilidades para discernir cuál operación fundamental (multiplicación o división) es adecuada en cada paso que realice para encontrar la solución del problema.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.
- Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001
- Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001
- Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área: Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido: Problemas y aplicaciones diversas.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen usar dos o más operaciones: multiplicación y división.	

2. REACTIVO MUESTRA

Un establo tiene 185 vacas y estima que en promedio sus vacas producen diariamente 15 litros de leche cada una.

La cantidad de leche recolectada por día se distribuye en partes iguales en cinco establecimientos.
¿Cuántos litros de leche se espera surtir diariamente en cada establecimiento?

- A. 13 875
- B. 2 775
- C. 555*
- D. 61

* Respuesta correcta



**Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición**

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área : Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido: Problemas y aplicaciones diversas. f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen usar dos o más operaciones: adición y sustracción.	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

En el estudio de las operaciones básicas, en la educación básica secundaria, se considera importante el dominio de los algoritmos (LM página 46), sin embargo lo fundamental al estudiar las operaciones básicas es, por una parte, que los estudiantes comprendan los principios matemáticos que subyacen en dichos algoritmos y, fundamentalmente, que los estudiantes comprendan el significado de dichas operaciones y puedan ocuparlas de manera flexible para resolver diversos problemas.

Es decir, conocer las operaciones de adición y sustracción va más allá de saber realizar mecánicamente los algoritmos convencionales, significa que ante determinadas situaciones problemáticas los estudiantes sepan reconocer y aplicar adecuadamente las operaciones que son útiles para resolverlo, así como saber interpretar adecuadamente los resultados.

Implica también decidir el procedimiento adecuado para operar, dependiendo de las cantidades involucradas (estimación, cálculo mental, lápiz y papel o uso de la tecnología) y saber aplicar ciertas propiedades para facilitar los cálculos.

b. Delimitación del contenido:

Dado que el propósito central de este contenido es que los estudiantes aprendan a utilizar las operaciones de manera flexible para la resolución de problemas, conviene que los números puestos en juego en los problemas que se les planteen sean números naturales y no de más de seis dígitos, de manera que los estudiantes puedan realizar los cálculos implicados incluso por cálculo mental.

c. Importancia del contenido:

Saber usar eficazmente las operaciones de adición y sustracción en situaciones cotidianas es una habilidad básica en la formación matemática de los estudiantes; el uso de este conocimiento tiene diversas aplicaciones en la vida cotidiana, por ejemplo, en la resolución de problemas de manejo de dinero, en problemas de medición, etcétera.

Desde el punto de vista de la formación académica, con el estudio de este contenidos curricular los estudiantes adquieren bases intuitivas para el desarrollo del álgebra, asimismo obtienen esquemas básicos para elaborar y comprender procedimientos más avanzados en la matemática, por ejemplo el estudio de los números enteros, fraccionarios, etcétera.

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

En los primeros grados de la Educación Primaria se proponen situaciones problemáticas que involucran estas operaciones por separado, con números menores de tres cifras. En los demás grados se utilizan diversos procedimientos (problemas de búsqueda de faltantes o problemas que requieren dos o más operaciones para su solución), que implican una complejidad mayor.

En la educación secundaria el estudio de las operaciones fundamentales se centra en el significado de las operaciones, es decir, se espera que los estudiantes puedan resolver problemas, que impliquen la adición y la sustracción, identificando las operaciones que debe realizar.

e. Conocimientos y habilidades previos:

Tener práctica en la resolución de problemas de adición y sustracción en donde utilicen estas operaciones por separado.

Conocer el algoritmo de la adición y de la sustracción, o estrategias alternativas.

Poner en práctica habilidades para discernir cuál operación fundamental (adición o sustracción) es adecuada en cada paso que realice para encontrar la solución del problema.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.

Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área : Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido: Problemas y aplicaciones diversas.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen usar dos o más operaciones: adición y sustracción.	

2. REACTIVO MUESTRA

Don José tenía inicialmente 2250 litros de agua en un depósito y contrató un grupo de gente para que le surtieran otros 5000 litros en ese depósito.
 Mas tarde utilizó 3750 litros para regar su huerto, ¿con cuántos litros de agua se quedó?

- A) 1 250
- B) 3500 *
- C) 7 250
- D) 11 000

* Respuesta correcta



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria
c. Área: Aritmética.	d. Tema: Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido / Contenido eje para la elaboración del reactivo: Problemas y aplicaciones diversas.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen usar la potenciación.	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

El propósito de este contenido no es única, ni principalmente que los estudiantes sepan ejecutar las técnicas usuales para calcular los resultados. Se pretende que los estudiantes logren una comprensión amplia del significado de la potenciación y que puedan usarla con flexibilidad, enriqueciendo la noción que tienen del significado de los números y sus operaciones mediante la resolución de problemas muy variados.

b. Delimitación del contenido:

No utilizar números naturales de más de un dígito. Esto es porque la finalidad de este contenido es que el estudiante resuelva problemas identificando la operación que debe realizar (potenciación), sin centrar nuestra atención en el manejo de números de muchos dígitos que impidan la comprensión del tema principal y lo dificulten.

c. Importancia del contenido:

Cuando el estudiante domina este contenido, adquiere bases intuitivas para el desarrollo del álgebra y de la notación científica, obteniendo así esquemas básicos para elaborar y comprender procedimientos más avanzados en la matemática y desarrolla la capacidad fundamental de abordar y conocer problemas nuevos.

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

Este contenido se considera inicialmente en primer grado de Secundaria con el estudio de los *cuadrados perfectos*, como una introducción al estudio de la raíz cuadrada. Se continúa en segundo grado de Secundaria con *potencias sucesivas de un número*, *potencias de diez y notación científica y exponencial*.

Este contenido favorece la comprensión de algunas reglas del lenguaje algebraico que se manejan a lo largo de toda la Educación Secundaria.

e. Conocimientos y habilidades previos.

Que el estudiante conozca el significado de la multiplicación y su aplicación en situaciones problemáticas.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.

Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria
c. Área : Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido / Contenido eje para la elaboración del reactivo: Problemas y aplicaciones diversas.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen la noción de la potenciación.	

2. REACTIVO MUESTRA

En un cultivo había inicialmente dos bacterias.

Si éstas se reproducen duplicándose cada hora.

¿Cuál de las siguientes expresiones representa el número de bacterias que habrá 6 horas después?

- A) $2 + 6$
- B) 2×6
- C) 7^2
- D) 2^7 *

(*) Respuesta correcta



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área: Aritmética.	d. Tema: Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido / Contenido eje para la elaboración del reactivo: Problemas y aplicaciones diversas.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen radicación.	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

En primero y segundo grados, la introducción de ciertas técnicas de cálculo aproximado, como son el uso de números truncados y redondeados, tiene como propósito principal que los estudiantes desarrollen sus habilidades para simplificar un cálculo y estimar su resultado. En tercer grado, en cambio, se trata de que los estudiantes reconozcan las componentes de un cálculo y el tipo de errores asociados a cada una de ellos, para que se den cuenta de que en muchos cálculos no es posible utilizar procedimientos exactos y se debe recurrir a métodos de aproximación (Libro para el maestro, página 112). Es con esta intención que se introdujo el estudio de la raíz cuadrada en la educación secundaria. La idea no es que los estudiantes deduzcan o memoricen las fórmulas sino que practiquen diversos métodos para calcular la raíz cuadrada.

b. Delimitación del contenido:

Utilizar números naturales menores de cuatro dígitos.

c. Importancia del contenido:

La raíz cuadrada es con frecuencia llamada la quinta operación fundamental de la aritmética, porque junto a la suma, la resta, la multiplicación y la división es la operación que más aparece en nuestros cálculos. Por esta razón, y porque los métodos para calcular la raíz cuadrada permiten a los alumnos conocer algunas ideas importantes de las matemáticas, es que se introdujo su estudio en la Educación Secundaria.

Además, el uso de métodos aproximados y la estimación de errores en situaciones sencillas ayuda a los estudiantes a desarrollar una visión más completa y realista de las matemáticas y de los procedimientos de cálculo, al mismo tiempo que están en contacto con nociones y conceptos que les serán útiles en todos sus estudios.

En particular, es importante que los estudiantes puedan realizar un mismo cálculo por diversos métodos y los comparen desde el punto de vista de su exactitud y comodidad de empleo.

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

Este contenido se aborda inicialmente en primer grado de Secundaria con el estudio de los cuadrados perfectos como una introducción al *concepto de la raíz cuadrada*. Se continúa su estudio en tercer grado de Secundaria con el propósito de que los estudiantes reconozcan las componentes de un cálculo y el tipo de errores asociados a cada una de ellos, para que se den cuenta de que en muchos cálculos no es posible utilizar procedimientos exactos y se debe recurrir a métodos de aproximación.

e. Conocimientos y habilidades previos:

Conocer el significado de la raíz cuadrada.
Conocer algún método para el cálculo de la raíz cuadrada.
Tener práctica en la resolución de problemas.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.
Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001
Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001
Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área : Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido / Contenido eje para la elaboración del reactivo: Problemas y aplicaciones diversas.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Identificar que una situación se resuelve con una radicación.	

2. REACTIVO MUESTRA

José armó un rompecabezas con 400 piezas cuadradas.
 Armado el rompecabezas también tenía forma de un cuadrado.
 ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el número de piezas que tiene un lado del rompecabezas que armó José?

A) $\sqrt{400}$ *

B) 400^2

C) $\frac{400}{2}$

D) 400×2

* Respuesta correcta



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

2.

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área: Aritmética.	d. Tema: Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido: Múltiplos y divisores de un número. f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que involucren: usar el concepto de divisor de un número (criterios de divisibilidad).	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

Con el estudio de este contenido se pretende que el estudiante se familiarice con los criterios de divisibilidad y sea capaz de usarlos en la resolución. Para esto es conveniente que se les propongan actividades y problemas que los lleven a explorar informalmente y comprender estos criterios, respetando sus propios acercamientos y sin tratar de imponer o ejercitar prematuramente los algoritmos usuales para buscar divisores. Muchos de estos problemas podrán proponerse desde que se comienza a estudiar la división con naturales.

b. Delimitación del contenido:

No incluir números naturales de más de tres dígitos.

c. Importancia del contenido:

Los criterios de divisibilidad, números primos y la descomposición en primos - de un número- son contenidos curriculares importantes porque constituyen el fundamento de toda la aritmética superior.

Por otra parte, los criterios de divisibilidad no se le deben presentar al estudiante como algo que sólo se estudia y practica para factorizar números y en la simplificación de fracciones, sino que le sirvan para reflexionar sobre algunas de las características de nuestro sistema de numeración en base diez.

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

El estudio de este contenido inicia en el primer grado de secundaria, poniendo énfasis sobre las características de nuestro sistema de numeración decimal.

e. Conocimientos y habilidades previos:

Conocer el concepto y manejo de la división y divisores de un número.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.

Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área: Aritmética.	d. Tema: Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido: Múltiplos y divisores de un número.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que involucren: usar el concepto de divisor de un número (criterios de divisibilidad).	

2. REACTIVO MUESTRA

Don Chava tiene 86 conejos y quiere meterlos en jaulas con la misma cantidad de conejos en cada una.

Su hijo Juan le propone meterlos de tres en tres, pero de esta manera le sobran dos conejos; su hijo Mario le propone meterlos de cinco en cinco, pero le sobra un conejo.

¿Por lo menos, cuántos conejos le faltan a don Chava para que pudiera aceptar tanto la propuesta de Juan como la de Mario sin que le sobre ninguno?

- A) 1
- B) 4 *
- C) 2
- D) 3

* Respuesta correcta



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria
c. Área : Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido : Múltiplos y divisores de un número.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que involucren: usar el concepto de múltiplo (Mínimo común múltiplo).	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

Con el estudio de este contenido se pretende que el estudiante comprenda la noción de múltiplos de un número a partir de la resolución de problemas y del conocimiento que ya tienen de la multiplicación. Resolviendo una variedad de problemas, los alumnos encontrarán procedimientos más sencillos y comprenderán, en el contexto de los problemas, las nociones de múltiplo y múltiplo común.

b. Delimitación del contenido:

No incluir números naturales de más de tres dígitos.

No incluir más de tres números para el cálculo del mínimo común múltiplo.

c. Importancia del contenido:

Es importante porque los estudiantes reflejarán el dominio de operaciones de multiplicación y podrán desarrollar el análisis de problemas que impliquen el cálculo de múltiplos y mínimo común múltiplo, utilizando estrategias propias para resolverlos de manera ágil y simplificada.

"La búsqueda de múltiplos y divisores, la descomposición de un número en primos, o como el producto de otros números, no sólo son

conocimientos importantes por sí mismos sino porque los preparan para el estudio de las fracciones y el álgebra" (Libro para el maestro página 72).

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

Este contenido se inicia en sexto grado con la introducción de las nociones de múltiplos de un número, preparando al estudiante en el desarrollo del análisis de procedimientos más formales para encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más números, estudiándose con mayor profundidad en los dos primeros grados de Educación Secundaria.

La presentación de los algoritmos para calcular el mínimo común múltiplo está precedida de problemas para explorar la estructura de la descomposición en primos de un número.

e. Conocimientos y habilidades previos:

Conocer el concepto y manejo de la multiplicación, múltiplos de un número y múltiplos comunes.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.
- Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001
- Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001
- Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria
c. Área : Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido : Múltiplos y divisores de un número.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que involucren: usar el concepto de múltiplo (Mínimo común múltiplo).	

2. REACTIVO MUESTRA

Para la fiesta de la escuela, Tere fue a comprar platos desechables que costaron \$20.00 el paquete y por su parte Juan fue a comprar cucharas de \$15.00 el paquete.
AMBOS GASTARON LO MISMO, ¿cuál es la menor cantidad de dinero que pudieron haber gastado cada uno?

- A. \$15
- B. \$35
- C. \$60 *
- D. \$300

* Respuesta correcta



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria
c. Área: Aritmética.	d. Tema: Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido: Múltiplos y divisores de un número.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que involucren: usar el concepto de divisor de un número (Máximo común divisor).	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

Con el estudio de este contenido se pretende que el estudiante comprenda la noción de divisores de un número a partir de la resolución de problemas y del conocimiento que ya tienen de la división. De esta manera, resolviendo una variedad de problemas los alumnos encontrarán procedimientos más sencillos y comprenderán en el contexto de los problemas, las nociones de divisor y divisor común.

b. Delimitación del contenido:

No incluir números naturales de más de tres dígitos.

No incluir más de tres números para el cálculo del máximo común divisor.

c. Importancia del contenido:

Es importante porque los estudiantes reflejarán el dominio de operaciones de división y podrán desarrollar el análisis de problemas que impliquen el cálculo de divisores y máximo común divisor, utilizando estrategias propias para resolverlos de manera ágil y simplificada.

Este conocimiento no sólo es importante por sí mismo, sino que prepara al estudiante en el estudio de fracciones y el álgebra.

Es recomendable que el estudiante calcule el máximo común divisor de dos o más números utilizando diversos procedimientos y no sólo los basados en la descomposición en primos de un número. El propósito no es que los aprendan de memoria, sino que conozcan su existencia y puedan comparar varios algoritmos.

El estudiante realiza ejercicios en los que ejercitan el uso de criterios de divisibilidad.

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

Este contenido se inicia en sexto grado con la introducción de las nociones de divisores de un número, preparando al estudiante en el desarrollo del análisis de procedimientos más formales para encontrar el máximo común divisor de dos o más números, estudiándose con mayor profundidad en los dos primeros grados de Educación Secundaria.

e. Conocimientos y habilidades previos:

Conocer el concepto y manejo de la división, divisores de un número y divisores comunes de dos números.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.

Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria
c. Área : Aritmética.	d. Tema : Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido : Múltiplos y divisores de un número.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que involucren: usar el concepto de divisor de un número (Máximo común divisor).	

2. REACTIVO MUESTRA

José tiene dos cuerdas, una mide 42 cm. y la otra 30 cm.
 Cortará ambas cuerdas en pedazos del mismo tamaño, sin que le sobre nada, ¿cuál es la medida más grande que puede tener cada pedazo de cuerda?

- A) 2 cm
- B) 6 cm *
- C) 12 cm
- D) 42 cm

* Respuesta correcta



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área: Aritmética.	d. Tema : Los Números Naturales y sus operaciones.
e. Contenido : Problemas y aplicaciones diversas.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen: Identificar operaciones y procedimientos que permiten resolver un problema.	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

Con el estudio de este contenido se pretende enriquecer el significado que los estudiantes tienen de los números y sus operaciones mediante la resolución de problemas muy variados. Se pretende que los estudiantes reconozcan y analicen los distintos aspectos que componen un problema e identifiquen las situaciones en las que cada una de las operaciones fundamentales es útil, procurando comprender las nociones esenciales que subyacen en los procedimientos aritméticos.

b. Delimitación del contenido:

No incluir números naturales de más de cuatro dígitos.

c. Importancia del contenido:

La comprensión del significado de las operaciones facilita el aprendizaje de los algoritmos y sus aplicaciones en la vida cotidiana y en la resolución de problemas; identificar las operaciones y procedimientos que permiten resolver un problema favorece una más profunda comprensión del significado de las operaciones y contribuye a que los alumnos puedan usarlas en las situaciones más diversas; por ejemplo, en la resolución de problemas que tienen que ver con el manejo de dinero, en problemas de medición, etcétera; además, la resolución de problemas da a los alumnos la oportunidad de explorar las relaciones

entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos, los cuales a su vez servirán para resolver nuevos problemas.

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

Este contenido se estudia a lo largo de toda la Educación Básica; en la Educación Secundaria el estudio de las operaciones fundamentales se centra en el significado de las operaciones; se espera que los estudiantes puedan resolver problemas identificando cada operación que deben realizar, seleccionando el procedimiento más adecuado para su solución.

e. Conocimientos y habilidades previos:

Que el estudiante conozca el significado de cada una de las cuatro operaciones fundamentales y que seleccione un procedimiento adecuado en cada uno de los pasos a seguir en la resolución de un problema.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.
 Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001
 Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001
 Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área: Aritmética.	d. Tema : Los Números Naturales y sus operaciones.
e. Contenido : Problemas y aplicaciones diversas.	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen: Identificar operaciones y procedimientos que permiten resolver un problema.	

2. REACTIVO MUESTRA

Lee el siguiente problema

*"Seis docenas de naranjas más cinco naranjas,
¿cuántas naranjas son?"*

Ahora señala el inciso en donde están las operaciones que permiten resolverlo.

- A) $(6 \times 5) + 12$
- B) $(6 \times 12) + 5$ (*)
- C) $(6 + 12) \times 5$
- D) $(6 + 5) \times 12$

(*) Respuesta correcta

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

DESCRIPCIÓN DEL CONTENIDO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área : Aritmética.	d. Tema: Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido : Problemas y aplicaciones diversas (de los números naturales y sus operaciones). f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen usar dos o más operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división).	

2. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL CONTENIDO

a. Interpretación del sentido del contenido:

En la Educación Secundaria el estudio de las operaciones básicas con números naturales retoma el análisis de las características del sistema de numeración decimal así como de los principios que subyacen en los algoritmos de las operaciones básicas, que se inició en la primaria (LM Página 45) y se centra en el sentido numérico y en el significado de las operaciones básicas (LM Página 37 y 40).

Por medio de la resolución de problemas variados se pretende enriquecer el significado que de los números naturales y sus operaciones tienen los estudiantes, es decir, que:

- Comprendan las nociones esenciales subyacentes en los procedimientos aritméticos (LM página 45).
- Reconozcan las operaciones básicas que se pueden utilizar para resolver diversos problemas y puedan aplicarlas con flexibilidad.
- Interpreten adecuadamente él o los resultados de las operaciones, de acuerdo con el contexto del problema planteado.

Con ello se espera, entre otras cosas, que los estudiantes de Secundaria puedan resolver problemas en contextos donde no se den orientaciones

puntuales de lo que se deba hacer, y por tanto deban identificar y aplicar adecuadamente las operaciones básicas con números naturales, así como establecer diversas relaciones, por ejemplo ante el problema siguiente:

Juanita se compró blusas y faldas. Si las blusas le costaron \$135 y las faldas \$50, y gastó en total \$205, ¿cuántas blusas y faldas compró? (LM página 41)

b. Delimitación del contenido:

Dado que la intención del estudio de las operaciones básicas se centra en el significado de las operaciones, conviene que los números que forman parte de los problemas no sean muy grandes, de manera que la mayor carga de trabajo intelectual no recaiga en el manejo del algoritmo sino en la comprensión del problema y la utilización adecuada de las operaciones que lo resuelven; por ello, en la prueba de matemáticas, los problemas con que se evalúa el dominio de este contenido presentan números naturales de hasta cuatro dígitos, de manera que los estudiantes podrán realizar las operaciones involucradas haciendo uso del cálculo mental.

Por otra parte conviene subrayar que en la redacción de los problemas no se debe señalar explícitamente las operaciones a realizar, sino que requieran que los estudiantes usen las operaciones de manera flexible.

c. Importancia del contenido:

Un buen conocimiento de la aritmética es tan fundamental como saber leer y escribir, sin embargo, dicho conocimiento no puede reducirse a la aplicación mecánica de los algoritmos para realizar las cuatro operaciones básicas (LM página 35), con este comentario no se pretende devaluar la importancia que tiene el dominio de los algoritmos convencionales para resolver las operaciones básicas, sino subrayar que el estudio de la aritmética debe servir para que los alumnos desarrollen su sentido numérico (LM página 37), comprendan los principios que subyacen a los citados algoritmos y puedan aplicarlos con flexibilidad para la resolución de problemas.

En secundaria, la resolución de problemas que impliquen operar con números naturales debe provocar que los alumnos exploren diversas relaciones numéricas y aprendan a utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos, los cuales a su vez servirán para resolver

problemas cada vez más complejos; por ejemplo, el estudio de los números naturales y sus operaciones aporta bases intuitivas para el arribo a ideas algebraicas, a la vez que, favorece el estudio de los números enteros, fraccionarios, entre otras.

La aplicación de las operaciones básicas se puede apreciar en diversas situaciones cotidianas; por ejemplo, en la resolución de problemas que tienen que ver con el manejo de dinero.

d. Descripción de la función del contenido en el contexto del currículo:

El estudio de los números naturales y sus operaciones inicia en la Educación primaria: en los primeros grados se estudian las operaciones fundamentales por separado, con números menores de tres cifras. En los demás grados se utilizan diversos procedimientos y se plantean problemas de búsqueda de números faltantes o problemas que requieren dos o más operaciones para su solución, los cuales implican una mayor complejidad para los estudiantes.

En el currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria, el estudio de las operaciones fundamentales tiene como antecedente inmediato la lectura y escritura de números naturales y la confrontación de los principios que subyacen en diversos sistemas de numeración (como el egipcio, el romano, etcétera). Con ello se pretende favorecer el análisis y la comprensión de la posicionalidad y el significado de la base diez en nuestro sistema de numeración decimal.

Se propone el estudio de los múltiplos y divisores de un número y se continúa con el estudio de problemas de conteo. Posteriormente se presenta el estudio de los decimales, las fracciones y los números con signo y sus operaciones.

e. Conocimientos y habilidades previos:

Resolver problemas que impliquen adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales por separado, o combinando dos de estas operaciones.

Manejar el algoritmo de cada una de las cuatro operaciones fundamentales.

Tener habilidad para identificar la operación fundamental que debe utilizar en cada uno de los pasos que conducen a la resolución del problema.

3. BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP. 2001.

Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Secuencia y organización de contenidos. Matemáticas. Educación Secundaria. SEP 2001

Plan y programas de estudio. Educación secundaria. SEP 1993



Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación
Dirección de Pruebas y Medición

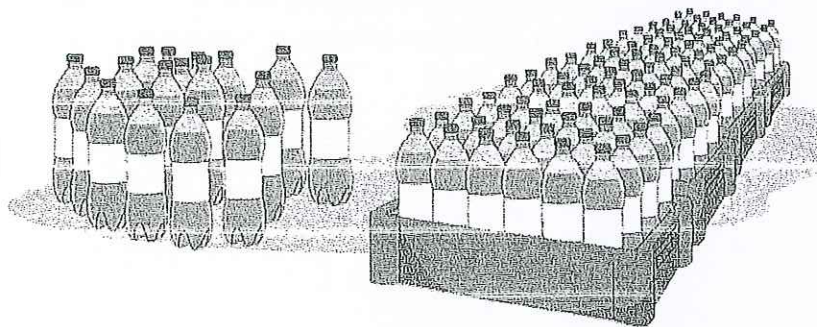
EJEMPLO DE REACTIVO

1. DATOS DE IDENTIFICACIÓN DEL CONTENIDO

a. Asignatura: Matemáticas.	b. Grado y nivel educativo: 3° Secundaria.
c. Área : Aritmética.	d. Tema: Los números naturales y sus operaciones.
e. Contenido : Problemas y aplicaciones diversas (de los números naturales y sus operaciones).	
f. Especificación general como aparece en la tabla de contenidos: Resolución de problemas que impliquen usar dos o más operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división).	

2. REACTIVO MUESTRA

Para la fiesta del pueblo, don José regaló 120 refrescos y por su parte doña Lola regaló 15 cajas con 24 refrescos cada una.



Durante la fiesta sólo se consumieron 320 refrescos,

¿Cuántos refrescos sobraron?

- A) 40
- B) 160 *
- C) 360
- D) 480

* Respuesta correcta

Anexo C

Los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas, sobre el eje de Aritmética, del tema de números naturales y sus operaciones básicas

Incluye los 12 problemas del Excale 09 de Matemáticas, sobre el eje de Aritmética, del tema de números naturales y sus operaciones básicas.

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 1

Sabemos que María tiene una caja con menos de 50 chocolates y los quiere guardar en bolsitas con la misma cantidad cada una. Los puede guardar en cada bolsita sin que le sobre nada en grupos de 3 en 3, de 5 en 5, y de 6 en 6. ¿De qué otra manera María puede guardar sus chocolates en cada bolsita sin que le sobre ninguno?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 2

Un establo tiene 185 vacas y estima que en promedio sus vacas producen diariamente 15 litros de leche cada una. La cantidad de leche recolectada por día se distribuye en partes iguales en cinco establecimientos. ¿Cuántos litros de leche se espera surtir diariamente en cada establecimiento?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 3

Don José tenía inicialmente 2250 litros de agua en un depósito y contrató un grupo de gente para que le surtieran otros 5000 litros en ese depósito. Más tarde utilizó 3750 litros para regar su huerto. ¿Con cuántos litros de agua se quedó?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 4

En un juego, Luis ganó 37 puntos en su primer tirada, en la segunda perdió 17 puntos y en la tercera tirada ganó 30 puntos. ¿Cuántos puntos lleva acumulados hasta ese momento?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 5

En un cultivo había inicialmente dos bacterias. Si éstas se reproducen duplicándose cada hora.

¿Cuántas bacterias habrá seis horas después?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 6

José armó un rompecabezas con 400 piezas cuadradas. Armado el rompecabezas también tenía forma de cuadrado.

¿Cuántas piezas tiene un lado del rompecabezas que armó José?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 7

Un terreno cuadrado tiene 350 m^2 de área. ¿Cuál es la medida de uno de sus lados?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 8

Don Chava tiene 88 conejos y quiere meterlos en jaulas con la misma cantidad de conejos en cada una. Su hijo Juan le propone meterlos de tres en tres, pero de esta manera le sobran dos conejos; su hijo Mario le propone meterlos de cinco en cinco, pero le sobra un conejo.

¿Por lo menos, cuántos conejos le faltan a don Chava para que pudiera aceptar tanto la propuesta de Juan como la de Mario sin que le sobre ninguno?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 9

Para la fiesta de la escuela, Tere fue a comprar platos desechables que costaron \$20.00 el paquete y por su parte Juan fue a comprar cucharas de \$15.00 el paquete. Ambos gastaron lo mismo ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que pidieron haber gastado cada uno?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 10

José tiene dos cuerdas, una mide 42 cm., y la otra 30 cm. Cortará ambas cuerdas en pedazos del mismo tamaño, sin que le sobre nada. ¿Cuál es la medida más grande que puede tener cada pedazo de cuerda?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 11

Ana compró seis docenas de naranjas más cinco naranjas. ¿Cuántas naranjas son en total?

Nombre del alumno:	
Nombre de la secundaria:	
Turno:	
Sexo:	

Problema 12

Para la fiesta del pueblo, don José regaló 120 refrescos, y por su parte doña Lola regaló 15 cajas con 24 refrescos cada una. Durante la fiesta se consumieron 320 refrescos. ¿Cuántos refrescos sobraron?

Anexo D

Guía de entrevistas

1. Objetivo de las entrevistas.
2. Preguntas para aclarar las respuestas de los estudiantes.

1. Objetivo de la entrevista.

La entrevista se aplicó a los estudiantes de tercer grado de secundaria que respondieron alguno de los 12 problemas del Excale09 de Matemáticas y que no dejaron claro en la hoja de respuesta el procedimiento que siguieron para llegar a su resultado o que omitieron el procedimiento y sólo anotaron el resultado.

Cabe destacar que las entrevistas fueron semiestructuradas y se elaboró un protocolo para cada uno de los problemas.

2. Preguntas para aclarar las respuestas que dieron los estudiantes que respondieron los problemas

Estamos platicando con los alumnos que al leer su solución a uno o varios de los problemas resueltos, no nos queda claro el procedimiento que siguieron para llegar a su resultado. Para ello le vamos a realizar algunas preguntas y vamos a ir haciendo las anotaciones necesarias que nos permitan comprender mejor qué estabas pensando.

Problema 1:

- ¿Cuántos chocolates tenía en total María?
- ¿Cuántos chocolates guardaste en cada bolsita sin que te sobre ninguno?
- ¿Esa cantidad total de chocolates se puede guardar en bolsitas de 3 en 3, de 5 en 5 y de 9 en 9?

Problema 2:

- ¿Cuántos litros de leche se producen diariamente en el establo?
- ¿Cuántos litros de leche se surten diariamente a cada establecimiento?

Problema 3:

- ¿Cuántos litros de agua tenía don José después de que le surtieron el agua?
- ¿Con cuántos litros de agua se quedó después de regar su huerto?

Problema 4:

- ¿Cuántos puntos tenía Luis en su primera tirada?
- ¿Cuántos puntos tenía Luis en su segunda tirada?
- ¿Cuántos puntos tenía Luis en su tercera tirada?

Problema 5:

- ¿Cuántas bacterias había inicialmente?
- ¿Cuántas bacterias había en la primera hora, en la segunda, en la tercera, en la cuarta, en la quinta y en la sexta hora?

Problema 6:

- ¿Cuántas piezas tiene en total el rompecabezas?
- ¿Cuántas piezas tiene uno de los lados del rompecabezas?

Problema 7:

- ¿Cuál es la medida del área del terreno?
- ¿Qué hiciste para saber la medida de uno de los lados del terreno?

Problema 8:

- ¿Cuántos conejos dice el problema que hay?
- ¿En qué pensaste para saber cuál era el total de conejos?
- Esa cantidad total de conejos que encontraste, ¿se pueden meter los conejos en jaulas de tres en tres sin que sobren?
- Esa cantidad total de conejos que encontraste, ¿se pueden meter los conejos en jaulas de cinco en cinco sin que sobren?

Problema 9:

- ¿Cuánto gastó Tere en total?
- ¿Cuánto gastó Juan en total?
- ¿Ambos gastaron lo mismo?

Problema 10:

- ¿Cuánto mide cada cuerda?
- ¿Qué hiciste para saber la medida en que cortarías cada cuerda cuidando que fueran del mismo tamaño y no te sobrara nada?

Problema 12:

- ¿Cuántas cajas de refresco regaló doña Lola?
- ¿Cuántas cajas de refresco se juntaron en total?

Anexo E

Material que se entregó al comité

1. Objetivo de la clasificación.
2. Modelo de clasificación empírica de errores en matemáticas propuesto por Movshivitz-Hadar, *et al.* (1987).
3. Descripción de los tipos de error cometidos por los estudiantes.

1. Objetivo de la clasificación de errores

Identificar las causas que originaron los errores que cometieron los estudiantes de tercero de secundaria al contestar 12 problemas del Excale09 de Matemáticas, sobre el eje Aritmética, el tema de números naturales y sus operaciones básicas, a partir del modelo desarrollado por Movshivitz-Hadar, *et al.* (1987), elaborada por el comité.

2. **Modelo de clasificación empírica de errores propuesta por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987).**

Categoría de error	Descripción de las categorías
(1) DATOS MAL UTILIZADOS	Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno. 11. añade información innecesaria; 12. olvida algún dato necesario para la solución; 13. contesta algo que no es necesario; 14. asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; 15. se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; 16. hace una lectura incorrecta del enunciado; 17. copia incorrectamente algunos de los datos durante el procedimiento.
(2) INTERPRETACIÓN INCORRECTA DEL LENGUAJE MATEMÁTICO	Errores debido a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje (posiblemente simbólico). 21. traducción de una expresión del lenguaje natural a un término matemático o una ecuación que representa la relación de una descripción verbal; 22. designan un concepto matemático mediante un símbolo que tradicionalmente se refiere a otro concepto y opera con el símbolo en su uso convencional; 23. incorrecta interpretación de símbolos gráficos como de términos matemáticos.
(3) INFERENCIAS NO VÁLIDAS LÓGICAMENTE	Errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido en específico. 30. Errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento.
(4) TEOREMAS O DEFINICIONES DISTORSIONADAS	Errores que se producen por distorsión de un principio, regla, teoría o definición identificable. 40. Errores que se producen por distorsión de un principio, regla teoría o definición.
(5) FALTA DE VERIFICACIÓN EN LA SOLUCIÓN	Errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución al problema planteado. 50. Errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución al problema planteado
(6) ERRORES TÉCNICOS	Errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o los derivados de la ejecución de algoritmos. 60. Incluye todos los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos o los derivados de ejecuciones de algoritmos.

*Movshovitz, N., Zaslavsky, O., e Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (1), 3-14

3. Problema y descripción de los tipos de error cometidos por los estudiantes.

Problema 1

Sabemos que María tiene una caja con menos de 50 chocolates y los quiere guardar en bolsitas con la misma cantidad cada una.

Los puede guardar en cada bolsita sin que le sobre nada en grupos de 3 en 3, de 5 en 5, y de 9 en 9.

¿De qué otra manera María puede guardar sus chocolates en cada bolsita sin que le sobre ninguno?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	<i>Operación:</i> 49/7 <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno anota que el total de chocolates es 49, ya que en orden descendente es menor a 50. 2. Divide 49/7 <i>Resultado:</i> 7 bolsitas con 7 chocolates.
	<i>Operación:</i> 50/b <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno anota que el total de chocolates es 50. 2. Divide 50 entre los divisores 5 y 10, y los resultados cubren las características de que cada paquete tenga la misma cantidad de chocolates sin que sobre ninguno. <i>Resultado:</i> 5 bolsitas con 10 chocolates y, 10 bolsitas con 5 chocolates.
	<i>Operación:</i> 49/a, 49/b, 49/c <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante realiza una serie de divisiones, donde el dividendo son números menores a 50, y los divisores fueron únicamente 3, 5, y 9. <i>Resultado:</i> Varios (por ejemplo 49/3, 49/5, 49/9, 48/3, 48/5, 48/9)
	<i>Operación:</i> 48/a, 48/b, 48/c; 47/a, 47/b, 47/c; <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante realizó divisiones consideró al dividendo a partir del 50, utilizando como divisores varios números incluyendo el 3, 5 y 9. <i>Resultado:</i> Varios (por ejemplo 47/3, 47/5, 47/9, 47/2, 47/4)

*Respuesta correcta: 15 paquetes de 3 chocolates.

Problema 2

Un establo tiene 185 vacas y estima que en promedio sus vacas producen diariamente 15 litros de leche cada una.

La cantidad de leche recolectada por día se distribuye en partes iguales en cinco establecimientos.

¿Cuántos litros de leche se espera surtir diariamente en cada establecimiento?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	<i>Operación:</i> a / c <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno anotó 185 como la cantidad total de litros de leche que se producen al día en el establo. 2. Divide 185 litros de leche entre 5 que es la cantidad de establecimientos en los que se distribuye la leche diariamente. <i>Resultado:</i> 37 litros
	<i>Operación:</i> $(ab) / a$ <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno multiplica 185 entre 15, para determinar la cantidad total de litros de leche que se producen en el establo. 2. Divide 2275 que es el total de leche que se produce en el establo entre 185. <i>Resultado:</i> 15 litros
	<i>Operación:</i> $(a \times b \times c) / b$ <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno multiplica 185 litros por 15 y por 5, para determinar el total de litros de leche que se producen en el establo. 2. Divide 13,875, que es el total de litros de leche entre 15. <i>Resultado:</i> 925 litros

***Respuesta correcta: 555 litros**

Problema 3

Don José tenía inicialmente 2250 litros de agua en un depósito y contrató un grupo de gente para que le surtieran otros 5000 litros en ese depósito.

Más tarde utilizó 3750 litros para regar su huerto.

¿Con cuántos litros de agua se quedó?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	<i>Operación:</i> $(a + b) - c$. <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno cometió error al resolver la operación de adición. <i>Resultado:</i> Varios (por ejemplo: 7000)
	<i>Operación:</i> $(a + b) - c$. <i>Procedimiento:</i> 1. Error al resolver operación de sustracción. <i>Resultado:</i> Varios (por ejemplo 4500).
	<i>Operación:</i> $(b - c)$ <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno toma el 5000 como el total de litros que hay en el depósito. 2. A 5000 litros le resta los 3750 litros que se utilizaron para regar el huerto. <i>Resultado:</i> 1250 litros
	<i>Operación:</i> c <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno menciona 3750, como resultado al problema. <i>Resultado:</i> 3750 litros
	<i>Operación:</i> $(a - b - c)$ <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante resta todas las cantidades, en el orden en que van apareciendo en el problema (2250-5000-3750) <i>Resultado:</i> Por ejemplo: 4700

*Respuesta correcta: 3,500 litros

Problema 4

En un juego, Luis ganó 37 puntos en su primer tirada, en la segunda perdió 17 puntos y en la tercera tirada ganó 30 puntos. ¿Cuántos puntos lleva acumulados hasta ese momento?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	<i>Operación:</i> $(b + c)$ <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno realizó la suma de 17 puntos más 30 puntos. <i>Resultado:</i> 47 puntos
	<i>Operación:</i> $(a + b + c)$ <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante suma los tres valores de acuerdo al orden en que se mencionan en el problema ($37 + 17 + 30$) <i>Resultado:</i> 84 puntos

***Respuesta correcta: 50 puntos**

Problema 5

En un cultivo había inicialmente dos bacterias. Si éstas se reproducen duplicándose cada hora.

¿Cuántas bacterias habrá seis horas después?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	<i>Procedimiento:</i> 1. El alumno comete error al resolver una de las operaciones de multiplicación. <i>Resultado:</i> Varias: (por ejemplo 124 bacterias)
	<i>Procedimientos:</i> ✓ Multiplica 8 (bacterias hasta la segunda hora) por 4 (horas faltantes). ✓ Multiplica 16 (bacterias hasta la tercera hora) por 3 (horas faltantes). ✓ Multiplica 32 (bacterias hasta la cuarta hora) por 2 (horas faltantes). <i>Resultado:</i> Varias: por ejemplo 32, 48 y 64
	<i>Procedimiento:</i> 1. Multiplica 14 (bacterias hasta la segunda hora) por 4 (horas faltantes) (ver Figura 2) <i>Resultado:</i> 56 bacterias.
	<i>Resolución:</i> ✓ Multiplica 2 (bacterias de inicio) por 6 (horas totales). <i>Resultado:</i> 12 bacterias

***Respuesta correcta: 128 bacterias**

Problema 6

José armó un rompecabezas con 400 piezas cuadradas. Armado el rompecabezas también tenía forma de cuadrado.

¿Cuántas piezas tiene un lado del rompecabezas que armó José?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	Operación: $(a / 2)$ Procedimiento: 1. El estudiante divide $400/2$ Resultado: 200 piezas
	Operación: $(a / 4)$ Procedimiento: 1. El estudiante divide $400/4$ Resultado: 100 piezas
	Operación: $[(a \times a) / 4]$ Procedimiento: 1. El estudiante multiplica 400×400 2. Divide $160,000/4$ Resultado: 40,000 piezas
	Operación: a^2 Procedimiento: 1. El estudiante realizó: 400×400 Resultado: 160,000 piezas
	Operación: $(a + a + a+a)$ Procedimiento: 1. El estudiante sumó $400 + 400 + 400 + 400$ Resultado: 1,600 piezas
	Procedimiento: 1. Error al resolver: $\sqrt{400}$ Resultado: Varias: por ejemplo 200

*Respuesta correcta: 20 piezas

Problema 7

Un terreno cuadrado tiene 350 m^2 de área. ¿Cuál es la medida de uno de sus lados

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	<i>Procedimiento:</i> 1. El alumno comete error al resolver la operación de la raíz cuadrada inexacta. <i>Resultado:</i> Varios: por ejemplo 18.03
	<i>Operación:</i> (a / 2) <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno considera el 350 como el total del área del cuadrado. 2. Divide $350 / 2$ <i>Resultado:</i> 175 m
	<i>Operación:</i> [(a x a) / 4] <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante toma el valor de 350 como la medida de uno de los lados del terreno. 2. Multiplica $350 \times 350 = 122500$ 3. 122500 los divide entre 4 <i>Resultado:</i> 30625 m
	<i>Operación:</i> a^2 <i>Procedimiento:</i> 1. El estudiante toma el valor de 350 como la medida de uno de los lados del terreno. 2. Realiza la operación de $350 \times 350 = 122500$ <i>Resultado:</i> 122500 m

*Respuesta correcta: 18.707 m

Problema 8

Don Chava tiene 86 conejos y quiere meterlos en jaulas con la misma cantidad de conejos en cada una.

Su hijo Juan le propone meterlos de tres en tres, pero de esta manera le sobran dos conejos; su hijo Mario le propone meterlos de cinco en cinco, pero le sobra un conejo.

¿Por lo menos, cuántos conejos le faltan a don Chava para que pudiera aceptar tanto la propuesta de Juan como la de Mario sin que le sobre ninguno?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, <i>et al.</i> (1987).	Descripción de tipos de error
	<i>Operación:</i> $a/b, a/c$ <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno divide $86/3$ 2. El alumno divide $86/5$ <i>Resultado:</i> Un conejo para guardarlos de 3 en 3 y 4 para guardarlos de 5 en 5.
	<i>Operación:</i> $a/b, a/c, n/b, n/c$ 1. El alumno divide $86/3$ 2. Posteriormente divide $86/5$ 3. Divide $87/3$ 4. Divide $87/5$ <i>Resultado:</i> Varios (por ejemplo 28, 17 y 29)
	<i>Operación:</i> $a/2$ <i>Operación:</i> 1. El estudiante divide $86/2$ <i>Resultado:</i> 43 conejos para guardar de 3 en tres y 43 conejos para guardar de 5 en 5.

***Respuesta correcta: 4 conejos**

Problema 9

Para la fiesta de la escuela, Tere fue a comprar platos desechables que costaron \$20.00 el paquete y por su parte Juan fue a comprar cucharas de \$15.00 el paquete.

AMBOS GASTARON LO MISMO, ¿Cuál es la menor cantidad de dinero que pidieron haber gastado cada uno?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	Operación: $(a + a), (b + b)$ Procedimiento: 1. El estudiante suma $20+20=40$ 2. Suma $15+15=30$ Resultado: Tere gastó \$40 y Juan \$30
	Operación: $(a + b)$ Procedimiento: 1. El alumno sumó $20+15=35$ Resultado: Gastaron \$35
	Operación: $(a - b)$ 1. El estudiante restó $20-15=5$ Resultado: Lo mínimo fueron \$5
	Operación: $(a \times b)$ 1. El alumno multiplicó $20 \times 15=300$ Resultado: Lo que gastaron fueron \$300
	Procedimiento: Error al obtener el m.c.m por descomposición de factores primos. Resultado: Varios, por ejemplo 20

*Respuesta correcta: \$ 60

Problema 10

José tiene dos cuerdas, una mide 42 cm., y la otra 30 cm. Cortará ambas cuerdas en pedazos del mismo tamaño, sin que le sobre nada.

¿Cuál es la medida más grande que puede tener cada pedazo de cuerda?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	Operación: a/b Procedimiento: 1. El estudiante divide $42/30=1$ Resultado: Cada pedazo de cuerda mide 1 cm
	Operación: $(a+b)/2$ Procedimiento: 1. El estudiante suma $42+30=72$ 2. Divide $72/2=36$ Resultado: Cada cuerda mide 36cm.
	Operación: $a/n, b/n$ Procedimiento: 1. El estudiante divide $42/6=7$ ó $42/7=6$ 2. Posteriormente divide $30/5=6$ ó $30/6=5$ Resultado: 7cm y 5 cm ó 6 cm y 5 cm

*Respuesta correcta: 6 centímetros

Problema 11

Ana compró seis docenas de naranjas más cinco naranjas. ¿Cuántas naranjas son en total?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	Operación: $a + c$ Procedimiento: 1. El estudiante suma $6+5=11$ Resultado: 11 naranjas
	Operación: $(a + c) \times b$ Procedimiento: 1. El alumno suma $6+5=11$ 2. Multiplica $11 \times 12=132$ Resultado: 132 naranjas
	Operación: $(a \times c) / b$ Procedimiento: 1. Multiplica $6 \times 5=30$ 2. Divide $30/12=2$ Resultado: 2 naranjas
	Operación: $(a \times b) + c$ Procedimiento: Error al resolver operaciones Resultado: Varias

*Una opción de respuesta correcta: 77 naranjas

Problema 12

Para la fiesta del pueblo don José regaló 120 refrescos y por su parte doña Lola regaló 15 cajas con 24 refrescos cada una. Durante la fiesta se consumieron 320 refrescos ¿Cuántos refrescos sobraron?

Identificador de respuestas erróneas según Movshovitz-Hadar, et al. (1987).	Descripción de tipos de error
	<i>Procedimiento:</i> Error al resolver las operaciones. <i>Resultado:</i> Varios
	<i>Operación:</i> (a + b + c + d) <i>Procedimiento:</i> 1. El alumno realizó la siguiente operación: 120+15+24+320=479 <i>Resultado:</i> 479 refrescos

***Respuesta correcta: 160 refrescos**

