

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA
FACULTAD DE CIENCIAS



ESPARCIMIENTO ELECTROMAGNÉTICO POR UN CILINDRO
DE RADIO ARBITRARIO

TESIS

Que para obtener el Título de:

FÍSICO

Presenta:

MIGUEL ÁNGEL GONZÁLEZ MANDUJANO

Ensenada, B.C.

Enero de 2009

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

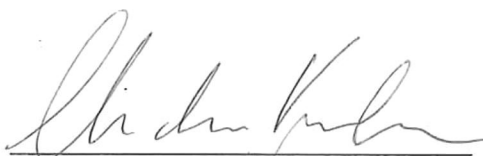
ESPARCIMIENTO ELECTROMAGNÉTICO POR UN CILINDRO
DE RADIO ARBITRARIO

TESIS PROFESIONAL

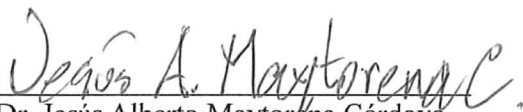
QUE PRESENTA

MIGUEL ÁNGEL GONZÁLEZ MANDUJANO

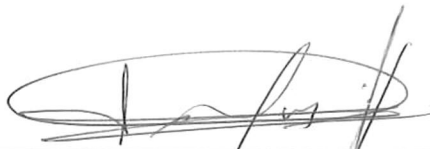
APROBADO POR:



Dr. Claudio Ismael Valencia Yaves
Presidente del Jurado



Dr. Jesús Alberto Maytorena Córdova
Secretario



Dr. Juan Crisóstomo Tapia Mercado
1er. Vocal

A Cynthia, que durante
estos más de 5 años juntos,
me enseñó el significado de
la palabra amor.

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi familia, a mis padres Ciro y Andrea, a mi hermano Julio, que me apoyaron incondicionalmente y creyeron siempre en mí. Que me dieron un hogar en lo que yo llamaría la familia perfecta.

A mi maestro y amigo Claudio Valencia por todas las discusiones y apoyo, que hicieron interesante y divertido este proyecto.

A mis queridos amigos Ochoa, Riesgo, Tanahara, Gaby, Mayra, Pixteen, Jano, Mitrani, Azahel, Yunuhen, Fernanda, Juan Carlos, Luvia y Roberto. Que todos son especialmente únicos y perfectos para mí, no les cambiaría absolutamente nada.

A Cynthia por su amor y compañía, por todo el tiempo que hemos estado juntos, has hecho de estos más de cinco años los mejores de mi vida.

Por último quiero agradecer a todos los profesores de la Facultad de Ciencias, por su paciencia y apoyo durante toda mi carrera.

Gracias de todo corazón.

RESUMEN de la tesis que como requisito parcial para la obtención de la Licenciatura en Física presenta Miguel Ángel González Mandujano. Ensenada, Baja California, México, Enero de 2009.

ESPARCIMIENTO ELECTROMAGNÉTICO POR UN CILINDRO DE RADIO ARBITRARIO

Resumen aprobado por:


Dr. Claudio Ismael Valencia Yaves
Director de tesis

Resumen.

En este trabajo se desarrolló un formalismo bidimensional para calcular la eficiencia y el coeficiente diferencial de esparcimiento en un cilindro de radio pequeño, comparado con la longitud de onda incidente.

Se realizaron estudios numéricos en medios materiales de conductividad finita y en el agua, teniendo en cuenta la dispersión de los medios cuando se modifica la longitud de onda. Los resultados se ilustraron para los modos fundamentales de polarización s y p. Los cálculos numéricos se implementaron mediante códigos escritos en FORTRAN 90.

Se estudiaron zonas cercanas a las resonancias que se producen en las curvas experimentales provenientes de la Ag. Se observó en dichas regiones, abruptas variaciones en el flujo de energía irradiado.

Se comparó el método válido para radios pequeños con el método para radios arbitrarios cuando la onda incidente tiene polarización p

Índice de figuras

2.1. Gráfica de una partícula arbitraria incidido por $(\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc})$ que da origen al campo interno $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ y al campo esparcido $(\mathbf{E}_{esp}, \mathbf{H}_{eps})$.	14
3.1. Cilindro dieléctrico en presencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_0$	17
4.1. Gráfica de un cilindro incidido por una onda plana	32
5.1. Esquema de esparcimiento	40
5.2. Eficiencia esparcida en el modo p	44
5.3. Eficiencia esparcida en el modo p	44
5.4. Eficiencia esparcida en el modo p	45
5.5. Eficiencia esparcida en el modo s	45
5.6. Eficiencia esparcida en el modo s	46
5.7. Comparación entre la teoría de Mie (TM) y la aproximación dipolar (AD) para radios pequeños.	46
5.8. Coeficiente diferencial de esparcimiento en el modo p	47
5.9. Coeficiente diferencial de esparcimiento en el modo p	48
5.10. Coeficiente diferencial de esparcimiento en el modo s	48
5.11. Eficiencia esparcida	49
5.12. Eficiencia esparcida	49
5.13. Resonancias del material.	51
5.14. Resonancias del material.	52
B.1. Superficie cerrada separando regiones 1 y 2	59

Índice general

1. Introducción	1
2. Marco teórico	4
2.1. Ecuaciones de Maxwell en el vacío	4
2.2. Medios materiales	6
2.3. Dependencia armónica	9
2.4. Teorema de Poynting	10
2.5. Promedio temporal del vector de Poynting	12
2.6. Formulación del problema de esparcimiento	13
2.7. Condiciones de frontera	14
3. Zona de radiación y función de Green 2-D	16
3.1. Aproximación cuasi-estacionaria	16
3.2. Función de Green en la Norma de Lorentz	20
3.3. Zona de radiación	24
4. Cilindro de radio arbitrario	28
4.1. Ecuación de Helmholtz y vectores armónicos	28
4.2. Vectores armónicos en coordenadas cilíndricas	30

4.3. Casos de polarización	32
4.3.1. Polarización o Modo s	36
4.3.2. Polarización o Modo p	37
5. Eficiencia y radiación esparcida	38
5.1. Eficiencia esparcida	39
5.2. Coeficiente diferencial de esparcimiento	41
5.3. Cálculo para radios pequeños	42
5.4. Resultados	43
6. Conclusiones	53
A. Demostración de función generadora	57
B. Energía en la frontera	59
C. Helmholtz en coordenadas cilíndricas	61

Capítulo 1

Introducción

Muchos sistemas que se pueden encontrar en la naturaleza o bien sistemas fabricados por el hombre presentan características especiales cuando interactúan con la radiación electromagnética. Por ejemplo si una partícula o una colección de partículas se interpone en el camino de un haz luminoso la energía incidente se va a repartir en energía absorbida por el sistema (en forma de calor) y energía esparcida. Esta última está relacionada con lo que se conoce como *esparcimiento electromagnético*.

El esparcimiento electromagnético puede presentar diferencias muy notorias cuando se modifican parámetros de incidencia, como por ejemplo la polarización, la longitud de onda del haz incidente, la función dieléctrica del material dispersor o también su geometría. Dentro de la variedad de sistemas que se pueden estudiar podemos mencionar los casos en donde los elementos dispersores sean esferas o cilindros.

La importancia de estudiar este tipo de geometrías radica en el hecho de que a partir de ellas podemos modelar situaciones tanto de interés teórico como experimental y que las soluciones para el caso de una partícula se obtiene en forma analítica. La mayoría de los formalismos que resuelven sistemas compuestos por colecciones de

partículas [1, 2] emplea las soluciones analíticas del caso simple de una sola partícula. Por lo tanto es muy útil contar con soluciones confiables de una partícula para generar la solución de un sistema complejo de partículas.

Los métodos rigurosos para resolver el problema de esparcimiento electromagnético están basados en las ecuaciones de Maxwell y sus condiciones de frontera. En el caso particular de la esfera o del cilindro infinito de sección circular, se proponen desarrollos vectoriales de los campos electromagnéticos.

Si bien es muy difícil precisar quien fue el primero en desarrollar este tipo de formalismos, trabajos publicados en 1908 por Mie y en 1909 por Debye constituyen algunos de los aportes más importantes considerando pequeñas partículas esféricas [3, 4].

Cuando el tamaño de las partículas dispersoras se hace muy chico comparado con la longitud de onda, aparecen propiedades que pueden interpretarse físicamente de una manera clara, por ejemplo la radiación dipolar de partículas pequeñas. Si bien existen muchos trabajos sobre el tema, la mayoría son para partículas esféricas, con menos frecuencia encontramos desarrollos válidos para geometrías cilíndricas.

De acuerdo a lo mencionado anteriormente, la motivación principal de este trabajo fue estudiar algunos aspectos del esparcimiento electromagnético por un cilindro infinito de sección circular, tanto para radios pequeños como arbitrarios. Para cubrir este objetivo entendemos que los aportes principales fueron los siguientes:

1. Desarrollar un método cuasi-estacionario para calcular el esparcimiento para radios pequeños, basado en el método de la función de Green.
2. Implementar un método numérico, a partir de la teoría de Mie, para simular el esparcimiento electromagnético de un cilindro *muy largo* de radio arbitrario.

3. Comparar los dos métodos mencionados anteriormente cuando se trabaja con cilindros de radios chicos.

Este manuscrito está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico, donde se describe de manera elemental la teoría clásica electromagnética en la cual están sustentados los Capítulos posteriores. En el Capítulo 3 se desarrolla el tratamiento cuasi-estacionario partiendo del problema electrostático de un cilindro infinito de constante dieléctrica arbitraria inmerso en un campo uniforme. Cabe destacar, que en lo que respecta a nuestro conocimiento, no nos hemos encontrado en la bibliografía el desarrollo utilizado en este Capítulo. En el Capítulo 4 describimos los aspectos principales del esparcimiento por un cilindro, basados en la teoría de Mie. En el Capítulo 5 se efectúan estudios numéricos para cilindros de radios arbitrarios y también se toma el límite de radios pequeños. Se comparan las resonancias de las curvas experimentales de la Ag con las resonancias de las eficiencias esparcidas. Finalmente en el Capítulo 6 se dan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se desarrollará la teoría y conceptos utilizados para resolver nuestro problema. Se partirá de las ecuaciones de Maxwell y se terminará en la formulación del problema de esparcimiento y en la necesidad de condiciones de la frontera bien definidas.

2.1. Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Un *campo electromagnético* puede ser definido como el estado de *excitación* de cada punto del espacio debido a la presencia de cargas eléctricas. Matemáticamente lo representaremos por los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, denominados *campo eléctrico* e *inducción magnética* respectivamente. El concepto de campo electromagnético es relativamente moderno si se tiene en cuenta que el desarrollo histórico de la electricidad y el magnetismo tiene sus orígenes en la época de los griegos. Una descripción detallada del tema puede encontrarse en los volúmenes de Sir Edmund Whittaker [8], o una más breve (enfocada a la óptica) en la introducción del libro de Born and Wolf [7].

El avance en esta disciplina fue muy rápido entre los siglos XVIII y XIX, en donde a través de experimentos muy cuidadosos se formularon las leyes fundamentales de la electricidad y del magnetismo. Este conjunto de hechos empíricos más la genial contribución de Maxwell constituye lo que se conoce como la teoría electromagnética. Desde el punto de vista clásico dicha teoría es representada por 4 ecuaciones que en el vacío se escriben de la siguiente manera:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.4)$$

Las expresiones (2.1)-(2.4) son las *ecuaciones de Maxwell* escritas en el sistema Gaussiano de unidades, el cual será utilizado a lo largo de todo este trabajo. Las cantidades $\tilde{\rho}$ y $\mathbf{J}$ son las *densidades de carga y corriente* respectivamente, denominadas usualmente fuentes del campo electromagnético o simplemente *fuentes*, $c \simeq 3 \times 10^8 \text{ cm/seg}$ es la velocidad de la luz en el vacío.

Las ecuaciones de Maxwell constituyen representaciones diferenciales de los experimentos desarrollados en los siglos XVIII y XIX. La ecuación (2.1) proviene de la *Ley de inducción de Faraday*, la (2.2) de la *Ley de Coulomb* (frecuentemente mencionada como la *Ley de Gauss-Coulomb*) y la (2.3) de la *Ley de Ampere* (frecuentemente mencionada como la Ley de Ampere-Maxwell). La (2.4) es una consecuencia de la ausencia de monopolos magnéticos.

Si queremos estudiar el comportamiento de un campo electromagnético en una

región lejana a las fuentes que lo produce, basta con poner $\tilde{\rho} = 0$ y $\mathbf{J} = 0$ en las Ecs. (2.2) y (2.3). Con estas condiciones y utilizando las otras dos ecuaciones de Maxwell obtenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{F}$ puede ser tanto el campo eléctrico $\mathbf{E}$ como la inducción magnética $\mathbf{B}$. Por lo tanto el campo electromagnético en una región libre de fuentes responde a la ecuación de onda (2.5).

2.2. Medios materiales

Para estudiar un campo electromagnético en presencia de medios materiales es conveniente introducir dos nuevos vectores $\mathbf{D}$ y $\mathbf{H}$ denominados *desplazamiento eléctrico* y *campo magnético* respectivamente. Con esta modificación las ecuaciones de Maxwell para medios materiales nos quedan:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right), \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.9)$$

Los vectores E , B , D y H se relacionan de la siguiente manera:

$$D(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) + 4\pi P(\mathbf{r}, t), \quad (2.10)$$

$$B(\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r}, t) + 4\pi M(\mathbf{r}, t), \quad (2.11)$$

donde P es la *polarización eléctrica* y M la *magnetización*, promedios macroscópicos de los momentos dipolares por unidad de volumen. Para poder determinar con precisión la respuesta de un material necesitamos especificar lo que se conoce con el nombre de *relaciones constitutivas*.

Esto quiere decir que debemos conocer la relación que existe entre los campos y las polarizaciones. Este tipo de relaciones suele ser muy complicada para determinados materiales o bajo condiciones especiales de excitación.

Afortunadamente existe una extensa variedad de materiales, de interés teórico y aplicado, en donde las relaciones constitutivas pueden ser representadas matemáticamente de manera muy simple. Por ejemplo en los materiales que presentan una respuesta lineal respecto del campo aplicado, independiente de la dirección espacial e independiente de la posición, podemos escribir las relaciones constitutivas de la siguiente forma:

$$P(\mathbf{r}, t) = \chi^e(\omega) E(\mathbf{r}, t), \quad (2.12)$$

$$M(\mathbf{r}, t) = \chi^m(\omega) H(\mathbf{r}, t), \quad (2.13)$$

donde χ^e y χ^m son la *susceptibilidad eléctrica* y *magnética* respectivamente. Esta-

mos asumiendo que estas cantidades son dependientes de la frecuencia ω del campo electromagnético.

Los medios que satisfacen las Ecs. (2.12) y (2.13) se denominan medios *lineales*, *isótropos* y *homogéneos* o abreviadamente medios LIH. Reemplazando (2.12) y (2.13) en (2.10) y (2.11) nos queda:

$$D(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.15)$$

con

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi^e(\omega), \quad (2.16)$$

$$\mu(\omega) = 1 + 4\pi\chi^m(\omega), \quad (2.17)$$

donde ϵ y μ son la *función o constante dieléctrica* y la *permeabilidad magnética* del medio respectivamente.

Para medios que obedecen a la *Ley de Ohm* la relación constitutiva adecuada es

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.18)$$

donde σ representa la *conductividad* del material.

2.3. Dependencia armónica

Asumiendo dependencia armónica en el tiempo tanto para campos como para fuentes podemos escribir:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (2.20)$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad (2.21)$$

donde estamos suponiendo que $\mathbf{F}$ representa a cualquiera de los campos. Reemplazando (2.19)-(2.21) en (2.6)-(2.9) nos queda:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i \frac{\omega \mu}{c} \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}, \quad (2.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{c} (\epsilon \mathbf{E} + i \frac{4\pi}{\omega} \mathbf{J}(\mathbf{r})), \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.25)$$

Para metales de conductividad finita donde vale la Ley de Ohm (Ec. 2.18) la (2.24) se escribe como:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega\epsilon_c}{c} \mathbf{E}, \quad (2.26)$$

donde

$$\epsilon_c = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (2.27)$$

2.4. Teorema de Poynting

El *teorema de Poynting* representa la ley de conservación de energía en electrodinámica y puede ser derivado de las ecuaciones de Maxwell. Aplicando $(-\mathbf{H})$ a la ecuación (2.6), $(\mathbf{E})$ a la ecuación (2.8) y posteriormente sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right), \quad (2.28)$$

donde suprimimos la dependencia $(\mathbf{r}, t)$ en la notación sólo por comodidad. Utilizando la identidad vectorial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}),$$

podemos escribir (2.28) como:

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (2.29)$$

Analizando (2.29), los términos del lado derecho corresponden a la tasa de cambio de la densidad de energía del campo electromagnético:

$$-\frac{\partial}{\partial t} (w_{el} + w_m) = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (2.30)$$

Esto puede ser mejor visto introduciendo la densidad de energía del campo eléctrico:

$$w_{el} = \frac{1}{4\pi} \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (2.31)$$

y la densidad de energía del campo magnético:

$$w_m = \frac{1}{4\pi} \int_0^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (2.32)$$

Sustituyendo en (2.29) se obtiene:

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (w_{el} + w_m) \quad (2.33)$$

La ecuación (2.33) describe la transferencia de energía durante la disminución de la densidad de energía total del campo electrodinámico en el tiempo. El término $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ representa el trabajo hecho por el campo sobre densidad de corriente, también conocida como *calor de Joule*.

Otra razón para la disminución de la energía del campo es la divergencia del vector:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (2.34)$$

llamado *Vector de Poynting*.

Este vector describe la intensidad del flujo de energía por unidad de tiempo a través de un área unitaria a través perpendicular a la dirección del flujo. $\int \mathbf{S} \cdot \hat{n} da$.

Por último integrando (2.33) sobre un volumen arbitrario y aplicando la Ley de Gauss:

$$-\frac{d}{dt} \int_V (w_{el} + w_m) dV = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \oint_S \mathbf{S} \cdot \hat{n} da \quad (2.35)$$

Esta ecuación representa la ley de conservación de energía en electrodinámica

(Teorema de Poynting); el término $\mathbf{S} \cdot \hat{n}$, da el flujo de energía cruzando el elemento de área da en la dirección de la normal $\hat{n}$. El Vector de Poynting apunta en la dirección de la propagación de la energía.

2.5. Promedio temporal del vector de Poynting

Si se tiene dependencia armónica en el tiempo la ecuación 2.34 se puede escribir como:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\text{Re} \mathbf{E} e^{-i\omega t} \times \text{Re} \mathbf{B} e^{-i\omega t}), \quad (2.36)$$

o más extensamente como:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_r \cos \omega t + i \mathbf{E}_i \sin \omega t) \times (\mathbf{B}_r \cos \omega t + i \mathbf{B}_i \sin \omega t), \quad (2.37)$$

donde el subíndice r es la parte real y el subíndice i indica la parte imaginaria.

Reordenando términos en (2.37) y aplicando el promedio temporal tenemos que:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_r \times \mathbf{B}_r \langle \cos^2 \omega t \rangle + (\mathbf{E}_r \times \mathbf{B}_i + \mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_r) \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle + \mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i \langle \sin^2 \omega t \rangle],$$

sustituyendo el valor de los promedios temporales $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$, $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle$ y $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$ obtenemos:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E}_r \times \mathbf{B}_r + \mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i),$$

para finalizar podemos reescribir la ecuación anterior en otra forma equivalente como:

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*). \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) es conocida como el *promedio temporal del vector de Poynting*, esta ecuación solo se cumple para ondas armónicas.

2.6. Formulación del problema de esparcimiento

El problema a resolver en la teoría de esparcimiento es el siguiente, dado una partícula de forma, tamaño y propiedades ópticas específicas. Esta partícula es iluminada por una onda arbitraria monocromática polarizada, se desea encontrar el campo electromagnético en todos los puntos en la partícula y el campo electromagnético en todos los puntos donde la partícula esta inmersa. Aunque en este trabajo nos limitamos a la consideración de ondas planas armónicas, esta no es una restricción como parece ya que cualquier tipo de onda puede ser separada en una superposición de ondas planas. Por lo tanto sin importar la iluminación de nuestro sistema, se puede encontrar la solución al problema de absorción y esparcimiento por superposición. En este trabajo el campo electromagnético dentro de la partícula sera denotado como $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ y el campo electromagnético fuera de la partícula sera denotado como $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ donde este campo es la superposición del *campo incidente* $(\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc})$ y el *campo esparcido* $(\mathbf{E}_{esp}, \mathbf{H}_{esp})$, Figura (2.6).

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{esp}, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{inc} + \mathbf{H}_{esp}. \quad (2.39)$$

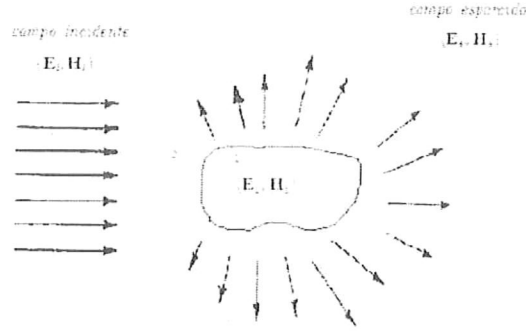


Figura 2.1: Gráfica de una partícula arbitraria incidido por $(\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc})$ que da origen al campo interno $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ y al campo esparcido $(\mathbf{E}_{esp}, \mathbf{H}_{eps})$.

2.7. Condiciones de frontera

Las ecuaciones de Maxwell rigen el campo electromagnético en todo punto del espacio cuando μ y ϵ son continuos. Sin embargo cuando se pasa la frontera que separa dos medios materiales hay un salto en estas propiedades, el cual ocurre en un espesor de nivel atómico. Desde un punto de vista macroscópico hay una discontinuidad en la frontera, en donde se puede demostrar que los campos electromagnéticos satisfacen:

$$[\mathbf{E}_2(x) - \mathbf{E}_1(x)] \cdot \hat{n} = 0 \quad (2.40)$$

x en S ,

$$[\mathbf{H}_2(x) - \mathbf{H}_1(x)] \cdot \hat{n} = 0 \quad (2.41)$$

x en S ,

donde el versor $\hat{n}$ es normal a la superficie S , la cual representa la frontera entre los medios; la expresión (2.41) se satisface en ausencia de corrientes en la interface. Las ecuaciones 2.40 y 2.41 reflejan la continuidad de las componentes paralelas de los campos en la superficie. Es interesante destacar que esta propiedad de continuidad de los campos es una condición suficiente para que se verifique la conservación de la energía en la frontera frontera como puede verse en el Apéndice B.

Capítulo 3

Zona de radiación y función de Green 2-D

En este capítulo se desarrollará una teoría para el esparcimiento electromagnético válida en la llamada zona de radiación, es decir donde $\rho \gg \lambda$. Realizando la aproximación cuasi-estacionaria se obtiene el momento dipolar de un cilindro infinito inmerso en un campo eléctrico uniforme. Luego se obtiene una expresión para el vector potencial y finalmente calculan los campos esparcidos.

3.1. Aproximación cuasi-estacionaria

En la Fig. 3.1 se representa un cilindro infinito de radio a y constante dieléctrica ϵ , cuyo eje es paralelo al eje z . El cilindro está afectado por un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_0$ en la dirección y . Se busca encontrar el campo eléctrico total como consecuencia de la interacción entre el campo uniforme $\mathbf{E}_0$ y el medio material del cilindro.

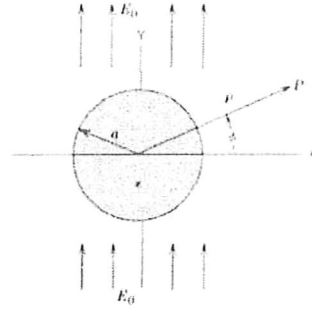


Figura 3.1: Cilindro dieléctrico en presencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_0$

Se parte de la ecuación de Laplace para obtener el potencial electrostático y posteriormente el campo eléctrico. Dado que el eje del cilindro es paralelo al eje z , el problema tendrá simetría en este eje, o sea $\partial \dots / \partial z = 0$. Por lo tanto sólo se necesita resolver la ecuación de Laplace en dos dimensiones, siendo el potencial electrostático función únicamente de las coordenadas polares ρ y φ : $\Phi(\rho, \varphi)$. Entonces se puede escribir la ecuación de Laplace de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (3.1)$$

en la cual se propone separación de variables:

$$\Phi(\rho, \varphi) = R(\rho)\Theta(\varphi). \quad (3.2)$$

Sustituyendo (3.2) en (3.1) se obtiene:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = n^2 R(\rho), \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2\Theta(\varphi)}{d\varphi^2} + n^2\Theta(\varphi) = 0, \quad (3.4)$$

donde n la constante de separación. Resolviendo las ecuaciones diferenciales 3.3 y 3.4 se llega a las siguientes soluciones:

$$R(\rho) = a\rho^n + b\rho^{-n}, \quad (3.5)$$

$$\Theta(\varphi) = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi, \quad (3.6)$$

para cada valor de n ; la solución general será una superposición de (3.5) y (3.6), la cual puede escribirse de la siguiente forma:

$$\Phi(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \rho^n \sin(n\varphi + \alpha_n) + b_n \rho^{-n} \sin(n\varphi + \beta_n)). \quad (3.7)$$

El campo y el potencial electrostático tienen que cumplir ciertos requisitos para que el problema tenga sentido físico. Por ejemplo el potencial electrostático no puede diverger en el origen, con lo cual $b_n = 0, \forall n$. Por otro lado, muy lejos del cilindro se tiene que recuperar el campo eléctrico uniforme; poniendo esta condición en términos del potencial nos queda:

$$\Phi \longrightarrow -E_0 y = -E_0 \rho \sin \varphi.$$

Con estas consideraciones los potenciales adentro y afuera del cilindro nos quedan de la siguiente forma:

$$\Phi_{int}(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin n\varphi, \quad (3.8)$$

$$\Phi_{ext}(\rho, \varphi) = -E_0\rho \sin \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \rho^{-n} \sin n\varphi, \quad (3.9)$$

donde los subíndices *int* y *ext* denotan interior y exterior al cilindro. Las condiciones de frontera en $\rho = a$ se pueden escribir como:

$$-\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{dentro}}{\partial \varphi} \Big|_{\rho=a} = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_{fuera}}{\partial \varphi} \Big|_{\rho=a}, \quad (3.10)$$

$$-\epsilon \frac{\partial \Phi_{dentro}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = -\frac{\partial \Phi_{fuera}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a}, \quad (3.11)$$

donde las Ecs. 3.10 y 3.11 representan la continuidad de la componente paralela del campo eléctrico y la continuidad de la componente normal del vector desplazamiento respectivamente, ambas en $\rho = a$.

Aplicando (3.10) y (3.11) en las expresiones (3.8) y (3.9) se obtiene que los únicos coeficientes distintos de cero son a_1 y c_1 :

$$a_1 = -\frac{2E_0}{\epsilon + 1}, \quad (3.12)$$

$$c_1 = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} E_0 a^2. \quad (3.13)$$

Por lo que los potenciales quedan de la siguiente manera:

$$\Phi_{int} = -\frac{2E_0}{\epsilon + 1} \rho \sin \varphi, \quad (3.14)$$

$$\Phi_{ext} = -E_0 \rho \sin \varphi \left(1 - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{a^2}{\rho^2} \right). \quad (3.15)$$

Utilizando :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (3.16)$$

nos queda:

$$\mathbf{E}_{int} = \left(\frac{2E_0}{\epsilon + 1} \sin \varphi \right) \hat{\rho} + \left(\frac{2E_0}{\epsilon + 1} \cos \varphi \right) \hat{\varphi}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{E}_{int} = \left(\frac{2E_0}{\epsilon + 1} \right) \hat{y}. \quad (3.18)$$

$$\mathbf{E}_{ext} = E_0 \sin \varphi \left(1 + \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{a^2}{\rho^2} \right) \hat{\rho} + E_0 \cos \varphi \left(1 - \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \frac{a^2}{\rho^2} \right) \hat{\varphi}. \quad (3.19)$$

Se puede ver que el campo incidente y el campo adentro del cilindro son paralelos.

3.2. Función de Green en la Norma de Lorentz

En la mayoría de los problemas de electromagnetismo es más conveniente tratar primero con los potenciales $\mathbf{A}$ y ϕ en vez de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. Por ejemplo, la ausencia de monopolos magnéticos (Ec. 2.4) permite escribir:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.20)$$

Si ahora se combina esta última expresión con la Ley de Faraday (Ec. 2.1) se obtiene:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Por lo tanto con las expresiones (3.20) y (3.21) se puede derivar los campos a partir de los potenciales. Cabe destacar que el potencial escalar ϕ en la Ec. 3.21 no tiene el mismo significado físico que en el caso electrostático donde vale la Ec. 3.16. Supong-

amos ahora que se quiere estudiar la propagación de un campo electromagnético en el vacío generado por las fuentes $\mathbf{J}$ y $\tilde{\rho}$. Utilizando la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.22)$$

y la Ley de Ampere-Maxwell (Ec.2.3) podemos escribir:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (3.23)$$

Por otro lado aplicando la divergencia a la Ley de Gauss-Coulomb (Ec. 2.2) nos queda:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \tilde{\rho}. \quad (3.24)$$

Se puede observar de la Ec. 3.20 que se tiene ciertas libertades para elegir el vector potencial $\mathbf{A}$, está definido a menos de un gradiente. Esta libertad permite elecciones que faciliten el cálculo de los potenciales. En esta sección se elige la siguiente relación:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (3.25)$$

la cual se denomina *condición o norma de Lorentz*. Utilizando 3.25 podemos escribir en forma compacta:

$$\square^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (3.26)$$

$$\square^2 \phi = -4\pi \tilde{\rho}, \quad (3.27)$$

donde

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (3.28)$$

se denomina operador *DÁlambertiano*. Dado que nuestro problema tiene simetría de traslación en z vamos a utilizar la *función de Green bidimensional* para calcular los potenciales. La linealidad del operador DÁlambertiano nos permite expresar dichos potenciales de la siguiente forma:

$$\phi(\mathbf{r}_{xy}, t) = \int \int G(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}, t - t') \tilde{\rho}(\mathbf{r}'_{xy}, t') dS' dt', \quad (3.29)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_{xy}, t) = \int \int G(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}, t - t') \frac{1}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}, t') dS' dt', \quad (3.30)$$

donde G es la función de Green, $\mathbf{r}_{xy} = \rho \hat{\rho} = \rho \cos \varphi \hat{x} + \rho \sin \varphi \hat{y}$ y dS' es un diferencial de superficie en el plano $x - y$. Para este tipo de problemas se pide que la función de Green satisfaga:

$$\square^2 G(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}, t - t') = -4\pi \delta(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}) \delta(t - t'). \quad (3.31)$$

Nótese que si se satisface la (3.31), aplicando el operador $\square^2$ a los potenciales $\mathbf{A}$ y ϕ , también se satisfacen (3.26) y (3.27). Por lo tanto el problema se reduce a resolver la Ec. 3.31. La representación de G en términos de su transformada de Fourier G_ω se puede expresar como:

$$G(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}, t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} G_\omega(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}) \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.32)$$

Para escribir (3.32) se utilizó la identidad:

$$\delta(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.33)$$

Aplicando la transformada de Fourier a ambos miembros de (3.31) y utilizando la (3.33) se tiene que:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G_\omega(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}). \quad (3.34)$$

Escribiendo la Ec.3.34 en coordenadas polares para el caso $\mathbf{r}_{xy} \neq \mathbf{r}'_{xy}$, nos queda:

$$\left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho_0} \left(\rho_0 \frac{\partial}{\partial \rho_0}\right) + k^2\right] G_\omega(\rho_0) = 0, \quad (3.35)$$

donde $k = \omega/c$ y $\rho_0 = |\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}|$. Haciendo el cambio de variable $u = k\rho_0$ se obtiene:

$$\frac{d^2 G_k}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dG_k}{du} + G_k = 0. \quad (3.36)$$

Esta es la *ecuación de Bessel* de orden cero. Entre toda la familia de soluciones de la Ec. 3.36 las que físicamente corresponden a ondas salientes son las $H_0^{(1)}$ funciones de Hankel orden cero y primera especie. Finalmente nos queda:

$$G_k(\rho_0) = i\pi H_0^{(1)}(k\rho_0), \quad (3.37)$$

donde los casos límites en el origen y en el infinito son:

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} H_0^{(1)}(k\rho_0) = -2\ln(k\rho_0), \quad (3.38)$$

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} H_0^{(1)}(k\rho_0) = \sqrt{\frac{2\pi}{k\rho_0}} e^{i(k\rho_0 + \frac{\pi}{4})}. \quad (3.39)$$

Por lo tanto, la Ec. 3.32 queda como:

$$G(\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}, t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}|}} e^{i\left(\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}| + \frac{\pi}{4}\right)} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.40)$$

3.3. Zona de radiación

Suponiendo todos los eventos armónicos en el tiempo la expresión (3.30) nos queda como:

$$A(\mathbf{r}_{xy})e^{-i\omega t} = \frac{1}{c} \int \int \int \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}) e^{-i\omega t'} e^{-i\omega'(t-t')} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega'}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}|}} e^{i\left(\frac{\omega'}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}| + \frac{\pi}{4}\right)} \frac{d\omega'}{2\pi} dS' dt',$$

reordenando términos:

$$A(\mathbf{r}_{xy})e^{-i\omega t} = \frac{1}{c} \int \int \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}) \int e^{-it'(\omega - \omega')} \frac{dt'}{2\pi} e^{-i\omega' t} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega'}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}|}} e^{i\left(\frac{\omega'}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}| + \frac{\pi}{4}\right)} d\omega' dS',$$

$$A(\mathbf{r}_{xy})e^{-i\omega t} = \frac{1}{c} \int \int \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}) \delta(\omega - \omega') e^{-i\omega' t} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega'}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}|}} e^{i\left(\frac{\omega'}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}| + \frac{\pi}{4}\right)} d\omega' dS',$$

$$A(\mathbf{r}_{xy}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}) \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}|}} e^{i\left(\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}| + \frac{\pi}{4}\right)} dS'. \quad (3.41)$$

Considerando la zona de radiación lejana es decir $k\rho \gg 1$, entonces podemos

aproximar en el exponente:

$$|\mathbf{r}_{xy} - \mathbf{r}'_{xy}| \simeq \rho - \hat{\rho} \cdot \mathbf{r}'_{xy}.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_{xy}) = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}) \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i\frac{\omega}{c}(\rho - \hat{\rho} \cdot \mathbf{r}'_{xy} + \frac{\pi}{4})} dS', \quad (3.42)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_{xy}) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i(\frac{\omega}{c}\rho + \frac{\pi}{4})} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\frac{\omega}{c}\hat{\rho} \cdot \mathbf{r}'_{xy})^n}{n!} dS'. \quad (3.43)$$

Los términos decaen rápidamente con n , el término que más contribuirá será el de $n = 0$ que es el que se utiliza para la *aproximación dipolar eléctrica* (momento dipolar). Con esta aproximación (3.43) nos queda como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_{xy}) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i(\frac{\omega}{c}\rho + \frac{\pi}{4})} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}) dS'. \quad (3.44)$$

Consideremos la siguiente identidad:

$$\nabla \cdot (x_i \mathbf{J}) = \nabla x_i \cdot \mathbf{J} + x_i \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (3.45)$$

podemos escribir:

$$\mathbf{J}_i = \nabla \cdot (x_i \mathbf{J}) - x_i \nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (3.46)$$

Aplicando (3.46), podemos integrar por partes la (3.44):

$$A_i(\mathbf{r}_{xy}) = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i(\frac{\omega}{c}\rho + \frac{\pi}{4})} \int x'_i \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}) dS', \quad (3.47)$$

donde se ha considerado que la distribución de corrientes $\mathbf{J}$ está acotada en el plano

$x - y$. Utilizando la ecuación de continuidad con dependencia armónica:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}'_{xy}) = i\omega\rho(\mathbf{r}_{xy}), \quad (3.48)$$

se tiene que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_{xy}) = -\frac{i\omega}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i(\frac{\omega}{c}\rho + \frac{\pi}{4})} \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}'_{xy})dS'. \quad (3.49)$$

La integral $\int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')dS'$ en (3.49) representa una densidad de momento dipolar por unidad de longitud en z , a la cual escribiremos como $\mathbf{p}_L$, luego el potencial vector queda de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_{xy}) = -\frac{i\omega}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i(\frac{\omega}{c}\rho + \frac{\pi}{4})} \mathbf{p}_L(\mathbf{r}_{xy}). \quad (3.50)$$

Calculando la inducción magnética a partir del potencial vectorial tenemos para la zona lejana de radiación ($k\rho \rightarrow \infty$):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_{xy}) = \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i(\frac{\omega}{c}\rho + \frac{\pi}{4})} (\hat{\rho} \times \mathbf{p}_L). \quad (3.51)$$

Ahora utilizando $\mathbf{E}(\mathbf{r}_{xy}) = \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}$ y también el límite de radiación lejana ($k\rho \rightarrow \infty$) nos queda:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_{xy}) = \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i(\frac{\omega}{c}\rho + \frac{\pi}{4})} (\hat{\rho} \times \mathbf{p}_L) \times \hat{\rho}. \quad (3.52)$$

La expresión general de la densidad volumétrica dipolar en función del campo eléctrico para medios LIH es:

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\epsilon - 1}{4\pi} \right) \mathbf{E}. \quad (3.53)$$

De la Ec. 3.53 podemos calcular la polarización inducida $\mathbf{p}_L$ utilizando el campo eléctrico que se genera en el interior del cilindro de acuerdo a la Ec. 3.17. De esta forma podemos escribir a $\mathbf{p}_L$ como:

$$\mathbf{p}_L = \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right) \frac{a^2}{2} E_0 \hat{y}. \quad (3.54)$$

Aplicando esto en (3.51) y en (3.52) los campos quedan como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_{xy}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i\left(\frac{\omega}{c}\rho + \frac{\pi}{4}\right)} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right) \frac{a^2}{2} E_0 \cos \varphi \hat{z}, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_{xy}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\omega}{c}\rho}} e^{i\left(\frac{\omega}{c}\rho + \frac{\pi}{4}\right)} \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right) \frac{a^2}{2} E_0 \cos \varphi \hat{\varphi}. \quad (3.56)$$

Capítulo 4

Cilindro de radio arbitrario

En este capítulo se describe un formalismo riguroso para estudiar el esparcimiento electromagnético por un cilindro infinito de radio arbitrario. El formalismo tiene como punto de partida la construcción de vectores armónicos, los cuales constituyen una base para escribir los campos esparcidos.

4.1. Ecuación de Helmholtz y vectores armónicos

En la (Sección 2.3) se mostró que las ecuaciones de Maxwell sin fuentes para medios LIH, con dependencia armónica de los campos, se pueden escribir en el sistema gaussiano de unidades como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \frac{\omega \mu}{c} \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i \frac{\omega \epsilon}{c} \mathbf{E}.$$

Aplicando la identidad:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

se obtienen las *Ecuaciones de Helmholtz* para los campos electromagnéticos:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad (4.1)$$

donde $k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2}$. Para resolver estas ecuaciones se construye una función vectorial $\mathbf{M}$ que satisfaga:

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{c}\Psi), \quad (4.2)$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante y ψ es una función escalar que depende de las coordenadas.

Observamos que la divergencia de este vector es cero, ya que la divergencia del rotacional de cualquier vector es nulo:

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (4.3)$$

Haciendo uso de la notación vectorial de índices, se puede demostrar (Apéndice A) que:

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{c} (\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi)]. \quad (4.4)$$

Entonces, $\mathbf{M}$ satisface la ecuación de Helmholtz vectorial si Ψ es una solución escalar de la ecuación de Helmholtz.

También podemos escribir $\mathbf{M} = -\mathbf{c} \times \nabla \Psi$, lo cual muestra que $\mathbf{M}$ es perpendicular

a c.

Después se construye a partir de $\mathbf{M}$ otra función vectorial:

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k}, \quad (4.5)$$

también con divergencia cero, que además satisface la ecuación de Helmholtz vectorial:

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = 0. \quad (4.6)$$

También tenemos que:

$$\nabla \times \mathbf{N} = k\mathbf{M}. \quad (4.7)$$

Por lo tanto, $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$, ambos tienen todas las propiedades requeridas de los campos electromagnéticos: satisfacen la ecuación de Helmholtz en forma vectorial, tienen divergencia cero, el rotacional de $\mathbf{M}$ es proporcional a $\mathbf{N}$ y el rotacional de $\mathbf{N}$ es proporcional a $\mathbf{M}$. A la función Ψ se le llama *función generadora de los vectores armónicos* $\mathbf{M}$ y $\mathbf{N}$. La elección de funciones generadoras está dictada por la simetría del problema.

4.2. Vectores armónicos en coordenadas cilíndricas

Dado que en nuestro caso nos interesa estudiar el esparcimiento electromagnético en un cilindro infinito, el punto de partida será la ecuación de Helmholtz en forma escalar (Sección 4.1) representada en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi = 0. \quad (4.8)$$

Resolviendo (4.8), por separación de variables:

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = Z_n(u) e^{in\varphi} e^{ihz}, \quad (4.9)$$

donde $u = \rho \sqrt{k^2 - h^2}$ y Z_n es una solución de la ecuación de Bessel [6]. Las soluciones linealmente Z_n son las funciones de Bessel de primera (J_n) y segunda especie (Y_n) de orden entero n . h es una constante de separación la cual en nuestro caso estará definida por el campo incidente y la necesidad de satisfacer las condiciones de frontera entre el cilindro y el medio.

Luego se considerarán los vectores armónicos generados por la solución de la ecuación (4.8) tomando $\mathbf{c} = \hat{e}_z$.

$$\mathbf{M}_n = \nabla \times (\hat{e}_z \Psi_n), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{N}_n = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_n. \quad (4.11)$$

Desarrollando en forma de componentes:

$$\mathbf{M}_n = \sqrt{k^2 - h^2} \left(in \frac{Z_n(u)}{u} \hat{e}_r - Z'_n(u) \hat{e}_\varphi \right) e^{i(n\varphi + hz)}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{N}_n = \frac{\sqrt{k^2 - h^2}}{k} \left(ih Z'_n(u) \hat{e}_r - hn \frac{Z_n(u)}{u} \hat{e}_\varphi + \sqrt{k^2 - h^2} Z_n(u) \hat{e}_z \right) e^{i(n\varphi + hz)}. \quad (4.13)$$

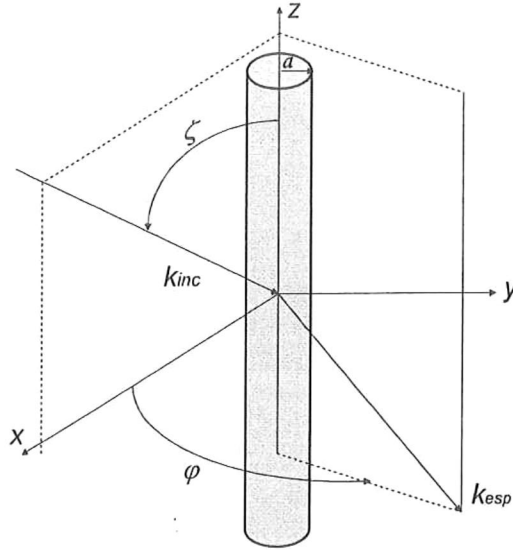


Figura 4.1: Gráfica de un cilindro incidido por una onda plana

Se puede demostrar que los vectores armónicos son ortogonales de la forma:

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \cdot \mathbf{M}_m^* d\phi = \int_0^{2\pi} \mathbf{N}_n \cdot \mathbf{N}_m^* d\phi = \int_0^{2\pi} \mathbf{M}_n \cdot \mathbf{N}_m^* d\phi = 0, \quad (4.14)$$

con $n \neq m$.

4.3. Casos de polarización

Ahora se considerará la incidencia de una onda plana homogénea $\mathbf{E}_{inc} = \mathbf{E}_0 e^{ik\hat{\mathbf{e}}_{inc} \cdot \mathbf{x}}$, en un cilindro infinito de radio a , propagándose en una dirección arbitraria $\hat{\mathbf{e}}_{inc} = -\sin \zeta \hat{\mathbf{e}}_x - \cos \zeta \hat{\mathbf{e}}_z$, donde ζ es el ángulo entre la onda incidente y el eje del cilindro (Figura 4.2).

A continuación se analizarán de manera independiente las dos posibles polarizaciones ortogonales:

Caso I: *Campo eléctrico incidente paralelo al plano X-Z.*

En este caso el campo eléctrico incidente puede escribirse como:

$$\mathbf{E}_{inc} = E_0 (\sin \zeta \hat{e}_z - \cos \zeta \hat{e}_x) e^{-ik(\rho \sin \zeta \cos \varphi + z \cos \zeta)}$$

El primer paso es hacer el desarrollo de $\mathbf{E}_i$ en función de los vectores $\mathbf{M}_n$ y $\mathbf{N}_n$. Para que la expansión sea finita en $\rho = 0$ debemos excluir las funciones de Bessel de segunda especie (Y_n) de (4.9), también de la forma de $\mathbf{E}_i$ se puede ver que h debe ser $-k \cos \zeta$. Entonces la expansión de $\mathbf{E}_i$ en función de los vectores armónicos es:

$$\mathbf{E}_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_n \mathbf{M}_n^{(1)} + B_n \mathbf{N}_n^{(1)}], \quad (4.15)$$

donde los vectores armónicos son generados por $\Psi_n = J_n(k\rho \sin \zeta) e^{in\varphi} e^{-ikz \cos \zeta}$.

Para determinar los coeficientes A_n y B_n , se utilizan las condiciones de ortogonalidad de los vectores armónicos (4.14). Con lo cual se muestra que:

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{E_0 (-i)^n}{k \sin \zeta},$$

por lo tanto, la expansión de el campo eléctrico y magnético incidente es:

$$\mathbf{E}_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \mathbf{N}_n^{(1)}, \quad \mathbf{H}_{inc} = \frac{-ikc}{\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \mathbf{M}_n^{(1)}, \quad (4.16)$$

donde $E_n = \frac{E_0(-i)^n}{k \sin \zeta}$.

Para satisfacer las condiciones de continuidad (2.40)-(2.41), para todos los valores de z , en la frontera del cilindro, la constante de separación h en la función que genera M y N dentro del cilindro también debe ser $-k \cos \zeta$. Entonces la función generadora para los campos dentro del cilindro (E_1, H_1) es $\Psi_n = J_n(k\rho\sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta})e^{in\varphi}e^{-ikz \cos \zeta}$, donde m es el índice de refracción del cilindro.

Las correspondientes desarrollos son:

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[g_n M_n^{(1)} + f_n N_n^{(1)} \right], \\ H_1 &= \frac{-ik_1 c}{\omega \mu_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[g_n N_n^{(1)} + f_n M_n^{(1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Existen otras soluciones independientes que cumplen con la parte radial de (4.8) y estas son las funciones de Hankel [6], las cuales expresan mejor las ondas salientes y tienen un desarrollo asintótico bien comportado. Los campos esparcidos pueden escribirse de la siguiente manera:

$$E_{esp} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[b_n^I N_n^{(2)} + ia_n^I M_n^{(2)} \right], \quad (4.18)$$

$$H_{esp} = \frac{ikc}{\omega \mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[b_n^I M_n^{(2)} + ia_n^I N_n^{(2)} \right], \quad (4.19)$$

donde la función generadora de los vectores armónicos es $\Psi = H_n^{(1)}(k\rho \sin \zeta)e^{in\varphi}e^{-ikz \cos \zeta}$.

Si aplicamos las condiciones (2.40)-(2.41) en $\rho = a$, obtenemos los coeficientes del

campo esparcido:

$$a_{nI} = \frac{C_n V_n - B_n D_n}{W_n V_n + i D_n^2}, \quad (4.20)$$

$$b_{nI} = \frac{W_n B_n + i D_n C_n}{W_n V_n + i D_n^2}, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} D_n &= n \cos \zeta \eta J_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \\ B_n &= \xi \left[m^2 \xi J'_n(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J'_n(\xi) \right], \\ C_n &= n \cos \zeta \eta J_n(\eta) J_n(\xi) \left(\frac{\xi^2}{\eta^2} - 1 \right), \\ V_n &= \xi \left[m^2 \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) - \eta J_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi) \right], \\ W_n &= i \xi \left[\eta J_n(\eta) H_n^{(1)'}(\xi) - \xi J'_n(\eta) H_n^{(1)}(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde $\xi = x \sin \zeta$, $\eta = x \sqrt{m^2 - \cos^2 \zeta}$, $x = ka$ y con $\mu = \mu_1$. De las relaciones para las funciones de Bessel $J_{-n} = (-1)^n J_n$ y $Y_{-n} = (-1)^n Y_n$ se obtiene que:

$$a_{-n}^I = -a_n^I, \quad b_{-n}^I = b_n^I, \quad a_0^I = 0. \quad (4.23)$$

Caso II: *Campo eléctrico incidente perpendicular al plano X-Z.*

En este caso el campo eléctrico incidente puede escribirse como:

$$\mathbf{E}_{inc} = E_0 \hat{e}_y e^{-ik(\rho \sin \zeta \cos \phi + z \cos \zeta)}$$

. Procediendo en forma análoga al **Caso I** tenemos que el campo eléctrico esparcido es:

$$\mathbf{E}_{esp} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \left[i a_n^{II} \mathbf{M}_n^{(2)} + b_n^{II} \mathbf{N}_n^{(2)} \right], \quad (4.24)$$

quedando los coeficientes de la siguiente manera:

$$a_n^{II} = -\frac{A_n V_n - i C_n D_n}{W_n V_n + i D_n^2}, \quad (4.25)$$

$$B_n^{II} = -i \frac{C_n W_n + A_n D_n}{W_n V_n + i D_n^2}. \quad (4.26)$$

con

$$A_n = i\xi \left[\xi J_n'(\eta) J_n(\xi) - \eta J_n(\eta) J_n'(\xi) \right]. \quad (4.27)$$

Usando las relaciones para las funciones de Bessel se obtiene que:

$$a_{-n}^{II} = a_n^{II}, \quad b_{-n}^{II} = -b_n^{II}, \quad b_0^{II} = 0. \quad (4.28)$$

4.3.1. Polarización o Modo s

Si tomamos el ángulo de polarización (ζ) que sea (90°) el problema general se reduce a un caso particular llamado *Montaje clásico*. Para el caso I con luz incidente normal al cilindro ($\zeta = 90^\circ$) se reduce al *modo de polarización s*. Se puede ver que para este ángulo, de las ecuaciones (4.22) el $\cos \zeta$ de D_n y C_n se anula por lo que los

coeficientes a_n^I son cero, también se puede demostrar que b_n^I se puede reescribir como:

$$b_n^I(\zeta = 90^\circ) = \frac{J_n(mx)J'_n(x) - mJ'_n(mx)J_n(x)}{J_n(mx)H_n^{(1)'}(x) - mJ'_n(mx)H_n^{(1)}(x)}. \quad (4.29)$$

4.3.2. Polarización o Modo p

Para el caso II con luz incidente normal al cilindro se reduce al *modo de polarización p*. Para este modo los coeficientes b_n^{II} se anulan y los coeficientes a_n^{II} se pueden reescribir como:

$$a_n^{II}(\zeta = 90^\circ) = \frac{mJ'_n(x)J_n(mx) - J_n(x)J'_n(mx)}{mJ_n(mx)H_n^{(1)'}(x) - J'_n(mx)H_n^{(1)}(x)}. \quad (4.30)$$

Capítulo 5

Eficiencia y radiación esparcida

En este Capítulo ilustramos la teoría desarrollada en los Capítulos 3 y 4 a través del flujo de potencia esparcida, matemáticamente representado por el vector de Poynting. Si bien la teoría de Mie presentada en el Capítulo 4 es válida para condiciones generales de incidencia, en los ejemplos del presente Capítulo se utilizó el montaje clásico, correspondiente a los modos fundamentales de polarización s y p. Para los cálculos se tuvo en cuenta la dispersión del medio material respecto a variaciones de la longitud de onda incidente. Se muestran curvas de eficiencia y del coeficiente diferencial de esparcimiento para la Ag y el H_2O . Se comparan resultados a partir de la teoría de Mie (TM) y la aproximación dipolar (AP) válida para radios pequeños. Para el caso de la Ag, se comparan las resonancias que aparecen en las curvas de eficiencia con las que aparecen en las curvas de dispersión del material.

5.1. Eficiencia esparcida

Para estudiar la potencia total esparcida por una partícula de tamaño finito se calcula el promedio temporal del flujo del vector de Poynting a través de una superficie A que encierra a dicha partícula:

$$W_{esp} = \oint_A \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{n} dA. \quad (5.1)$$

Para que la expresión 5.1 represente la potencia irradiada por la partícula, entre la superficie de la misma y la superficie A , donde se calcula el flujo del vector de Poynting, debe haber un medio no absorbente. En el caso particular que tengamos una partícula cilíndrica de longitud L y radio a la cantidad W_{esp}/L puede ser aproximada a la potencia esparcida por unidad de longitud de un cilindro infinito, en la medida que se satisfaga la condición $a/L \ll 1$.

Una de las cantidades que suele utilizarse para describir procesos de esparcimiento por partículas es la *eficiencia* Q_{esp} definida como:

$$Q_{esp} = \frac{W_{esp}}{W_{inc}}, \quad (5.2)$$

donde W_{inc} es la potencia incidente sobre la sección transversal de la partícula. Para un cilindro infinito W_{esp} se define como la potencia esparcida a través de una superficie cilíndrica de radio R y longitud L y W_{inc} es la potencia incidente sobre una superficie rectangular ($\perp$ al $\mathbf{k}_{inc}$) de lados $2a$ y L , ver Fig. 5.1. Por lo tanto la integral 5.1 nos queda como:

$$W_{esp} = RL \int_0^{2\pi} (S_{esp})_\rho d\varphi, \quad (5.3)$$

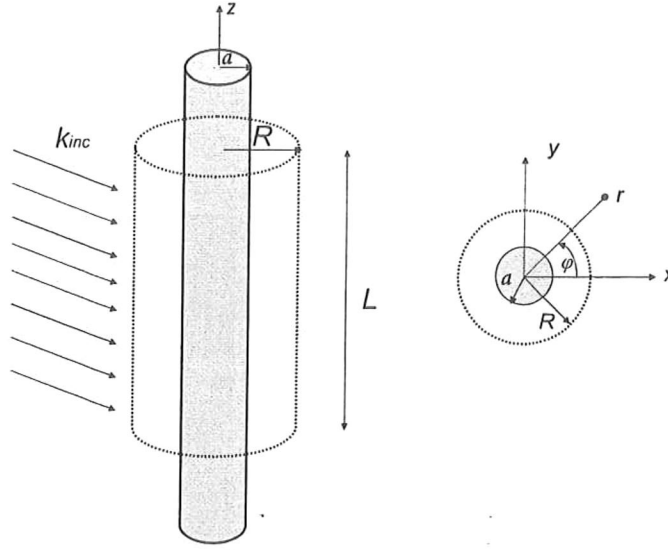


Figura 5.1: Esquema de esparcimiento

donde $(S_{esp})_\rho$ es la componente radial del promedio temporal del vector de Poynting esparcido. Análogamente podemos escribir para la potencia incidente:

$$W_{inc} = L \int_0^{2a} (S_{inc}) dy = 2aL(S_{inc}), \quad (5.4)$$

donde de acuerdo a (2.38) $S_{inc} = (c/8\pi)|E_0|^2$. Utilizando los desarrollos (4.18) y (4.24) para los campos esparcidos, la expresión (2.38) y las relaciones de ortogonalidad (4.14) que satisfacen los vectores armónicos podemos escribir:

$$Q_{esp}^I = \frac{2}{x} \left[|b_0^I|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (|b_n^I|^2 + |a_n^I|^2) \right], \quad (5.5)$$

para el Caso I de polarización (ver sección 4.3) y

$$Q_{esp}^{II} = \frac{2}{x} \left[|a_0^{II}|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n^{II}|^2 + |b_n^{II}|^2) \right], \quad (5.6)$$

para el Caso II de polarización (ver sección 4.3).

Para el montaje clásico de polarización la eficiencia esparcida se puede expresar de manera más compacta como:

$$Q_{esp}^{\nu} = \frac{2}{x} \left[|c_0^{\nu}|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n^{\nu}|^2 \right], \quad (5.7)$$

donde si $\nu = s$ tenemos $c_n^s = b_n^I$ correspondiente al modo s y si $\nu = p$ tenemos $c_n^p = a_n^{II}$ correspondiente al modo p.

5.2. Coeficiente diferencial de esparcimiento

En muchas aplicaciones donde se estudia el esparcimiento electromagnético por partículas es útil conocer la distribución angular del flujo de energía irradiada. Una cantidad representativa para dicho flujo es lo que se denomina como *coeficiente diferencial de esparcimiento* $q^{\nu}(\varphi)$, al cual podemos definir como la eficiencia por unidad de radián esparcida entre φ y $\varphi + d\varphi$:

$$Q_{esp}^{\nu} = \int_0^{2\pi} q^{\nu}(\varphi) d\varphi. \quad (5.8)$$

Identificando el integrando de (5.8) como $q^\nu(\varphi) = RL(S_{esp}^\nu)_\rho/W_{inc}$, se obtiene:

$$q^\nu(\varphi) = \frac{|c_0^\nu + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^\nu \cos n\varphi|^2}{\pi k a}. \quad (5.9)$$

5.3. Cálculo para radios pequeños

En los ejemplos de radios pequeños utilizaremos solamente el modo de polarización p compatible con la Fig.3.1. De acuerdo con el promedio temporal del vector de Poynting (Ec.2.38) y los campos esparcidos en la zona de radiación (Ecs. 3.55-3.56) se obtiene:

$$\langle S \rangle = \frac{c}{16} \frac{\omega^3}{c^3} \left[\left\| \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right\|^2 \frac{a^4}{R} E_0^2 \sin^2 \varphi \right] \hat{\rho}, \quad (5.10)$$

donde la coordenada radial de cilíndricas se la ha evaluado en $\rho = R$. Poniendo esta última expresión en (5.1) obtenemos:

$$W_{esp}^p = RL\pi \frac{c}{16} \left[\frac{\omega^3}{c^3} \left\| \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right\|^2 \frac{a^4}{R} E_0^2 \right]. \quad (5.11)$$

Por lo tanto, usando la Ec. 5.2 tenemos:

$$Q_{esp}^p = \frac{\pi^2 k^3 a^3}{4} \left\| \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right\|^2. \quad (5.12)$$

Para el coeficiente diferencial de esparcimiento nos queda:

$$q_{esp}^p = \frac{\pi k^3 a^3}{4} \left\| \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right\|^2 \cos^2 \varphi. \quad (5.13)$$

5.4. Resultados

En esta sección se presentan resultados para la plata y el agua. En primera instancia se tomaron radios arbitrarios y posteriormente radios pequeños para poder comparar con los resultados de la AP del Capítulo III. Para calcular las eficiencias y el coeficiente diferencial de esparcimiento se elaboró un programa en *FORTTRAN 90*. Para todas las curvas que se muestran en esta sección se tuvo en cuenta la dispersión del medio, en el caso de los metales los resultados están basados en los datos de [10], mientras que en el caso del agua se utilizaron los datos que aparecen en [9]. En ambos casos se implementaron las subrutinas de cálculo denominadas *Spline*, para realizar interpolaciones en las longitudes de onda [11]. Las funciones de Bessel y Hankel fueron generadas a partir de una subrutina llamada *Zamos* cuyo autor es *Donald E. Amos* del *Sandia National Laboratories*. Estas subrutinas están diseñadas para evaluar la funciones de Hankel o Bessel, aún cuando se tiene argumentos complejos como es el caso de los materiales absorbentes. En las Figs. 5.2, 5.3 y 5.4 se grafican curvas de la eficiencia en función de la longitud de onda incidente para el modo de polarización p y para distintos radios de un cilindro de Ag. En la Fig. 5.2 se puede observar que a medida que aumenta el radio del cilindro las eficiencias también aumentan para las longitudes de onda mayores. Todas las curvas presentan abruptas variaciones para un rango de longitudes de onda de $\lambda \approx 0.3\mu\text{m}$ a $\lambda \approx 0.4\mu\text{m}$. Se pueden observar pequeños picos en $\lambda \approx 0.58\mu\text{m}$.

Si continuamos aumentando el radio del cilindro, como se muestra en la Fig. 5.3 vemos que las eficiencias tienen un comportamiento oscilatorio y se empiezan a borrar los picos que están situados en $\lambda \approx 0.58\mu\text{m}$.

La Fig. 5.4 corresponde a radios muy pequeños comparados con la longitud de

onda incidente. En dicho gráfico se pueden observar picos de resonancia bien definidos para los 3 radios en $\lambda \approx 0.34\mu\text{m}$.

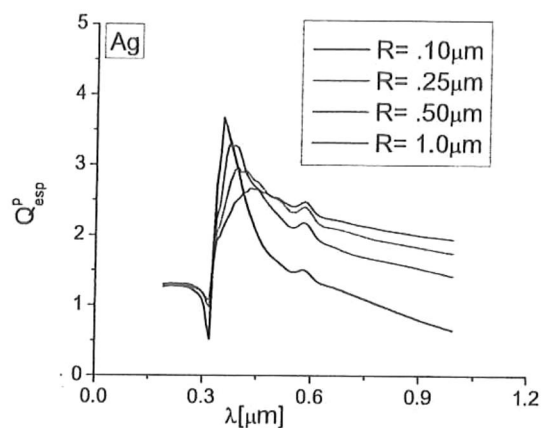


Figura 5.2: Eficiencia esparcida en el modo p

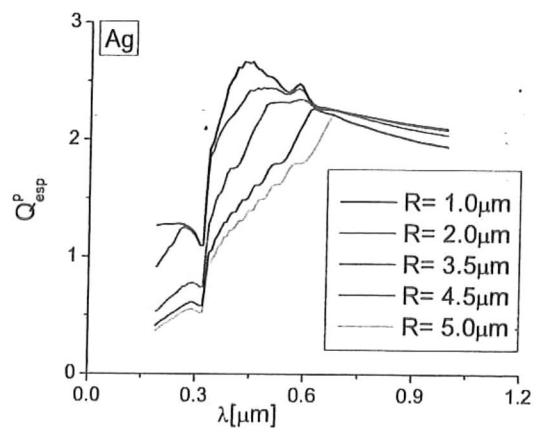


Figura 5.3: Eficiencia esparcida en el modo p

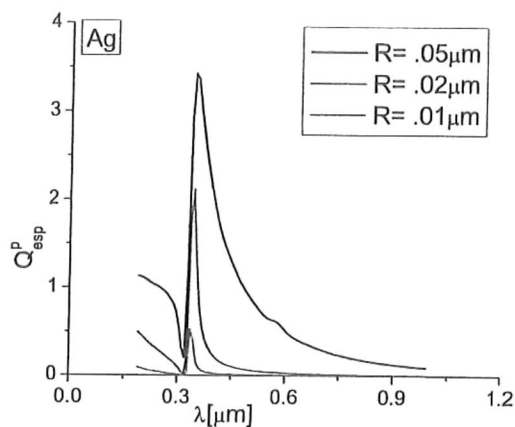


Figura 5.4: Eficiencia esparcida en el modo p

La Fig. 5.5 es la análoga de la Fig. 5.4 pero para el modo s de polarización, en lugar de los picos que teníamos para el modo de polarización p tenemos valles ubicados en aproximadamente las mismas posiciones. Siguiendo con polarización s, en la Fig. 5.6 se muestra que al aumentar el tamaño de los radios se mantienen los mismos valles.

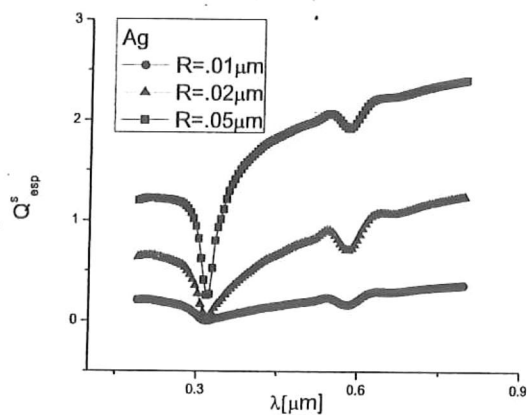


Figura 5.5: Eficiencia esparcida en el modo s

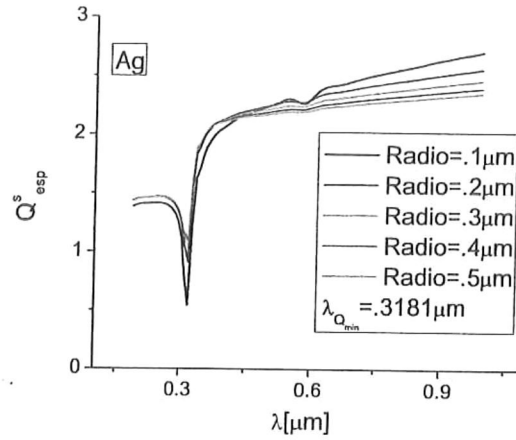


Figura 5.6: Eficiencia esparcida en el modo s

En la Fig. 5.7, utilizando la TM (Ec. 5.7) y la AD (Ec. 5.12), se comparan las eficiencias de un cilindro de radio pequeño con valores de $a/\lambda < 0.05$. El ajuste entre ambas curvas es muy bueno, sólo difieren en un 5 % para la zona de la resonancia.

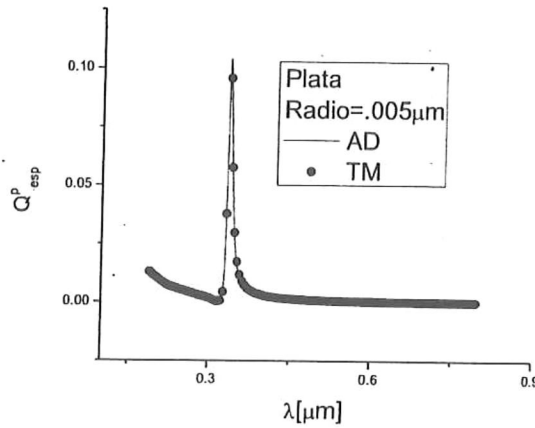


Figura 5.7: Comparación entre la teoría de Mie (TM) y la aproximación dipolar (AD) para radios pequeños.

En la Fig. 5.8, por medio de las Ecs. 5.9 y 5.13, se muestra el patrón angular de esparcimiento en un cilindro de radio chico correspondiente al pico de resonancia de la Fig. 5.4, se puede observar que existe una muy buena coincidencia entre la teoría de Mie y la aproximación dipolar para radios chicos. De esta figura también se observa el patrón característico de radiación correspondiente al momento dipolar, de acuerdo a lo desarrollado en el Capítulo 3. En la Fig. 5.9 se observa que si disminuimos el valor del radio se tiene una mayor coincidencia entre los dos métodos. Dado que, para esta gráfica, la longitud de onda se encuentra fuera de la zona de resonancia, se puede observar una caída significativa de la magnitud del coeficiente diferencial de esparcimiento respecto de la Fig. 5.8.

En Fig. 5.10 se muestra para el modo s, el patrón angular correspondiente al primer valle de gráficos de la Fig. 5.5.

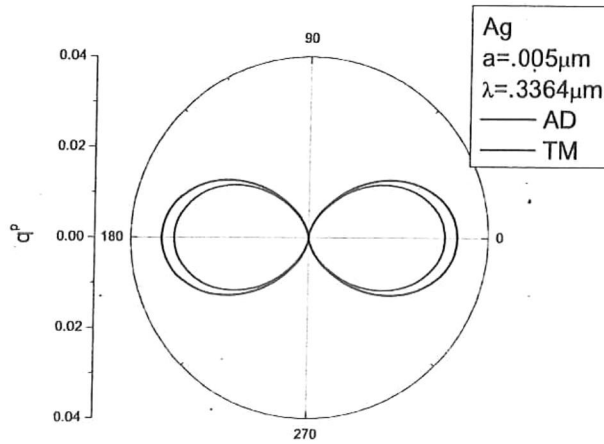


Figura 5.8: Coeficiente diferencial de esparcimiento en el modo p

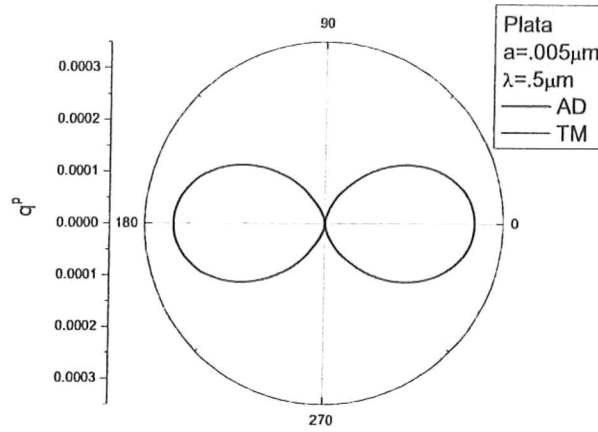


Figura 5.9: Coeficiente diferencial de esparcimiento en el modo p

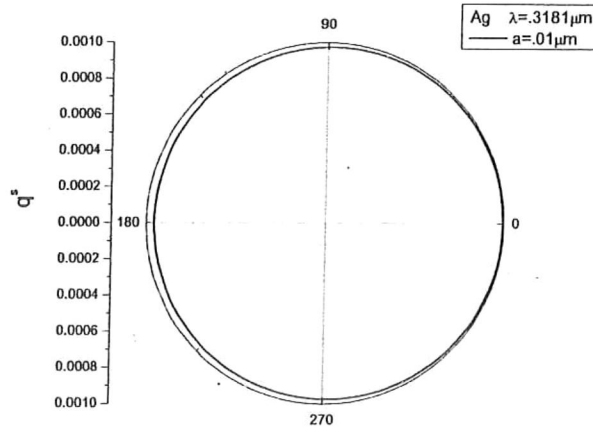


Figura 5.10: Coeficiente diferencial de esparcimiento en el modo s

En las Figs. 5.11 y 5.12 se ejemplifican resultados suponiendo como medio material el agua y ambos modos de polarización. Se puede observar un decaimiento del orden de $1/\lambda^3$ para radios chicos (ver Fig. 5.11) a diferencia de la Ag para el mismo radio (Fig. 5.2, $a = 0.1 \mu\text{m}$). Por otro lado a medida que se incrementa el radio empiezan a

aparecer oscilaciones que se hacen más notorias para el modo de polarización p (Fig. 5.12).

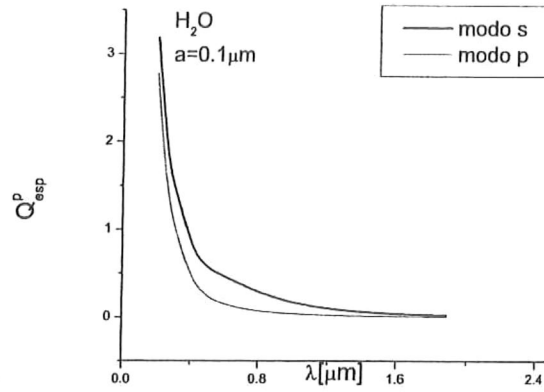


Figura 5.11: Eficiencia esparcida

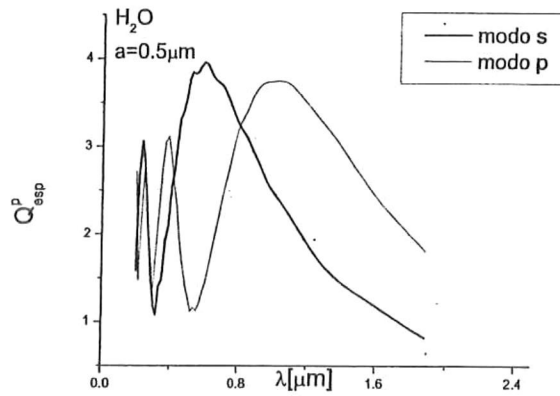


Figura 5.12: Eficiencia esparcida

En la Fig. 5.13 se compara las longitudes de onda para las cuales la absorción (parte imaginaria del índice de refracción) es mínima en la plata, con los puntos

máximos y mínimos de los dos modos de polarización . Para el modo s se muestra que los mínimos en eficiencia corresponden a mínimos en la absorción. Para el modo p el mínimo en la eficiencia se corresponde con el mínimo de la absorción y el máximo de la eficiencia con el otro mínimo de la absorción.

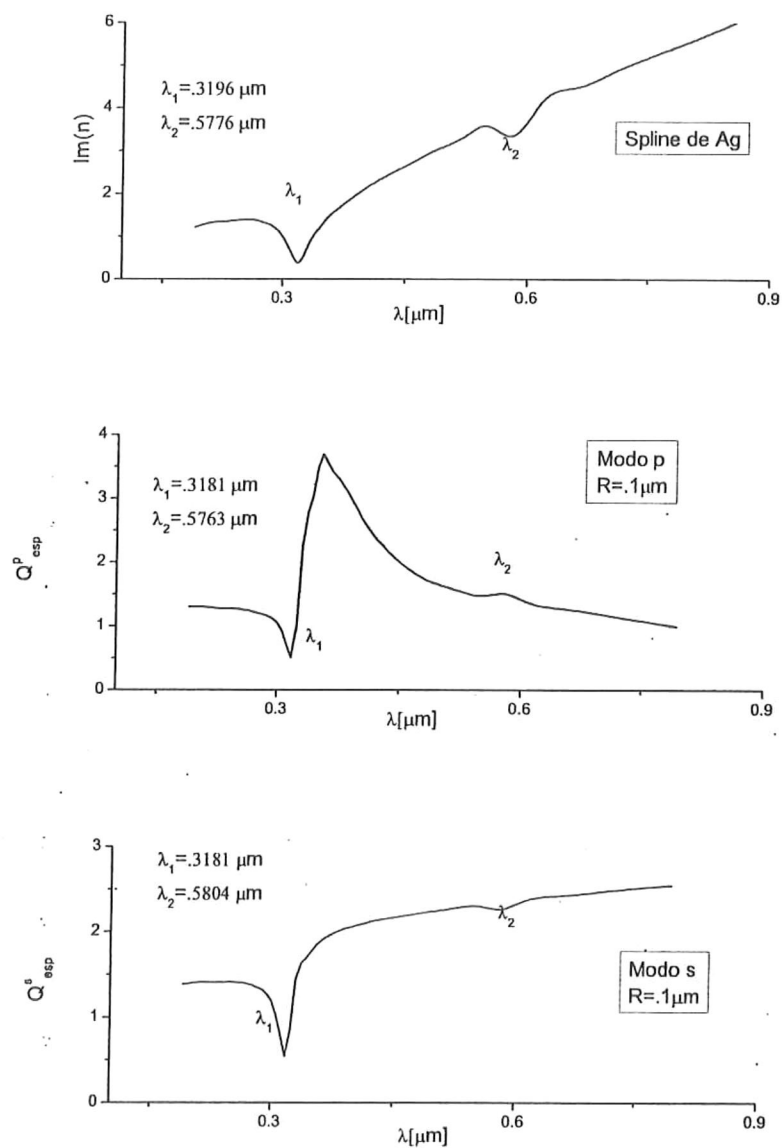


Figura 5.13: Resonancias del material.

En la Fig. 5.14, modo p en la Ag, se comparó el valor de la longitud de onda

para el cual tenemos el máximo valor en la eficiencia, con el valor correspondiente a esta longitud de onda, en la parte real e imaginaria de la función dieléctrica del material. Se observa que para $\lambda \approx 0.3364 \mu m$ nos queda un $\epsilon \approx -1$, valor que produce un máximo en la Ec. 5.12.

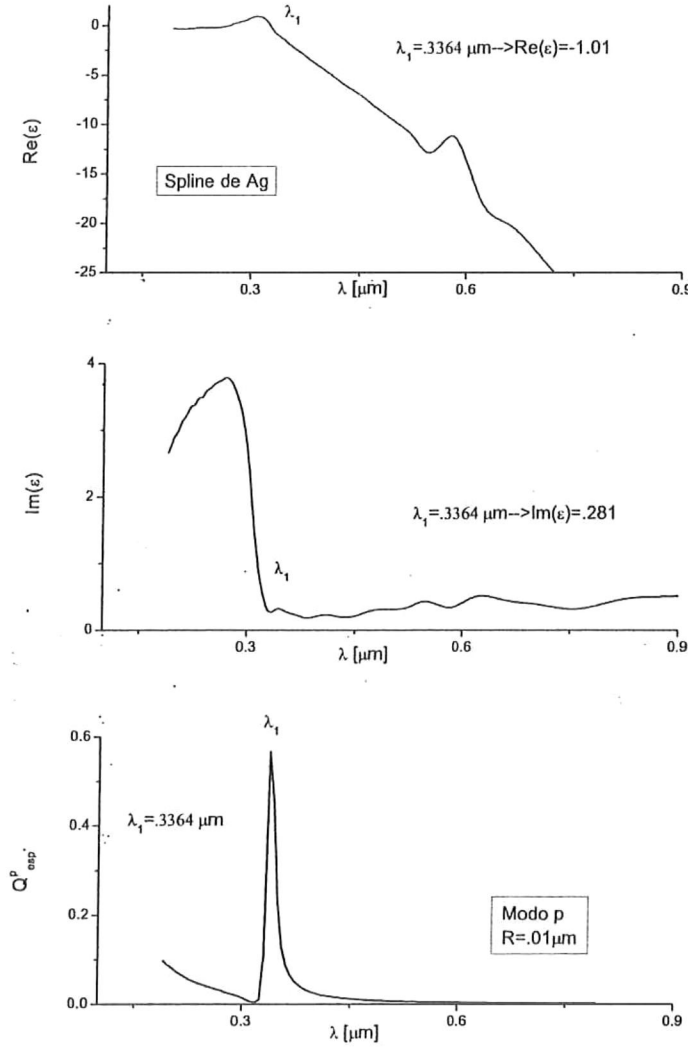


Figura 5.14: Resonancias del material.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un formalismo de esparcimiento electromagnético, válido para la zona de radiación, es decir en donde el punto de observación R es mucho mayor que la longitud de onda incidente λ , que a su vez es mucho mayor que el tamaño característico del sistema, en nuestro caso el radio del cilindro a , es decir: ($a \ll \lambda \ll R$). Vale la pena observar que pese a que el formalismo es para resolver problemas de geometrías bidimensionales, sus apariciones bibliográficas son menos frecuentes que el problema 3-D del esparcimiento por una esfera homogénea. Los resultados se ilustraron para el modo de polarización p. El formalismo para radios pequeños se comparó con la teoría de Mie válida para radios arbitrarios. Con este propósito se reprodujeron los cálculos de la teoría de Mie que aparecen en el Bohren and Huffman [7] por medio de la implementación de códigos en FORTRAN 90.

Se tiene que los resultados obtenidos para el modo p son los característicos de un dipolo irradiando.

Cabe destacar que la distribución angular así como la eficiencia esparcida para la zona de radiación y la distribución dada por la teoría de Mie eran iguales en la

medida que el radio del cilindro iba decreciendo, esto nos dice que para radios muy chicos, el problema del cilindro infinito puede ser reemplazado por el problema de una distribución de dipolos por unidad de longitud a lo largo del eje z . Sin embargo para la zona de radiación, en la medida que crece el radio del cilindro, la eficiencia esparcida diverge para valores de la longitud de onda que se acercan al limite: $||\epsilon(\lambda) + 1||^2 \rightarrow 0$.

Para radios chicos se observó que los picos de resonancia corresponden a longitudes de onda que producen una singularidad en la Ec. 5.12, esto es $\epsilon(\lambda) \approx -1$.

En los gráficos de radios arbitrarios se puede ver que a medida que aumenta el radio del cilindro, en la zona de mayores longitudes de onda, la eficiencia esparcida también aumenta lentamente (Fig. 5.2).

En la Fig. 5.14 se muestra que en $\lambda = .3364\mu\text{m}$, la parte $Re(\epsilon)$ toma un valor cercano a -1 y la parte $Im(\epsilon)$ es muy chica, por lo que produce la mayor resonancia en este cilindro de plata.

De la Fig. 5.13 podemos concluir que los valles en el modo s están relacionados con valles en la absorción, así como el primer valle en el modo p y su segunda resonancia.

En resumen se comparó la teoría de Mie con nuestro desarrollo en la zona de radiación. Se identificaron las longitudes de onda para las cuales el sistema responde con resonancias y valles en la plata, además se les dio una interpretación física, gracias al desarrollo en la zona de radiación y a un análisis de la variación de la longitud de onda con la variación del medio material.

Bibliografía

- [1] A. Ishimaru, Wave propagation and scattering in random media, (Academic Press, 1978).
- [2] M. I. Mishchenko, L. D. Travis and A. A. Lacis, Multiple scattering of light by particles (Wave propagation and scattering in random media, (Cambridge University Press, 2006).
- [3] G. Mie. Beiträge zur optik trüber Medien kolloidaler Metalösungen, Ann Phys. **25**, 377-475 (1908).
- [4] P. Debye, Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigem Material, Ann Phys. **30**, 57-136 (1909).
- [5] C. F. Bohren and D. R. Huffman, Absorption and scattering of light by small particles (Wiley, 1983).
- [6] George B. Arfken and Hans J. Weber, Mathematical Methods for Physicists (Academic Press, 2005)
- [7] Born and Wolf, Principles of Optics. 7th edition (Cambridge University Press, 2003)

- [8] E. T. Whittaker, A History of the Theories of Aether and Electricity: Part I, the Classical Theories & Part II, the Modern Theories (History of Modern Physics, 1800-1950)
- [9] George M. Hale and Marvin R. Query Optical Constants of Water in the 200-nm to 200- μ m Wavelength Region. Applied Optics, **12-3**, 555-563 (1973)
- [10] P.B. Johnson and R.W. Christy. Optical constants of the noble metals, Phys. Rev. B **6**, 4370-4379 (1972)
- [11] William H. Press, Brian P. Flannery, Numerical Recipes (Cambridge University Press, 1987)
- [12] Leonard Eyges, The Classical Electromagnetic Field (Dover, 1980)

Apéndice A

Demostración de función generadora

Trabajando la componente i -ésima solamente

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M}|_i = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} M_i + k^2 M_i = 0$$

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\psi \mathbf{C})$$

$$M_i = \epsilon_{ilm} \frac{\partial}{\partial x_l} (\psi C_m)$$

por ser $\mathbf{C}$ un vector constante sus derivadas son cero entonces tenemos:

$$M_i = \epsilon_{ilm} C_m \frac{\partial \psi}{\partial x_l}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} M_i + k^2 M_i &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + k^2 \right) \epsilon_{ilm} C_m \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} + k^2 \right) \epsilon_{ilm} C_m \psi \\
&= \epsilon_{ilm} \frac{\partial}{\partial x_l} [(\nabla_j \nabla_j \psi + k^2 \psi) C_m] \\
&= \epsilon_{ilm} \frac{\partial}{\partial x_l} [(\nabla^2 \psi + k^2 \psi) C_m] \\
&= \nabla \times [(\nabla^2 \psi + k^2 \psi) \mathbf{C}] |_i
\end{aligned}$$

Apéndice B

Energía en la frontera

Consideremos una superficie A con un vector normal $\hat{n}$, la cual separa una region 1 y 2 (Figura B).

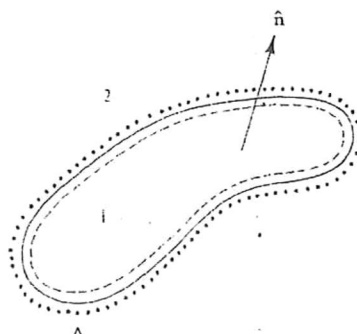


Figura B.1: Superficie cerrada separando regiones 1 y 2

El cambio al cual la energía electromagnética es transferida a través de una superficie cerrada cerca de A (2.35), en la region 1 es:

$$\int_A \mathbf{S}_1 \cdot \hat{n} dA = \int_A \hat{n} \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1) dA. \quad (\text{B.1})$$

Similarmente, el cambio de energía electromagnética a través de una superficie

cerrada cerca de A en a region 2 es:

$$\int_A \mathbf{S}_2 \cdot \hat{n} dA = \int_A \hat{n} \cdot (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2) dA. \quad (\text{B.2})$$

Si las condiciones de frontera son impuestas (Ecs. 2.40-2.41), entonces $\mathbf{E}_2 \times \hat{n} = \mathbf{E}_1 \times \hat{n}$, $\mathbf{H}_2 \times \hat{n} = \mathbf{H}_1 \times \hat{n}$, y las integrales (B.1) y (B.2) pueden ser reescritas:

$$\int_A \mathbf{S}_1 \cdot \hat{n} dA = \int_A \mathbf{H}_1 \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}_1) dA = \int_A \mathbf{H}_1 \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}_2) dA,$$

$$\int_A \mathbf{S}_2 \cdot \hat{n} dA = \int_A \mathbf{E}_2 \cdot (\mathbf{H}_2 \times \hat{n}) dA = \int_A \mathbf{H}_1 \cdot (\hat{n} \times \mathbf{E}_2) dA,$$

Por lo tanto no hay fuentes ni sumideros de la energía electromagnética en A :

$$\int_A \mathbf{S}_1 \cdot \hat{n} dA = \int_A \mathbf{S}_2 \cdot \hat{n} dA.$$

Entonces el requerimiento que la componente tangencial de el campo electromagnético sea continua a través de la superficie es suficiente condición para la conservación de energía de dicha superficie.

Apéndice C

Helmholtz en coordenadas cilíndricas

En el siguiente apéndice se resolverá la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas (4.8) por el método de separación de variables. La ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi = 0. \quad (\text{C.1})$$

Por el método de separación de variables proponemos que Ψ sea de la forma:

$$\Psi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z),$$

sustituyendo en (4.8) se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) \Phi(\phi) Z(z) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} R(\rho) Z(z) + \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} R(\rho) \Phi(\phi) + k^2 R(\rho) \Phi(\phi) Z(z) = 0, \quad (\text{C.2})$$

dividiendo entre $R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ y despejando $R(\rho)$ y $\Phi(\phi)$:

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right)}{R(\rho)} + \frac{\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2}}{\Phi(\phi)} + k^2 = - \frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)}. \quad (\text{C.3})$$

Como r , ϕ y z son variables independientes la única forma que se cumpla (C.3) es que ambos lados de la igualdad sean igual a una constante (*constante de separación*) digamos h^2 , es decir:

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right)}{R(\rho)} + \frac{\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2}}{\Phi(\phi)} + k^2 = h^2 = - \frac{\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)}. \quad (\text{C.4})$$

Separando ambas ecuaciones, se obtiene para la parte en z

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + Z(z)h^2 = 0, \quad (\text{C.5})$$

que es la conocida ecuación diferencial de euler cuya solución es de la forma $Z(z) = e^{ihz} + e^{-ihz}$.

Para la parte de ρ y ϕ se obtiene:

$$\frac{\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right)}{R(\rho)} + \frac{\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2}}{\Phi(\phi)} + \rho(k^2 - h^2) = 0. \quad (\text{C.6})$$

proponiendo el cambio de variable $u = \rho\sqrt{k^2 - h^2}$ y proponiendo otra constante

de separación (n), la ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{u \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial R(u)}{\partial u} \right)}{R(u)} + u^2 = n^2 = - \frac{\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2}}{\Phi(\phi)}. \quad (\text{C.7})$$

De aquí obtenemos otras dos ecuaciones:

$$\frac{\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2}}{\Phi(\phi)} + n^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (\text{C.8})$$

, cuya solución también es de la forma $\Phi(\phi) = e^{in\phi} + e^{-in\phi}$.

Para la parte radial la ecuación es:

$$u \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial R(u)}{\partial u} \right) + (u^2 - n^2) R(u) = 0, \quad (\text{C.9})$$

esta ecuación es la ecuación diferencial de Bessel, cuyas soluciones independientes son las funciones de Bessel de primera y segunda especie, J_n y Y_n de orden entero n .

Finalmente juntando las soluciones ρ, ϕ y z obtenemos:

$$\Psi_n(\rho, \phi, z) = Z_n(u) e^{in\phi} e^{ihz}, \quad (\text{C.10})$$

donde $u = \rho \sqrt{k^2 - h^2}$, $n = 0, +/ - 1, \dots$, h sin restricciones y Z_n es una solución de la ecuación diferencial de Bessel.