



Universidad Autónoma de Baja California
Facultad de Ciencias

**El efecto de perturbaciones en la estructura orbital
de la barra logarítmica.**

Tesis profesional
que para obtener el título de
Físico
presenta:

Andrés Arámburo García.

Director de Tesis:
Dr. Luis Alberto Aguilar Chiu.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE CIENCIAS

**EL EFECTO DE PERTURBACIONES EN LA ESTRUCTURA ORBITAL DE LA BARRA
LOGARITMICA**

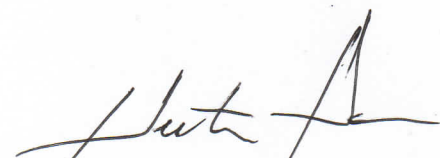
TESIS PROFESIONAL
QUE PRESENTA

ANDRES ARAMBURO GARCIA

APROBADOR POR:



DR. LUIS ALBERTO AGUILAR CHIU
PRESIDENTE DEL JURADO



DR. HECTOR ACEVES CAMPOS
SECRETARIO



DR. RAMON CARRILLO BASTOS
PRIMER VOCAL

A mi hermano.

To boldly go... 

Resumen de la tesis de **Andrés Arámburo García** presentada como requisito parcial para la obtención de la **Licenciatura en Física**. Ensenada, Baja California, México. Enero de 2018.

El efecto de perturbaciones en la estructura orbital de la barra logarítmica.

Resumen aprobado:



Dr Luis Aguilar Chiu

Se presenta una serie de experimentos numéricos, donde se explora los efectos de un perturbador gravitacional en las familias orbitales de 1,000 partículas prueba en un potencial logarítmico bidimensional. Se escoge este modelo porque a pesar de su simplicidad, este ha sido ampliamente usado para modelar galaxias elípticas y las barras centrales de las galaxias barradas de disco.

El objetivo de este trabajo es sentar las bases para un estudio de los efectos que tienen en una galaxia las perturbaciones causadas por miembros lejanos de su cúmulo galáctico.

Dentro del análisis realizado, se encuentra un estudio de la evolución energética de cada una de las partículas, la construcción de cortes Poincaré de cada experimento, así como la clasificación de familia orbital de las partículas.

En todos los experimentos realizados se observó un intercambio de órbitas en las familias, lo cual es un indicativo de una modificación en la estructura orbital del potencial. Por lo que se motiva a continuar estudiando los posibles efectos de perturbaciones gravitacionales débiles en modelos con niveles más altos de realismo.

Palabras clave: **Dinámica Galáctica, Potencial Logarítmico, Cortes de Poincaré, Órbitas, Simulación Numérica.**

Lista de Figuras

1.1	Diagrama Heliocéntrico presentado por Copérnico. Imagen descargada de http://bit.ly/2a4Y2eU	3
1.2	Ilustración del mapa de estrellas publicado en 1785 por Herschel. Imagen descargada de http://bit.ly/2qFDjrz	4
1.3	Ilustración del mapa de estrellas publicado en 1922 por Kapteyn. Imagen descargada de http://bit.ly/2CEjh23	5
1.4	Los principales participantes del "gran debate". Imágenes descargadas de http://bit.ly/2CIJltb y http://bit.ly/2m8JjUl	7
1.5	Clasificación galáctica presentada por Hubble. Imagen obtenida de E. Hubble, <i>The realm of the nebulae</i> (Dover Publications Inc, 1958), 45 .	8
1.6	Ejemplos de la clasificación de Hubble. Imágenes descargadas de http://bit.ly/2CGoZk8	9
1.7	Figura presentada en el catálogo, donde se aprecia la no uniformidad de las galaxias. Imagen obtenida de Shapley, H. y Ames, A. (1932). <i>A Survey of the External Galaxies Brighter than the Thirteenth Magnitude. Annals of Harvard College Observatory</i> , 88 (2): 47–76.	10
1.8	Mapa de algunos miembros del grupo local. Imagen descargada de http://bit.ly/2CGoTZU	11
1.9	Cúmulo Galáctico. Imagen descargada de http://bit.ly/2DbhWB9	13
1.10	Encuentro de galaxias. Imágenes descargadas de http://bit.ly/2CGoZk8 14	
1.11	En la curva azul, mostramos la disminución de la fuerza de marea de la vía láctea con respecto a la distancia. Mientras que la curva roja muestra como aumenta el número de galaxias con la distancia.	15
2.1	a) Fuerza tipo delta, donde la perturbación tiene una amplitud de $3N$ y tiempo de $0.5s$, con un área de 10.03 . b) Perturbación con la misma área pero aplicada en un intervalo de tiempo de $63s$	18
2.2	Soluciones para un oscilador armónico con $k=1$, Línea roja: Impulsiva, Cíen: adiabática y azul es el sistema sin perturbación.	19
2.3	Gráficas del oscilador armónico en el espacio fase.	20
2.4	Sistema Sol-Tierra con reducción de masa distinto ritmo.	21

2.5	Caja con N partículas interactuando gravitacionalmente.	23
2.6	Régimen colisional.	24
2.7	Marco de referencia, de una colisión entre estrellas.	25
2.8	Potencial gravitatorio y sus respectivas equipotenciales, con diferente número de partículas.	29
2.9	Restricciones.	31
2.10	a) Se observa la restricción de la órbita por la intersección de la energía(azul) y el momento angular (amarillo) b) Toroide obtenido al rotar en θ la restricción.	32
2.11	Curva de velocidad cero en el plano $v_x - x$	33
2.12		34
2.13	Toroide formado por $T = \{J_i \times J_j\}$	35
2.14	Toros con distinta razón de frecuencias $\Omega_i:\Omega_j$	36
2.15		36
2.16	Toroides concentricos.	37
2.17	Plano cortando la "cebolla" creada por la restricción de energía. . . .	39
2.18	Recorrido de una órbita, tanto en el espacio fase, como su proyección en el espacio de configuración.	40
2.19	De forma análoga podemos fijar el plano en X y repetir el procedimiento para general el corte complementario que se aprecia en la figura (b)	41
2.20	Corte transversal donde se observan órbitas regulares e irregulares.El mar irregular se subrayó con rojo.	42
2.21	Órbitas cercanas en coordenadas del espacio fase, integradas en tiempos 100,350 y 600. El primer renglón representa una órbita regular, el segundo irregular y la tercera regular	43
2.22	Equipotenciales con distintas q.	45
2.23	Campo de fuerzas y equipotenciales de la Barra	45
2.24	$Q = 0.7, V_0 = 1, R_c = 1, R = \frac{1}{10R_c}$	47
2.25	Ejemplos de órbitas <i>box</i>	49
2.26	Ejemplos de órbitas <i>loops</i>	50
2.27	La fuerza de marea recibe su nombre precisamente por que es uno de los factores que causan las mareas oceánicas. Se observa una representación físicamente correcta de la fuerza de marea causada por la luna en la tierra.	51
2.28	Exactitud y Precisión.	58
3.1	Marco de Referencia.	63
3.2	Ejemplo de condiciones iniciales.	64
3.3	Y vs Energia	65
3.4	Razón entre la fuerza del perturbador y la fuerza de la barra vs distancia.	66

3.5	Razón entre la fuerza del perturbador y la fuerza de la barra vs parámetro de impacto.	67
3.6	Diferencia entre la Energía inicial y la energía actual durante el recorrido del perturbador. Con $F = 10\%$, $B = 12$, $M_p = 3.75$, $V_c = 2.5$. . .	69
3.7	Calentamiento.	70
3.8	Enfriamiento.	70
3.9	Poca absorción energética.	71
3.10	Calentamiento y enfriamiento.	71
3.11	Factor de Calentamiento en los experimentos realizados.	73
3.12	Corte de Poincaré inicial.	74
3.13	Corte de Poincaré del caso con menor calentamiento.	75
3.14	Corte de Poincaré del caso con menor calentamiento.	76
B.1	Experimento 211.	94
B.2	Experimento 212.	95
B.3	Experimento 213.	96
B.4	Experimento 221.	97
B.5	Experimento 222.	98
B.6	Experimento 223.	99
B.7	Experimento 231.	100
B.8	Experimento 232.	101
B.9	Experimento 233.	102
B.10	Experimento 331.	103
B.11	Experimento 312.	104
B.12	Experimento 313.	105
B.13	Experimento 321.	106
B.14	Experimento 322.	107
B.15	Experimento 323.	108
B.16	Experimento 331.	109
B.17	Experimento 332.	110
B.18	Experimento 333.	111

Contenido

Resumen en Español	iii
Lista de Figuras	iv
1 Introducción	1
1.1 El universo de galaxias.	1
1.2 El efecto de colisiones entre galaxias.	13
2 Marco Teórico	16
2.1 Tiempo dinámico.	16
2.2 Sistemas colisionales y nocolisionales.	22
2.3 Órbitas	28
2.3.1 Órbitas vs trayectorias	28
2.3.2 Integrales de movimiento.	30
2.3.3 Curva de velocidad cero.	32
2.3.4 Órbitas regulares e irregulares	33
2.3.5 Cortes de Poincaré	38
2.4 La barra logarítmica	44
2.5 La fuerza de marea	51
2.6 Cuestiones numéricas	54
2.6.1 El mundo aproximado	54
2.6.2 Un mundo de precisión finita	55
2.6.2.1 Diferencias finitas.	56
2.6.3 Precisión vs Exactitud.	57
2.6.4 Integrador en este trabajo	58
3 Resultados y Discusión	62
3.1 Simulación galaxia-galaxia	62
3.2 Resultados.	68
4 Conclusiones	82

Referencias	85
Apéndice A Repaso de mecánica de Hamilton	87
A.I Ecuaciones de Hamilton.	87
A.II Teorema de Noether	89
A.III Análisis de Floquet	90
Apéndice B Experimentos	92
B.I Nomenclatura de los experimentos	92
B.II Cortes de Poincaré de la Simulación	93

Capítulo 1

Introducción

1.1 El universo de galaxias.

El inicio del siglo XX fue un periodo revolucionario para la física y, por tanto, uno de grandes avances en nuestro entendimiento del universo. Por una parte, el desarrollo en la teoría cuántica y relativista, cambiaron nuestra perspectiva sobre el mundo natural. De forma paralela, comenzó un debate sobre una de las preguntas ancestrales de la humanidad: el lugar del Humano en el Universo.

La capacidad que tenemos para contestar preguntas relacionadas al universo está siempre limitada por nuestros métodos de observación y obtención de datos.

Por lo que nuestras primeras nociones de la estructura del universo estuvieron basadas en observaciones realizadas "a ojo". Aún con esta limitante, los primeros científicos pudieron llegar a conclusiones importantes.

Por ejemplo, los antiguos griegos lograron determinar que la tierra era esférica, utilizando un Eclipse Lunar observaron la sombra circular proyectada de la Tierra sobre

la Luna. Así mismo, diversas civilizaciones antiguas ya tenían noción de que existía distinciones entre los objetos celestes. Primero los mas evidentes, el Sol y la Luna; y conforme empezaron a observar los movimientos del resto de las luces del cielo, en particular unos objetos que, debido a su movimiento errático con respecto a los demás cuerpos, los griegos los llamaron 'planētēs' que significa: vagabundo, errante.

Adicionalmente, Eratóstenes realizó una medición con un error de 10% del diámetro terrestre.

Bajo estos paradigmas, se tenía un modelo geocéntrico del universo, con un centro de la Tierra y por lo tanto del universo, ubicado a $\approx 7,000\text{km}$.

Posteriormente, en 1543, Nicolás Copérnico propuso en su libro "*De revolutionibus orbium coelestium*" (Sobre los giros de los orbes celestes) una teoría heliocéntrica, es decir colocaba al Sol como el centro del universo.

Este cambio hizo más comprehensivo el movimiento errante de los Planetas. Además aquí se expande el tamaño del universo que va más allá que la distancia del planeta más lejano, si no, que presenta como frontera lo que Copérnico llamó *Stellarum Fixarum fphæra immobilis* (Estrellas inmóviles en esfera fija), después bautizada como bóveda celeste.

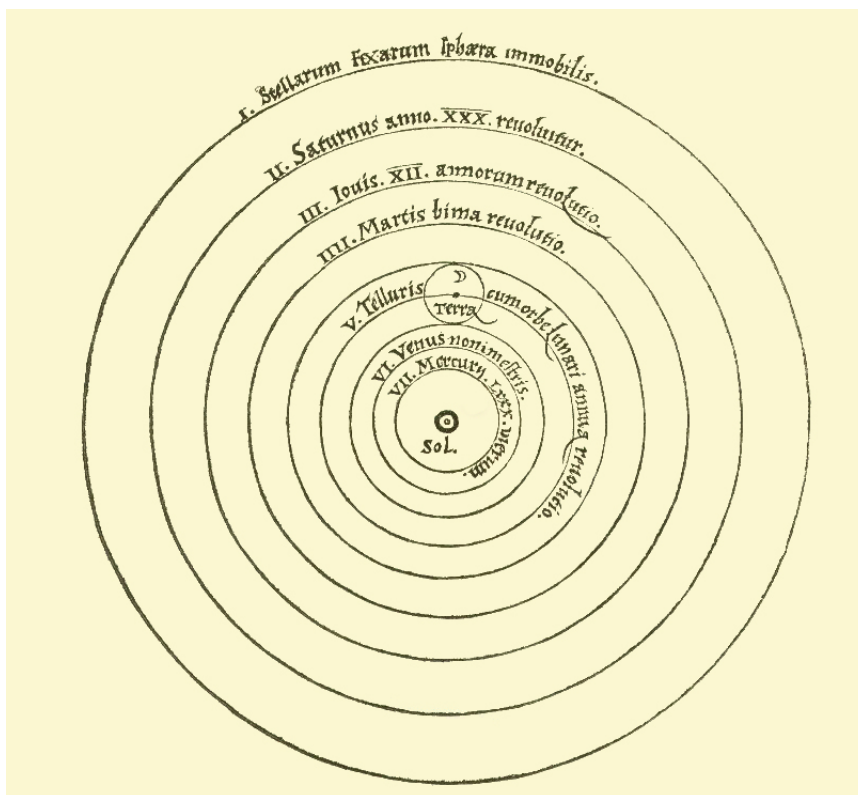


Figura 1.1: Diagrama Heliocéntrico presentado por Copérnico. Imagen descargada de <http://bit.ly/2a4Y2eU>

En 1610, las ideas heliocéntricas de Copérnico fueron apoyadas ampliamente por Galileo Galilei, en su trabajo *Sidereus Nuncius* en donde publica una de las primeras observaciones astronómicas hechas por un telescopio.

Galileo, a través su telescopio, aporta a la resolución de otra inquietud sobre el cielo: la Vía Láctea. Había muchas especulaciones sobre cuál era la naturaleza de esa franja rojiza que atraviesa al cielo nocturno. Él observó que en ella había un gran número de estrellas de brillo tenue, lo que sembró la idea de que quizá estas, se encontraban a distancias muy grandes.

A finales del siglo XVIII, Immanuel Kant, inspirado por el trabajo del astrónomo

ingles Thomas Wright, sugirió que nuestro sistema solar formaba parte de otra estructura similar a este. Además, planteó que los cuerpos celestes llamados "nebulosas", se trataban de "Universos Islas", es decir estructuras distantes y ajenas a la que formaba parte el Sistema Solar. Aún siendo especulaciones asombrosas, Kant no las planteó apoyado de datos científicos, sin embargo esto sirvió de inspiración para trabajos futuros.

Contemporáneo a Kant un músico de formación, William Herschel, había generado prestigio dentro de la astronomía al descubrir el planeta Urano. Y se decidió a elaborar el primer mapa cuantitativo del universo. Para esto construyó el telescopio más grande de su tiempo, con un espejo de 1.2 m, y se puso a contar estrellas. Su metodología se basaba en la idea de que todas las estrellas tienen el mismo brillo intrínseco que el Sol. Bajo esta suposición (la cual es incorrecta), podía establecer una relación entre brillo y distancia. Es decir, estrellas cercanas tendrían mas brillo que las lejanas.

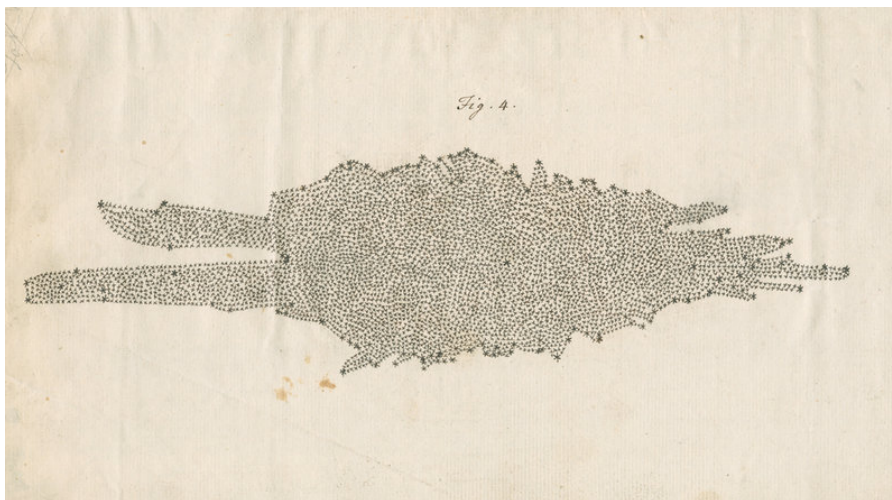


Figura 1.2: Ilustración del mapa de estrellas publicado en 1785 por Herschel. Imagen descargada de <http://bit.ly/2qFDjrz>

Un estudio más ambicioso tomaría lugar a principios del siglo XX donde el astrónomo Jacobus Kapteyn, con ayuda de astrónomos de distintas partes del mundo, reunió placas fotográficas de muestreos del cielo. Al igual que William Herschel, estimaría la distancia de las estrellas basado en su brillo aparente pero, además, lo complementaría con un estudio de las velocidades propias de las estrellas. Con esto, pretendía lograr un mapa con mayor precisión que Herschel. Sin embargo, cometió el mismo error de asumir que no existía nada entre las estrellas que podía causar extinción en su luz. Esto causó una mala estimación del brillo y por tanto, distancias incorrectas de las estrellas.

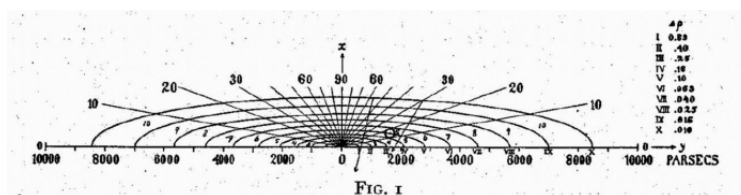


Figura 1.3: Ilustración del mapa de estrellas publicado en 1922 por Kapteyn. Imagen descargada de <http://bit.ly/2CEjh23>

En este punto se acumuló evidencia que sugería que las nebulosas, efectivamente, eran estructuras ajenas a la nuestra. Además, había mucha discusión sobre el tamaño de la galaxia, por lo que no había consenso en la comunidad astronómica sobre el tamaño y nuestro lugar en el universo.

En particular, dos astrónomos Harlow Shapley y Heber Curtis, tenían posturas opuestas.

La postura de Shapley proponía una galaxia de 100 Kilopársecs¹ y colocaba al Sol a unos 20 kilopársecs del centro de la galaxia. Esta propuesta, siendo 10 veces más grande que la estimación hecha por Kaptey, tenía como consecuencia que nuestra galaxia era el universo, y las nebulosas eran objetos gaseosos contenidos dentro de

¹Un Pársec es una unidad de longitud equivalente a $3,0857 \times 10^{16} \text{m}$

el mismo.

Curtis, siendo uno de los líderes en el estudio de las nebulosas espirales, estaba convencido que éstas eran objetos ajenos a nuestra galaxia, y que el tamaño de la galaxia era el propuesto por el modelo de Kapteyn. Por esta razón, él fue uno de los principales críticos del modelo presentado por Shapley.

En 1920, en la Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos (NAS:National Academy of Sciences), Curtis y Shapley se reunieron para tener lo que en la comunidad astronómica se conoce como "El gran debate".

Durante el debate se cubrieron dos principales temas :

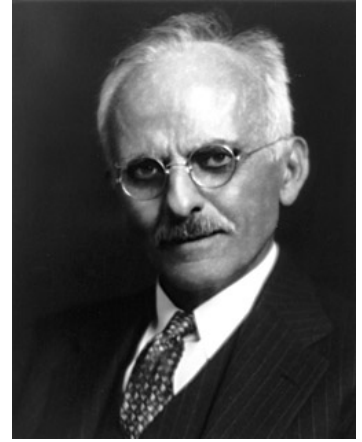
- El tamaño de nuestra galaxia.
- Las distancias de las nebulosas espirales y si estas son o no objetos extragalácticos.

Respecto al primer punto, Curtis atacó la postura de Shapley, criticando principalmente aspectos técnicos de como él determinó las distancias que presentaba en su modelo. En retrospectiva, los argumentos que presentó Curtis, no eran consistentes y, las posturas de Shapley, en esta parte del debate, eran básicamente correctas.

Con respecto a la segunda parte del debate. Curtis presentó su propuesta en donde las nebulosas espirales eran galaxias como la nuestra, con distancias de entre 130 Kpc, para la nebulosa de Andromeda y de hasta 3000 Kpc para los objetos más distantes. A esta distancia, él presentaba que Andromeda tendría un tamaño comparable al presentado en el modelo de Kapteyn.



(a) Harlow Shapley.



(b) Heber Curtis.

Figura 1.4: Los principales participantes del "gran debate". Imágenes descargadas de <http://bit.ly/2CIJltb> y <http://bit.ly/2m8JjUl>

El argumento de Shapley era que, considerando el tamaño de 100Kpc y que si la nebulosa de Andromera fuera del mismo tamaño que la nuestra, tendría que estar muy alejada y sus novas ² deberían ser mucho más brillantes que las que están dentro de nuestra Galaxia.

En 1923, Edwin Hubble, con sus trabajos realizados en el observatorio Mount Wilson. El observó estrellas cefeidas variable³ en Andromeda, esto ayudó a medir con precisión su distancia, colocándola a 300 Kpc, una distancia implicaba que Andromeda era un objeto extra-galáctico. Con esto, el debate respecto a las nebulosas espirales terminó.(Mihalas y Binney, 1968)

Hubble avanzó con su estudio de las ahora confirmadas galaxias, publicó una serie de artículos (Hubble, 1926),(Hubble, 1926),(Hubble, 1929) donde introduce una

²Una nova es un fenómeno astronómico en sistemas binarios donde una de las estrellas incrementa su muchísimo su brillo. Este fenómeno fue utilizado como indicativos de distancia.

³Este tipo de estrellas oscila su brillo y otras variables físicas con un periodo y amplitud regulares, esto las hace ideales para utilizarlas para medir distancias astronómicas.

clasificación de galaxias, el cual las divide en 3 clases:

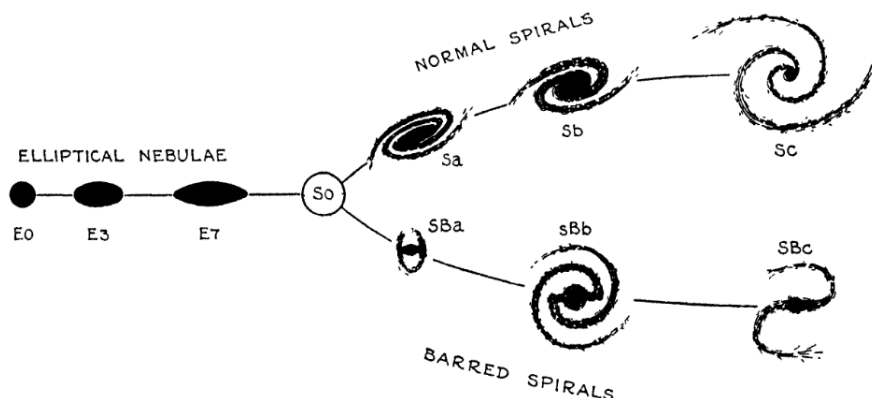


Figura 1.5: Clasificación galáctica presentada por Hubble. Imagen obtenida de E. Hubble, *The realm of the nebulae* (Dover Publications Inc, 1958), 45

- Elípticas: Tienen Distribuciones suaves de luz y parecen tener formas elípticas en placas fotográficas. Las denotó con una E y un número entero el cual representa su nivel de "elipsidad", 0 siendo muy redondas y 7 muy "aplanadas".
- Espirales: Estas presentan una gran concentración de estrellas en el centro, llamado bulbo, y de ahí están centrados unos brazos espirales. Su clasificación va de Sa-d, donde la letra indica que tan definidos están los brazos espirales.
- Espirales Barradas: Esta al igual que las galaxias espirales, poseen brazos y una concentración de estrellas central, sin embargo sus brazos dimanan de una barra central. Su notación es es Sba-bd, donde al igual que las anteriores, esto depende de la definición de los brazos espirales.

A continuación se muestran fotografías, con una muestra de galaxias que cumplen dentro de la clasificación de Hubble.



(a) E0.



(b) E3.



(c) E7.



(d) Sa.



(e) Sb.



(f) Sc.



(g) SBa.



(h) SBb.



(i) SBc.

Figura 1.6: Ejemplos de la clasificación de Hubble. Imágenes descargadas de <http://bit.ly/2CGoZk8>

Una vez llegado a un consenso sobre que las nebulosas espirales eran galaxias, surgió la inquietud de ver si estas formaban parte de una estructura aun mayor.

Con ayuda de instrumentos más precisos para la medición de objetos astronómicos,

fue posible determinar las distancias con mayor exactitud de tanto objetos nuevos como cuerpos celestes ya localizados.

En 1932, Harlow Shapley y Adelaide Ames, presentaron el primer catálogo de galaxias (Shapley y Ames, 1932) que contemplaba el cielo del hemisferio sur y norte. Este consistía en 1249 objetos cada uno con la posición, brillo, tamaño y su clasificación de Hubble. Este catálogo, tuvo particular importancia por que mostraba que las galaxias no estaban distribuidas de forma uniforme, si no que había "cúmulos" de galaxias.

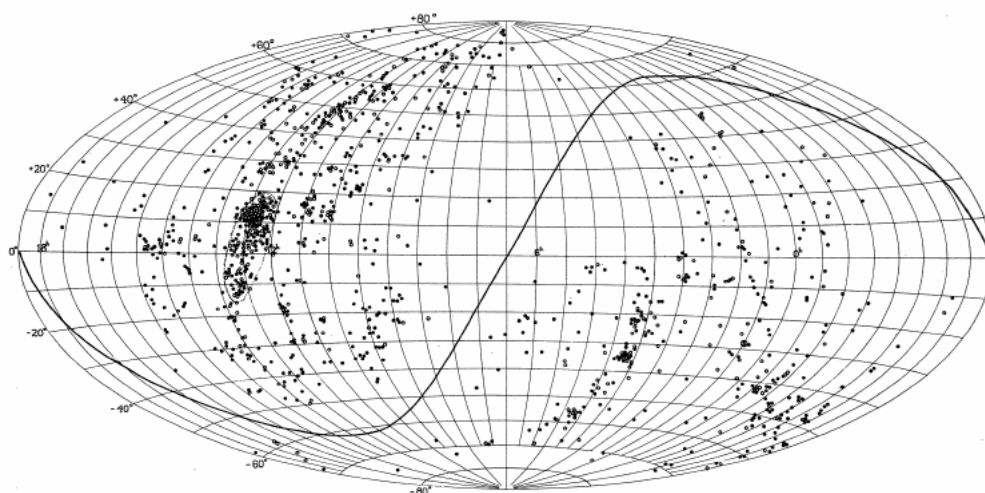


Figura 1.7: Figura presentada en el catálogo, donde se aprecia la no uniformidad de las galaxias. Imagen obtenida de Shapley, H. y Ames, A. (1932). *A Survey of the External Galaxies Brighter than the Thirteenth Magnitude*. *Annals of Harvard College Observatory*, **88**(2): 47–76.

Por su lado, en 1936 Hubble publicó su libro *The realm of the Nebulae*, donde condensa los descubrimientos que realizó en sus artículos pasados. Aquí él, entre muchas otras cosas, hace un análisis de los vecinos galácticos de la vía láctea. Y a su vez bautizó este conjunto de galaxias como *El grupo local*.

Este está formado por alrededor de 54 galaxias, las más masivas siendo la galaxia del triángulo (M33), Andrómeda y la Vía Láctea. (Hubble, 1936)

En una serie de publicaciones Gerald de Vaucoulers, presenta la idea de que el grupo local, forma parte de otra super estructura, que según sus estimaciones, formaría parte del cúmulo de virgo, es decir un cúmulo formado de cúmulos. El cual coincide con el consenso científico.(Tammann, 1985)

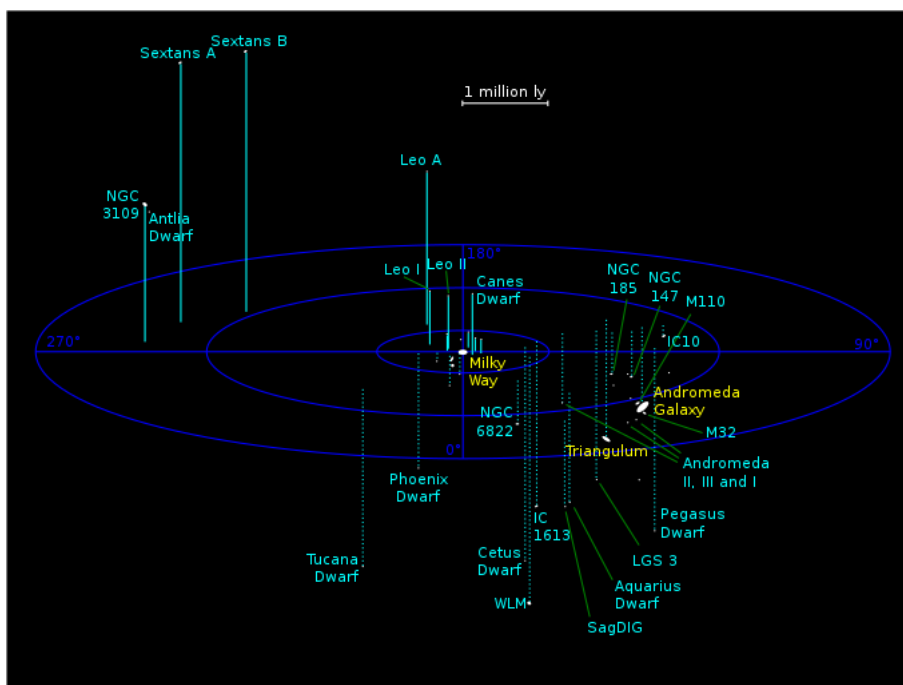


Figura 1.8: Mapa de algunos miembros del grupo local. Imagen descargada de <http://bit.ly/2CGoTZU>.

El siguiente gran compendio, que elevó de gran manera nuestra noción de la estructura del universo a gran escala es el catálogo presentado en 1958 por George Abell. En este trabajo, su enfoque no es de galaxias individuales sino ya la presentación de un compendio de 2,712 **cúmulos** de galaxias. Además refuerza que hay evidencia para pensar en cúmulos formados por cúmulos galácticos. Más tarde realizaría un muestreo del hemisferio sur, completando su catálogo ahora con 4,073 cúmulos galácticos.(Abell, 1958)

Adicionalmente, Abell presenta una serie de criterios que se deben de cumplir para llamar a un grupo de galaxias un cúmulo galáctico.

- *Criterio de Abundancia:* Establece que un cúmulo debe de tener al menos 50 galaxias las cuales deben tener un límite inferior de brillo, no menor a 2 magnitudes del tercer miembro más brillante.
- *Criterio de compactibilidad:* Aquí establece, que los miembros de grupo deben estar dentro de un radio r . Esta r puede ser arbitrariamente grande mientras se aplique para todos los cúmulos.
- *Criterio de separación:* Este nos indica que el cúmulo debe de estar lo suficientemente separado para que los miembros de este no formen parte de otro.

Esta serie de trabajos, dejó claro que las galaxias viven aglomeradas esto, como veremos en la siguiente sección, esto tiene consecuencias importantes para este trabajo de tesis.

1.2 El efecto de colisiones entre galaxias.

Como vimos en la sección anterior, sabemos que las galaxias forman parte de otro sistema llamado cúmulo galáctico, y en estos ellas interaccionan gravitacionalmente.



Figura 1.9: Cúmulo Galáctico. Imagen descargada de <http://bit.ly/2DbhWB9>.

Los encuentros gravitacionales entre ellas es significativo, puesto como se puede apreciar en la figura 1.8, la separación entre ellas no es mucho mayor que su tamaño.

Estos encuentros galácticos podemos generalizarlos a dos tipos:

- *Encuentro cercano:* Aquí un número pequeño de galaxias interaccionan, pero al estar muy cerca entre ellas, su fuerza gravitacional tiene mucho impacto.
- *Encuentro lejano:* Este contempla las perturbaciones causadas por galaxias lejanas, si bien la contribución individual de estas es mínima, el número de ellas es muy grande.



(a) Cúmulo de Abell 2744.



(b) Galaxias NGC 5257 y NGC 5258.

Figura 1.10: Encuentro de galaxias. Imágenes descargadas de <http://bit.ly/2CGoZk8>

Históricamente la comunidad astronómica ha concentrado los estudios de encuentro cercano. Y como se aprecia en la figura 1.9(b) su efecto es contundente y evidente. El efecto de los encuentros lejanos, han sido poco estudiados, debido a que en el reino de las galaxias, la fuerza de marea es la mas influyente en las perturbaciones entre ellas. Esta al ser una forma diferencial de la fuerza de gravedad, su influencia disminuye mucho más rápido con la distancia.

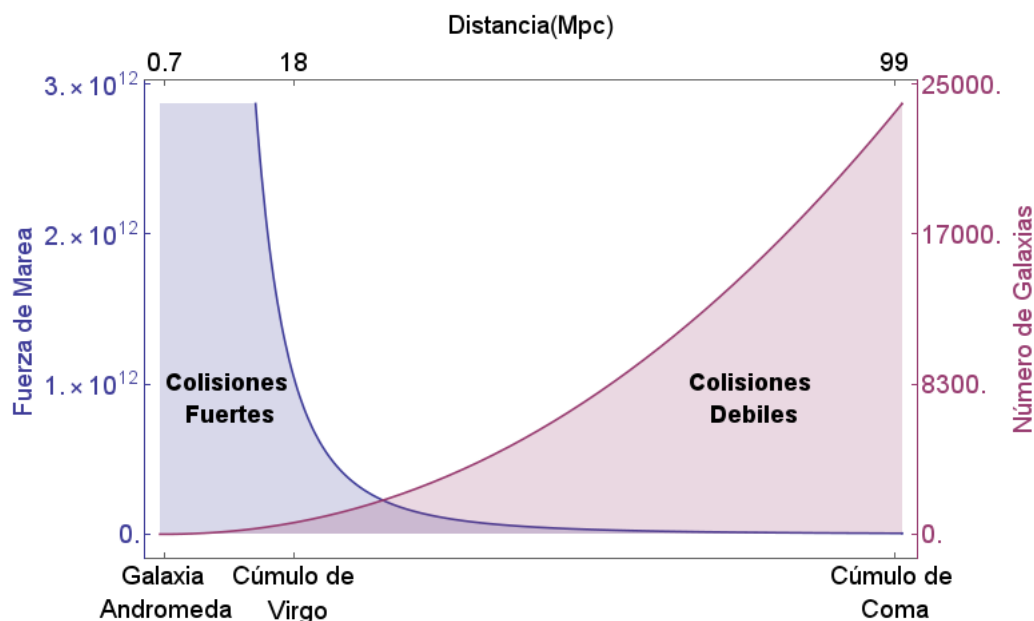


Figura 1.11: En la curva azul, mostramos la disminución de la fuerza de marea de la vía láctea con respecto a la distancia. Mientras que la curva roja muestra como aumenta el número de galaxias con la distancia.

Sin embargo, la naturaleza de los encuentros lejanos nos incita a preguntarnos ¿Muchas perturbaciones pequeñas pueden contribuir de forma significativa en la evolución de una galaxia?

En esta pregunta se encuentra la motivación de este trabajo, abordamos este problema proponiendo un modelo el cual si bien simple, nos permitirá tener un estudio disectivo sobre el problema. Permittiéndonos generar entendimiento y simientos para la realización de trabajos más sofisticados.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Tiempo dinámico.

La física brinda un gigantesco número de modelos, estos están intencionados para generar entendimiento sobre el universo.

Estos modelos nos permiten describir desde colisiones entre partículas subatómicas, hasta violentas interacciones gravitacionales en un grupo galáctico. Estos sistemas poseen distintas características y fuerzas que rigen su comportamiento.

Sin embargo cuando queremos analizar la *dinámica* de estos sistemas, todos se basan en un mismo principio básico: El estado del sistema en un tiempo inicial t_i y su evolución a un tiempo final t_f .

La particularidad que nos brinda la escala del fenómeno es, cual es el tiempo comprendido entre t_i y t_f , para poder extraer información relevante del sistema.

Mientras la interacción de partículas subatómicas se encuentran en un orden menor de $1e-23$ segundos, al Sol le toma alrededor de $2.26e8$ años completar su recor-

rido por la galaxia. Este tiempo que es adecuado para el sistema es conocido como *tiempo dinámico* t_{dim} .

Si queremos aplicar una perturbación al sistema, el tiempo dinámico nos sirve para tener una noción de como esta perturbación afectará al sistema. Dos perturbaciones de misma magnitud pero, que se aplican durante un intervalo de tiempo distinto, afectarán de manera diferente al sistema.

Bajo esta lógica se establecen dos perturbaciones limite :

- Perturbaciones *impulsivas* $t_{\text{perturbación}} \ll t_{\text{dim}}$
- Perturbaciones *adiabáticas* $t_{\text{perturbación}} \gg t_{\text{dim}}$

Para ejemplificar estos limites, utilizaremos uno de los modelos más útiles y versátiles para la física: El Oscilador Armónico.

Perturbaremos al oscilador armónico por una fuerza externa dependiente del tiempo.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t) \quad (2.1)$$

Aplicaremos dos fuerzas externas, en el extremo adiabático y en el impulsivo. En la figura 2.1, se observa las distintas perturbaciones aplicadas al sistema. Recordemos que la perturbación de un sistema está dada por el área bajo la curva de la función $F(t)$.

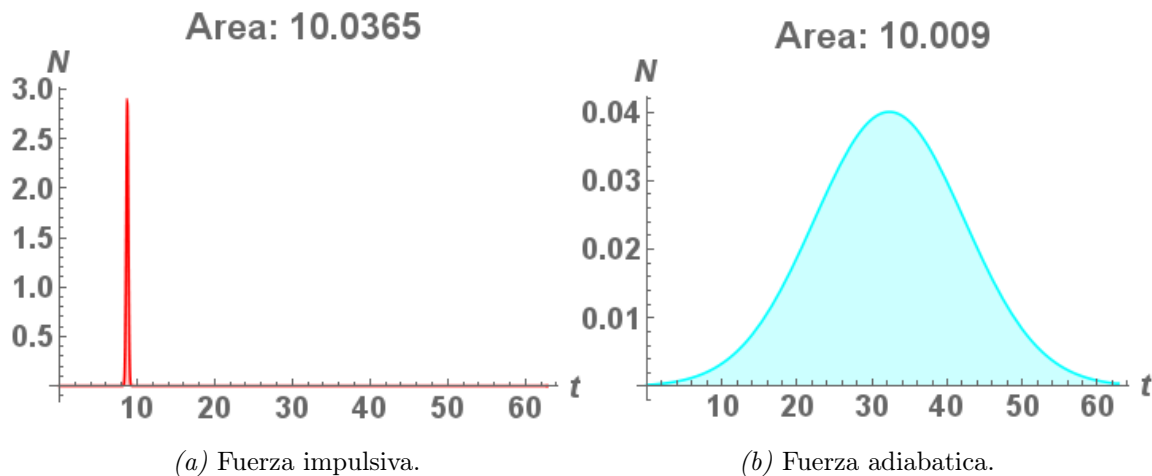


Figura 2.1: a) Fuerza tipo delta, donde la perturbación tiene una amplitud de 3N y tiempo de 0.5s, con un área de 10.03. b) Perturbación con la misma área pero aplicada en un intervalo de tiempo de 63s

Ahora, aun siendo las perturbaciones comparten la misma magnitud de fuerza, tienen un efecto muy distinto sobre el sistema. Tal y como se observa en las figuras 2.2 y 2.3.

Se observa como la perturbación adiabática oscila muy cerca de la solución no perturbada, mientras que la solución impulsiva su amplitud crece mucho, tanto en posición como velocidad, pero una vez inyectada esta, sus oscilaciones permanecen constantes.

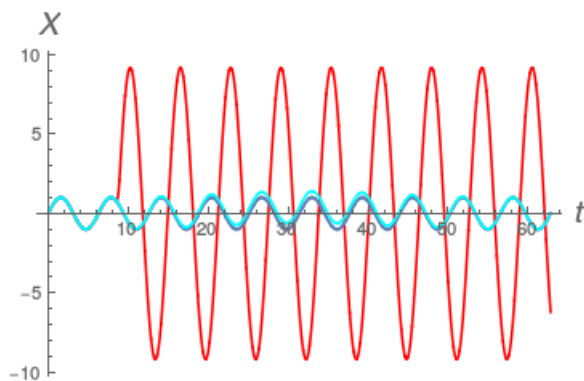
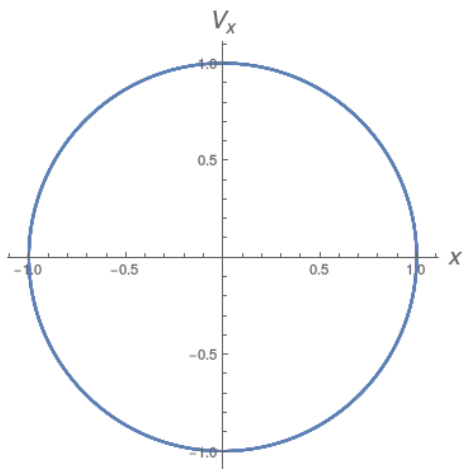
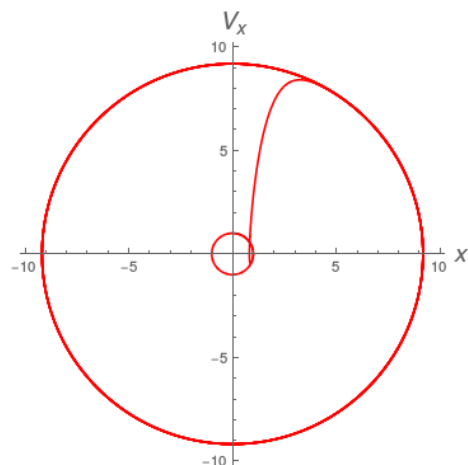


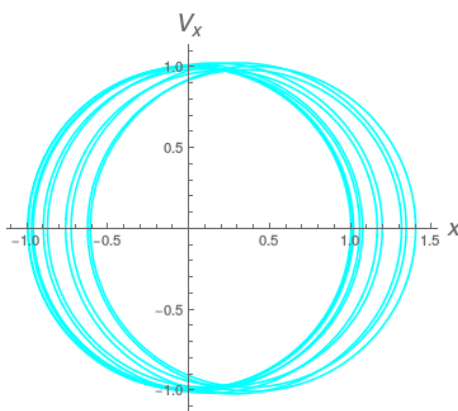
Figura 2.2: Soluciones para un oscilador armónico con $k=1$, Línea roja: Impulsiva, Cíán: adiabática y azul es el sistema sin perturbación.



(a) Sistema sin fuerza externa.



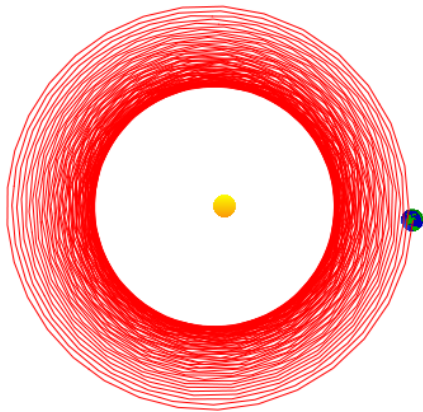
(b) Fuerza impulsiva.



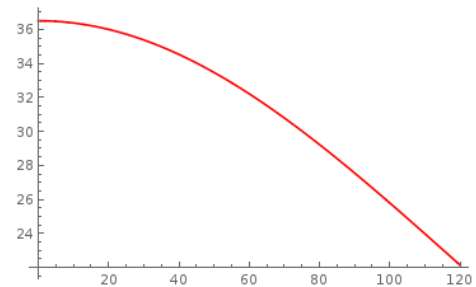
(c) Fuerza adiabática.

Figura 2.3: Gráficas del oscilador armónico en el espacio fase.

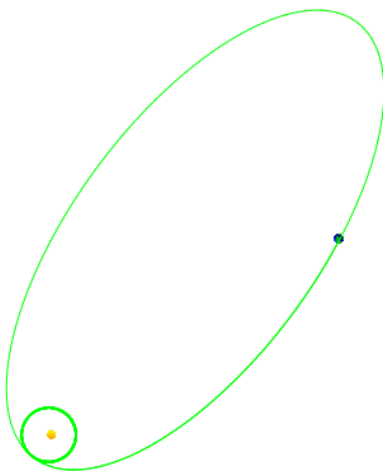
A continuación se presenta otro ejemplo. En este caso tenemos el sistema gravitatorio Sol-Tierra. Presentamos de nuevo un caso adiabático y uno impulsivo. En ambas pruebas se reduce la masa del Sol a la misma magnitud, en consecuencia la órbita terrestre crece. Sin embargo el ritmo en el que se reduce es radicalmente distinto.



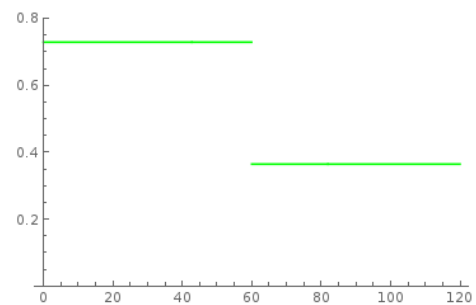
(a) Sistema adiabatico.



(b) Disminución Paulatina.



(c) Sistema Impulsivo.



(d) Disminución abrupta.

Figura 2.4: Sistema Sol-Tierra con reducción de masa distinto ritmo.

En el primer caso, con una disminución de masa muy suave, vemos que el radio orbital va creciendo poco a poco. Por otro lado cuando reducimos la masa con una función tipo escalón, realiza varios periodos constantes, y radicalmente se modifica a una órbita mucho mayor y definida.

2.2 Sistemas colisionales y nocolisionales.

Cuando tenemos un sistema como una galaxia que contiene un número gigantesco de partículas, no es siempre práctico realizar un análisis partícula por partícula para describirla. Si no que, al igual que en otros sistemas de muchas partículas, nos apoyamos de las herramientas que nos da la mecánica estadística.

Sin embargo hay una distinción importante entre una galaxia y por ejemplo un gas. Esta diferencia radica en las fuerzas de interacción de las partículas contenidas en cada sistema. En el caso del gas la interacción de dos moléculas, es pequeña a menos de que estas se encuentren muy *cerca* e interactúen violenta y repulsivamente. En consecuencia, el gas estará caracterizado por moléculas que *colisionan* con aceleraciones abruptas durante sus encuentros.

Por otro lado las partículas en una galaxia están regidas por la fuerza gravitacional.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \quad (2.2)$$

Ahora analicemos la situación que se muestra en la figura 2.5

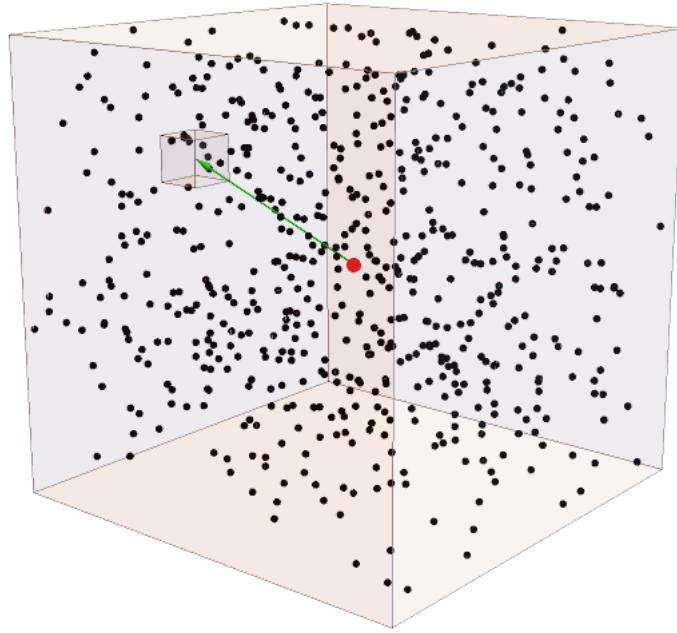


Figura 2.5: Caja con N partículas interactuando gravitacionalmente.

La fuerza que ejercen las N partículas dentro de la caja, a la partícula del centro, estará dado por:

$$F \propto \frac{N}{r^2} \quad (2.3)$$

Nos interesa ver las fluctuaciones de la fuerza

$$\delta F \propto \frac{\delta N}{r^2} \quad (2.4)$$

De resultados de mecánica estadística sabemos que

$$\delta N \propto \sqrt{n} \quad (2.5)$$

Si F es constante entonces

$$N \propto r^2 \Rightarrow \delta N \propto r \quad (2.6)$$

$$\Rightarrow \delta F \propto \frac{1}{r} \quad (2.7)$$

Esto es un resultado importante, ya que nos indica que las fluctuaciones de gravedad van como r^{-1} . Y esto nos crea una división clara, a distancias cortas tiene fluctuaciones de gran amplitud, a esta zona le llamaremos el régimen colisional y en el área donde la amplitud de las fluctuaciones son pequeñas el régimen no colisional.

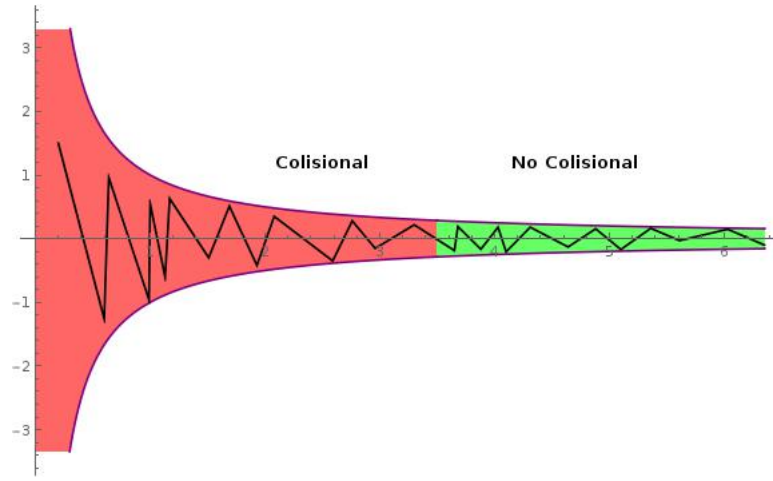


Figura 2.6: Régimen colisional.

Para tener una imagen más clara de la naturaleza de las colisiones en la galaxia, es necesario hacer un análisis más cuantitativo.

Pensemos en una estrella prueba y busquemos un estimado de cuanto varía su velocidad cuando, durante su trayectoria, se encuentra con otra estrella. La situación se muestra en la siguiente figura.

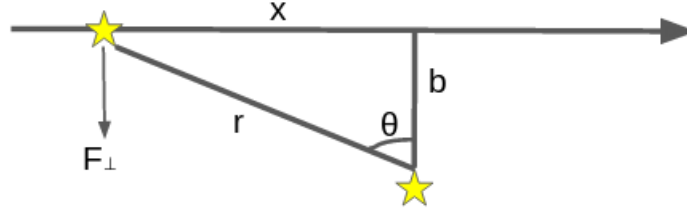


Figura 2.7: Marco de referencia, de una colisión entre estrellas.

Bajo el diagrama anterior tenemos que la fuerza perpendicular estará dada por.

$$F_{\perp} = \frac{Gm^2}{b^2 + x^2} \cos \theta = \frac{Gm^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (2.8)$$

Tenemos que

$$F = m\dot{v} \quad \Rightarrow \quad \delta v = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\perp} dt \quad (2.9)$$

De la ecuación 2.8

$$\delta v = \frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[1 + (vt/b)^2]^{3/2}} = \frac{Gm}{bv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(1 + s^2)^{3/2}} \overset{2}{=} \frac{2Gm}{bv} \quad (2.10)$$

Teniendo la δv que sufre por una estrella, la densidad de estrellas en la galaxia está dado por $\frac{N}{\pi R^2}$, donde N es el número de estrellas y R es el radio de la galaxia. Entonces durante su recorrido, en un rango de b a $b + db$, una estrella sufrirá

$$\delta n = \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b db \quad (2.11)$$

Cada uno de estos encuentros produce una perturbación δv , al ser esta una perturbación con dirección aleatoria, su promedio es cero, sin embargo la media cuadrada

estará definida por

$$\sum \delta v^2 = \delta v^2 \delta n = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2Nb}{R^2} b db \quad (2.12)$$

Integrando la ecuación anterior dentro de un intervalo $b_{\min}$ y $b_{\max}$.

$$\Delta v^2 \equiv \frac{8G^2 m^2 N}{v R^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{1}{b} db = \frac{8G^2 m^2 N}{v R^2} \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right) \quad (2.13)$$

$b_{\max}$ lo definimos como el radió de la galaxia R , y $b_{\min}$ cómo la distancia en la cual se produciría una deflexión a un ángulo de 90° , $b_{90^\circ} \approx \frac{Gm}{v^2}$.

La velocidad típica que tiene una estrella en la galaxia esta dada aproximadamente por

$$v^2 \approx \frac{GNm}{R} \quad (2.14)$$

Eliminando R utilizando nuestra definición de Δv^2 y v^2 .

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \approx \frac{8 \ln \frac{R}{b_{90^\circ}}}{N} \quad (2.15)$$

Si una estrella con velocidad v , completa varias veces su órbita, en cada uno de sus recorridos su velocidad cambiará cerca de Δv^2 , así que el número de recorridos n_{col} necesarios para cambiar su velocidad por un factor similar su velocidad original es de

$$n_{\text{col}} \simeq \frac{N}{8 \ln \frac{R}{b_{90^\circ}}} \quad (2.16)$$

Notamos que por la ecuación 2.14, $R/b_{90^\circ} \approx Rv^2/(Gm) \approx N$.

Lo anterior nos lleva a la definición de tiempo colisional t_{col} el cual lo definimos como $t_{\text{col}} = n_{\text{col}} t_{\text{din}}$, donde $t_{\text{din}} = R/v$, es el tiempo dinámico. El nivel de "colisionalidad"

de un sistema estará dado por la razón entre el tiempo colisional y el tiempo dinámico, es decir.

$$\frac{t_{\text{col}}}{t_{\text{din}}} \simeq \frac{8N}{\ln N}. \quad (2.17)$$

Lo relevante de esta relación es que la "colisionalidad" del sistema solo está dado por el número de partículas que lo conforman. Entre mas grande es el resultado de esa fracción menos importante son las colisiones del sistema.

Conociendo el tiempo colisional y dinámico de un sistema, así como su número de partículas. Podemos establecer la "colisionalidad" del sistema. (Binney y Tremaine, 2008)

Table 2.1: Colisionalidad de distintos sistemas.

Sistema	N	$t_{\text{col}}(\text{Myrs})$	$t_{\text{din}}(\text{Myrs})$	$t_{\text{col}}/t_{\text{din}}$
Grupo Estelar	$\leq \sim 10$	≤ 1	≤ 1	1
Cumulo Globular	$\sim 10^5$	$\leq 1,000$	~ 10	$\sim 10^2$
Galaxia	$\sim 10^{11}$	~ 10	100	$\sim 10^5$
Cúmulo de Galaxias	$10^2 - 10^3$	$\sim 1,000$	100	~ 10

2.3 Órbitas

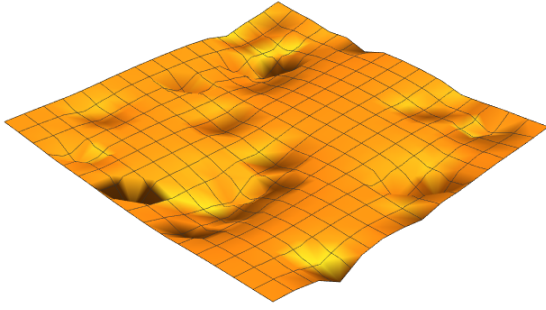
2.3.1 Órbitas vs trayectorias

En muchas ocasiones se utiliza de manera indistinta los términos órbita y trayectoria. Sin embargo es de interés para este trabajo, marcar la diferencias entre estos dos conceptos.

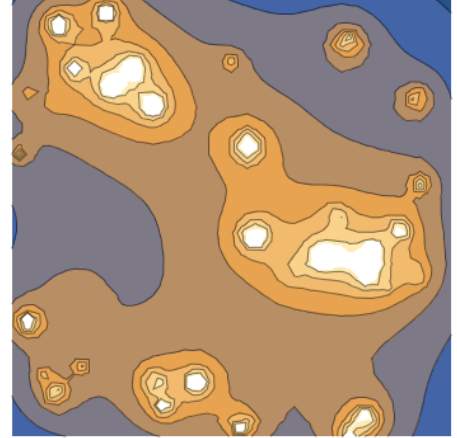
En un sistema gravitatorio de partículas, la trayectoria que sigue un miembro del sistema, está regida por la suma de todas las fuerzas ejercidas por el resto de los miembros del sistema. A su vez sabemos que esta fuerza puede ser representada por medio de una función potencial.

$$m\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_i = \sum_{i \neq j} \nabla_{\mathbf{r}_i} \Phi_j(\mathbf{r}_i) \quad (2.18)$$

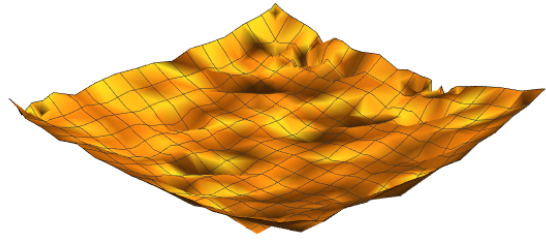
Si aumentamos considerablemente el número de partículas en el sistema, la interacción individual pierde importancia.



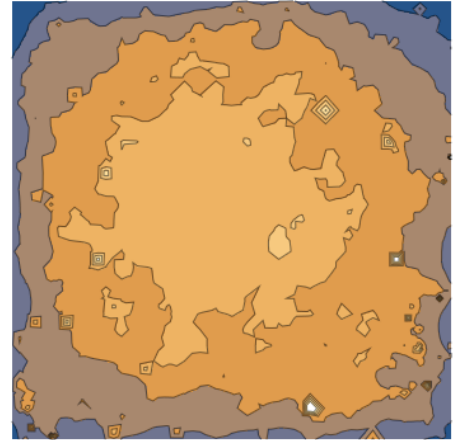
(a) Pocas partículas .



(b) Equipotencial (a).



(c) Muchas partículas.



(d) Equipotencial (c).

Figura 2.8: Potencial gravitatorio y sus respectivas equipotenciales, con diferente número de partículas.

En caso de muchas partículas, la interacción total puede verse como una función potencial global.

$$m\ddot{\mathbf{r}}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_i = \nabla_{\mathbf{r}_i} \Phi_j(\mathbf{r}_i) \quad (2.19)$$

Cuando nos encontramos en el régimen no colisional y la función potencial global es independiente del tiempo. Es cuando llamamos la trayectoria de una partícula una

órbita.

2.3.2 Integrales de movimiento.

De la sección 2.2 y la anterior, sabemos que las galaxias son sistemas no-colisionales y por consiguiente, las trayectorias de sus estrellas son necesariamente órbitas.

Todas las órbitas, se moverán en el espacio fase, por lo que conocer las restricciones de este, nos ayudará a conocer el comportamiento de las órbitas de la galaxia.

Una **Integral de movimiento** es una función del espacio fase que no depende del tiempo. Estas son constantes para cualquier órbita.

$$I(\mathbf{q}(\mathbf{t}_1), \mathbf{p}(\mathbf{t}_1)) = I(\mathbf{q}(\mathbf{t}_2), \mathbf{p}(\mathbf{t}_2)) \quad \forall \quad \mathbf{t}_1 \text{ y } \mathbf{t}_2 \quad (2.20)$$

Las integrales de movimiento son de gran importancia, ya que al ser una cantidad conservada, estas deforman el espacio fase y crean restricciones geométricas.

Para ilustrar esto usamos un potencial esférico bidimensional, por lo tanto en un espacio fase de 4 dimensiones. Por la naturaleza de este potencial es conveniente utilizar coordenadas polares $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}_\phi, \mathbf{v}_\theta)$.

Para visualizar lo anterior, podemos graficar en 3D sacrificando así una de las dimensiones del espacio fase.

En este caso, graficaremos $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}_\phi)$, una vez trabajado con este subespacio, lo podemos rotar con respecto a $\boldsymbol{\theta}$ y así recuperar el sistema completo.

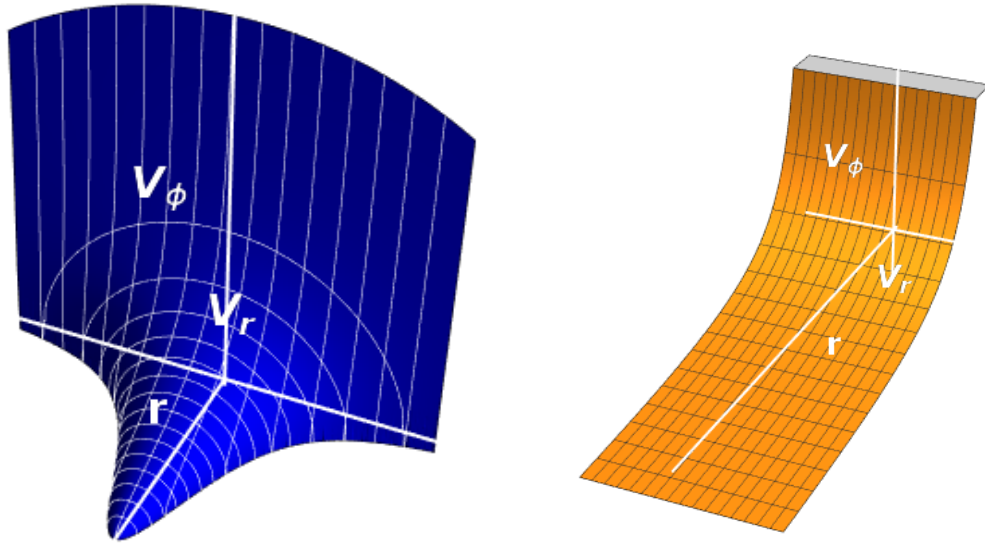
En un potencial esférico tiene dos integrales de movimiento, la energía y el momento

angular.

$$E = \frac{1}{2}(v_R^2 + v_\phi^2) + \Phi(R), \quad (2.21)$$

$$J = Rv_\phi \quad (2.22)$$

Estas integrales de movimiento definen una hipersuperficie la cual confina la órbita. (Binney y Tremaine, 2008)

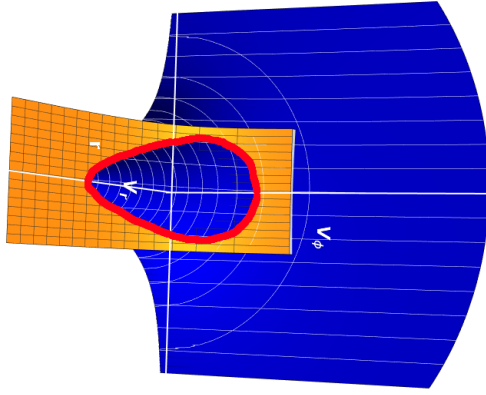


(a) Restricción Energética.

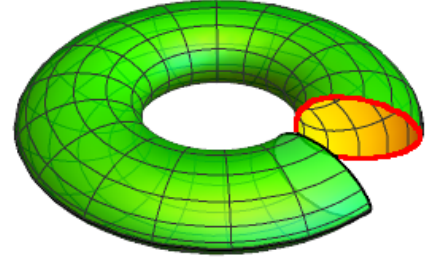
(b) Restricción del Momento Angular.

Figura 2.9: Restricciones.

Al girar en θ , obtenemos que la órbita estará confinada por un toroide en el espacio fase. Este resultado será generalizado en la siguiente sección.



(a) Restricciones.



(b) Toroide Invariante.

Figura 2.10: a) Se observa la restricción de la órbita por la intersección de la energía(azul) y el momento angular (amarillo) b) Toroide obtenido al rotar en θ la restricción.

2.3.3 Curva de velocidad cero.

Una consecuencia de estar trabajando con un sistema Hamiltoniano es que, siempre tendrá al menos una integral de movimiento, esta debida a la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}v_y^2 + \Phi(x, y) = Cte \quad (2.23)$$

Si despejamos arbitrariamente v_y

$$v_y = \pm \sqrt{2[E - \frac{1}{2}v_x^2 - \Phi(x, 0)]} \quad (2.24)$$

con $v_y = 0$

$$\Rightarrow E = \frac{v_x^2}{2} + \Phi(x, 0) \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow v_x = \pm \sqrt{2[E - \Phi(x, 0)]} \quad (2.26)$$

A este resultado le llamamos *curva de velocidad cero*, es importante puesto que esto definirá una frontera en el potencial.

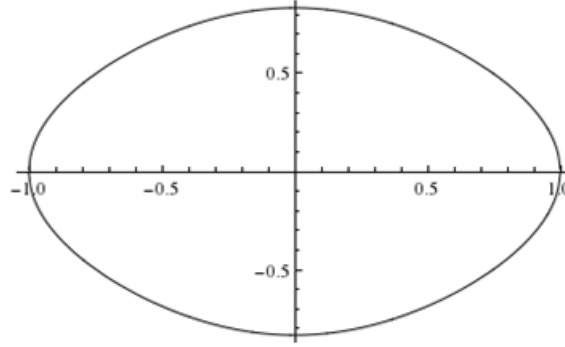


Figura 2.11: Curva de velocidad cero en el plano $v_x - x$

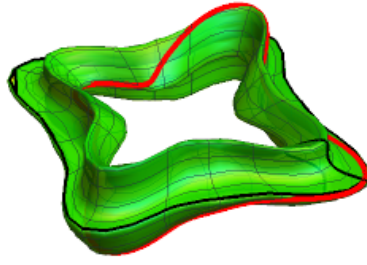
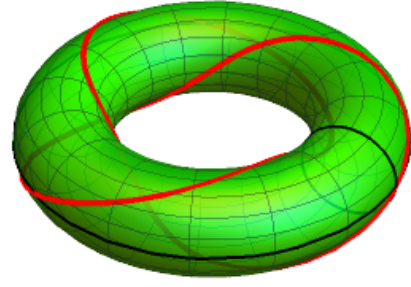
2.3.4 Órbitas regulares e irregulares

Llamamos a una órbita *regular* cuando esta cuenta con n grados de libertad y n integrales de movimiento. Su movimiento en el espacio fase estará restringida por un toroide n -dimensional.

El cual está definidor por:

$$\mathbf{T} = \{I_1 \times \cdots \times I_n\} \quad (2.27)$$

Por lo general, si nos mantenemos en coordenadas generalizadas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ la forma de este toroide será intrincado, sin embargo podemos encontrar una transformación canónica la cual nos llevará a coordenadas de acción-ángulo $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J})$ (Véase en Apéndice A), las cuales dado la naturaleza periódica del sistema, nos permiten transformar el toroide original, en uno simple y circular.

(a) Toroide en $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.(b) Toroide en $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J})$.*Figura 2.12*

Usando variables de acción-ángulo y siendo $\mathbf{J} = (J_1, J_2, \dots, J_n)$ las integrales de movimiento del sistema.

Podemos aplicar las ecuaciones de Hamilton y llegamos a que:

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\theta}_i} = 0 \quad (2.28)$$

Esto nos indica que el Hamiltoniano debe ser independiente de las coordenadas angulares.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{J}) \quad (2.29)$$

Usamos nuevamente las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i} \equiv \Omega_i(\mathbf{J}) \quad \Rightarrow \quad \theta_i(t) = \theta_i(0) + \Omega_i t \quad (2.30)$$

La ecuación anterior nos dará una frecuencia angular Ω_i , por cada acción J_i . Es decir la órbita tendrá un número de ciclos asociado a cada dirección dictada por J_i

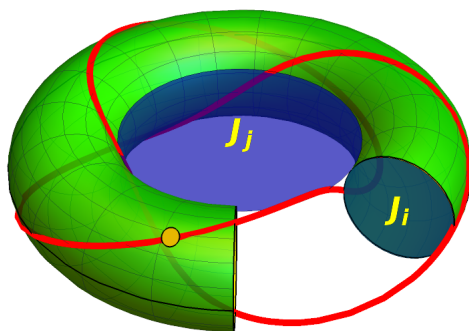


Figura 2.13: Toroide formado por $T = \{J_i \times J_j\}$

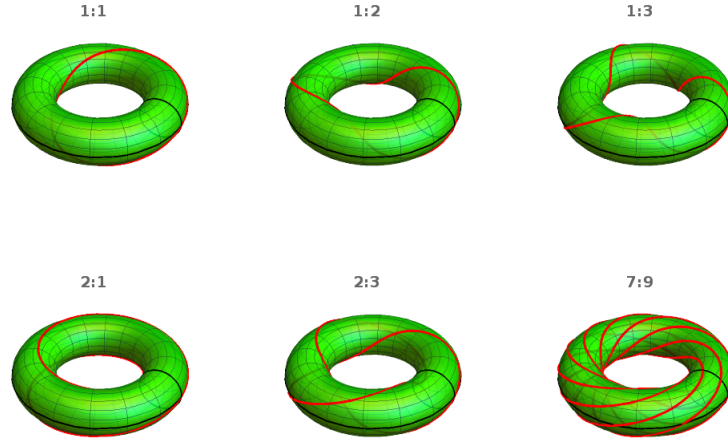
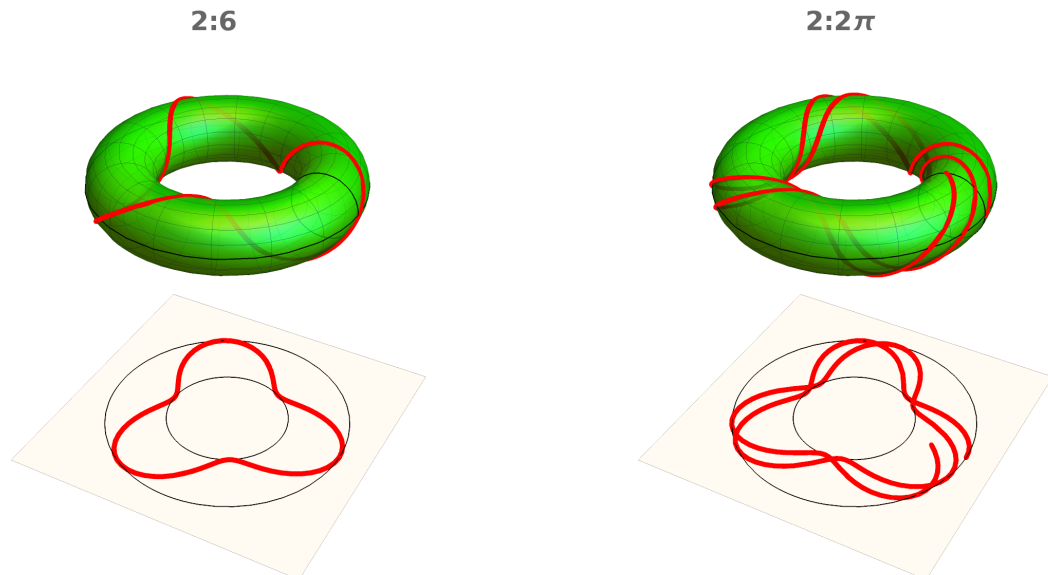


Figura 2.14: Toros con distinta razón de frecuencias $\Omega_i:\Omega_j$

De la ecuación 2.30 vemos que la frecuencia angular solo depende de la variable de acción J_i , por lo que podemos crear un número infinito de órbitas contenidas en el toroide, siempre y cuando tengan las mismas frecuencias Ω_i y varíen por una diferencia de fase dada por sus componentes angulares θ_i .

En general conforme vamos moviéndonos en el espacio fase vamos obteniendo nuevas órbitas con sus respectivos toroides definidos por sus J_i .

Es claro que al tener frecuencias correspondientes a la dirección de su acción, si una de ellas no es un número entero, esto tendrá como consecuencia una órbita abierta.



(a) Órbita cerrada con frecuencias enteras.

(b) Órbita abierta con una frecuencia irracional.

Figura 2.15

Llamaremos a una órbita *padre*, si esta es cerrada y estable. Por consecuencia del teorema de Floquet(Apendice A.III) la órbita padre tendrá toroides concentricos los cuales albergarán órbitas *hijas* abiertas, estas realizan oscilaciones epicíclicas alrededor de su órbita padre. El conjunto de órbita padre e hijas, es llamado *familia* orbital.

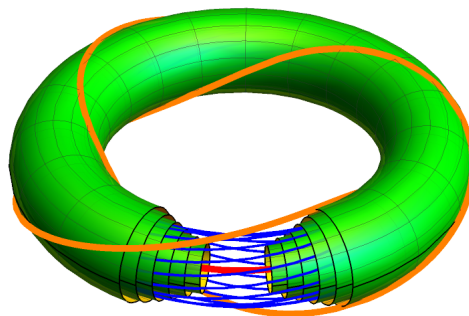


Figura 2.16: Toroides concentricos.

Si una órbita hija es cerrada y estable, esta creara su propia familia orbital. De esta manera nuestro potencial contendrá una serie de familias orbitales, delimitadas por órbitas padres.

Dentro del potencial existen órbitas las cuales, no poseen un número igual de integrales de movimiento y grados de libertad. Por lo que no se mueven sobre un toroide n -dimensional. No son periódicas y las llamamos órbitas *irregulares*.

Sin embargo éstas órbitas se encuentran confinadas entre los toroides n -dimensionales de las órbitas regulares. (Binney y Tremaine, 2008),(José y Saletan, 1998)

2.3.5 Cortes de Poincaré

En la sección anterior, se definió el concepto de familia orbital. Sin embargo no se presentó una forma para poder visualizar de manera global, las familias orbitales del potencial.

El matemático francés, Henri Poincaré, reconoció este problema y, desarrolló una herramienta simple en donde se nos da una noción clara y global del potencial. Esta herramienta llamada cortes de Poincaré, nos permite visualizar la estructura orbital en el espacio fase de sistemas dinámicos con 2 grados de libertad, osea sistemas 4-dimensionales (x, v_x, y, v_y) .

Para construir un corte de Poincaré en un potencial, partimos de la restricción que existe con la energía E , la cual, como vimos en la sección anterior, mantiene a las órbitas dentro de un volumen tridimensional en el espacio fase.

$$E = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + \Phi(x, y) = E_0 = \text{Cte} \quad (2.31)$$

Lo siguiente es realizar un corte al volumen usando un plano paralelo ($y = 0$) a una de las coordenadas espaciales (x) y a su velocidad correspondiente (v_x).

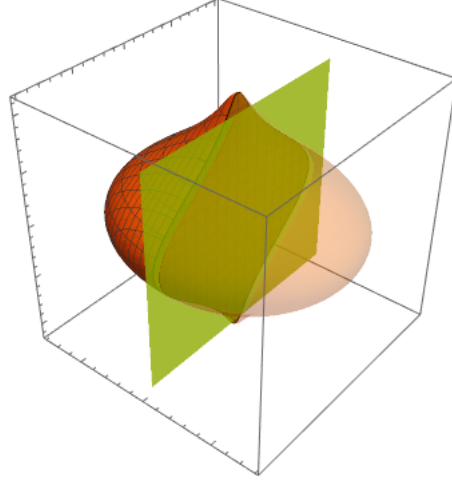


Figura 2.17: Plano cortando la "cebolla" creada por la restricción de energía.

Tener la restricción de energía y el corte al volumen nos permite definir una v_y particular.

$$v_y = f(x, v_x; E_0) \quad (2.32)$$

El corte de Poincaré será generado cuando, la órbita cruza por el plano establecido. Es decir cuando se cumple las siguientes condiciones.

$$S_1 = \{(x, v_x) | y = 0 \quad \& \quad v_y > 0\} \quad (2.33)$$

Ahora podemos seleccionar un punto en el plano (x, v_x) y su correspondiente velocidad particular v_y , como condiciones iniciales de una órbita. Con esto podemos comenzar a analizar cómo la órbita va evolucionando.

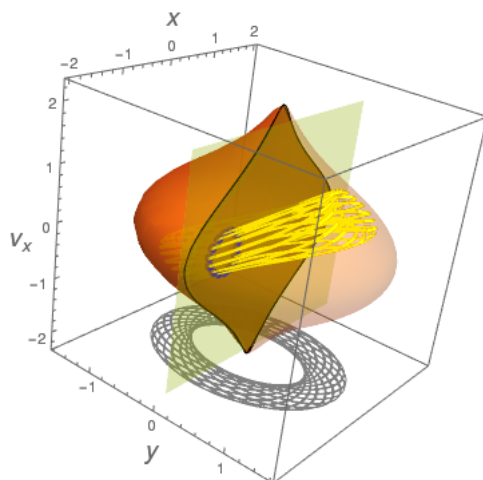
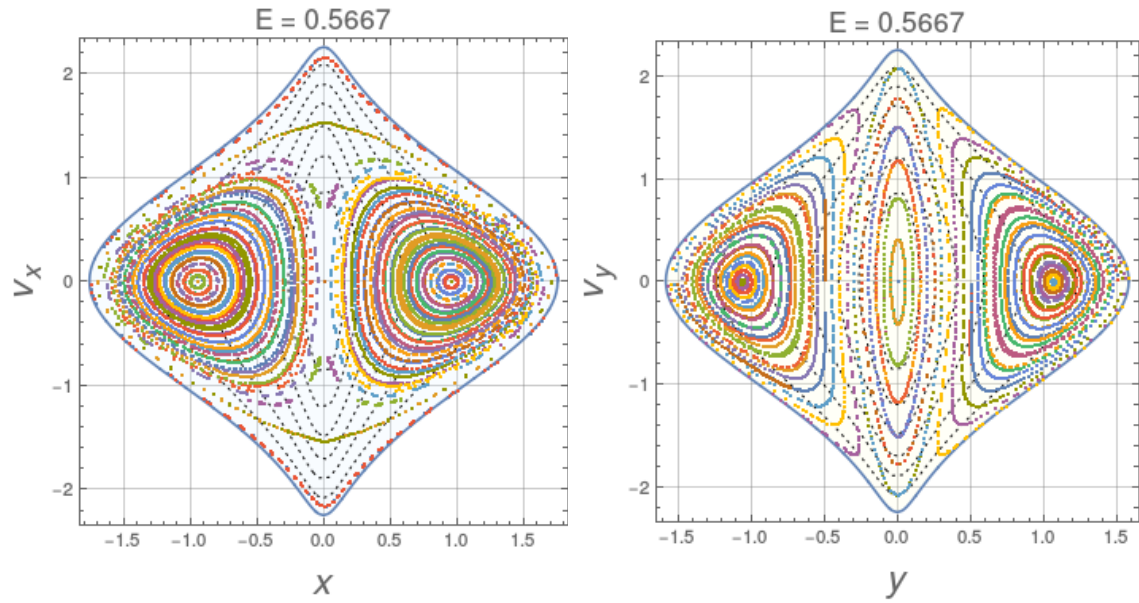


Figura 2.18: Recorrido de una órbita, tanto en el espacio fase, como su proyección en el espacio de configuración.

Podemos repetir el proceso con distintas condiciones iniciales para ir llenando el corte de Poincaré con el resto de las órbitas que forman parte del potencial.



(a) Corte de Poincaré v_x y x .

(b) Corte de Poincaré v_y y y .

Figura 2.19: De forma análoga podemos fijar el plano en X y repetir el procedimiento para general el corte complementario que se aprecia en la figura (b) .

Los cortes de Poincaré, son una herramienta poderosa para poder visualizar las órbitas del potencial, para ejemplificar esto veamos cómo nos puede ayudar a esclarecer el concepto de órbitas irregulares.

Si hacemos uno en un potencial que es rico en órbitas irregulares. Podemos ver un "mar" de estas órbitas alrededor de los toroides regulares. (Binney y Tremaine, 2008), (José y Saletan, 1998)

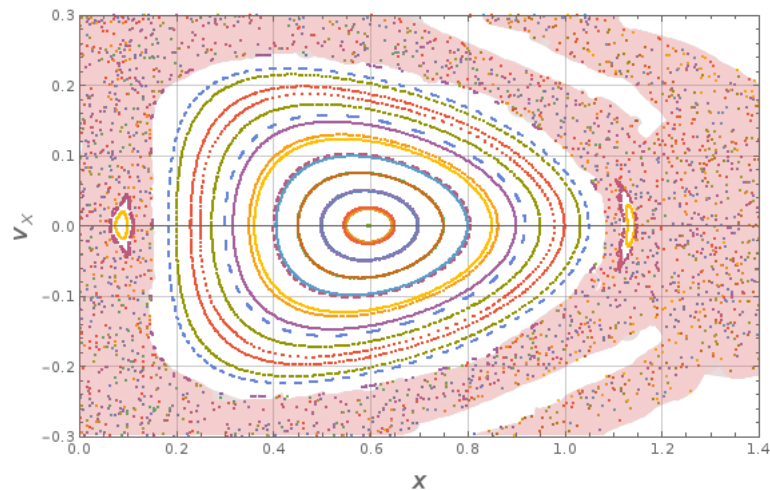
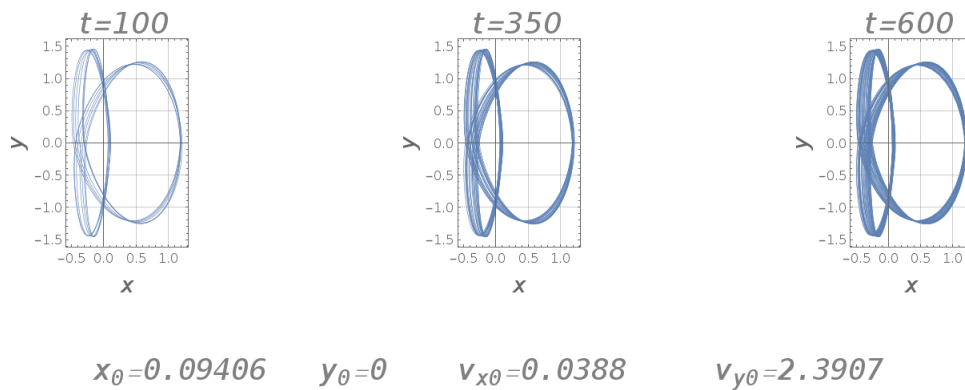
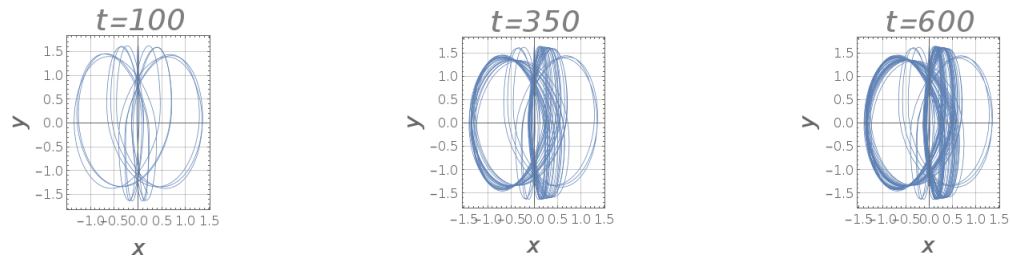


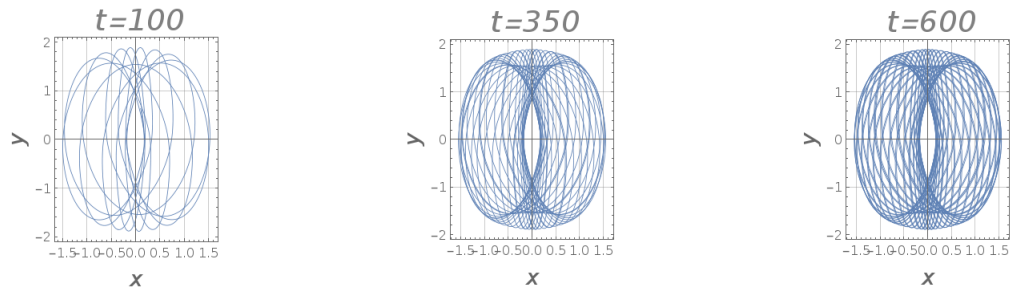
Figura 2.20: Corte transversal donde se observan órbitas regulares e irregulares. El mar irregular se subrayó con rojo.

No solo esto, teniendo el corte, podemos seleccionar una serie de órbitas que presenten algún interés en particular. Por ejemplo tomemos 3 órbitas del potencial de la figura anterior, que sean muy cercanas en sus coordenadas de espacio fase. Sin embargo dos de estas son regulares y una irregular.





$$x_\theta = 0.12428 \quad y_\theta = 0 \quad v_{x\theta} = 0.0372 \quad v_{y\theta} = 2.3947$$



$$x_\theta = 0.12428 \quad y_\theta = 0 \quad v_{x\theta} = 0.0372 \quad v_{y\theta} = 2.3947$$

Figura 2.21: Órbitas cercanas en coordenadas del espacio fase, integradas en tiempos 100,350 y 600. El primer renglón representa una órbita regular, el segundo irregular y la tercera regular

Como podemos apreciar, aun siendo muy cercanas, las órbitas en el primer y tercer renglón, toman una forma definida desde el inicio, mientras que la órbita en el segundo renglón, mantiene una forma difusa a lo largo de su evolución.

2.4 La barra logarítmica

El potencial de la barra logarítmica fue introducido por Levison y Richstone a principios de 1980 y es ha sido ampliamente utilizado en el estudio de la dinámica galáctica e.g (Binney y Spergel, 1984),(Valluri *et al.*, 2012). Es pues, apropiado, escoger este modelo porque a pesar de su simplicidad, ha sido ampliamente usado para describir galaxias elípticas y sus halos, así como las barras centrales de las galaxias de disco (Richstone, 1982).

Con el nivel de simplificación en el cual lo asumimos como un potencial planar, el potencial logarítmico tiene la siguiente forma:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}v_0^2 \log \left[R_c^2 + x^2 + \frac{y^2}{q^2} \right] \quad (2.34)$$

donde R_c es el *core radius*¹. q es un factor el cual "aplata" el potencial, si el valor de $q < 1$ entonces el potencial es oblato, mientras que en $q > 1$ este es prolato.

¹El core radius, es un término que se le agrega al potencial para no crear un polo en el centro.

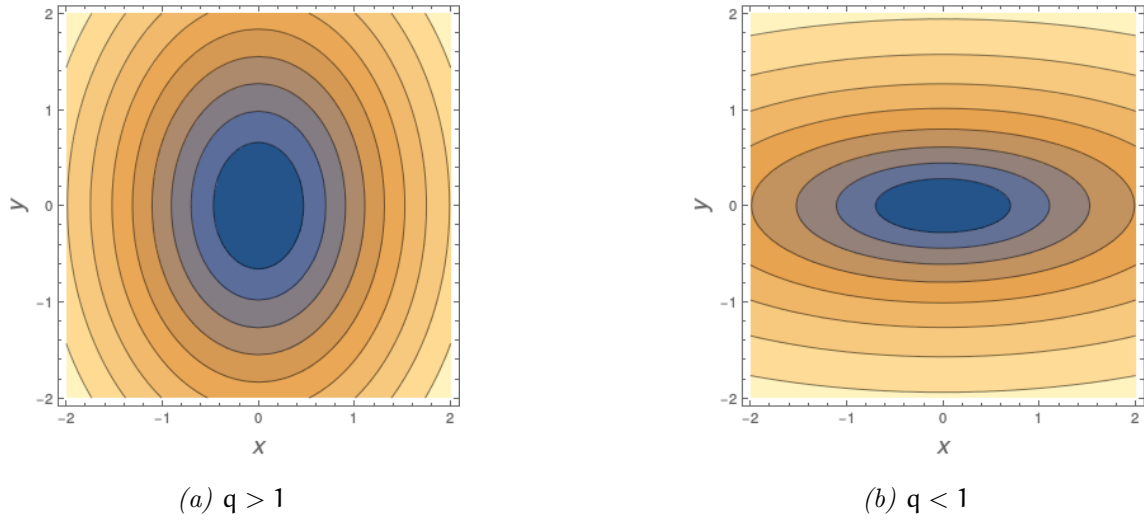


Figura 2.22: Equipotenciales con distintas q .

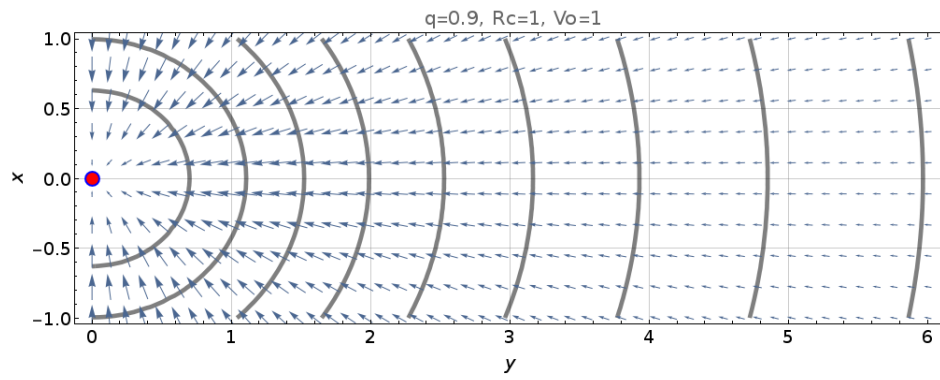


Figura 2.23: Campo de fuerzas y equipotenciales de la Barra .

Una de las características interesantes de este potencial es que en el caso en donde $R = \sqrt{x^2 + y^2} \ll R_c$.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}v_0^2 \log \left[R_c^2 \left(1 + \frac{x^2}{R_c^2} + \frac{y^2}{R_c^2 q^2} \right) \right] \quad (2.35)$$

Aplicando propiedades del logaritmo.

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}v_0^2 \left(\log [R_c^2] + \log \left[\left(1 + x^2 + \frac{y^2}{R_c^2 q^2} \right) \right] \right) \quad (2.36)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}v_0^2 \log \left[\left(1 + \frac{x^2}{R_c^2} + \frac{y^2}{R_c^2 q^2} \right) \right] + C \quad (2.37)$$

Ahora realizamos una expansión de tipo $\log(u + 1) \approx u$ con $u = \frac{x^2}{R_c^2} + \frac{y^2}{R_c^2 q^2}$

$$\Phi(x, y) \approx \frac{v_0^2}{2R_c^2} \left(\frac{x^2}{R_c^2} + \frac{y^2}{R_c^2 q^2} \right) + C \quad (2.38)$$

La cual es la función potencial de un oscilador armónico bidimensional, esto nos indica que las órbitas del potencial en este régimen serán figuras de Lissajous.

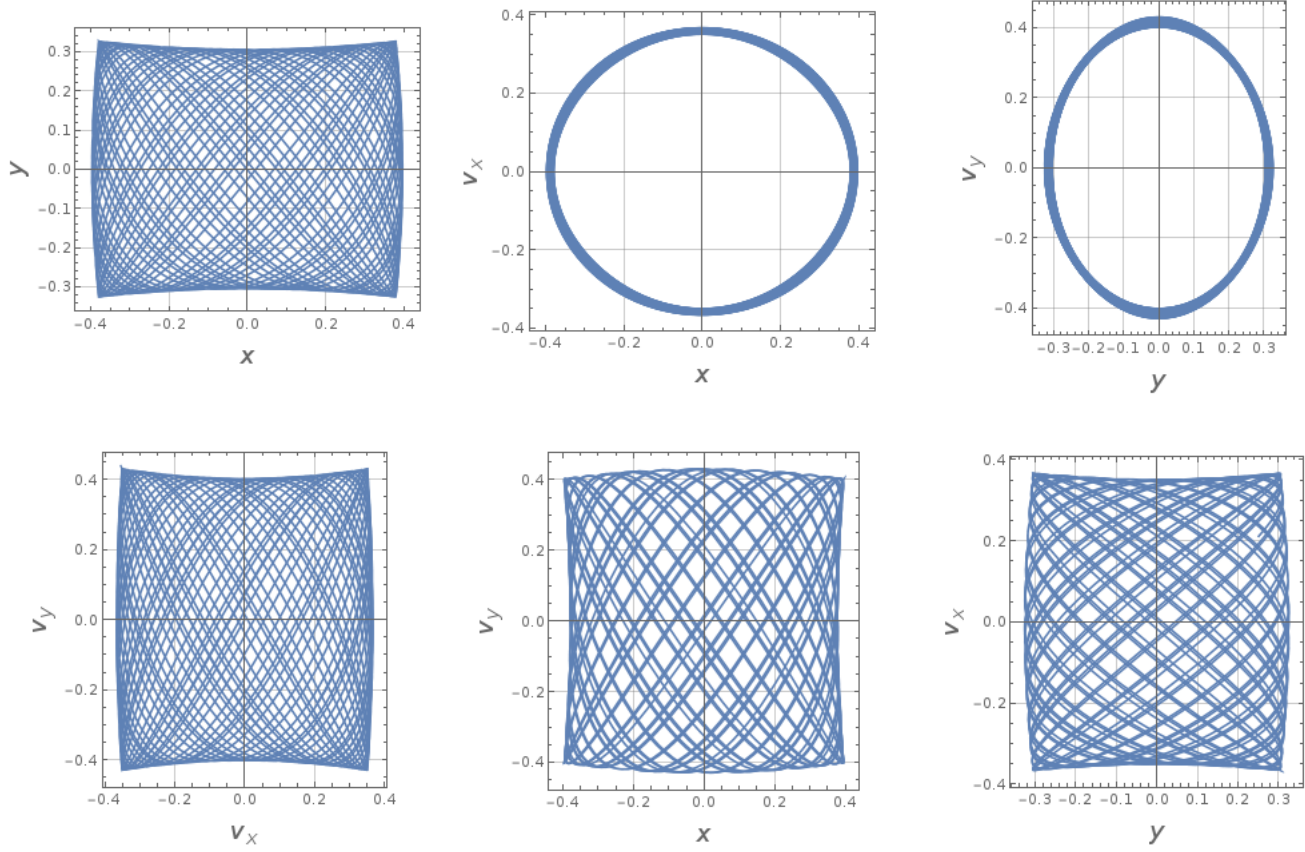


Figura 2.24: $Q = 0.7, V_0 = 1, R_c = 1, R = \frac{1}{10R_c}$

Lo cual le agrega a la riqueza de órbitas que pueden ser obtenidas dentro del potencial logarítmico.

Las órbitas en el potencial logarítmico, parten de dos órbitas padres: La órbita axial y la circular.

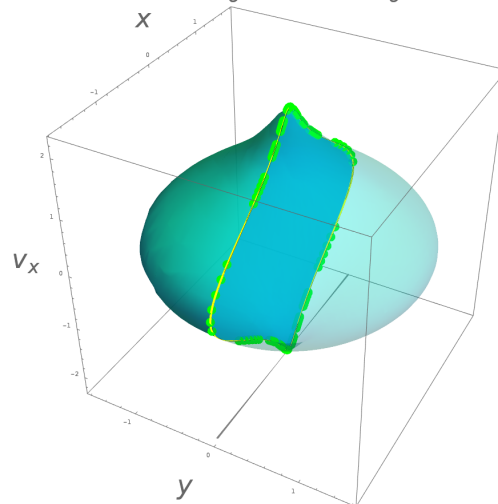
Como vimos en la sección 2.3.4, conforme avanzamos en el espacio fase, órbitas abiertas (hijas) circularán en torno a la órbita padre, conforme avanzamos es probable que encontremos una órbita hija cerrada que generará una segunda generación de órbitas hijas.

Las generadas por la órbita circular las llamaremos *loop orbits* y las generadas por

una órbita cerrada *looplets*, éstas se distinguen por no cruzar por el centro y no tener un sentido definido de giro.

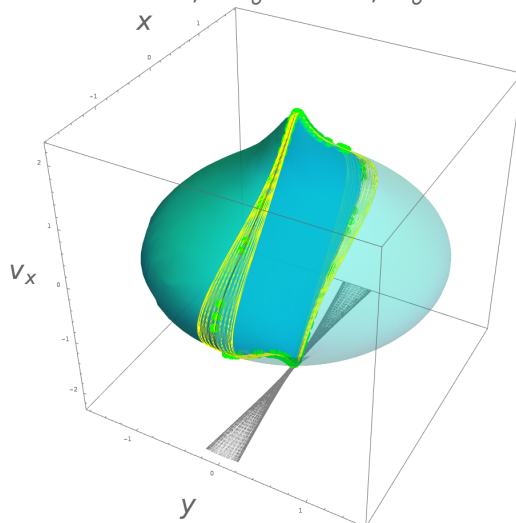
Recíprocamente las generadas por la axial, cruzan por el centro y tienen sentido definido de giro, a estas las llamaremos *box orbits*, de igual forma llamaremos a las órbitas de generaciones mayores *boxlets*.(Binney y Tremaine, 2008)

$$E = 0.5667; \quad x_o = -1.25, \quad v_o = 0.8213$$



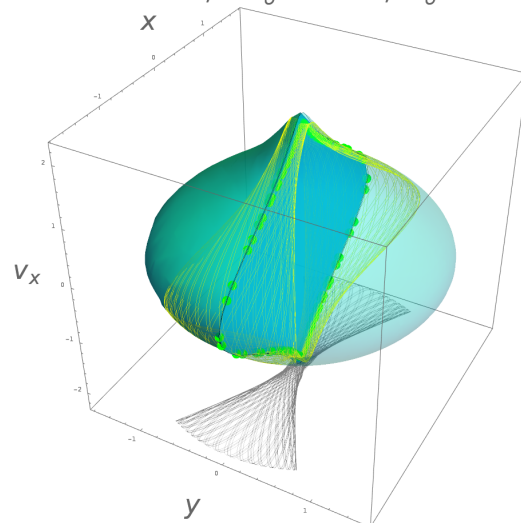
(a) Órbita padre axial.

$$E = 0.5667; \quad x_o = -1.25, \quad v_o = 0.82$$



(b) Órbita hija.

$$E = 0.5667; \quad x_o = -1.25, \quad v_o = 0.8$$



(c) Órbita hija.

Figura 2.25: Ejemplos de órbitas *box*.

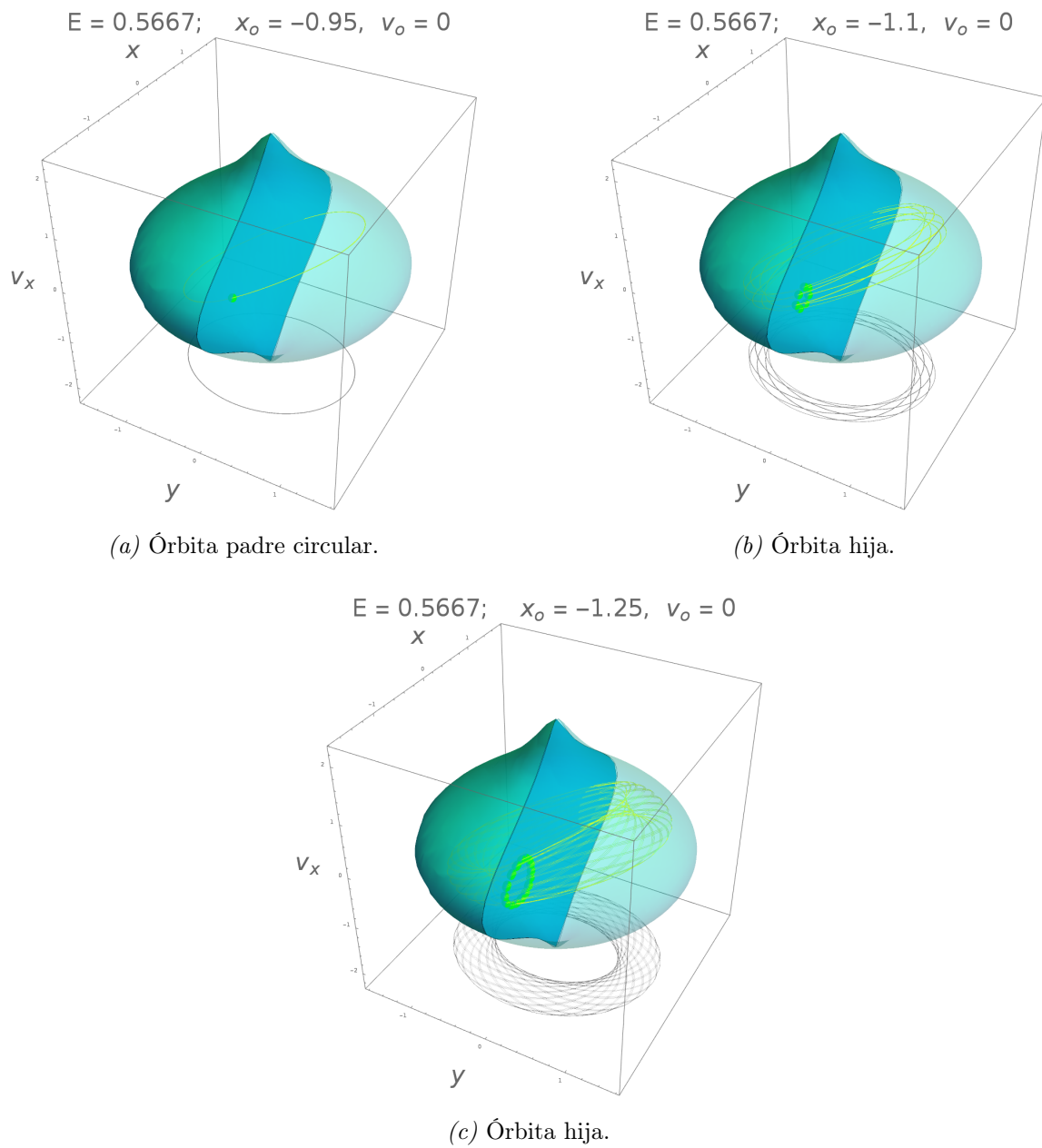


Figura 2.26: Ejemplos de órbitas *loops*.

2.5 La fuerza de marea

Cuando un objeto de dimensiones finitas esta expuesto a un campo gravitacional, la atracción que sentirá este cuerpo será distinto en diferentes puntos del este, ya que estos se encuentran a diferentes distancias de la fuente de este campo. A este diferencial gravitatorio se le conoce como *fuerza de marea*.

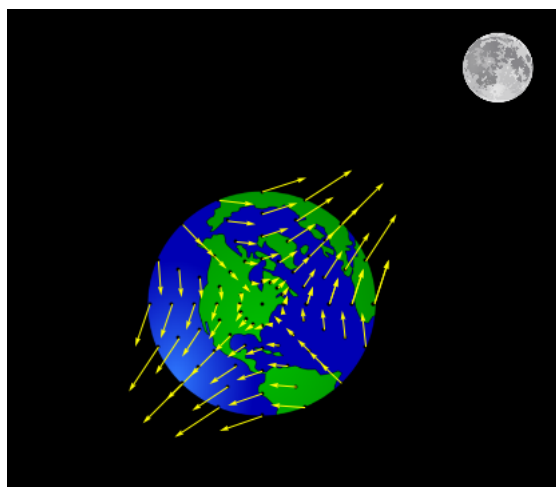


Figura 2.27: La fuerza de marea recibe su nombre precisamente por que es uno de los factores que causan las mareas oceánicas. Se observa una representación físicamente correcta de la fuerza de marea causada por la luna en la tierra.

En términos más formales.

Dada una distribución de masa con un campo gravitacional $\mathbf{F}(\mathbf{R})$, donde $\mathbf{R}$ es el vector que apunta a una partícula del sistema perturbado. La fuerza de marea son producto del gradiente $\Delta\mathbf{F}(\mathbf{R})$.

La fuerza de marea inducida por una distribución de masa a otro cuerpo o sistema es definido como la diferencia entre la fuerza ejercida en un punto del sistema y el

promedio de la fuerza que siente el resto del sistema. (Masi, 2007)

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{R}) - \langle \mathbf{F}(\mathbf{R}) \rangle \quad (2.39)$$

La fuerza promedio es la misma que la ejercida en el centro de masas.

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{R}) - \mathbf{F}(\mathbf{R}_{cm}) \quad (2.40)$$

Dada la naturaleza de la fuerza de marea esta tiene un papel fundamental en la interacción de objetos astronómicos, sobretodo de las galaxias.

Entonces durante un encuentro gravitacional entre galaxias, la fuerza que afectara las estrellas que conforman a estas, será la fuerza de marea.

Para traducir la ecuación (2.40) al contexto galáctico tenemos primero que conocer la aceleración del centro de masas de la galaxia, causado por la fuente que la está perturbando.

Usemos nuestro marco de referencia centrado el centro de masas galaxia perturbada. La aceleración de su centro de masas estará dictado principalmente por la suma de las aceleraciones de sus estrellas.

$$\dot{\mathbf{v}}_{cm} \equiv \frac{1}{M_s} \sum_{\beta} m_{\beta} \dot{\mathbf{v}}' \quad M_s \equiv \sum_{\beta} m_{\beta} \quad (2.41)$$

Donde m_{β} es la masa de la β -esima estrella.

Entonces, la fuerza de marea de la α -esima estrella estará dado por,

$$\dot{\mathbf{v}}_{\alpha} \equiv \dot{\mathbf{v}}'_{\alpha} - \dot{\mathbf{v}}_{cm} \quad (2.42)$$

siendo $\dot{\mathbf{v}}'_\alpha$ el cambio de su velocidad por el perturbador y $\dot{\mathbf{v}}_\alpha$ la aceleración del sistema con respecto a su centro de masas. (Binney y Tremaine, 2008)

2.6 Cuestiones numéricas

2.6.1 El mundo aproximado

En nuestro entendimiento, una de las forma en la que podemos obtener información relevante para describir la naturaleza, por alguna razón, es por medio de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Debido a esto, encontrar soluciones para este tipo de ecuaciones es de gran importancia para la física.

Sin embargo es muy común encontrarse con problemas, en los cuales no contamos con las herramientas matemáticas para resolverlos de forma exacta o eficiente.

Por esta razón los integradores numéricos tienen gran importancia, por que a pesar de brindar una solución *aproximada*, es una solución

Una ecuación diferencial de segundo orden tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2}{dt^2}x_i = f_i(x_i) \quad i = 1 \dots d \quad (2.43)$$

Dándole un enfoque físico; x_i siendo la i -ésima coordenada de posición y $f(x_i)$ la i -ésima componente de fuerza. La cual, en el mejor de los casos, es analítica, de no serlo tendrá que ser obtenida de forma numérica. Finalmente d representa el número de grados de libertad que presenta el sistema.

Con un poco de manipulación algebraica podemos, reducir el orden de la ecuación diferencial haciendo, el siguiente cambio de variable:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i \quad (2.44)$$

$$\therefore \frac{dv_i}{dt} = f(x_i) \quad (2.45)$$

Si bien duplicamos el número de ecuaciones, al reducir el orden hace mas fácil de resolver la ecuación o sistemas de ecuaciones. (Burden y Faures, 2010)

2.6.2 Un mundo de precisión finita

Yéndonos a los niveles mas fundamentales del funcionamiento de una computadora, llegamos a que es una serie inmensa de decisiones binarias, tomadas una a la vez, que escalan a un gran nivel de complejidad, el cual me permite, realizar todas las operaciones que estamos familiarizados con una computadora.

Sin embargo esta naturaleza binaria y discreta de las computadora trae consigo ciertas desventajas.

En la aritmética que usamos a papel y lápiz, esperamos resultados exactos para operaciones como $2 + 1 = 3$, $6/2 = 3$ y $(\sqrt{3})^2 = 3$. Por otro lado una computadora tendrá resultados exactos para $2 + 1 = 3$, $6/2 = 3$ pero no para $(\sqrt[2]{3})^2 = 3$. Nosotros permitimos tener el concepto de un número en forma decimal con infinitos dígitos por ejemplo $\sqrt{3}$ y por nuestras construcciones algebraicas sabemos que $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$.

Sin embargo en el mundo computacional cada número que representamos tiene una cantidad fija y finita de dígitos, osea la computadora verá $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1.73 \cdot 1.73 = 2.99$, claro siempre podemos aumentar el número de dígitos para acércanos mas al valor real $1.73205 \cdot 1.73205 = 2.999992$. Es tentador decir que la discrepancia es muy pequeña, tanto, que podría ser ignorada, sin embargo, no ser cuidadosos en estos aspectos, puede acarrear errores y propagarlos por todo el programa.

Lo anterior se debe a que las computadoras, poseen memoria finita, y esto nos limita a tener un número finito de dígitos, que está dictada por la siguiente relación²:

$$2^{(n*8)-1} \quad (2.46)$$

Donde n es el número de bytes.

Por lo que si tenemos 16 bytes³, nuestro número de dígitos será de 9,223,372,036,854,775,808.

Un número gigantesco, pero a final de cuentas finito.

El error que nos causa tener una cantidad finita de dígitos es conocido como error de *redondeo*, ya definido este vale la pena, introducir otro que también es de alta importancia, el error de *truncamiento*. (Burden y Faures, 2010)

2.6.2.1 Diferencias finitas.

Cuando resolvemos ecuaciones diferenciales de forma analítica, utilizamos el concepto de diferencias infinitesimales, en otras palabras una cantidad infinitamente pequeña.

Ya esta claro que para una computadora nada es infinito, por lo que estas cantidades serán *diferencias finitas*, las cuales pretenden acercarse a su análogo infinitesimal, en distintos ordenes.

Primer Orden:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.47)$$

²Se resta un 1, por que el primer bit se reserva para el signo del número.

³Un byte esta compuesto de 8 bits,siendo este ultimo la unidad básica de información en computo.

Segundo Orden:

$$\frac{df}{dx} = \frac{4f(x + \Delta x) - f(x + 2\Delta x) - 3f(x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.48)$$

Tercer Orden:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} = \frac{1}{\Delta x} [& 3f(x + 2\Delta x) - \frac{11}{16}f(x + 3\Delta x) \\ & - \frac{1}{2}f(x + \Delta x) + \frac{1}{3}f(x)] + \mathcal{O}(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (2.49)$$

La elección de que orden se utiliza depende completamente del problema al cual se ataca.

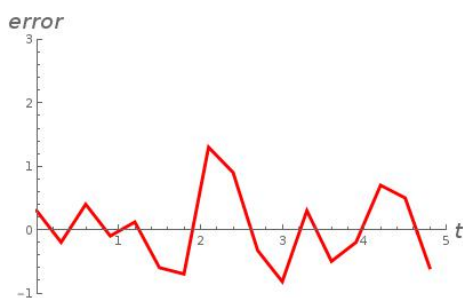
El termino $\mathcal{O}$ es justamente, el error de truncamiento y este crecerá proporcional al orden de la diferencia.

2.6.3 Precisión vs Exactitud.

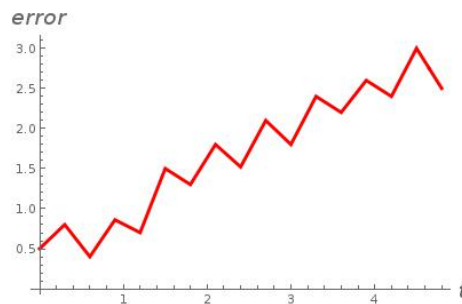
Otros términos que utilizamos de manera intercambiable al día-día, son exactitud y precisión, sin embargo, es importante mostrar que en la literatura científica, estos tienen significados distintos. (Burden y Faures, 2010)

Nos referimos a **exactitud** cuando las mediciones se acercan a un valor real, y decimos que unas mediciones son **precisas**, cuando la dispersión entre estas son pequeñas.

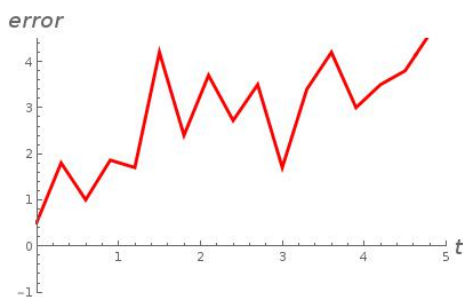
Esto se ilustra en las siguientes figuras.



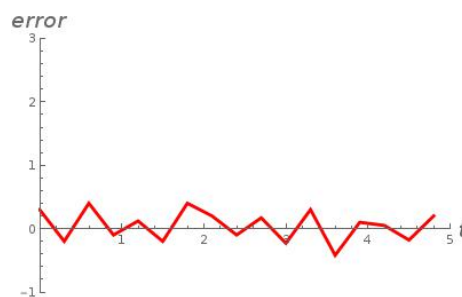
(a) Exacto, pero no preciso.



(b) Preciso, pero no exacto.



(c) Ni preciso, ni exacto.



(d) Exacto y preciso.

Figura 2.28: Exactitud y Precisión.

2.6.4 Integrador en este trabajo

En este trabajo utilizamos un integrador construido en el suite de programación Mathematica, antes de utilizar este integrado realizamos pruebas y comparación con otros integradores, estas se muestran a continuación.

El integrador numérico de *Mathematica*, es la función `NDSolve`, esta función puede ser utilizada para resolver tanto ecuaciones diferenciales parciales como ordinarias.

La sintaxis básica de esta función es:

```
NDSolve[{ec1, ec2...ecn, conds}, x, {t, ti, tf}]
```

Lo anterior encuentra la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias $\{ec_1, ec_2 \dots ec_n\}$ con las condiciones de frontera **conds**, para la función **x** para la variable independiente **t** dentro del intervalos $\{t, t_i, t_f\}$. (Sofroniou y Knapp, 2008)

Lo que nos regresa **NDSolve** nos regresa una función interpolante **x[t]**, la cual podremos evaluar dentro del intervalo $\{t, t_i, t_f\}$.

Para ejemplificar el funcionamiento de **NDSolve**, resolveremos la ecuación diferencial del oscilador armónico simple.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \quad (2.50)$$

Con la condición de frontera $x'(0) = 1$ y $x(0) = 0$ dentro del el intervalo $t, 0, 2 * \pi$.

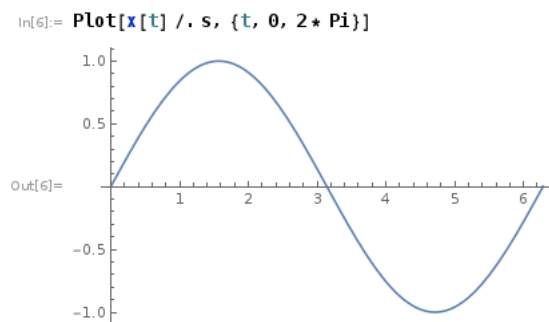
Utilizamos la función **NDSolve**:

```
In[11]:= s = NDSolve[{x''[t] == -1*x[t], x'[0] == 1, x[0] == 0}, x, {t, 0, 2*Pi}]
Out[11]= {{x -> InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 6.28}} Output: scalar]]}}
```

Teniendo la función interpolante podemos obtener un valor específico:

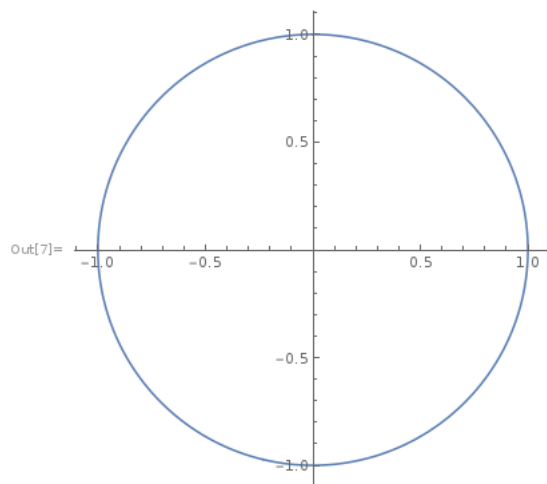
```
In[10]:= x[Pi/2] /. s
Out[10]= {1.}
```

Utilizar la función **Plot** para graficar la posición con respecto al tiempo:



Así como usar **ParametricPlot** para tener la gráfica del espacio fase:

```
In[7]:= ParametricPlot[{x[t], x'[t]} /. s, {t, 0, 2*Pi}]
```



Como vimos en el ejemplo anterior *Mathematica*, en unas cuantas líneas de código nos permite realizar muchas cosas. Y como las funciones anteriores existen un gran número de funciones que hacen de *Mathematica* una suite muy poderosa.

Por último me gustaría cubrir la opción **WhenEvent** de **NDSolve**, la cual fue utilizada en este trabajo y es de gran utilidad.

WhenEvent realiza una acción cuando se cumple un evento durante la resolución de la ecuación diferencial.

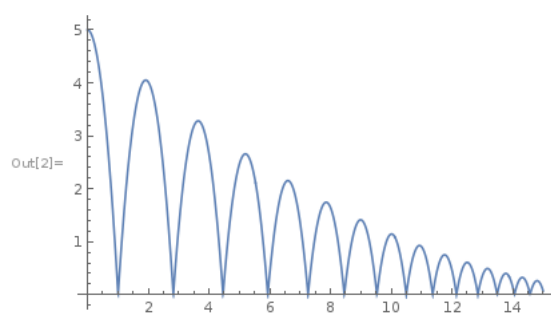
Para mostrar su funcionamiento, simularemos un objeto puntual cayendo de cierta altura, con la condición que cada vez que toca el suelo, éste tendrá un factor de amortiguamiento que reduce su velocidad un 10%.

```
In[1]:= s = NDSolve[{y''[t] == -9.8, y[0] == 5, y'[0] == 0, WhenEvent[y[t] == 0, y'[t] -> -0.90 y'[t]]}, y, {t, 0, 15}]
```

Out[1]= $\left\{ \left\{ y \rightarrow \text{InterpolatingFunction} \left[\begin{array}{c} \text{Domain: } \{0., 15.\} \\ \text{Output: scalar} \end{array} \right] \right\} \right\}$

Graficando la solución

```
In[2]:= Plot[y[t] /. s, {t, 0, 15}]
```



Capítulo 3

Resultados y Discusión

3.1 Simulación galaxia-galaxia

El primer paso para construir nuestro análisis fue establecer un sistema de unidades que resulte natural para nuestra simulación.

Recordemos la forma del potencial logarítmico

$$\Phi = \frac{1}{2}v_0^2 \left(x^2 + \frac{y^2}{q^2} + R_c \right) \quad (3.1)$$

A partir de la ecuación anterior determinamos como nuestra unidad de distancia el *Core Radius* de la barra logarítmica R_c , es decir nuestras distancias estarán dadas por nR_c .

Usamos el estándar dentro de la comunidad astronómica de utilizar la constante gravitacional $G[=]1$.

Una vez establecidas nuestros sistemas de unidades, pasamos a establecer el marco de

referencia de nuestra colisión. Este se basará en el esquema presentado en la figura 2.7 .

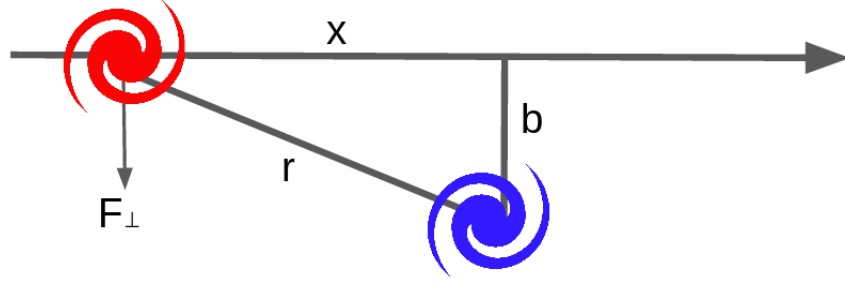


Figura 3.1: Marco de Referencia.

Nuestra simulación constará en una galaxia descrita por un potencial de Plummer, moviéndose a una velocidad v , y un parámetro de impacto b .

Tenemos nuestra galaxia de prueba representada por el potencial logarítmico, y realizamos un encuentro con una galaxia descrita por un potencial de Plummer, el cual pasa en línea recta con una velocidad v_{col} . El punto de acercamiento máximo entre el centro de masas, esta dado por el parámetro de impacto b .

Como vimos en la ecuación 2.42, la aceleración que siente la α -ésima estrella estará dado por.

$$\dot{v}_{\alpha} = \dot{v}'_{\alpha} - \dot{v}_{\text{cm}} \quad (3.2)$$

Traduciendo esto a nuestro marco de referencia

$$F_{\text{pert}-\alpha} = GM_p \left(\frac{1}{|r_p|^2} - \frac{1}{|r_{\alpha} - r_p|^2} \right) \quad (3.3)$$

Expresando la ecuación anterior en componentes tenemos que

$$F_{\text{pert}x} = GM_p \frac{v_{\text{col}} t}{(v_{\text{col}}^2 t^2 + b^2 + r_{\text{plum}}^2)^{3/2}} - \frac{x_{\alpha} - (v_{\text{col}} t)}{(x_{\alpha} - v_{\text{col}}^2 t^2 + (y_{\alpha} - b)^2 + r_{\text{plum}}^2)^{3/2}} \quad (3.4)$$

$$F_{\text{perty}} = GM_p \left(\frac{b}{(v_{\text{col}}^2 t^2 + b^2 + r_{\text{plum}}^2)^{3/2}} - \frac{y - b}{(x_\alpha - v_{\text{col}}^2 t^2 + (y_\alpha - b)^2 + r_{\text{plum}}^2)^{3/2}} \right) \quad (3.5)$$

Por otra parte la fuerza ejercida por la barra logarítmica esta dada por

$$\begin{aligned} F_{\log x} &= - \frac{v_0^2 x_\alpha}{R_c^2 + x_\alpha^2 + \frac{y_\alpha^2}{q^2}} \\ F_{\log y} &= - \frac{v_0^2 y_\alpha}{q^2 (R_c^2 + x_\alpha^2 + \frac{y_\alpha^2}{q^2})} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por lo que durante el tiempo de perturbación t , para conocer el cambio que sufre la α -esima estrella, debemos integrar

$$\begin{aligned} F_{\log x} + F_{\text{perty}} \\ F_{\log y} + F_{\text{perty}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Generamos de manera aleatoria condiciones iniciales de las órbitas, con la restricción que estas deben de estar dentro de la curva de velocidad cero del potencial.

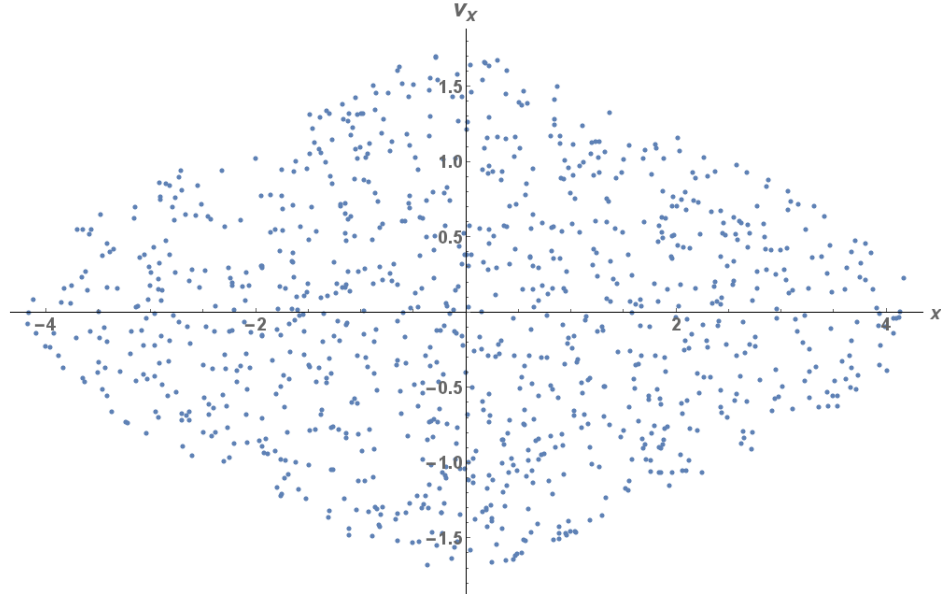


Figura 3.2: Ejemplo de condiciones iniciales.

Adicionalmente debemos establecer los valores de los parámetros V_{col}, M_p , así como la distancia x_{pert} donde se introduce el perturbador.

Para mantener el escenario mostrado en la Figura 3.1, donde el perturbador pasa en una trayectoria recta, debe cumplir la condición donde su velocidad es superior a la velocidad de escape del potencial en el punto de mayor acercamiento.

$$V_{\text{col}} \geq V_{\text{esc}} = \sqrt{|2\Phi(0, b)|} \quad (3.8)$$

Por lo que la velocidad de escape, nos dará el límite inferior de velocidad, para cierto parámetro de impacto b .

Para seleccionar el parámetro de impacto, utilizamos como referencia, la distancia vertical máxima permitida por el potencial, y en función de este valor escalamos el parámetro de impacto de forma que nos aseguremos de que no habrá colisiones directas entre partículas del potencial.

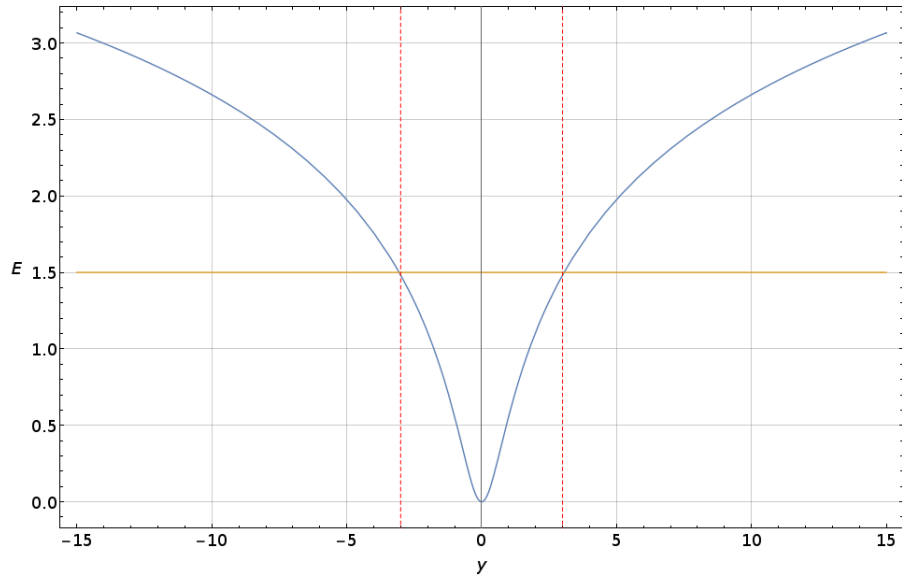


Figura 3.3: Y vs Energia

En la figura anterior se aprecia que para una energía de 1.5, tenemos una $Y_{\max} = 3$ por lo que en base a esto seleccionamos parámetros de impacto con 6 y 12.

Algo crucial para la simulación es la distancia inicial del perturbador, esto debido a que al agregar el perturbador la barra logarítmica sentirá su fuerza gravitacional de forma instantánea. Una elección no cuidadosa de esta distancia, podría significar siempre una perturbación impulsiva, por lo que queremos escoger una distancia donde la fuerza sea pequeña. Para ello realizamos un análisis del cociente entre la fuerza del perturbador y la barra, con la distancia del perturbador. Esto se muestra en la siguiente figura.

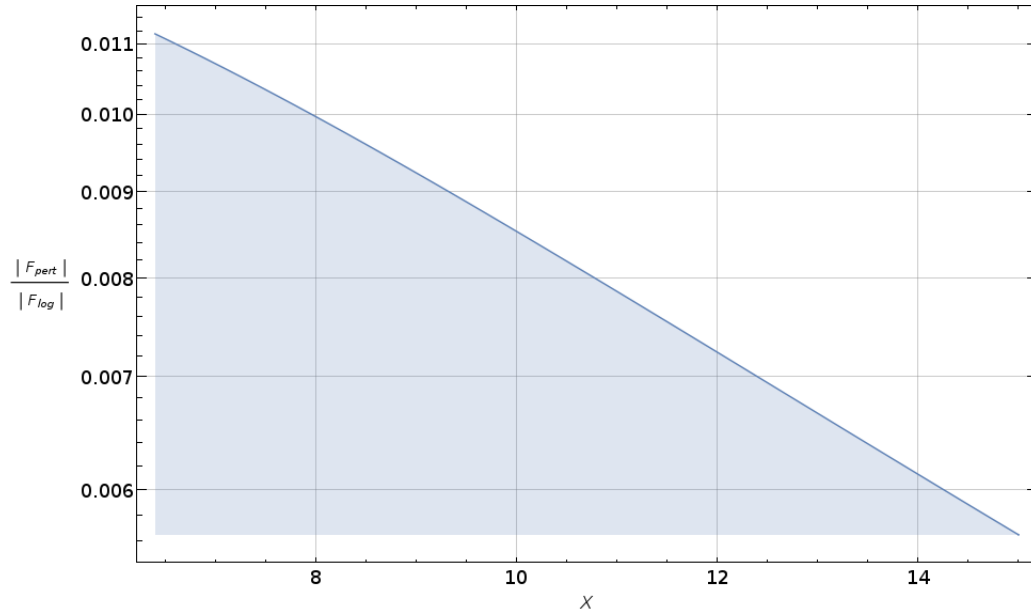


Figura 3.4: Razón entre la fuerza del perturbador y la fuerza de la barra vs distancia.

Se muestra que a una distancia de 10 ya nos encontramos con una fuerza menor al 1%, de esta forma seleccionamos esta como la distancia inicial.

La máxima cantidad de fuerza que queremos inyectarle al sistema, es de 10% durante la distancia de máximo acercamiento. Para esto debemos ajustar el parámetro de

impacto b y la masa del perturbador M_{pert} .

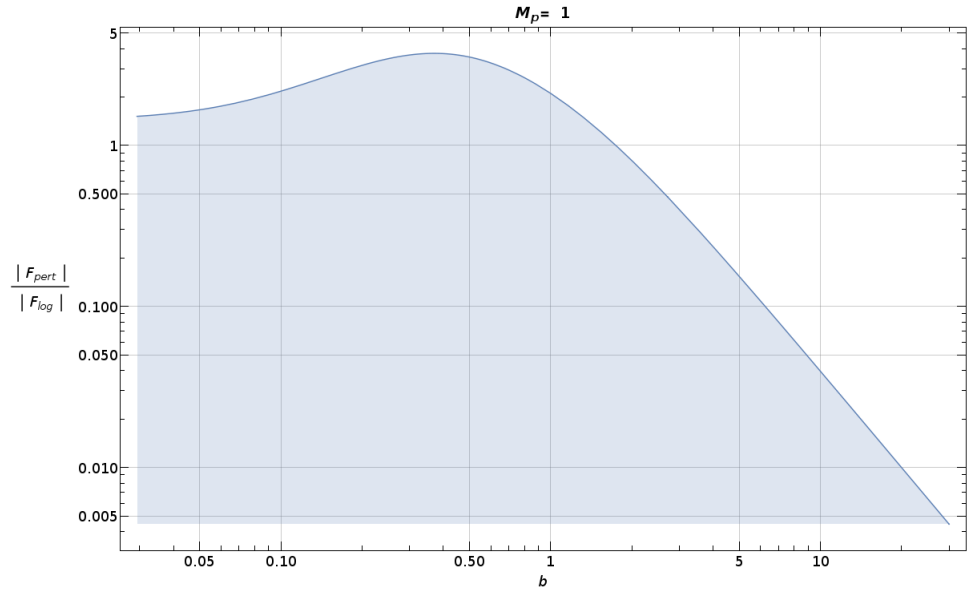


Figura 3.5: Razón entre la fuerza del perturbador y la fuerza de la barra vs parámetro de impacto.

En la figura anterior se muestra, que en un parametro de impacto $b = 6$ con $M_p = 1$, ya experimentamos una fuerza del 10%.

El tiempo que durara la integración, es fácilmente calculado teniendo la distancia del recorrido y la velocidad del perturbador.

Ya contando con los parámetros necesarios para realizar la simulación, integramos las ecuaciones 3.7. Al hacer esto obtendremos las coordenadas del espacio fase de las estrellas durante el tiempo de simulación.

3.2 Resultados.

Realizamos 18 experimentos con distintas fuerzas máximas inyectadas, 10%, 5% y 2.5%. Estos variando los distintos parámetros discutidos en la sección anterior. Los cuales se muestran en la siguiente tabla. Cada uno de los experimentos fue realizado con la cantidad de 1,000 partículas prueba.

Table 3.1: Experimentos.

F	b	M _p	V _c	F	b	M _p	V _c
10%	12	3.75	2.5, 5, 10	10%	24	15	2.5, 5, 10
5%	12	1.9	2.5, 5, 10	5%	24	8	2.5, 5, 10
2.5%	12	0.9	2.5, 5, 10	2.5%	24	3.75	2.5, 5, 10

Un buen punto de partida para comenzar el análisis es mediante la evolución energética del sistema.

Durante el recorrido el perturbador inyecta trabajo a la barra logarítmica, por lo que la energía de ésta no será conservada localmente.

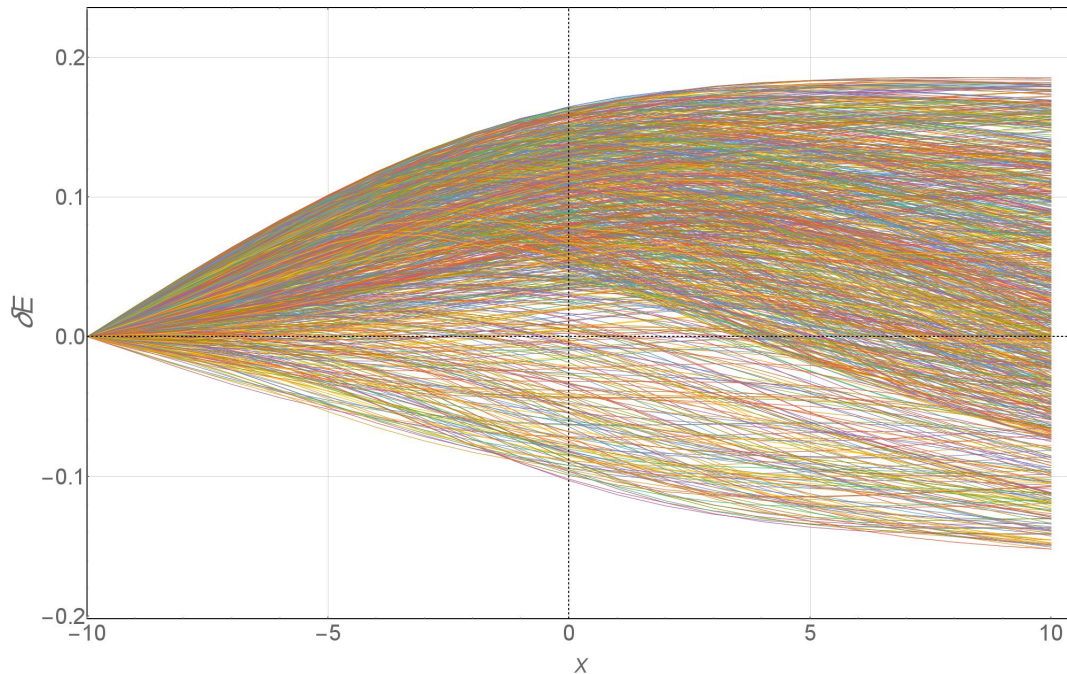


Figura 3.6: Diferencia entre la Energía inicial y la energía actual durante el recorrido del perturbador. Con $F = 10\%$, $B = 12$, $M_p = 3.75$, $V_c = 2.5$

En la figura anterior, observamos como cambia la energía de cada órbita durante la perturbación. Podemos apreciar, que la forma en la que la energía es absorbida es distinta para cada estrella.

En algunas se tiene un calentamiento, enfriamiento u oscilan entre ambos, mientras que otras permanecen casi constantes durante el recorrido.

De esta forma podemos hacer un análisis individual, seleccionando trazos que tengan algún comportamiento que sea representativo de un grupo.

Seleccionando la estrella, podemos comparar su órbita original, con la afectada por el perturbador durante y después del evento.

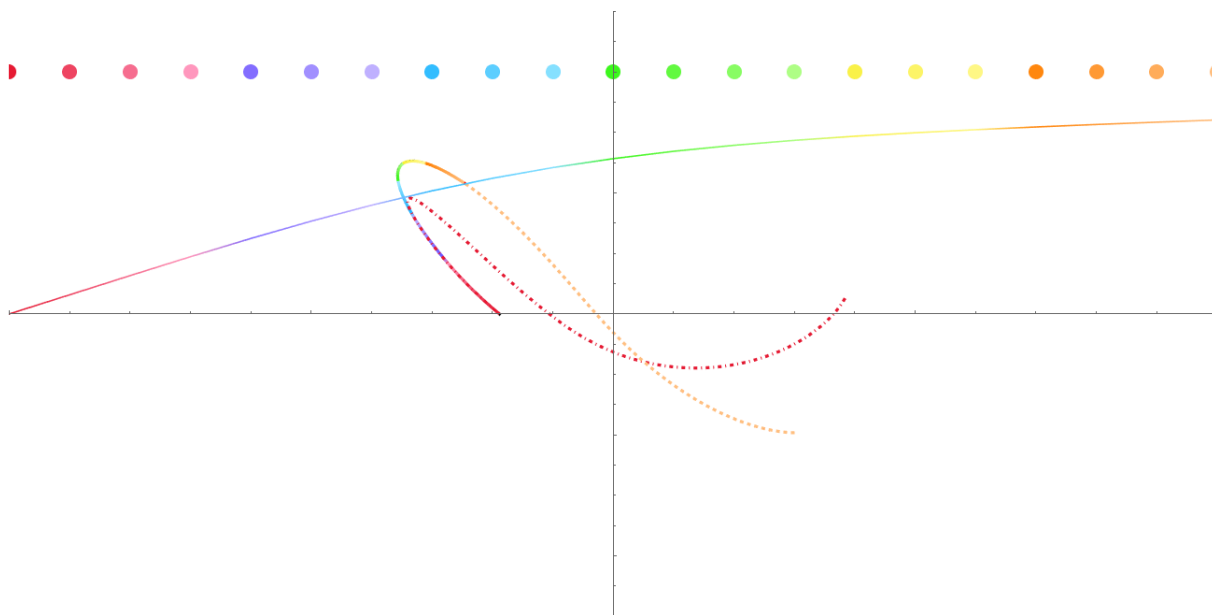


Figura 3.7: Calentamiento.

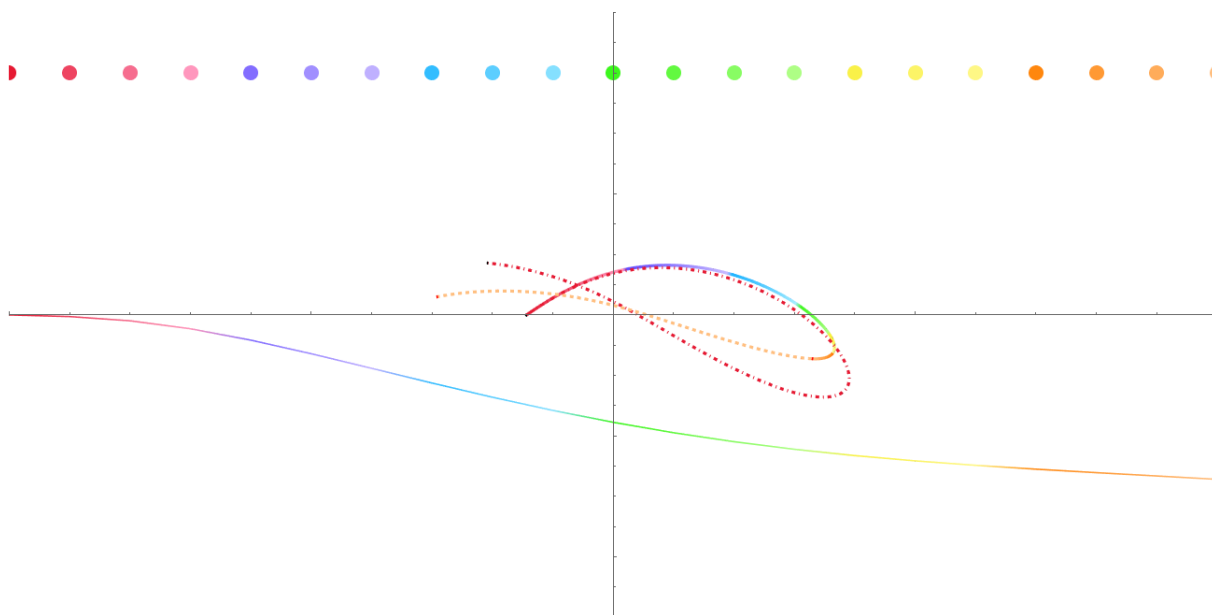


Figura 3.8: Enfriamiento.

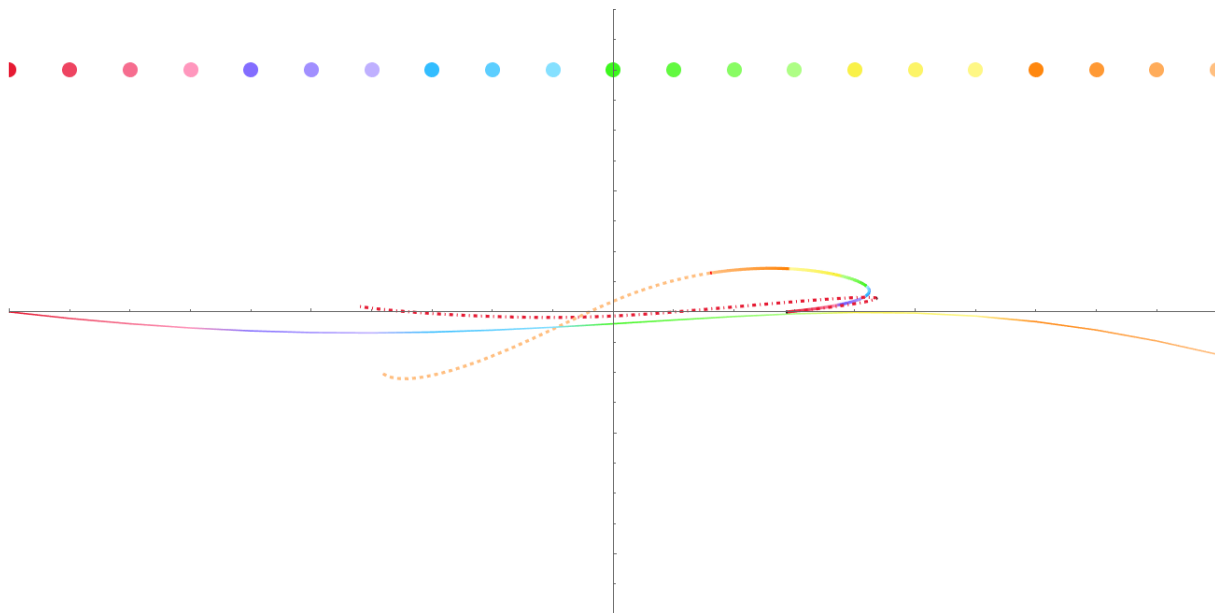


Figura 3.9: Poca absorción energética.

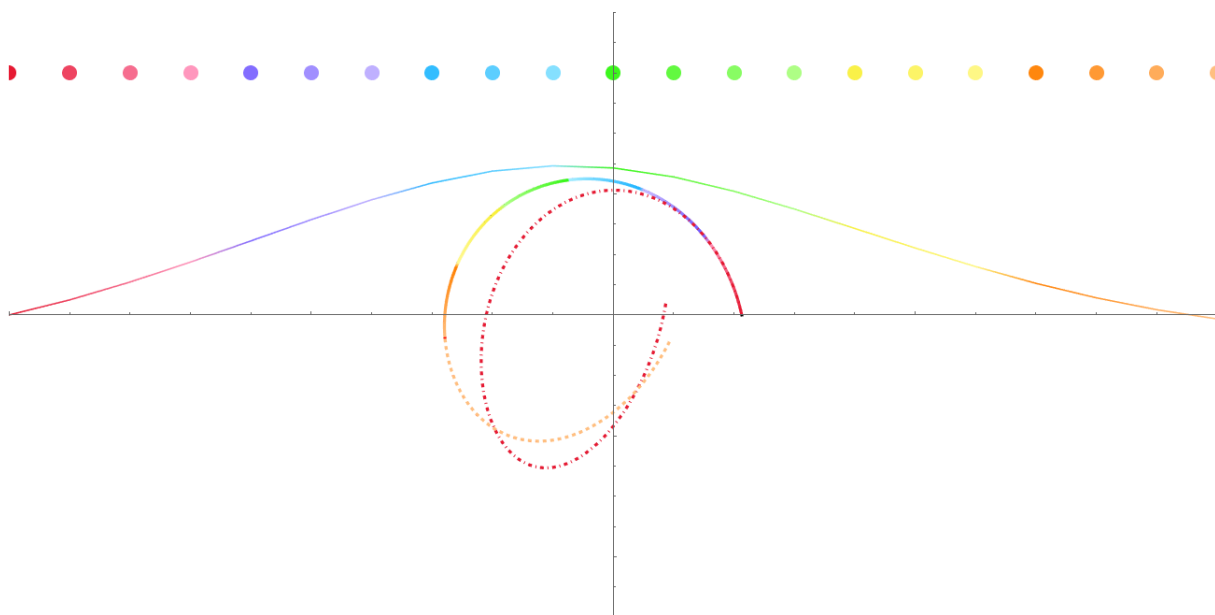


Figura 3.10: Calentamiento y enfriamiento.

Las figuras anteriores contienen los siguientes elementos. En la parte superior está representado el perturbador, cada color de éste representa un instante de tiempo

durante la simulación. Este código de colores es consistente en el resto de la imagen. Adicionalmente tenemos la información espacial de la órbita, la línea roja nos dice cual es el camino que hubiera seguido la órbita *sin* el efecto del perturbador. La línea de colores, es el comportamiento de la órbita durante la perturbación. Finalizando con la trayectoria que ahora sigue la órbita una vez que el efecto el perturbador no esta presente. El último elemento presente en la gráfica es la línea energética correspondiente para ésta.

En la figuras anteriores, podemos observar como la dirección y posición de la órbita es crucial para la cantidad de energía que fue absorbida. En 3.7 y 3.8, vemos como su dirección relativa con el perturbador "acelera" o "frena" a la estrella. En 3.10 vemos que durante la perturbación pueden sufrir tanto un calentamiento como un enfriamiento.

Aún cuando puedes obtener mucha información a través de un análisis individual, debemos utilizar otras técnicas globales para el resto de los 18 experimentos.

Continuando con el enfoque energético podemos definir el *factor de calentamiento*, esto nos indicará en cada uno de los experimentos, si en general las órbitas se calentaron o enfriaron. Esto fue calculado usando la siguiente expresión.

$$F_{\text{calentamiento}} = \frac{\sum_{n=1}^{N_{\text{orbitas}}} E_f}{N_{\text{orbitas}} E_i} \quad (3.9)$$

De esta forma podemos calcularlo para cada uno de los experimentos y ver el comportamiento general de las órbitas. Como lo mostramos en la siguiente figura

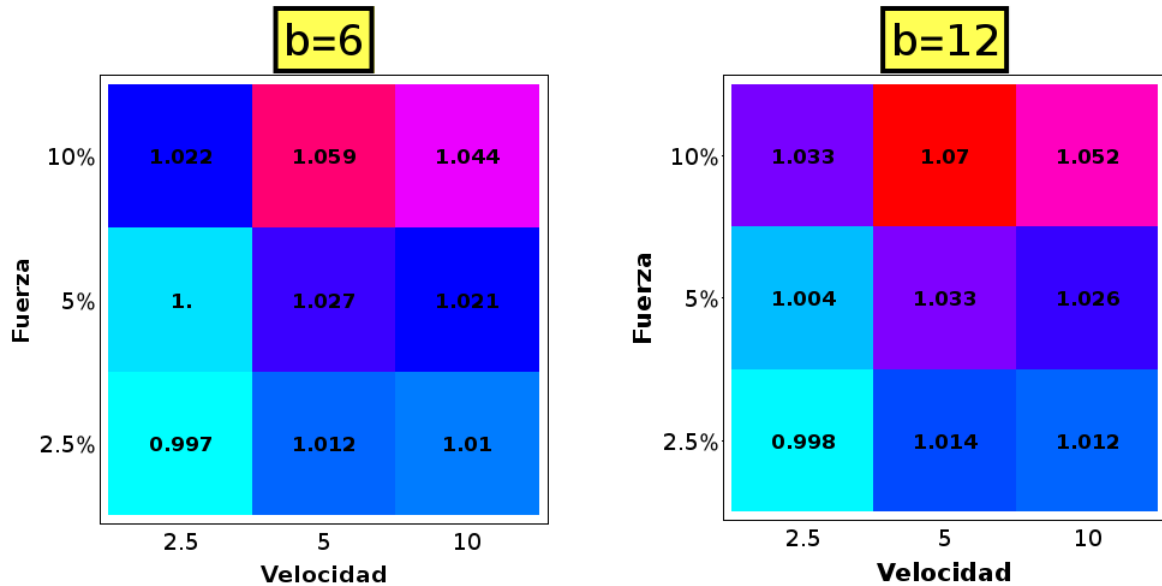


Figura 3.11: Factor de Calentamiento en los experimentos realizados.

En la figura anterior podemos ver, que independientemente del parámetro de impacto, los experimentos parecen tener un factor de calentamiento determinado por su fuerza y velocidad. Siendo el mayor con una fuerza del 10% velocidad 2.5 y el menor con una fuerza del 2.5% y velocidad de 2.5.

Continuando en un análisis global de los experimentos, podemos tomar la información de la figura anterior y observar los cortes de Poincaré del caso inicial así como el de mayor y menor calentamiento.¹

¹Los cortes de Poincaré de todos los experimentos se encuentran en el Apéndice B

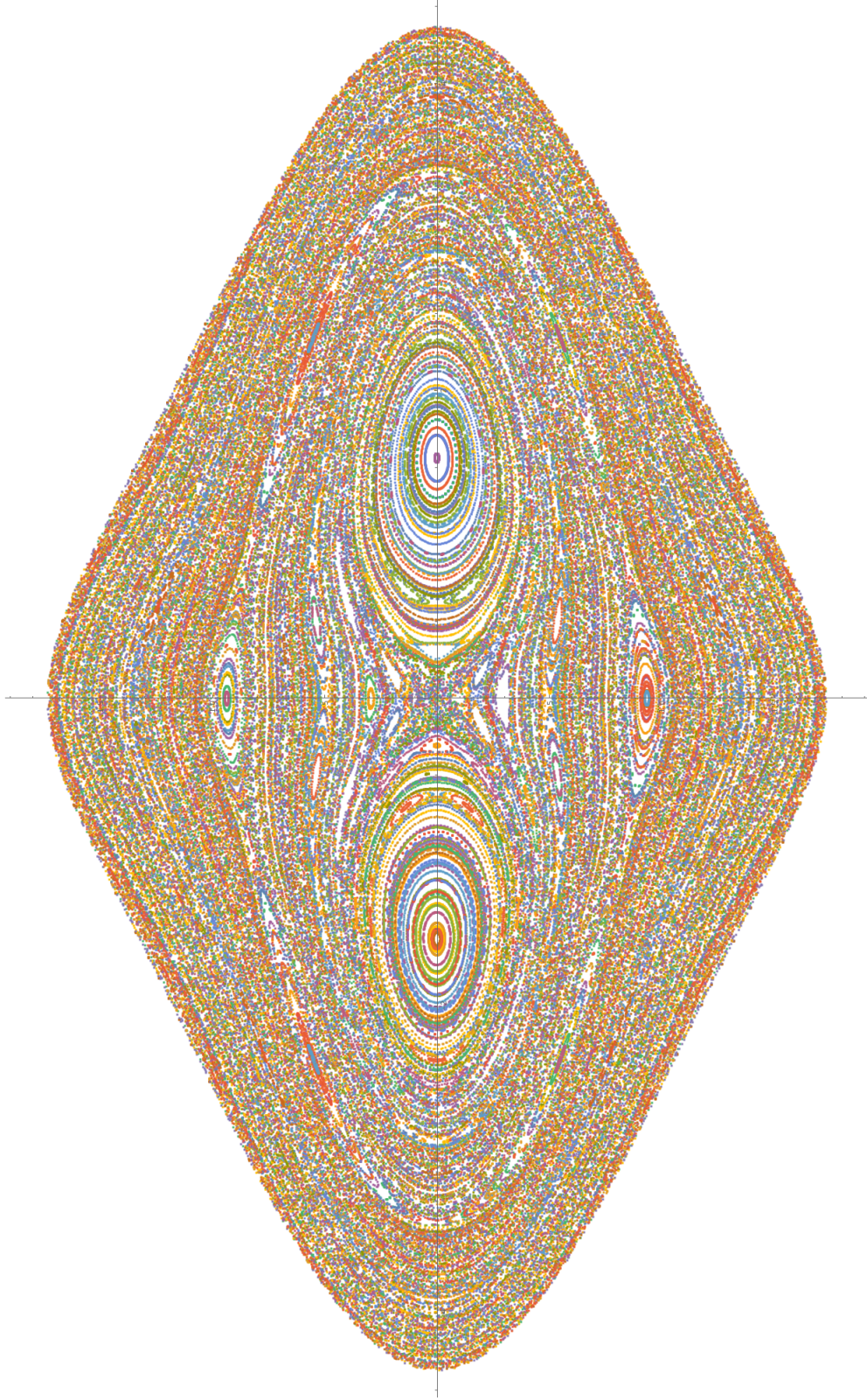


Figura 3.12: Corte de Poincaré inicial.



Figura 3.13: Corte de Poincaré del caso con menor calentamiento.

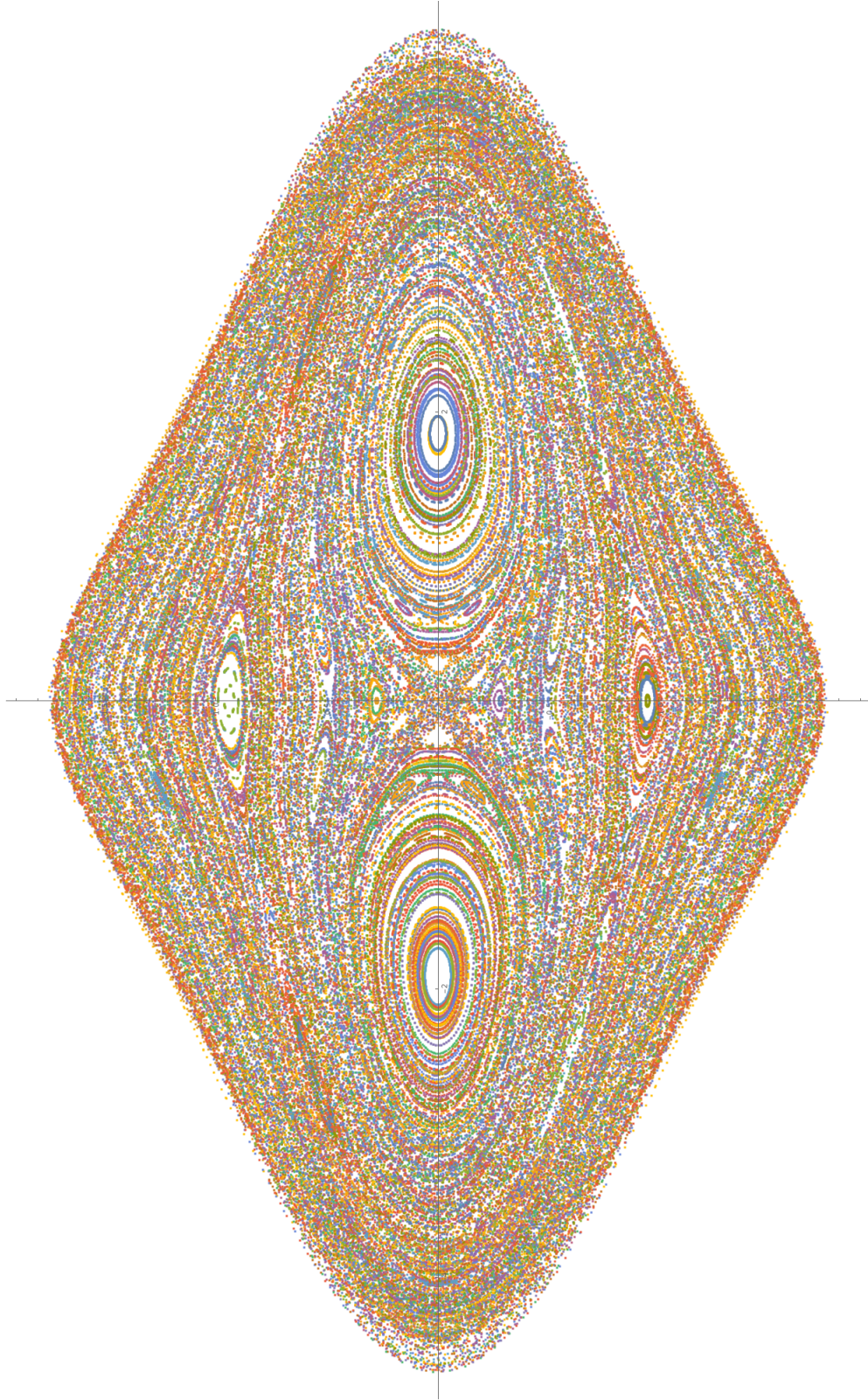


Figura 3.14: Corte de Poincaré del caso con menor calentamiento.

Sin mucho análisis podemos apreciar un cambio estructural inclusive en el caso de menor calentamiento.

Sin embargo, si queremos tener un visión más detallada, utilizamos el clasificador de órbitas *Taxon*², el cual nos permitirá conocer las órbitas de la barra antes y después de la perturbación en cada uno de los experimentos.

En la siguiente tabla mostramos, la clasificación inicial y las ganancias o perdidas en cada uno de los experimentos.

²Taxon es un programa escrito en Fortran que clasifica órbitas utilizando análisis de Fourier. (Carpintero y Aguilar, 1998)

	<i>Irregular</i>	<i>Open Loop</i>	<i>Closed Box</i>	<i>Closed Loop</i>	<i>Open Boxlet</i>	<i>Closed Boxlet</i>	<i>Open Box</i>
<i>Inicial</i>	72	136	0	2	111	2	677
<i>211</i>	-10	26	0	-1	-8	-1	-6
<i>212</i>	14	32	0	-1	-5	4	-44
<i>213</i>	6	25	0	0	-3	2	-30
<i>221</i>	-4	-6	0	-1	8	2	1
<i>222</i>	-4	20	0	-1	-2	1	-14
<i>223</i>	0	17	0	2	3	0	-22
<i>231</i>	-3	-2	0	-2	6	1	0
<i>232</i>	0	12	0	-1	5	0	-16
<i>233</i>	9	10	0	-1	-14	0	-4
<i>311</i>	2	13	0	0	-1	2	-16
<i>312</i>	1	49	0	-2	3	4	-55
<i>313</i>	10	22	0	-2	10	3	-43
<i>321</i>	4	-5	0	-2	11	6	-14
<i>322</i>	-6	28	0	-2	3	0	-23
<i>323</i>	-4	19	0	-2	5	2	-20
<i>331</i>	1	-4	0	-1	2	5	-3
<i>332</i>	0	13	0	-1	10	0	-22
<i>333</i>	-6	12	0	1	-7	0	0

Table 3.2: Transiciones entre las familias orbitales. La primera columna son los códigos de cada uno de los experimentos la tabla de referencia se encuentra en el Apéndice B.1

Otra forma que tenemos para poder visualizar el intercambio de tipo de órbitas, es por medio de grafos, comparando en cada uno de los experimentos la transferencia que hubo en la barra logarítmica antes y después de la perturbación.

Table 3.3: Grafos de transición de órbitas con $b=6$

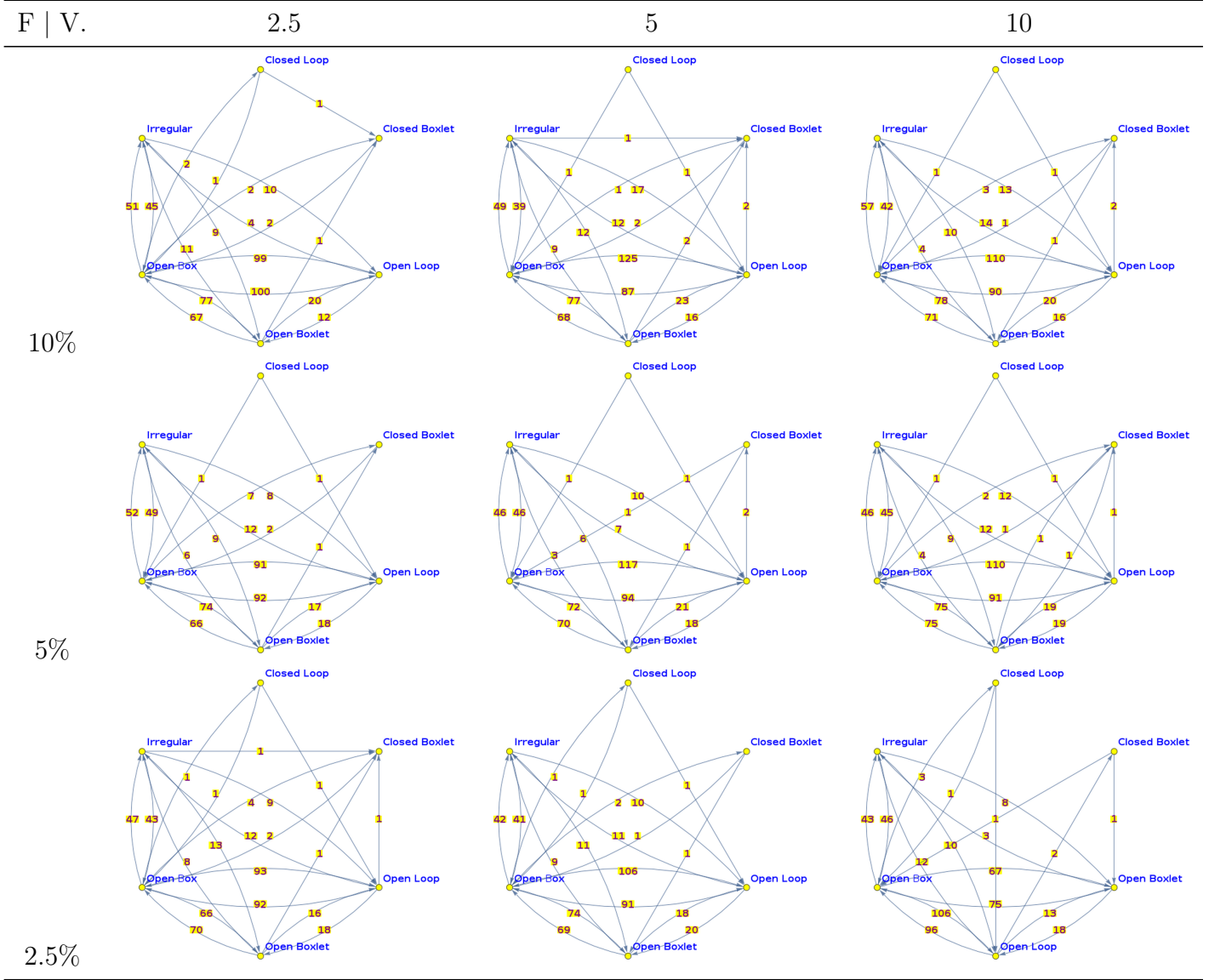


Table 3.4: Grafos de transición de órbitas con b=12

Capítulo 4

Conclusiones

En esta tesis se realizaron experimentos numéricos, con el propósito de investigar los posibles cambios en la estructura orbital del potencial logarítmico ocasionados a un perturbador gravitacional, esto para sentar las bases para el estudio del posible efecto que puede sufrir una galaxia debido a la influencia de los miembros lejanos de su cúmulo galáctico. A partir de los resultados obtenidos en los distintos experimentos realizados, podemos derivar distintas conclusiones.

Los análisis energéticos, nos muestra que, la influencia del perturbador varía en cada partícula dentro del potencial. Haciendo una comparación entre las curvas de energía y el espacio de configuración, podemos ver que las diferencias en la curva de energía están ligadas a la posición y velocidad de la partícula. Ya que dependiendo del sentido de giro de la partícula, el perturbador la puede "jalar" o "frenar".

Si bien el comportamiento energético individual de cada partícula es distinto. Glob-

almente si pudimos establecer si hubo un calentamiento u enfriamiento. El experimento con $v = 5, F = 10\%$, el que inyectó mas energía al perturbador, y en general los experimentos con velocidad de $v = 5$ siempre presentaron mayor calentamiento con respecto a sus análogos a distintas velocidades. Esto nos indica que esta velocidad es la más cercana al tiempo dinámico del sistema.

Los cortes de Poincaré mostraron de forma clara y rápida diferencias en la estructura orbital del potencial, donde se observa intercambio en las familias orbital en cada uno de los experimentos realizados.

Si bien los cortes de Poincaré muestran de forma clara el efecto del perturbador en el potencial, para un análisis mas a detalle del intercambio de órbitas, incorporamos a nuestras herramientas el clasificador de órbitas *Taxon*, con el que pudimos extraer de nuestra simulación la clasificación de las órbitas de cada una de las partículas prueba dentro del potencial.

Cada una de las familias orbitales sufrieron algún tipo de intercambio pero el que llama la atención es el intercambio entre órbitas tipo *Open Box* y *Open Loop*, debido a que su órbita padre es distinta y fueron las que su intercambio fue incrementando con respecto al calentamiento causado por el perturbador. En el caso de mayor calentamiento hubo un intercambio neto de 238 órbitas entre estas dos familias y no solo hubo intercambio si no que después de ser perturbadas la familia de *Open Box* ganó de las *Open Loop* 38 partículas.

El haber visto un cambio en la estructura orbital aun con el experimento de menor fuerza motiva a continuar explorando las perturbaciones débiles. Sin embargo es

importante reconocer el grado de simplificación que se realizó en el experimento. Por lo mismo, es visto como continuación directa de este trabajo realizar las siguientes extensiones.

- Un hecho de la naturaleza es que las galaxias no son objetos bidimensionales, por lo que un paso natural es aumentar una dimensión a nuestra simulación. Por una parte este paso puede realizarse con cierto nivel de trivialidad debido a que la forma tridimensional de la barra logarítmica esta bien establecida. Pero al ser este un escenario donde el espacio fase posee 6 dimensiones, ya no podríamos contar la herramienta de los cortes de Poincaré.
- La influencia que siente una galaxia por sus vecinos lejanos, no solo es de un perturbador. Por lo que el otro aspecto a implementar es la influencia de perturbaciones pequeñas provenientes de muchos perturbadores simultáneos. Para esto es necesario modelar una distribución de perturbadores que recree la de un cúmulo galáctico, además de la modificación del código para implementar la integración simultanea de todo el cúmulo.
- Los dos puntos anteriores, causan otra dificultad que sería, al aumentar tanto las dimensiones como el número de perturbadores, el tiempo de computo puede escalar de forma dramática. Al ser Mathematica una suite de programación de bajo nivel de abstracción, podría ser necesaria un cambio parcial o completo del lenguaje de programación.

Referencias

- Abell, G. (1958). The Distribution of Rich Clusters of Galaxies. En *Astrophysical Journal Supplement*, **3**:211.
- Binney, J. y Spergel, D. (1984). Spectral stellar dynamics. II - The action integrals *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **206**(12): 159–177.
- Binney, James. y Tremaine, Scott. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University Press.
- Burden, Richard. y Faires, Douglas. (2010). Numerical Analysis. CENGAGE Learning.
- Carpintero, D.D. y Aguilar, L.A. (1998). Orbit classification in arbitrary 2D and 3D potentials *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **298**:1–21.
- Hubble, E.P. (1926). *Astrophysics. J*, **63**: 236.
- Hubble, E.P. (1926). *Astrophysics. J*, **63**: 281.
- Hubble, E.P. (1929). *Astrophysics. J*, **69**: 103.
- Hubble, E.P. (1936). The Realm of the Nebulae Yale University Press

- José, J. y Saletan, E. (1998). *Classical Dynamics a contemporary Approach*. Cambridge University Press
- Mihalas, D. y Binney, J. (1968). *Galactic Astronomy Structure and Kinematics*. W. H. Freeman and Company.
- Masi, M. (2007). On compressive radial tidal forces. *Am.J.Phys*, **75**: 116–124.
- Richstone, D.O. (1982). Scale-free models of galaxies. II - A complete survey of orbits. *Astrophysical Journal*, **252**: 496–507.
- Shapley, H. y Ames, A. (1932). A Survey of the External Galaxies Brighter than the Thirteenth Magnitude. *Annals of Harvard College Observatory*, **88**(2): 47–76.
- Sofroniou, M. y Knapp, Rob. (2008). *Advanced Numerical Differential Equation Solving in Mathematica*. Wolfram Research, Inc.
- Tammann, G.A (1985). Introduction to the ESO Workshop on the Virgo Cluster. . *ESO Conference and Workshop Proceedings* , **20**: 3–10.
- Valluri, S.R., Wiegert, P.A, Drozd, J. y Da Silva, M. (2012). A study of the orbits of the logarithmic potential for galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **427**: 2392–2400.

Apéndice A

Repaso de mecánica de Hamilton

A.I Ecuaciones de Hamilton.

Sea $\mathbf{q}$ un conjunto de coordenadas generalizadas, definimos su momento generalizado como.

$$\mathbf{p} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_{\mathbf{q},t} \quad (\text{A.1})$$

Con esto definimos el *Hamiltoniano* como

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \equiv \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (\text{A.2})$$

Si calculamos la derivada del Hamiltoniano

$$d\mathcal{H} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\mathbf{p},t} d\mathbf{q} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{p},t} d\mathbf{p} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right)_{\mathbf{p},\mathbf{q}} dt \quad (\text{A.3})$$

De la ecuación A.2

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= \mathbf{p} \cdot d\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\dot{\mathbf{q}},t} \cdot d\mathbf{q} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)_{\mathbf{q},t} \cdot d\dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right)_{\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}} dt \\ &= \dot{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{p} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\dot{\mathbf{q}},t} \cdot d\mathbf{q} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right)_{\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}} dt \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Como A.3 y A.2 deben ser iguales, igualamos los términos con mismos diferenciales.

Entonces

$$\dot{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\mathbf{q},t} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\mathbf{p},t} = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\dot{\mathbf{q}},t} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right)_{\mathbf{p},\mathbf{q}} = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\right)_{\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}} \quad (\text{A.5})$$

Si usamos la definición A.1 en la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Llegamos a

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \quad ; \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{A.7})$$

A.II Teorema de Noether

El teorema de Noether nos dice que por cada simetría que tiene el sistema le corresponde una cantidad física conservada. Esto

$$\Phi(t) = \Phi(t + t_0) \implies \text{Conservación de energía.}$$

$$\Phi(x) = \Phi(x + x_0) \implies \text{Conservación del momento lineal.}$$

$$\Phi(x) = \Phi(x \times \hat{e}) \implies \text{Conservación del momento angular.}$$

A.III Análisis de Floquet

Sea $\mathbf{F}(\mathbf{t}) = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ una función del espacio fase de una órbita cerrada. Y sea $\mathbf{F}^*(\mathbf{t}) = (\mathbf{x} + \mathbf{x}^*, \mathbf{v} + \mathbf{v}^*)$ una función que describe a una órbita cercana. De tal forma que $\mathbf{x}/\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{v}/\mathbf{v}^*$ sean pequeños.

Analicemos la evolución temporal de $\mathbf{F}^*(\mathbf{t})$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}^*(\mathbf{t}) = \left(\dot{x}_1 + \dot{x}_1^*, \dot{x}_2 + \dot{x}_2^*, -\frac{\partial\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}^*)}{\partial x_1}, -\frac{\partial\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \right) \quad (\text{A.8})$$

Si expandimos en series de Taylor el potencial, podemos expresar de forma matricial.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}^*(\mathbf{t}) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \Phi_{x_1, x_1} & \Phi_{x_1, x_2} & 0 & 0 \\ \Phi_{x_1, x_2} & \Phi_{x_2, x_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Donde

$$\Phi_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial i \partial j} \right)_{\mathbf{F}(\mathbf{t})} \quad (\text{A.10})$$

Es importante notar que el término anterior esta siendo evaluado alrededor del camino de la órbita cerrada $\mathbf{F}(\mathbf{t})$. Al ser estas funciones periódicas, con el mismo periodo $\mathbf{T}$ que la órbita cerrada. Podemos aplicar el teorema de Floquet, el cual nos dice que cualquier solución de un sistema de ecuaciones diferenciales periódicas (como A.9), puede ser escrita como una combinación lineal de funciones de la forma.

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{t}) = \mathbf{F}_0 e^{\lambda \mathbf{t}} \mathbf{P}_\lambda(\mathbf{t}) \quad (\text{A.11})$$

Donde $P_\lambda(t)$ es una función periódica con mismo periodo $\mathbf{T}$.

En general λ puede tener 4 posibles valores. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ estos representan movimientos a lo largo de la órbita cerrada $\mathbf{F}(\mathbf{t})$, pero va ya sea adelantado o retrasado con respecto al punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Los otros dos valores de λ son números reales ó imaginarios puros, es decir $\lambda_3 = +\alpha$ y $\lambda_4 = -\alpha$ ó $\lambda_3 = +i\omega$ y $\lambda_4 = -i\omega$. Donde α y ω son números reales.

Apéndice B

Experimentos

B.I Nomenclatura de los experimentos

<i>Codigo</i>	<i>Parametro de Impacto</i>	<i>Masa</i>	<i>Velocidad</i>	<i>Fuerza(%)</i>
211	12	3.75	2.5	10
212	12	3.75	5	10
213	12	3.75	10	10
221	12	1.9	2.5	5
222	12	1.9	5	5
223	12	1.9	10	5
231	12	0.9	2.5	2.5
232	12	0.9	5	2.5
233	12	0.9	10	2.5
311	24	15	2.5	10
312	24	15	5	10

313	24	15	10	10
321	24	8	2.5	5
322	24	8	5	5
323	24	8	10	5
331	24	3.75	2.5	2.5
332	24	3.75	5	2.5
333	24	3.75	10	2.5

B.II Cortes de Poincaré de la Simulación

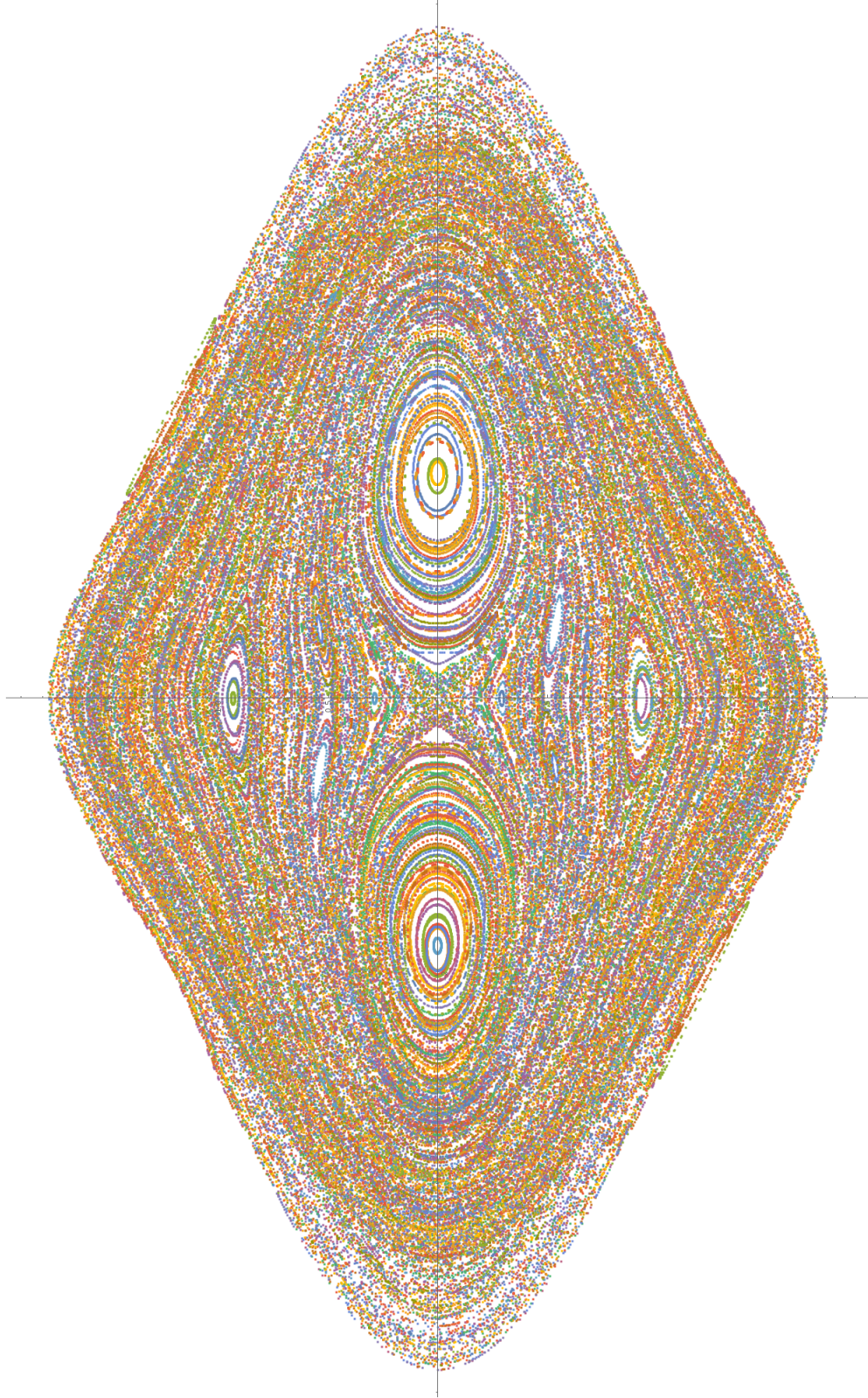


Figura B.1: Experimento 211.

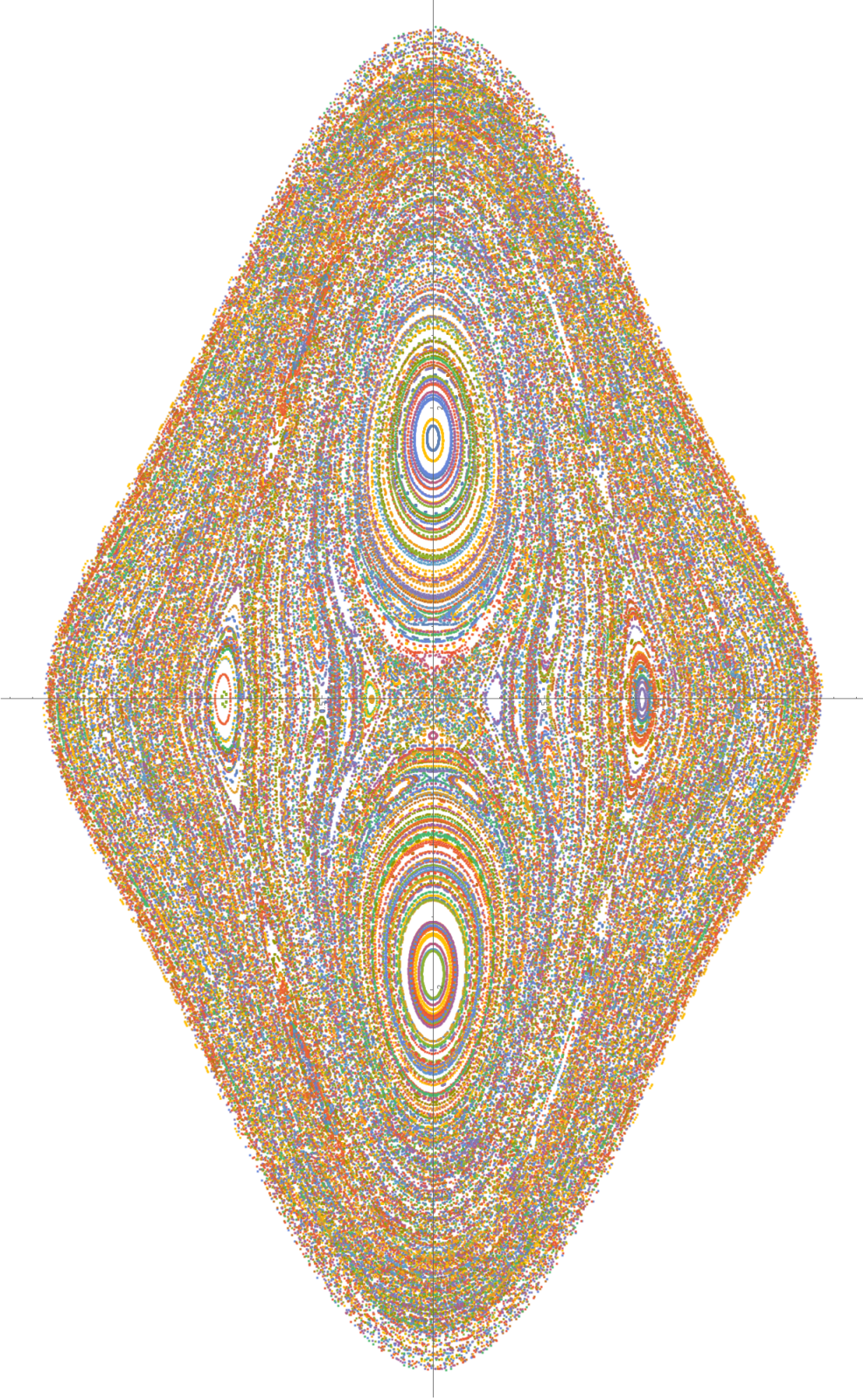


Figura B.2: Experimento 212.

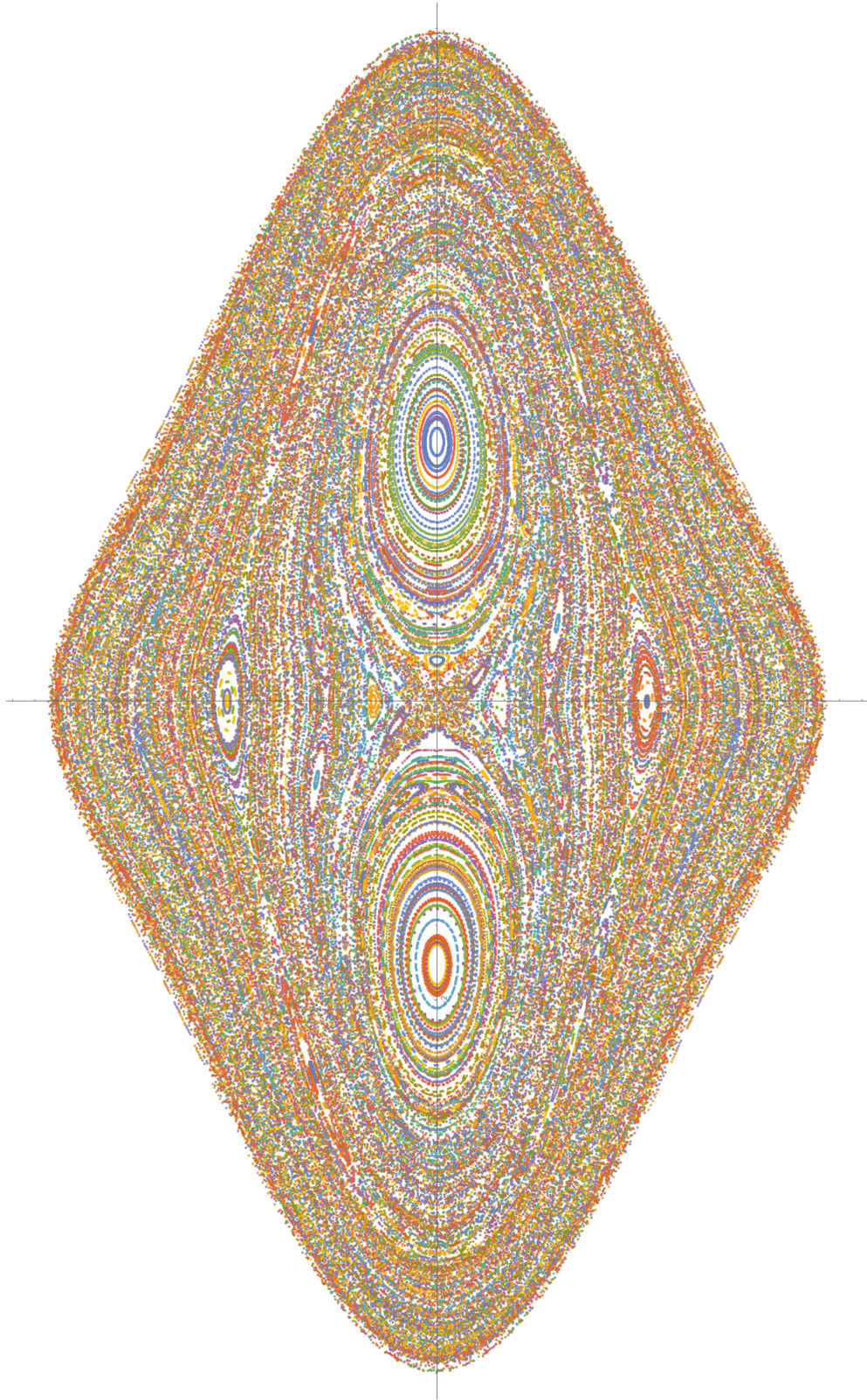


Figura B.3: Experimento 213.

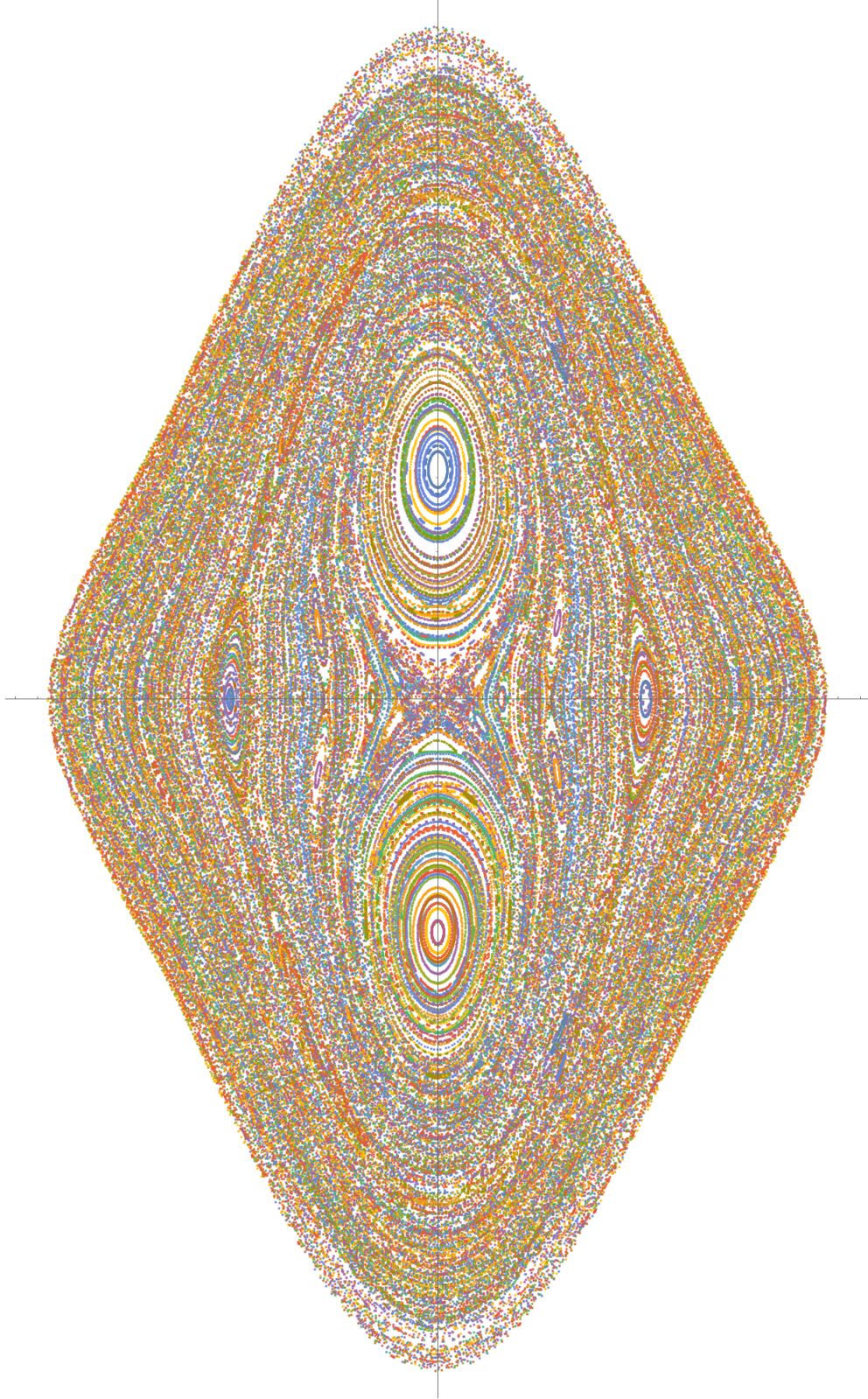


Figura B.4: Experimento 221.



Figura B.5: Experimento 222.

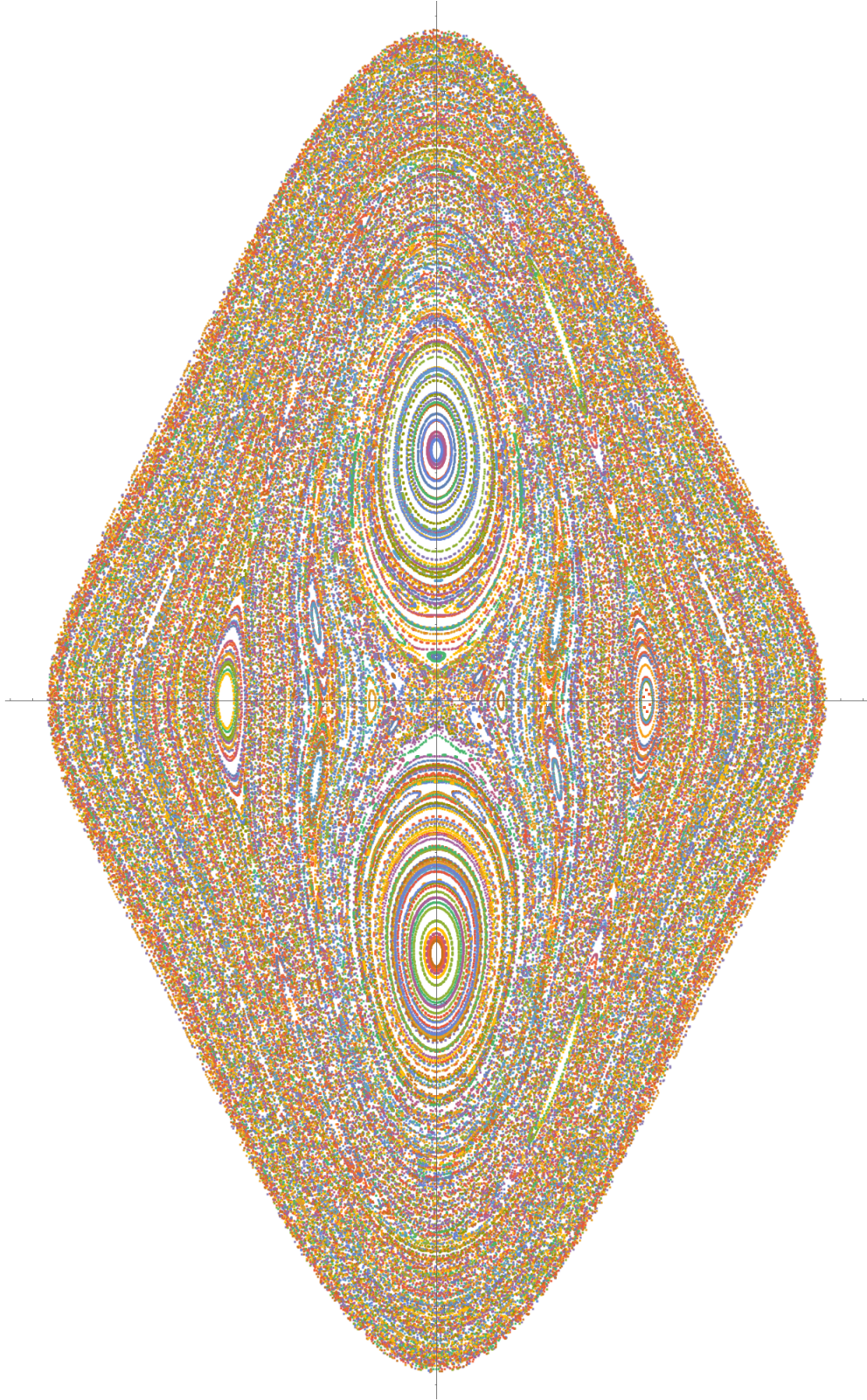


Figura B.6: Experimento 223.



Figura B.7: Experimento 231.



Figura B.8: Experimento 232.

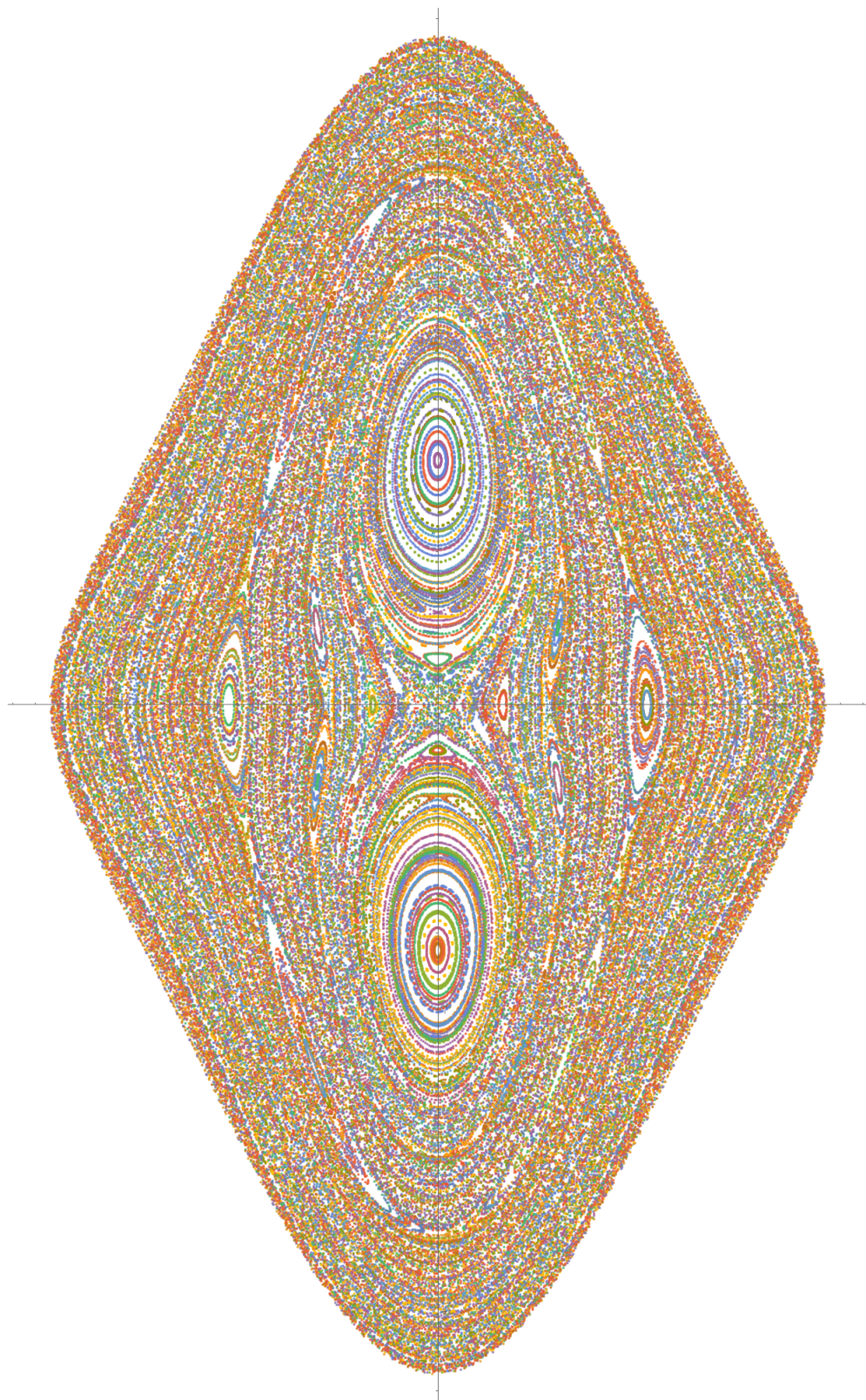


Figura B.9: Experimento 233.

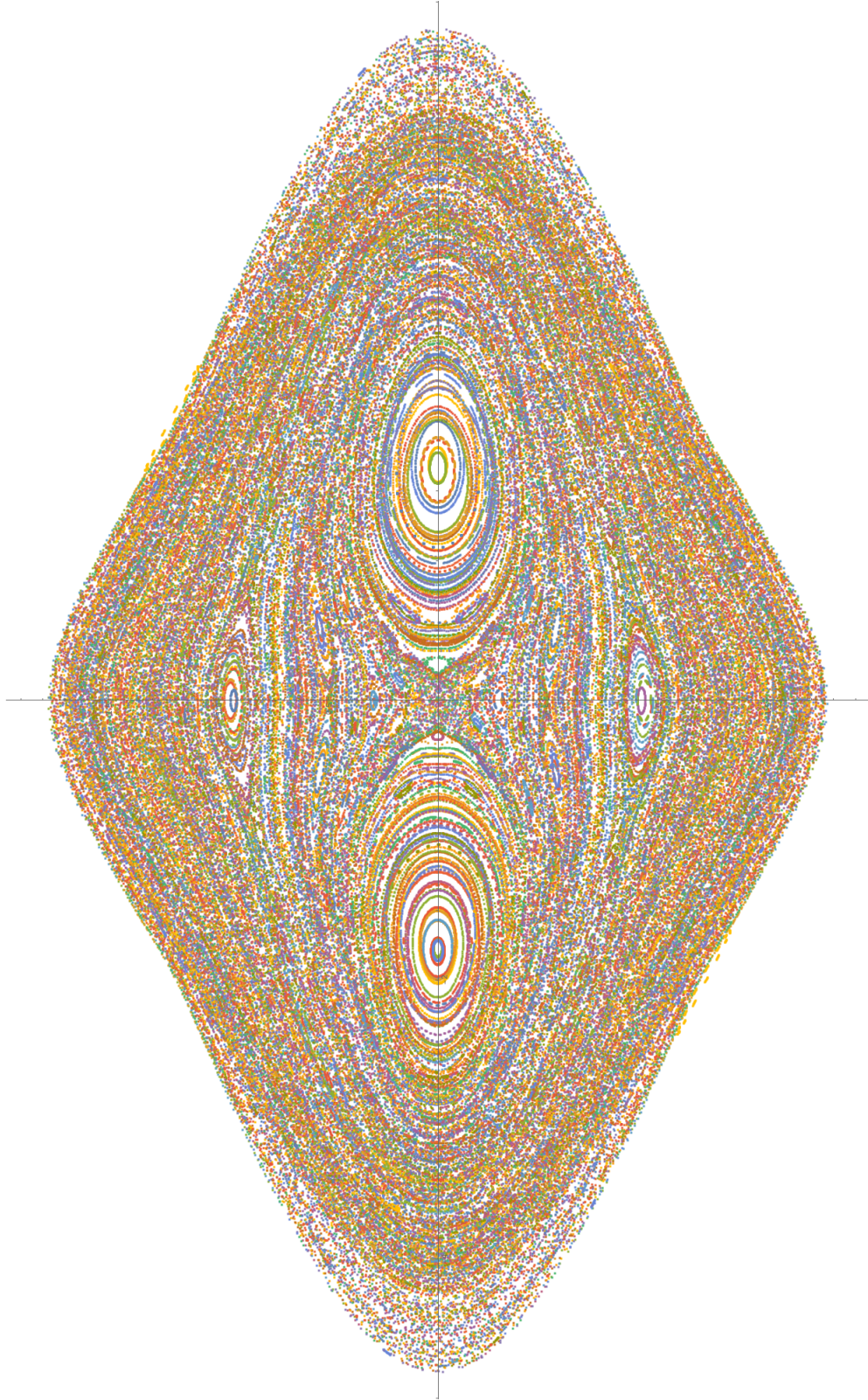


Figura B.10: Experimento 331.

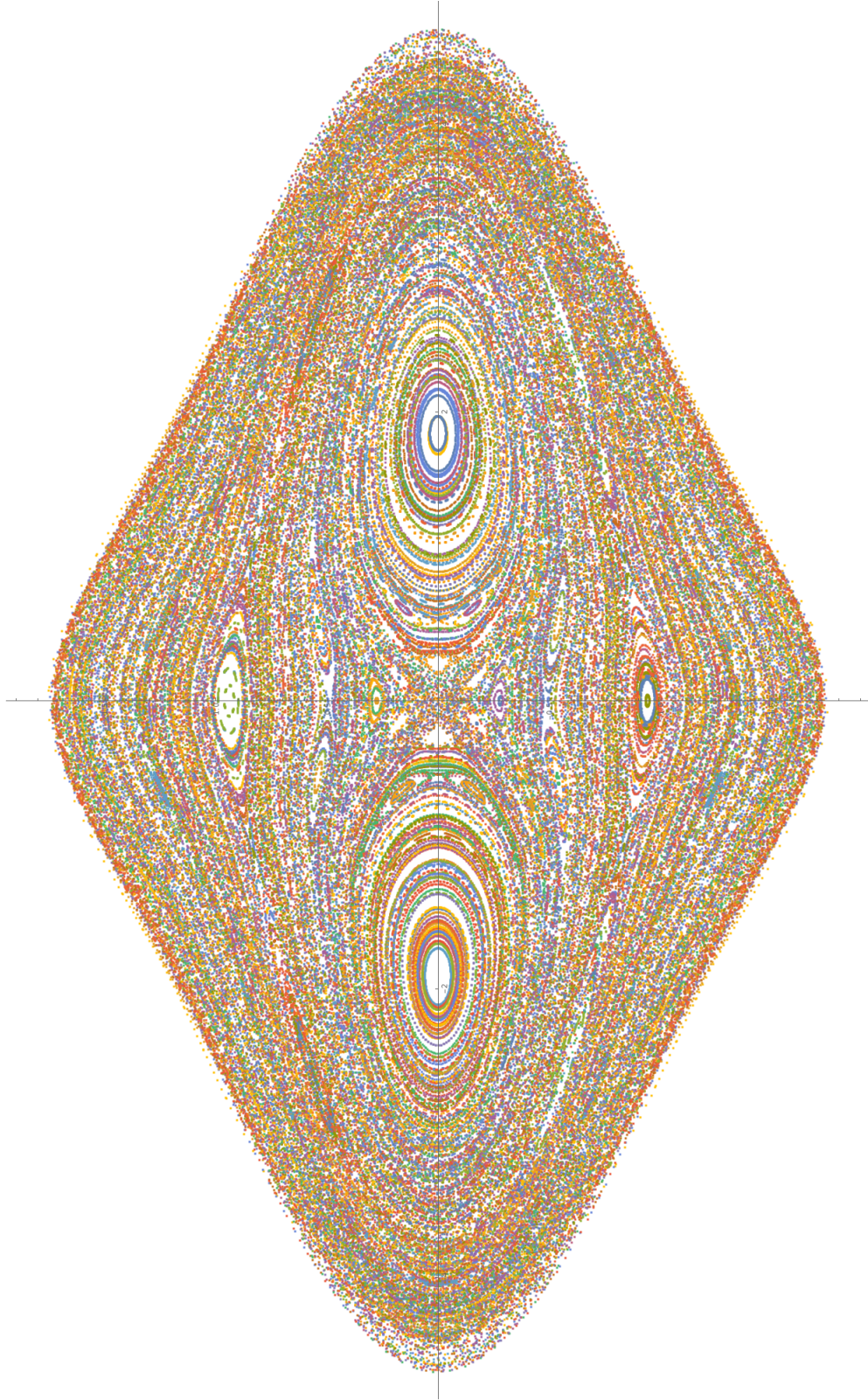


Figura B.11: Experimento 312.

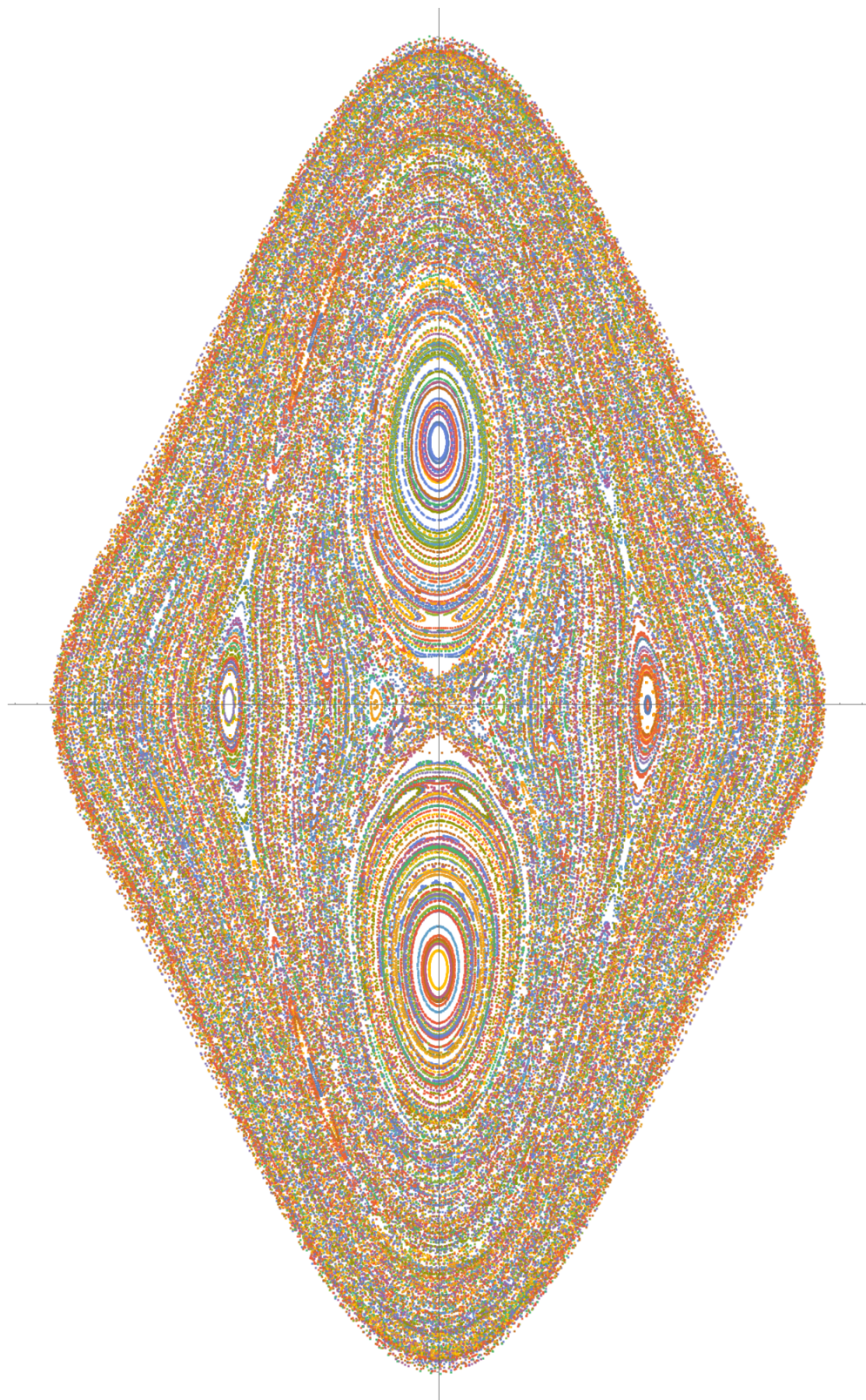


Figura B.12: Experimento 313.



Figura B.13: Experimento 321.

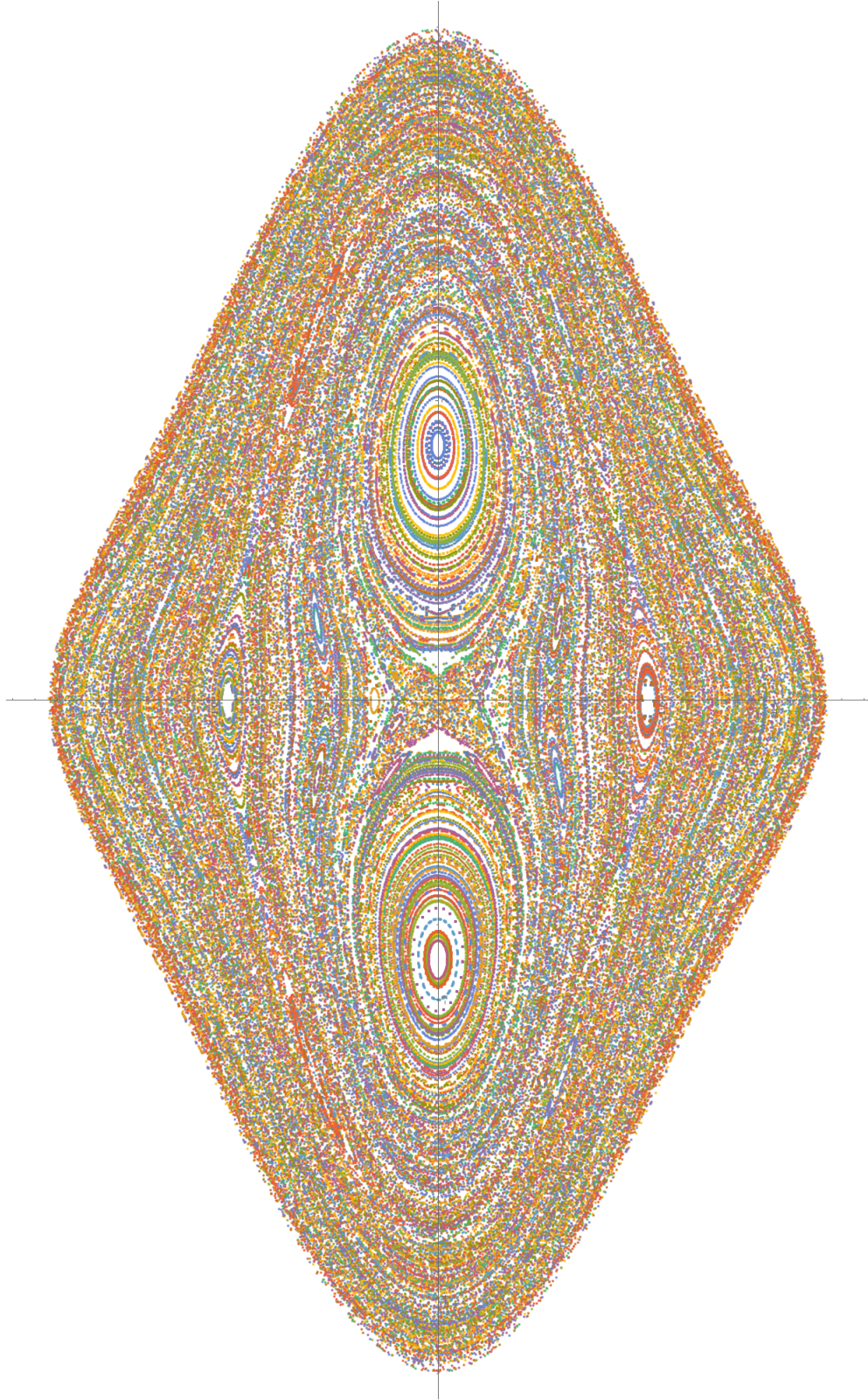


Figura B.14: Experimento 322.



Figura B.15: Experimento 323.



Figura B.16: Experimento 331.

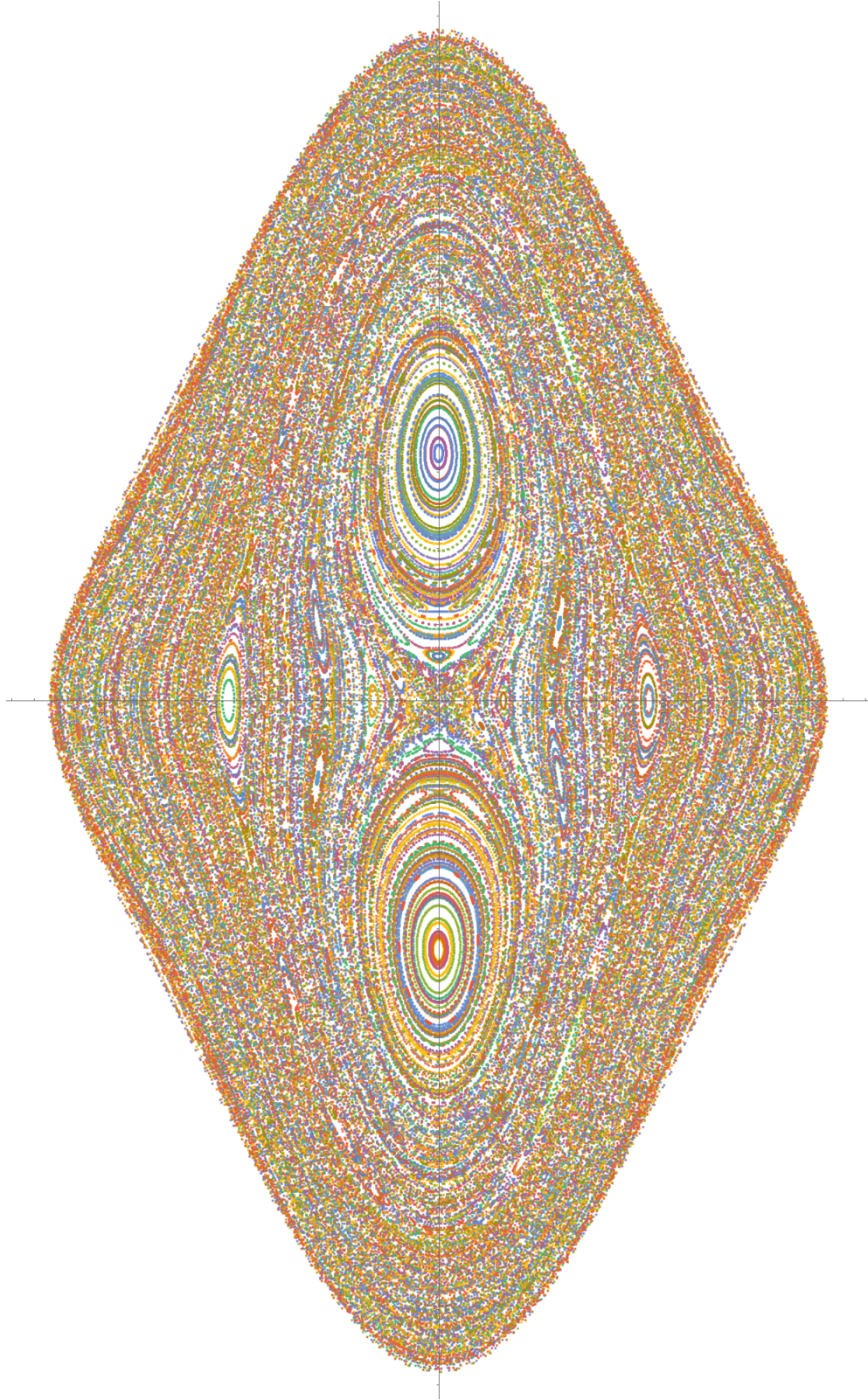


Figura B.17: Experimento 332.

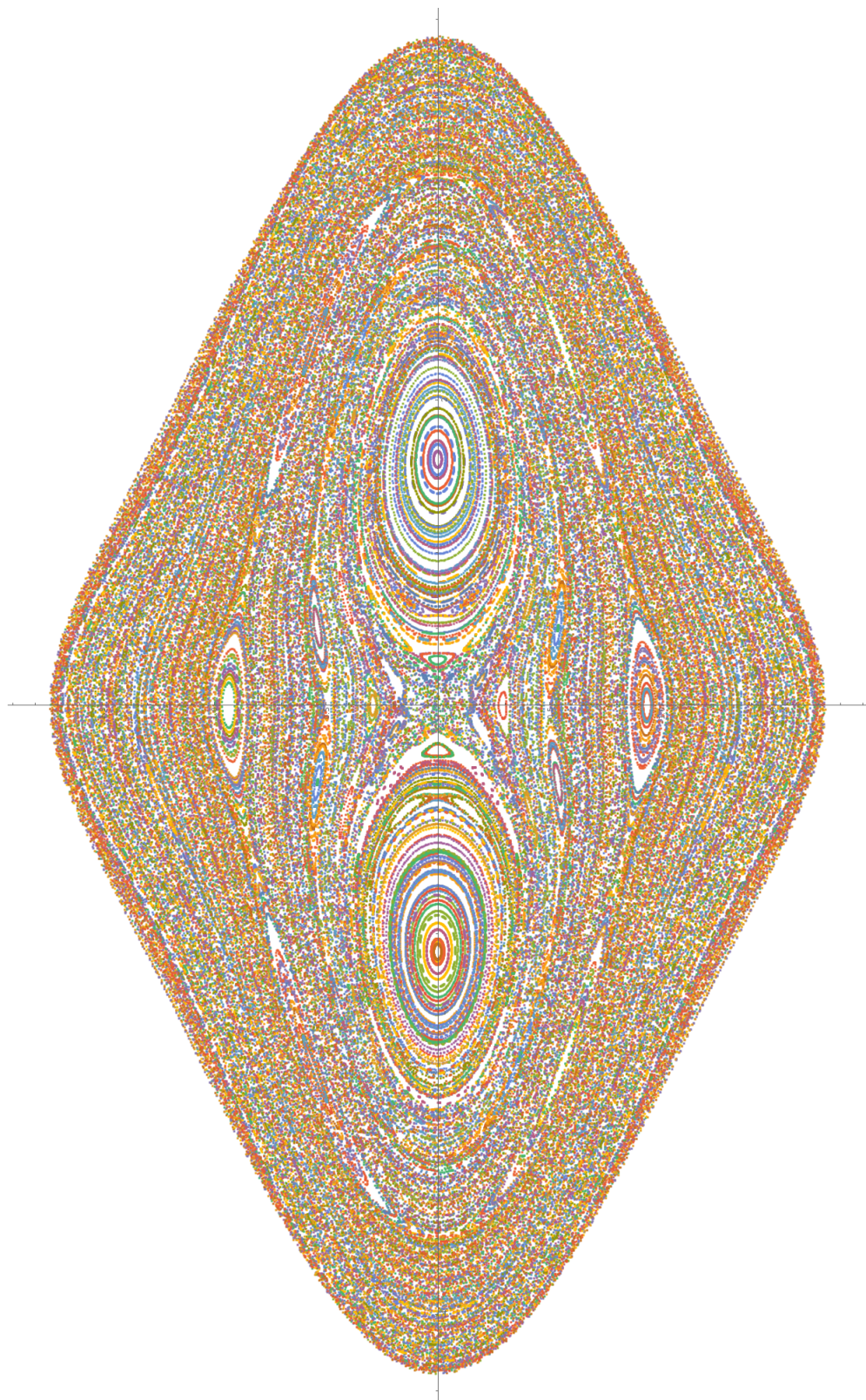


Figura B.18: Experimento 333.



¡Esta tesis evoluciona!