

"MODELOS UNIDIMENSIONALES DE LA MAREA
EN EL GOLFO DE CALIFORNIA"

T E S I S
QUE PRESENTA:
ANGELICA MARIA DE LEON ARTEAGA

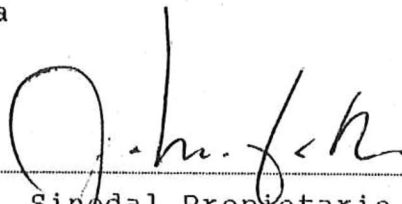
Aprobada por:



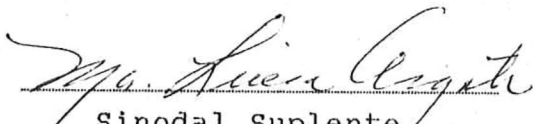
Presidente del Jurado
Dr. Pedro Ripa



Sinodal Propietario
Ph. D. Myrl C. Hendershott



Sinodal Propietario
M.C. Manuel Figueroa Rodriguez



Sinodal Suplente
Dra. Maria Luisa Argote E.



Sinodal Suplente
Oc. Guillermo Gutierrez de V.

A mi madre y padre
Aurelia y Alfonso

A mis segunda madre
la tía Gena
(no todo mundo pueda decir lo mismo)

A mis hermanos:
Alejandro, el sencillo músico y poeta
Fernando, el volador de sueños
Eduardo, el generoso buscador de tesoros
Alfonso, el buscador de caminos

A toda la inmensa tropa de primas y primos
sobrinas y sobrinos
tías y tíos

A Toño, por ser y estar

A Pedro y a Pactli

A toda la gente hermosa con la que
me he cruzado en el camino, y cuyos nombres
simplemente no caben. Sin embargo hay dos muy especiales
Claudia
Alejandra (la mamacheta)

AGRADECIMIENTOS

Aquí la cosa se vuelve interminable, pero hay que comenzar de algún modo. Primero la tropa familiar es decir mi mamá, mi papá, la tía Gena y mis cuatro hermanazos; siempre han hechado muchas porras y ayudado de diversas maneras.

Para Toño sólo tengo algo repetitivo que es: muchas gracias por ser y estar; ha sido muy hermoso compartir la vida contigo.

Por orden cronológico aparece nuestro excelente maestro de ocho cursos de matemáticas, quien siempre se entregó en sus clases. Miguel Angel Ibarra.

En el CICESE siempre he encontrado un ambiente más que agradable, y sin duda Pedro ha contribuido bastante, además de que ha sido todo un placer trabajar con él. Además, y de manera muy especial, deseo extender mis más sinceros agradecimientos a Guido, Pepe, Manuel y a los sinodales que muy amablemente se prestaron para la revisión de esta tesis (como dijo no se quien: no hay error en el caos, tampoco en el escrito caótico).

Deseo también agradecer a Chema, Paty Ramonetti, al centro de cómputo y al CONACyT por su apoyo. Sergio Ramos se portó a todo dar con los dibujos, muchas gracias.

Fuera de lo académico, en Ensenada me encontré con mucha gente a todo dar, como los Mórulos y compañía, los Tutrani, los Rotos, Chuy y Male, Danae, la negrita danzante y un bonche más. A todos gracias.

CONTENIDO

	Resumen.....	i
	Lista de Tablas.....	ii
	Lista de Figuras.....	iv
I.	Introducción.....	1
	I.1 Antecedentes.....	3
	I.2 Objetivos.....	4
	I.3 Metodología.....	5
II.	Modelo unidimensional.....	8
	II.1 Respuesta del modelo a diferentes frecuencias.....	14
III.	Datos.....	18
IV.	Incertidumbres.....	26
V.	Ajustes.....	32
	V.1 Campo de elevaciones.....	34
VI.	Predicciones.....	44
	VI.1 Componente M_2	44
	VI.2 Componente S_2	49
	VI.3 Componente K_1	53
	VI.4 Componente O_1	56
	VI.5 Contribuciones energéticas de cada componente.....	61
VII.	Modelo Cuasi-bidimensional.....	65
	VII.1 Campo de elevaciones.....	70
	VII.2 Contribuciones energéticas de cada componente.....	71
VIII.	Conclusiones.....	77
IX.	Bibliografía.....	79
	Apéndice A.....	80

RESUMEN

Desarrollamos un modelo unidimensional que resuelve las ecuaciones de marea de Laplace, con un término adicional que representa la fricción, para tratar de explicar el campo de elevaciones debido a las componentes M_2 , S_2 , O_1 y K_1 , observado en el Golfo de California. En base a suposiciones estadísticas estimamos los errores asociados a los datos, información que utilizamos para ajustar el modelo a éstos.

Utilizamos dos versiones de topografía: una en la que se promedian valores de profundidad a lo ancho del Golfo (rugosa) y otra analítica (suave) determinada por cuatro parámetros: ancho y profundidad en cada extremo del golfo. También estudiamos el efecto de dos coeficientes de fricción, uno constante y otro que varía inversamente con la profundidad. Los campos de elevación son muy poco sensibles a la parametrización del término de fricción, resultando en buenos ajustes para todas las amplitudes. Los ajustes de fase son buenos en las componentes semidiurnas y aparentemente malos en las diurnas, pero esto es debido a los valores de Topolobampo y La Paz, que resultan muy alejados del modelo.

Desarrollamos una aproximación cuasi-bidimensional que toma como base los campos de elevación y velocidad unidimensionales. Esta resultó importante en las fases de las diurnas, mejorando sustancialmente sus ajustes.

Los campos de velocidad, transporte y disipación, así como la energía total almacenada y disipada por cada una de las componentes, concuerdan muy bien con valores reportados por otros autores.

TABLAS

Tabla I. Características generales de las principales componentes de marea en el Golfo de California.

Tabla II. Parametros batimetricos para el Golfo de California.

Tabla III. Sumatoria de residuos ponderados por la incertidumbre. Topografia rugosa. $\lambda = 1.47 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Tabla IV. Sumatoria de residuos ponderados por la incertidumbre. Topografia rugosa. $\lambda(x)h(x) = 1.81 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$

Tabla V. Sumatoria de residuos ponderados por la incertidumbre. Topografia rugosa.

Tabla VI. Sumatoria de residuos ponderados por la incertidumbre. Topografia rugosa.

Tabla VII. Rangos obtenidos para criterios de ajuste.

Tabla VIII. Sumatoria de residuos ponderados por las incertidumbres.

Tabla IX. Residuos ponderados por la variancia.

Tabla X. Sumatoria de residuos ponderados por las incertidumbres eliminando Topolobampo y La Paz. Topografia Rugosa. $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Tabla XI. Distribucion energetica de las cuatro componentes. Topografia rugosa. $\lambda(x)h(x) = 1.6 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-1}$.

Tabla XII. Distribucion energetica de las cuatro componentes. Topografia rugosa. $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Tabla XIII. Distribucion energetica de las cuatro componentes. Topografia suave. $\lambda = 1.4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Tabla XIV. Tabla comparativa del balance energetico de acuerdo a diversos autores.

Tabla XV. Residuos ponderados por la incertidumbre. Topografia rugosa. $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Tabla VI. Residuos ponderados por la variancia.
Topografia rugosa. $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Tabla XVII. Aproximacion bidimensional. Distribucion
energetica de las cuatro componentes. Topografia
rugosa. $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Tabla XVIII. Aproximacion bidimensional. Distribucion
energetica de las cuatro componentes. Topografia
suave. $\lambda = 1.4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

FIGURAS

1. El Golfo de California. Nótese lo somero de la región norte y las cuencas profundas al sur. Los puntos representan la localización de las 31 estaciones.
2. Línea de costa (a) y profundidad (b) de los golfos rugoso y suave. En ésta y las demás figuras, la línea continua corresponde al modelo rugoso y la punteada al suave. Los modelos sólo necesitan el valor de distancia entre las costas por lo que las islas aparecen como un angostamiento. Nótese que en la zona somera la profundidad del suave es un buen ajuste del rugoso.
3. Amplitud (a) y fase (b) de la elevación relativa al valor en la boca para la topografía rugosa. El coeficiente de fricción es $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.
4. Isolíneas de amplitud (a) y fase (b) para la componente M_2 , tomadas de Gutierrez y Morales (1986). En ésta y las siguientes tres figuras, la amplitud es en centímetros y la fase en grados relativos al meridiano 105 al oeste de Greenwich.
5. Como en la figura 4 para la componente S_2 .
6. Como en la figura 4 para la componente K_1 .
7. Como en la figura 4 para la componente O_1 .
8. Amplitudes (a) de elevación (línea llena) y velocidad (línea punteada), y fase de ambas (b), para un canal de sección transversal constante de 1000 m de profundidad, con $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Nótese la longitud del Golfo de California, relativa a la longitud de onda, para las componentes semidiurnas (S) y diurnas (D).
9. Amplitud (a) y fase (b) de las elevaciones de la componente M_2 . En ésta y las demás figuras la línea continua corresponde al golfo rugoso y la punteada al suave, a menos que se indique otra convención. Las cruces son valores medidos con sus incertidumbres. El coeficiente de fricción es variable.
10. Como en la figura 9 para las elevaciones de la componente S_2 .

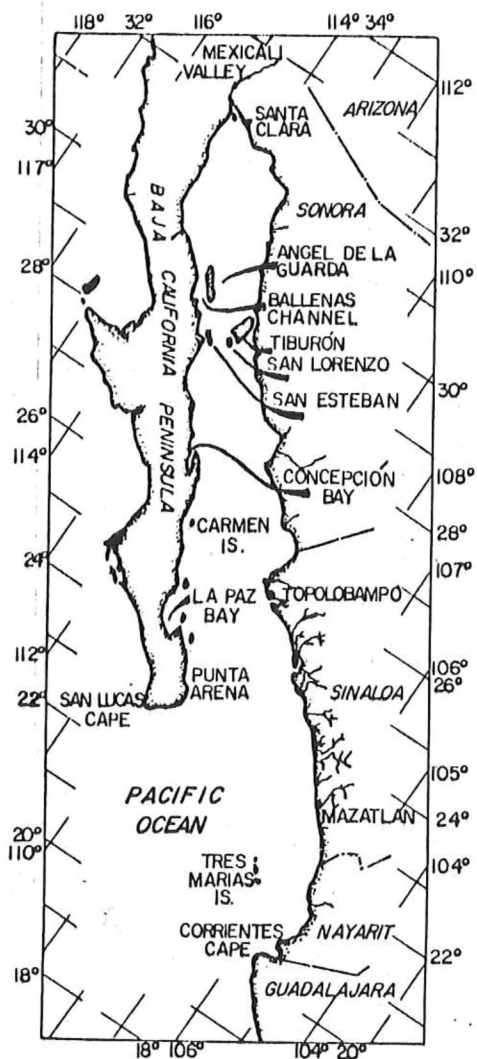
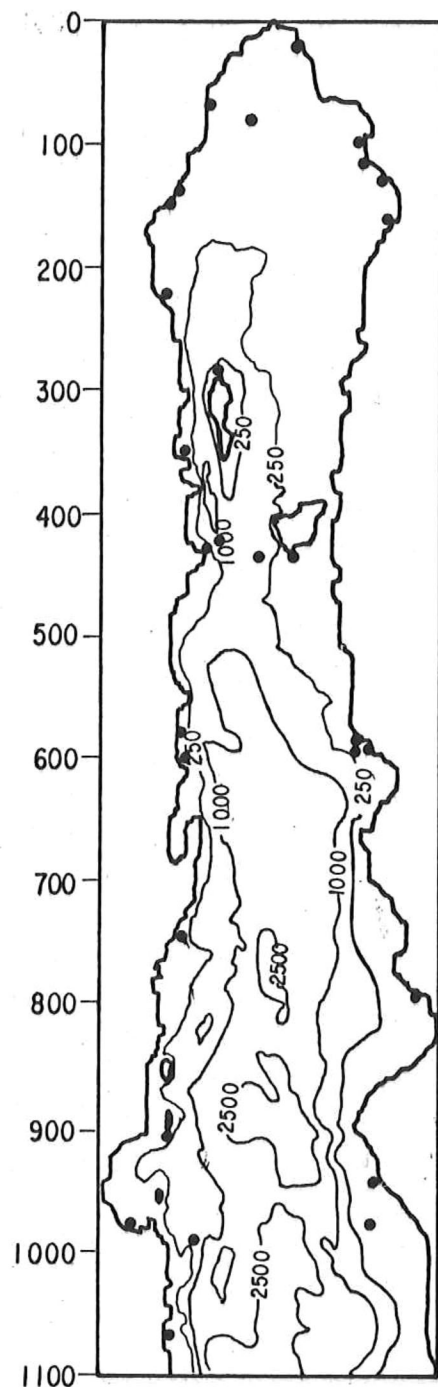
11. Como en la figura 9 para las elevaciones de la componente K_1 .
12. Como en la figura 9 para las elevaciones de la componente O_1 .
13. Amplitudes de velocidad (a) y transporte (b), y fase de ambos campos (c) para la componente M_2 . Las barras muestran los valores obtenidos por Filloux (1973) y el rango espacial de sus transectos. Nótese lo liso de la curva de amplitud de transporte comparada con la de rapidez.
14. Densidades de energía con las topografías rugosa (a) y suave (b), para la componente M_2 . La curva superior corresponde a la energía total, //// es la contribución de la energía potencial y \\\ de la cinética.
15. Disipación de energía con el coeficiente de fricción constante (a) y variable (b), para la componente M_2 .
16. Amplitudes de velocidad (a) y transporte (b), y fase de ambos campos (c) para la componente S_2 .
17. Densidades de energía con las topografías rugosa (a) y suave (b), para la componente S_2 . La curva superior corresponde a la energía total, //// es la contribución de la energía potencial y \\\ de la cinética.
18. Disipación de energía con el coeficiente de fricción constante (a) y variable (b), para la componente S_2 .
19. Amplitudes de velocidad (a) y transporte (b), y fase de ambos campos (c) para la componente K_1 .
20. Densidades de energía con las topografías rugosa (a) y suave (b), para la componente K_1 . La curva superior corresponde a la energía total, //// es la contribución de la energía potencial y \\\ de la cinética.
21. Disipación de energía con el coeficiente de fricción constante (a) y variable (b), para la componente K_1 .
22. Amplitudes de velocidad (a) y transporte (b), y fase de ambos campos (c) para la componente O_1 .

23. Densidades de energía con las topografías rugosa (a) y suave (b), para la componente O_1 . La curva superior corresponde a la energía total, //// es la contribución de la energía potencial y \\\ de la cinética.
24. Disipación de energía con el coeficiente de fricción constante (a) y variable (b), para la componente O_1 .
25. Amplitudes (a) y fases (b) de las elevaciones obtenidas con el modelo cuasi-bidimensional, para la componente M_2 . La línea llena representa los valores en la costa de Baja California y la punteada en la de Sonora y Sinaloa. Los triángulos representan las estaciones ubicadas a lo largo de B. California; los octágonos a lo largo de Sonora y Sinaloa y las cruces las estaciones en zonas intermedias.
26. Como en la figura 25, para la componente S_2 .
27. Como en la figura 25, para la componente K_1 .
28. Como en la figura 25, para la componente O_1 .

I. INTRODUCCION

El Golfo de California se localiza entre los 24° y 32° N y los 105° y 115° W; tiene una longitud de 1100 km, un ancho promedio de 150 km y una profundidad media de 729 m. Está comunicado con el Océano Pacífico en su extremo sur, donde el área de la sección transversal en la boca es de 284 km². Su batimetría es muy irregular, presenta cuencas sucesivas cuya profundidad disminuye hacia el norte. Comunmente se divide al Golfo en tres zonas: la región somera de la cabeza, que abarca la tercera parte de su longitud, la zona profunda al sur y una intermedia que comprende las islas Tiburón y Angel de la Guarda, el umbral y parte de la cuenca de Guaymas (ver figura 1).

La marea es un factor muy importante en la dinámica del Golfo. Alcanza, por ejemplo, rangos de hasta 10 m en la parte norte; se han reportado fuertes corrientes de marea, sobre todo en estrechos, y se sabe que es importante en los procesos de mezcla y formación de frentes (Roden y Emilson, 1979). Las mareas observadas son del tipo mixto con las componentes semidiurnas lunar y solar (M_2 , S_2) y las diurnas lunar y lunar-solar (O_1 , K_1) como dominantes; éstas son las cuatro analizadas en este trabajo. En el sur la marea es fundamentalmente mixta, mientras que en la región central es diurna, ya que existe un punto amfidrómico virtual para las componentes semidiurnas cerca de Santa Rosalía, mientras que en la mitad norte éstas últimas son las que dominan. (Un



1. El Golfo de California. Nótese lo somero de la región norte y las cuencas profundas al sur. Los puntos representan la localización de las 31 estaciones.

punto amfidrómico es aquel en el que la elevación es nula en todo instante; en él se intersectan las líneas de fase. En el Golfo se le denomina virtual porque se "encuentra" en tierra, por lo que las amplitudes de la M_2 y la S_2 nunca son exactamente cero, pero son muy pequeñas en lugares cercanos.)

I.1 Antecedentes: La marea en el Golfo de California ha sido estudiada a través de mediciones y mediante diversos modelos bidimensionales. Grijalva (1972) desarrolló el primer modelo bidimensional del Golfo y obtuvo valores de elevación mayores a los pocos reportados hasta entonces. Filloux (1973) estudió el balance energético de la marea inferido a partir de mediciones. Quirós (1983) calculó corrientes residuales mediante un modelo bidimensional. Stock (1976) desarrolló un modelo armónico con el que resolvió las elevaciones y velocidades de marea. Estudiando también la disipación en el Golfo mediante diferentes parametrizaciones del término de fricción. Argote y Amador (comunicación personal) trabajan actualmente con un modelo de mayor resolución espacial que el de Stock (1976), buscando asociar las zonas de máxima disipación obtenidas del modelo, con procesos de mezcla y formación de frentes. En general los modelos bidimensionales proveen muchos detalles de interés, como por ejemplo el flujo en un estrecho, pero son muy costosos en lo que a tiempo de

computación y espacio de memoria se refiere, por lo que generalmente se avocan a una sola componente; además, suelen ser complicados, dificultando el estudio de los diversos factores que influyen a la marea en el Golfo.

Un aspecto interesante de las mareas en general es la disipación de energía, que parece ser un factor importante en la disminución de la velocidad angular de rotación de la tierra y en el alejamiento de la luna, estimado en 6 cm por año (Hendershott, 1981). Se han reportado valores altos de disipación de la energía de la onda de marea en el Golfo; llama la atención el hecho de que no está distribuida uniformemente entre las componentes principales, sino que los máximos valores están asociados a las componentes semidiurnas, principalmente a la M_2 . Filloux (1973), a partir de mediciones, estima que de todas las componentes lunares la M_2 disipa el 90 %.

I.2 Objetivos: En base a lo anterior en este trabajo pretendemos:

a) Reproducir las elevaciones de las principales componentes de marea, diurnas y semidiurnas, en el Golfo de California, mediante un modelo unidimensional. Con éste, evaluar la importancia en la dinámica del Golfo de factores como topografía y disipación.

b) Estimar la importancia de los efectos debidos a la rotación de la tierra mediante un modelo cuasi-

bidimensional, que utiliza los campos de elevación y velocidad del modelo unidimensional como base.

I.3 Metodología: El primer paso hacia los objetivos es el desarrollo del modelo numérico, en diferencias finitas, que resuelva la ecuaciones de marea de Laplace unidimensionales con un término de fricción lineal. Para evaluar la validez de los campos obtenidos, los comparamos con soluciones analíticas para canales semicerrados, con las siguientes características:

- i) sección transversal constante, sin fricción,
- ii) sección transversal constante, con fricción,
- iii) sección transversal variable, con fricción.

El tercer caso tiene una doble función, ya que con éste también hacemos una aproximación del Golfo de California, donde el ancho y la profundidad son ajustes a la topografía real; a este golfo lo denominamos suave. En general trabajamos con una topografía unidimensional, calculada a partir de una malla batimétrica, a la que denominamos rugosa. Para evaluar los efectos de la fricción con el fondo consideramos dos casos: el primero consiste en suponer que ésta es sólo proporcional a la velocidad, mientras que en el segundo es además inversamente proporcional a la profundidad.

Es bien sabido que toda medición tiene un rango de error o incertidumbre, el cual es importante tener en cuenta cuando se comparan datos con predicciones. En este caso

desconocíamos sus valores, por lo que fué necesario inferirlas en base a criterios estadísticos. Dadas las incertidumbres es entonces posible encontrar los parámetros libres del modelo, tales que se obtengan los mejores ajustes a las elevaciones de las cuatro componentes simultáneamente, para después evaluar qué tan buenas son las predicciones. Con los valores óptimos de elevación y velocidad del modelo, obtenemos los campos de transporte, energías cinética y potencial, y disipación, para después evaluar los valores globales de energía almacenada y disipada en un ciclo de marea.

Hasta aquí el modelo ha sido unidimensional; para obtener alguna información sobre la importancia de la rotación de la tierra sobre la marea en el Golfo, hacemos una aproximación cuasi-bidimensional (que no es lo mismo que un modelo completamente bidimensional), la que a partir de la velocidad y elevación que resultan del modelo anterior, calcula una corrección transversal.

Estos modelos tienen la gran ventaja de ser muy rápidos, desde el punto de vista de cómputo, lo que nos permite observar el comportamiento de los campos de elevación y velocidad, al variar los parámetros libres.

La organización del trabajo es como sigue. En el segundo capítulo presentamos el modelo, las dos versiones de topografía utilizadas y del coeficiente de fricción que

aparece en las ecuaciones. En el tercero hablamos sobre las elevaciones medidas; en el cuarto explicamos en base a qué criterios determinamos sus incertidumbres, para en el quinto discutir cómo decidimos cuál es mejor ajuste a los datos de elevación de las cuatro componentes, para diferentes casos del modelo utilizado, y presentar las elevaciones modeladas. En el sexto mostramos y discutimos los campos de velocidad, transporte, densidad de energía y disipación estimados a partir de los mejores ajustes. En el capítulo siete tratamos sobre la aproximación bidimensional y los ajustes con ésta, para en el octavo presentar las conclusiones de éste trabajo. Al final se encuentra un apéndice, en el que se obtiene la solución de las ecuaciones de aguas someras con el coeficiente de fricción constante, para el caso de ancho y profundidad analíticos.

II. MODELO UNIDIMENSIONAL

En éste capítulo presentamos las dos versiones aproximadas del Golfo de California, los coeficientes de fricción y los dos tipos de solución al sistema de ecuaciones. Como se indicó en la introducción, el contenido energético y la disipación son de interés, por lo que mostramos las relaciones utilizadas para calcularlos.

Un modelo unidimensional, en lo que concierne a este trabajo, es aquel en el que se utilizan promedios a lo ancho del golfo, tanto de la elevación de la superficie, $\eta(x,t)$, como de la componente longitudinal de la velocidad, $u(x,t)$, y de la profundidad $H(x)$. No sólo se ignora la dependencia en la coordenada transversal, y , sino que también se hace otro tanto con la componente de la corriente en esa dirección y con los efectos de Coriolis. Las ecuaciones que regulan la evolución de los campos del modelo son las de momentum y de continuidad, verticalmente integradas, que toman la forma

$$\partial_x u(x,t) = -g \partial_x \eta(x,t) - \lambda u(x,t),$$

$$W(x) \partial_x \eta(x,t) + \partial_x [H(x) W(x) u(x,t)] = 0, \quad (1)$$

donde g es la gravedad, λ es un coeficiente de fricción lineal, $W(x)$ es el ancho y $H(x)$ la profundidad. El problema queda bien definido agregando las condiciones de contorno de flujo nulo en la cabeza y elevación periódica en la boca, es decir,

$$W(0)H(0)u(0,t) = 0 \quad \text{y} \quad \eta(L,t) = \text{Re}[Be^{-i\omega t}], \quad (2)$$

donde B es una amplitud compleja y ω es la frecuencia de alguna de las componentes de marea. Suponemos una dependencia temporal armónica para toda la solución

$$\begin{aligned}\eta(x,t) &= \text{Re}[Z(x)e^{-i\omega t}], \\ u(x,t) &= \text{Re}[U(x)e^{-i\omega t}],\end{aligned}\quad (3)$$

donde $Z(x)$ y $U(x)$ son complejos. De esta manera, se considera la marea en el Golfo como una co-oscilación de la del océano Pacífico, despreciando el efecto directo de la Luna y el Sol. Filloux (1973) estima que el forzamiento astronómico es responsable de tan sólo el 5% de la elevación, para las componentes semidiurnas.

Las densidades de energía cinética (E_k) y potencial (E_p) y la disipación de energía (D), por unidad de longitud y promediadas en un ciclo de marea, están dadas por

$$E_k(x) = \frac{1}{2}\rho H(x)W(x)|U(x)|^2, \quad (4)$$

$$E_p(x) = \frac{1}{2}g\rho W(x)|Z(x)|^2, \quad (5)$$

$$D(x) = \frac{1}{2}\lambda\rho H(x)W(x)|U(x)|^2. \quad (6)$$

donde ρ es la densidad del agua, considerada constante.

Como ya mencionamos, el objetivo del trabajo es modelar las elevaciones de marea. Como describiremos en seguida, tenemos dos parametrizaciones del término de fricción con el fondo, dos versiones de topografía del Golfo y dos tipos de solución analítica y numérica), todo esto nos lleva a los siguientes casos, partiendo de lo más sencillo:

1. Fricción constante - Topografía suave - Solución analítica.
2. Fricción variable - Topografía suave - Solución

- numérica.
3. Fricción constante - Topografía rugosa - Solución Numérica.
 4. Fricción variable - Topografía rugosa - Solución Numérica.

Término de Fricción: En general el esfuerzo con el fondo se considera proporcional al cuadrado de la velocidad, y opuesto en signo a ésta. Tal parametrización tiene el problema de ser alineal, por lo que consideramos dos casos más simples:

a) Término de fricción sólo proporcional a la velocidad, es decir, $\lambda = \text{constante}$, con unidades $[\text{s}^{-1}]$.

b) Término de fricción también inversamente proporcional a la profundidad, i.e. $\lambda(x) = KH(x)^{-1}$, donde K es una constante con unidades $[\text{m s}^{-1}]$. Esta aproximación es más realista, y modifica notoriamente la distribución espacial de la disipación en el Golfo, sobre todo en la región somera del norte. En ambos casos, el parámetro de fricción se elige de acuerdo al mejor ajuste que se logra con las observaciones.

Trabajamos con dos aproximaciones unidimensionales para determinar el ancho y la profundidad a lo largo del golfo:

a) Topografía rugosa: Las funciones $W(x)$ y $H(x)$ se eligen como el ancho en la superficie y la profundidad media en cada sección x ; se calculan a partir de una malla batimétrica de 161 celdas longitudinales por 40 transversales, con un incremento de 6.62 km en ambas

direcciones, que fue a su vez leída de una carta batimétrica. Nótese que, dada la unidimensionalidad del modelo, no aparecen las islas; las corrientes y elevaciones en los canales son reemplazadas por un único valor medio.

b) Topografía suave con solución analítica: El ancho y la profundidad se eligen en la forma

$$\begin{aligned} H(x) &= H_0(1 + \alpha x)^2, \\ W(x) &= W_0/(1 + \beta x)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Los parámetros batimétricos (H_0 , W_0 , α y β), determinados mediante un ajuste por cuadrados mínimos a los datos del golfo rugoso, aparecen en la Tabla I. Estas topografías unidimensionales se muestran en la figura 2.

TABLE I
PARAMETROS BATIMETRICOS PARA EL
GOLFO DE CALIFORNIA

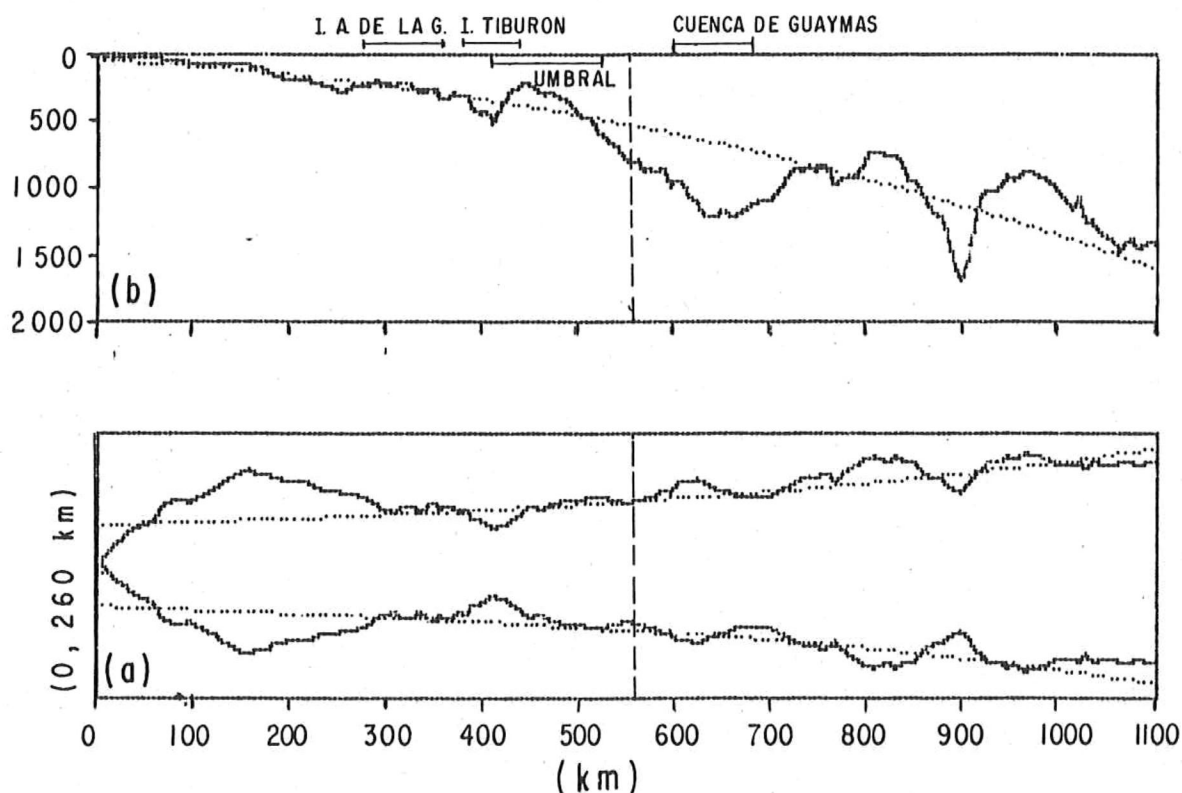
H_0 [m]	α [m ⁻¹]	W_0 [m]	β [m ⁻¹]
34	5.6×10^{-6}	81590	-4.0×10^{-7}

Para esta topografía y el coeficiente de fricción λ constante, las ecuaciones que resultan de sustituir (2) y (3) en (1), tienen como solución analítica

$$U(x) = iU_0(1+\alpha x)^{-3/2}(1+\beta x)\sin\theta, \quad (8)$$

$$Z(x) = \omega^{-1}H_0U_0(1+\alpha x)^{-1/2}[k(1+\beta x)\cos\theta + (\frac{1}{2}\alpha + \beta - \frac{1}{2}\alpha\beta x)\sin\theta], \quad (9)$$

donde



Distancia a la cabeza

2. Línea de costa (a) y profundidad (b) de los golfos rugoso y suave. En ésta y las demás figuras, la línea continua corresponde al modelo rugoso y la punteada al suave. Los modelos sólo necesitan el valor de distancia entre las costas por lo que las islas aparecen como un angostamiento. Nótese que en la zona somera la profundidad del suave es un buen ajuste del rugoso.

$$\Theta = k\alpha^{-1} \ln(1+\alpha x),$$

$$k^2 \equiv \frac{\omega\Omega}{gH_0} - \frac{\alpha^2}{4}, \quad (10)$$

$$\Omega = \omega + i\lambda.$$

En el apéndice se muestra la forma como se obtiene esta solución.

Solución Numérica: Las ecuaciones se resuelven por diferencias finitas, como se describe a continuación. Substituyendo (3) en (1) obtenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} i\Omega U(x) &= gZ(x)', \\ -i\omega W(x)Z(x) + [H(x)W(x)U(x)]' &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Las primas indican derivadas, que en diferencias finitas son aproximadas como

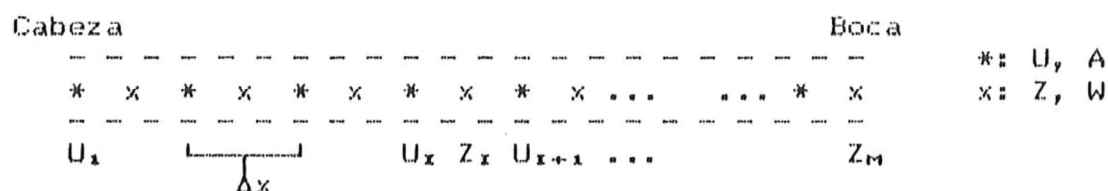
$$\tilde{x}(x)' \approx \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{\Delta x}, \quad (12)$$

donde $\tilde{x}$ es cualquier función de x y Δx es el incremento a lo largo de este eje. Expresando de esta manera las derivadas y despejando, las ecuaciones del sistema (11) se transforman en

$$\begin{aligned} Z_{i+1} &= i\Omega g^{-1} \Delta x U_i + Z_i, \\ U_{i+1} &= \frac{i\omega \Delta x W_i Z_i + A_i U_i}{A_{i+1}}, \end{aligned} \quad (13)$$

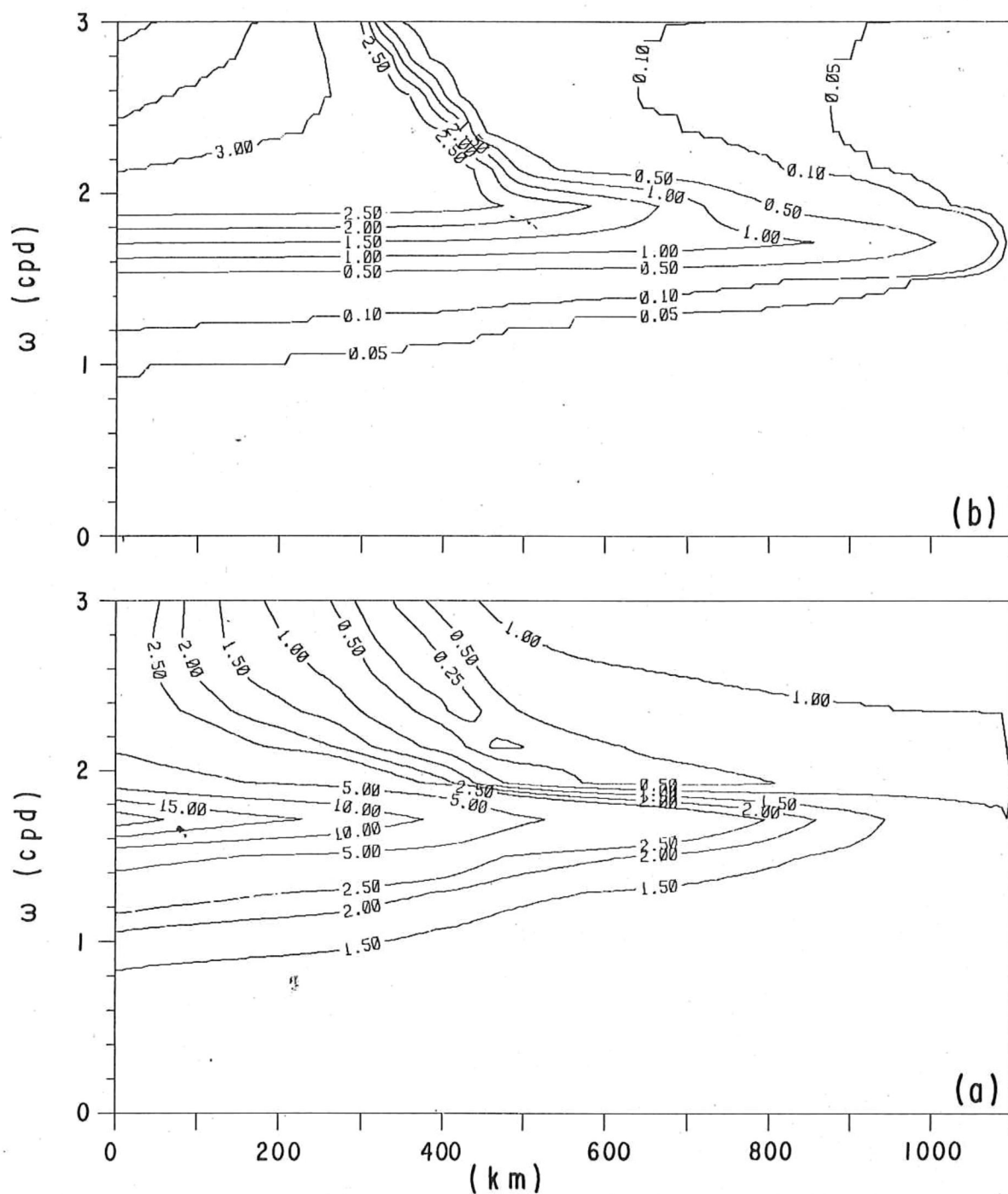
donde A_i es el área transversal de la i -ésima posición a lo largo del canal. Con estas expresiones se determinan los valores de velocidad y elevación a partir de valores

anteriores conocidos, avanzando en el espacio. La distribución espacial se esquematiza a continuación:



Un primer problema, aparentemente, es que las condiciones inicial y de frontera se encuentran en extremos opuestos del canal, es decir $U_1 A_1 = 0$ y $Z_M = B$, donde tenemos M puntos de velocidad y elevación. Como las ecuaciones son lineales resulta que cualquier solución, multiplicada por una constante, sigue siendo solución; por esto es posible dar un valor arbitrario a Z_1 y resolver todo el canal, para después multiplicar la solución por una constante que haga que la elevación en la boca sea B ; de esta forma satisfacemos ambas condiciones. Este método es posible porque las ecuaciones son lineales.

II.1 Respuesta del Modelo a Diferentes Frecuencias: En la figura 3 mostramos contornos de amplitud (3a) y fase (3b), para el modelo con el coeficiente de fricción constante y topografía rugosa. Estas nos permiten apreciar la respuesta de la marea en el Golfo, al variar la frecuencia; en ambas figuras están localizadas las cuatro componentes. Como se mencionó en el capítulo de Modelos Unidimensionales, estamos



Distancia a la cabeza

3. Amplitud (a) y fase (b) de la elevación relativa al valor en la boca para la topografía rugosa. El coeficiente de fricción es $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

suponiendo que la elevación es una oscilación periódica, forzada por la onda de marea del Pacífico y amortiguada por fricción con el fondo. Para entender qué pasa al cambiar la frecuencia de forzamiento, consideremos un sistema muy sencillo que consiste en un resorte con frecuencia natural ω_0 , frecuencia de forzamiento ω y con fricción. Las soluciones para la amplitud y la fase del desplazamiento se pueden encontrar en un libro de texto. Lo que aquí nos interesa es hacer notar lo siguiente: en éste sistema, conforme ω se acerca a ω_0 , la amplitud aumenta hasta llegar a su máximo cuando ambas frecuencias son iguales (si no hubiera fricción, se harían infinitas); en el caso de la fase, se observa un salto de 180° entre los valores antes y después del caso $\omega = \omega_0$, mientras menor es la disipación más abrupto es el salto. A este marcado aumento en las amplitudes y salto de fase cuando $\omega \approx \omega_0$, se le conoce como resonancia (Kitaigorodski, 1975). La resonancia para ondas estacionarias en un canal semicerrado con forzamiento en la boca, ocurre cuando éste tiene un largo igual a $1/4 + n/2$ la longitud de la onda (donde n es entero positivo), que es cuando la elevación en la boca es mínima o nula, dependiendo de si el sistema es disipativo o no. Nótese que la resonancia no corresponde a una frecuencia propia del golfo (la que tendría si estuviera aislado y libre), como sería en el caso de forzamiento directo astronómico. En el Golfo de California las componentes semidiurnas presentan elevaciones

pequeñas cerca de la entrada, por lo que sienten el efecto de resonancia.

Con lo anterior en mente pasemos a la figura 3. En el caso de las amplitudes es muy clara la resonancia cerca de la banda de componentes semidiurnas, correspondiente a una frecuencia de 1.7 cpd (ciclos por día), muy cercano al valor de 1.8 cpd estimado por Filloux (1973). Stock (1976) encuentra resonancia en Punta Peñasco Norte (a 130 km de la cabeza) entre 1.2 y 2.4 cpd, rango que incluye el valor encontrado con este modelo. Los contornos presentan poca estructura en la banda de las componentes diurnas. En cuanto a las fases, es claro el gradiente al variar la frecuencia, sobre todo en la región de la cabeza; éste sería más marcado si la fricción fuera menor. Existen gradientes de fase a lo largo del golfo, que son producidos por fricción; en la banda de las componentes diurnas éstos son muy pequeños, por lo que éstas son poco sensibles a la disipación, según este modelo.

III. DATOS

La sección de Mareografía del Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada (CICESE) nos proporcionó las constantes armónicas de las componentes M_2 , S_2 , O_1 y K_1 , calculadas para 31 estaciones ubicadas a lo largo del golfo, a partir de registros con duraciones que van desde 8 días hasta 30 años (ver figura 1 para su ubicación). En el caso de las series menores a un año, las constantes armónicas se estimaron calculando la función espectral de coherencia con las estaciones cercanas de mayor duración, con lo que se obtiene la función de admitancia entre la serie corta y la serie con la que presentó mayor coherencia (Gutiérrez y Morales, 1986). Lo anterior significa que los registros cortos son alargados artificialmente, permitiendo obtener las amplitudes y fases para más componentes, y con menos error, que si se los considerara aisladamente.

Existen marcadas diferencias entre las componentes semidiurnas (M_2 , S_2) y las diurnas (O_1 , K_1). Las primeras presentan un mínimo de amplitud en la zona central del golfo, correspondiente a la región amfidrómica; la diferencia de fases entre la cabeza y la boca implica un retraso de casi seis horas, como se muestra en la Tabla II; esto es debido a la presencia del punto amfidrómico más que a una fuerte disipación de energía en esta banda de frecuencias. En las componentes diurnas el desfase es muy

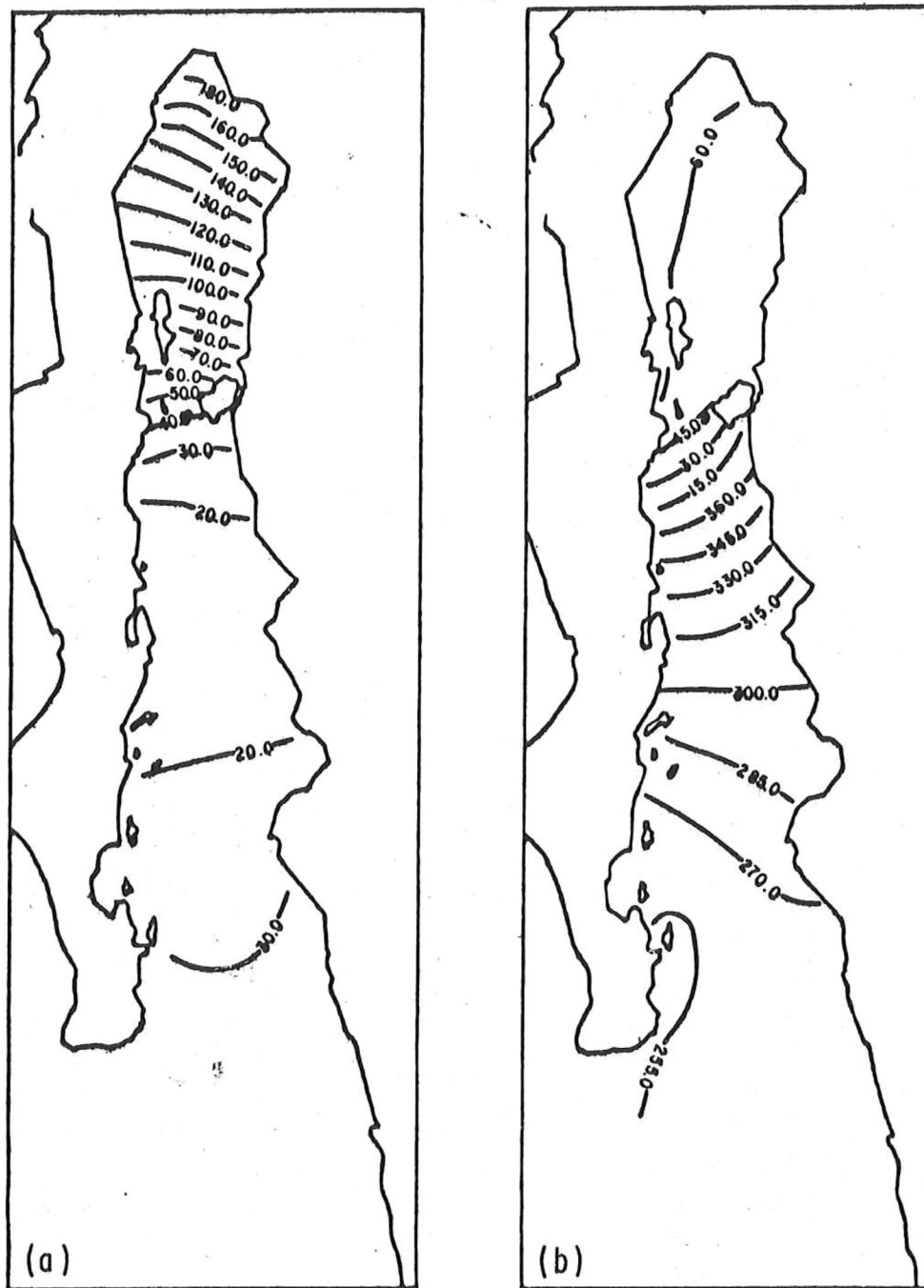
pequeño a lo largo del golfo, equivalente a un retraso de unos pocos minutos; ésto indica que la disipación es mínima, por lo que casi toda la energía que entra vuelve a salir. Las amplitudes aumentan suave y monótonicamente, duplicándose desde la boca hasta la cabeza. El comportamiento general es el de una onda estacionaria.

TABLA II
CARACTERISTICAS GENERALES DE LAS
PRINCIPALES COMPONENTES DE MAREA EN EL
GOLFO DE CALIFORNIA

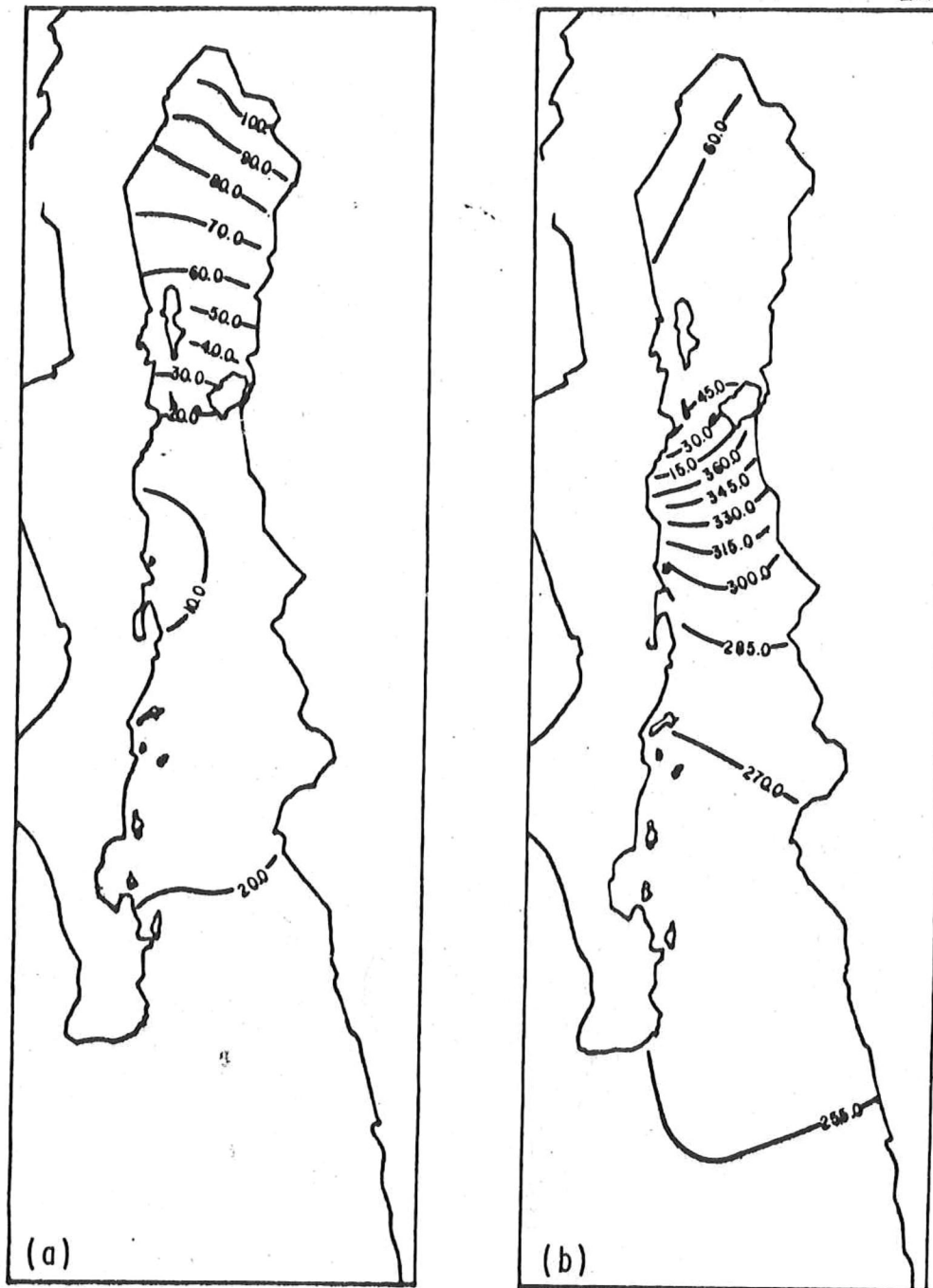
	M_2	S_2	O_1	K_1
T [h]	12.42	12.00	25.82	23.93
ω [s^{-1}]	1.40×10^{-4}	1.45×10^{-4}	6.76×10^{-5}	7.29×10^{-5}
ω [cpd]	1.9	2.0	0.93	1.003
Lon. Onda para H=729m [Km]	3781	3653	7861	7285
AMPLITUDES DE ELEVACION [m]				
Cabeza	1.8	1.1	0.29	0.41
Boca	0.3	0.22	0.16	0.23
Mínima	0.08	0.06	0.16	0.23
Promedio	0.7	0.42	0.22	0.33
Des. Est.	0.62	0.36	0.04	0.07
FASES DE ELEVACION [rad]				
Cabeza	0.06	0.04	0.02	0.01
Boca	-2.91	-2.87	-0.04	-0.03
Des. Est.	1.15	1.24	0.05	0.04
Retraso	5.87 [h]	5.56 [h]	13.8 [min]	7.8 [min]

Tabla II.- Información relacionada con las constantes armónicas, para las cuatro componentes. El retraso se obtiene de la diferencia de fases entre las estaciones más cercanas a la cabeza y la boca. Las longitudes de onda se calcularon considerando un canal uniforme de 729 m de profundidad, que es el valor promedio para el golfo.

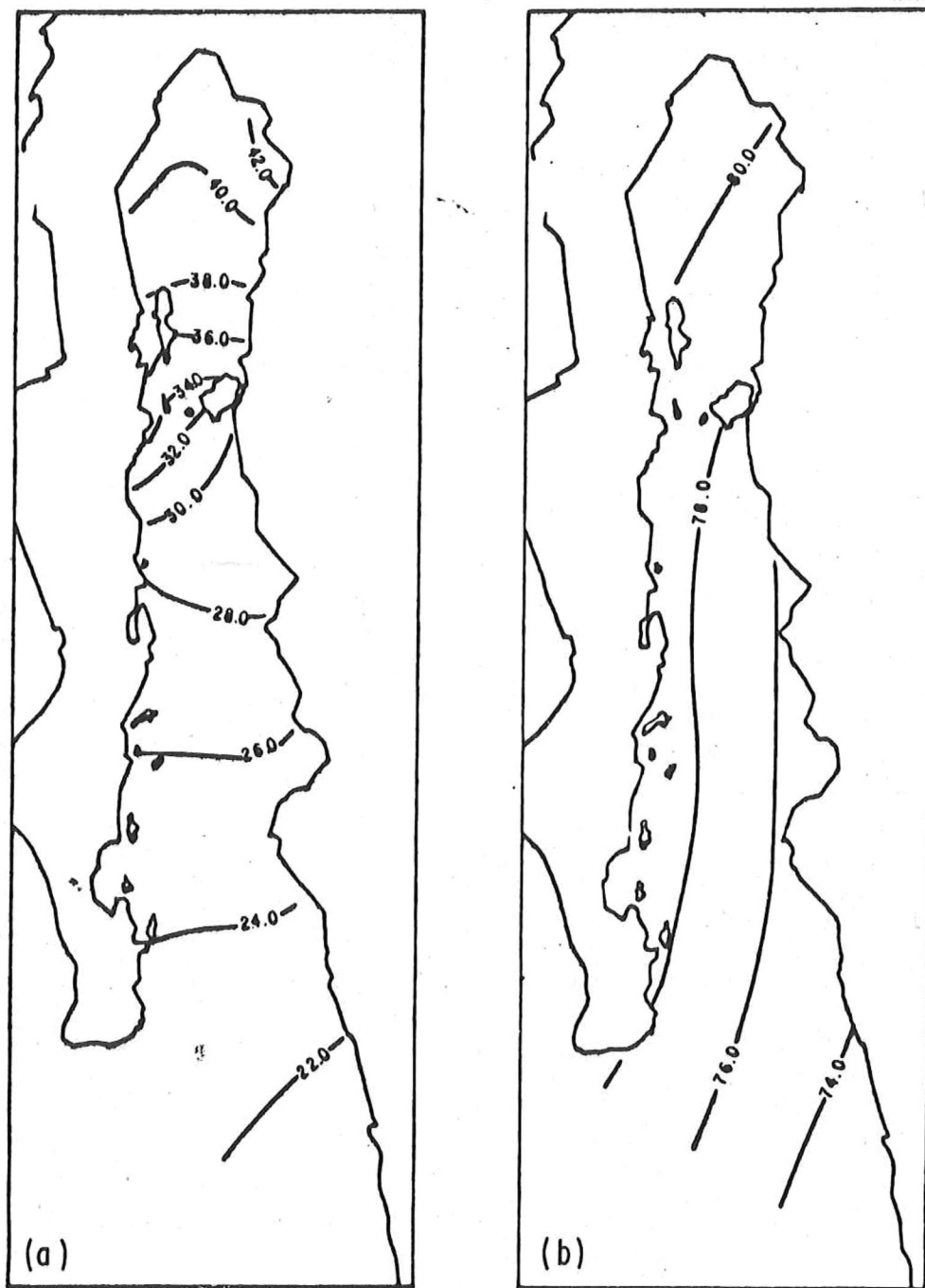
En las figuras 4 a 7, tomadas de Gutierrez y Morales (1986), mostramos los contornos de amplitud (a) y fase (b) de elevación para las componentes M_2 , S_2 , K_1 y O_1 respectivamente, en éstas la amplitud es en centímetros y la fase en grados, referidas al meridiano 105 al oeste de Greenwich. El Golfo de California es un canal corto respecto de la longitud de onda de éstas componentes. Por ejemplo, calculando longitudes de onda para un canal de profundidad igual a la promedio, la longitud del golfo es poco más de $1/4$ de las ondas semidiurnas y alrededor de $1/8$ de las diurnas. Esta relación entre las longitudes del golfo y de las ondas explica el comportamiento general de las fases, que además depende de la fricción. Si no hubiera fricción con el fondo ($\lambda \equiv 0$) la fase sería constante, cambiando su valor en 180° en los nodos, donde la amplitud es nula. Al existir fricción, la amplitud decrece (en el golfo no es apreciable este efecto por no abarcar siquiera media longitud de onda) y la fase no cambia tan bruscamente en los nodos. Ambos efectos se pueden apreciar en la figura 8, donde la longitud del canal es una longitud de onda y $\lambda/\omega \approx 0.08$, que corresponde a $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ para la frecuencia semidiurna. Si comparamos con el Golfo de California es claro que la poca respuesta de la fase de elevación de las diurnas (y de velocidad en todas, como se verá en el capítulo de Predicciones) a la fricción es debido a lo corto del canal.



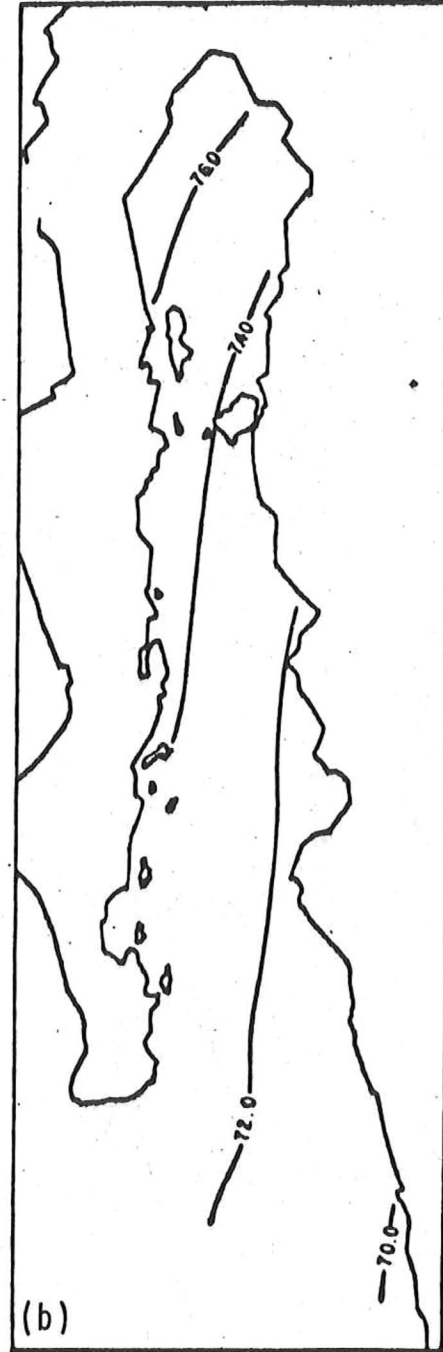
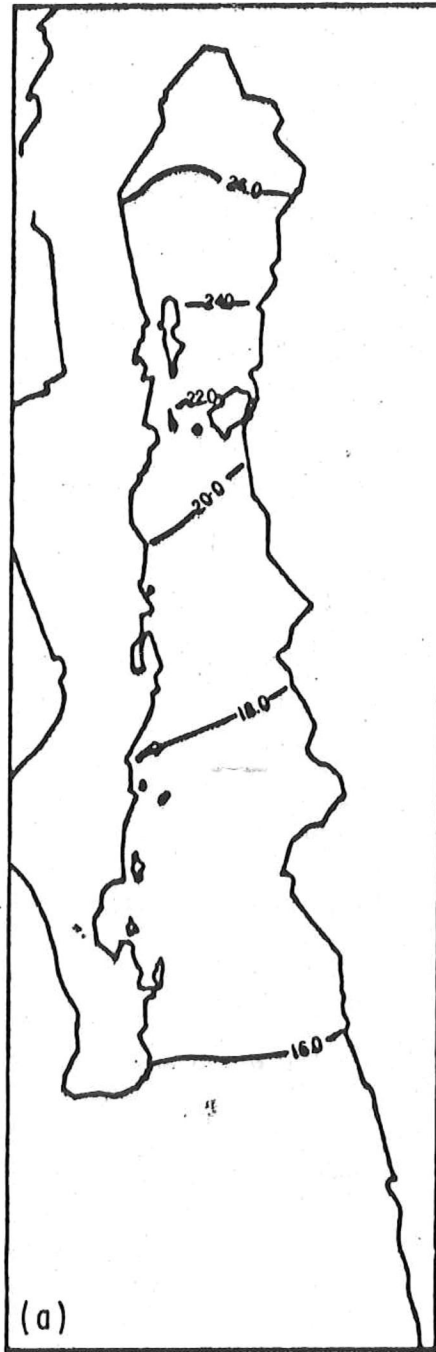
4. Isolíneas de amplitud (a) y fase (b) para la componente M₂, tomadas de Gutierrez y Morales (1986). En ésta y las siguientes tres figuras, la amplitud es en centímetros y la fase en grados relativos al meridiano 105 al oeste de Greenwich.



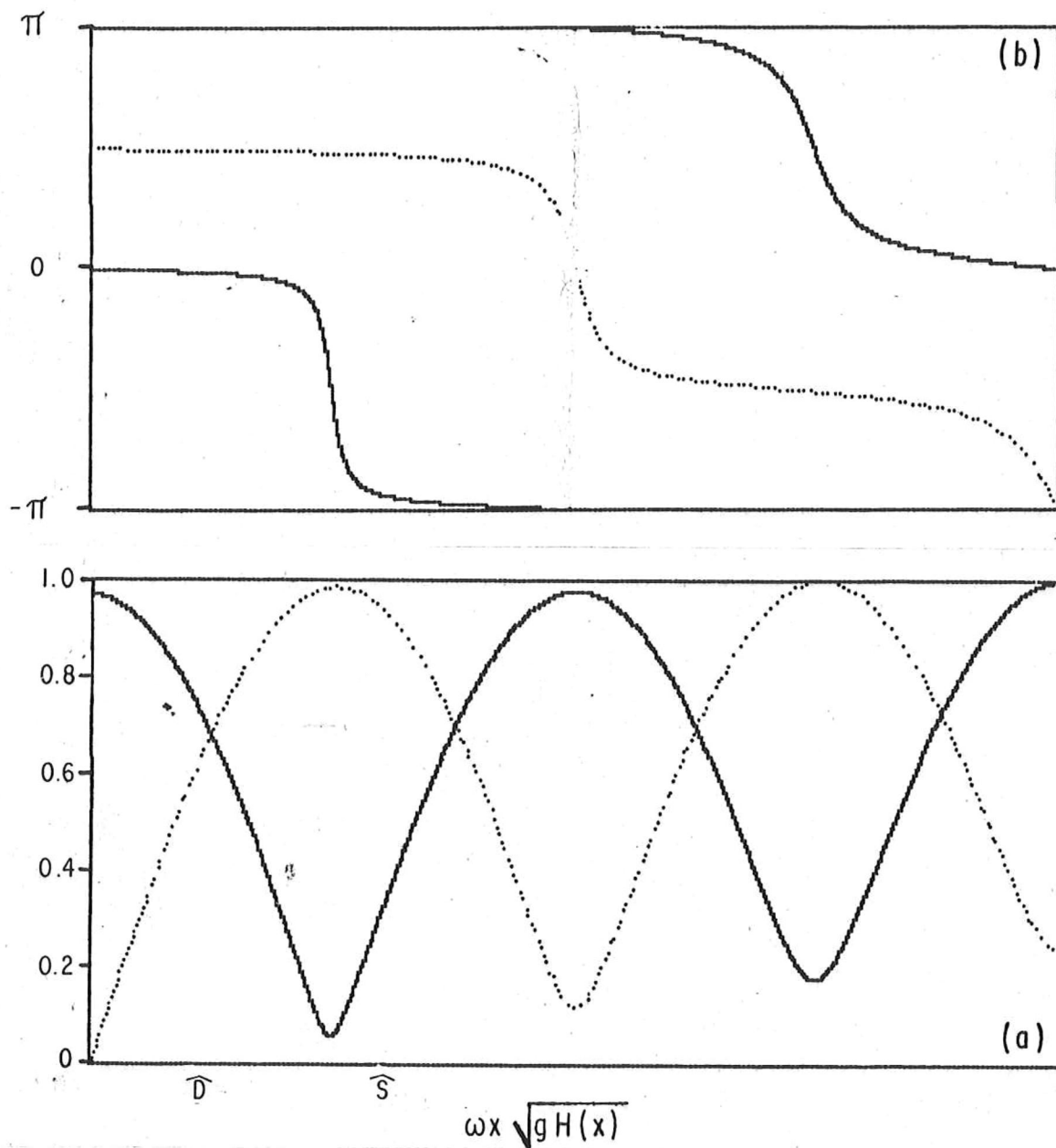
5. Como en la figura 4 para la componente S₂.



6. Como en la figura 4 para la componente K₁.



7. Como en la figura 4 para la componente 01.



8. Amplitudes (a) de elevación (línea llena) y velocidad (línea punteada), y fase de ambas (b), para un canal de sección transversal constante de 1000 m de profundidad, con $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Nótese la longitud del Golfo de California, relativa a la longitud de onda, para las componentes semidiurnas (S) y diurnas (D).

IV. INCERTIDUMBRES

Toda medición tiene un error asociado, ya que ningún instrumento es totalmente exacto. En el caso de las componentes de marea, también se generan incertezas por el manipuleo matemático que lleva a reducir la información de miles de valores de elevación a amplitudes y fases. Para determinar los parámetros óptimos del modelo, es necesario pesar las diferencias entre elevaciones que se obtienen de éste con los datos disponibles, dividiéndolas por los errores de los últimos. Ya que desconocemos estas incertezas, es necesario hacer una estimación de ellas.

Para poder hacer una estimación sólida, es necesario que su valor cambie poco con variaciones de los parámetros libres del modelo. Encontramos que esto ocurre en el caso de las partes real e imaginaria y de las amplitudes de elevación, mas no así con las fases, por lo que decidimos utilizar las elevaciones complejas, como se describe a continuación.

Para la estimación de las incertidumbres partimos de las siguientes suposiciones:

a) Cada uno de los datos complejos de elevación $D_i(\omega)$ ($i = 1, \dots, 31$), es el resultado de un número infinito de eventos con distribución normal, y puede ser escrito como el valor medio de éstos más un error, también complejo, es decir

$$D_j(\omega) = \langle D_j(\omega) \rangle + v_j(\omega) + i v'_j(\omega).$$

b) Los errores de las partes real e imaginaria son independientes entre si, es decir no están correlacionados, como tampoco lo están con los de otras estaciones ni componentes.

c) El promedio del cuadrado de cada uno de los errores es igual a $\sigma_1(\omega)^2$, es decir

$$\langle v_1(\omega) v_j(\omega^*) \rangle = \langle v'_1(\omega) v'_j(\omega^*) \rangle = \delta_{1j} \delta_{\omega\omega^*} \sigma_1(\omega)^2,$$

$$\langle v_1(\omega) v'_j(\omega) \rangle = 0.$$

Mediante cálculo elemental es posible demostrar que las incertidumbres de las amplitudes de elevación son también $\sigma_1(\omega)$, mientras que para las fases son $\sigma_1(\omega)/|D_1(\omega)|$.

Existen varias posibilidades en cuanto a los valores que se pueden asignar a $\sigma_1(\omega)$. La más sencilla consiste en suponer un mismo error en todas las estaciones y para las cuatro componentes, es decir $\sigma = \text{cte}$; la más complicada es un valor diferente para cada estación y componente, o sea $\sigma_1(\omega)$. Por ejemplo, en el último caso, podríamos suponer una dependencia de la posición inversamente proporcional a alguna potencia de la duración de las series, i.e. $\sigma_1 \approx T_1^{-\lambda}$, donde T_1 son las duraciones de los registros y λ es alguna constante; ésta expresión equivale a afirmar que las constantes armónicas son menos confiables mientras más corta es la serie original. Desechamos esta posibilidad porque encontramos que los datos provenientes de series cortas no

se encuentran sistemáticamente más alejados del modelo. En adelante se discutirán sólo los casos de σ constante y $\sigma(\omega)$.

Es posible demostrar que si las elevaciones son variables aleatorias independientes (en el sentido de corresponder a una de infinitas realizaciones), entonces las diferencias entre éstas y las modeladas también lo son, de manera que el valor esperado de la mínima suma cuadrática de sus diferencias, es igual al producto de los grados de libertad (gl) por σ^2 (o $\sigma(\omega)^2$, según el caso). Ya que el modelo tiene como parámetros libres el coeficiente de fricción y las partes real e imaginaria de la elevación en la boca, los grados de libertad son entonces el número de términos de la suma menos el de parámetros. Al considerar un único valor de σ para las cuatro componentes, $gl = 8N-9$ con $N = 31$ estaciones, donde los parámetros libres son el coeficiente de fricción y las cuatro elevaciones en la boca. Lo anterior podemos resumirlo en la siguiente expresión, a partir de la cual obtenemos σ

$$\text{Min}_{\lambda} \sum_{\omega} \text{Min}_{B(\omega)} \sum_{i=1}^N |D_i(\omega) - Z(x_i; \omega, \lambda)|^2 = (8N-9)\sigma^2, \quad (14)$$

donde Z_i son las elevaciones complejas obtenidas del modelo con topografía rugosa.

En las Tablas III y IV mostramos la suma cuadrática de los residuos, ponderados por las incertidumbres obtenidas mediante la expresión 14, para los casos con topografía

rugosa y coeficientes de fricción constante y variable. La notación es la siguiente

$$\epsilon_R(\omega, \lambda) = \sigma(\omega)^{-2} \sum_{i=1}^N [\operatorname{Re}(D_i(\omega)) - \operatorname{Re}(Z_i(\omega, \lambda))]^2, \quad (15)$$

$$\epsilon_I(\omega, \lambda) = \sigma(\omega)^{-2} \sum_{i=1}^N [\operatorname{Im}(D_i(\omega)) - \operatorname{Im}(Z_i(\omega, \lambda))]^2. \quad (16)$$

TABLA III
SUMATORIA DE RESIDUOS PONDERADOS POR LA INCERTIDUMBRE
TOPOGRAFIA RUGOSA
 $\lambda = 1.47 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$

Componente	ϵ_R	ϵ_I	σ [cm]
M_2	96	71	4.8
S_2	37	28	4.8
O_1	1	1	4.8
K_1	2	3	4.8
Total = 239			

TABLA IV
SUMATORIA DE RESIDUOS PONDERADOS POR LA INCERTIDUMBRE
TOPOGRAFIA RUGOSA
 $\lambda(x)H(x) = 1.81 \times 10^{-9} \text{ ms}^{-1}$

Componente	ϵ_R	ϵ_I	σ [cm]
M_2	89	77	5.1
S_2	34	33	5.1
O_1	1	1	5.1
K_1	2	2	5.1
Total = 239			

Los σ 's globales obtenidos resultan ser demasiado grandes para las componentes diurnas, hecho que se refleja en los

valores de ϵ_R y ϵ_I , implicando ésto que el modelo las predice "demasiado bien"; mientras que son pequeños para la M_2 y adecuados para la S_2 .

En base a estos resultados, descartamos la posibilidad de considerar un σ global.

Para determinar $\sigma(\omega)$ la expresión (14) se transforma en

$$\text{Min}_{\omega, \lambda} \sum_{i=1}^N |D_i(\omega) - Z(x_i; \omega, \lambda)|^2 = (2N-3)\sigma(\omega)^2, \quad (17)$$

donde hay sólo tres parámetros libres. De esta igualdad esperamos que cada uno de los sumandos tenga un valor del orden de $\sigma(\omega)^2$. Hay que hacer notar que los parámetros óptimos son diferentes para cada componente, como se observa en la Tablas V y VI.

TABLA V
SUMATORIA DE RESIDUOS PONDERADOS POR LA INCERTIDUMBRE
TOPOGRAFIA RUGOSA

Componente	ϵ_R	ϵ_I	Total	λ [10 ⁻⁸ s ⁻¹]	σ [cm]
M_2	34	25	59	1.46	8.1
S_2	34	25	59	1.58	5.0
O_1	31	28	59	0.41	0.9
K_1	35	24	59	0.35	1.3

TABLA VI
SUMATORIA DE RESIDUOS PONDERADOS POR LA INCERTIDUMBRE
TOPOGRAFIA RUGOSA

Componente	ϵ_w	ϵ_r	Total	$\lambda(x)H(x)$ [10 ⁻² ms ⁻¹]	σ [cm]
M ₂	31	28	59	1.83	8.6
S ₂	30	29	59	1.86	5.5
O ₁	31	28	59	0.76	0.8
K ₁	35	24	59	0.60	1.3

Los $\sigma(\omega)$ obtenidos considerando el coeficiente de fricción constante y variable son muy parecidos, lo que es un resultado alentador; cabe notar que los coeficientes λ óptimos son sistemáticamente un orden de magnitud menores para las componentes diurnas. Las $\sigma(\omega)$ inferidas en éste trabajo son claramente mayores que los valores reportados por Stock (1976) para la M₂, y para la mayoría de sus estaciones en el caso de la S₂, y menores para las diurnas.

V. AJUSTES

El ajuste de las fases es muy sensible a variaciones del coeficiente de fricción; es por esto que los mejores ajustes los obtuvimos utilizando amplitudes y fases, en vez de partes real e imaginaria. El criterio para determinar el valor óptimo de λ es minimizar ϵ_T , es decir

$$\epsilon_A(\omega, \lambda) = \text{Min}_{\lambda} \sum_{i=1}^N \sigma(\omega)^{-2} [d_i(\omega) - z_i(\omega, \lambda)]^2, \quad (18)$$

$$\epsilon_F(\omega, \lambda) = \text{Min}_{\lambda} \sum_{i=1}^N \sigma(\omega)^{-2} d_i(\omega)^2 [\delta_i(\omega) - \xi_i(\omega, \lambda)]^2, \quad (19)$$

$$\epsilon_T = \text{Min}_{\lambda} \sum_{\omega} \epsilon_A(\omega, \lambda) + \epsilon_F(\omega, \lambda), \quad (20)$$

donde

$$D(x) = d(x)e^{-\sigma(x)} \quad \text{y} \quad Z(x) = z(x)e^{-\xi(x)}.$$

De esta manera encontramos un λ (o K) óptimo único para las cuatro componentes y las dos topografías. Como se ve, los valores de incerteza obtenidos para las distintas componentes son importantes en la determinación de un coeficiente de fricción único; sería absurdo suponer que la fricción con el fondo es distinta para cada componente.

La distribución utilizada para determinar los σ 's tiene una variancia igual a dos veces los grados de libertad, por lo que un buen ajuste es entonces aquel en el que la suma cuadrática de los residuos ponderados por su incertidumbre está dentro del rango determinado por la media más-menos su

desviación estandar, que toma los siguientes valores según el caso:

TABLA VII
RANGOS PARA CRITERIOS DE AJUSTE

GL	GL $\pm \sqrt{(2GL)}$
59	48 - 70
239	217 - 261
30	22 - 38

La primera línea corresponde a un ajuste de amplitudes más fases para alguna componente; la segunda es para el ajuste considerando las cuatro componentes (ajuste global) y la tercera para el ajuste de amplitud o de fase de alguna de ellas. En la Tabla VIII mostramos los valores de ϵ_A y ϵ_F calculados mediante (18) a (20), así como los de ϵ_R y ϵ_I obtenidos con éstos coeficientes de fricción. Los valores subrayados caen fuera del intervalo de la Tabla VII.

Los ajustes son buenos para los casos con topografía rugosa pero no para la suave, salvo los ϵ_I y, para las componentes diurnas, los ϵ_F .

TABLA VIII
SUMATORIA DE RESIDUOS PONDERADOS
POR LAS INCERTIDUMBRES

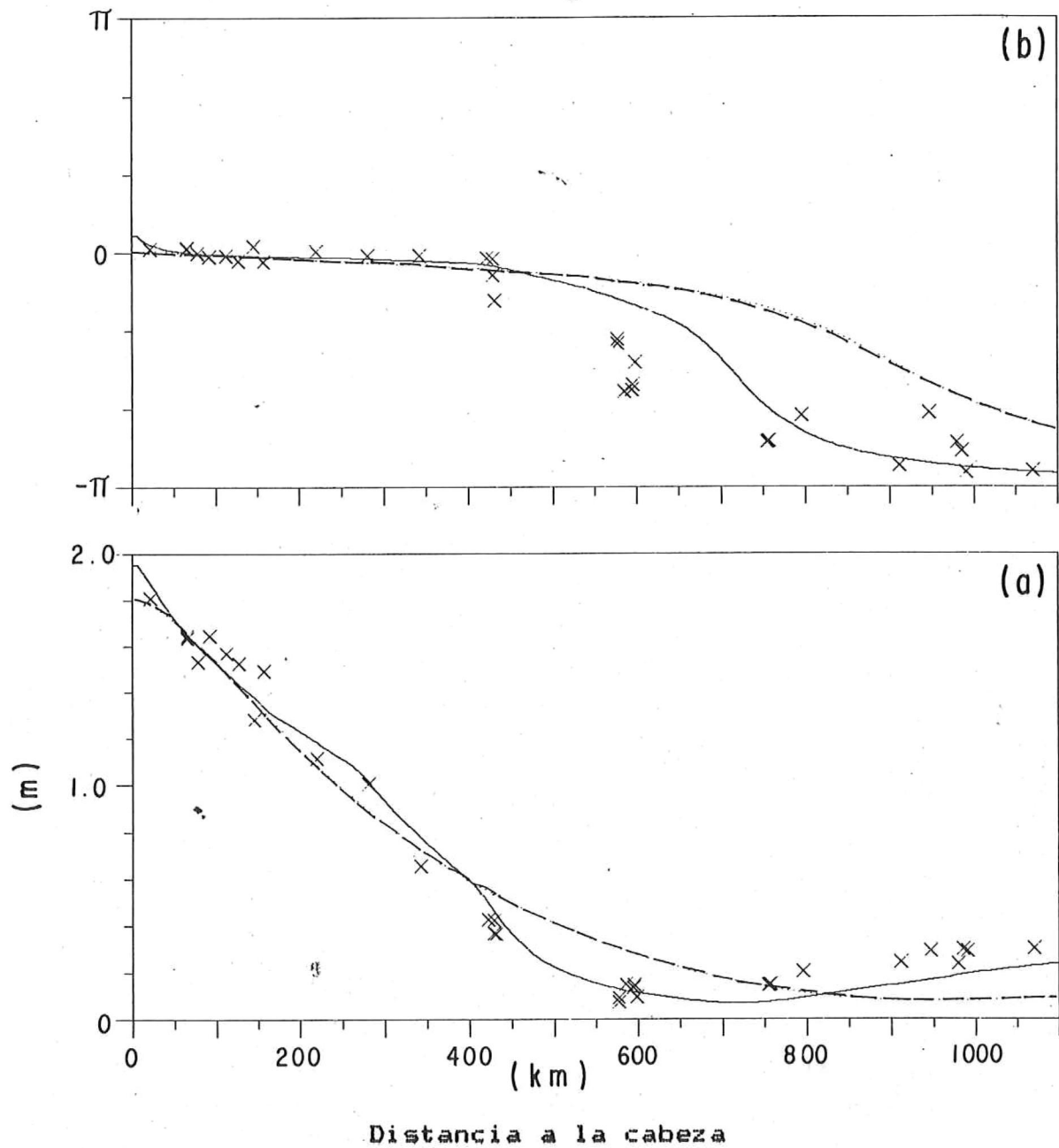
Componente	ϵ_R	ϵ_I	ϵ_A	ϵ_P	σ [cm]
RUGOSO					
$\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$					
M_2	35	27	25	39	8.1
S_2	35	28	28	<u>41</u>	5.0
O_1	31	35	31	35	0.9
K_1	35	34	35	34	1.3
Total	136	124	119	149	
RUGOSO					
$\lambda(x)H(x) = 1.6 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$					
M_2	32	28	26	38	8.6
S_2	30	30	27	<u>40</u>	5.5
O_1	32	31	31	31	0.8
K_1	35	31	35	30	1.3
Total	129	120	119	139	
SUAVE					
$\lambda = 1.4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$					
M_2	<u>155</u>	28	<u>81</u>	<u>122</u>	8.1
S_2	<u>150</u>	30	<u>72</u>	<u>126</u>	5.0
O_1	<u>63</u>	38	<u>62</u>	37	0.9
K_1	<u>64</u>	<u>39</u>	<u>64</u>	38	1.3
Total	432	135	279	323	

V.1 Campo de elevaciones: Las figuras que presentamos a continuación corresponden a las elevaciones obtenidas con

los mejores ajustes, cuando el coeficiente de fricción varía inversamente con la profundidad; las líneas continuas pertenecen a la topografía rugosa y las punteadas a la suave. A lo largo del texto haremos mención a las soluciones para el caso rugoso con λ constante.

Para su análisis podemos dividir el Golfo en dos regiones: a) la norte, que va desde la cabeza hasta poco antes de la línea Santa Rosalía-Guaymas y que abarca la zona más somera, las islas, el umbral y parte de la pendiente que, poco más al sur, se convierte en la cuenca de Guaymas; b) la región sur que comprende las zonas más profundas y anchas del Golfo (figura 2).

En la figura 9 mostramos las amplitudes (9a) y fases (9b) del campo de elevaciones para la componente M_2 . El modelo con la topografía rugosa predice muy bien las amplitudes a lo largo de todo el Golfo; por otro lado el suave da un buen ajuste sólo desde la cabeza hasta el umbral, de ahí se separa más de las mediciones, ya que el valor de mínima amplitud está muy desplazado hacia el sur. Si bien las amplitudes son poco sensibles a variaciones de K [$\lambda(x) = K/H(x)$], no ocurre lo mismo con las fases; para éstas los ajustes rugoso y suave son muy buenos hasta la región del umbral, donde la batimetría analítica es muy similar a la promedio (figura 2); a partir de ahí los datos presentan mayor dispersión, la curva de fases rugosa pasa dentro del rango de las incertidumbres de casi todos los

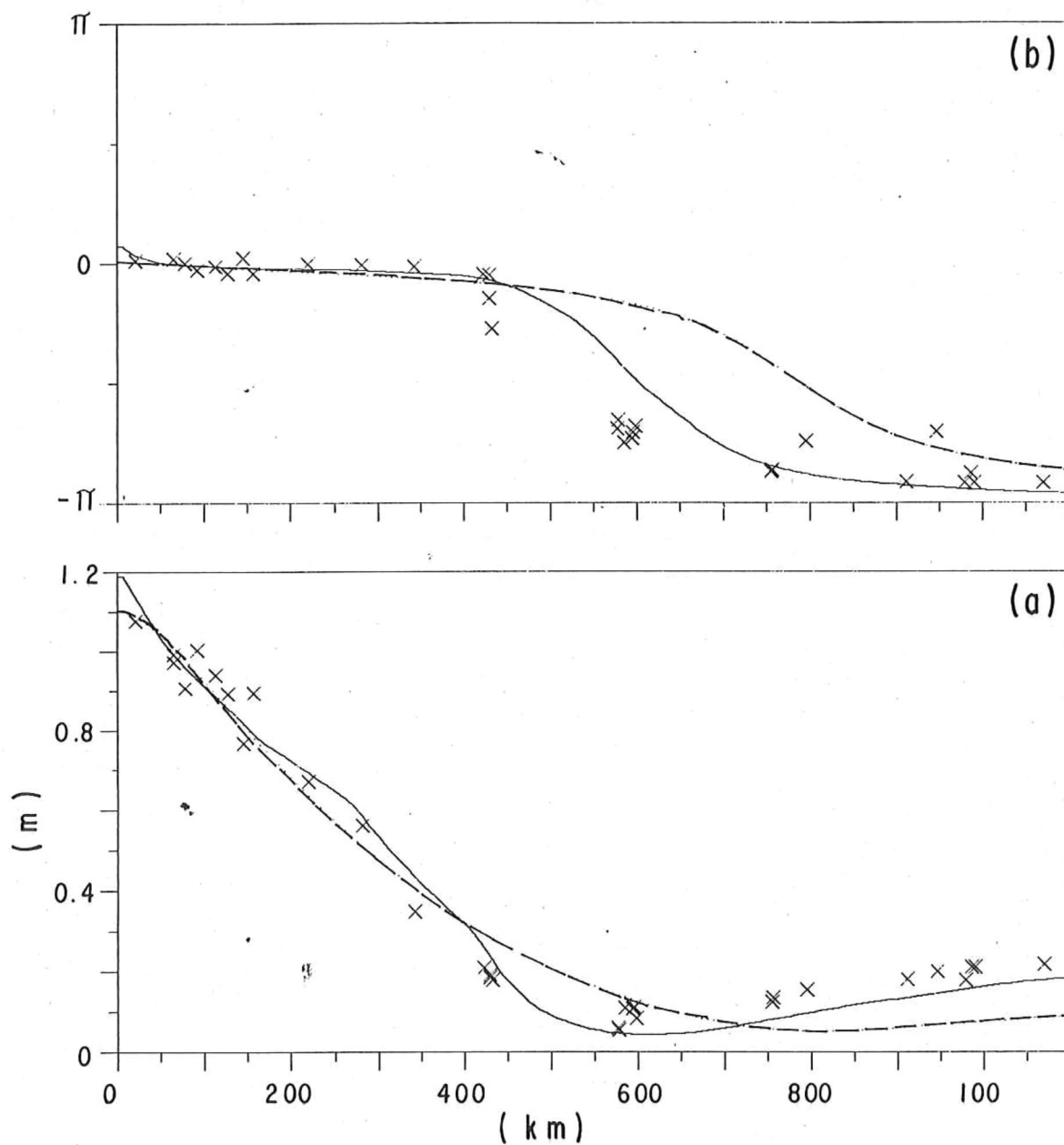


9. Amplitud (a) y fase (b) de las elevaciones de la componente M_2 . En ésta y las demás figuras la línea continúa corresponde al golfo rugoso y la punteada al suave, a menos que se indique otra convención. Las cruces son valores medidos con sus incertidumbres. El coeficiente de fricción es variable.

datos, por lo que podemos decir que el ajuste es bueno. Por el contrario, la curva suave está notoriamente alejada de las mediciones. Las curvas de amplitud y fase para el caso λ constante son muy similares; una ligera diferencia es el pequeño salto de fase en la cabeza, que no se presenta.

Las curvas para el caso de la componente S_2 son muy parecidas a las de la M_2 , aunque las amplitudes (fig. 10a) son menores (1.2 m contra 2 m en la cabeza), y su zona de mínima elevación se encuentra un poco desplazada hacia el norte; el ajuste de las fases (fig. 10b) es poco mejor que para la componente anterior, con un descenso más marcado a partir del umbral. Al igual que para la M_2 , la curva de fases para el golfo suave se encuentra muy alejada de las mediciones en toda la mitad sur.

El campo de elevaciones de las diurnas difiere marcadamente del de las semidiurnas; éstas carecen de una zona de mínima elevación asociadas a una región amfidrómica, por lo que las amplitudes disminuyen suave y uniformemente desde la cabeza hasta la boca. En las figuras 11 y 12 presentamos el campo de elevaciones de las componentes K_1 y O_1 respectivamente; la diferencia fundamental es que las amplitudes de la K_1 son mayores. Las curvas de amplitud (a) explican muy bien las observaciones, con las dos versiones de topografía; las de fase (b) pasan por casi todas las mediciones, aunque hay valores claramente alejados. Las curvas de fase para el golfo rugoso presentan un repentino

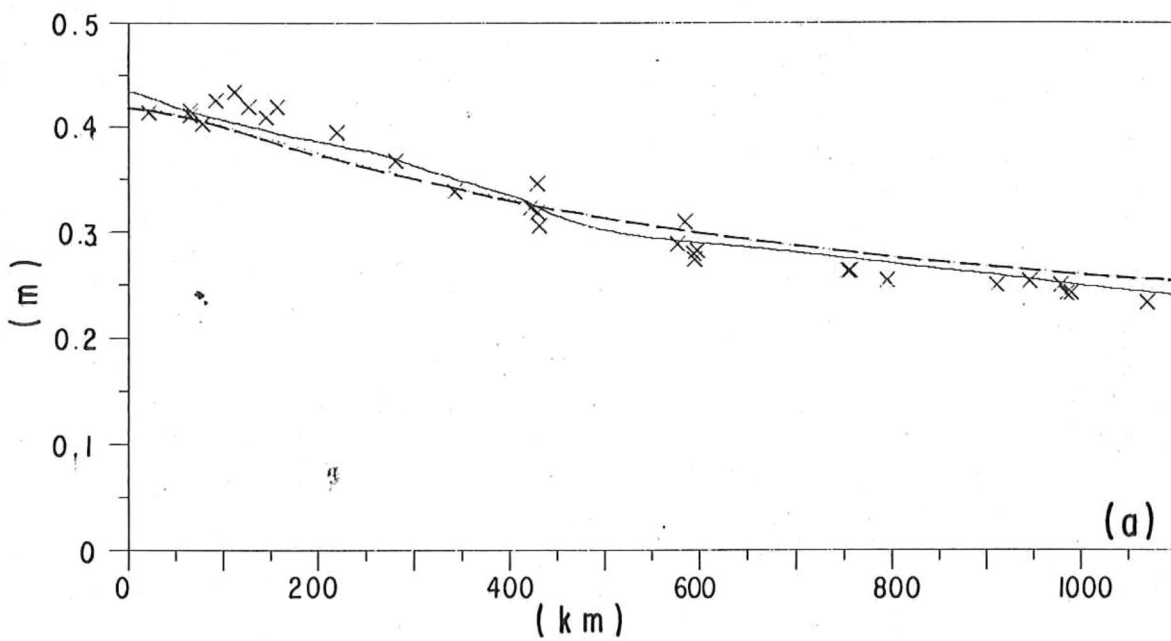
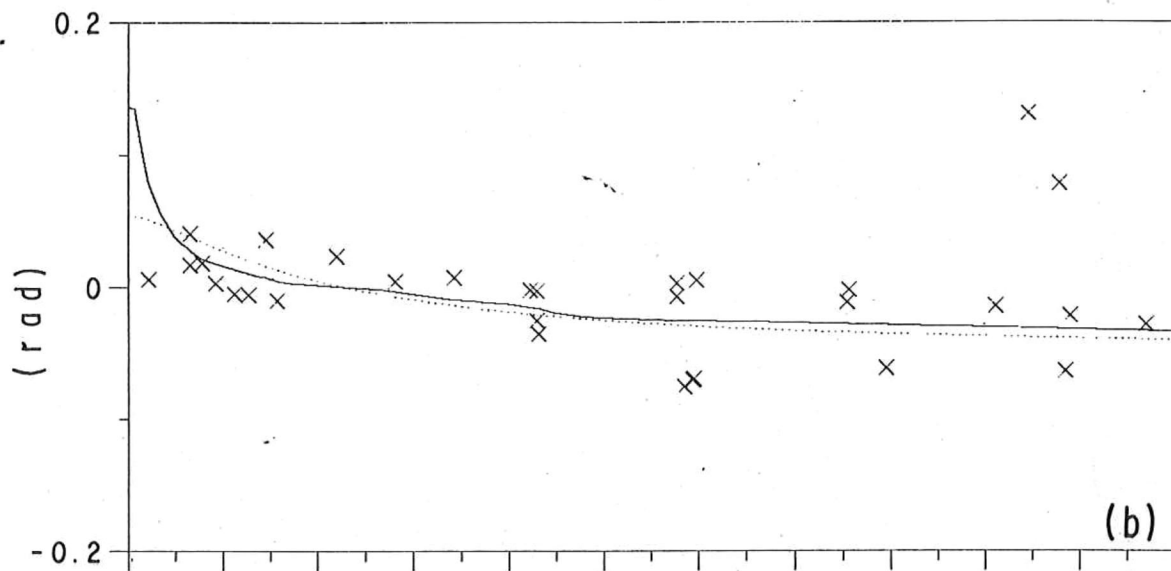
S_2 

Distancia a la cabeza

10. Como en la figura 9 para las elevaciones de la componente S_2 .

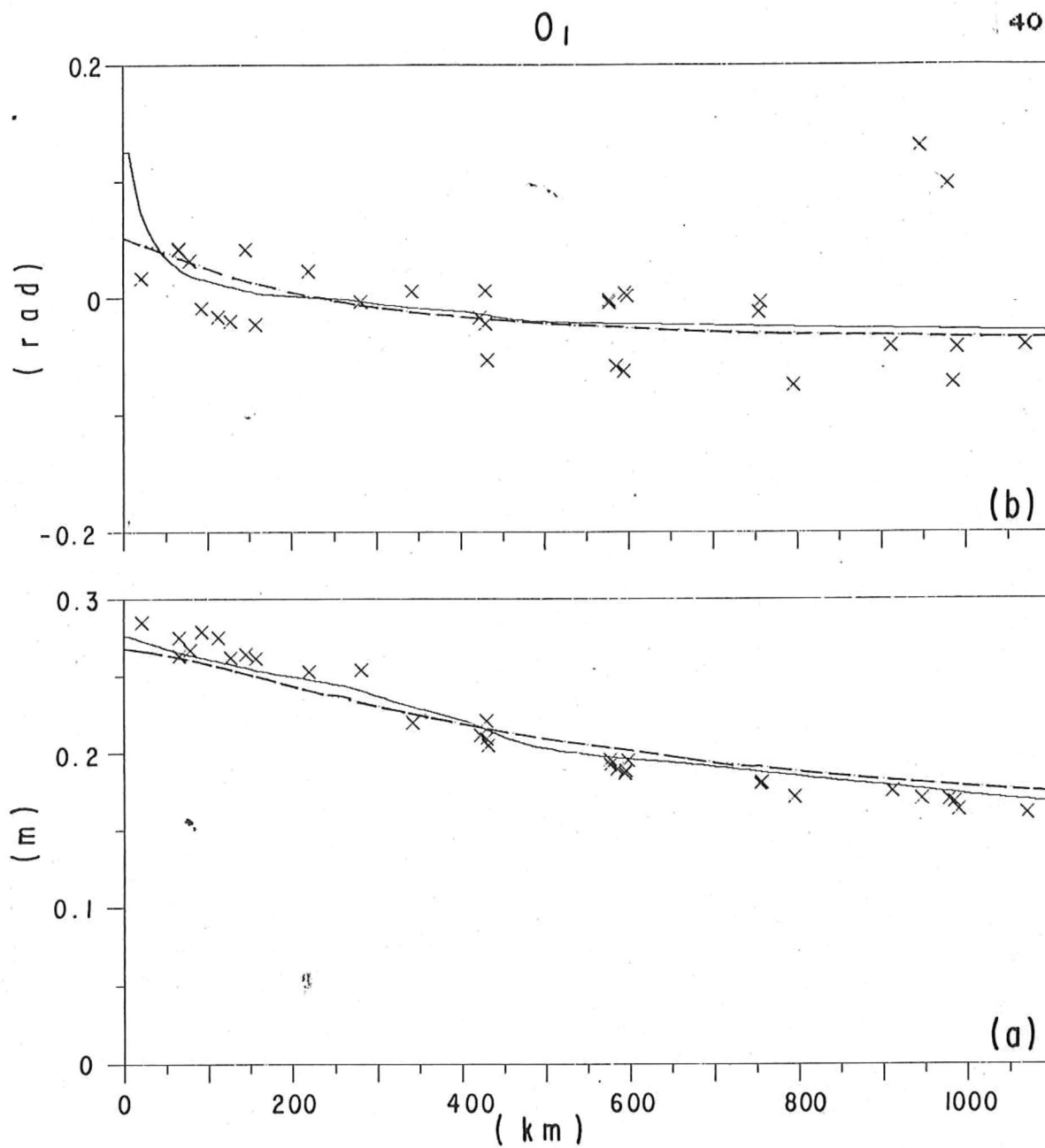
K_1

39



Distancia a la cabeza

11. Como en la figura 9 para las elevaciones de la componente K_1 .



Distancia a la cabeza

12. Como en la figura 9 para las elevaciones de la componente 0_1 .

gradiente en la cabeza, que se aleja del primer valor reportado; éste no se presenta en el modelo con coeficiente de fricción constante. Desafortunadamente no existen más datos y los valores que se tienen para esa estación provienen de una serie de tiempo de 10 días.

Para determinar los mejores ajustes se utilizan las incertezas; otra medida de la bondad del ajuste independiente de éstas esta dada por las siguientes relaciones, que representan los residuos de amplitud (Δ_A) y de fase (Δ_F) ponderados por la variancia:

$$\Delta_A = \frac{\langle [d_1(\omega) - z_1(\omega)]^2 \rangle}{\langle d_1(\omega)^2 \rangle}, \quad (21)$$

$$\Delta_F = \frac{\langle d_1(\omega)^2 [\delta_1(\omega) - \xi_1(\omega, \lambda)]^2 \rangle}{\langle d_1(\omega)^2 [\delta_1(\omega) - \langle \delta(\omega) \rangle]^2 \rangle}, \quad (22)$$

donde $\langle \dots \rangle$ indica el promedio. Mientras menor sea el valor la predicción es mejor, ver la Tabla IX.

TABLA IX
RESIDUOS PONDERADOS POR LA VARIANCIA

		M_2	S_2	O_1	K_1
R U G D S D		$\lambda(x)H(x) = 1.6 \times 10^{-9} \text{ ms}^{-1}$			
	Δ_A	0.0073	0.0087	0.0015	0.0016
	Δ_F	0.068	0.05	1.0	1.13
		$\lambda = 1.1 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}$			
S U A V E	Δ_A	0.0063	0.0076	0.0015	0.0016
	Δ_F	0.062	0.043	1.12	1.27
S U A V E		$\lambda = 1.4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$			
	Δ_A	0.020	0.020	0.003	0.003
	Δ_F	0.19	0.13	1.21	1.42

Se observa en la tabla anterior que, de acuerdo a este criterio, los ajustes de amplitud son siempre mejores que los de fase para cada componente. Se explican mejor las amplitudes de las diurnas respecto de las semidiurnas, y lo inverso ocurre para las fases. Si observamos las figuras 11b y 12b saltan a la vista dos puntos, correspondientes a las estaciones de La Paz y Topolobampo, cuyas fases se encuentran relativamente alejadas de los modelos. El mareógrafo de La Paz se encuentra dentro de la bahía y el de Topolobampo se encuentra al final de un estero. Podemos suponer que los valores de estas fases están fuertemente afectados por efectos locales, ya que se encuentran dentro

de cuerpos de agua protegidos. Hay otra estación cerca de Topolobampo ubicada fuera del estero, cuya fase cae bien dentro de las curvas. Probamos el modelo sin estos datos, conservando los mismos valores de $\sigma(\omega)$ y del coeficiente de fricción. En la Tabla X mostramos los valores obtenidos de la suma de residuos análoga a los resultados de la Tabla VIII, para el caso con fricción constante.

TABLA X
SUMATORIA DE RESIDUOS PONDERADOS POR LAS INCERTIDUMBRES
ELIMINANDO TOPOLOBAMPO Y LA PAZ
TOPOGRAFIA RUGOSA
 $\lambda = 1.1 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$

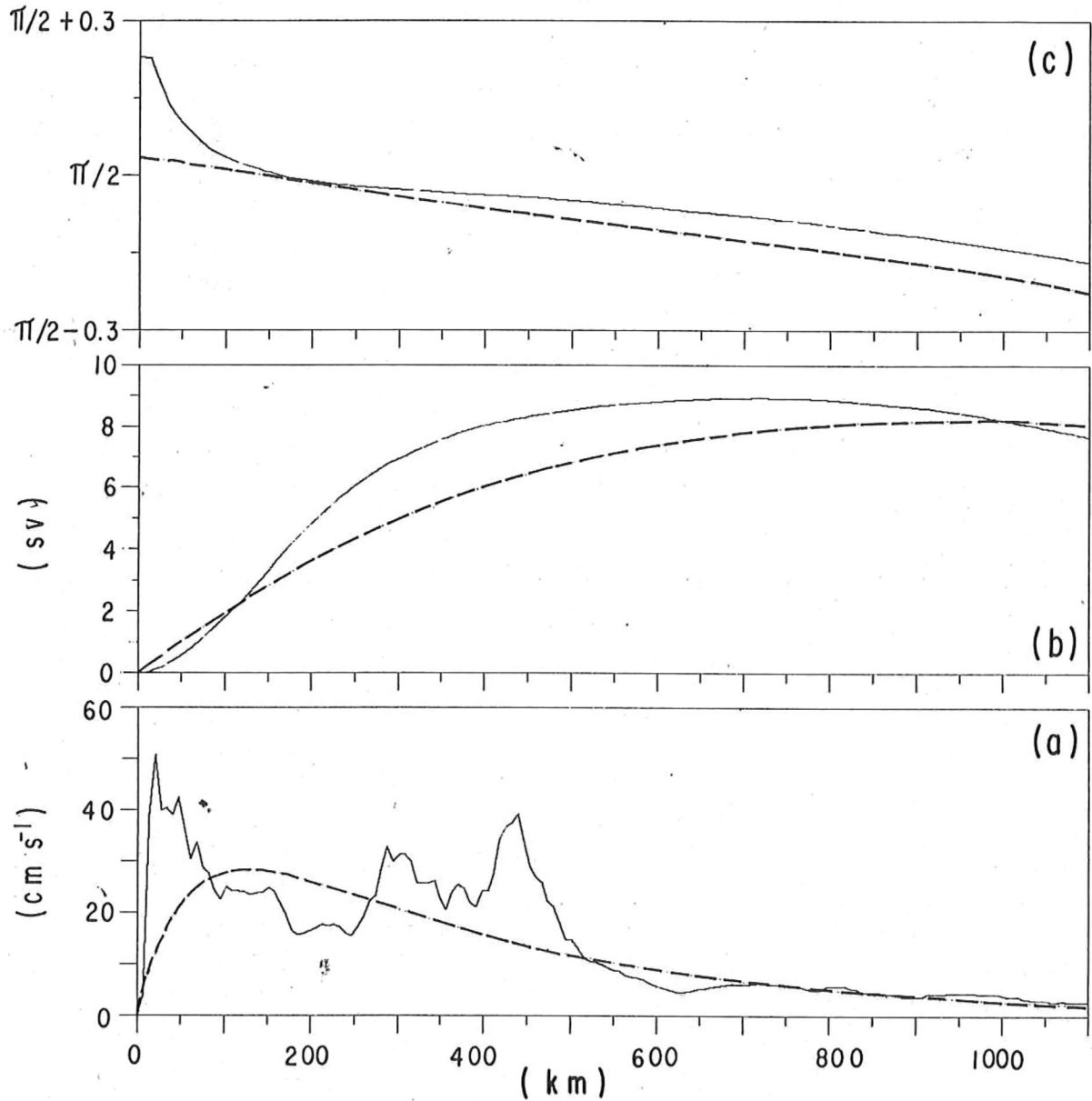
Componente	ϵ_R	ϵ_I	ϵ_A	ϵ_F
M_2	35	23	23	36
S_2	34	24	27	36
O_1	30	12	30	13
K_1	35	12	35	12

Los valores no cambian mucho para las amplitudes, ni para las fases de las semidiurnas. Para las componentes diurnas las fases se reducen casi a la tercera parte, indicándonos que las estaciones de Topolobampo y La Paz son responsables de un sesenta por ciento de las diferencias.

VI. PREDICCIONES

En el capítulo anterior tratamos sobre los criterios de ajuste, que nos permiten evaluar qué tan bien explican las elevaciones obtenidas del modelo a las observadas. El modelo también resuelve el campo de velocidad a lo largo del Golfo, con estos dos campos es posible predecir la distribución espacial del transporte, de las densidades de energía cinética y potencial y de la disipación, cuyas figuras presentamos en este capítulo. Como en las anteriores, las líneas continuas pertenecen a la topografía rugosa y las punteadas a la suave. Integrando espacialmente las densidades de energía y la disipación a lo largo del Golfo, podemos estimar el balance energético de la marea, es decir cuánta energía es almacenada y cuánta se disipa en un ciclo, para cada una de las componentes.

VI.1 Componente M_2 : En la figura 13 mostramos las curvas de rapidez (13a), amplitud del transporte (13b) y la fase de ambas (13c). En la mitad sur la rapidez presenta poca estructura, con valores menores a 0.10 ms^{-1} . Saliendo de la cuenca de Guaymas hacia el norte, encontramos mayor variabilidad, con un pico asociado al umbral y a la región de Isla Tiburón, otro a la Isla Angel de la Guarda y el máximo en la cabeza, debido a lo somero de ésta. La curva de rapidez es mucho más rugosa que la de transporte. La fase



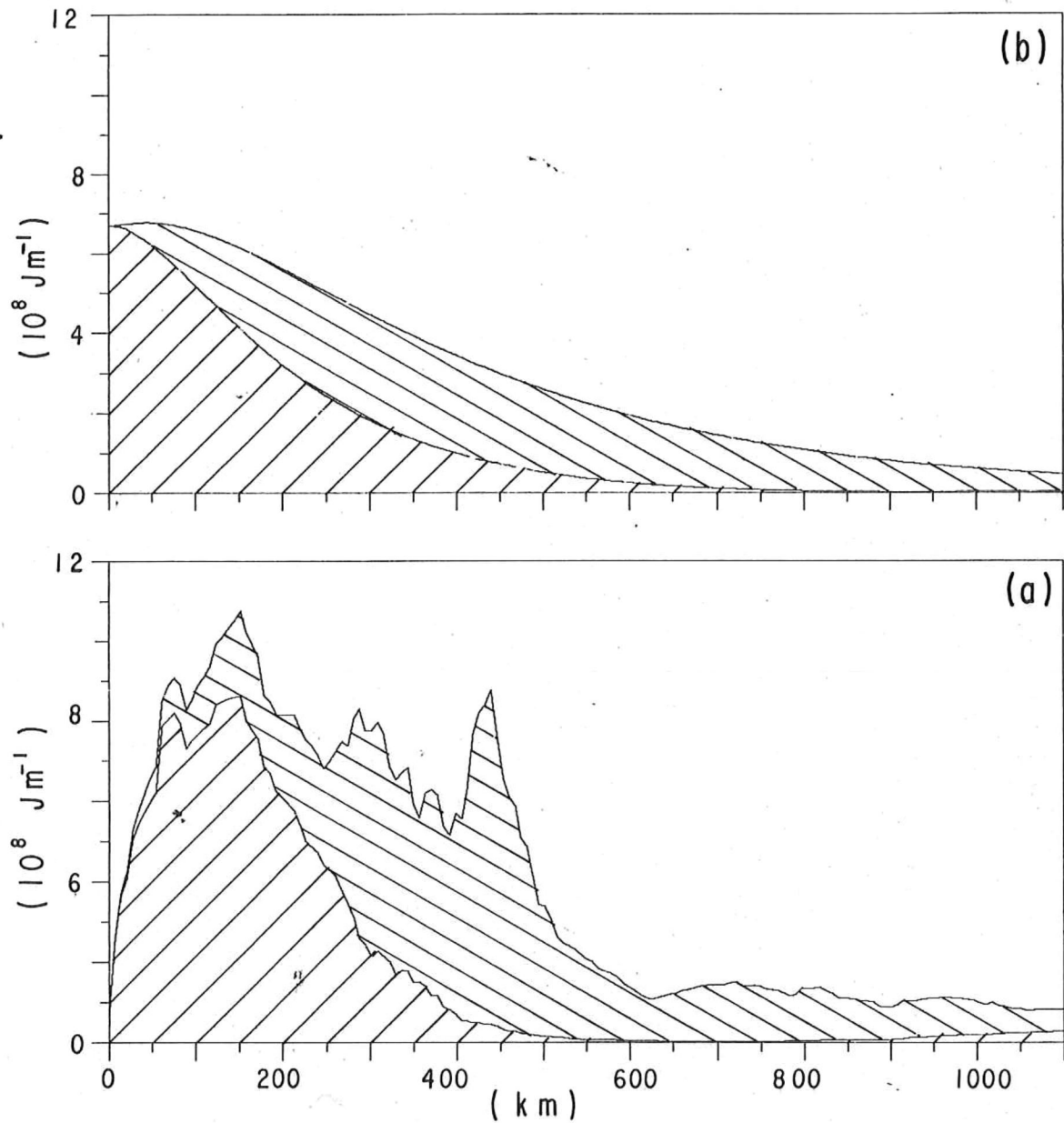
Distancia a la cabeza

13. Amplitudes de velocidad (a) y transporte (b), y fase de ambos campos (c) para la componente M_2 . Las barras muestran los valores obtenidos por Filloux (1973) y el rango espacial de sus transectos. Nótese lo liso de la curva de amplitud de transporte comparada con la de rapidez.

varía poco, siendo su característica más notoria el marcado gradiente en la cabeza (producido por valores altos de fricción con el fondo); este no se presenta para λ constante. Exceptuando el salto de la fase en la cabeza, las curvas para el caso de fricción constante son prácticamente iguales.

En la figura 14 presentamos las curvas de densidad de energía para los golfos rugoso (14a) y suave (14b). La energía total, cinética más potencial, se encuentra concentrada en la zona norte. Desde la cabeza hasta el inicio de Isla Angel de la Guarda domina la energía potencial, mientras que a partir de ésta y hasta el umbral, la energía cinética es la contribuyente principal, con un máximo absoluto en el umbral y uno secundario en la Isla Angel de la Guarda. De toda la energía almacenada en el Golfo para esta componente, el 54% corresponde a la cinética. Las curvas para λ constante son gráficamente indistinguibles.

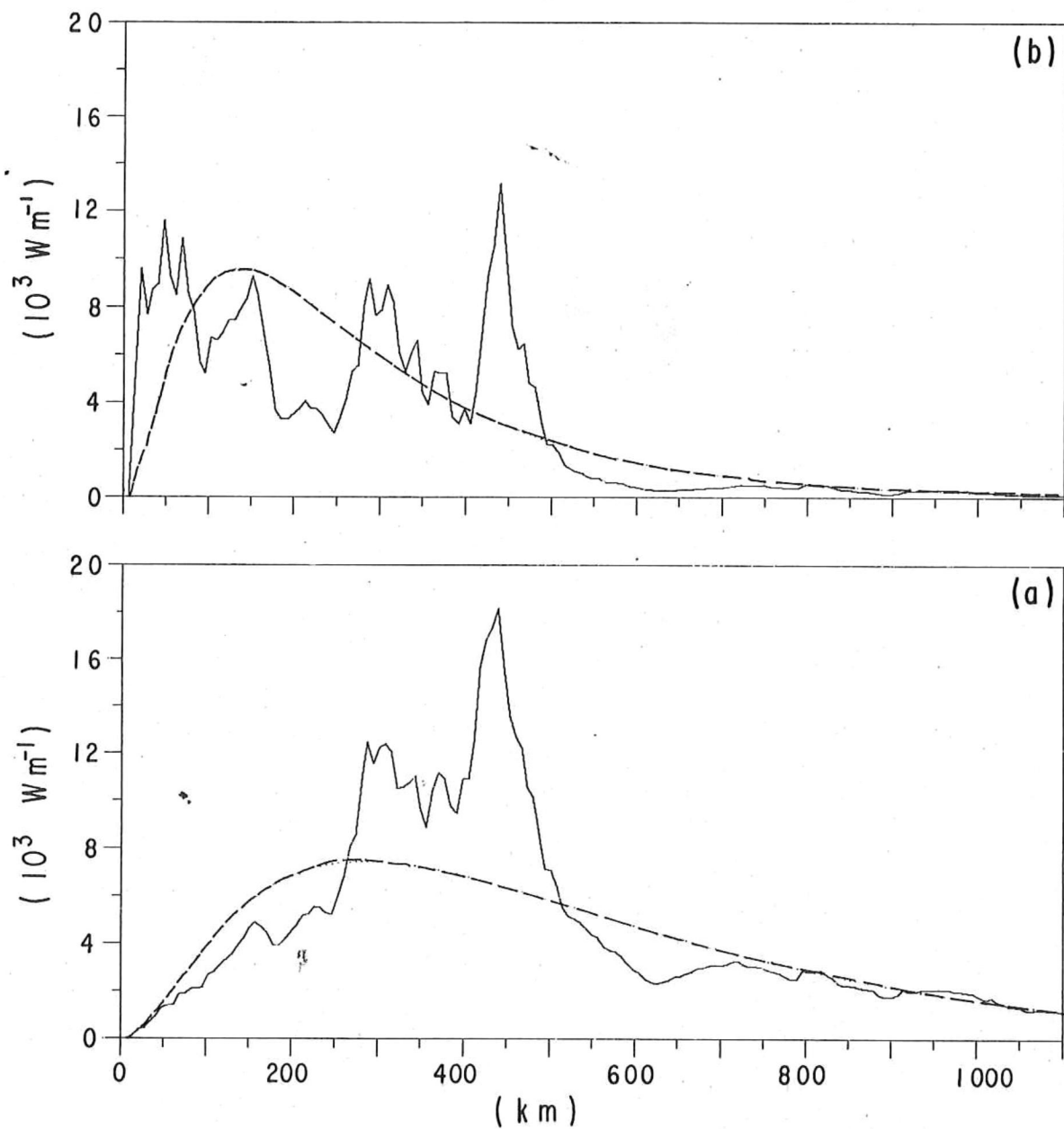
El campo que presenta notorias diferencias entre los casos λ constante y variable es el de disipación de energía a lo largo del Golfo (figura 15). En el caso de λ constante (15a) observamos obviamente una distribución similar a la de energía cinética (ver ecuaciones 6 y 8), con un máximo en el umbral y uno secundario alrededor de Isla Angel de la Guarda. De acuerdo a este modelo, un alto porcentaje de la



Distancia a la cabeza

14. Densidades de energía con las topografías rugosa (a) y suave (b), para la componente M₂. La curva superior corresponde a la energía total, //// es la contribución de la energía potencial y \\\ de la cinética.

M



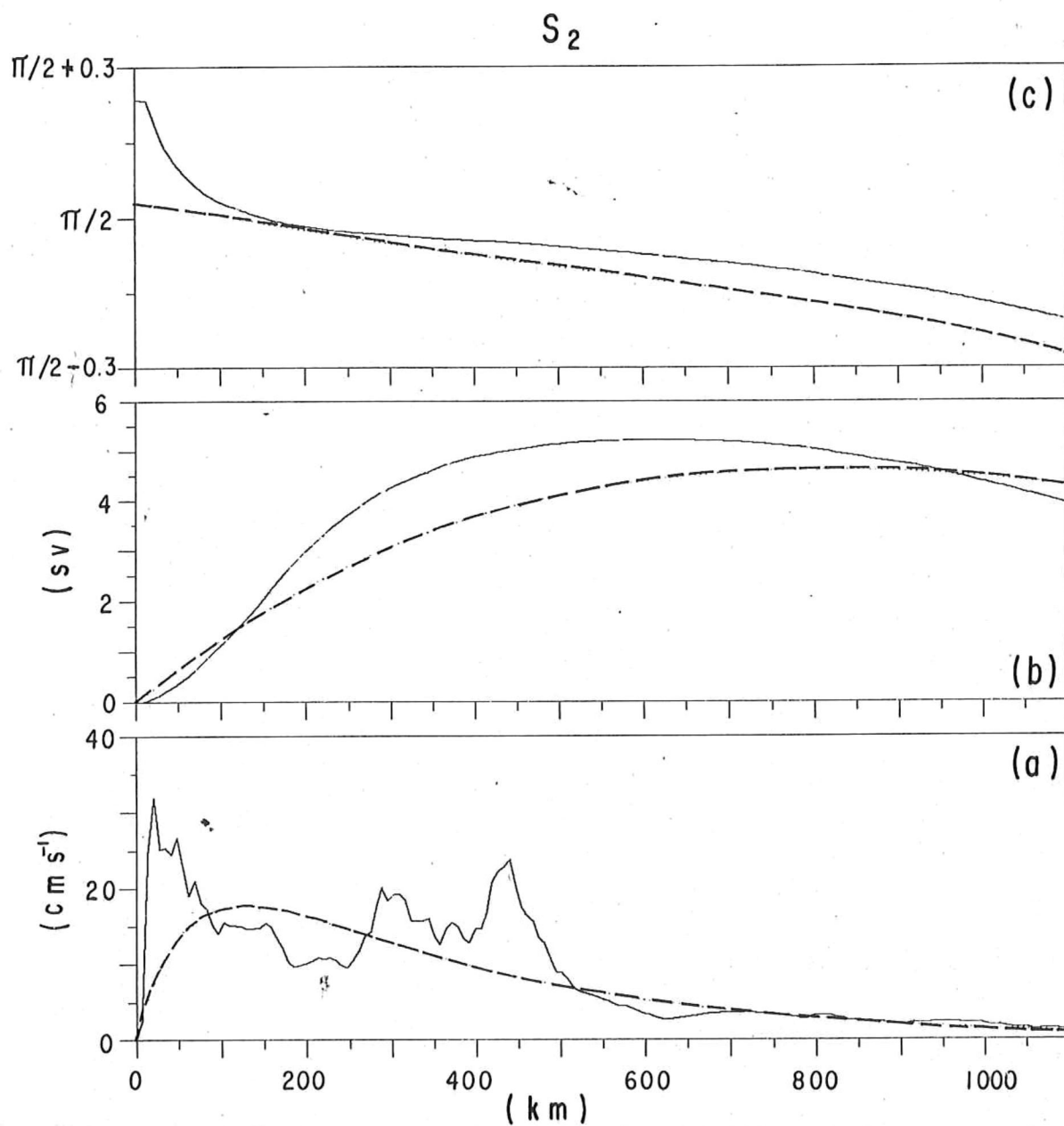
Distancia a la cabeza

15. Disipación de energía con el coeficiente de fricción constante (a) y variable (b), para la componente M_2 .

energía se disipa entre esta isla y el umbral, y el resto entre la mitad sur y la parte somera. Contrastando con el patrón anterior, para fricción variable (15b) encontramos máximos menores a lo largo de toda la mitad norte asociados al umbral, las islas, y a la parte somera de la cabeza. Ambas curvas (con coeficientes de fricción constante y variable) concuerdan con unas equivalentes presentadas por Stock (1976), quien parte de los resultados de un modelo bidimensional y promedia a lo ancho de una franja uniforme. Si consideramos que la disipación es por fricción con el fondo, es deseable que el modelo muestre valores elevados en la región menos profunda, por lo que el caso de λ variable debe considerarse como físicamente más realista.

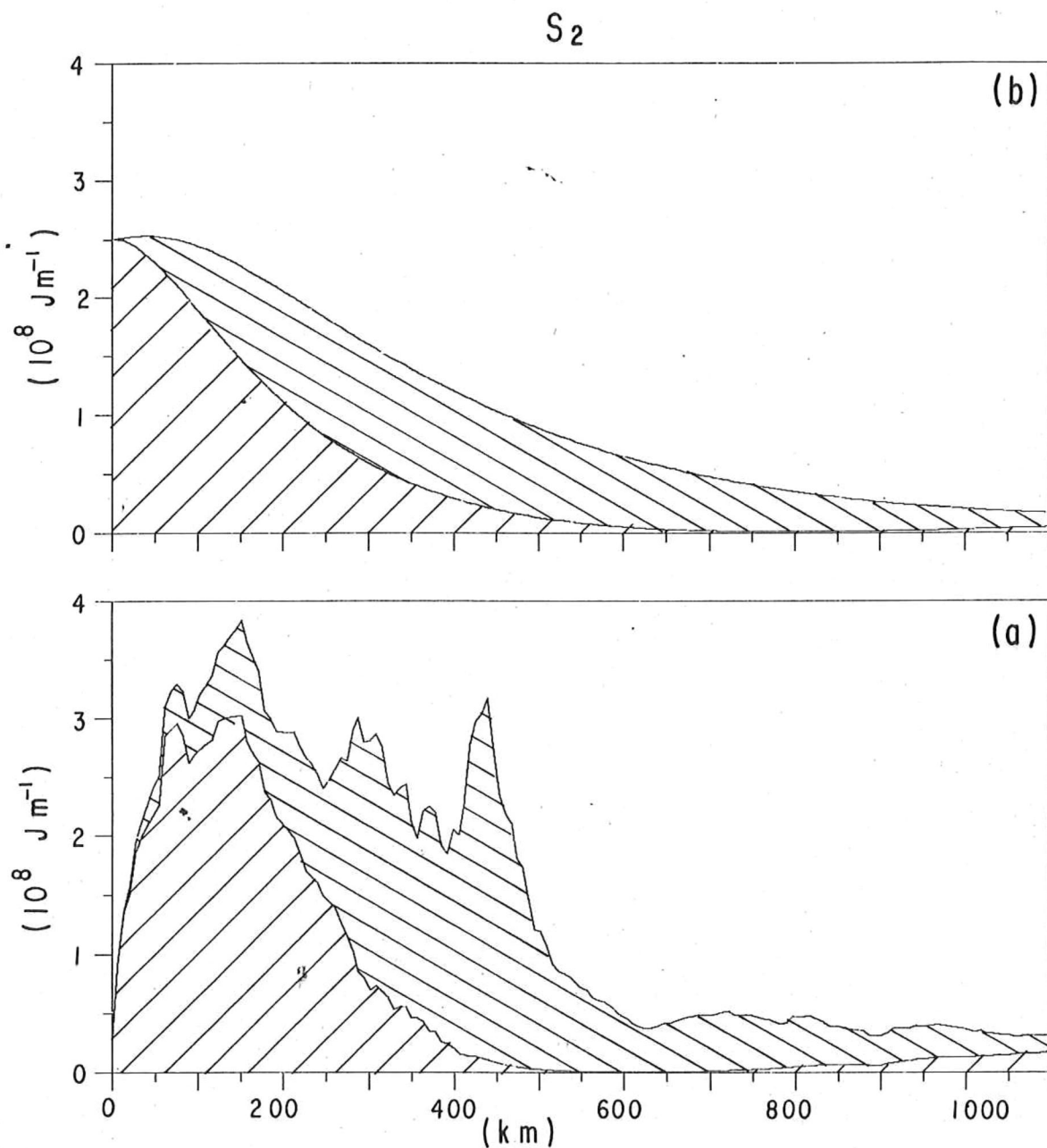
VI.2 Componente S_2 : En las figuras 16 a 18 mostramos los campos de velocidad, transporte, densidad de energía y disipación. Comparándolos con sus análogos para la M_2 , es notable la similitud de las curvas, diferenciándose sólo en los valores alcanzados que son menores.

La diferencia entre los campos de estas dos componentes semidiurnas, estriba fundamentalmente en que la M_2 -más energética- se encuentra más cerca de la frecuencia natural de oscilación de la cuenca (figura 3); por otro lado el forzamiento de marea debido a la Luna es mayor que el Solar.



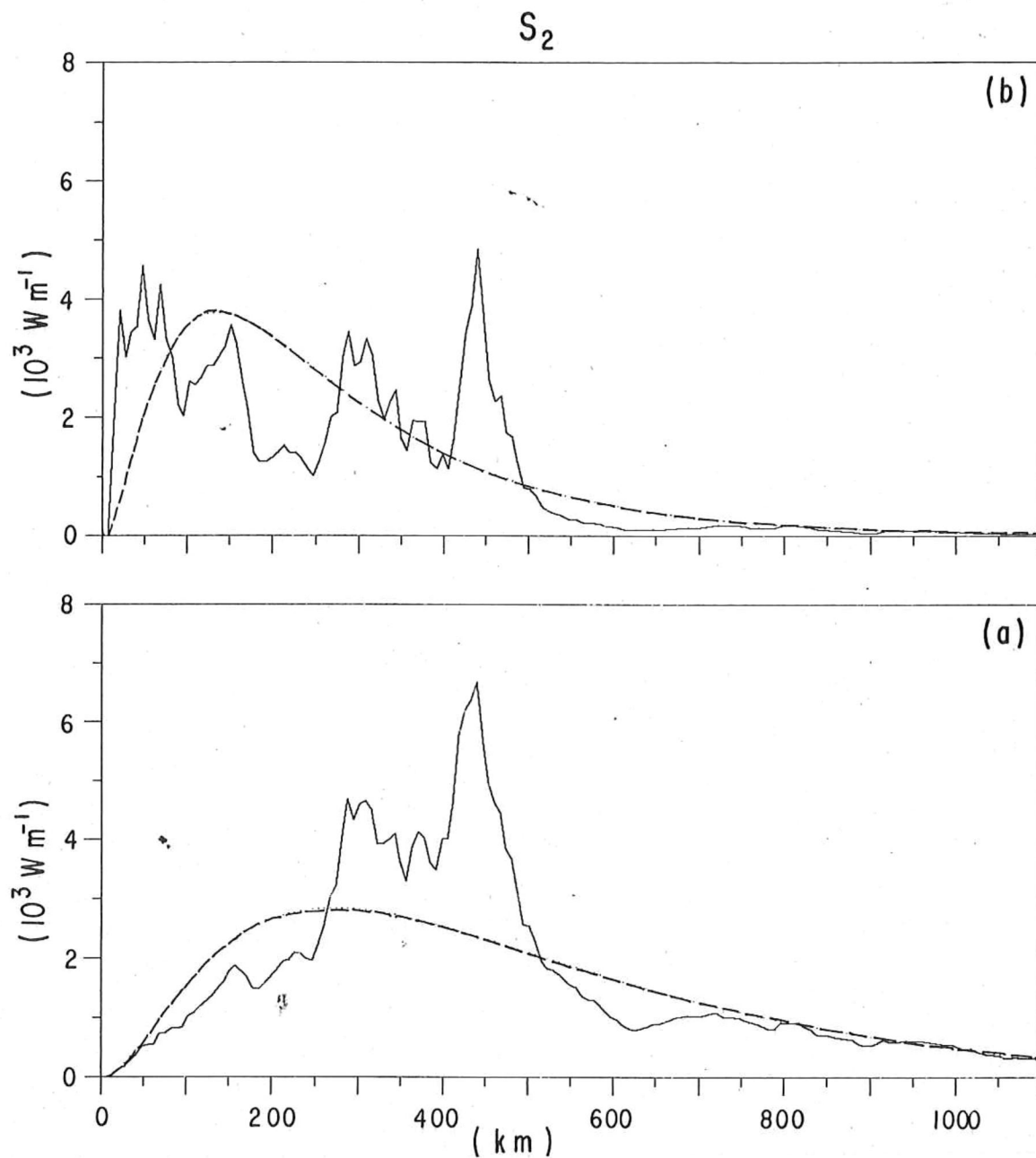
Distancia a la cabeza

16. Amplitudes de velocidad (a) y transporte (b), y fase de ambos campos (c) para la componente S_2 .



Distancia a la cabeza

17. Densidades de energía con las topografías rugosa (a) y suave (b), para la componente S_2 . La curva superior corresponde a la energía total, /// es la contribución de la energía potencial y \\\ de la cinética.



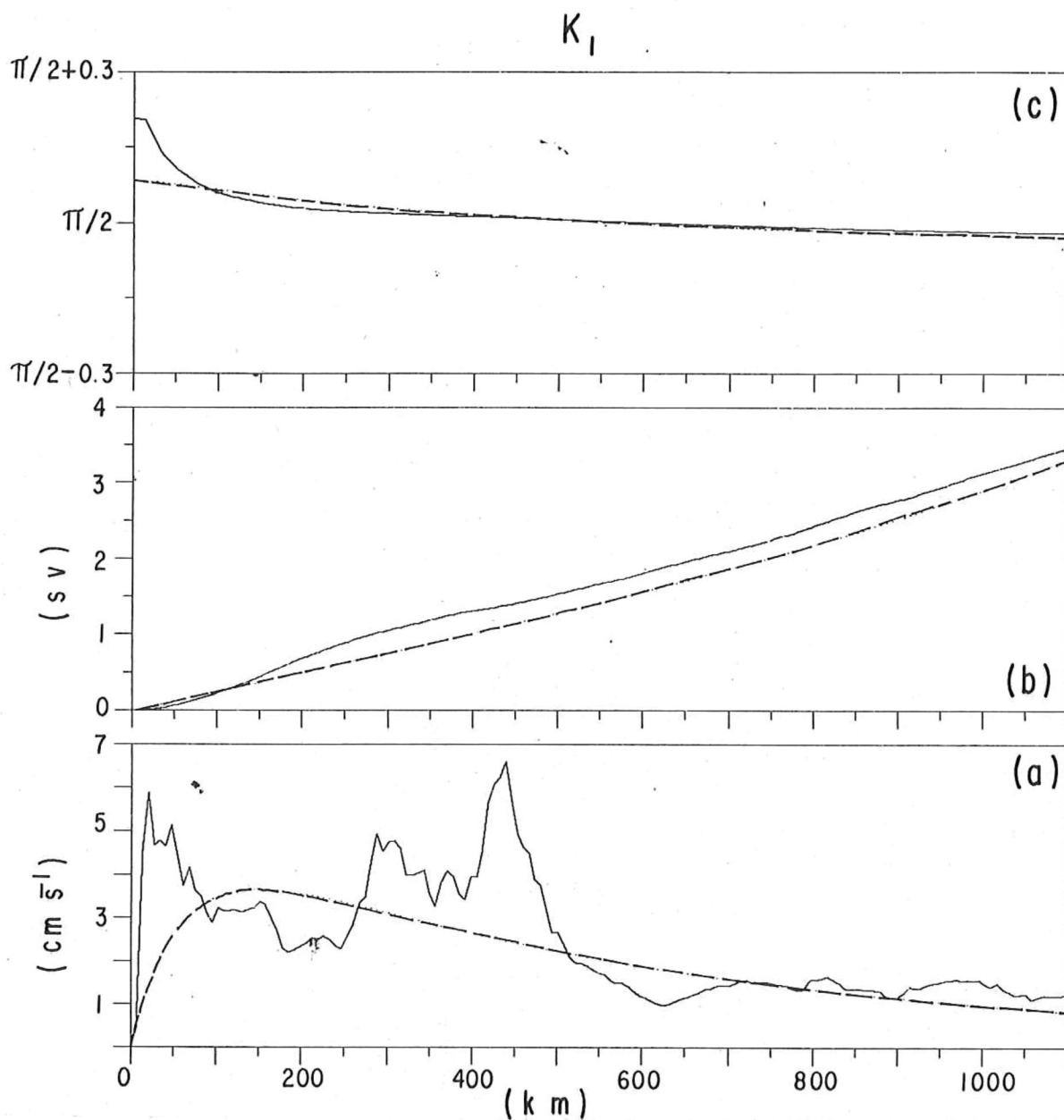
Distancia a la cabeza

18. Disipación de energía con el coeficiente de fricción constante (a) y variable (b), para la componente S_2 .

VI.3 Componente K_1 : Los campos de las componentes diurnas son poco energéticos comparados con los de las semidiurnas. De las dos contempladas en este trabajo la K_1 es la más importante.

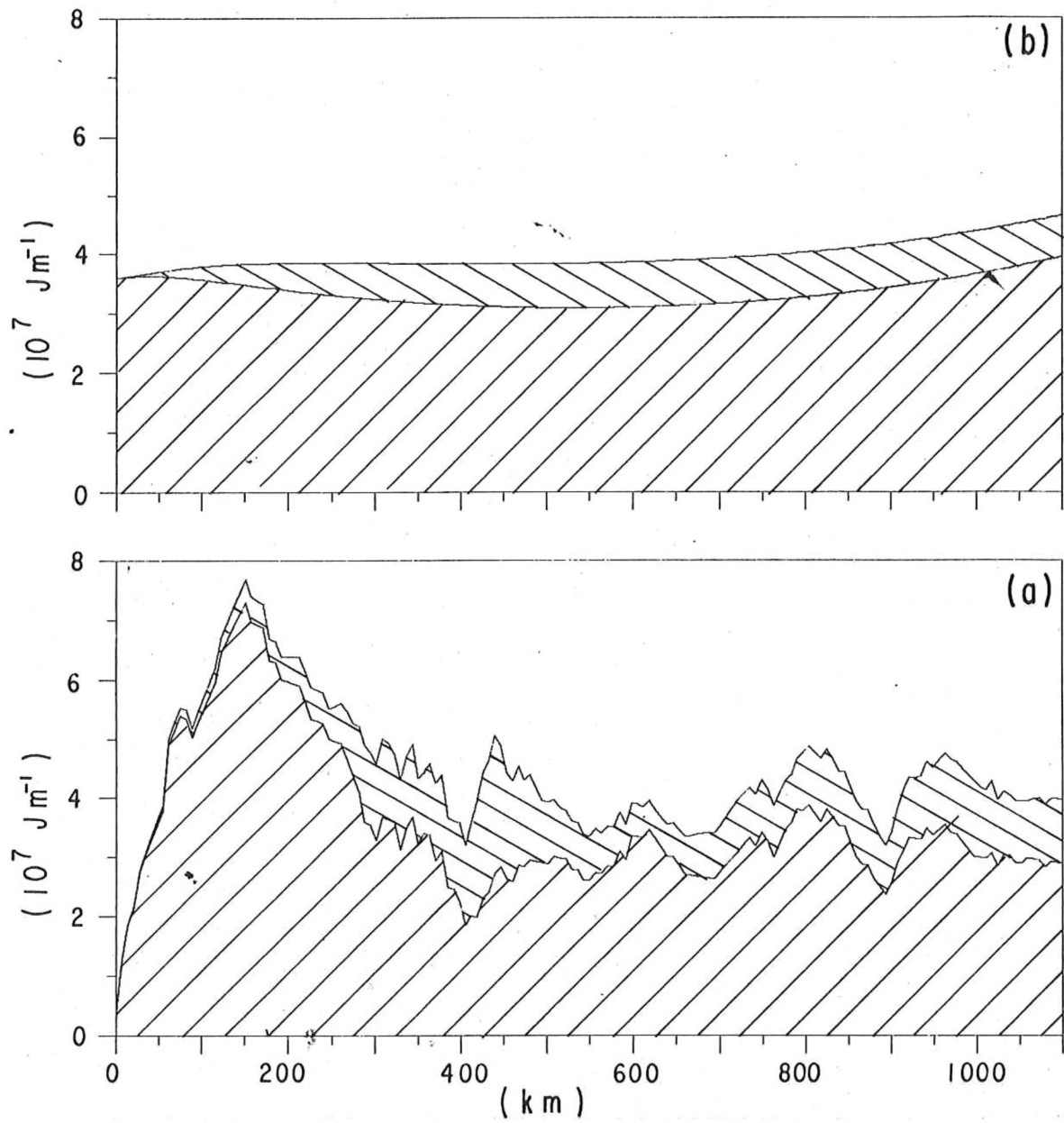
La rapidez (figura 19a) presenta en la mitad norte una estructura muy similar a la de las componentes diurnas, aunque su máximo es 8 veces inferior al de la M_2 . En la mitad sur observamos valores más cercanos al máximo (6.6 cm s^{-1}), lo que cambia la distribución de la energía cinética y la disipación para estas componentes diurnas. La amplitud del transporte aumenta casi linealmente desde la cabeza hasta la boca (figura 19b), donde alcanza su máximo valor. La fase de ambos campos (figura 19c) es prácticamente uniforme, implicando un retraso de pocos minutos entre la cabeza y la boca.

La distribución espacial de las energías cinética y potencial es diferente a la de las componentes semidiurnas. Si bien la energía potencial alcanza su máximo en la región somera (20a), en el resto del Golfo mantiene un valor elevado de aproximadamente la mitad del máximo. El valor más grande de energía cinética se encuentra igualmente en el umbral, pero presenta mayores valores relativos en el sur. Comparando ambas figuras, es inmediato que la energía potencial domina, con un 81 % del total.



Distancia a la cabeza

19. Amplitudes de velocidad (a) y transporte (b), y fase de ambos campos (c) para la componente K_1 .



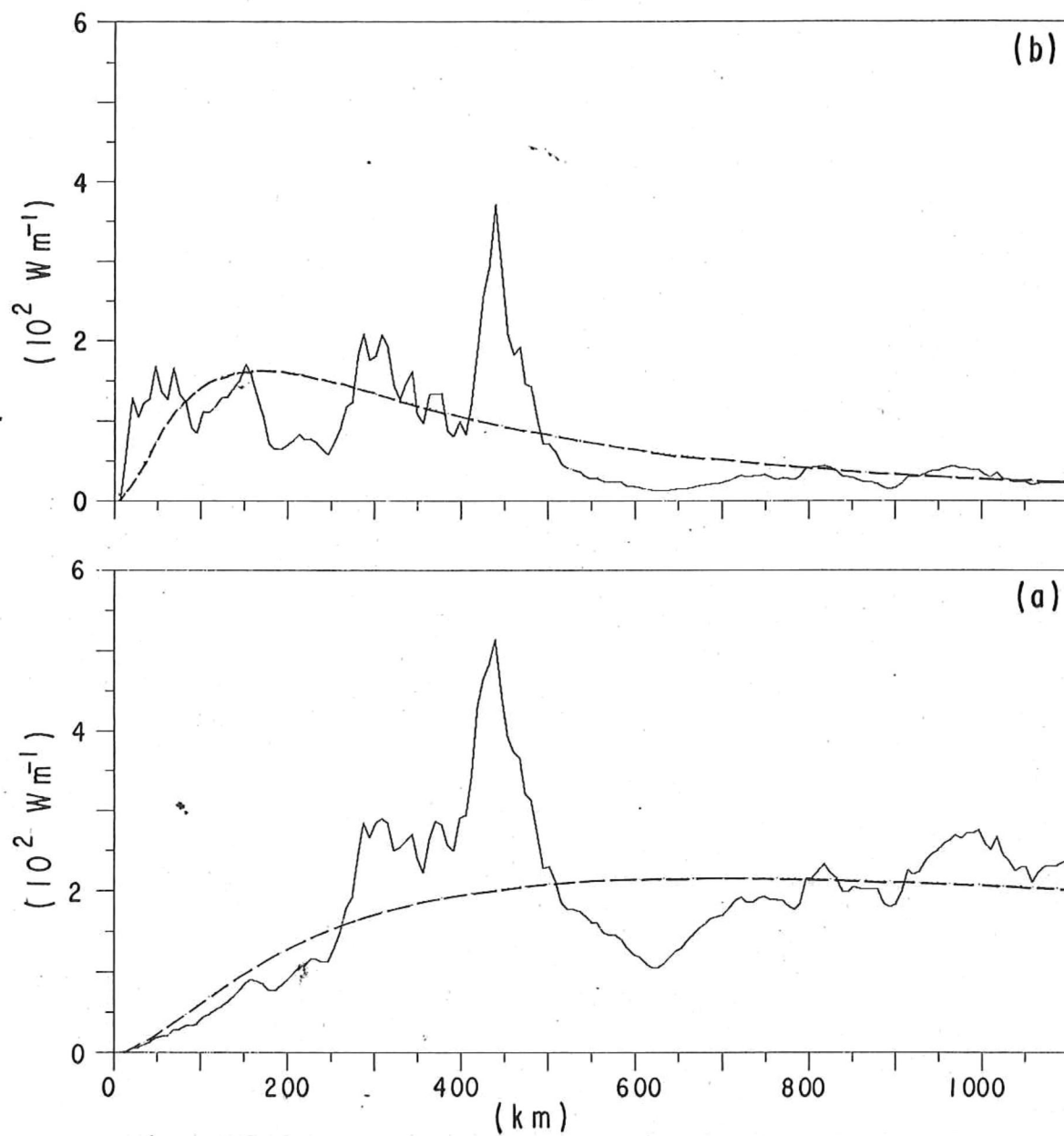
Distancia a la cabeza

20. Densidades de energía con las topografías rugosa (a) y suave (b), para la componente K_1 . La curva superior corresponde a la energía total, //// es la contribución de la energía potencial y \\ de la cinética.

La figura 21 muestra las curvas de disipación para los golfos rugoso (21a) y suave (21b). En la mitad norte, la distribución para el caso de fricción constante es muy similar a la de las componentes semidiurnas; en la sur hay relativamente mayor disipación. Para el coeficiente de fricción variable, la distribución de los máximos es también similar a las semidiurnas, aunque el pico asociado al umbral es mayor que sus vecinos.

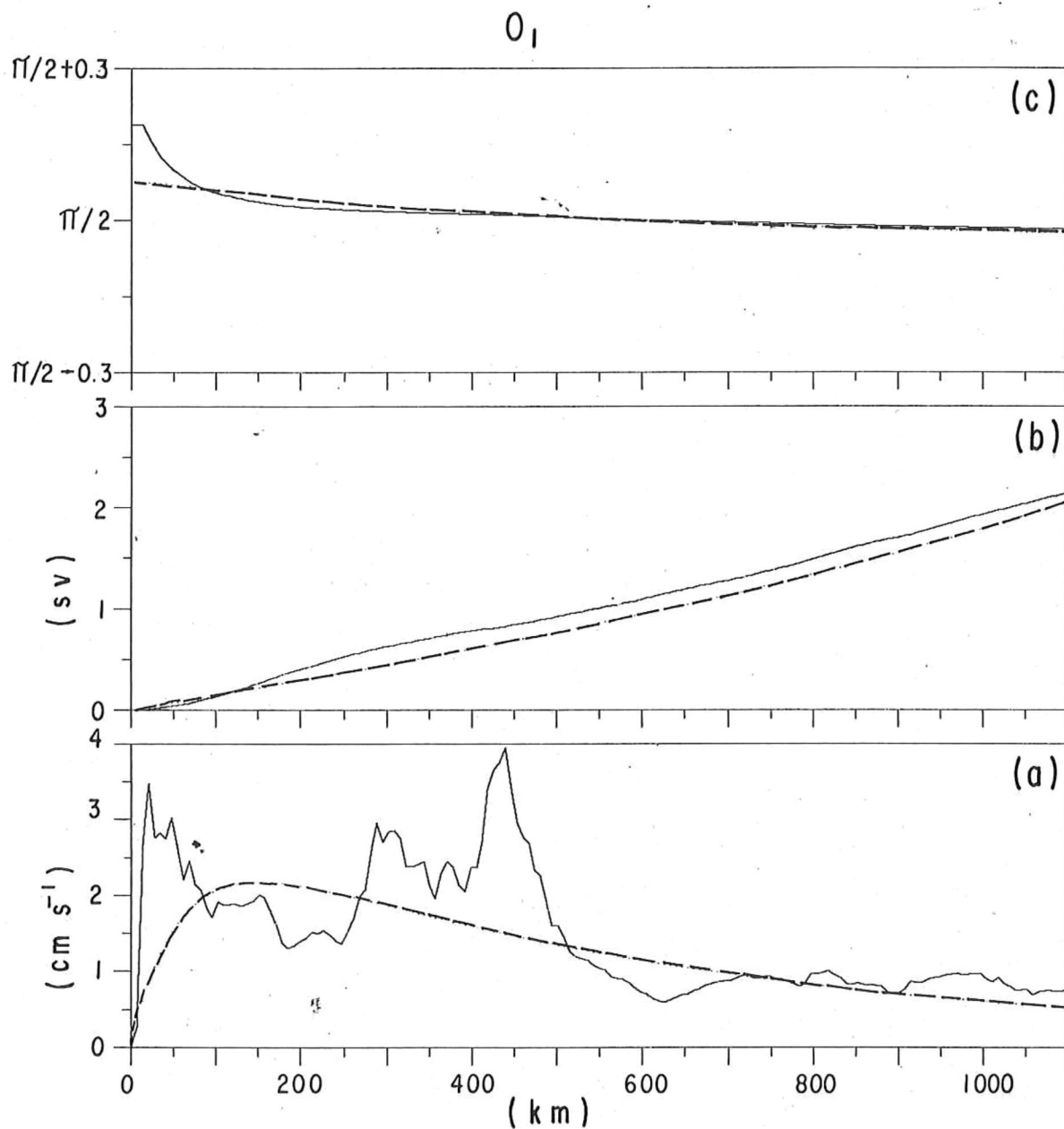
VI.4 Componente Q_1 : Los resultados para la componente Q_1 los mostramos en las figuras 22 a 24; los perfiles son prácticamente iguales que los obtenidos para la K_1 , pero los valores son menores. De las componentes aquí consideradas, ésta es la menos importante en la dinámica de la marea del Golfo.

Las predicciones con el canal suave son en general buenas para la amplitud de elevaciones y malas para la fase, aunque, como ya mencionamos, si eliminamos las estaciones de La Paz y Topolobampo en las figuras 11b y 12b, las curvas de los modelos pasan por casi todas las mediciones (considerando sus barras de error). Las diferencias más sobresalientes entre los golfos rugoso y suave se presentan en la rapidez, las densidades de energía y la disipación, ya que éstas reflejan lo irregular de la batimetría, lo que no ocurre con el transporte y la elevación; todos los máximos

K_1 

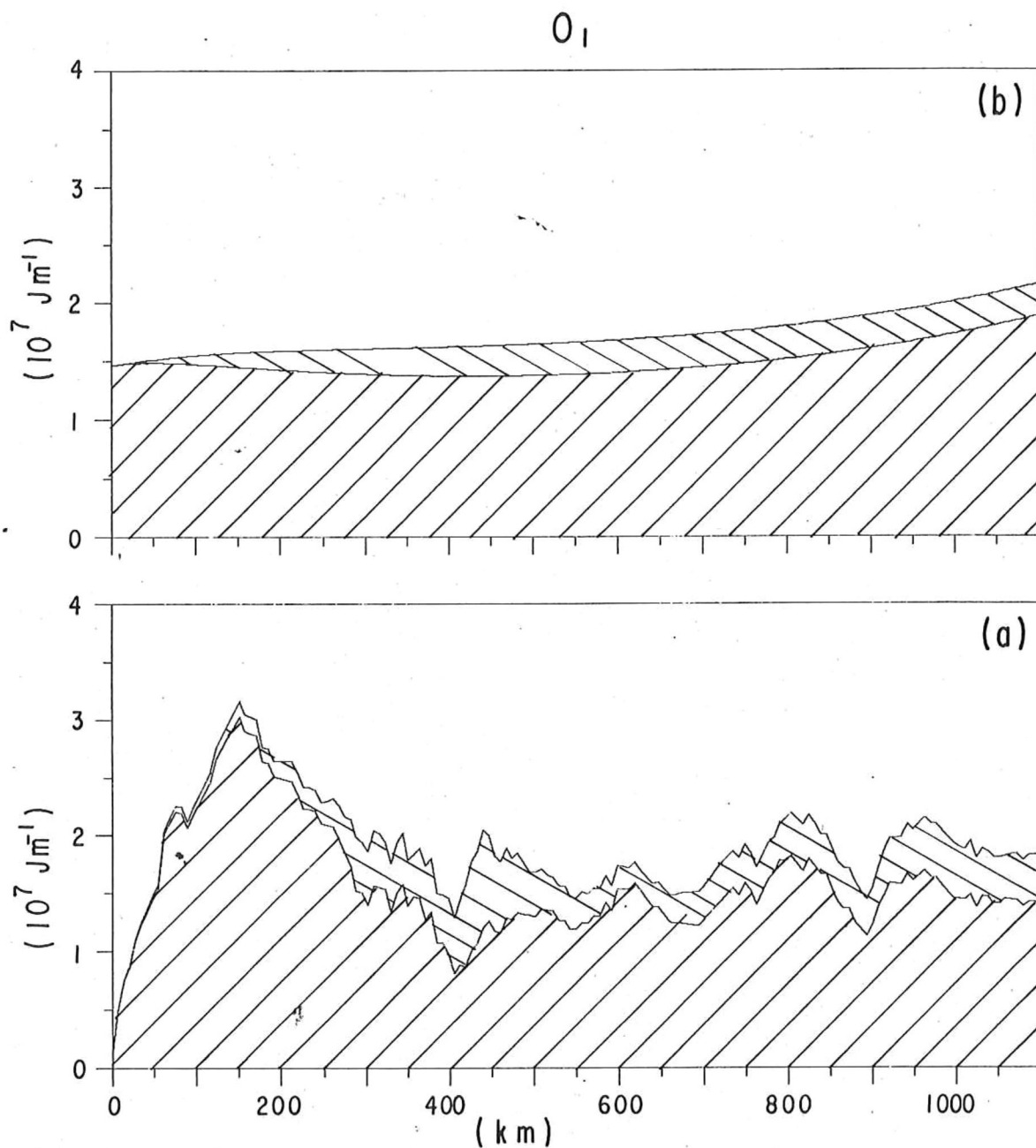
Distancia a la cabeza

21. Disipación de energía con el coeficiente de fricción constante (a) y variable (b), para la componente K_1 .



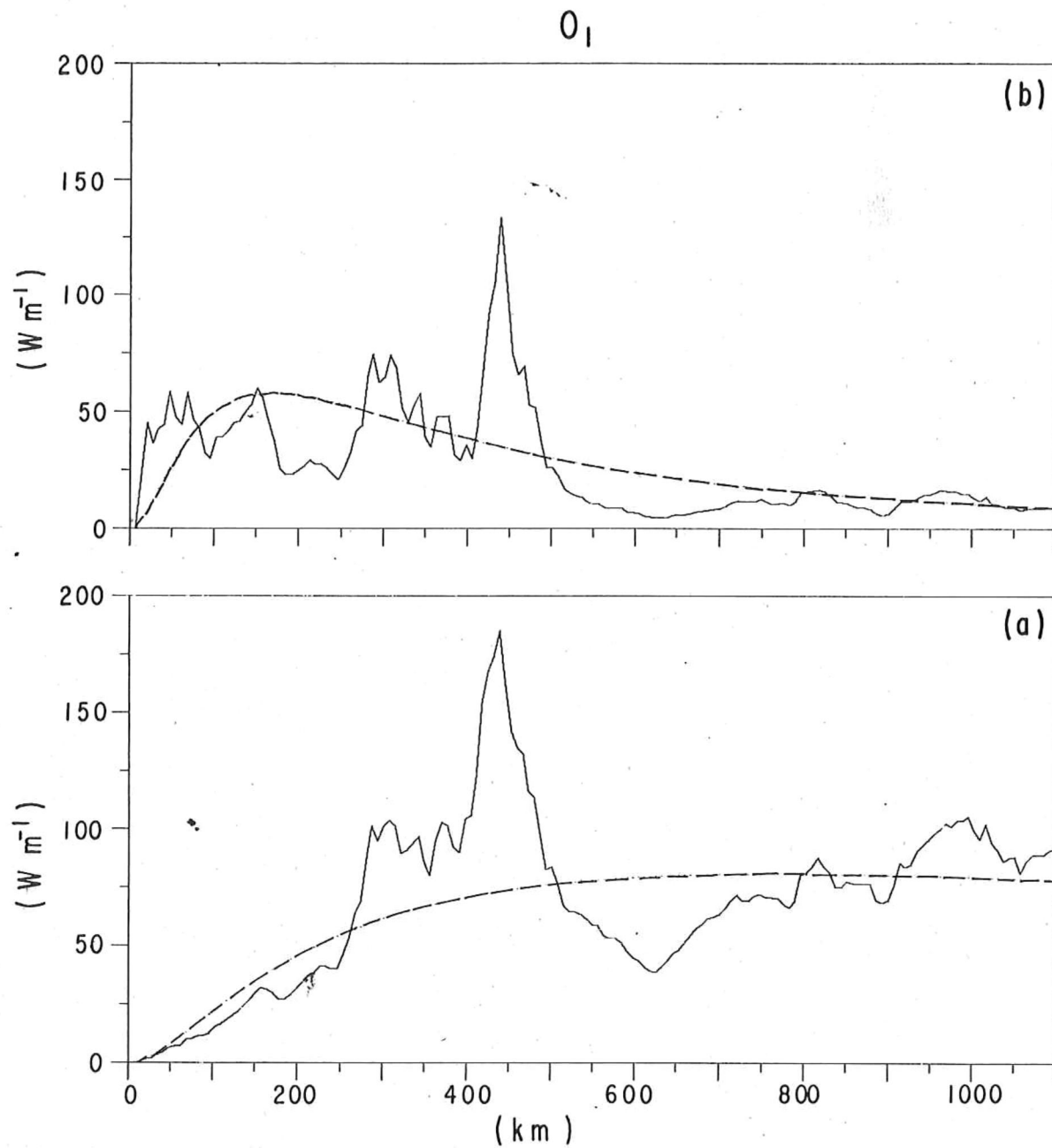
Distancia a la cabeza

22. Amplitudes de velocidad (a) y transporte (b), y fase de ambos campos (c) para la componente 0_1 .



Distancia a la cabeza

23. Densidades de energía con las topografías rugosa (a) y suave (b), para la componente O_1 . La curva superior corresponde a la energía total, ---- es la contribución de la energía potencial y de la cinética.



Distancia a la cabeza

24. Disipación de energía con el coeficiente de fricción constante (a) y variable (b), para la componente 0_1 .

suaves son menores, sin embargo siguen el patrón general de distribución de los golfos rugosos. Esto resulta interesante porque, en el caso de λ constante, estos campos pueden resolverse analíticamente.

VI.5 Contribuciones energéticas de cada componente: Sobre la disipación de la energía de marea se tiene un interés cuyas raíces datan de 1695, cuando Halley encontró que sus observaciones de la luna y el sol no coincidían con antiguos reportes de eclipses. Se buscaron diversos mecanismos para explicar estas diferencias, como perturbaciones de la órbita lunar y deformaciones de la corteza por efectos de marea terrestre, que no resultaron suficientes. Se pensó entonces en la disipación con el fondo de las corrientes de marea; como éstas son bajas en mares profundos la atención se centró en mares marginales (Munk, 1968).

En las Tablas XI a XIII comparamos los valores de energía almacenada y disipación, promediadas en un ciclo de marea, para los dos coeficientes de fricción con la topografía rugosa, y para λ constante con el golfo suave.

Los porcentajes con los que contribuye cada una de las componentes al total son prácticamente iguales, sin importar el modelo, notándose considerables diferencias entre las energéticas componentes semidiurnas y las débiles diurnas.

TABLA XI
DISTRIBUCION ENERGETICA DE LAS CUATRO COMPONENTES
TOPOGRAFIA RUGOSA
 $\lambda(x)H(x) = 1.6 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$

	M ₂	S ₂	O ₁	K ₁	Total
E _r /D [hr]	37	35	196	164	
E _r [10 ¹⁴ J]	4.3	1.5	0.20	0.47	6.4
% del Total	66.0	23.6	3.10	7.29	
D _r [10 ⁹ W]	3.2	1.2	0.03	0.08	4.5
% del Total	70.8	26.7	0.62	1.77	

TABLA XII
DISTRIBUCION ENERGETICA DE LAS CUATRO COMPONENTES
TOPOGRAFIA RUGOSA
 $\lambda = 1.1 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

	M ₂	S ₂	O ₁	K ₁	Total
E _r /D [hr]	24	24	77	66	
E _r [10 ¹⁴ J]	4.3	1.5	0.20	0.47	6.4
% del Total	66.2	23.3	3.11	7.31	
D _r [10 ⁹ W]	5.0	1.8	0.07	0.20	7.1
% del Total	70.8	25.2	1.05	2.83	

TABLA XIII
DISTRIBUCION ENERGETICA DE LAS CUATRO COMPONENTES
TOPOGRAFIA SUAVE
 $\lambda = 1.4 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

	M ₂	S ₂	O ₁	K ₁	Total
E _r /D [hr]	19	19	74	63	
E _r [10 ¹⁴ J]	3.1	1.1	0.18	0.42	4.8
% del Total	64.5	23.0	3.80	8.73	
D _r [10 ⁹ W]	4.5	1.6	0.07	0.19	6.4
% del Total	70.5	25.5	1.08	2.92	

En todos los casos, las semidiurnas son responsables de alrededor del 90% de la energía almacenada en el Golfo y del 97% de la disipación; la M_2 es responsable del 66% y el 71% del total respectivamente. La energía total almacenada en los golfos rugosos es la misma, pero la energía disipada es mayor para el coeficiente de fricción constante, ya que éste genera valores elevados en la mitad sur. Para el caso suave, las energías almacenada y disipada son menores que para su análogo rugoso.

Una estimación del tiempo necesario para que la marea disipe la energía almacenada es el cociente entre la energía total y la disipación (E_T/D), que se muestra en las mismas tablas. Comparando los resultados para las batimetrías rugosas, se necesitan más horas para disipar la energía considerando λ variable, con una gran diferencia entre las componentes K_1 y O_1 . Para un mismo caso, el tiempo de amortiguamiento para las diurnas es siempre mayor que para las semidiurnas, reflejando poca disipación de energía.

Nuestros resultados para la M_2 concuerdan muy bien con los reportados por Filloux (1973) y Stock (1976) (ver Tabla XIV); éste último utiliza diferentes parametrizaciones de fricción con el fondo, lineales y alineales, las que determina a manera de obtener el ajuste óptimo a mediciones.

TABLA XIV
TABLA COMPARATIVA DEL BALANCE ENERGETICO
DE ACUERDO A DIVERSOS AUTORES

	M_2	S_2	K_1
Disipación [$\times 10^9$ W]			
Filloux (1973)	4.35	---	0.18
Stock (1976)	4.5 - 4.9	1.9	0.13
Argote (1987)	3.--	---	---
Este trabajo	3.2 - 5.0	1.2 - 1.8	0.08 - 0.20
Energía Almacenada [$\times 10^{14}$ J]			
Filloux (1973)	3.8	---	0.87
Stock (1973)	3.7 - 3.9	1.3	0.59
Este trabajo	4.3	1.5	0.47

Las estimaciones de disipación en el Golfo de California han resultado cada vez menores; basta comparar las arriba reportadas con valores previos, tales como 40×10^9 W por Roden & Groves (1959)¹ y Miller (1966)²; 25×10^9 W por Heiskanen (1971)² y 10 a 20×10^9 W por Hendershott (1971).

¹ Citado por Quirós (1983)

² Citado por Filloux (1973)

VII. MODELO CUASI-BIDIMENSIONAL

Las ecuaciones de aguas someras con un término de fricción lineal, suponiendo que los campos tienen solución armónica, i.e. $\partial_t \rightarrow i\omega$ son

$$-i\Omega U(x,y) + fV(x,y) + g\partial_x Z(x,y) = 0, \quad (23)$$

$$-i\Omega V(x,y) - fU(x,y) + g\partial_y Z(x,y) = 0, \quad (24)$$

$$-i\omega Z(x,y) + \partial_x [H(x)U(x,y)] + \partial_y [H(x)V(x,y)] = 0. \quad (25)$$

donde $U(x,y)$ es la componente de la velocidad a lo largo del Golfo, $V(x,y)$ es la componente a lo ancho, $Z(x,y)$ es la elevación sobre el nivel medio del mar y f es el parámetro de Coriolis, considerado constante para una latitud de 28°N .

Hasta ahora hemos tratado el caso más sencillo, que es el despreciar toda variabilidad a lo largo del eje transversal "y", reduciendo nuestro sistema al (11). Un paso inmediato es el suponer algún tipo de dependencia a lo ancho del canal a primer orden, es decir

$$U(x,y) = U_0(x) + U_1(x)y, \quad (26)$$

$$V(x,y) = \quad + V_1(x)y, \quad (27)$$

$$Z(x,y) = Z_0(x) + Z_1(x)y, \quad (28)$$

donde las variables con subíndice 0 son las soluciones del modelo unidimensional ($V_0(x) \equiv 0$), y las que tienen subíndice 1 son perturbaciones, tales que

$$U_0(x) \gg U_1(x)y,$$

$$Z_0(x) \gg Z_1(x)y.$$

El problema es entonces calcular las variables a primer orden en y , partiendo de los campos unidimensionales.

Para obtener el campo de velocidad $V(x,y)$ suponemos que es lineal en y , limitado por las costas izquierda $a(x)$ (Baja California) y derecha $b(x)$ (Sonora y Sinaloa). La condición de flujo paralelo a la costa es

$$\partial_x[y-a(x)] + U(x,y)\partial_x[y-a(x)] + V(x,y)\partial_y[y-a(x)] = 0,$$

relación que se reduce a

$$U(x,y)a(x)' = V(x,y).$$

Considerando el campo básico unidimensional $U_0(x)$, las ecuaciones en las costas son

$$V_a(x) = V(x,a(x)) = U_0(x)a(x)', \quad (29)$$

$$V_b(x) = V(x,b(x)) = U_0(x)b(x)'. \quad (30)$$

Al suponer una variación lineal entre ellas obtenemos la relación para $V(x,y)$, que es

$$V(x,y) = U_0(x)W(x)^{-1}[W(x)'(y-a(x)) + a(x)'W(x)], \quad (31)$$

donde $W(x)$ es el ancho del canal.

Para encontrar $Z(x,y)$ consideramos un balance geostrófico en la ecuación (2) con campos de la forma (26) y (28), es decir

$$f[U_0(x) + U_1(x)y] = -gZ_1(x),$$

de esta expresión podemos obtener $Z_1(x)$ suponiendo orden

máximo uno para y , de forma que al substituir en (28) queda finalmente

$$Z(x,y) = Z_0(x) - fg^{-1}U_0(x)y. \quad (32)$$

Retomemos la ecuación de continuidad (3) y consideremos sólo el tercer término, que de acuerdo a (31) es

$$\partial_y [H(x)V(x,y)] = H(x)U_0(x)W(x)^{-1}W(x)'. \quad (33)$$

Si sustituimos en la ecuación original obtenemos la ecuación de continuidad para un canal de ancho finito equivalente a la segunda ecuación del sistema (1). Sin embargo necesitamos encontrar un balance para los términos a primer orden de $U(x,y)$ y $Z(x,y)$, donde $Z_1(x)$ es conocido (32) (nótese que estamos despreciando el término correspondiente a $V_1(x)y$. Sabemos que debe cumplirse la relación

$$-i\omega Z_1(x) + [H(x)U_1(x)]' = 0, \quad (34)$$

que puede reescribirse como

$$i\omega fg^{-1}U_0(x) + [H(x)U_1(x)]' = 0.$$

Utilizando la primera ecuación del sistema (1) obtenemos

$$-i\omega Z_1(x) = \omega f\Omega^{-1}Z_0(x)',$$

de forma que (34) puede ser expresada como

$$\omega f\Omega^{-1}Z_0(x) + H(x)U_1(x) + \text{cte} = 0.$$

Como debe cumplirse que la velocidad sea nula en la cabeza, la expresión final toma la forma

$$U_1(x) = \omega f\Omega^{-1}H(x)^{-1}[Z_0(0) - Z_0(x)]. \quad (35)$$

Las expresiones (31), (32) y (35) representan una solución aproximada a las ecuaciones de aguas someras, donde suponemos que los términos no considerados son más pequeños. La diferencia entre este modelo cuasi-bidimensional y uno bidimensional, es que el segundo satisface el sistema de ecuaciones (23)-(25) exactamente, mientras que en nuestro caso las soluciones son tales que el lado derecho de las ecuaciones nunca es idénticamente cero. Esta aproximación presenta grandes ventajas sobre un modelo bidimensional, que es la rapidez en tiempo de computadora, además de que las soluciones son inmediatas una vez que se conocen las elevaciones y velocidad unidimensionales.

Para evaluar la capacidad de predicción de esta aproximación utilizamos las mismas relaciones que en el caso unidimensional, considerando las incertidumbres de los datos ya estimadas.

En las Tablas XV y XVI comparamos los ajustes con los modelos uni y bidimensionales, con y sin las estaciones de Topolobampo y La Paz, para λ constante.

Como en el caso del modelo unidimensional, los valores de E_r cambian mucho si eliminamos a Topolobampo y La Paz, y el valor se reduce aun más al hacer la aproximación bidimensional. Como mencionamos anteriormente, el valor de la sumatoria pierde su validez como criterio de ajuste en

estas componentes, ya que las estaciones tan alejadas del modelo pesan demasiado en el cálculo de las incertezas. Para evaluar mejor los cambios, conviene comparar los Δ_A y Δ_F . Es inmediato que el ajuste bidimensional de las diurnas es también demasiado afectado por Topolobampo y La Paz, mejorando sustancialmente al no considerar dichas estaciones.

TABLA XV
RESIDUOS PONDERADOS POR LA INCERTIDUMBRE
TOPOGRAFIA RUGOSA
 $\lambda = 1.1 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$

Componente	UNIDIMENSIONAL		BIDIMENSIONAL	
	ϵ_A	ϵ_F	ϵ_A	ϵ_F
Considerando Topolobampo y La Paz				
M_2	25	39	25	26
S_2	28	41	27	28
O_1	31	35	31	31
K_1	35	34	35	33
Eliminando Topolobampo y La Paz				
M_2	23	36	23	23
S_2	27	35	26	23
O_1	30	12	30	7
K_1	40	12	35	8

TABLA XVI
RESIDUOS PONDERADOS POR LA VARIANCIA
TOPOGRAFIA RUGOSA
 $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

	UNIDIMENSIONAL		BIDIMENSIONAL	
Componente	Δ_A	Δ_F	Δ_A	Δ_F
Considerando Topolobampo y La Paz				
M_2	0.0063	0.062	0.0062	0.041
S_2	0.0076	0.043	0.0074	0.030
D_1	0.0015	1.12	0.0015	1.01
K_1	0.0016	1.27	0.0016	1.24
Eliminando Topolobampo y La Paz				
M_2	0.0059	0.068	0.0058	0.043
S_2	0.0074	0.045	0.0072	0.030
D_1	0.0015	0.63	0.0015	0.36
K_1	0.0017	0.71	0.0017	0.50

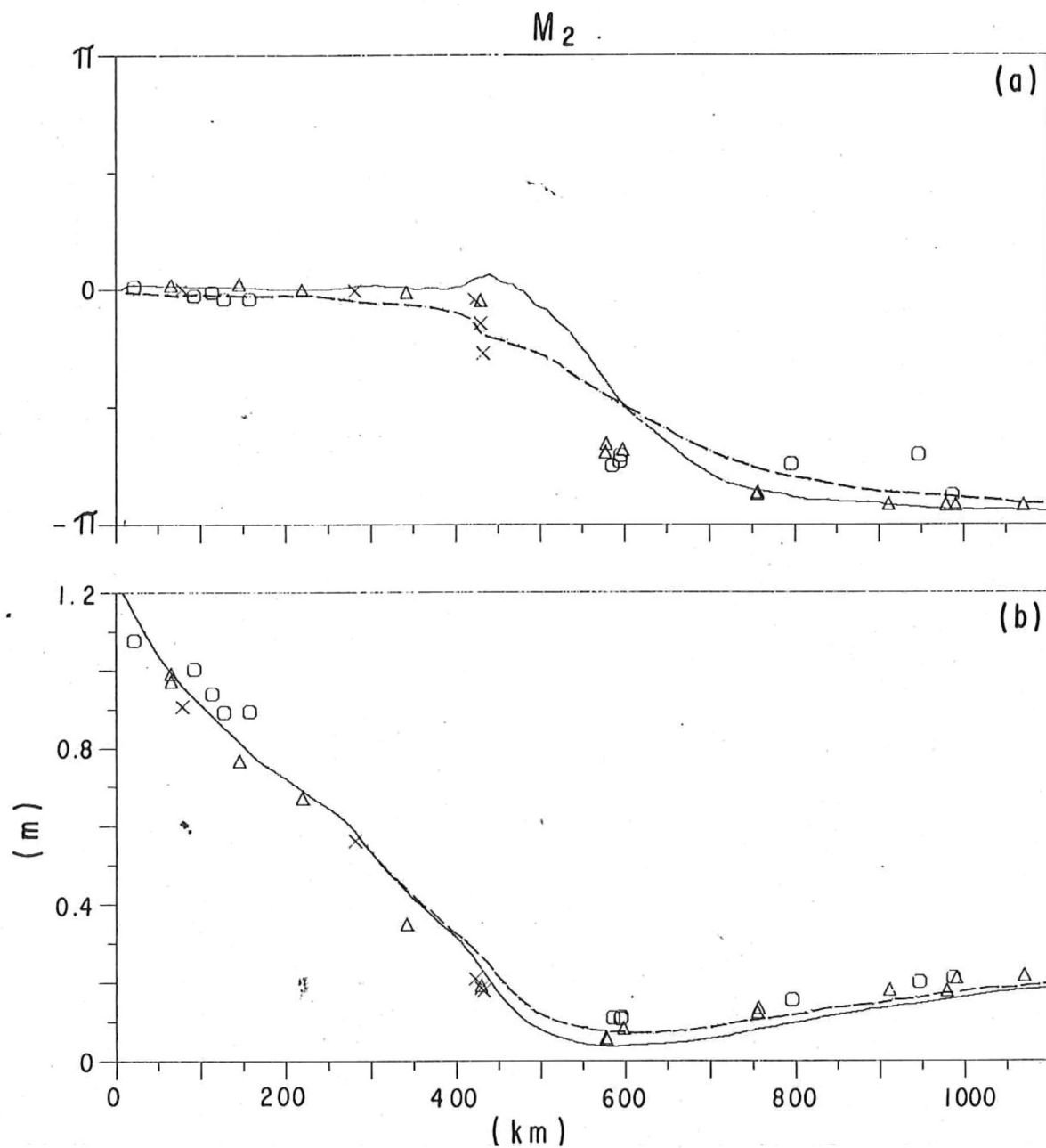
En general, son las fases los únicos campos cuyo ajuste mejora notóriamente al incluir una dependencia del eje transversal; los ajustes de amplitud son prácticamente iguales para la semidiurnas (variando en una parte por cien) e indistinguibles en las diurnas, lo que se aprecia claramente en las figuras.

VII.1 Campo de elevaciones: En las figuras 25 a 28 mostramos las curvas de amplitud y fase de elevación obtenidas para las cuatro componentes; en éstas la línea

llena corresponde a los valores obtenidos en la costa de Baja California y la punteada a la de Sonora y Sinaloa.

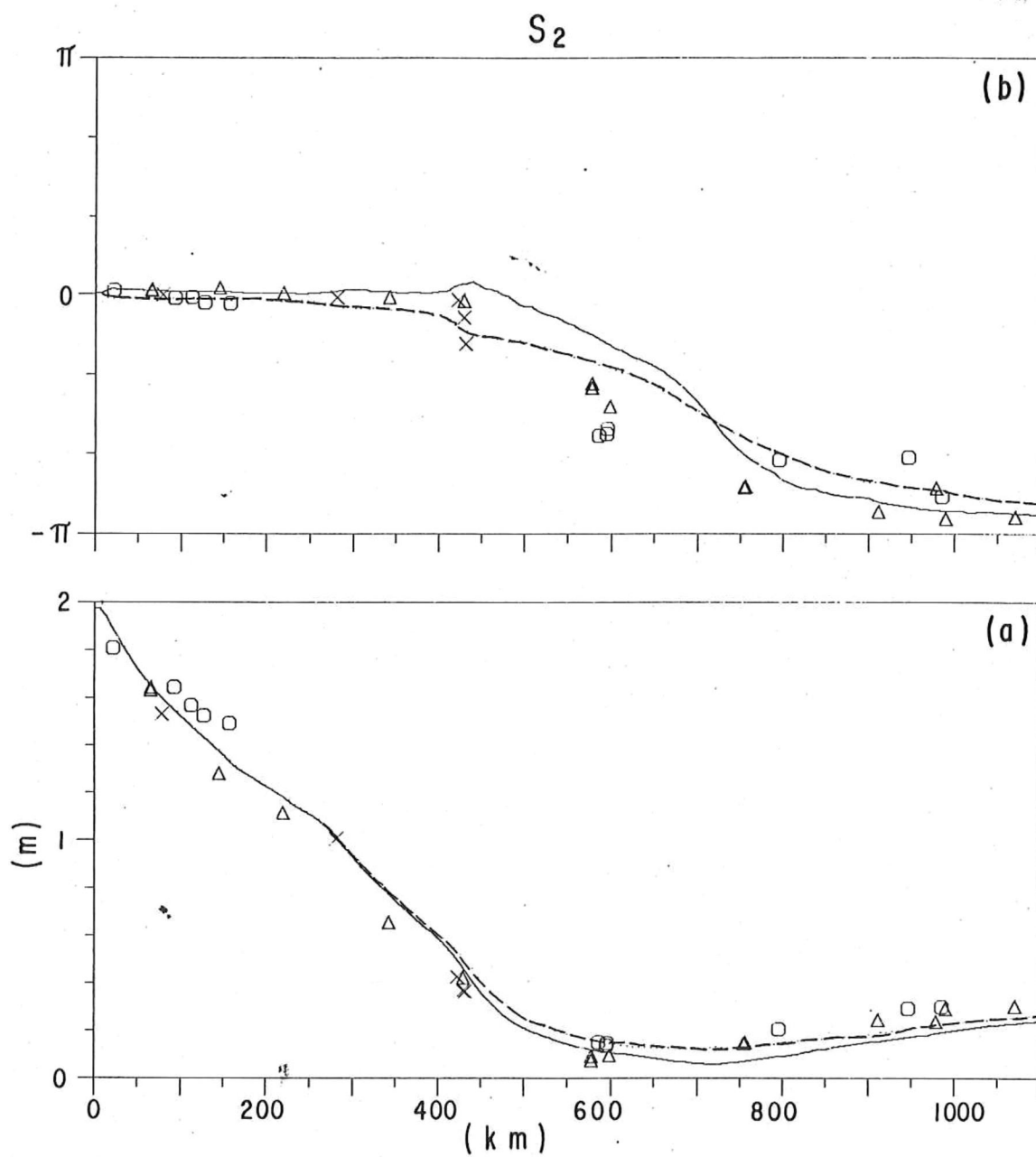
Como se observa las variaciones en la amplitud son mínimas para las semidiurnas y gráficamente indistinguibles en el caso de las diurnas; tampoco se notan cambios significativos en la fase de las primeras. Por el contrario, la importancia de la bidimensionalidad es clara en las fases de las diurnas; en las figuras 22b y 23b están indicadas con un triángulo las estaciones de la costa de Baja California, con un círculo las ubicadas en Sonora y Sinaloa y con una equis las restantes. Es curioso notar lo rugoso de las curvas de fase, ya que en las figuras anteriores éstas son suaves; en este caso reflejan lo irregular del campo de velocidad unidimensional (ecuación 32).

VII.2 Contribuciones energéticas de cada componente: Si comparamos el balance energético obtenido en esta aproximación, presentado en las Tablas XVII y XVIII, con el que resulta del modelo unidimensional, Tablas XII y XIII, notamos pequeñas diferencias entre los casos con topografía rugosa; la energía almacenada es menor y la disipación mayor. Esto último tiene sentido, ya que el coeficiente de fricción es el mismo y tenemos el efecto adicional causado por la velocidad transversal $V(x,y)$, que resulta pequeño.



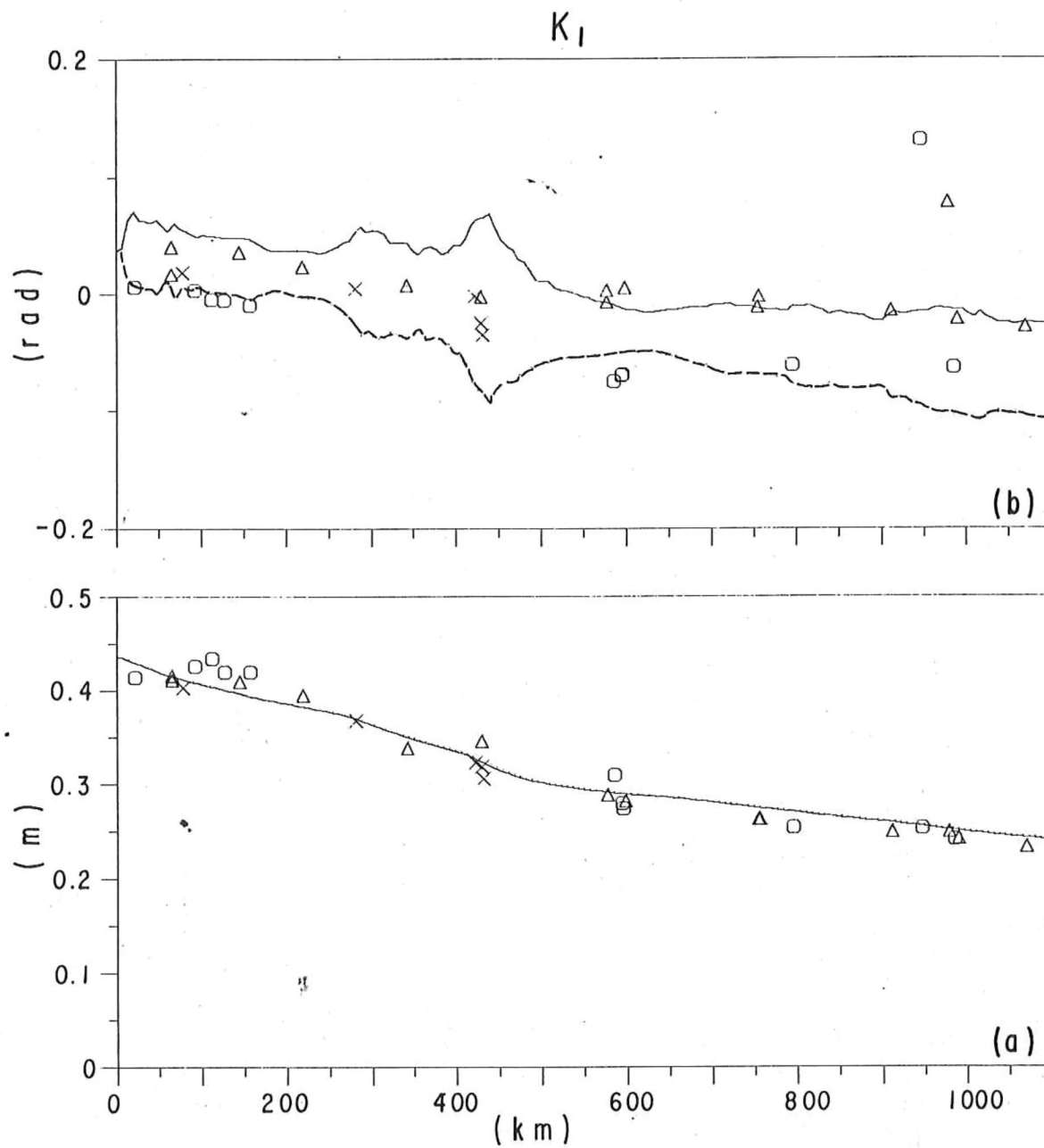
Distancia a la cabeza

25. Amplitudes (a) y fases (b) de las elevaciones obtenidas con el modelo cuasi-bidimensional, para la componente M_2 . La línea llena representa los valores en la costa de Baja California y la punteada en la de Sonora y Sinaloa. Los triángulos Δ representan las estaciones ubicadas a lo largo de B. California; los octágonos $\circ$ a lo largo de Sonora y Sinaloa y las cruces $\times$ las estaciones en zonas intermedias.



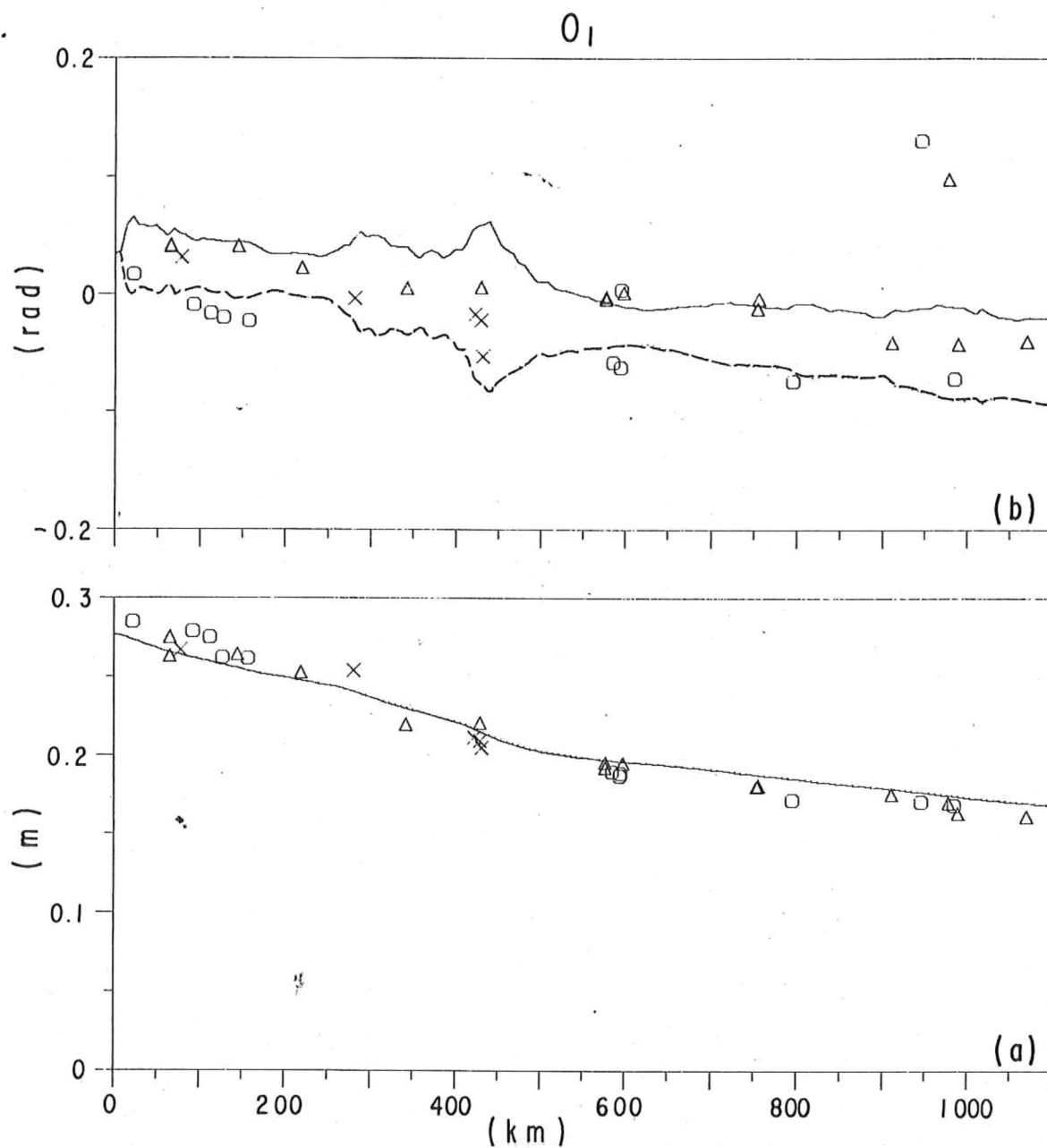
Distancia a la cabeza

26. Como en la figura 25, para la componente S_2 .



Distancia a la cabeza

27. Como en la figura 25, para la componente K_1 .



Distancia a la cabeza

28. Como en la figura 25, para la componente 0_1 .

TABLA XVII
 APROXIMACION BIDIMENSIONAL
 DISTRIBUCION ENERGETICA DE LAS CUATRO COMPONENTES
 TOPOGRAFIA RUGOSA
 $\lambda = 1.1 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

	M ₂	S ₂	O ₁	K ₁	Total
E _T /D [hr]	22	22	70	60	
E _T [10 ¹⁴ J]	3.9	1.4	0.19	0.45	5.9
% del Total	65.7	23.6	3.20	7.58	
D _T [10 ⁹ W]	5.9	1.8	0.08	0.21	8.0
% del Total	73.7	22.7	0.96	2.61	

Para el contenido energético del golfo suave la bidimensionalidad resulta intrascendente, ya que los valores obtenidos son muy parecidos en los dos casos.

TABLA XVIII
 APROXIMACION BIDIMENSIONAL
 DISTRIBUCION ENERGETICA DE LAS CUATRO COMPONENTES
 TOPOGRAFIA SUAVE
 $\lambda = 1.4 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

	M ₂	S ₂	O ₁	K ₁	Total
E _T /D [hr]	19	19	73	63	
E _T [10 ¹⁴ J]	3.1	1.1	0.18	0.42	4.8
% del Total	64.6	22.9	3.72	8.68	
D _T [10 ⁹ W]	4.5	1.6	0.07	0.19	6.4
% del Total	70.4	25.6	1.09	2.95	

VIII. CONCLUSIONES

De todo lo presentado en los capítulos anteriores podemos concluir lo siguiente:

a) Para explicar el campo de elevaciones de las cuatro componentes un modelo muy sencillo, unidimensional y lineal, es suficiente. Incluso un golfo suave determinado por cuatro parámetros, da resultados satisfactorios.

b) El ajuste unidimensional de fases para las componentes semidiurnas es muy bueno en la región somera del norte, con ambas versiones de la topografía. En el resto del golfo es bueno con el canal rugoso y malo con el suave.

c) El ajuste de fases para las componentes diurnas resultó ser muy afectado por las estaciones de Topolobampo y La Paz, que se encuentran relativamente muy alejadas del modelo. Estas deben de pesar bastante en el cálculo de las incertezas, que sin ellas serían aun menores.

d) Si bien los ajustes para las componentes diurnas son mejores con la topografía rugosa, los valores obtenidos con la suave son muy cercanos, indicándonos que éstas no son tan sensibles a la rugosidad de la cuenca.

e) La aproximación bidimensional resultó importante sólo para el campo de fases de las diurnas; con ésta mejoran todos los ajustes de amplitud, aunque no significativamente. Las amplitudes varían poco y el contenido energético permanece casi igual.

f) Las curvas obtenidas con las dos parametrizaciones del término de fricción, son en general indistinguibles para todos los campos a lo largo del golfo, excepto el de disipación de energía.

g) Los resultados obtenidos con los modelos concuerdan con los presentado por otros autores, como Filloux (1973), Stock (1976) y Argote y Amador (comunicación personal, 1987).

h) Las diferencias entre las elevaciones de las componentes semidiurnas y diurnas, se deben a que las primeras tienen una frecuencia cercana a la resonante. La poca respuesta de las diurnas y de la fase de velocidades a la fricción, se debe a que el Golfo de California es demasiado corto para ellas.

IX. BIBLIOGRAFIA

- Filloux, J.H., 1973. Tidal Patterns and Energy Balance in de Gulf of California. Nature. 243: 217-221.
- Grijalva, N., 1972. Tidal Computations in the Gulf of California I. Geofísica Internacional. 12: 13-34.
- Gutiérrez, G. y Morales, R., 1986. Revisión de los datos de marea para el Golfo de California. Informe Técnico OC-85-03. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.
- Hendershott, M.C., 1981. Long waves and ocean tides. IN: Warren A. and Wunsch C. (ed). Evolution of Physical Oceanography. MIT press. Cambridge, Massachusetts; 292-341.
- Hendershot, M.C. y Speranza, A., 1971. Co-oscillating Tides in Long, Narrow Bays; the Taylor problem revisited. Deep Sea Res. 18: 959-980.
- Kitaigorodski, A. I., 1975. Introducción a la Física. Editorial MIR, Moscú. 804 pp.
- Munk, W., 1968. Once again-tidal friction. Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society. 9: 352-375.
- Quiroz, G., 1983. Circulación Residual en el Golfo de California, un Modelo Numérico. Tesis de Maestría. Centro de Investigación Científica y Estudios Superiores de Ensenada. 98 pp.
- Roden, G. y Emilson, I., 1979. Physical oceanography of the Gulf of California. Contribution from the Department of Oceanography. University of Washington, Seattle. 57 pp.
- Stock, G.G., 1976. Modeling of Tides and Tidal Dissipation in the Gulf of California. Tesis de Doctorado. University of California at San Diego. San Diego, California. 133 pp.

APENDICE A

Las ecuaciones de aguas someras, con ancho y profundidad variando a lo largo del eje longitudinal del golfo en la forma (7), y con un coeficiente de fricción λ constante, tienen solución analítica. Para encontrarla partimos del sistema de ecuaciones (11) (capítulo II), y procedemos como sigue.

Definamos la siguiente función

$$T(x) \equiv i\Omega H(x)W(x)U(x), \quad (A-1)$$

al substituir, las expresiones (11) se transforman en

$$T(x) = C(x)^2 W(x) Z(x)'', \quad (A-2)$$

$$T(x)'' + \omega\Omega W(x)Z(x) = 0, \quad (A-3)$$

donde

$$C(x) = C_0(1 + \alpha x). \quad (A-4)$$

Despejando $Z(x)$ de (A-3) y substituyendo en (A-2), se llega a la siguiente ecuación para $T(x)$

$$C(x)^2 W(x) [T(x)'' W(x)^{-1}]' + \omega\Omega T(x) = 0. \quad (A-5)$$

Definimos ahora una nueva función $\mathfrak{I}(x)$, tal que se cumple

$$T(x) = W(x)^{1/2} \mathfrak{I}(x), \quad (A-6)$$

substituyendo en (A-5) encontramos una expresión para $\mathfrak{I}(x)$

$$\mathfrak{I}(x)'' - \mathfrak{I}(x) [W(x)^{1/2} (W(x)^{-1/2})'' + \frac{\omega\Omega}{C(x)^2}] = 0. \quad (A-7)$$

Dada la definición del ancho $W(x)$, el término $(W(x)^{-1/2})''$ es cero, por lo que finalmente obtenemos

$$\mathfrak{I}(x)'' - \mathfrak{I}(x)\omega\Omega = 0, \quad (A-8)$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo grado con coeficiente variable. La solución de (A-8) es

$$\xi(x) = (1 + \alpha x)^{1/2} \sin \theta, \quad (\text{A-9})$$

donde

$$\theta = k\alpha^{-1} \ln(1 + \alpha x),$$

$$k^2 = \omega \Omega C_0^{-2} - \frac{1}{4}\alpha^2. \quad (\text{A-10})$$

A partir de estas expresiones se pueden obtener, mediante álgebra elemental, las soluciones para el sistema (11), que son las ecuaciones (8) y (9).